

**WELLINGTON MEIRA DANCINI DOS SANTOS**

**MÉTODO DE MONTE CARLO APLICADO À TRANSFERÊNCIA  
RADIATIVA EM MEIOS ANISOTRÓPICOS**

**CURITIBA  
NOVEMBRO 2008**

**WELLINGTON MEIRA DANCINI DOS SANTOS**

**MÉTODO DE MONTE CARLO APLICADO À TRANSFERÊNCIA  
RADIATIVA EM MEIO ANISOTRÓPICO**

**Trabalho apresentado como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, no programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica na Pontifícia Universidade Católica do Paraná.**

**Orientador: Prof. Luís Mauro Moura**

**CURITIBA  
NOVEMBRO 2008**

## AGRADECIMENTOS

À Deus, a minha esposa Juliana que sempre esteve ao meu lado.

Aos meus pais, Vaterlon e Wanderly, meus irmãos José Humberto e Syrlaine, parentes e amigos, pelo incentivo e apoio.

Aos meus professores de ensino fundamental e médio.

Aos professores de Graduação, Especialização e do Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da PUCPR. Em especial ao meu orientador, o professor Dr. Luís Mauro Moura, pela paciência nos ensinamentos.

Aos colegas do Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica da PUCPR, pelo companheirismo.

À Pontifícia Universidade Católica do Paraná, por ter concedido bolsas de estudos na Graduação, Especialização e Mestrado.

E a todos aqueles que participaram de uma maneira ou outra na realização do meu trabalho.

Muito obrigado!!!

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma análise da solução da Equação da Transferência Radiativa utilizando o método de Monte Carlo para meios com geometria unidimensional e a incidência de um feixe colimado perpendicular à superfície e com um ângulo de divergência  $\theta_0$ . O meio é considerado frio. Considera-se espalhamento anisotrópico sendo implementado um algoritmo especial para este tratamento. Analisam-se os parâmetros que influenciam na precisão do método, tais como espessura óptica, albedo, número de pacotes e número de volumes. Estas análises são comparadas à soluções obtidas pelo método das Ordenadas Discretas.

**Palavras-chave:** transferência radiativa, método de Monte Carlo, meio anisotrópico.

## ABSTRACT

This work presents an analysis of the Radiative Transfer Equation using the Monte Carlo. A cold media and one-dimensional slab geometry with a normal collimated beam incidence onto the media are considered. Anisotropic scattering is specially analyzed and an algorithm is improved for this purpose. Optical thickness, Albedo, number of bundles and number of control volumes are investigated. A comparative analysis with the Discrete Ordinate Method is also performed.

**Key- words:** radiative transfer, Monte Carlo method, anisotropic media

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Comparação do Método de Monte Carlo com soluções de referência para um problema de transferência radiativa em gases.....	2
Figura 2	Espectro de ondas eletromagnéticas.....	5
Figura 3	Perdas existentes num feixe de radiação térmica ao atravessar um meio semitransparente sem espalhamento.....	7
Figura 4	Processo de espalhamento em uma partícula.....	8
Figura 5	Exemplo de meios com espalhamento de radiação.....	9
Figura 6	Definição dos co-senos diretores $(\mu, \xi, \eta)$ .....	12
Figura 7	Sistema de coordenada unidimensional.....	13
Figura 8	Um quarto da área de um círculo.....	19
Figura 9	Gráfico gerado a partir de 10.000 pontos.....	
Figura 10	Gráfico com 100.000 pontos gerados e a função $p(x)=x^4$ .....	23
Figura 11	Difusão de uma partícula esférica em função do diâmetro, $n = (8,4 \cdot 10^{-7} i + 1.754)$ e $\lambda = 3$ .....	25
Figura 12	Função de fase de Henyey-greenstein.....	26
Figura 13	Função anisotrópica.....	26
Figura 14	Análise dos MOD e MMC com a solução analítica com albedo $\omega = 1$	28
Figura 15	Relação da reflectância hemisférica e transmitância hemisférica para o MMC e MOD	29
Figura 16	Relação da reflectância hemisférica e transmitância hemisférica para o MMC e MOD com albedo unitário para a função anisotrópica.....	30
Figura 17	Tempo computacional do MMC e MOD com albedo unitário.....	31
Figura 18	Relação da reflectância hemisférica e transmitância hemisférica para o MMC e MOD com albedo $\omega = 0,5$ para a função anisotrópica.....	32
Figura 19	Tempo computacional do MMC e MOD com albedo $\omega = 0,5$ .....	33
Figura 20	Relação da reflectância hemisférica e transmitância hemisférica para o MMC e MOD com albedo $\omega = 0,1$ para a função anisotrópica.....	33
Figura 21	Tempo computacional do MMC e MOD com albedo $\omega = 0,1$ .....	34

## SUMÁRIO

RESUMO .....	4
ABSTRACT .....	5
1 INTRODUÇÃO.....	8
CAPÍTULO 2 .....	12
2 A TRANSFERÊNCIA RADIATIVA .....	12
2.1 Introdução.....	12
2.2 Definição e leis da radiação eletromagnética .....	12
2.2.1 Radiação térmica .....	13
2.2.2 Microondas, ondas de rádio e telefonia.....	13
2.2.3 Raios-X.....	13
2.2.4 Raio $\gamma$ .....	14
2.2.5 Raios Cósmitos .....	14
2.3 Interação Radiação-Matéria.....	14
CAPÍTULO 3 .....	17
3 A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA.....	17
CAPÍTULO 4 .....	20
4 MÉTODOS NUMÉRICOS UTILIZADOS PARA A SOLUÇÃO DA ETR.....	20
4.1 Método das Ordenadas Discretas .....	20
4.2 Método de Monte Carlo.....	23
4.2.1 Meio somente absorvedor.....	27
4.2.2 Meio com espalhamento isotrópico.....	28
CAPÍTULO 5 .....	29
5 ANÁLISE DE RESULTADOS.....	29
5.1 Espalhamento Anisotrópico.....	30
5.2 Resultados.....	33
CONCLUSÃO.....	41
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	42

## CAPÍTULO 1

### 1 INTRODUÇÃO

Atualmente, diversos pesquisadores estão trabalhando na área térmica, mais precisamente na transferência de calor por radiação. As pesquisas em transferência de calor por radiação têm diversas aplicações, tais como: secagem e preparação de alimentos, caldeiras, fornos elétricos, motores de combustão, construção civil, engenharia elétrica e muitas outras situações que envolvem a radiação térmica. Vários trabalhos publicados recentemente utilizam-se de simulações numéricas para representar ou calcular o comportamento de um sistema em uma determinada escala, pois as simulações permitem compreender o processo de transferência de calor por radiação e estudar parâmetros que influenciam o processo. Neste trabalho, será descrito o método de ordenadas discretas utilizado por Moura (1998) para a resolução numérica da equação de transferência de calor (ETR) aplicado a um volume de controle e será implementado o método de Monte Carlo (MMC) para simulação de meios anisotrópicos.

O método de Monte Carlo utiliza o modelo de simulação estocástico no qual conceitos de probabilidade são aplicados a fenômenos físicos para a transferência radiativa em várias situações, bem como a emissão, reflexão e absorção do fóton. Quando aplicado no fóton conseguimos descobrir o sentido, se ele será absorvido ou espalhado, refletido ou transmitido, gerando números aleatórios para serem comparados com funções de probabilidade.

Esse método tem aplicações em áreas do conhecimento, como na Medicina, na Física, em Matemática, em Estatística e principalmente na Engenharia.

Na medicina foi aplicado o método de Monte Carlo para simulação em meio anisotrópico por Prahl *et al* (1989) para a incidência do laser em tecido humano. Uma vez que o fóton é lançado, ele é movido e pode ser espalhado, absorvido, refletido inteiramente ou transmitido fora do tecido. O fóton será repetidamente movido até que ele escape de ser absorvido pelo tecido. Se o fóton escapar do tecido, a reflexão ou a transmissão do fóton serão gravadas. Se o fóton for absorvido, a posição do fóton absorvido também será gravada.

Outra aplicação em medicina foi a utilização do método de Monte Carlo para simulação de fluorescência no interior da pele humana (Churmakov *et al.*, 2003). Esse modelo simula o tecido da pele humana que utiliza um composto químico imita o invólucro da fibra de colágeno da derme no qual os resultados podem prever a distribuição da fluorescência e autofluorescência dentro da pele humana.



Foi apresentado por Wu, Chih e Shang (2000) resultados de um problema transiente onde se considerou um meio que absorve e espalha radiação na forma anisotrópica. O método utilizado foi o de Monte Carlo com geometria unidimensional e bidimensional.

O método de Monte Carlo juntamente com uma aproximação P1 foi aplicado por Marakis, Papapavlou e Karakas (2000) na transferência radiativa em fornos.

Tess e Dupoirieux *et al* (2003) aplicaram o MMC ao modelo de transferência radiativa em fuligem de chamas (gás) para meio considerado turbulento, no qual o método mostrou-se adequado a essa aplicação e apresentou um baixo tempo computacional.

Modest (2003) apresentou uma comparação entre o método de Monte Carlo com outras soluções de referência para um problema sem espalhamento mas com a participação de gases. Ele demonstrou que o Método de Monte Carlo apresenta uma discrepância maior com o aumento da espessura óptica do meio.

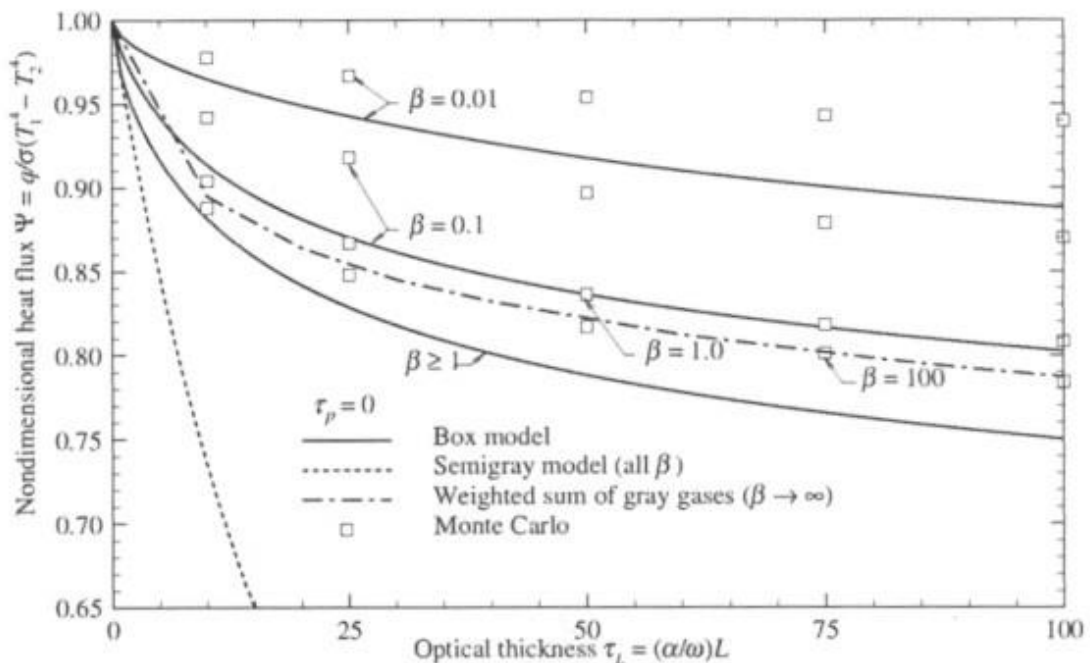


Figura 01 – Comparação do Método de Monte Carlo com soluções de referência para um problema de transferência radiativa em gases (Modest, 2003).

Na aviação onde alguns aeroportos utilizam-se de aterrissagens paralelas foi realizada uma modelagem dinâmica de aeronaves em operação de aproximação UCSPA (*Ultra Closely Spaced Parallel Approaches*). Nessa modelagem consideraram um meio de incertezas onde os termos são distribuições de probabilidade no qual utilizaram o MMC para simulação (Ogata 2003).

Guimarães *et al.* (2005) aplicou o MMC para simular a dosimetria de fótons na monitoração individual externa, ou seja qual a dose de radiação ionizante que uma pessoa exposta a um campo de radiação recebe. Neste trabalho foram utilizados monitores de radiação contendo detectores termoluminescentes onde se empregou a ferramenta GEANT4 juntamente com o MMC. Na implementação do problema eles consideraram aproximações no modelo para avaliar os resultados experimentais e teóricos considerando a densidade e auto-atenuação de luz nesse modelo Físico. Como resultado, eles conseguiram modelar uma curva de dependência de energia onde foram feitas várias considerações, mas eles atribuíram ao MMC como uma poderosa ferramenta simulações para esse modelo de problema Físico.

Setti *et al.* (2006) apresentaram um protótipo de um sistema tomográfico com feixe de partículas carregadas que tem como objetivo utilizar a tomografia por feixe de prótons para a localização de tumor e o posicionamento do paciente, utilizando o método de Monte Carlo para simulação.

P. Boulet *et al.* (2006) consideraram uma caixa cúbica um meio anisotrópico com espalhamento médio irradiado por uma fronteira com emissões difusas e as funções Henyey-Greenstein e Mie para simulação nesse volume de controle. Quando esse modelo é aplicado ao MOD combinado à função de fase proposta por Kim e Lee, os resultados fornecidos são precisos apenas para a assimetria com albedo baixo, mas quando o albedo aumenta ocorrem modificações nos valores da discretização da função de fase resultando numa subestimação no efeito de atenuação por espalhamento, ou seja, existe um erro e esse erro pode ser menor quando o MOD é combinado ao método Delta-Eddington da função de fase.

J. Petrasch *et al.* (2006) utilizaram o MMC para calcular o coeficiente de extinção e de espalhamento de uma amostra digitalizada em 3D de cerâmica, considerada um meio poroso com geometria isotrópica. A solução analítica será comparada com os resultados obtidos por MMC e validados.

R. Costa *et al.* (2007) utilizaram o MMC juntamente com os softwares Fantomas (Vieira *et al.*, 2005) e DIP (Digital Image Preprocessing) (Vieira *et al.*) para a elaboração de imagens sintéticas do corpo humano através de simulações que empregaram o MMC. O objetivo deles foi a geração de imagens sintéticas de um determinado paciente onde elas podem auxiliar o técnico de radiologia no planejamento ou não de uma sessão de radiação, ou seja, quando o técnico tiver posse dessas imagens ele pode não optar pela sessão de radiação, assim ele estaria evitando que o paciente fosse exposto a sessão de radiação.

Neste trabalhado, apresenta-se no capítulo 2 uma síntese do fenômeno de transferência radiativa e no capítulo 3 realiza-se uma análise da Equação da Transferência Radiativa (ETR).

No capítulo 4 apresentam-se os métodos de solução da ETR utilizados neste trabalho, sendo descritos os métodos de Monte Carlo e de Ordenadas Discretas. No capítulo 5 são finalmente apresentados os resultados obtidos para um meio com geometria unidimensional considerando uma incidência de um feixe colimado perpendicular à superfície de uma placa plana. Considera-se o meio frio e com espalhamento anisotrópico sendo implementado um algoritmo especial para este tratamento. Analisam-se os parâmetros que influenciam na precisão do método, tais como espessura óptica, albedo, número de pacotes e número de volumes. Apresenta-se também uma comparação de resultados do método de Ordenadas Discretas obtidos por Moura (1998).

## CAPÍTULO 2

### 2 A TRANSFERÊNCIA RADIATIVA

#### 2.1 Introdução

Nos processos de transferência de calor, a radiação térmica tem importante participação. Um simples exemplo dessa transferência de calor é a radiação solar que está presente no dia a dia para aquecer o planeta. A transferência de calor pode ocorrer através da condução, convecção e radiação. O processo de radiação ocorre através de ondas eletromagnéticas, nas quais um corpo emite radiação em função de sua temperatura sem a intervenção de qualquer meio, o que não ocorre nos processos de condução e convecção. Situações de aplicabilidade de radiação são diversos. Como exemplos podemos citar a indústria aeroespacial, a arquitetura com projetos de iluminação e conforto térmico, combustão, física e nas engenharias, como já relatado nesse trabalho.

No estudo da transferência radiativa não pode esquecer de mencionar as grandezas, ou seja, as características e as propriedades de um corpo (emissor ou receptor) em relação as suas iterações, pois nem sempre essas características e propriedades são conhecidas. Em função disso será apresentado um breve resumo das propriedades radiativas e suas formas de determinação que estão disponíveis na literatura.

#### 2.2 Definição e leis da radiação eletromagnética

Um corpo<sup>1</sup> emite radiação sobre o efeito de diversas excitações. A radiação emitida pode ser representada através de ondas eletromagnéticas, Fig. (2).

O espectro de energia (ondas eletromagnéticas) pode ser descrito, ou melhor, classificado e dividido de acordo com o seu comprimento de onda característico. O interesse nesse trabalho é a radiação térmica que engloba uma faixa de comprimento de onda.

---

<sup>1</sup> Alguns autores usam a palavra superfície, mas este termo não está correto, pois somente a matéria tem a propriedade de emitir energia. Entretanto, a radiação térmica pode ser gerada numa camada muito fina próxima à parede (da ordem do livre caminho médio das partículas).

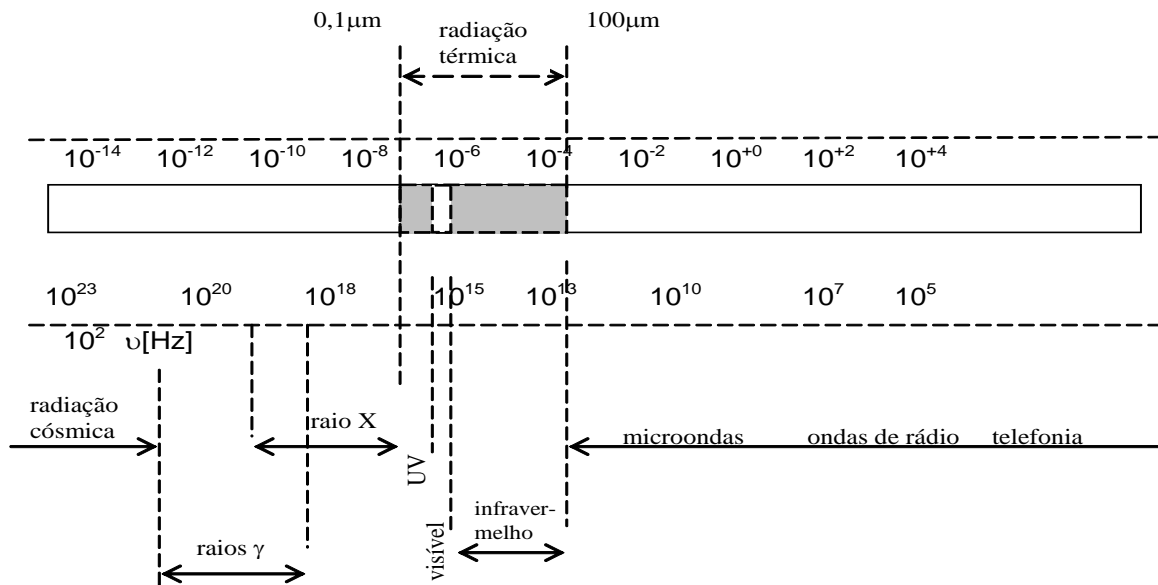


Figura 2- Espectro de ondas eletromagnéticas. (Brewster, 1992)

### 2.2.1 Radiação térmica

Radiação térmica é gerada por um corpo em função de sua temperatura. Sem a intervenção de qualquer meio é denominado radiação térmica. No espectro a radiação situa-se na faixa de  $0,1$  a  $100 \mu\text{m}$  subdividindo-se em três fases, sendo elas: *ultravioleta* (UV), na faixa de  $0,1$  a  $0,38 \mu\text{m}$ , a fase *visível* que fica entre  $0,38$  a  $0,76 \mu\text{m}$  onde tem a maior intensidade de energia do espectro solar e a última fase, o *infravermelho* (IR) situado na faixa  $0,76$  a  $100 \mu\text{m}$  do espectro.

### 2.2.2 Microondas, ondas de rádio e telefonia

São ondas com baixa frequência, utilizadas no aquecimento de alimentos e na transmissão de dados (sinais).

### 2.2.3 Raios-X

São ondas de alta frequência e de alta penetração, bastante utilizadas em laboratórios de metrologia e medicina.

### 2.2.4 Raio $\gamma$

Ondas com frequências maiores que as dos Raios-X sendo perigosas aos seres vivos.

### 2.2.5 Raios C3smicos

Altíssimas frequências que são produzidos por estrelas.

## 2.3 Interação Radiação-Mat3ria

A radiação t3rmica 3 gerada pela emiss3o de ondas eletromagn3ticas de um corpo a uma determinada temperatura. Corpos ideais (corpo negro) s3o representados pela equa3o de Stefan-Boltzmann, conforme a Eq. (1), que define a intensidade total emitida por um corpo em fun3o somente de sua temperatura, sendo a constante de Stefan-Boltzmann,  $\sigma = 5,670051 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4$ . Corpos reais possuem uma emiss3o inferior ao corpo negro podendo variar rapidamente para comprimentos de ondas muito pr3ximos (os gases por exemplo).

$$q = \sigma T^4 \quad (1)$$

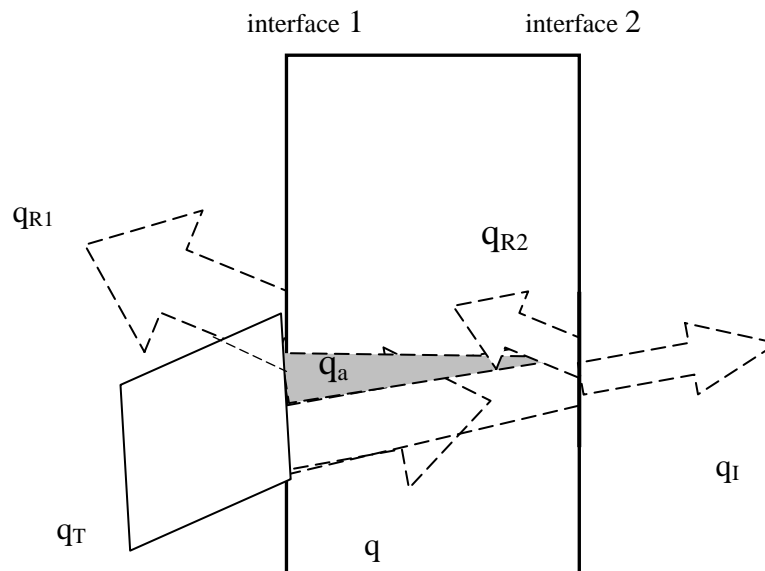
Quando uma onda eletromagn3tica atravessa (ou incide) um meio “homog3neo”, tr3s fen3menos f3sicos podem ocorrer: reflex3o, absor3o ou transmiss3o Fig. (3). Esses fen3menos s3o fun3o3es do comprimento de onda incidente e em geral da temperatura do corpo.

A *reflex3o* consiste na mudan3a de dire3o da onda na interface do corpo em quest3o. Para interfaces lisas (polidas) a reflex3o 3 do tipo especular. Para interfaces rugosas a reflex3o tem um componente especular (podendo ser nula) e outra difuso.

A onda eletromagn3tica que penetra no meio ser3 completamente ou parcialmente transmitida. Se a incid3ncia for inclinada, esta onda mudar3 de dire3o (lei da *refra3o*). Este fen3meno pode ser descrito como fun3o somente do 3ngulo de incid3ncia e do 3ndice de refra3o do meio (equa3o de Snell). Uma parte desta onda eletromagn3tica transmitida pelo meio poder3 ser absorvida, sendo este fen3meno denominado de *absor3o*. A *absor3o* ocorre devido 3 facilidade do material (3tomos ou part3culas constituintes) de dissipar esta energia

através do aumento da vibração dessas partículas (elevação de temperatura). Entretanto, outros processos podem ocorrer, como a fluorescência ou a fosforescência. Nesta etapa, existe a transformação da onda eletromagnética em outra forma de energia, por exemplo, térmica.

Num meio com duas interfaces Fig. (3), como um vidro ou folha plástica, o processo de reflexão ocorre inúmeras vezes devido às múltiplas reflexões existentes nas interfaces.



- $q_T$ : Fluxo de calor incidente
- $q_{R1}$ : Fluxo de calor refletido na interface 1
- $q_a$ : Fluxo de calor absorvido pelo meio
- $q_{R2}$ : Fluxo de calor refletido na interface 2
- $q_I$ : Fluxo de calor resultante no outro lado da parede
- $q_t$ : Fluxo de calor transmitido

Figura 3: Perdas existentes num feixe de radiação térmica ao atravessar um meio semitransparente sem espalhamento (Moura, 2003).

Em meios heterogêneos ocorre outro fenômeno físico que torna o estudo destes materiais muito mais complexo. O espalhamento ('scatter') ocorre pela mudança de direção da onda no meio pelos processos de refração, difração, transmissão e reflexão, Fig. (4). Como exemplo pode-se citar os gases constituídos por partículas assimétricas ( $H_2O$ ,  $CO_2$ , etc.), ar e líquidos com partículas em suspensão, sólidos constituídos por grãos ou fibras, etc..., Fig. (5).

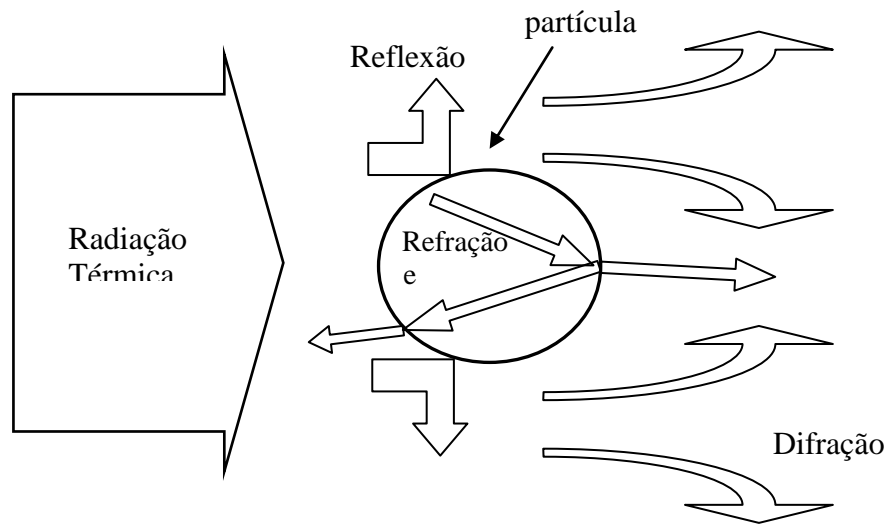
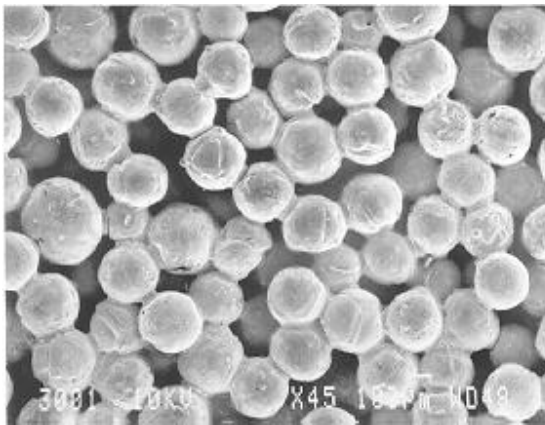
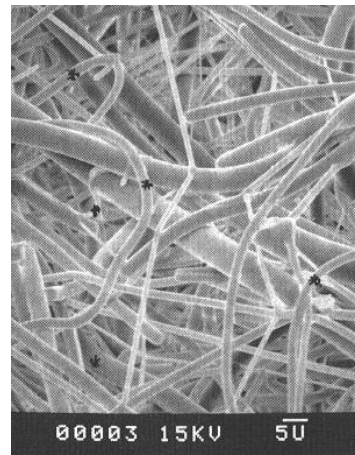


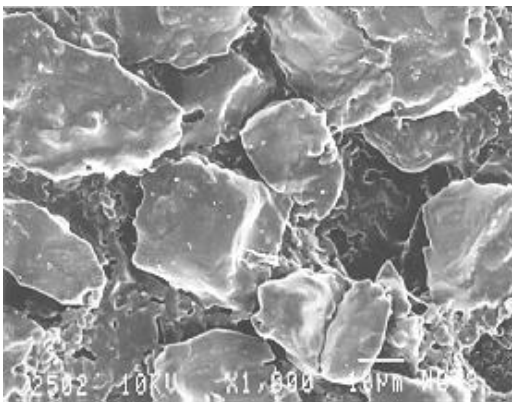
Figura 4: Processo de espalhamento em uma partícula. (Moura, 2003)



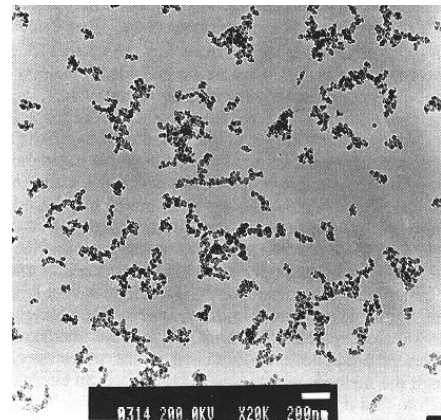
Partículas metálicas aquecidas a temperatura elevadas.



Lã de vidro (isolante térmico).



Partículas de alumina (isolante térmico utilizado em paredes de fornos)



Cinzas em suspensão

Figura 5 - Exemplo de meios com espalhamento de radiação. (Moura, 1998)



## CAPÍTULO 3

### 3 A EQUAÇÃO DE TRANSFERÊNCIA RADIATIVA

Na transferência de calor por radiação é estudada a solução da Eq. (2) de Transferência Radiativa (ETR), considerando todas as propriedades e características para um determinado meio. A partir da resolução da ETR pode-se calcular as trocas de energia entre interfaces (paredes, fronteiras) considerando um meio participante (meio semitransparente – mst). A ETR descreve a variação da intensidade radiativa espectral  $I_\nu$  (num ângulo sólido  $\Omega$  em função da espessura ótica  $\tau$ ). Esta equação foi obtida para um meio pseudocontínuo em relação à transferência radiativa existente num material disperso real.

Para a obtenção da ETR efetua-se uma frequência  $\nu$ , um balanço dos mecanismos físicos de interação radiação/meio por um feixe de radiação propagando-se através de um meio participante resultando na expressão da ETR monocromática:

$$\frac{1}{(\sigma_{av} + \sigma_{dv})} \Omega \nabla I_\nu(\vec{s}, \vec{\Omega}) + L_\nu(\vec{s}, \vec{\Omega}) = \left(1 - \frac{\sigma_{dv}}{(\sigma_{av} + \sigma_{dv})}\right) I_\nu^o(T) + \frac{1}{4\pi} \frac{\sigma_{dv}}{(\sigma_{av} + \sigma_{dv})} \int_{\Omega'=4\pi} p_\nu(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) I_\nu(\vec{s}, \vec{\Omega}') d\Omega' \quad (2)$$

onde  $I_\nu$  é a intensidade radiativa monocromática,  $I_\nu^o$  é do corpo negro,  $\vec{s}$  é a variável de posição função do sistema de coordenadas utilizado,  $\vec{\Omega}$  é a variável direcional,  $\sigma_{av}$  é o coeficiente de absorção espectral,  $\sigma_{dv}$  é o coeficiente de espalhamento espectral e  $p_\nu(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})$  é a função de fase espectral. A intensidade total do corpo negro é dada pela fórmula:

$$I^o = \frac{n^2 \sigma T^4}{\pi} \quad (3)$$

onde  $\sigma$  é a constante de Stefan-Boltzmann e  $n$  é o índice de refração do meio equivalente a um meio homogêneo.

A ETR pode ser escrita na sua forma adimensional. Neste caso os termos da Eq. (2) serão substituídos por:

$$\tau_\nu = \beta_\nu x \quad \omega_\nu = \frac{\sigma_{dv}}{\sigma_{dv} + \sigma_{av}} = \frac{\sigma_{dv}}{\beta_\nu} \quad (4)$$

onde  $\beta_\nu$  é o coeficiente de extinção espectral,  $\tau_\nu$  é a coordenada óptica na direção do eixo  $x$ , sendo que  $\tau_\nu = \beta_\nu x$  é um coeficiente de extinção que não varia com a posição e  $\omega_\nu$  é o albedo. Neste trabalho, não será considerado o termo de emissão própria do meio, sendo o termo  $I^o$  desprezado.

O índice  $\nu$  representa a frequência e será omitido para simplificar a escrita. A radiação percorre uma distância no interior do meio e este percurso deve ser projetado sobre um sistema de coordenadas. O sistema de coordenadas cartesianas e seus co-senos diretores respectivos  $(\mu, \xi, \eta)$  são mostrados na Fig. (6). As equações dos ângulos da direção  $\vec{\Omega}$  em relação aos eixos são relacionadas nas equações (4) a (6). As equações (5) e (6) definem o ângulo  $\theta_p$  formado entre duas direções  $(\vec{\Omega}', \vec{\Omega})$  a partir dos co-senos diretores. O ângulo correspondente a  $\mu$  é o ângulo polar e o ângulo  $\phi$  é o ângulo de azimute.

$$\begin{cases} \mu = \cos\theta \\ \eta = \cos\alpha_y = \sin\theta \cos\phi \\ \xi = \cos\alpha_z = \sin\theta \sin\phi \end{cases} \quad d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi \quad (5)$$

$$\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega} = \cos\theta_p = \mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\phi - \phi') \quad (6)$$

$$\cos\theta_p = \mu_p = \mu\mu' + \eta\eta' + \xi\xi' \quad (7)$$

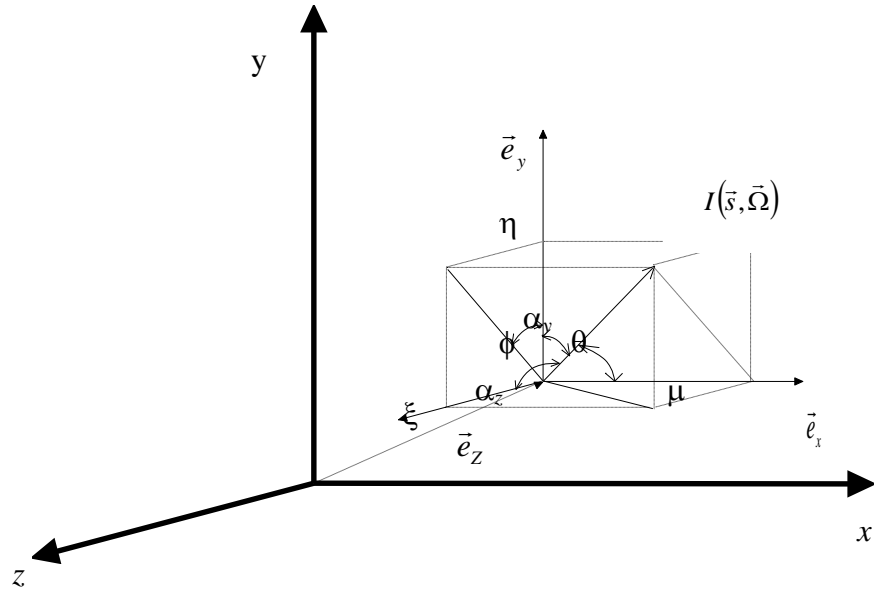


Figura 6: Definição dos co-senos diretores  $(\mu, \xi, \eta)$ . (Moura, 1998)

Para uma geometria unidimensional cartesiana, Fig. (7), a ETR simplifica-se:

$$\frac{dI(s, \vec{\Omega})}{ds} + I(s, \vec{\Omega}) = \frac{\omega}{4\pi} \int_{\Omega=4\pi} p(\vec{\Omega}' \cdot \vec{\Omega}) I(s, \vec{\Omega}') d\Omega' \quad (8)$$

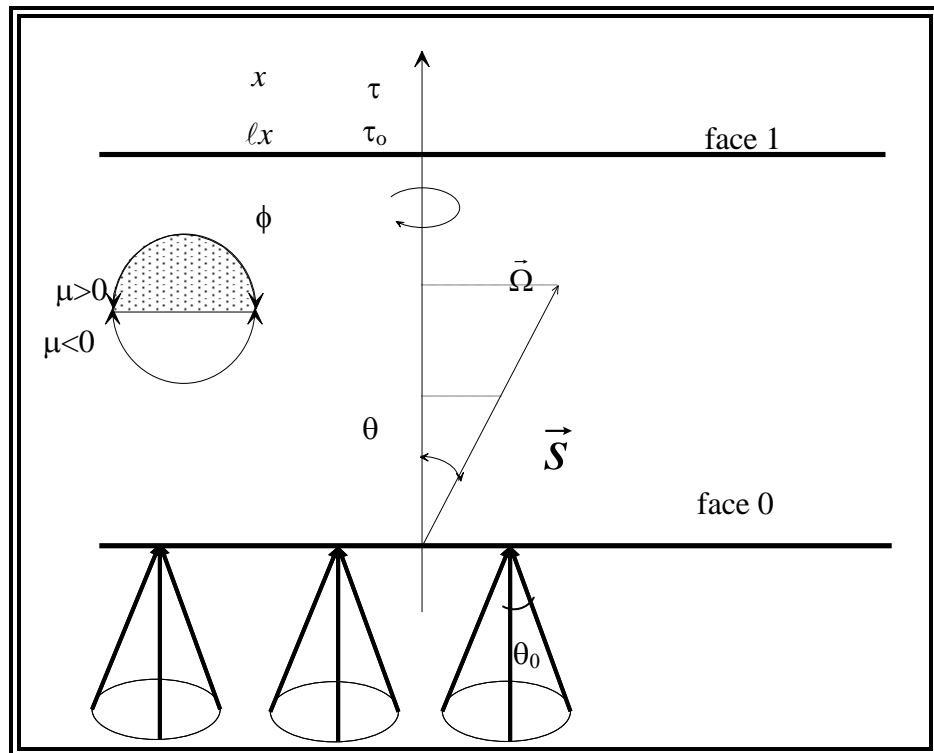


Figura 7: Sistema de coordenada unidimensional (Moura 1998).

Onde  $\theta_0$  é o ângulo de divergência do feixe incidente e  $\tau_0$  é a espessura óptica do meio.

## CAPÍTULO 4

### 4 MÉTODOS NUMÉRICOS UTILIZADOS PARA A SOLUÇÃO DA ETR

A equação de transferência radiativa tem sido muito estudada analiticamente e numericamente em problemas de transferência de calor. Ultimamente, soluções numéricas têm contribuído significativamente no desenvolvimento de pesquisas em diversas áreas do conhecimento, principalmente depois do surgimento de poderosas máquinas e novos métodos computacionais.

No desenvolvimento de trabalhos podem ocorrer algumas simplificações para facilitar a solução de problemas numéricos, podendo ser os resultados satisfatórios para a condição real do problema analisado. Como exemplo, podemos simplificar as características do meio considerando-o como meio homogêneo, espalhador isotrópico, geometria unidimensional, etc.

Alguns métodos são muito utilizados para simulações de problemas, como o método das ordenadas discretas (MOD) (Chandrasekhar, 1960) o método dos volumes finitos (MVF) (Patanka, 1980) o método de Monte Carlo (MMC) entre outros. O MMC é empregado principalmente na física, medicina e engenharia, onde apresenta boas aproximações para a solução de problemas com geometria mais complexa e em meios onde o índice de espalhamento é altíssimo. Para meios que apresentam geometria mais simplificada, o MOD comparado ao MMC tem seu tempo computacional bem menor, o que não ocorre para meios de geometria complexa.

Quando um determinado problema tem solução analítica, essa solução sempre será utilizada como solução referência para análise comparativa dos resultados obtidos pelos métodos numéricos.

Neste capítulo será brevemente apresentado o método das Ordenadas Discretas e o método de Monte Carlo para posterior comparação dos métodos.

#### 4.1 Método das Ordenadas Discretas

Método utilizado por Chandrasekhar (1960) para a solução de problemas de astrofísica. Em seguida, Carlson e Lathrop (1968) desenvolveram uma solução aplicada à equação de transporte de nêutrons. Atualmente, muitos trabalhos são encontrados na literatura utilizando ou validando o método das Ordenadas Discretas (MOD) na solução de problemas devido a sua facilidade em tratar problemas de transferência de calor.

No trabalho apresentado por Moura (1997 e 1998), a ETR foi resolvida numericamente pelo método das Ordenadas Discretas aplicado a volumes de controle e será comparado neste trabalho com o método de Monte Carlo. Vários trabalhos iniciam a sua formulação a partir da Equação da Transferência Radiativa (ETR) apresentada por Chandrasekhar (1968) e por Özisik (1973).

A solução do MOD é constituída de duas etapas, onde a primeira é a discretização angular e a segunda a discretização espacial.

Na discretização angular temos as integrações presentes na ETR as quais podem ser aproximadas por integrais gaussianas:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{j=-m}^m w_j f(x_j) \quad (9)$$

Os termos  $f(x_j)$  são chamados de ordenadas discretas e  $w_j$  são fatores que ponderam a soma em  $j$ , tal que:

$$w_j = \frac{1}{P_m'(x_j)} \int_{-1}^1 \frac{P_m(x)}{x - x_j} dx \quad (10)$$

onde  $x_j$  são raízes dos polinômios de Legendre.

A discretização espacial é realizada subdividindo-se o domínio em um conjunto de volumes justapostos (volumes de controle), a fim de poder resolvê-lo por um método iterativo. A equação obtida para descrever a variação das intensidades radiativas no interior de um volume de controle deve conservar a energia (Moura, 1997).

Para facilitar a solução da ETR, em geral, considera-se a simetria azimutal. Neste caso, as variáveis tornam-se independentes do ângulo de azimute,  $\phi$  e são constantes em torno de um cone de ângulo sólido  $\Omega$  centrado no eixo  $x$ , Fig. (7).

Neste caso:

$$I(s, \vec{\Omega}) = I(x, \mu, \phi) = I(x, \mu) \quad (11)$$

$$\int_{\Omega=4\pi} \dots d\Omega = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \sin\theta d\theta d\phi = 2\pi \int_{-1}^1 \dots d\mu$$

A ETR, Eq. (8), torna-se:

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} + I(\tau, \mu) = \frac{\omega}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu') p(\mu', \mu) d\mu' \quad (12)$$

A quadratura para o intervalo  $[0,1]$ , Eq. (13), pode ser aplicada para substituir o termo integral da Eq. (12):

$$\int_0^1 p(\mu', \mu) I(\tau, \mu') d\mu' + \int_0^1 p(-\mu', \mu) I(\tau, -\mu') d\mu' = \sum_{i=1}^{Nd/2} w_i [p(\mu_i, \mu) I(\tau, \mu_i) + p(-\mu_i, \mu) I(\tau, -\mu_i)] \quad (13)$$

Substituindo na Eq. (12):

$$\mu_j \frac{\partial I(\tau, \mu_j)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu_j) = \frac{\omega}{2} \left[ \sum_{i=1}^{Nd/2} w_i [p(\mu_i, \mu_j) I(\tau, \mu_i) + p(-\mu_i, \mu_j) I(\tau, -\mu_i)] \right] \quad (14)$$

Obtém-se assim o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_j \frac{\partial I(\tau, \mu_j)}{\partial \tau} + I(\tau, \mu_j) = \\ \frac{\omega}{2} \left[ \sum_{i=1}^{Nd/2} w_i [p(\mu_i, \mu_j) I(\tau, \mu_i) + p(-\mu_i, \mu_j) I(\tau, -\mu_i)] \right] \\ -\mu_j \frac{\partial I(\tau, -\mu_j)}{\partial \tau} + I(\tau, -\mu_j) = \\ \frac{\omega}{2} \left[ \sum_{i=1}^{Nd/2} w_i [p(\mu_i, -\mu_j) I(\tau, \mu_i) + p(-\mu_i, -\mu_j) I(\tau, -\mu_i)] \right] \end{array} \right. \quad (15)$$

com  $1 \leq j \leq Nd/2$  e  $\mu_j \geq 0$ .

Esse conjunto de equações diferenciais pode ser resolvido analiticamente (quando possível) ou por métodos numéricos.

A relação das intensidades radiativas entre as faces e o centro do volume é dada pela seguinte equação:

$$I_{i+1/2,j} = f I_{i+1,j} + (1-f) I_{i,j} \quad (16)$$

a partir da Eq. (15), obtém-se uma equação discretizada na seguinte forma:

$$I_{i+1/2,j} = \frac{1}{(1+f\alpha_j)} [f\alpha_j S_{i+1/2,j} + I_{i,j}] \quad (17)$$

sendo

$$\alpha_j = \frac{\Delta \tau_{i+1/2}}{\mu_j} \quad (18)$$

$$S_{i+1/2,j} = \frac{\omega}{2\beta} \left[ \sum_{n=1}^{N/2} w_n (p_{nj} I_{i+1/2,n} + p_{-nj} I_{i+1/2,-n}) \right] \quad (19)$$

desta forma,  $I_{i+1,j}$  é calculado a partir das equações (19) e (21):

$$I_{i+1,j} = \frac{1}{(1 + f\alpha_j)} \left[ f\alpha_j S_{i+1/2,j} + (1 - \alpha_j + f\alpha_j) I_{i,j} \right] \quad (20)$$

onde o índice  $i+1/2$  representa o centro do volume situado entre as faces de índices  $i$  e  $i+1$ . Na Eq. (16),  $I_{i,j}$  é um valor conhecido e calcula-se  $I_{i+1/2,j}$  através de várias iterações, atualizando o termo fonte  $S_{i+1/2,j}$ . As ponderações são representadas por  $w_n$  e são associadas à direção  $\mu_n$ .

O método de solução é progressivo. Conhecendo-se a intensidade radiativa numa face do volume  $I_{i,j}$  e utilizando a Eq. (16), calcula-se a intensidade radiativa no centro do volume e então a intensidade noutra face  $I_{i+1,j}$ . Para as direções positivas ( $\mu > 0$ ) o cálculo é realizado no sentido crescente dos volumes  $i$ . Para as direções negativas ( $\mu < 0$ ) o sentido é inverso e consideram-se as condições limites da outra face do meio.

Para um valor de  $f = 1$  (formulação *upwind*) as intensidades radiativas calculadas são sempre positivas. Para valores de  $f$  inferiores a 1 deve-se escolhê-lo de maneira a evitar a obtenção de intensidades radiativas negativas. Desta maneira, as seguintes condições devem ser respeitadas:

$$\alpha_j S_{i+1/2,j} + (1 - \alpha_j + f\alpha_j) I_{i,j} > 0 \quad (21)$$

$$f \geq 1 - \frac{S_{i+1/2,j}}{I_{i,j}} \frac{1}{\alpha_j} \quad (22)$$

O termo fonte  $S_{i+1/2,j}$  é um valor positivo e estabiliza a Eq. (17) evitando a obtenção de intensidades radiativas negativas. Quando a espessura ótica ( $\tau_{i+1/2}$ ) aumenta,  $\alpha_j$  também aumenta e valores de  $f$  mais próximos de 1 devem ser utilizados.

#### 4.2 Método de Monte Carlo

O Método de Monte Carlo (MMC) é um método estatístico muito utilizado em simulações (estocásticas) com diversas aplicações na engenharia de tráfego, física, matemática, engenharia mecânica e elétrica entre outras. Uma das finalidades do método de

Monte Carlo é a obtenção de aproximações numéricas em funções complexas através da geração de números aleatórios.

Esse método recebe esse nome devido à famosa roleta de Monte Carlo, no Principado de Mônaco. O desenvolvimento do método foi no ano de 1944 e utilizado por Von Neumann, Ulam e Fermi como ferramenta de pesquisa para o desenvolvimento da bomba atômica.

O método de Monte Carlo tem como base a geração de números aleatórios utilizando-se de funções probabilísticas.

De acordo com o CSEP (1995), os principais componentes de uma simulação de Monte Carlo são (Apud Xavier Filho, 2006):

- Função densidade de probabilidade: sistema físico em questão.
- Geradores de números aleatórios.
- Regra de amostragem.
- Contagem: os resultados de interesse são armazenados.
- Estimativa de erro: uma estimativa de erro estatístico como função do número de testes pode ser avaliada.
- Paralelismo e vetorização: algoritmos que permitem que o método Monte Carlo seja implementado com mais eficiência e rapidez.

A seguir serão apresentados dois exemplos de aplicação do MMC no cálculo aproximado do valor do número  $\pi$ . O primeiro é o problema das Agulhas de Buffon, proposto pelo conde de Buffon a mais de duzentos anos. Esse problema é bem conhecido pelos matemáticos e foi anunciado pelo conde no ano de 1777 envolvendo o lançamento aleatório de uma agulha num plano com infinitas linhas paralelas e a determinação da probabilidade de que a agulha cruze uma das linhas. O resultado está diretamente relacionado com o valor de  $\pi$ . Considerando as relações matemáticas do problema, foi proposta (Rosa, 2002) a aproximação do número  $\pi$  a partir da definição de probabilidade para eventos discretos:

$$p = \frac{\text{número de sucessos}}{\text{número de eventos}}$$

Com essa relação e o lançamento de 1000000 de agulhas (Rosa, 2002), obteve-se o valor de  $\pi$  igual a 3,1418 com desvio padrão de 0,0045.



A outra aplicação do MMC para o número  $\pi$  foi apresentado por Xavier Filho, (2006).

Suponha que sejam jogados dardos aleatórios no interior do quadrado de lado  $r$  representado na Fig. (8). É fácil perceber que do número total de dardos que atingem o interior do quadrado e o número de dardos que atingem a parte destacada (quadrante do círculo) é proporcional à área dessa parte. Ou seja:

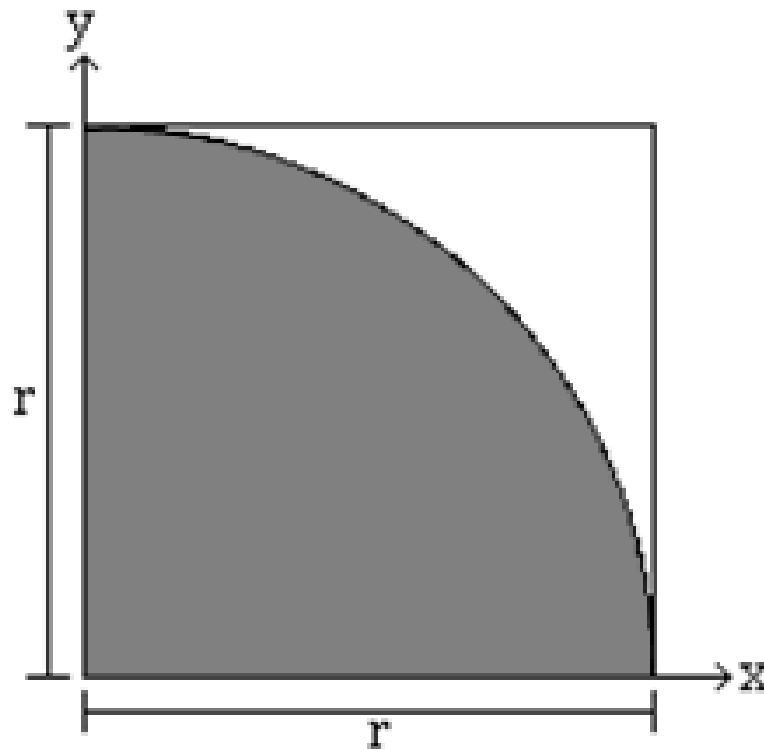


Figura 8: Um quarto da área de um círculo

$$\frac{\text{dardos que atingem a área escura}}{\text{dardos que atingem o quadrado}} = \frac{\text{área escura}}{\text{área do quadrado}}$$

Utilizando relações elementares da geometria, pode-se escrever:

$$\frac{\text{dardos que atingem a área escura}}{\text{dardos que atingem o quadrado}} = \frac{\frac{1}{4} \pi r^2}{r^2} = \frac{1}{4} \pi$$

$$\pi = 4 \frac{\text{dardos que atingem a área escura}}{\text{dardos que atingem o quadrado}}$$

$$\pi = 4 \frac{P_{in}}{P_{total}} \quad (23)$$

Pode-se então implementar um algoritmo para o cálculo de  $\pi$ , onde os dados simbólicos serão substituídos por números randômicos gerados com a rotina DRNUN (IMSL, 1997). Esses números gerados estão no intervalo:  $0 \leq x \leq 1$  e  $0 \leq y \leq 1$ .

Xavier Filho (2006) realizou algumas iterações para aproximação do número PI ( $\pi$ ). Nesse trabalho, será apresentada apenas como exemplo a geração de 10000 pontos.

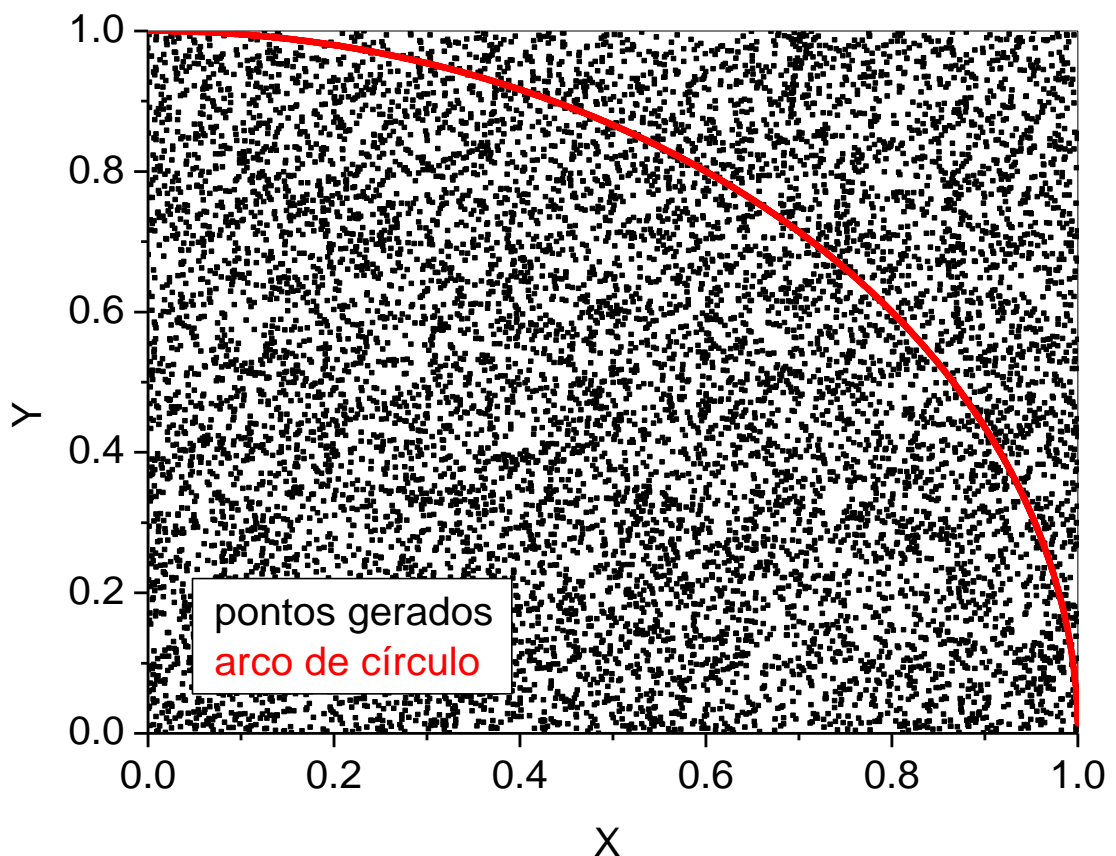


Figura 9: Gráfico gerado a partir de 10.000 pontos. (Xavier, 2006)

Na Figura 9 acima é apresentada a distribuição randômica de pontos obtidos para 10000 pontos. Utilizando a Eq. (23) o valor calculado de  $\pi$  foi 3,139 e o erro percentual médio no cálculo do  $\pi$ : 0,086 %. (Xavier Filho, 2006).

O desenvolvimento desse trabalho é consequência da dissertação apresentada por Xavier Filho (2006), quando o autor considerou a simulação para meio somente absorvedor e espalhamento isotrópico, conforme resumido a seguir:

#### 4.2.1 Meio somente absorvedor

Xavier Filho (2006) simulou a transferência radiativa para um meio puramente absorvedor e comparou o MMC com a lei de Beer. Neste caso a relação da quantidade de radiação absorvida e a distância que ela viaja através deste meio é uma função exponencial. Para simulação pelo MMC considera-se para o cálculo da absorção a equação,

$$R_s = 1 - e^{-KS} \quad (24)$$

na qual  $R_s$  é o número obtido randomicamente,  $K$  é o coeficiente de absorção do meio e  $S$  é a espessura do meio. Utilizado a equação de Beer, para a solução analítica,

$$I = I_0 e^{-KS} \quad (25)$$

na qual  $I_0$  é a intensidade radiativa antes de incidir no meio (Yang *et al.*, 1995),  $K$  é o coeficiente de absorção do meio e  $S$  é a espessura do meio.

Xavier Filho (2004), em seu trabalho, comparou a solução analítica com a numérica do MMC. Ele determinou o erro entre os resultados, o tempo de processamento em função do número de fótons incidentes, do coeficiente de absorção e da espessura óptica. Como esperado, o autor demonstrou que o aumento do número de pacotes aproxima o MMC da solução analítica. Além disso, mostrou que este desvio é mais importante para espessuras ópticas maiores. Na situação que ele considerou 10 volumes e 50.000 pacotes com coeficiente de absorção 0,5, o resultado foi muito próximo do analítico e verificou-se que ocorreu uma maior absorção da energia radiativa nas camadas iniciais. Em relação ao tempo computacional, houve um crescimento exponencial durante o seu processamento.

Outra análise foi o cálculo da transmitância e reflectância hemisférica entre os métodos de Ordenadas Discretas e Monte Carlo. Para o MOD, a equação (26) de

transmitância hemisférica e a equação (27) de reflectância hemisférica são definidas respectivamente como:

$$T_{eh} = \frac{\sum_{\mu>0} w_n \mu_n I_{i,n}}{I_o d\omega_o} \quad (26)$$

$$R_{eh} = \frac{\sum_{\mu<0} w_n \mu_n I_{i,n}}{I_o d\omega_o} \quad (27)$$

na qual  $I_o d\omega_o$  representa a fluxo radiativo incidente na parede num ângulo sólido de  $d\omega_o$ .

Para o cálculo da transmitância e reflectância hemisférica pelo Método de Monte Carlo, foram utilizadas as equações:

$$TH = \frac{\text{Número de pacotes que saiu pela face 1}}{\text{Número total de pacotes utilizado}} \quad (28)$$

$$RH = \frac{\text{Número de pacotes que saiu pela face 0}}{\text{Número total de pacotes utilizado}} \quad (29)$$

nas quais a face 0 é a face onde o feixe de radiação incide sobre sua superfície e a face 1 é a outra face, considerada  $\tau=\tau_o$ .

#### 4.2.2 Meio com espalhamento isotrópico

Xavier Filho (2006) analisou em seu trabalho um meio com espalhamento isotrópico efetuando o cálculo da transmitância e reflectância hemisférica para o MOD e MMC. Ele simulou para valores de albedo unitário e 0,5 com diferentes valores de espessura óptica e números de pacotes. Como conclusões, Xavier Filho (2006) obteve que o MMC apresenta melhores resultados quando se utiliza um número muito grande de pacotes, como esperado, houve discrepância similar à obtida por Modest (2003), Fig (1).

## CAPÍTULO 5

### 5 ANÁLISE DE RESULTADOS

Com o objetivo de se implementar o método de geração de números aleatórios para uma função de probabilidade variável, utilizou-se primeiramente uma função do tipo

$$p(x) = x^4 \quad (30)$$

que não é característica para problemas de transferência radiativa. Entretanto, ela é facilmente manipulada para a obtenção de sua função inversa. A Fig. (10), apresenta o resultado obtido da função probabilidade para um número de eventos igual a 1000.000 pontos. Observa-se uma graduação no gráfico de menos intenso, para valores próximos de  $p(x)$  nulo, para um aumento do número de pontos para um  $p(x)$  próximo da unidade.

O mesmo padrão de análise será adotado para uma função de fase anisotrópica encontrada em problemas de transferência radiativa, conhecida como Henyey-Greenstein. Para esta função, a obtenção da função inversa é feita por método numérico.

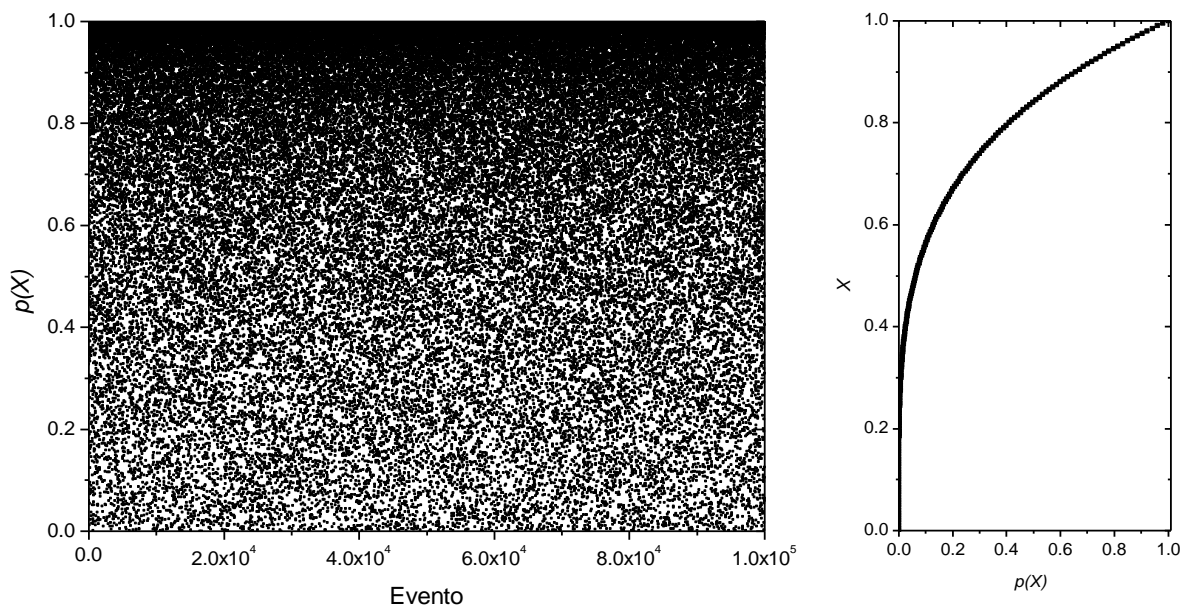


Figura 10: Gráfico com 1000.000 pontos gerados e a função  $p(x)=x^4$ .

O método de Monte Carlo aplicado à solução de problemas em transferência radiativa para meio anisotrópico será descrito a seguir:

### 5.1 Espalhamento Anisotrópico

Em radiação, quando descrevemos a distribuição angular de energia espalhada por um determinado volume é necessário definirmos uma grandeza adimensional chamada função de fase. Nesse trabalho, foi considerado um espaço onde as partículas estão orientadas de maneira aleatória e são dependentes do ângulo de difusão  $\theta_o$  formado entre a direção de incidência e a direção de difusão da intensidade radiativa.

A função de fase pode ser representada como uma expansão do polinômio de Legendre, mas esse modelo de função tem um número elevado de coeficientes. Em virtude disso é aplicado à materiais que têm um forte pico de difusão anisotrópico, Fig. (11). Nesse trabalho, é utilizada a função de fase Henyey-Greenstein (HG), a equação (31) ou uma combinação de funções deste tipo que podem ser empregadas para uma representação com poucos termos a determinar (Nicolau *et al.*, 1994). A função de fase de materiais fibrosos e espumas apresentam geralmente um forte pico de difusão na direção de incidência da intensidade radiativa e um pico reduzido de retrodifusão demonstrando um comportamento altamente anisotrópico, Fig. (10).

A função de fase de Henyey-Greenstein (HG) ou uma combinação de funções deste tipo podem ser empregadas para uma representação com uma forma mais simples (Nicolau *et al.*, 1994 e Hendricks e Howell, 1996). Emprega-se neste estudo uma função escrita através de uma ponderação de funções HG conforme proposição de Nicolau (1994):

$$p_{HG,g}(\theta_o, g) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \theta_o)^{3/2}} \quad (31)$$

$$p(\theta_o) = f_1 f_2 p_{HG,g_1}(\theta_o) + (1 - f_1) f_2 p_{HG,g_2}(\theta_o) + (1 - f_2)$$

na qual os parâmetros  $g_1$  e  $g_2$  influenciam na forma das funções HG ( $p_{HG,g_1}$  e  $p_{HG,g_2}$ ) nas direções de incidência e de retrodifusão, respectivamente. O parâmetro  $f_1$  é uma ponderação entre as funções  $p_{HG,g_1}$  e  $p_{HG,g_2}$ , e  $f_2$  pondera a função entre a parte isotrópica e anisotrópica. Um exemplo da forma desta função é demonstrado na Fig. (12).

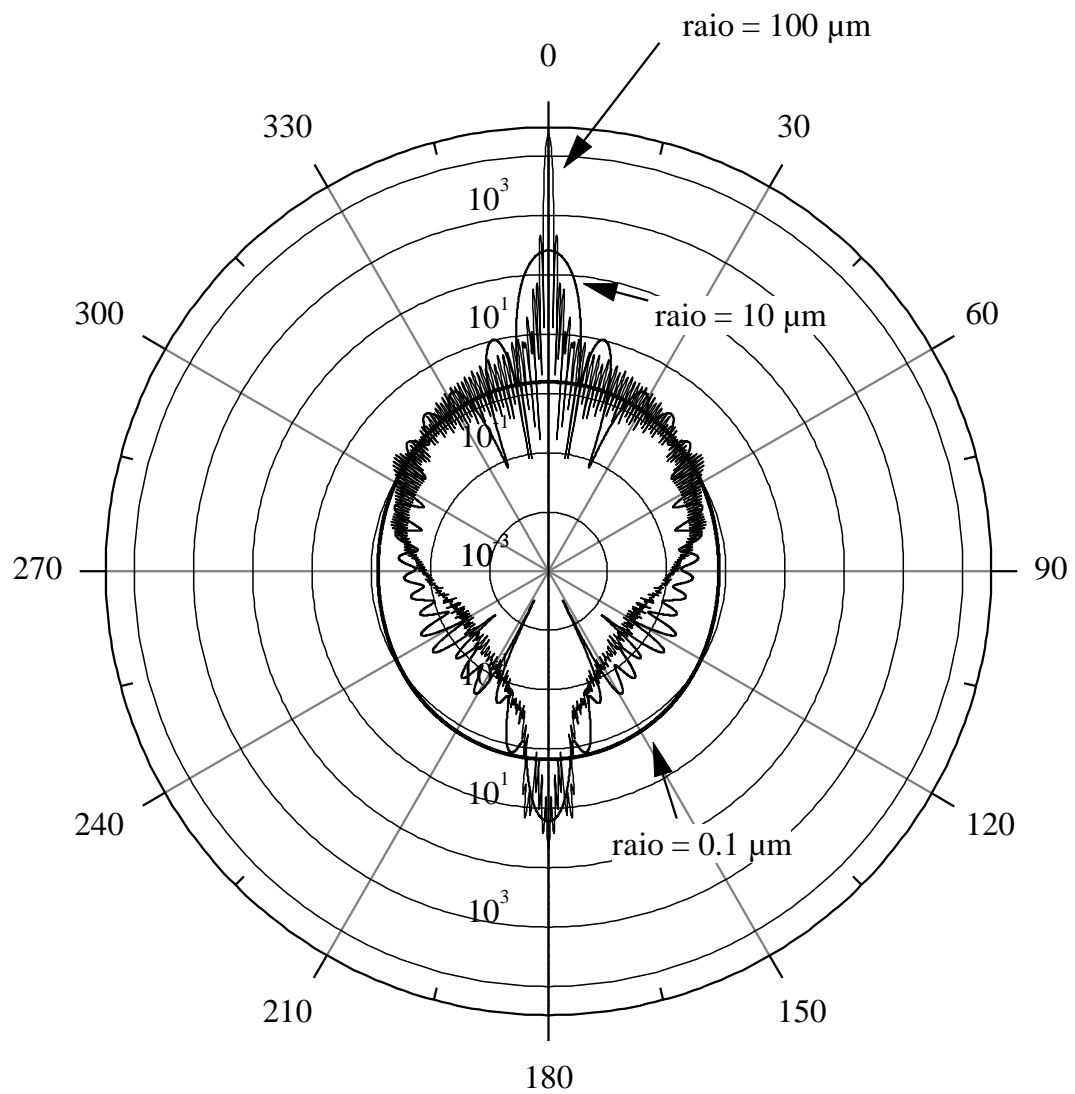


Figura 11: Difusão de uma partícula esférica em função do diâmetro,  $n = (8,4 \cdot 10^{-7}i + 1,754)$  e  $\lambda = 3$  (Moura 2004)

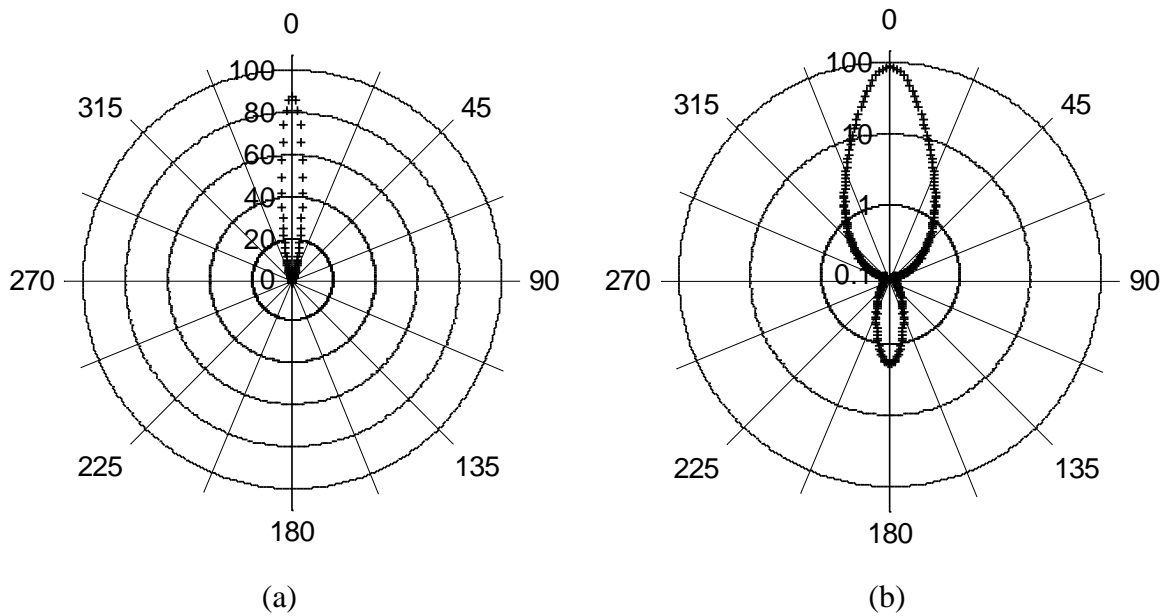


Figura 12 : Função de fase de Henyey-Greenstein modificada por  $g_1 = 0,86$  ;  $g_2 = 0,8$  ;  $f_1 = 0,96$  ;  $f_2 = 0,96$ . (a) linear ; (b) logaritmica.

O método de Monte Carlo não apresentou grandes dificuldades para a geração da função de fase, pois, ele é facilmente utilizado em análises estatísticas com funções de probabilidade variáveis.

Entretanto, para esta função o uso da técnica da transformada inversa (LARC-PCS/EPUSP 2004) pode ser empregado como no caso anterior. Porém, entretanto, pelo uso da função de fase de Nicolau (1994), eq. (31), não se obtém uma inversa analiticamente. Desta maneira, utilizou-se um método conjugado de interpolação e bissecção disponível no IMSL – Rotina ZBREN.



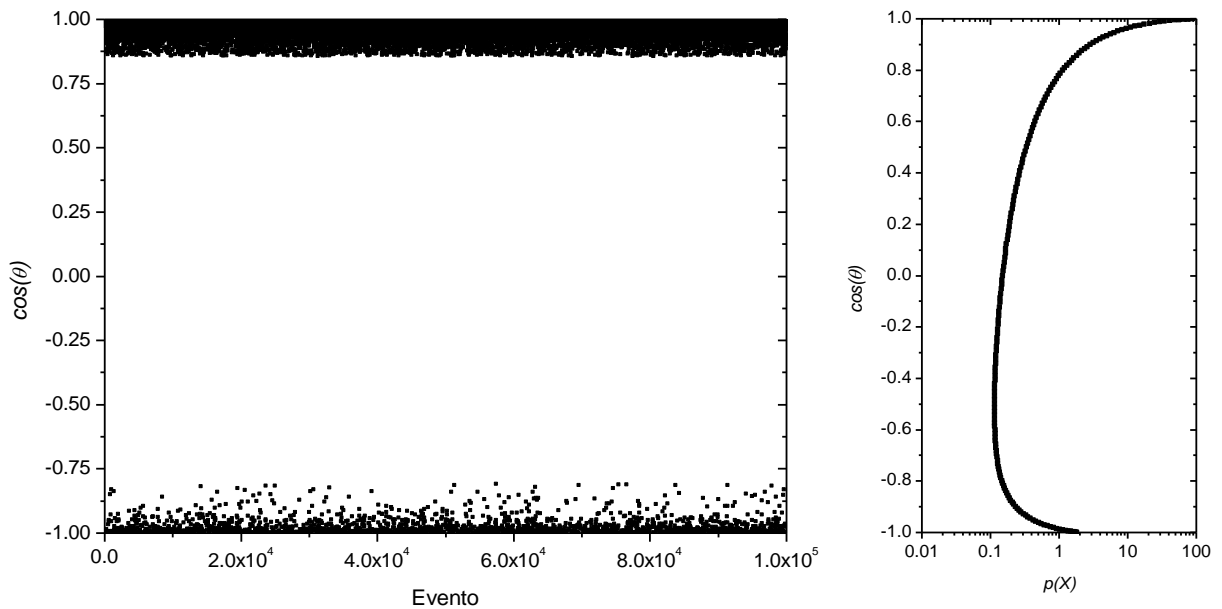


Figura 13: Função anisotrópica, Nicolau (1994) gerada para 100.000 pontos

## 5.2 Resultados

Como proposta para este trabalho, analisou-se com um maior detalhamento o cálculo da transferência radiativa em um meio semi-transparente com espalhamento anisotrópico e submetido em uma de suas faces a uma incidência de um feixe colimado.

Inicialmente, para se validar o método, realizaram-se simulações utilizando o MMC e comparou-se com a solução P1 apresentada por Modest (2003) a qual o mesmo autor demonstrou ser a solução muito próxima da solução exata, sendo que graficamente não é possível perceber a diferença para uma escala como a apresentada na Fig. (14). A solução analítica para este caso é muito difícil de ser implementada e requer também aproximações em função de truncamentos para a solução da equação de Helmholtz (Modest, 2003). Desta forma, compara-se a solução P1 com o MOD e MMC variando a espessura óptica do meio. Fisicamente, este resultado representa a atenuação devido à extinção da radiação em relação ao fluxo radiativo incidente. Como o meio possui o albedo unitário,  $\omega=1$ , a energia radiativa é conservativa, isto é, toda a extinção da radiação é função do espalhamento desta energia para outras direções, não ocorrendo absorção. Desta maneira, a redução do fluxo radiativo na direção de incidência implica em um acréscimo complementar desta energia na direção contrária à incidência (reflexão da energia). A solução de MMC foi implementada a partir do trabalho de Xavier Filho (2006). Observa-se uma discrepância de resultados para valores maiores de espessura óptica do meio. Investigou-se parâmetros do MMC como número de

pacotes, número de volumes na discretização espacial e ângulo de divergência do feixe incidente, e pouca variação foi observada. Este mesmo comportamento é observado por Modest (2003), Fig. (1), na comparação da transferência radiativa em gases quando da comparação de soluções de referência com o MMC. Salienta-se também que o MOD apresentou resultados muito melhores que o MMC.

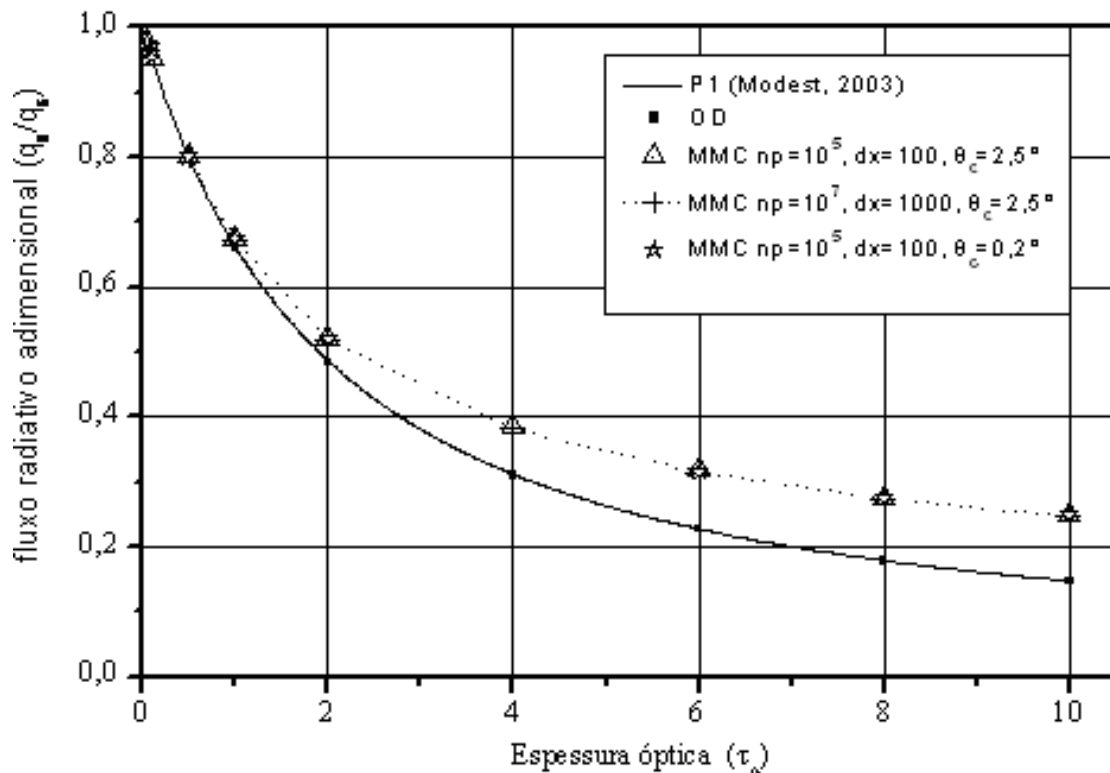


Figura 14: Análise dos MOD e MMC com a solução analítica e albedo  $\omega = 1$

Considerando um albedo,  $\omega=0.5$ , não se dispõe mais de soluções analíticas e compara-se somente o MMC em relação ao MOD, Fig. (15). Os resultados são expressos em termos de transmitância hemisférica e reflectância hemisférica e representa o mesmo resultado que em termos de fluxo radiativo adimensional, como apresentado na Fig. (14) e utilizado por Modest (2002) para expressar seus resultados. Observa-se uma divergência similar entre os dois métodos para valores crescentes de espessura óptica. Cabe salientar também que para o caso anterior ( $\omega=1$ ), tanto o MMC quanto o MOD respeitaram a conservação de energia, isto é, a soma das parcelas de energia radiativa transmitida e refletida é unitária. Entretanto, para este caso, observa-se que a soma da energia transmitida e refletida para os dois casos não apresentam o mesmo resultado. Isto significa que o MMC transforma o meio para um comportamento de uma maior absorção de energia, quando comparado ao MOD. Este

comportamento mantém-se com maior ou menor intensidade para todas as análises apresentadas na seqüência.

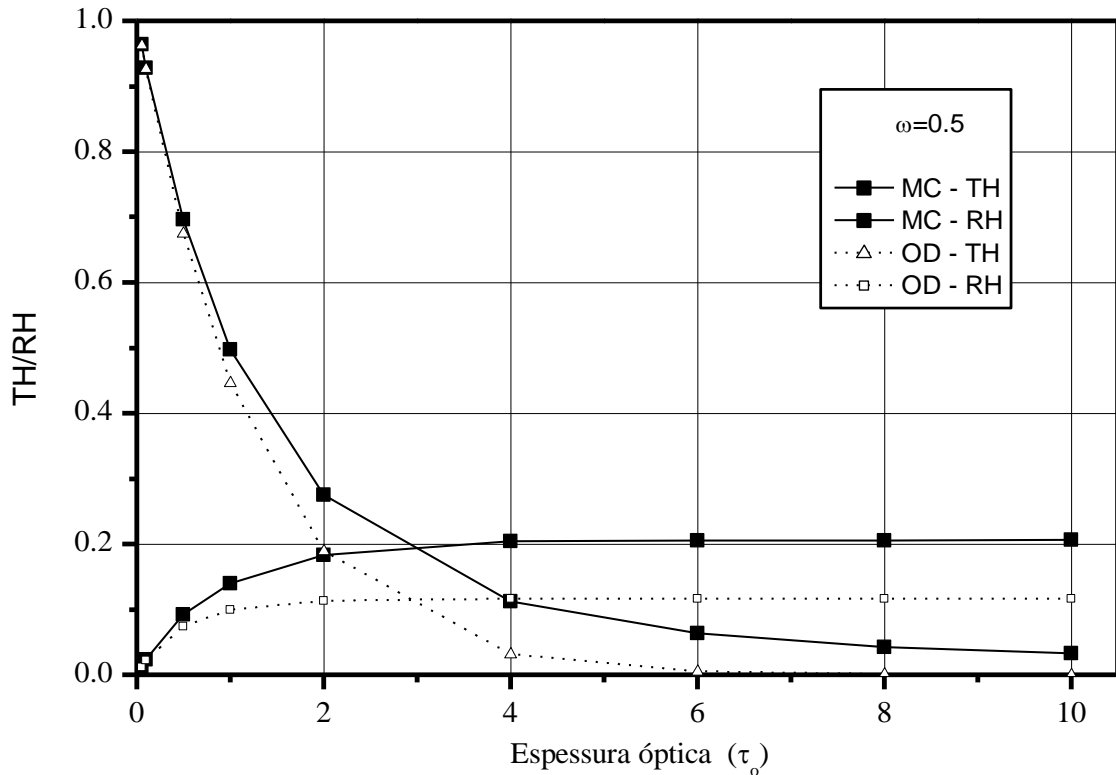


Figura 15: Relação da reflectância hemisférica e transmitância hemisférica para o MMC e MOD.

A Figura (16) apresenta as análises efetuadas para uma função de fase do tipo proposta por Nicolau (1994). Esta função de fase é representativa de materiais tipo lã de vidro e espumas que apresentam um forte pico de espalhamento na direção de incidência e na direção contrária a esta (retrodifusão). Ela apresenta o resultado obtido para albedo unitário,  $\omega=1$ , e observa-se novamente uma grande discrepância entre os dois métodos para valores de espessura óptica grandes. Salienta-se que novamente este caso é conservativo e os dois métodos respeitam esta condição.

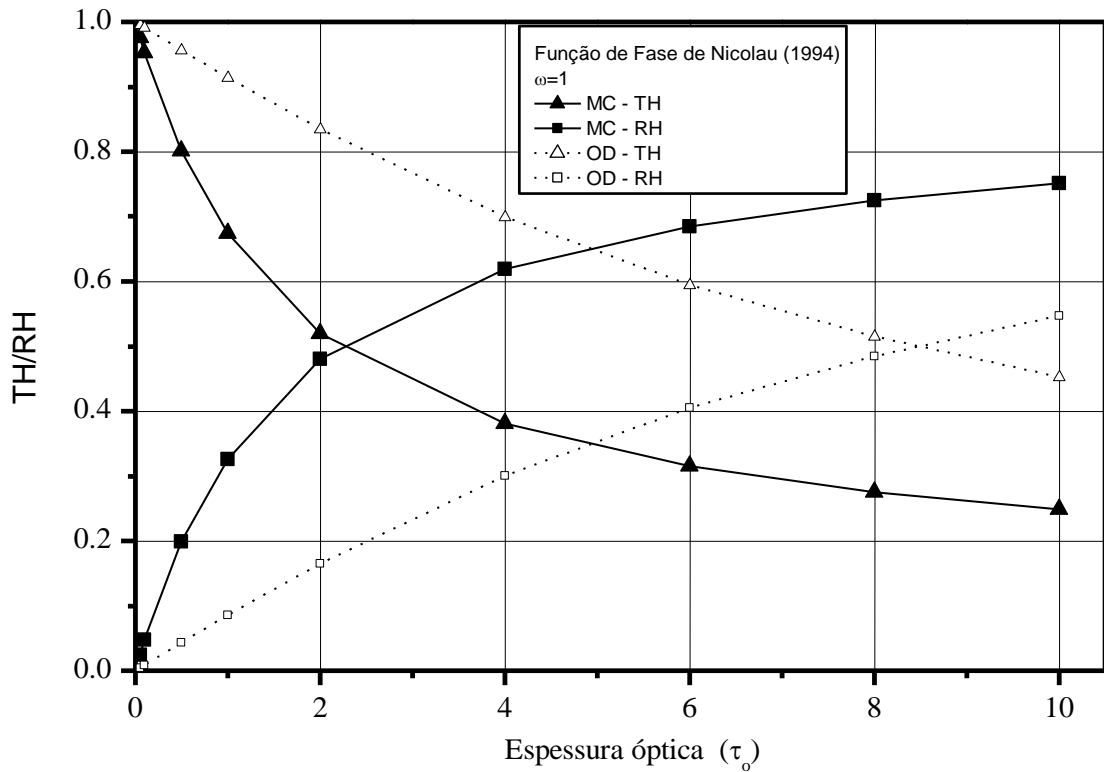


Figura 16: Relação da reflectância hemisférica e transmitância hemisférica para o MMC e MOD com albedo unitário para a função anisotrópica.

A Figura (17) representa o tempo de processamento para os dois métodos e observa-se sempre um tempo maior de processamento para o MOD que cresce substancialmente com o aumento da espessura óptica. Desta maneira, poderia se concluir que o MOD seria mais recomendado para espessura óptica maior em função de um menor tempo para convergência. Entretanto, esta conclusão somente pode ser empregada caso fosse comprovada a melhor aproximação do MMC para a análise de transferência radiativa nesta faixa.

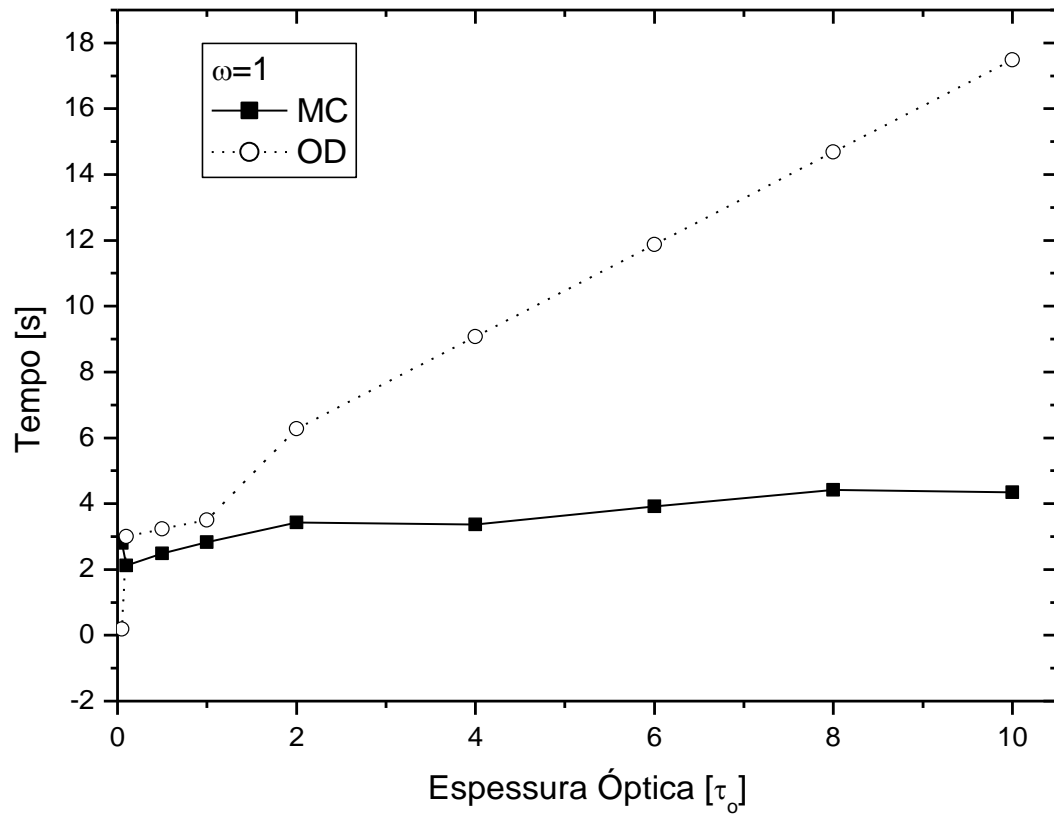


Figura 17: Tempo computacional do MMC e MOD com albedo unitário.

Realizando-se a mesma análise para um meio com espalhamento anisotrópico e com albedo,  $\omega=0,5$ , Fig. (18), os resultados obtidos foram muito mais próximos com uma melhor concordância. Novamente, observa-se um tempo crescente pelo MOD sendo que o MMC permanece constante com a variação da espessura óptica e a Fig. (19) representa o tempo computacional para a simulação, no qual o MOD tem um aumento do tempo de processamento.

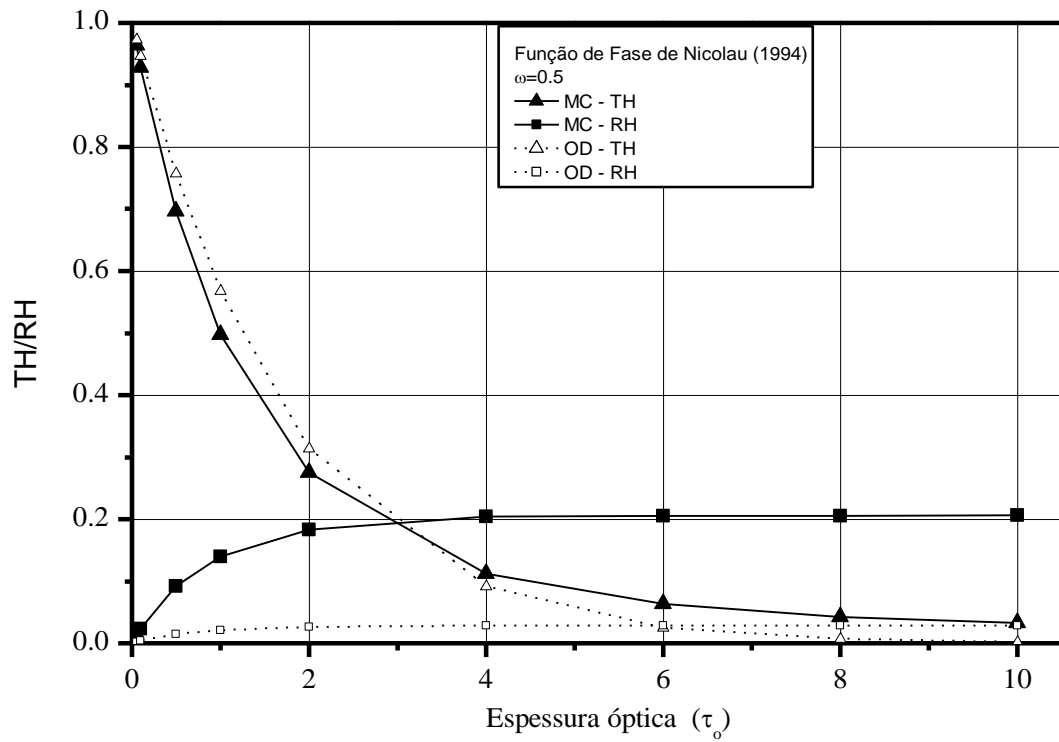


Figura 18: Relação da reflectância hemisférica e transmitância hemisférica para o MMC e MOD com albedo  $\omega = 0,5$  para a função anisotrópica.

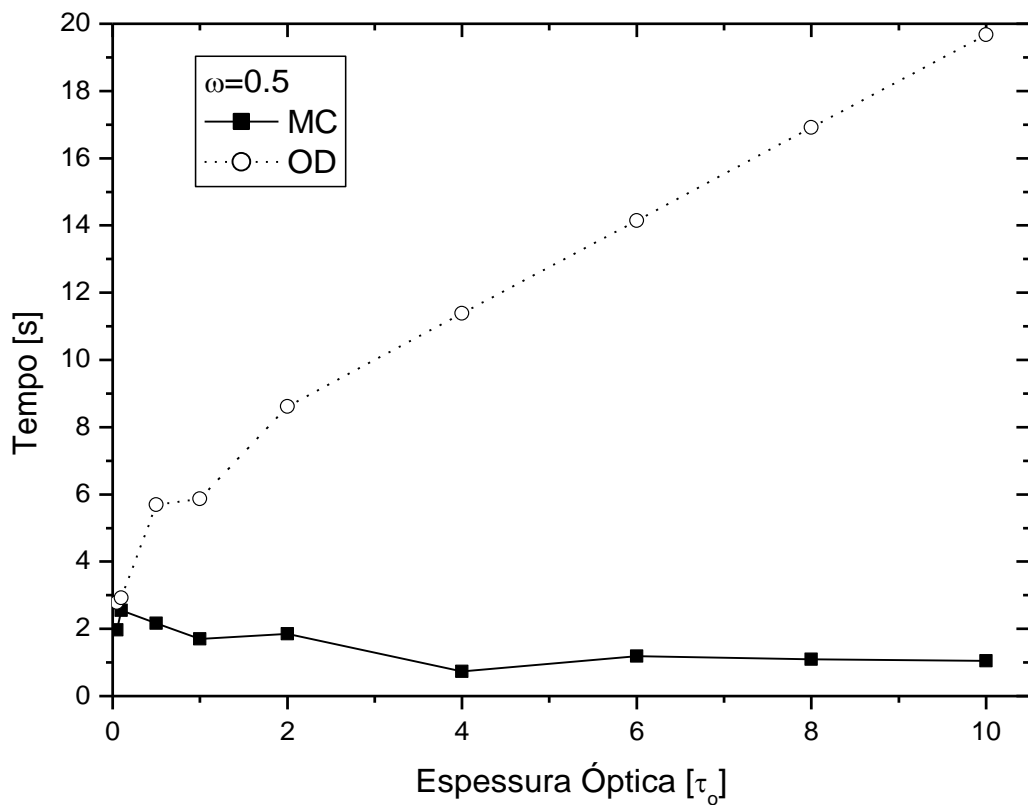


Figura 19: Tempo computacional do MMC e MOD com albedo  $\omega = 0,5$ .

Novamente a mesma análise para albedo,  $\omega=0,1$ , Fig. (20) os resultados são ainda mais próximos demonstrando uma ótima concordância entre os dois métodos.

Em função da maior discrepância para albedos próximos à unidade, supõe-se que haja necessidade de verificar os procedimentos para o cálculo do espalhamento. Até o presente momento, as investigações não apresentaram melhores resultados e o tempo de processamento, Fig. (21), aumentou consideravelmente para o MOD, e para o MMC o tempo é inferior, mantendo-se quase constante.

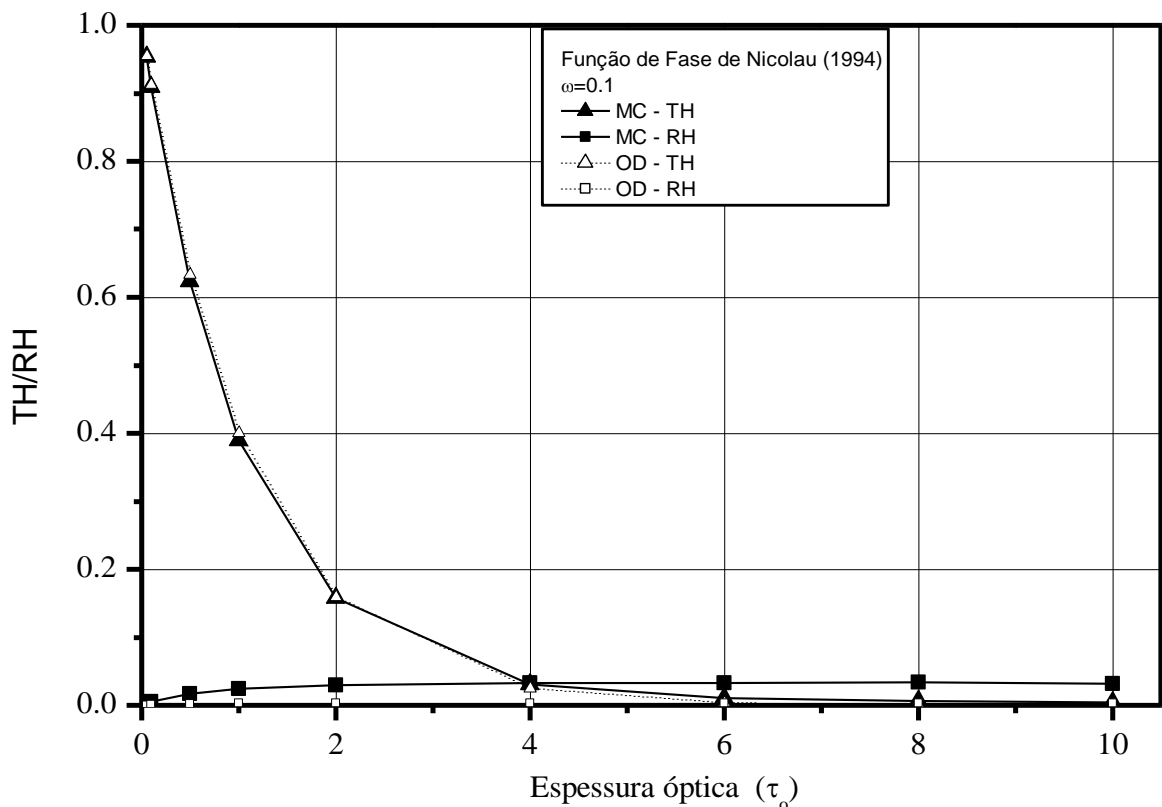


Figura 20: Relação da reflectância hemisférica e transmitância hemisférica para o MMC e MOD com albedo  $\omega = 0,1$  para a função anisotrópica.

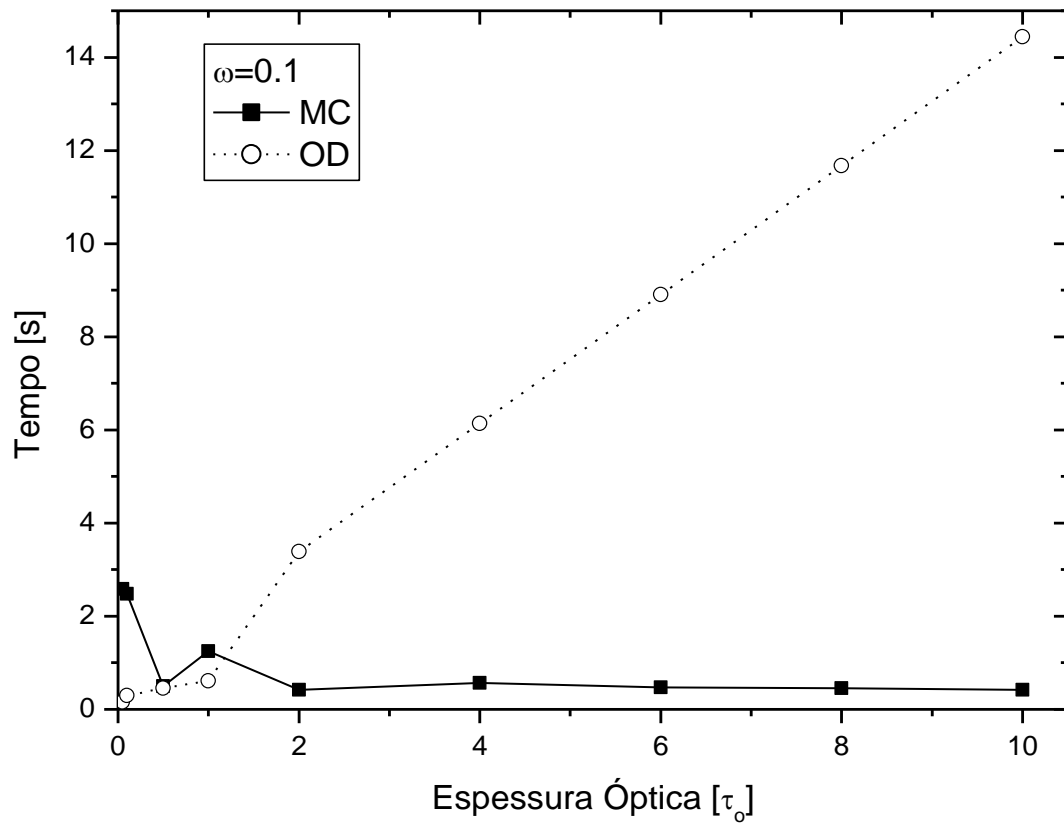


Figura 21: Tempo computacional do MMC e MOD com albedo  $\omega = 0,1$ .



## CONCLUSÃO

Pretendeu-se como proposta principal do trabalho, a transferência radiativa em meio semi-transparente com espalhamento anisotrópico submetendo uma das faces à incidência de um feixe colimado. Inicialmente, foi analisado o MMC e MOD para uma função P1 apresentada por Modest (2003) com albedo unitário onde o MOD apresentou melhor resultado que o MMC. Utilizando albedo  $\omega = 0,5$  os resultados são expressos em transmitância e reflectância hemisférica e os métodos não apresentaram os mesmos resultados, ou seja, o MMC transforma o meio com maior absorção de energia quando comparado com MOD.

Os casos de análise para a função de fase proposta por Nicolau (1994), em que esta função é típica representação de material como lã de vidro e espumas, os albedos considerados foram  $\omega = 1$ ,  $\omega = 0,5$  e  $\omega = 0,1$  respectivamente. Os resultados são próximos e têm uma ótima concordância entre os métodos quando o albedo aproxima-se de  $\omega = 0,1$ . Conseqüentemente, o tempo computacional do MOD tem um aumento significativo quando o albedo torna-se menor, e é comparado com o tempo computacional do MMC que estabiliza quando o albedo é  $\omega = 0,1$ .

Em função do Método de Monte Carlo apresentar ainda uma discrepância entre as soluções de referências, sugere-se para trabalhos futuros uma maior investigação. Parâmetros que podem ser analisados seria a influência do gerador de números aleatórios e da condição de extinção do fóton pelo meio.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMBIRAJAN, A., Look JR, D.C., **A Backward Monte Carlo Estimator for the Multiple Scattering of a Narrow Light Beam**, 1996.

P. BOULET, On the finite volume method and the discrete ordinates method regarding radiative heat transfer in acute forward anisotropic scattering media. *The Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, September 2006.

BREWSTER, M.Q., **Thermal radiative transfer and properties**. New York: John Wiley and Sons, 543p. 1992.

BUSLENKO, N. P., Golenko, D.I., Shreider, Yu. A., Sobol, I. M. and Sragivich, V. G., *The Monte Carlo Method*: Pergamon Press, 1966.

CARLSON, B.G. & Lathrop, K.D., *Transport Theory - The Method of Discrete Ordinates*, In: **Computing Methods in Reactor Physics**. Edited by H. Greenspan, C. N. Kleber and D. Okrent. New York: Gordon and Breach, p. 171-266, 1968.

CHAI, C., Lee, H.S., Patankar, S.V., **Improved Treatment of Scattering Using the Discrete Ordinates Method**. *Journal of Heat Transfer*, n.º 116, pp. 260-263, 1994.

CHANDRASEKHAR, S. **Radiative Transfer**. New York : Dover Publication, 393p. , 1960.

CHURMAKOV, D. Y.; Meglinski, I. V.; Piletsky, S. A.; Greenhalgh, D. A. **Analysis of skin tissues spatial fluorescence distribution by the Monte Carlo simulation**. *J Phys D Appl Phys*, vol. 36, n. 14, p. 1722-1728, 2003.

COMPUTATIONAL Science Education Project (CSEP). **Electronic Book** – Introduction to Monte Carlo. Methods and Random Number Generators, 1995. (fonte: <http://csep1.phy.ornl.gov>).

CORRÊA, M.P. **Índice ultravioleta: avaliações e aplicações**. Tese (Doutorado em Ciências) – Departamento de Ciências Atmosféricas, Instituto de Astronomia, Geofísica e Ciências Atmosféricas, Universidade de São Paulo, 247p., 2003.

DE MIRANDA, A.B., Sacadura, J.F., **An Alternative Formulation of the S-N Discrete Ordinates for Predicting Radiative Transfer in Nongray Gases**. *Journal of Heat Transfer*, Vol. 118, p.650-653, August 1996.

El Wakil, N., **Etude de transferts de chaleurs par conduction, convection et rayonnement couplés dans des milieux semi-transparents fluides ou poreux**. Elaboration de modèles de simulation en géométrie bidimensionnelle. Thèse de doctorat n.º 91ISAL0050, INSA de Lyon, Lyon. 298p. , 1991.

FIVELAND, W.A., **Discrete ordinate methods for radiative heat transfer in isotropically and anisotropically scattering media**. *J. of Heat Transfer*, Vol. 109, pp. 809-812, 1987.

FIVELAND, W.A., **Discrete ordinate methods for radiative heat transfer in isotropically and anisotropically scattering media**. ASME HTD. Vol. 49, pp.1-8, 1985.

IMSL, Fortran and C. Rotina ZBREN.vVisual Numerics, Inc., 1997.

INCROPERA, FRANK P. e DAVID P. DEWITT, **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa**. Quinta edição, PP. 1 – 19 e 496 – 581, 2003.

J. PETRASCH, P. Wyss, a. Steinfeld, Tomography-based Monte Carlo determination of radiative properties of reticulate porous ceramics. *The Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, November 2006.

KUMAR, S., Majumdar, A. & Tien, C.L., **The differential-discrete-ordinate method for solutions of the equation of radiative transfer**. *J. Heat Transfer*, Vol. 112, pp.424-429,1990.

KREITH, Frank. **Princípios de Transferência de Calor**. pp. 1-20 e 481-543, 2003.

LATHROP, K. D. **Spatial Differencing of the Transport Equation: Positivity vs Accuracy**. *Journal of Computational Physics*, vol.4, pp. 475 - 498, 1969.

TESS\_e Lionel, Dupoirieux Francis, Taine Jean, Monte Carlo modeling of radiative transfer in a turbulent sooty flame

MAP-131, Laboratório de Matemática Aplicada – Métodos de Monte Carlo e Aproximações de PI, 2002. (fonte: [http://www.feferraz.net/br/Listas/Laboratorio\\_de\\_Matematica\\_Aplicada\\_-\\_Trabalho\\_2](http://www.feferraz.net/br/Listas/Laboratorio_de_Matematica_Aplicada_-_Trabalho_2))

MODEST, M.F. **Radiative Heat Transfer**. New York: McGraw-Hill, pp 1 – 126 e 565 - 675, 2003.

MOURA, L.M., Baillis, D. & Sacadura, J.F., **Identification of thermal radiation properties of dispersed media: comparison of different strategies**. *11th International Heat Transfer Conference*, Kyongju, Korea, 23-28 August, 1998.

MOURA, L.M., Lopes, R., Baillis, D. & Sacadura, J.F., **Parameter identification for packed Spheres system: solid hemispherical spectral reflectivity**, *Latcym98*, ref. 222, 5 a 8 de outubro 1998, Salta, Argentina.

MOURA, L.M., Baillis, D., Sacadura, J.-F., **Identification of thermal radiation properties of dispersed media: comparison of different strategies**, *11th International Heat Transfer Conference*, 23-28 August, Kyongju, Korea, pp. 409-414, 1998.

MOURA, L.M, Baillis, D., Sacadura, J.F., **Analysis of the discrete ordinate method: angular discretization**. *14th Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, CD-ROM, December 8-12th, COB1425, Bauru, Brasil, 1997.

MOURA, Luis Mauro. **Determinação das propriedades radiativas de materiais com índice de refração diferente da unidade**. Curitiba PR: PUCPR, 54p, 2002.

NICOLAU, V.P., Raynaud, M., Sacadura, J.-F. **Spectral radiative properties identification of fiber insulating materials**. *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 37, pp. 311-324, 1994.

NICOLAU, V.P., 1994, **Identification des Propriétés Radiatives des Matériaux Semi-Transparents Diffusants**. Thèse de doctorat n° 94ISAL0001. INSA, Lyon 234p.

OGATA, Paulo Hideshi. **Avaliação do perigo de colisões entre aeronaves em operação de aproximação em pistas de aterrissagem paralelas**. São Paulo SP: USP, 116p, 2003.

ÖZISIK, M.N., 1973. **Radiative Transfer and interaction with conduction and convection**, John Wiley and Sons, New York, 575p

PAMPLONA, Edson de Oliveira. **Gerenciamento de risco em custos**. Punta Del Leste: VIII Congreso Internacional de Costos. Punta Del Leste, Uruguay, 2003.

PRAHL, S. A., Keijzer, M., Jacques, S. L.; Welch, A. J. A Monte Carlo model of light propagation in tissue. SPIE, Proc. Dosimetry of Laser Radiation In Medicine And Biology, v. IS 5, p. 102-111, 1989.

RUAN, L.M., Tan, H. P., Yan, Y. Y. **A Monte Carlo method applied to the medium with nongray absorbing-emitting-anisotropic scattering particles and gray approximation**. Harbin: Numerical Heat Transfer, part A, 2002.

SERWAY, Raymond A.; Jewett, John W. **Princípios de Física**. São Paulo: Thomson, 2004. 4 v.

SETTI, J. A. P. ; MILHORETTO, Edney ; R. JUNIOR, S. ; SCHELIN, Hugo Reuters ; KLOCK, Margio ; DENYAK, Valeriy V ; ROCHA, Ricardo ; EVSEEV, Ivan ; YEVSEYEVA, Olga . Aplicação do Método de Monte Carlo, GEANT 4 e SRIM 2003 no Projeto de um Tomógrafo por Feixe de Prótons de Baixa Energia. In: X Congresso Brasileiro de Informática em Saúde, 2006, Florianópolis. Anais do X Congresso Brasileiro de Informática em Saúde, 2006. p. 758-761 (<http://www.sbis.org.br/cbis/arquivos/743.pdf>).

SOTO, Juan L. P., Furuie, Sérgio S. **Otimização do algoritmo tomográfica ART – simulação por Monte Carlo**, São Paulo SP: 5p, 2003.

THOMAS, George B. **Cálculo**. volume 1, São Paulo SP: Addison Wesley, 2002.

XAVIER FILHO, Olimpio de Paula. **Análise da Transferência de calor por radiação utilizando o método de Monte Carlo**. Curitiba PR: PUCPR, 2006.

YANG, Wen-Jei; Taniguchi Hiroshi, Kudo Kazuhiko. **Advances in Heat Transfer**. San Diego: Academic Press, 215 p, 1995.

YORIYAZ, H.; Stabin, M. **Electron and photon transport in a model of a 30-g mouse**. The Journal of Nuclear Medicine, v. 38 (5), May 1997, Supplement.

WANG, L. V. **Rapid modeling of diffuse reflectance of light in turbid slabs**. J Opt. Soc. Am A, v. 15, n. 4., p. 936-944, 1998.

**WEBER, Gerald. Aplicação do Método de Monte Carlo ao estudo da corrente induzida por feixe eletrônico em dispositivos semicondutores.** Campinas: 97p, 1987.

**WONG, Basil T. Mengüç, M. Pinar. Comparison of Monte Carlo techniques to predict the propagation of a collimated beam in participating media.** Lexington: Numerical Heat Transfer, part B, 2002.