

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ
ESCOLA POLITÉCNICA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA**

STEFANIE VOSS

**ESTUDO NUMÉRICO DE LIMITADORES DO TIPO TVD APLICADOS NA
SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA UNIDIMENSIONAL, TRANSIENTE E
COMPRESSÍVEL**

CURITIBA

2014

STEFANIE VOSS

**ESTUDO NUMÉRICO DE LIMITADORES DO TIPO TVD APLICADOS NA
SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA UNIDIMENSIONAL, TRANSIENTE E
COMPRESSÍVEL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica Área de concentração: Engenharia e Ciências Térmicas, da Escola Politécnica, da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, como requisito à obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dra. Viviana Cocco Mariani

CURITIBA

2014

STEFANIE VOSS

**ESTUDO NUMÉRICO DE LIMITADORES DO TIPO TVD APLICADOS NA
SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA UNIDIMENSIONAL, TRANSIENTE E
COMPRESSÍVEL**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica Área de concentração: Engenharia e Ciências Térmicas, da Escola Politécnica, da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica

COMISSÃO EXAMINADORA

Dra Viviana Cocco Mariani
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Orientadora

Dr Stephan Hennings Och
Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Dr Emerson Martin
Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Dr Luciano Araki
Universidade Federal do Paraná

Curitiba, 29 de setembro de 2014.

Dedico este trabalho aos meus pais, por
sempre acreditarem no meu potencial e nunca
me deixarem desistir.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a minha orientadora Viviana Cocco Mariani, por toda a dedicação, paciência e palavras de incentivo, principalmente quando eu achava que as coisas não iam dar certo. Também não posso me esquecer de agradecer ao professor Stephan Hennings Och, por ter me ajudado a encontrar um tema motivador para o mestrado, quando ainda era meu orientador do trabalho de graduação, além de me dar algumas dicas de programação e de como conciliar mestrado e trabalho.

Um agradecimento especial aos meus pais Ronaldo e Helen, que acreditaram em mim e me ajudaram a seguir em frente, me motivando e não me deixando desistir, mesmo quando eu já estava cansada e dizia que não agüentava mais; ao meu namorado Vinícius por me aguentar nos momentos de desespero, por trocar os programas normais de final de semana por tardes de estudo e se orgulhar de namorar uma aluna de mestrado; aos meus melhores amigos, Isabella, Brunno, Ricardo e Cerilho, que se mantiveram ao meu lado, mesmo que distante, compreendendo quando eu trocava suas companhias por noites de sono.

“The ability to analyze a problem involves a combination of inherent insight and experience. The former, unfortunately, cannot be learned, but depends on the individual. However, the latter is of equal importance, and can be gained with patient study.”

(ARPACI, 1966)

RESUMO

Métodos computacionais tem sido utilizados cada vez com maior frequência em estudos sobre novas tecnologias e otimizações de máquinas térmicas e de escoamento de fluidos. A aplicação de métodos computacionais revolucionou os projetos de engenharia obtendo soluções com um custo inferior ao despendido com métodos experimentais. Utilizando-se da discretização das equações que governam o processo de interesse, os Métodos de Diferenças Finitas de segunda ordem de Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack foram muito utilizados em simulações de motores, porém eles possuem uma desvantagem, geram oscilações na solução em regiões de descontinuidade. Para eliminar essas oscilações e obter soluções mais precisas, limitadores de fluxo podem ser adicionados ao cálculo numérico. Existem diferentes tipos de limitadores de fluxo, entre eles o TVD (*Total Variation Diminishing*). Esse trabalho tem como objetivo, portanto, estudar métodos numéricos buscando alta precisão e baixo tempo computacional para a resolução do problema teste do tubo de choque, um modelo simplificado que consegue representar alguns dos fenômenos inerciais e pulsantes que ocorrem nos dutos de admissão e exaustão de motores. Assim, são descritas as leis de conservação para o problema teste do tubo de choque, em seguida calcula-se a solução numérica através dos métodos numéricos de Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack ambos programados no software MATLAB®. Na sequência, os dados numéricos são comparados com a solução analítica. Os métodos numéricos serão combinados com o limitador TVD de Davis e três diferentes funções limitadoras, buscando reduzir as oscilações características desses métodos em regiões de descontinuidade. As funções limitadoras escolhidas foram Davis 1, Sweby e Van Albada, e cada uma delas foi testada para cinco valores de CFL (Courant, Friedrichs e Lewy). Entre as funções limitadoras a que apresentou melhor resultado foi Davis 1 e o valor de CFL que mais aproximou a solução numérica da solução analítica foi 0,7. Os resultados apresentados pelos dois métodos de diferenças finitas com função limitadora de Davis 1 e CFL igual a 0,7 foram similares e satisfatórios, porém devido a pequenas diferenças na solução é possível afirmar que MacCormack apresentou os melhores resultados.

Palavras-chave: Diferenças Finitas, MacCormack, Lax-Wendroff, TVD, Davis 1, Sweby, Van Albada, CFL, Tubo de Choque.

ABSTRACT

The usage of computational methods on studies over new technologies and optimizations of thermal and fluid flow machines grows every day. Computational methods changed the engineering design, expending less money to obtain solutions than experimental methods. Thru the discretization of the equations that rule the process of interest, the second order finite difference schemes of Lax-Wendroff two step and MacCormack, were widely used in engine simulations, however they have a disadvantage, unwanted oscillations appear in the solution near discontinuities. These oscillations can be eliminated with the addition of flux limiters. There are several types of flux limiters, one of them is the TVD (*Total Variation Diminishing*). This work focus on finding a numerical method for the solution of the shock tube problem, i.e., a simplified model that can represent some of the inertial and pulsating phenomena in intake and exhaust systems, that combines good precision and small computation time. The conservation laws of the shock tube problem will be determined and its solution will be calculated through Lax-Wendroff two step and MacCormack with programming on MATLAB® software. All the results obtained will be compared with the analytical solution. Both numeric methods will be combined with Davis TVD limiters and three different limiter functions, to reduce the characteristic oscillations on the solution in regions with discontinuities. The limiter functions chosen were Davis 1, Sweby and Van Albada, and each one of them was tested for five values of CFL (Courant, Friedrich e Lewy). The limiter function with best result was Davis 1, and the CFL value that made the numerical solution be closest to the analytic one, was 0,7. The results obtained by the finite difference schemes with limiter function of Davis 1 and CFL value of 0,7 had a very similar behavior, but with further analysis, it is possible to affirm that the best results were presented by MacCormack.

Key-words: Finite Difference, MacCormack, Lax-Wendroff, TVD, TVD, Davis 1, Sweby, Van Albada, CFL, Shock Tube.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Representação dos componentes do motor de combustão interna	23
Figura 1.2 – Perfil da pressão no sistema de admissão em função.....	24
do ângulo de movimento do pistão.....	24
Figura 1.3 – Perfil de pressão em função da posição	24
Figura 1.4 – Fluxograma da metodologia adotada	26
Figura 2.1: Modelo esquemático do problema teste do tubo de choque	29
Figura 2.2 – Discretização do domínio para o método de Lax-Friedrich.....	31
Figura 2.3 – Discretização do domínio para Lax-Wendroff de dois passos.....	32
Figura 2.4 – Discretização do domínio para MacCormack	32
Figura 2.5 – Resultados do tubo de choque calculado pelo método de MacCormack para pressão e massa específica.....	33
Figura 2.6 – Curvas características.....	38
Figura 3.3 – Modelo esquemático do problema teste do tubo de choque tempo $< 0s$	46
Figura 3.4 – Modelo esquemático do problema teste do tubo de choque tempo $\geq 0s$	47
Figura 3.5 – Modelo esquemático das regiões de pressão do problema teste	47
do tubo de choque para um tempo maior que zero.....	47
Figura 3.6 – Modelo esquemático com as dimensões do duto e da	48
membrana utilizados.....	48
Figura 4.1 – Discretização do domínio para Lax-Wendroff de dois passos.....	54
Figura 4.2 – Discretização do domínio para MacCormack	57
Figura 4.3 – Exemplo de discretização para ilustrar a variação total da solução (TV).....	59
Figura 4.4 – Região para um TVD de métodos de segunda ordem.....	60
Figura 4.5 – Funções dos limitadores de fluxo no diagrama $\phi \times r$	62
4.6 – Posições da malha para TVD de Davis	64
Figura 5.1 – Pressão do fluido em função da distância pela solução analítica para 0,061 s. ...	66
Figura 5.2 – Massa específica do fluido em função da distância pela solução analítica para 0,061 s.....	66
Figura 5.3 – Velocidade do fluido em função da distância pela solução analítica para 0,061 s.	66
Figura 5.4 – Número de Mach do fluido em função da distância pela solução analítica para 0,061 s.....	66

Figura 5.5 – Temperatura do fluido em função da distância pela solução analítica para 0,061 s.	66
Figura 5.6 – Entropia do fluido em função da distância pela solução analítica para 0,061 s.	66
Figura 5.7 – Fluxo de massa do fluido por unidade e área em função da distância pela solução analítica para 0,061 s.	67
Figura 5.8 – Pressão em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	69
Figura 5.9 – Massa específica em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	70
Figura 5.10 – Velocidade em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	70
Figura 5.11 – Número de Mach em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	71
Figura 5.12 – Temperatura em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	71
Figura 5.13 – Entropia em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	72
Figura 5.14 – Fluxo de Massa por unidade e área em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	72
Figura 5.15 – Pressão em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	74
Figura 5.16 – Massa específica em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	75
Figura 5.17 – Velocidade em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	75
Figura 5.18 – Número de Mach em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	76
Figura 5.19 – Temperatura em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	76
Figura 5.20 – Entropia em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	77
Figura 5.21 – Fluxo de Massa em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.	77

Figura 5.22 – Pressão do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.	79
Figura 5.23 – Massa específica do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.	80
Figura 5.24 – Velocidade do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.	80
Figura 5.25 – Número de Mach em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.	81
Figura 5.26 – Temperatura do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.	81
Figura 5.27 – Entropia do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.	82
Figura 5.28 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.	82
Figura 5.29 – Pressão do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.	84
Figura 5.30 – Massa específica do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.	84
Figura 5.31 – Velocidade do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.	85
Figura 5.32 – Número de Mach em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis em 0,0061 s.	85
Figura 5.33 – Temperatura do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.	86
Figura 5.34 – Entropia do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.	86
Figura 5.35 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.	87
Figura 5.36 – Pressão do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.	89
Figura 5.37 – Massa específica do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.	89
Figura 5.38 – Velocidade do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.	90

Figura 5.39 – Número de Mach em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.....	90
Figura 5.40 – Temperatura do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.	91
Figura 5.41 – Entropia do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.....	91
Figura 5.42 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.	92
Figura 5.43 – Pressão do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.....	93
Figura 5.44 – Massa específica do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.....	94
Figura 5.45 – Velocidade do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.....	94
Figura 5.46 – Número de Mach em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.....	95
Figura 5.47 – Temperatura do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.....	95
Figura 5.48 – Entropia do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.....	96
Figura 5.49 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.....	96
Figura 5.50 – Pressão do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.	98
Figura 5.51 – Massa específica do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.	98
Figura 5.52 – Velocidade do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.	99
Figura 5.53 – Número de Mach em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.	99
Figura 5.54 – Temperatura do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.....	100
Figura 5.55 – Entropia do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.	100

Figura 5.56 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.....	101
Figura 5.57 – Pressão do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.....	102
Figura 5.58 – Massa específica do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.	103
Figura 5.59 – Velocidade do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.	103
Figura 5.60 – Número de Mach em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.....	104
Figura 5.61 – Temperatura do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.	104
Figura 5.62 – Entropia do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.	105
Figura 5.63 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.	105
Figura 5.64 – Pressão do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.....	107
Figura 5.65 – Massa específica do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.....	107
Figura 5.66 – Velocidade do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.....	108
Figura 5.67 – Número de Mach em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.....	108
Figura 5.68 – Temperatura do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.....	109
Figura 5.69 – Entropia do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.....	109

Figura 5.70 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.....	110
Figura 5.71 – Pressão do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.	111
Figura 5.72 – Massa específica do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.	112
Figura 5.73 – Velocidade do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.	112
Figura 5.74 – Número de Mach em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.	113
Figura 5.75 – Temperatura do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.	113
Figura 5.76 – Entropia do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.	114
Figura 5.77 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.	114
Figura 5.78 – Pressão do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.....	116
Figura 5.79 – Massa específica do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.....	117
Figura 5.80 – Velocidade do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.....	117
Figura 5.81 – Número de Mach em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.....	118
Figura 5.82 – Temperatura do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.....	118

Figura 5.83 – Entropia do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.....	119
Figura 5.84 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.....	119
Figura 3.1: Volume de controle diferencial do duto.....	129
Figura 3.2: Forças que atuam na superfície de controle.....	131

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Condições de contorno adotadas para o problema teste	48
Tabela 4.1 – Equações para os limitadores de fluxo	61
Tabela 5.1 – Valor de RMSE para o cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos.....	69
Tabela 5.2 – Valor de tempo computacional para cada tamanho de malha utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos	73
Tabela 5.3 – Valor de RMSE para o cálculo numérico através de MacCormack	74
Tabela 5.4 – Valor de tempo computacional para cada tamanho de malha utilizado no cálculo numérico através de MacCormack	78
Tabela 5.5 – Valor de RMSE para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1	83
Tabela 5.6 – Valor de tempo computacional para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1	83
Tabela 5.7 – Valor de RMSE para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Davis 1	87
Tabela 5.8 – Valor de tempo computacional para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Davis 1	88
Tabela 5.9 – Valor de RMSE para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Sweby.....	92
Tabela 5.10 – Valor de tempo computacional para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Sweby.....	92
Tabela 5.11 – Valor de RMSE para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Sweby	93
Tabela 5.12 – Valor de tempo computacional para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Sweby	97
Tabela 5.13 – Valor de RMSE para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Van Albada	101
Tabela 5.14 – Valor de tempo computacional para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Van Albada	101
Tabela 5.15 – Valor de RMSE para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Van Albada.....	102

Tabela 5.16 – Valor de tempo computacional para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Van Albada.....	106
Tabela 5.17 – Valor de RMSE para o cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1, Sweby eVan Albada para CFL = 0,7	111
Tabela 5.18 – Valor de tempo computacional para o cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1, Sweby eVan Albada para CFL = 0,7	111
Tabela 5.19 – Valor de RMSE para o cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1, Sweby eVan Albada para CFL = 0,7	115
Tabela 5.20 – Valor de tempo computacional para o cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Davis 1, Sweby eVan Albada para CFL = 0,7.....	116
Tabela 5.21 – Valor de RMSE para o cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1, Sweby eVan Albada para CFL = 0,7	120
Tabela 5.22 – Valor de tempo computacional para o cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack, ambos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1 para CFL = 0,7	121

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AHTVD	<i>Harten flux corrected Total Variation Diminishing scheme</i>
ASTVD	<i>Sweby flux limited Total Variation Diminishing scheme</i>
CESE	<i>Conservation Element-Solution Element</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamic</i>
CFL	<i>Courant, Friedrichs e Lewy</i>
ENO	<i>Essentially Non-Oscilatory schemes</i>
FCT	<i>Flux Corrected Transport</i>
HWENO	<i>Hermit Weighted Essentially Non-Oscilatory scheme</i>
MP	<i>Monotonicity Preserving</i>
MPWENO	<i>Monotonicity Preserving Weighted Essentially Non-Oscilatory scheme</i>
MUSCL	<i>Monotonic Upwind Schemes of Conservation Laws</i>
QUICK	<i>Quadratic Upstream Interpolation</i>
SOU	<i>Upwind schemes</i>
TVB	<i>Total Variation Bounded</i>
TVD	<i>Total Variation Diminishing</i>
UMIST	<i>Upstream Monotonic Interpolation for Scalar Transport</i>
WENO	<i>Weighted Essentially Non-Oscilatory scheme</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

A_a	Área [m ²]
A_w	Área correspondente à superfície lateral do duto [m ²]
c	Velocidade do som [m/s]
c_p	Calor específico a pressão constante [J/(kg·K)]
c_v	Calor específico a volume constante [J/(kg·K)]
D	Diâmetro interno do duto [mm]
D_d	Diâmetro do duto [m]
e	Rugosidade absoluta [mm]
E	Energia [J]
F_a	Força [N]
F_{Bz}	Forças de campo na direção z [N]
F_{Sz}	Forças de superfície na direção z [N]
f_a	Forças atuantes [N]
f_{atr}	Fator de Fanning / Coeficiente de pressão
$flux$	Fluxo numérico
g	Gravidade [m/s ²]
h	entalpia de estagnação [kJ/kg]
h_{conv}	Coeficiente de convecção [W/(m ² ·K)]
k	Razão de calores específicos c_p/c_v
M	Número de Mach [-]
\dot{m}	Vazão mássica [kg/s]
Nu	Número de Nusselt [-]
P	Pressão [Pa]
P_P	Razão de pressões
Pr	Número de Prandtl [-]

Q	Taxa de transferência de energia na forma de calor [W]
q''	Fluxo de calor [W/m ²]
\dot{q}	Taxa de transferência de calor por unidade de massa [W/kg]
R	Constante particular do gás [J/(kg·K)]
Re	Número de Reynolds
St	Número de Stanton
T	Temperatura [K]
t	Tempo [s]
u	Energia interna [kJ/kg]
V	Velocidade constante das partículas nas zonas 2 e 3 [m/s]
\vec{V}	Vetor velocidade [m/s]
W	Trabalho [J]
w	Velocidade local do fluido na direção z [m/s]
z	Coordenada espacial [m]
α	Ângulo [°]
λ	Variáveis de Riemann
π	número PI
ρ	Massa específica [kg/m ³]
τ_w	Tensão cisalhante na parede do duto [Pa]
\forall	Volume [m ³]

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	22
1.1 JUSTIFICATIVA.....	25
1.2 OBJETIVOS.....	25
1.3 METODOLOGIA.....	25
1.4 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO.....	26
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	28
2.1 MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS EM PROBLEMAS COM DESCONTINUIDADE.....	28
3 MODELO MATEMÁTICO.....	44
3.1 EQUAÇÕES GOVERNANTES.....	44
3.2 PROBLEMA TESTE DO TUBO DE CHOQUE.....	46
3.2.1 Condições de Contorno.....	47
3.2.2 Solução Analítica.....	48
3.2.3 Adimensionalização de variáveis.....	52
4 MÉTODOS NUMÉRICOS.....	54
4.1 MÉTODO DE LAX-WENDROFF DE DOIS PASSOS.....	54
4.2 MÉTODO DE MACCORMACK.....	56
4.3 CRITÉRIO PARA O INCREMENTO DE TEMPO.....	58
4.4 LIMITADOR DE FLUXO TVD.....	58
4.4.1 Limitador de Fluxo TVD de Davis (1987).....	62
5 RESULTADOS.....	65
5.1 RESULTADOS ANALÍTICOS.....	65
5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS.....	68
5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O TVD DE DAVIS.....	78
5.2.1 TVD de Davis e função limitadora de Davis 1.....	78
5.2.2 TVD de Davis e função limitadora de Sweby.....	88
5.2.3 TVD de Davis e função limitadora de Van Albada.....	97
5.2.4 Comparação entre funções limitadoras.....	106
5.2.5 Comparação entre Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack.....	116
6 CONCLUSÕES.....	122
6.1 CONCLUSÕES SOBRE AS ANÁLISES NUMÉRICAS.....	122
6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	123

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	124
APÊNDICE A – Dedução das equações governantes do escoamento	129

1 INTRODUÇÃO

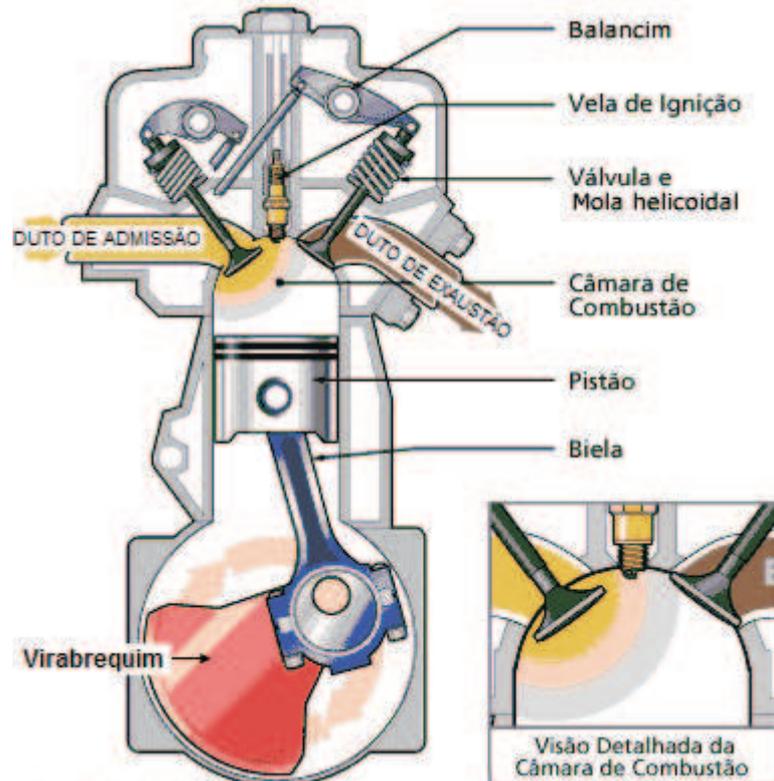
O desenvolvimento de motores de combustão começou no século XVIII. Na época o objetivo era somente a movimentação de máquinas estáticas, mas com o passar dos anos esses motores foram sendo aperfeiçoados. Em 1861, Otto e Langen construíram o primeiro motor que utilizava como combustível uma mistura de ar e gás de iluminação, que era comprimida, e a ignição era feita através de uma centelha elétrica, porém somente em 1889 o combustível se tornou a gasolina e o motor de ciclo Otto foi finalmente aplicado em veículos. Uma derivação dos motores de ciclo Otto foi desenvolvida por Rudolf Diesel em 1893, onde a explosão do ar com o combustível é feita por compressão (LAURA, 2013). Desde então essas duas classes de motores vem sendo amplamente utilizadas em veículos de transporte de pessoas e bens, devido ao seu alto nível de eficiência e potência em uma grande variedade de condições operacionais (ROSELLÓ *et al.*, 2002).

Atualmente vem se tendo a necessidade de otimizar as propriedades dos motores de combustão interna, devido ao aumento nos preços dos combustíveis derivados do petróleo e às leis ambientais cada vez mais rigorosas, o que leva a desenvolver motores mais econômicos e menos poluentes, porém sem perda de potência (MONTEIRO, 1999; OCH, 2009). O Brasil ainda é deficiente em linhas de pesquisas voltadas ao desenvolvimento de novas tecnologias para motores, pois na maioria das aplicações ocorre somente a tropicalização das peças fabricadas por fornecedores locais dos motores, ou seja, é feito um ajuste ou adequação do conjunto moto-propulsor às necessidades de uma região, podendo não levar aos resultados desejados. Com o desenvolvimento dos motores movidos a álcool as pesquisas nesse setor aumentaram, porém ainda há muitas possibilidades de expansão nesse campo (HANRIOT, 2001).

Os dutos de admissão e exaustão de motores são responsáveis por conduzir ar da atmosfera até o cilindro e conduzir os gases produzidos pela combustão até a atmosfera, respectivamente, Figura 1.1. Várias pesquisas têm sido desenvolvidas para estudar os fenômenos pulsantes e inerciais que ocorrem nos dutos, devido à sua grande influência na eficiência dos motores de combustão interna, principalmente no rendimento volumétrico. O rendimento volumétrico está relacionado com a capacidade que o motor possui em admitir ar atmosférico, sendo um parâmetro de medida da eficiência nos processos de admissão do ar e é definido como sendo a relação entre o volume de mistura ar-combustível que cada cilindro admite e a capacidade volumétrica nominal do cilindro. Sabendo-se disso, o dimensionamento e configuração geométrica dos dutos de admissão e descarga é realizado de maneira

diferenciada para atender a diferentes necessidades de projeto, como consumo, potência, rendimento volumétrico, torque a baixas rotações, entre outros. Sendo assim, os dutos otimizam o rendimento volumétrico dos motores, produzem baixas perdas de pressão ao longo do escoamento do ar e distribuem uniformemente a massa de ar entre os cilindros (HANRIOT, 2001).

Figura 1.1 – Representação dos componentes do motor de combustão interna



Fonte: BRAIN, 2003

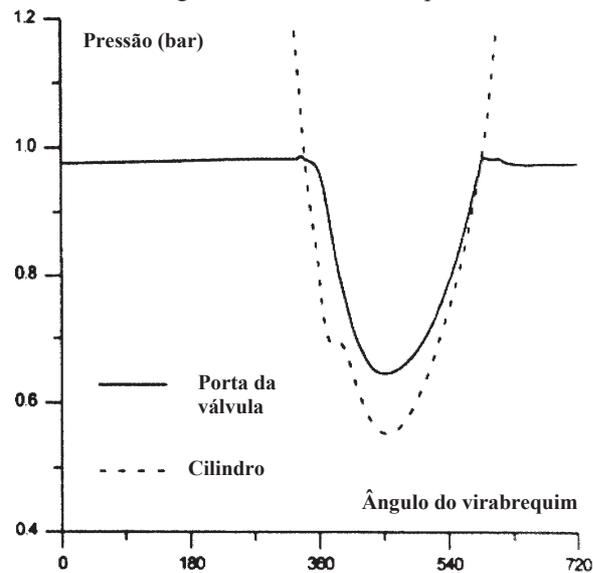
Os fenômenos inerciais e pulsantes dos dutos de admissão e exaustão se devem basicamente à sua interação com o conjunto válvula e pistão, o que gera uma condição específica de escoamento na entrada da válvula, Figura 1.2. Como a válvula trabalha de modo alternado para admitir e descarregar os gases de dentro do cilindro, ela se comporta como uma fonte de excitação que é respondida pelos dutos. Seu movimento periódico gera o movimento do gás (fenômeno inercial) e a variação de pressão entre a entrada dos dutos e o cilindro causa os fenômenos pulsantes, no caso, oscilação de pressão.

Essas perturbações se propagam como ondas de compressão, onda refletida que viaja em direção à porta da válvula, e rarefação, gerada na abertura da válvula, causando um

processo de compressões e expansões sucessivas devido às diferentes pressões das camadas de ar, que dura um determinado tempo e ocorre na velocidade do som, Figura 1.3.

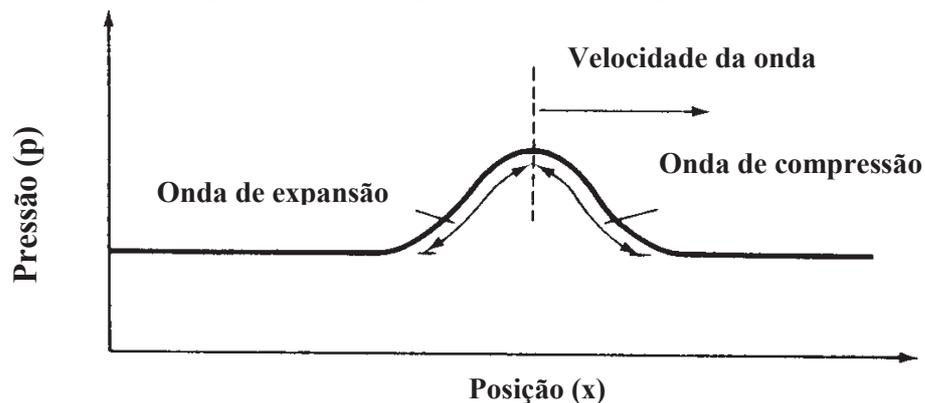
Os dutos reais não apresentam geometria reta e infinita, portanto, em algum ponto irá ocorrer reflexão da onda de rarefação em direção ao cilindro, o que torna a forma do pulso de pressão muito mais complexa (HANRIOT, 2001).

Figura 1.2 – Perfil da pressão no sistema de admissão em função do ângulo de movimento do pistão



Fonte: HANRIOT (2001)

Figura 1.3 – Perfil de pressão em função da posição



Fonte: HANRIOT (2001)

O aproveitamento dessas flutuações de pressão pode aumentar o rendimento volumétrico dos motores de combustão interna, principalmente quando as ondas de compressão chegam à porta da válvula no momento de seu fechamento, fazendo com que uma maior massa de ar entre no cilindro. O mesmo efeito pode ser obtido com a reflexão das ondas

de rarefação. Com um dimensionamento correto do comprimento, diâmetro, tamanho, ou tempo de abertura da válvula, entre outros fatores, é possível obter uma otimização no escoamento que ocorre nos dutos (HANRIOT, 2001; OCH, 2009; STONE, 1993).

1.1 JUSTIFICATIVA

O estudo dos fenômenos inerciais e pulsantes dos dutos de admissão e exaustão é de extrema importância durante o projeto das válvulas. Esse estudo pode ser realizado de forma experimental, teórico-empírica ou computacional. Atualmente os métodos computacionais vêm sendo os mais empregados, e através deles é possível compreender melhor os processos físicos, identificar diretrizes para um desenvolvimento experimental de novos projetos, fazer o levantamento do comportamento em diversas condições de operação, permitindo eliminar problemas antes da fabricação de protótipos, além de estabelecer ferramentas de apoio a inovações (TANNEHILL *et al.*, 1997). Há, porém, uma grande dificuldade em se utilizar métodos numéricos para essa representação devido à presença de descontinuidade de pressão entre o gás nos dutos de admissão e exaustão e o gás no interior do cilindro. É neste intuito que o presente trabalho é proposto visando estudar e aplicar os métodos numéricos de diferenças finitas com o limitador de fluxo TVD de Davis e três diferentes funções limitadoras em um problema teste de choque tubo, que simula fenômenos semelhantes aos que ocorrem em dutos de sucção e/ou descarga de motores de combustão interna.

Esses métodos de diferenças finitas foram escolhidos por serem alguns dos mais utilizados em diferentes aplicações, por apresentarem precisão de segunda ordem no tempo e no espaço, e por serem razoavelmente fáceis de implementar computacionalmente.

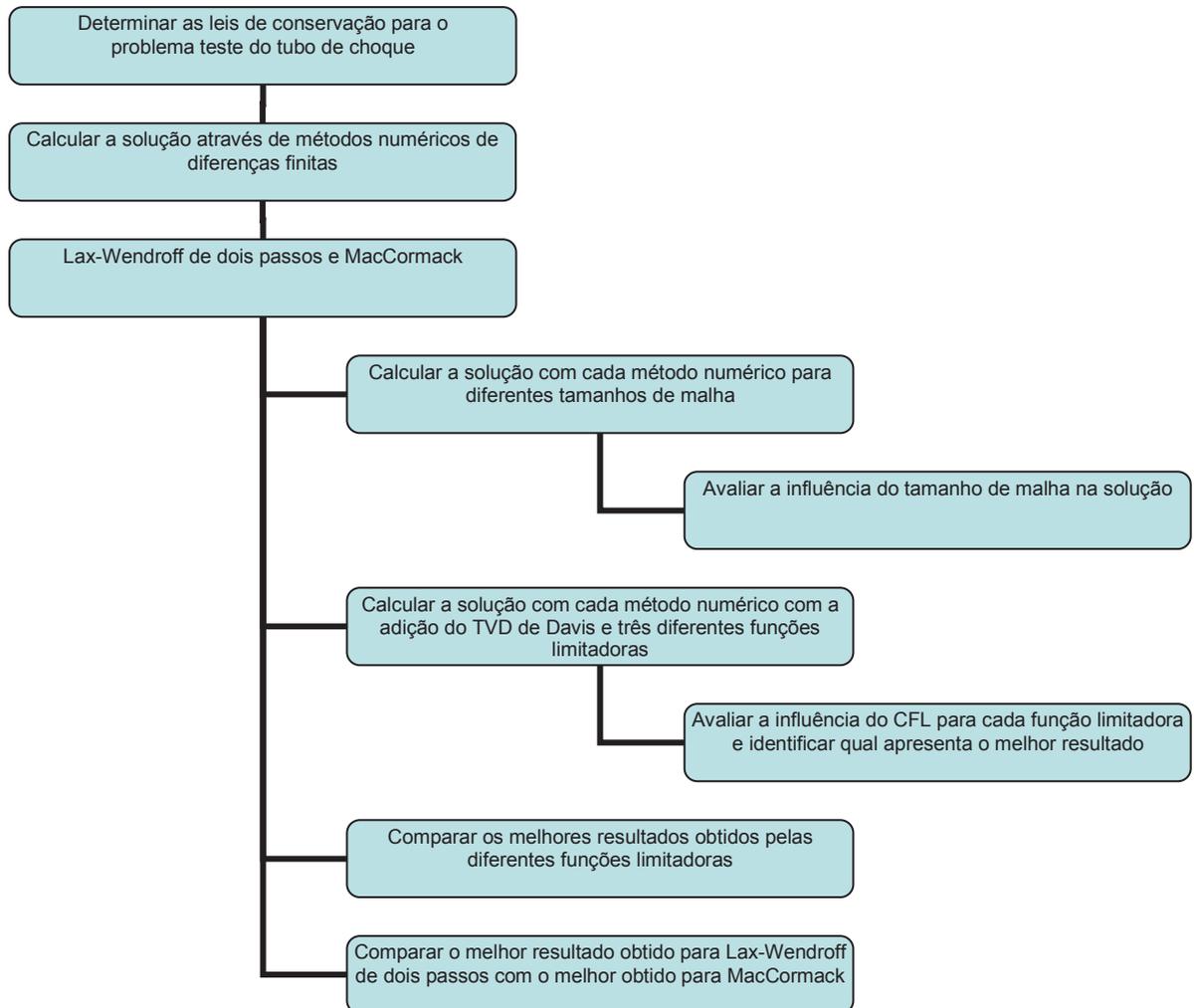
1.2 OBJETIVOS

Esse trabalho tem como objetivo principal estudar e aplicar os métodos numéricos de diferenças finitas de Lax-Wendroff de dois passos e de MacCormack, ambos com a adição do TVD de Davis para diferentes funções limitadoras e valores de CFL, buscando identificar o método que alia maior precisão e menor tempo computacional na solução de regiões com descontinuidade.

1.3 METODOLOGIA

A metodologia adotada nesse trabalho pode ser observada na Figura 1.4.

Figura 1.4 – Fluxograma da metodologia adotada



Como problema teste foi escolhido o tubo de choque, um problema unidimensional que representa de maneira simplificada os fenômenos inerciais e pulsantes que ocorrem dentro dos dutos de admissão e exaustão. As soluções das equações que governam o problema teste foram calculadas numericamente utilizando o software MATLAB® e todos os resultados numéricos foram comparados com solução analítica para se identificar o método mais adequado em função da precisão e tempo computacional.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO DOCUMENTO

Esse documento está organizado em seis capítulos. No Capítulo 2 será apresentada a revisão bibliográfica dos diferentes métodos numéricos de diferenças finitas capazes de

resolver as leis de conservação da quantidade de movimento e massa em problemas que possuem descontinuidade, bem como modificações em tais métodos, além de alguns resultados numéricos já obtidos na literatura para tais problemas.

O Capítulo 3 apresenta a dedução das leis de conservação para um escoamento unidimensional, compressível e transiente aplicada ao problema teste do tubo de choque.

Os métodos numéricos de Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack, bem como os limitadores de fluxo, são descritos e detalhados no Capítulo 4.

Os resultados numéricos obtidos neste trabalho são apresentados e discutidos no Capítulo 5 e as principais conclusões estão presentes no Capítulo 6.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Durante o desenvolvimento de motores de combustão interna, simulações e análises numéricas podem ser empregadas com o objetivo de aumentar a sua eficiência. Uma das maneiras de se fazer isso é estudando o correto aproveitamento dos fenômenos inerciais e pulsantes que surgem nos dutos de admissão e exaustão de motores, permitindo, assim, o aumento da sua eficiência volumétrica. Esses fenômenos têm influência no dimensionamento e configuração geométrica dos dutos e são consequência da interação do gás dentro deles e o conjunto válvula e pistão. Os parâmetros de projeto dos dutos podem, portanto, torná-los uma fonte de “sobre alimentação natural”, possibilitando que uma maior quantidade de massa de ar entre dentro dos cilindros, aumentando, conseqüentemente, a eficiência volumétrica dos motores.

Sabendo-se disso é importante representar os fenômenos inerciais e pulsantes de forma adequada para otimizar a eficiência volumétrica dos motores através do projeto dos dutos de admissão e exaustão. Há, porém, uma grande dificuldade em se aplicar métodos numéricos para essa representação devido à presença de descontinuidades nos perfis de temperatura entre o gás nos dutos de admissão e exaustão e o gás no interior do cilindro. Apesar das dificuldades, existem vários trabalhos na literatura empregando diversos métodos numéricos com e sem limitadores, o que motivou a realização deste trabalho. Alguns destes trabalhos são descritos brevemente na próxima seção.

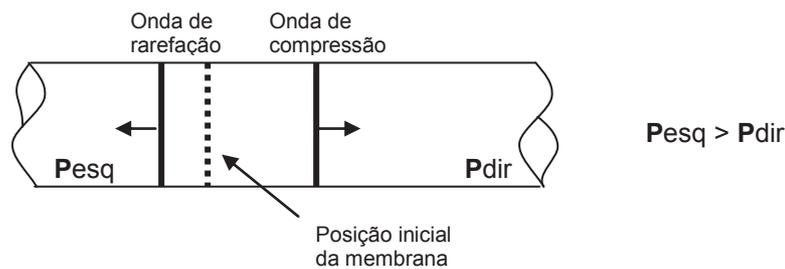
2.1 MÉTODOS NUMÉRICOS APLICADOS EM PROBLEMAS COM DESCONTINUIDADE

Com o objetivo de resolver problemas complexos de escoamento de fluidos e transferência de calor, surgiu no início do século XX uma metodologia hoje conhecida como CFD (Dinâmica dos Fluidos Computacional). Através da CFD, as equações que governam o escoamento de fluidos são resolvidas através de métodos numéricos. Embora análises tridimensionais sejam muito úteis para se modelar e entender o escoamento em dutos, em alguns casos eles podem ser tratados unidimensionalmente para reduzir o tempo computacional. A abordagem unidimensional pode ser utilizada para o projeto de dutos de admissão e exaustão de motores de combustão interna. Para a aplicação unidimensional é importante escolher adequadamente funções de interpolação norteadas nos princípios das leis

de conservação e aplicar essas funções em um modelo matemático que seja adequado ao escoamento em estudo (ROSELLÓ *et al.*, 2002 e TANNEHILL *et al.*, 1997).

O tubo de choque pode ser modelado unidimensionalmente sendo capaz de representar de maneira simplificada os fenômenos inerciais e pulsantes que ocorrem nos dutos de admissão e exaustão dos motores de combustão interna. Basicamente consiste em um tubo infinito de diâmetro constante, onde existe uma membrana que separa uma região de alta pressão e massa específica, de uma região de baixa pressão e baixa massa específica. No tempo zero essa membrana se rompe e o gás a alta pressão escoar em direção ao gás de baixa pressão, Figura 2.1. Essas duas regiões com condições diferentes de pressão e temperatura podem ser compreendidas como a entrada dos dutos e a câmara de combustão e a membrana como a entrada da válvula (SHAPIRO, 1953).

Figura 2.1: Modelo esquemático do problema teste do tubo de choque



As equações que governam o escoamento unidimensional tanto nos dutos de admissão e exaustão como no problema teste do tubo de choque formam um conjunto de equações diferenciais parciais denominadas hiperbólicas. Esse tipo de equação possui características muito particulares, pois permite a propagação de ondas com velocidade finita, denominada “velocidade de propagação da perturbação da pressão” ou “velocidade do som”, e a presença de descontinuidades nos perfis de solução (HANRIOT, 2001).

A busca por métodos matemáticos capazes de resolver as equações diferenciais parciais hiperbólicas, que representam as leis de conservação, começou com Courant, Friedrich e Lewy em 1928. A principal contribuição daqueles autores foi a definição de uma condição para regular o incremento de tempo nas soluções das equações hiperbólicas, conhecida como CFL (Courant, Friedrich e Lewy). Segundo aquela condição, a razão entre o incremento do espaço, Δz , pelo incremento do tempo, Δt deve ser menor ou igual à velocidade de propagação da perturbação existente, a qual é obtida pela soma da velocidade do fluido, w , com a velocidade do som, c , Equações 1.1 e 1.2.

$$(c + |w|) \leq \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (1.1)$$

$$CFL = (c + |w|) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta z} \leq 1 \quad (1.2)$$

Fisicamente a condição de Courant especifica que uma perturbação não deve avançar mais do que um incremento de espaço em um determinado intervalo de tempo, assim é possível determinar o incremento de tempo adequado para cada modelo estudado. O valor do CFL deve ser menor ou igual a um e maior do que zero (TANNEHILL *et al.*, 1997; ONORATI *et al.*, 1997).

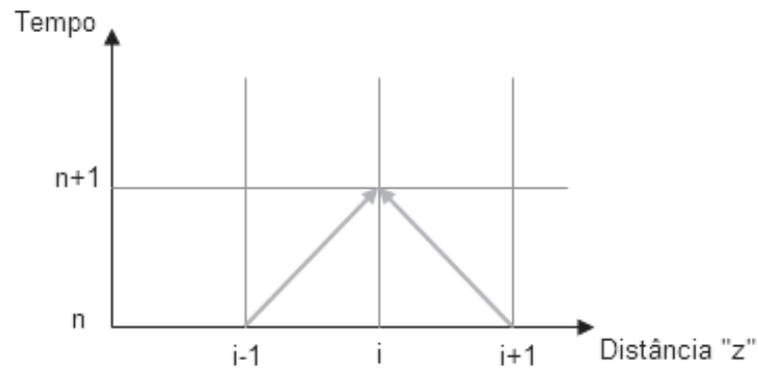
O grande desenvolvimento de métodos numéricos de diferenças finitas para a solução das equações diferenciais parciais hiperbólicas começou no início dos anos 50. A ideia dos métodos de diferenças finitas é muito simples, o valor da derivada é obtido pela razão de duas diferenças de acordo com a definição teórica de derivada. Sendo $w(z)$ uma função, a derivada teórica no ponto z é definida como:

$$w_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z} \quad (1.3)$$

removendo o limite tem-se a expressão do método de diferenças finitas. Esse método calcula uma aproximação do valor da derivada para um determinado Δz . O valor de Δz deve ser pequeno, porém finito, e quanto menor for seu valor, menor é o erro introduzido na solução. Esse erro é chamado de erro de truncamento. O valor do Δz com o qual o erro de truncamento tende à zero é chamado de ordem de precisão do método numérico.

Peter Lax foi o precursor, em 1954 desenvolveu o método de Lax-Friedrich, um método explícito de primeira ordem que é obtido discretizando a derivada temporal por diferenças progressivas e a derivada espacial por diferenças centrais, Figura 2.2. Métodos de primeira ordem são muito dissipativos, atenuando descontinuidades, por isso em 1977, Harten desenvolveu o método de compressão artificial para ser utilizado juntamente com métodos de primeira ordem. O intuito do método é agravar as descontinuidades, modificando a equação original e resolvendo essa equação modificada. Apesar disso, atualmente o método de Lax-Friedrich e outros métodos de primeira ordem são raramente utilizados (SOD, 1978; HIRSCH, 1990; TANNEHILL *et al.*, 1997; BEZERRA, 2003; LISKA *et al.*, 2011).

Figura 2.2 – Discretização do domínio para o método de Lax-Friedrich



Em 1960 Lax e Wendroff propuseram uma modificação do método de Lax-Friedrich, expandindo-o para segunda ordem. O método de Lax-Wendroff é obtido expandindo as equações governantes do escoamento em série de Taylor e discretizando tanto a derivada espacial como a temporal por diferenças centrais de primeira e segunda ordem respectivamente (SOD, 1978; HIRSCH, 1990; TANNEHILL *et al.*, 1997; BEZERRA, 2003; LISKA *et al.*, 2011).

Richmeyer e Morton criaram, em 1967, uma evolução do método de Lax-Wendroff, chamando de Lax-Wendroff de dois passos. Por aquele método a solução é obtida através do método de Lax-Friedrich para um ponto médio no primeiro passo e do método de *Leap-Frog* no segundo passo para o restante do incremento de tempo, Figura 2.3, resultando em um método com precisão de segunda ordem. O método de *Leap-Frog* é de segunda ordem e utiliza três níveis de incremento de tempo para o cálculo da solução, fazendo a discretização espacial e temporal por diferenças centrais (SOD, 1978; HIRSCH, 1990; TANNEHILL *et al.*, 1997; BEZERRA, 2003).

Alguns anos mais tarde, em 1969, surgiu o método de MacCormack, derivado do método de Lax-Wendroff, com aplicação para resolver problemas de escoamento. Esse método também é composto por dois passos, um passo preditivo (*predictor step*) e um corretivo (*corrector step*). No passo preditivo é feita uma discretização espacial avançada de primeira ordem e no passo corretivo é obtido o valor final também com uma discretização espacial de primeira ordem, mas dessa vez, recuada, Figura 2.4 (SOD, 1978; HIRSCH, 1990; TANNEHILL *et al.*, 1997; BEZERRA, 2003).

Uma semelhança entre os métodos descritos previamente, é que todos são explícitos, ou seja, eles calculam o estado do sistema em um tempo à frente através de seu estado atual. Vários outros métodos de segunda ordem foram desenvolvidos ao longo dos anos, entre eles o

método *upwind* (SOU) (1967), proposto por Warming e Beam (1976), método de Rusanov (1962), método de Godunov (1962), método de Glimm (1965), entre outros. Os métodos de segunda ordem, apesar de não serem dissipativos, são conhecidos por apresentar grandes oscilações na presença de descontinuidades, o que acaba por gerar valores espúrios na solução, sendo, portanto, dispersivos. Na Figura 2.5 é possível verificar as oscilações encontradas na solução do problema do tubo de choque pelo método de MacCormack (SOD, 1978; HIRSCH, 1990; TANNEHILL *et al.*, 1997; BEZERRA, 2003).

Figura 2.3 – Discretização do domínio para Lax-Wendroff de dois passos

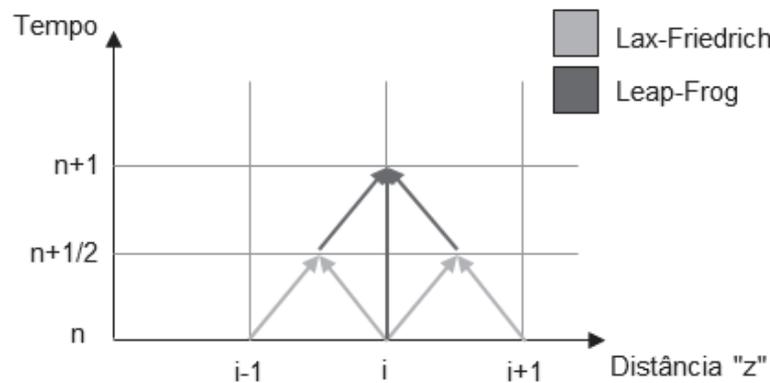
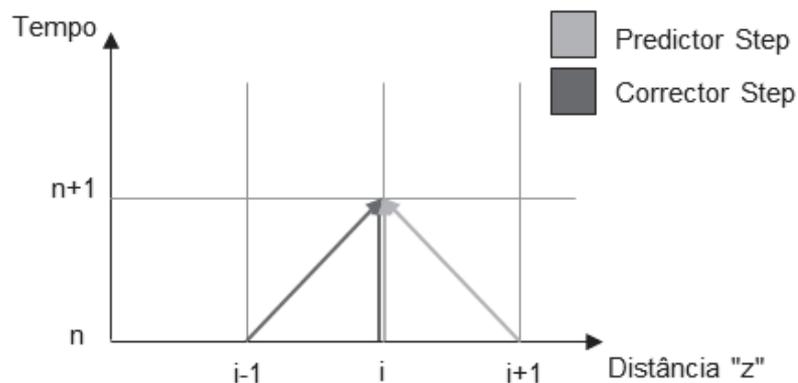


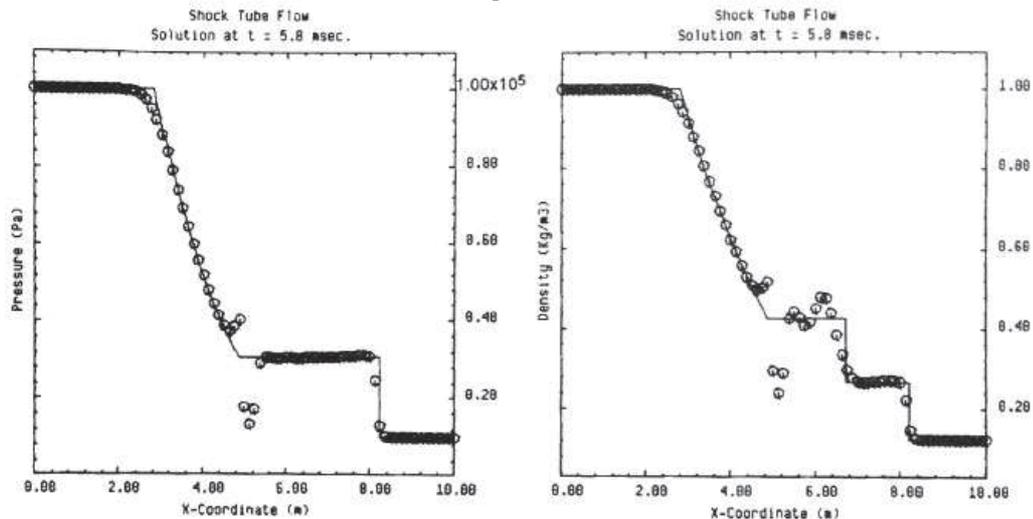
Figura 2.4 – Discretização do domínio para MacCormack



Os métodos de Lax-Wendroff e MacCormack são alguns dos métodos de diferenças finitas mais utilizados em diversas aplicações até os dias de hoje. Com o intuito de aplicar um método de diferenças finitas mais adequado para a análise de ruído em sistemas de exaustão de motores, Payri *et al.* (1996) compararam os métodos de Lax-Wendroff e MacCormack através da solução de um problema de tubo de choque. Aquele trabalho mostrou que o

resultado dos dois métodos é muito similar, porém o MacCormack apresentou algumas vantagens como menor dispersão para as ondas de compressão, as quais são predominantes no escoamento dos dutos de exaustão, e menor tempo computacional. Por outro lado, o método de Lax-Wendroff apresenta menos oscilações nas ondas de rarefação.

Figura 2.5 – Resultados do tubo de choque calculado pelo método de MacCormack para pressão e massa específica



Fonte: HIRSCH, 1990

Com o passar dos anos, vários autores buscaram desenvolver modificações para esses métodos com a finalidade de obter métodos mais precisos e com um menor tempo computacional. Kim (2007) propôs uma modificação no método de Lax-Wendroff, no qual as expansões das equações governantes do escoamento são realizadas através da teoria do caos, sendo assim, ao invés de utilizar expansões de Taylor, o método utiliza expansões de Fourier. O objetivo dessa modificação é utilizar condições iniciais aleatórias para a solução das equações de Burger, nome atribuído às leis de conservação de massa e da equação da quantidade de movimento linear para problemas com fluidos ideais. A solução do método de Lax-Wendroff modificado foi comparada com a solução obtida por Monte Carlo, um método estatístico. Resultados com maior precisão e soluções mais rápidas, porém ainda apresentando oscilações, foram obtidos.

Outros autores transformaram o método de MacCormack em um método implícito, ou seja, utilizando tanto o estado atual e posterior para encontrar uma solução. Hixon e Turkel (2000) tinham o objetivo de obter soluções de alta precisão quando aplicaram métodos compactos à métodos MacCormack explícitos e de alta ordem desenvolvidos em outros trabalhos. Os métodos compactos utilizam matrizes implícitas onde cada derivada depende do

valor das derivadas vizinhas. Esse estudo resultou em métodos de diferenças finitas de maior precisão, comparando com o original, porém com maiores oscilações no problema do tubo de choque. Esses dois novos métodos podem ser facilmente implementados em códigos computacionais já existentes, os quais já utilizam o método original de MacCormack.

Com o intuito de controlar e limitar as oscilações dos métodos de diferenças finitas de segunda ordem, Von Neumann e Richtmyer introduziram, em 1950, o conceito de viscosidade artificial e dissipação artificial. Esses termos adicionais devem ser atribuídos aos métodos de segunda ordem e tem a função de simular os efeitos de uma viscosidade física, porém na escala da malha, localmente ao redor de descontinuidades e são desprezíveis em regiões suaves, reduzindo, assim, as oscilações originadas pelos métodos originais (HIRSCH, 1990; HARTEN, 1997).

Viscosidades artificiais de alta ordem foram primeiramente apresentadas por MacCormack e Baldwin em 1975 e Jameson em 1982, ambas possuem uma boa capacidade de serem dissipativas nas descontinuidades, mas agravantes nas regiões suaves. Desde então muitos outros autores procuraram determinar diferentes formas de viscosidade artificial (HIRSCH, 1990; HARTEN, 1997).

A viscosidade artificial não é capaz, porém, de eliminar completamente as oscilações geradas pelos métodos de segunda ordem, e tem a tendência de gerar uma perda de precisão nos resultados, assim se tornou necessário buscar métodos alternativos. Começaram a surgir, então, vários métodos que buscavam obter resultados melhores e mais precisos, entre eles o FCT (*Flux Corrected Transport*) de Boris e Book (1973) e Zalesak (1979), o método de Godunov (1959), o método de MUSCL (*Monotonic Upwind Schemes of Conservation Laws*), as aproximações de Riemman proposta por Roe (1981) e Osher (1984) e o TVD (*Total Variation Diminishing*), um dos mais utilizados até hoje, que foi inicialmente proposto por Harten em 1983 (TANNEHILL *et al.*, 1997).

Harten observou que para garantir que um método não apresente oscilações, ele deve ser monotônico, para isso os métodos TVD reduzem para primeira ordem a solução em regiões de extremo como descontinuidades. Essa propriedade é obtida com uma combinação não linear de um método de alta ordem com um método monotônico de primeira ordem (TVD), desse modo, as oscilações geradas pelo método de alta ordem são suprimidas pela dissipação numérica dos métodos TVD, ocorrendo somente nas regiões necessárias (HARTEN, 1997). A partir da introdução do conceito de TVD, inúmeros autores propuseram seu próprio método TVD ou fizeram as mais diversas aplicações e comparações dos métodos existentes.

Um dos trabalhos mais importantes sobre os métodos TVD, depois do de Harten (1997), é o de Sweby (1984), que apresentou a implementação em métodos de diferenças finitas, além de fazer uma comparação entre os métodos de Van Leer, Roe e Chakravarthy e Osher e propor um TVD de alta resolução. Em suas comparações Sweby concluiu que os métodos de Roe e Chakravarthy e Osher são equivalentes em representar com precisão as descontinuidades, já o TVD de Van Leer não é tão preciso, porém é mais confiável quando se tem problemas não lineares.

O TVD proposto por Sweby foi reformulado por Davis (1987) simplificando a parcela do termo dissipativo, o que resultou em um método simétrico, porém mais dispersivo que o original. A partir dessa modificação, Roe alterou a proposta de Davis, incluindo uma classe de TVD que não havia sido levada em conta, tornando-a um caso especial de seu método (YEE, 1987). Yee (1987) estudou, então, uma maneira de utilizar o método de Davis e Roe como limitadores em problemas com regime permanente, incorporando os resultados obtidos por esses métodos, com uma pequena modificação, para métodos TVD implícitos e explícitos.

Um novo limitador TVD foi proposto por Galiano e Zapata (2010), o qual é baseado no método de Lax-Wendroff de dois passos combinado com um método *upwind* e uma função limitadora de fluxo não convencional sendo realizado em dois passos. Para validar o método ele foi implementado na solução do problema do tubo de choque e comparado somente com o limitador Minmod, já que os resultados dos métodos TVD padrões são muito similares. O resultado obtido mostrou que o novo método é estável e preserva a estabilidade do método de Lax-Wendroff de dois passos.

Antes do surgimento do TVD, Sod (1978) estudou a diferença de vários métodos aplicados ao problema do tubo de choque. Ele analisou métodos de primeira ordem e de segunda ordem como Godunov, Lax-Wendroff, MacCormack, Rusanov, *upwind* e um método diferente chamado Glimm, todos esses métodos são, no entanto, muito similares. Querendo melhorar o desempenho desses métodos foram utilizados, também, viscosidade artificial e compressão artificial para corrigir os resultados. Entre os métodos sem correção, o que obteve melhores resultados foi Godunov, já o método de Glimm foi o que conseguiu representar com maior precisão as descontinuidades e ondas de choque, apesar das posições não serem exatas devido à aleatoriedade do método. Em relação aos métodos corretivos, todos apresentaram bons resultados, a desvantagem de sua utilização é, porém, a escolha de seus parâmetros, os quais podem influenciar consideravelmente na sua solução e dependem de cada problema (HIRSCH, 2007).

Buscando aplicar os métodos TVD para o cálculo do escoamento nos dutos de motores de combustão interna, Corberán e Gascón (1995) desenvolveram o método FCT e o TVD, proposto originalmente por Harten, para aplicação em problemas com dutos de seção variável. Para não se obter resultados dispersivos devido à variação de seção foi necessário tratar todas as diferenças do método como diferenças de fluxo, o que só pode ser aplicado ao método TVD e não ao FCT. Os resultados obtidos apresentaram pouca difusão e boa precisão em representar os choques presentes no escoamento. As contribuições de Corberán e Gascón (2001) em outros trabalhos possibilitaram adaptar os métodos TVD de Harten e Sweby para problemas não homogêneos, aqueles nos quais é necessário considerar os termos fonte, transferência de calor e atrito entre o fluido e as paredes do duto, melhorando a análise do escoamento nos dutos de exaustão e admissão. Isso pode ser feito ao considerar os termos fontes como parte do escoamento, assim, os métodos passaram a ser conhecidos por AHTVD e ASTVD.

Com o mesmo objetivo de Corberan e Gascón (1995), Payri *et al.* (2004) comparou diversos métodos para resolver o problema de escoamento em dutos cônicos, buscando definir o mais eficiente em termos de precisão e tempo computacional. Suas análises envolveram desde o FCT de Boris e Book, combinado com o Lax-Wendroff de dois passos, como o TVD modificado de Harten e Sweby, AHTVD e ASTVD, e o método CESE (*Conservation Element-Solution Element*) desenvolvido por Chang (1995), o qual é um método muito simples, que não necessita a implementação de limitadores de fluxo para remover as oscilações. Em seus resultados Payri *et al.* (2004) concluiu que o CESE é o método mais rápido, porém não tão eficiente como os outros por gerar erros no cálculo da conservação de massa, porém se a rapidez de cálculo for um fator importante, o ASTVD é o mais indicado, por ter precisão muito similar ao AHTVD, porém com um menor tempo computacional.

Ainda com o intuito de definir o melhor limitador de fluxo para a simulação de escoamento nos dutos de admissão e exaustão de motores, Person e Winterbone (1997) estudaram dois métodos em particular, o FCT e o TVD de Davis, aplicando ambos ao problema do tubo de choque juntamente com o Lax-Wendroff de dois passos. Tanto o FCT como o TVD de Davis mostraram bons resultados em reduzir as oscilações apresentadas pelo método de segunda ordem, no entanto o FCT pode introduzir modificações espúrias na solução, o que não ocorre quando se utiliza o TVD.

Enquanto vários autores se contentavam em aplicar os métodos TVD's já existentes, Daru e Tenaud (2004) se dedicaram a desenvolver métodos de um passo com propriedades TVD de alta precisão. O novo método segue a abordagem de Lax-Wendroff combinada com

uma correção sucessiva das equações modificadas, dessa maneira é possível obter propriedades TVD com precisão de até sétima ordem em regiões que não apresentam descontinuidades. Perto de descontinuidades, assim como todos os outros TVD's, a solução fica ligeiramente amortecida, mas com a utilização de propriedades, como preservação de monotonicidade (MP), para relaxar a solução, isso pode ser corrigido. De maneira geral, o método final com MP apresentou resultados precisos para longos tempos de integração.

Não satisfeito com o TVD, Harten *et al.* (1997) desenvolveram em 1986 o conceito de métodos essencialmente não oscilatórios (*Essentially Non-Oscillatory schemes*), ENO. A necessidade de desenvolver um novo método surgiu pelo fato que métodos TVD, independentes de sua formulação, têm precisão de primeira ordem em regiões de descontinuidades. O estudo começou com a definição de métodos estritamente não oscilatórios a partir de uma modificação do TVD MUSCL, no entanto, eles eram limitados a uma precisão de ordem dois. Sendo assim, surgiu o ENO, método sem limitadores de monotonicidade que permite soluções com oscilações espúrias, mas elimina o fenômeno de Gibbs.

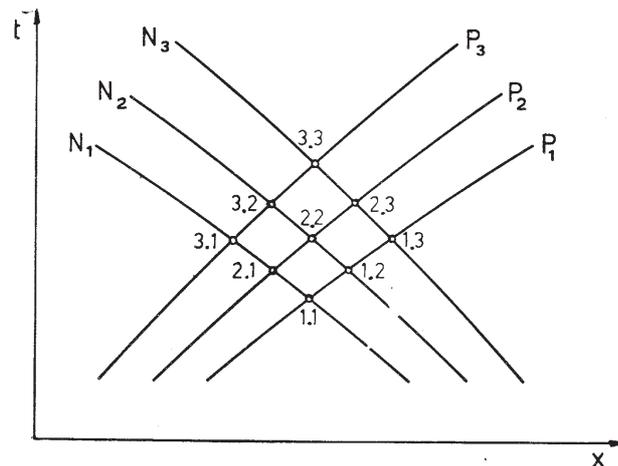
Basicamente o método ENO trabalha com a discretização temporal do tipo Lax-Wendroff e reconstrução da solução através de uma média dos valores de cada célula, utilizando uma matriz de solução adaptativa, que quando encontra oscilações crescentes na solução, muda sua orientação e usa os dados das regiões mais suaves evitando o aumento da instabilidade. No entanto essa reconstrução é realizada em todas as regiões do escoamento, o que não é necessariamente eficiente em termos de custo computacional.

Dois anos mais tarde uma modificação do método ENO foi proposta por Shu e Osher (1988) com o intuito de simplificar a implementação em problemas multidimensionais. Segundo aqueles autores há dois parâmetros que podem ser alterados para se obter um método de fácil implementação, a discretização temporal e a reconstrução. Dessa maneira, para o ENO modificado, a discretização temporal é feita por TVD Runge-Kutta de primeira ordem e a reconstrução com a utilização de fluxo numérico, ao longo das linhas características, ao invés de uma média dos valores de cada célula. As linhas características podem ser definidas como a representação do percurso de uma perturbação no plano do espaço em função do tempo, Figura 2.6, matematicamente são as curvas nas quais as equações diferenciais parciais podem ser transformadas em equações diferenciais totais.

Os métodos de Runge-Kutta fazem parte de uma família importante de métodos iterativos implícitos e explícitos para resolver as equações diferenciais parciais e o cálculo do fluxo numérico pode ser feito através de diferentes métodos, o de Lax-Friedrich é, porém, o

mais recomendado apesar de ter precisão de primeira ordem. Os resultados obtidos com esse método mostram que ele é capaz de representar bem as discontinuidades provenientes de ondas de choque sem apresentar oscilações.

Figura 2.6 – Curvas características



Fonte: HANRIOT, 2001

Baseando-se no ENO de Harten *et al.* (1997), Jeng e Payne (1995) desenvolveram um TVD adaptativo, o qual é a combinação de métodos difusivos e compressivos. Basicamente o método consiste em ser um limitador compressivo perto de discontinuidades, ser TVD de terceira ordem em regiões suaves e ser uma média de valores na transição de região suave para regiões de grandes gradientes. No problema do tubo de choque o método é capaz de representar bem as ondas de choque, mas algumas oscilações aparecem na onda de contato, o que se deve a uma dissipação insuficiente do método. Arora e Roe (1997) mostraram que o TVD adaptativo possui uma precisão muito melhor em relação aos outros métodos TVD, e é competitivo com o ENO, por sua implementação ser mais eficiente, seu custo computacional menor e ser capaz de utilizar passos no tempo menos restritivos.

Em 1994 surgiu o WENO (*Weighted Essentially Non-Oscillatory*) proposto por Liu *et al.* (1994), isto é, uma nova proposta ao ENO de Harten (1997). O WENO é formulado através do método de volumes finitos e utiliza discretização temporal por TVD Runge-Kutta, e solução através da média dos valores de cada célula, a grande diferença para o método original é, porém, a reconstrução. Na reconstrução WENO, ao invés de escolher os dados das regiões mais suaves para o cálculo da solução, usa-se uma combinação convexa de todos os possíveis dados e determina-se qual será a contribuição de cada um desses dados para se obter uma solução essencialmente não oscilatória. Dessa maneira é possível realizar a reconstrução

somente nas regiões de descontinuidades, reduzindo o tempo computacional em relação ao ENO, obtendo resultados mais suaves, eliminando erros provenientes do truncamento do método e aumentando uma ordem de precisão.

Jiang e Shu (1996) analisaram, testaram, modificaram e melhoraram o método WENO, desenvolvendo-o com base no ENO de Shu e Osher (1988). A modificação proposta para esse novo WENO foi mudar a maneira de se determinar qual a contribuição de cada dado para a etapa de reconstrução da solução, sendo assim, o método para determinar a suavidade de cada dado da combinação convexa baseou-se na ideia de simular uma minimização das propriedades de variação total das soluções numéricas.

Com o intuito de melhorar a precisão do método para as descontinuidades de contato foi implementada a compressão artificial de Yang junto com o WENO. Entre os diversos testes feitos com o método, um deles foi para o problema do tubo de choque. Os resultados mostraram uma boa precisão e mantiveram a mesma rapidez computacional do WENO de Shu e Osher (1988), porém a adição da compressão artificial aumentou o tempo computacional em 100%.

O método WENO foi modificado novamente por Balsara e Shu (2000), dessa vez com o intuito de incluir no método a propriedade de preservação de monotonicidade através de formulação por diferenças finitas. Para problemas unidimensionais, incluindo o Tubo de choque, o MPWENO se mostrou preciso para problemas lineares e não lineares, no entanto, na presença de descontinuidades a precisão diminui um pouco, mas mantém uma boa representação, principalmente se comparado com os métodos TVD. De maneira geral o método é estável para CFL normal e não é computacionalmente complexo.

Qiu (2007) propôs utilizar discretização temporal por Lax-Wendroff ao invés do popular TVD Runge-Kutta no método WENO, além de estudar a possibilidade de não utilizar a contribuição de alguns dados da combinação convexa em parte da solução, para reduzir o custo computacional sem perder a precisão. Em comparação com o WENO de Jiang e Shu (1996) este apresentou menor custo computacional e uma reconstrução mais compacta.

Liu *et al.* (2009) fez a mesma aplicação do método de Lax-Wendroff no ENO de Harten *et al.* (1997). Os resultados foram muito similares aos de Qiu (2007), inclusive para o problema do tubo de choque, boa representação do fluxo sem apresentar oscilações e menor tempo computacional em relação ao ENO original, entretanto para problemas com descontinuidades expressivas, como o tubo de choque de Leblanc, pode-se perceber a presença de algumas oscilações espúrias na solução.

Como uma alternativa aos métodos de diferenças finitas existe os métodos de elementos finitos para resolver equações diferenciais parciais hiperbólicas, os quais consistem em substituir uma integral de um domínio complexo por um somatório de integrais de subdomínios de geometria simples. Um dos mais utilizados é o de Galerkin descontínuo, que utiliza uma discretização espacial em elementos finitos descontínua. Devido à linearidade do problema a solução pode ser obtida explicitamente nas linhas características (HANRIOT, 2001; ONORATI *et al.* 1997; COCKBURN e SHU, 1989).

Com o objetivo de resolver problemas não lineares com descontinuidades, Cockburn e Shu (1988) refinaram o método de Galerkin Descontínuo para resolver as leis de conservação, assim eles criaram o Runge-Kutta Galerkin Descontínuo com projeção local. Esse método utiliza um limitador de projeção local que é baseado no conceito de projeções preservadoras de monotonicidade introduzidas por Van Leer (1979), a discretização temporal é feita através do TVD Runge-Kutta de segunda ordem e a discretização espacial pelo método de Galerkin Descontínuo para o qual a solução aproximada é linear por partes no espaço. As soluções obtidas para diversos problemas teste indicam que o método é estável, com precisão de segunda ordem em regiões suaves e capaz de representar bem as descontinuidades, além de ser de fácil implementação e não depender do tipo de não linearidade dos problemas em análise. Por outro lado o método também possui algumas desvantagens, sua precisão é somente de primeira ordem no tempo e nas descontinuidades e para um CFL fixo o método é linearmente instável.

Cockburn e Lin (1989) modificaram o método batizando-o como TVB (*Total Variation Bounded*) Runge-Kutta Galerkin Descontínuo com projeção Local. O método utiliza a mesma discretização espacial, mas modifica o limitador de projeção local para recuperar a alta precisão em descontinuidades e usa um TVD Runge-Kutta de segunda ordem. A vantagem desse método em comparação aos demais métodos de elementos finitos é ser explícito no tempo, já em comparação com os métodos de diferenças finitas sua vantagem é ser capaz de resolver de maneira mais simples problemas com geometrias complexas e condições de contorno. A aplicação em problemas unidimensionais como o tubo de choque mostrou boa precisão na solução, que é comparável à dos métodos ENO. Continuando o estudo, Cockburn e Shu (1989) generalizaram o método para altas ordens e para resolução de problemas de valores e condições iniciais obtendo resultados livres de oscilações na presença de descontinuidades.

Onorati *et al.* (1997) fizeram uma comparação entre o método de Galerkin Descontínuo de segunda e terceira ordem de Cockburn e Lin (1989) e Cockburn e Shu (1989),

respectivamente, e os métodos de diferenças finitas de Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack com adição de FCT e o TVD de Davis para escoamentos unidimensionais em dutos.

Para os métodos de diferenças finitas, os resultados sem adição de FCT ou TVD se mostraram muito similares, ambos apresentando oscilações nas regiões de descontinuidades. Com a adição do FCT as oscilações reduziram, mas não totalmente, já com o TVD de Davis elas foram completamente eliminadas, no entanto a descontinuidade de contado ficou levemente dissipada. Apesar de ambos os resultados terem precisão muito similar às obtidas por Galerkin Descontínuo, o método de elementos finitos de terceira ordem conseguiu representar de maneira muito mais eficiente as descontinuidades, sendo escolhido como o método que melhor representa o escoamento em dutos. Uma vantagem adicional do Galerkin Descontínuo é sua flexibilidade de refinamento local da malha, o que o adéqua a problemas com variação da área de seção dos dutos e com atrito e transferência de calor através das paredes.

Qiu *et al.* (2005) utilizaram a metodologia de WENO de Liu *et al.* (1994) como limitador para o método de Runge-Kutta Galerkin Descontínuo, devido a sua maior robustez na presença de grandes descontinuidades quando comparado aos demais limitadores. O primeiro passo para a implementação do WENO como limitador é identificar as células que necessitam de um limitador através do TVB do método de Runge-Kutta e substituir a solução dessas células utilizando o passo de reconstrução do WENO, mantendo a mesma ordem de precisão, porém com menos oscilações. Diversos problemas testes com a presença de descontinuidades foram testados e mostraram que o método é estável, preciso e robusto em manter sua precisão.

Após verificar a viabilidade de utilizar o WENO como limitador do método Runge-Kutta Galerkin Descontínuo, Qiu e Shu (2003) apresentaram o Hermite WENO (HWENO), uma modificação do WENO original destinada a resolver os sistemas hiperbólicos não lineares das leis de conservação unidimensionais. O método baseia-se na interpolação de ambos os valores da função e de sua derivada num conjunto de nós e os utiliza na etapa de reconstrução da solução. Dessa maneira é possível ter uma reconstrução mais compacta que a do WENO de Liu *et al.* (1994) quando testado para diversos problemas unidimensionais, tornando-o um limitador mais adequado ao método Runge-Kutta Galerkin Descontínuo.

Qiu *et al.* (2005) sugeriu uma nova modificação para o método de Galerkin Descontínuo. Dessa vez o objetivo era utilizar discretizações temporais pelo método de Lax-Wendroff ao invés do tradicional Runge-Kutta, mantendo, porém, o WENO e o HWENO

como limitadores. Vários problemas testes foram solucionados por esse novo método e mostraram que ele é mais compacto e tem menor custo computacional em relação ao Galerkin Descontínuo com discretização temporal por Runge-Kutta. A contribuição para a utilização de WENO como limitador do método de elementos finitos de Galerkin continuou com Zhu *et al.* (2008), quando a implementação foi estendida para problemas bidimensionais e em 2011 quando estudou a solução de escoamentos unidimensionais com vários meios como gás-gás e gás-água (ZHU *et al.*, 2011). Para ambos os casos o método se mostrou estável, preciso e robusto para a resolução de diversos problemas teste com presença de descontinuidades.

Para a solução de equações de derivadas parciais hiperbólicas existe, ainda, o Método das Características de Riemann. Sua primeira aplicação a motores foi em 1950 por Jenny, mas somente em 1964 Benson *et al.* obteve uma solução numérica através do método. No método das características as derivadas parciais são transformadas em derivadas ordinárias ao longo das linhas características. Para escoamentos com descontinuidades esse método não apresenta oscilações na solução numérica, descrevendo-as com excelente precisão, porém seu algoritmo apresenta grande complexidade e o tempo computacional é consideravelmente extenso, mesmo assim é um dos mais utilizados na análise de dutos de sistemas de combustão interna (ALEGRE, 1993; STONE, 1993; ONORATI *et al.*, 1997).

A comparação do Método das Características com o tradicional Lax-Wendroff de dois passos para o escoamento de fluido em dutos foi realizada por Poloni *et al.* (1987). Ambos os métodos se mostraram adequados para representar o escoamento e com resultados muito similares, a diferença entre eles é que o Método das Características é levemente dissipativo nas descontinuidades, enquanto o Lax-Wendroff de dois passos apresenta as conhecidas oscilações provenientes dos métodos de segunda ordem. Por outro lado o Lax-Wendroff de dois passos é duas vezes mais rápido computacionalmente e mais fácil de implementar que o método de Riemman.

A utilização do método das características para a análise do escoamento de dutos reais de admissão e exaustão dos motores de combustão interna, onde se considera o atrito na parede do duto, as variações de seção e a troca de calor, foi trabalhada por Hanriot (2001). Para a análise foi necessário utilizar valores variáveis para algumas constantes das linhas características, as variáveis de Riemann, pelo fato de que o escoamento não pode ser considerado isoentrópico. Os resultados obtidos pelo método numérico para a flutuação de pressão, vazão mássica e velocidades instantâneas foram muito representativos e puderam ser validados através de dados experimentais.

Buscando identificar um método numérico capaz de representar com precisão e baixo tempo computacional os fenômenos inerciais e pulsantes que ocorrem dentro dos dutos de admissão e exaustão de motores de combustão interna, decidiu-se estudar métodos numéricos capazes de solucionar as equações governantes do problema teste do tubo de choque. Os métodos numéricos escolhidos foram os métodos de diferenças finitas de segunda ordem de Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack. Ambos os métodos contarão com a adição do TVD de Davis e de diferentes funções limitadoras para melhorar sua precisão nas regiões de descontinuidades, buscando reduzir suas oscilações características.

Apesar do surgimento de diversos outros métodos numéricos capazes de resolver com alta precisão as regiões de descontinuidade, decidiu-se utilizar Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack com adição do TVD de Davis devido a sua fácil implementação e baixo tempo computacional, além de terem apresentado resultados satisfatórios quando implementados por diversos autores, entre eles Person e Winterbone (1997).

3 MODELO MATEMÁTICO

O movimento alternado de abertura e fechamento das válvulas para admitir e descarregar os gases de dentro do cilindro nos motores de combustão interna, juntamente com a diferença de pressão entre a entrada dos dutos e o cilindro, gera os fenômenos inerciais e pulsantes nos dutos de admissão e exaustão. Esses fenômenos influenciam a eficiência volumétrica dos motores, pois as ondas de compressão e rarefação geradas desencadeiam um processo de compressão e expansão sucessivas ao longo dos dutos, modificando a maneira como o ar é admitido ou removido dos cilindros.

O estudo dos fenômenos que ocorrem nos dutos de admissão e exaustão pode ser feito através da análise dos resultados obtidos pela aplicação de métodos numéricos, para isso é necessário, primeiramente, definir um modelo matemático adequado ao problema em análise. Neste capítulo serão apresentadas as equações que governam o escoamento do fluido no interior do tubo de choque juntamente com a descrição das condições de contorno.

3.1 EQUAÇÕES GOVERNANTES

Para a dedução das equações governantes do escoamento utilizadas nesse trabalho, admitiram-se as seguintes hipóteses simplificativas:

- ❖ O fluido é compressível;
- ❖ O escoamento é unidimensional, não estacionário e não isentrópico;
- ❖ A área transversal pode variar de acordo com a coordenada espacial;
- ❖ Os efeitos de transferência de calor e do atrito entre o fluido e as paredes dos dutos são levados em conta;
- ❖ Os valores dos calores específicos do fluido são considerados constantes.

A dedução das equações governantes do escoamento pode ser verificada no Apêndice A. O sistema de equações governantes do escoamento a ser resolvido por métodos numéricos compõem o sistema apresentado na equação 3.1.

A dificuldade para se solucionar esse sistema de equações está em se resolver um sistema onde as equações estão acopladas, isso significa que para solucionar a massa específica, ρ , através da primeira equação, é necessário saber o valor da velocidade local do fluido na direção do escoamento, w , a qual só é solucionada pela segunda equação, essa, por

sua vez, depende da pressão, P , cujo valor é obtido pela solução da terceira equação, que depende tanto da massa específica como da velocidade local do fluido.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = -\frac{\rho w}{A_a} \frac{dA_a}{dz} \end{array} \right. \quad (3.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2 + P) = -\frac{\rho w^2}{A_a} \frac{dA_a}{dz} - \rho F_a \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{k-1} + \frac{\rho w^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[w \left(\frac{kP}{k-1} + \frac{\rho w^2}{2} \right) \right] = \rho \dot{q} - \frac{w}{A_a} \left(\frac{kP}{k-1} + \frac{\rho w^2}{2} \right) \frac{dA_a}{dz} \end{array} \right. \quad (3.3)$$

O sistema de equações resultantes pode ser reescrito em forma matricial como:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial z} = f \quad (3.4)$$

Sendo $A = \frac{\partial F}{\partial U}$, tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial z} = f \quad (3.5)$$

Onde U , F e f são as matrizes:

$$U(z,t) = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho w \\ \frac{P}{k-1} + \frac{\rho w^2}{2} \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + P \\ w \left(\frac{P}{k-1} + \frac{\rho w^2}{2} \right) \end{bmatrix}; \quad f = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + P \\ w \left(\frac{P}{k-1} + \frac{\rho w^2}{2} \right) \end{bmatrix} \frac{1}{A_a} \frac{dA_a}{dz} + \begin{bmatrix} 0 \\ \rho F_a \\ \rho \dot{q} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Esse trabalho resolve um problema de seção constante onde os termos fonte são desconsiderados, ou seja, não há transferência de calor ou atrito entre o fluido e as paredes do duto. Sendo assim a equação 3.6 se torna:

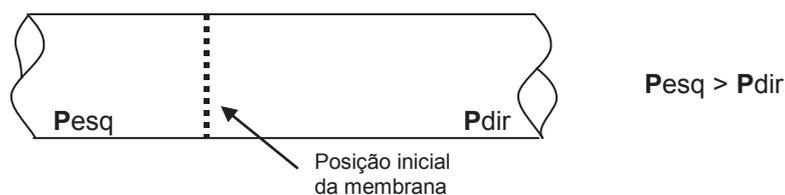
$$U(z,t) = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho w \\ \frac{P}{k-1} + \frac{\rho w^2}{2} \end{bmatrix}; F = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + P \\ w \left(\frac{P}{k-1} + \frac{\rho w^2}{2} \right) \end{bmatrix}; f = \begin{bmatrix} \rho w \\ \rho w^2 + P \\ w \left(\frac{P}{k-1} + \frac{\rho w^2}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

3.2 PROBLEMA TESTE DO TUBO DE CHOQUE

Para a análise dos fenômenos inerciais e pulsantes que ocorrem nos dutos de admissão e exaustão dos motores de combustão interna escolheu-se a utilização do modelo unidimensional do problema teste do tubo de choque, já que embora análises tridimensionais sejam muito úteis para se modelar e entender o escoamento em dutos, geralmente elas não são suficientemente rápidas para projetos de engenharia (ROSELLÓ *et al.*, 2002).

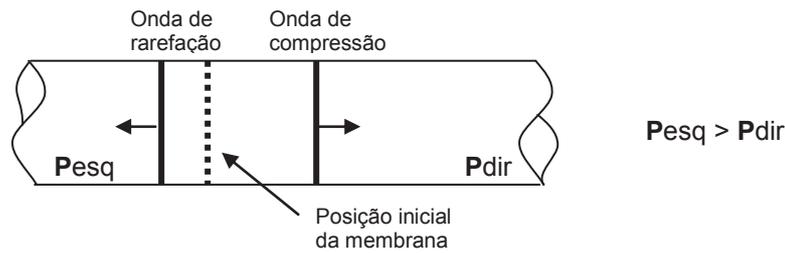
O problema teste do tubo de choque é composto por um duto de diâmetro constante e comprimento infinito, onde, inicialmente, há a presença de uma membrana separando o duto em duas regiões estáveis. Em um dos lados da membrana encontra-se gás a alta pressão e temperatura e no outro lado gás a baixa pressão e temperatura, Figura 3.3. Essas regiões com diferentes pressões e temperaturas representam o gás proveniente da câmara de combustão e o ar atmosférico na entrada do duto de admissão ou na saída do duto de exaustão, respectivamente.

Figura 3.3 – Modelo esquemático do problema teste do tubo de choque tempo $< 0s$



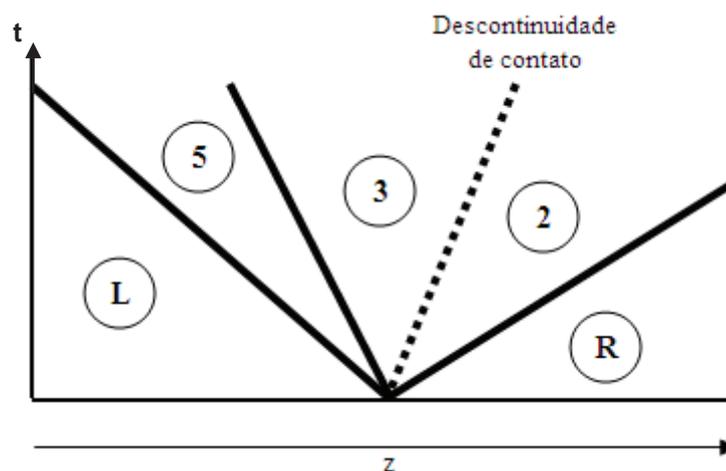
Para um determinado momento no tempo, chamado de instante zero, a membrana que separa as duas regiões de pressão do duto se desfaz e com isso o gás de alta pressão escoar em direção ao gás de baixa pressão. Esse movimento do gás gera ondas de compressão e rarefação de pressão que propagam em sentidos opostos. A onda de compressão escoar em direção à região de baixa pressão, portanto a onda de rarefação escoar em direção à região de alta pressão, Figura 3.4.

Figura 3.4 – Modelo esquemático do problema teste do tubo de choque tempo $\geq 0s$



Com o passar do tempo é possível observar cinco regiões distintas ao longo do duto, Figura 3.5. As regiões L (alta pressão) e R (baixa pressão) são aquelas onde o gás ainda está apresentando as condições iniciais de pressão e temperatura, já em 2, 3 e 5 perturbações foram geradas devido ao escoamento do gás e à onda de choque. A zona 2 é a área por onde a onda de compressão já passou. Na zona 3 o gás que estava inicialmente na região de alta pressão escoou em direção a região de baixa pressão e se encontra com as mesmas condições da zona 2. Essas duas zonas são separadas pela descontinuidade de contato. A zona 5 é onde ocorre a transição entre a região de alta pressão e a região de baixa pressão de maneira contínua (HIRSCH, 1990; SHAPIRO, 1953).

Figura 3.5 – Modelo esquemático das regiões de pressão do problema teste do tubo de choque para um tempo maior que zero

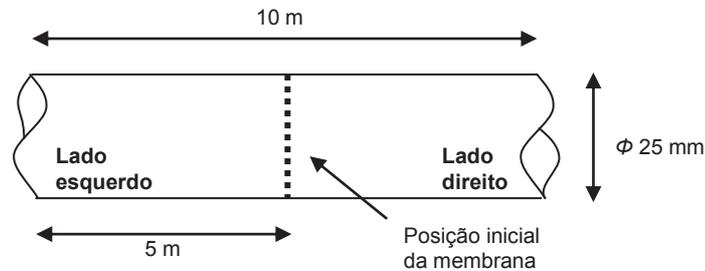


3.2.1 Condições de Contorno

Para esse trabalho foi inicialmente considerado um duto de 10 m de comprimento e com diâmetro constante de 25 mm para aplicação no problema teste do tubo de choque. Essa

relação de comprimento e diâmetro é suficiente para representar um duto de comprimento infinito. A posição inicial da membrana é no centro do duto, Figura 3.6. (HIRSCH, 1990)

Figura 3.6 – Modelo esquemático com as dimensões do duto e da membrana utilizados



O fluido escolhido foi o ar atmosférico, considerando que sua composição média, em volume, é 78,10% de N_2 + 20,98% de O_2 + 0,94% de Ar, o valor da massa molar é 28,96 kg/kmol. Devido a hipótese de gás ideal, para a razão de calores específicos (k) se adotou 1,4 e para a constante universal dos gases (\bar{R}) se utilizou o valor de 8314 J/(kmol·K) (MORAN e SHAPIRO, 2002).

As condições iniciais de pressão, velocidade e massa específica adotadas para as regiões de alta e baixa pressão antes do rompimento da membrana estão apresentadas na Tabela 3.1. (HIRSCH, 1990)

Tabela 3.1 – Condições de contorno adotadas para o problema teste

	<i>ESQUERDA</i> <i>(alta pressão)</i>	<i>DIREITA</i> <i>(baixa pressão)</i>
PRESSÃO [Pa]	100 000	10 000
VELOCIDADE [m/s]	0	0
MASSA ESPECÍFICA [kg/m ³]	1,000	0,125
TEMPERATURA [K]	348,448	282,452

3.2.2 Solução Analítica

Hirsch (1990) deduziu a solução analítica do problema teste do tubo de choque. Em seus cálculos ele utilizou as regiões definidas na Figura 3.5 e criou relações capazes de calcular todas as variáveis das regiões L, 5, 3, 2 e R.

Como a onda de rarefação de pressão é gerada entre R e 2, é possível escrever a razão de pressões entre essas regiões:

$$P_p \equiv \frac{P_2}{P_R} \quad (3.8)$$

onde P_2 é a pressão da região 2 e P_R da região R.

Admitindo-se que α é um agrupamento em função da razão de calores específicos, tem-se:

$$\alpha = \frac{k+1}{k-1} \quad (3.9)$$

Com as Equações 3.8 e 3.9 pode-se escrever a razão das massas específicas entre as regiões R e 2 como:

$$\frac{\rho_2}{\rho_R} = \frac{1 + \alpha P_p}{\alpha + P_p} \quad (3.10)$$

Assim como a razão de massas específicas, a razão entre a velocidade do som de 2 e R também pode ser escrita em função das Equações 3.8 e 3.9:

$$\left| \frac{c_2}{c_R} \right|^2 = P_p \frac{\alpha + P_p}{1 + \alpha P_p} \quad (3.11)$$

Utilizando as razões de pressão e de massa específica é possível escrever uma equação para quantificar quanto varia a velocidade da partícula da região R para a região 2 em relação a velocidade do som em R:

$$\frac{w_2 - w_R}{c_R} = \frac{P_p - 1}{(1 + \alpha P_p)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{\frac{k(k-1)}{2}}} \quad (3.12)$$

Hirsch (1990) apresenta que o número de Mach pode ser calculado em função da velocidade da onda de propagação na região R:

$$M = \frac{C - w_R}{c_R} \quad (3.13)$$

A Equação 3.13 pode ser reescrita como:

$$M = \frac{(P_P - 1)c_R}{k(w_2 - w_R)} \quad (3.14)$$

Entre as regiões 2 e 3 a velocidade das partículas é contínua, com isso:

$$u_3 = u_2 \equiv V \quad (3.15)$$

O mesmo pode ser dito para a pressão, portanto:

$$P_3 = P_2 \quad (3.16)$$

Já entre as regiões L e 3, a entropia é que é constante, resultando em:

$$s_3 = s_L \quad (3.17)$$

Escrevendo a Equação 3.17 em função das pressões, massas específicas e da razão de calores específicos, obtém-se:

$$\frac{P_3}{\rho_3^k} = \frac{P_L}{\rho_L^k} \quad (3.18)$$

Para Hirsch (1990), a seguinte igualdade entre as velocidades da partícula e as velocidades do som pode ser escrita para a região entre L e 3:

$$\frac{k-1}{2} w_L + c_L = \frac{k-1}{2} w_3 + c_3 \quad (3.19)$$

Como na região L não há perturbação, é possível afirmar que a velocidade da partícula nessa região é igual à zero. Sendo assim, se substituir a Equação 3.15 na Equação 3.19 tem-se para a velocidade do som em L:

$$c_L = c_3 + \frac{k-1}{2}V \quad (3.20)$$

Utilizando as Equações 3.18 e 3.19, é possível estabelecer uma relação entre V e P_3 :

$$V - w_L = \frac{2}{k-1}c_L \left[1 - \left(\frac{P_3}{P_L} \right)^{(k-1)/(2k)} \right] \quad (3.21)$$

Com as relações e equações já estabelecidas, é possível calcular todas as variáveis das regiões 2, 3 e L. Para determinar as constantes da região R, é necessário obter uma equação na qual se consiga obter o valor da razão de pressões P . A equação proposta por Hirsch (1990) é:

$$\sqrt{\frac{2}{k(k-1)} \frac{P-1}{(1-\alpha P_p)^{1/2}}} = \frac{2}{k-1} \frac{c_L}{c_R} \left[\left(\frac{P_L}{P_R} \right)^{(k-1)/(2k)} - P^{(k-1)/(2k)} \right] + \frac{w_L - w_R}{c_R} \quad (3.22)$$

Como as pressões em L e R são conhecidas, é possível resolver a Equação 3.21 para P através de um método iterativo, o método da bissecção.

Para a região 5, é possível expandir as condições das Equações 3.18 já que ela se encontra entre as regiões L e 3, obtendo-se, então, para a pressão e massa específica:

$$\frac{P_5}{\rho_5^k} = \frac{P_L}{\rho_L^k} \quad (3.23)$$

Assim como a Equação 3.18, a Equação 3.19 também pode ser estendida para a região 5, resultando em:

$$\frac{k-1}{2}w_L + c_L = \frac{k-1}{2}w_5 + c_5 \quad (3.24)$$

Considerando que a velocidade do som e a velocidade da partícula em 5 são separadamente constantes, e que w_5 varia entre zero e V , Hirsch (1990) propõe a seguinte equação para w_5 :

$$w_5 = \frac{2}{k+1} \left(\frac{x}{t} + c_L + \frac{k-1}{2} w_L \right) \quad (3.25)$$

A Equação 3.25 é válida para o intervalo:

$$-\left(\frac{k-1}{2} w_L + c_L \right) < \frac{x}{t} < \left(\frac{k+1}{2} V - c_L - \frac{k-1}{2} w_L \right) \quad (3.26)$$

Já para a velocidade do som tem-se:

$$c_5 = c_L - \frac{k-1}{2} (w_5 - w_L) = w_5 - \frac{x}{t} \quad (3.27)$$

Finalmente Hirsch (1990) admite que a pressão em 5 é:

$$P_6 = P_L \left(\frac{w_5}{c_L} \right)^{2k/(k-1)} \quad (3.28)$$

Com as Equações 3.23, 3.25, 3.27 e 3.28 fica possível determinar todas as propriedades da região 5, completando, portanto, a determinação da solução analítica para o problema do tubo de choque.

3.2.3 Adimensionalização de variáveis

Buscando facilitar a comparação entre os resultados obtidos nesse trabalho e os presentes na literatura, decidiu-se trabalhar com resultados adimensionais para o comprimento do duto, pressão, massa específica, temperatura, entropia e velocidade. A adimensionalização escolhida foi à proposta por Hirsch (1990).

Para se adimensionalizar o comprimento do duto, basta dividi-lo pelo seu comprimento total.

$$z^* = \frac{z}{z_{total}} \quad (3.29)$$

No caso da pressão, deve-se dividi-la pela pressão da esquerda, já que essa é a de maior valor de acordo com as condições iniciais apresentado na Tabela 3.1.

$$P^* = \frac{P}{P_L} \quad (3.30)$$

A adimensionalização da massa específica segue a mesma ideia da adimensionalização da pressão, deve-se dividi-la pela massa específica da esquerda, por ser a de maior valor.

$$\rho^* = \frac{\rho}{\rho_L} \quad (3.31)$$

Assim como a massa específica e a pressão, para se adimensionalizar a temperatura, basta dividi-la pela temperatura da esquerda, a qual também é a de maior valor.

$$T^* = \frac{T}{T_L} \quad (3.32)$$

Já a adimensionalização da entropia consiste em dividi-la pela constante universal dos gases ideais.

$$s^* = \frac{s}{R} \quad (3.33)$$

Por outro lado, a adimensionalização da velocidade é o número de Mach e os resultados serão apresentados para ambas as variáveis.

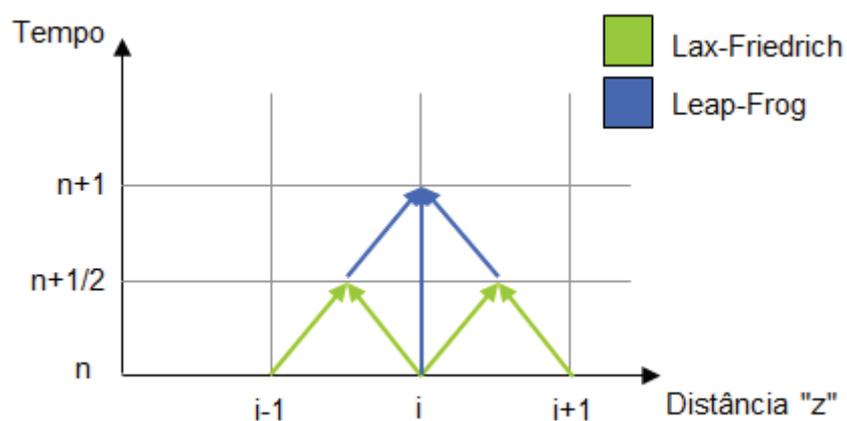
4 MÉTODOS NUMÉRICOS

No capítulo 2 foi apresentada a revisão bibliográfica de alguns trabalhos numéricos resolvendo as equações diferenciais parciais hiperbólicas aplicadas à solução das equações governantes do escoamento. Neste estudo, para a solução das equações do escoamento em estudo, equação 3.48, optou-se por utilizar os métodos de diferenças finitas de Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack, os quais foram amplamente aplicados para simulação de motores em problemas unidimensionais (PEARSON e WINTERBONE, 1997). Com o intuito de controlar as oscilações características desses métodos de segunda ordem, eles serão combinados com o limitador TVD de Davis. Então neste capítulo estes métodos de diferenças finitas e o limitador TVD são descritos.

4.1 MÉTODO DE LAX-WENDROFF DE DOIS PASSOS

A Figura 4.1 apresenta a discretização do domínio para o método de Lax-Wendroff de dois passos, um método de segunda ordem no tempo e no espaço.

Figura 4.1 – Discretização do domínio para Lax-Wendroff de dois passos



A integração numérica para a obtenção da solução é realizada em dois passos. O primeiro passo avalia os pontos intermediários e é obtido através do método de primeira ordem de Lax-Friedrich (TANNEHILL *et al.*, 1997).

Sendo U a matriz contendo as equações governantes do escoamento representadas pela Equação 3.6, discretizando e aplicando a expansão em série de Taylor para a sua derivada

parcial temporal, desconsiderando-se, porém, os termos de ordem igual e superior a dois, obtém-se:

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta t \frac{\partial U}{\partial t} \quad (4.1)$$

Substituindo Equação 4.1 na Equação 3.6, tem-se para a discretização de U :

$$U_i^{n+1} = U_i^n + \Delta t \left(f_i^n - \frac{\partial F}{\partial z} \right) \quad (4.2)$$

Segundo a Figura 4.1, U_i^n pode ser escrito como a média de U para a distância $i+1$ e $i-1$ no tempo n :

$$U_i^n = \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} \quad (4.3)$$

O mesmo pode ser feito para f_i^n :

$$f_i^n = \frac{f_{i+1}^n + f_{i-1}^n}{2} \quad (4.4)$$

A derivada espacial de F também pode ser calculada através dos pontos $i+1$ e $i-1$ como mostra a Equação 4.5:

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{F_{i+1}^n - F_{i-1}^n}{2 \Delta z} \quad (4.5)$$

Substituindo-se as três últimas equações na Equação 4.2, tem-se a expressão para a integração no tempo pelo método de Lax-Friedrich:

$$U_i^{n+1} = \frac{U_{i+1}^n + U_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2 \Delta z} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{4} (f_{i+1}^n + f_{i-1}^n) \quad (4.6)$$

Para os pontos intermediários $i+1/2$ e $i-1/2$ no tempo $n+1/2$ a equação 4.6 fica:

$$U_{i+1/2}^{n+1/2} = \frac{U_{i+1}^n - U_i^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta z} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \frac{\Delta t}{4} (f_{i+1}^n - f_i^n) \quad (4.7)$$

$$U_{i-1/2}^{n+1/2} = \frac{U_i^n + U_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta z} (F_i^n - F_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{4} (f_i^n + f_{i-1}^n) \quad (4.8)$$

O segundo passo do método de Lax-Wendroff de dois passos é calculado através do método de *Leap-Frog* para o restante do incremento de tempo utilizando os pontos intermediários previamente calculados. Esse é um método de segunda ordem que faz a discretização espacial e temporal por diferenças centrais e utiliza três níveis de incremento de tempo para obter a solução (TANNEHILL *et al.*, 1997; HIRSCH, 1990; BEZERRA, 2003; SOD, 1978).

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} (F_{i+1/2}^{n+1/2} - F_{i-1/2}^{n+1/2}) + \frac{\Delta t}{2} (f_{i+1/2}^{n+1/2} - f_{i-1/2}^{n+1/2}) \quad (4.9)$$

A Equação 4.9 pode ser reescrita em função de fluxos como:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} (\text{flux}_{i+1/2} - \text{flux}_{i-1/2}) \quad (4.10)$$

Para a qual o fluxo em $i+1/2$ e $i-1/2$:

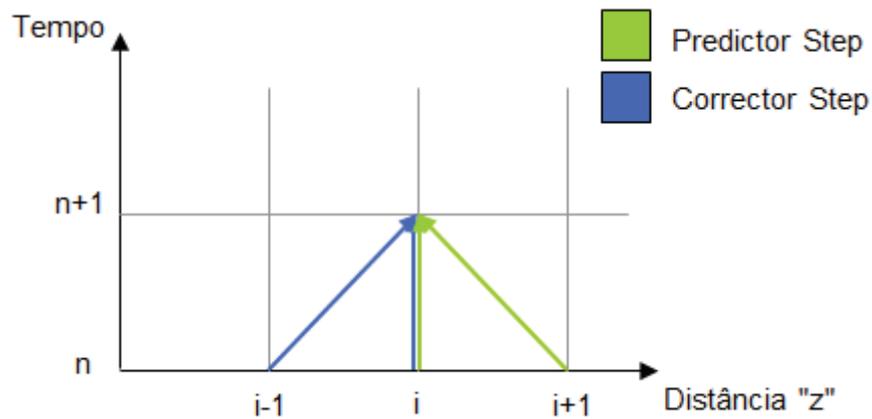
$$\text{flux}_{i+1/2} = F_{i+1/2}^{n+1/2} + \frac{\Delta z}{2} f_{i+1/2}^{n+1/2} \quad (4.11)$$

$$\text{flux}_{i-1/2} = F_{i-1/2}^{n+1/2} + \frac{\Delta z}{2} f_{i-1/2}^{n+1/2} \quad (4.12)$$

4.2 MÉTODO DE MACCORMACK

A discretização do domínio para o método de MacCormack pode ser visualizada na Figura 4.2, o qual é uma derivação do método de Lax-Wendroff de dois passos, portanto também possui precisão de segunda ordem no tempo e no espaço.

Figura 4.2 – Discretização do domínio para MacCormack



A diferença do método de MacCormack para o Lax-Wendroff de dois passos é que ele não possui o passo intermediário, mas também é composto por dois passos (TANNEHILL *et al.*, 1997).

No primeiro passo, um passo preditivo (*predictor step*), é feita uma discretização espacial avançada de primeira ordem, a qual utiliza os pontos i e $i+1$ para obter \bar{U} no tempo $n+1$:

$$\bar{U}_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta z} (F_{i+1}^n - F_i^n) + \Delta t (f_i^n) \quad (4.13)$$

Já no segundo passo, o passo corretivo (*corrector step*), o valor final da solução também é obtido através de uma discretização espacial de primeira ordem, mas agora recuada. Sendo assim, U no tempo $n+1$ é calculado através dos valores obtidos no passo preditivo para o mesmo tempo:

$$U_i^{n+1} = \frac{U_i^n + \bar{U}_i^{n+1}}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta z} (\bar{F}_i^n - \bar{F}_{i-1}^n) + \frac{\Delta t}{4} (f_i^n) \quad (4.14)$$

Escrevendo em função de fluxos, têm-se para $flux_i$ e \bar{flux}_{i-1} :

$$flux_{i+1/2} = \frac{F_{i+1}^n - F_i^n}{2} - \frac{\Delta z}{2} f_i^n \quad (4.15)$$

$$flux_{i-1/2} = \frac{\bar{F}_i^n + \bar{F}_{i-1}^n}{2} - \frac{\Delta z}{2} f_i^n \quad (4.16)$$

4.3 CRITÉRIO PARA O INCREMENTO DE TEMPO

Buscando obter soluções convergentes através dos métodos numéricos, torna-se necessário controlar o incremento de tempo utilizado nas iterações. A condição de Courant, Friedrich e Lewy (CFL) é um dos principais modelos existentes e foi a condição adotada nesse trabalho.

O CFL admite que a velocidade local da partícula, razão entre o incremento do espaço, Δz , e o incremento do tempo, Δt , não pode ser maior que a velocidade de propagação do fluido, a qual é a soma da velocidade do fluido, w e da velocidade do som, c , aproximadamente 340 m/s:

$$CFL = (c + |w|) \frac{\Delta t}{\Delta z} \quad (4.17)$$

Para satisfazer a condição, é necessário que o valor do CFL seja menor ou igual a um, qualquer valor maior do que um leva a uma solução divergente. Quanto menor o valor do CFL utilizado na solução através dos métodos numéricos, menor é o incremento Δt e, conseqüentemente, maior é o tempo computacional. Nesse trabalho inicialmente se utilizou um CFL igual a 0,95 para analisar a influência do tamanho de malha na solução, valor que permite um tempo computacional pequeno, mas não insere um erro muito grande na solução. Dando continuidade aos estudos, foi verificada a influência do CFL na solução utilizando valores de 0,7 a 0,9.

4.4 LIMITADOR DE FLUXO TVD

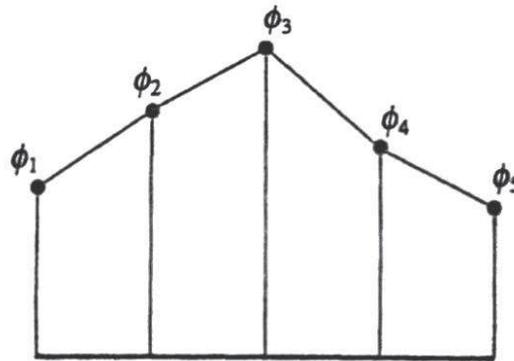
Os métodos numéricos de diferenças finitas de segunda ordem têm a tendência de apresentar solução com oscilações na presença de descontinuidades. Essas oscilações fazem com que os resultados não consigam representar de forma fiel os fenômenos físicos que ocorrem nessas regiões. Buscando corrigir essas oscilações, diversos estudiosos desenvolveram metodologias matemáticas para serem empregadas juntamente com os

métodos numéricos, entre elas, os limitadores de fluxo. Um limitador de fluxo vastamente aplicado é o TVD.

Para garantir que em regiões de descontinuidade a solução dos métodos numéricos de diferenças finitas de alta ordem não apresente oscilações, é necessário que eles sejam estáveis e não oscilatórios, ou seja, preservem a monotonicidade (*Monotonicity Preserving*). Essa propriedade está diretamente relacionada com a variação total da solução (*Total Variation*) (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

Tomando como exemplo a discretização apresentada na Figura 4.3, podemos definir a variação total da solução de acordo com a equação 4.18 e 4.19, onde ϕ representa o valor da solução para cada posição da discretização.

Figura 4.3 – Exemplo de discretização para ilustrar a variação total da solução (TV)



Fonte: VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007

$$TV(\phi) = |\phi_2 - \phi_1| + |\phi_3 - \phi_2| + |\phi_4 - \phi_3| + |\phi_5 - \phi_4| \quad (4.18)$$

Simplificando a equação 4.18 obtém-se:

$$TV(\phi) = |\phi_3 - \phi_1| + |\phi_5 - \phi_3| \quad (4.19)$$

De acordo com as equações 4.18 e 4.19, é possível afirmar que para um método satisfazer a condição de monotonicidade essa variação total da solução não deve aumentar, portanto, para que os métodos preservem a monotonicidade, ela deve diminuir com o passar do tempo. A partir dessa análise surgiu o termo TVD (*Total Variation Diminishing*), onde a variação total da solução deve ser considerada a cada passo no tempo e deve satisfazer a condição apresentada na equação 4.20 (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

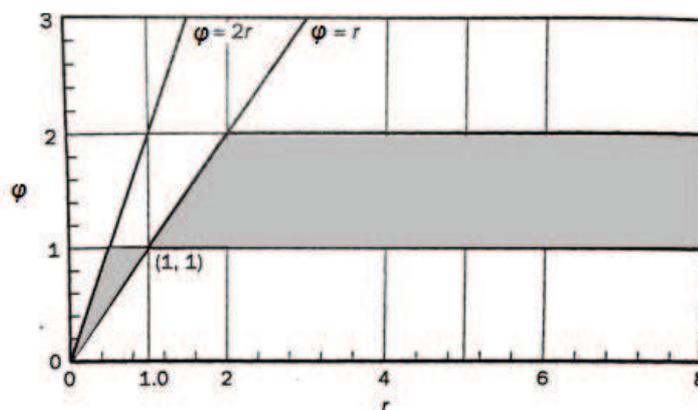
$$TV(\phi^{n+1}) \leq TV(\phi^n) \quad (4.20)$$

A ideia de tornar um método TVD consiste em introduzir uma modificação nos métodos originais, limitando o range de possíveis valores da solução que fazem o método ser de alta ordem de precisão, tornando-a de primeira ordem em regiões de descontinuidade. Essas funções modificadoras se tornaram, então, conhecidas como limitadores de fluxo. Sendo ϕ a função limitadora e r a razão dos gradientes sucessivos, Sweby (1984) determinou algumas condições para um limitador de fluxo ser TVD para métodos de segunda ordem de precisão:

- ❖ O limitador de fluxo para métodos de segunda ordem de precisão devem passar pelos pontos (1,1) do diagrama $\phi \times r$;
- ❖ Se $0 < r < 1$, o limite inferior é $\phi(r) = r$ e o limite superior é $\phi(r) = 1$, então para métodos TVD $r \leq \phi(r) \leq 1$;
- ❖ Se $r \geq 1$, o limite inferior é $\phi(r) = 1$ e o limite superior é $\phi(r) = r$, então para métodos TVD $1 \leq \phi(r) \leq r$.

Baseando-se nas condições determinadas por Sweby (1984), a Figura 4.4 ilustra a região no diagrama $\phi \times r$ dentro da qual um método TVD deve estar para ser limitador de fluxo de métodos de segunda ordem de precisão (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

Figura 4.4 – Região para um TVD de métodos de segunda ordem



Fonte: VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007

Ao longo dos anos, diversas equações para limitadores de fluxo foram desenvolvidas para satisfazer as condições de Sweby (1984), a Tabela 4.1 apresenta as mais utilizadas (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007).

Tabela 4.1 – Equações para os limitadores de fluxo

<i>NOME</i>	<i>FUNÇÃO LIMITADORA</i>
Van Leer	$\frac{r + r }{1 + r}$
Van Albada	$\frac{r + r^2}{1 + r^2}$
Min-Mod	$\phi(r) = \begin{cases} \min(r, 1) & \text{se } r > 0 \\ 0 & \text{se } r \leq 0 \end{cases}$
Superbee	$\max[0, \min(2r, 1), \min(r, 2)]$
Sweby	$\max[0, \min(\beta r, 1), \min(r, \beta)]$, onde β é um número entre 1 e 2
Quick	$\max[0, \min(2r, (3 + r)/4), 2]$
UMIST	$\max[0, \min(2 \cdot r, (1 + 3r)/4), (3 + r)/4, 2]$
Davis 1	$\phi(r) = \begin{cases} \min(2r, 1) & \text{se } r > 0 \\ 0 & \text{se } r \leq 0 \end{cases}$
Davis 2	$\min(2 r , r)$

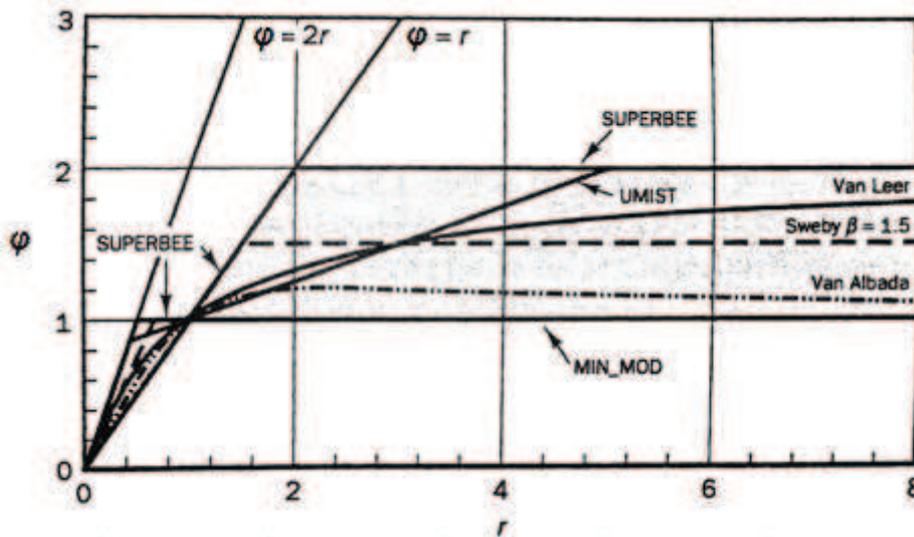
Fonte: VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007; PEARSON e WINTERBONE, 1997

Para poder comparar as equações dos limitadores de fluxo apresentadas na Tabela 4.1, todas foram ilustradas no diagrama $\phi \times r$ conforme pode ser visto na Figura 4.5.

Através da Figura 4.5 é possível verificar que os limitadores da Tabela 4.1, exceto Davis 1 e 2, representam métodos TVD com precisão de segunda ordem, já que todos passam pelos pontos (1,1) do diagrama $\phi \times r$. Os limitadores Van Leer e Van Albada são funções que suavizam a solução, já os demais limitadores são um conjunto de expressões lineares. O Min-

Mod segue o limite inferior da região TVD do diagrama, já o Superbee segue o limite superior, e o Sweby é uma generalização desses dois limitadores (VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007). Por sua vez, comparando as equações da Tabela 4.1, é possível afirmar que as equações dos limitadores de Davis são muito similares à do limitador Min-Mod, porém não é possível afirmar nada sobre suas precisões.

Figura 4.5 – Funções dos limitadores de fluxo no diagrama $\phi \times r$



Fonte: VERSTEEG e MALALASEKERA, 2007

Como a função limitadora de Davis 1 apresentou resultados muito satisfatórios na pesquisa desenvolvida por Person e Winterbone (1997), nesse trabalho se optou por estudá-la e compará-la às funções limitadoras de Sweby e Van Albada. Escolheu-se Sweby devido ao fato de que o TVD de Sweby (1984) deu origem ao de Davis (1987), além de ser uma generalização das funções Min-mod e Superbee. Já Van Albada foi escolhida para verificar o quanto ela suaviza a solução em relação às outras funções. Não se escolheu a função limitadora de Van Leer por ter sido considerada de baixa precisão por Sweby (1984).

4.4.1 Limitador de Fluxo TVD de Davis (1987)

A formulação TVD de Davis (1987) é uma modificação do TVD proposto por Sweby (1984), no qual a parcela do termo dissipativo é simplificada, e será o TVD utilizado no presente trabalho.

Para modificar os métodos de Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack, Davis (1987) definiu o termo da equação 4.21, o qual pode ser adicionado no final do segundo passo

de qualquer um dos dois métodos prévios. Esse termo tem a mesma função da viscosidade artificial, ele simula os efeitos de uma viscosidade física em regiões de descontinuidades e é desprezível em regiões suaves, reduzindo, assim, as oscilações geradas pelos métodos de diferenças finitas de segunda ordem.

$$\left[\bar{G}^+(r_i^+) + \bar{G}^-(r_{i+1}^-) \right] \Delta U_{i+1/2}^n - \left[\bar{G}^+(r_{i-1}^+) + \bar{G}^-(r_i^-) \right] \Delta U_{i-1/2}^n \quad (4.21)$$

onde \bar{G}^\pm pode ser calculado através da Equação 4.22:

$$\bar{G}^\pm(r_i^\pm) = \frac{1}{2} C(v) [1 - \phi(r_i^\pm)] \quad (4.22)$$

na qual ϕ é a função limitadora de fluxo e $C(v)$ pode ser determinado através de:

$$C(v) = \begin{cases} v \cdot (1 - v) & v \leq 0,5 \\ 0,25 & v > 0,5 \end{cases} \quad (4.23)$$

sendo v corresponde ao CFL. Para o presente trabalho se tem o valor de $C(v)=0,25$ devido à escolha de $CFL=0,95$.

As funções (r_i^\pm) são obtidas pelas Equações 4.24, 4.25, 4.26 e 4.27, onde $[... \bullet ...]$ simboliza o produto interno (escalar) entre as duas variáveis (vetores).

$$r_{i-1}^+ = \frac{[\Delta U_{i-3/2}^n \bullet \Delta U_{i-1/2}^n]}{[\Delta U_{i-1/2}^n \bullet \Delta U_{i-1/2}^n]} \quad (4.24)$$

$$r_i^- = \frac{[\Delta U_{i-1/2}^n \bullet \Delta U_{i+1/2}^n]}{[\Delta U_{i-1/2}^n \bullet \Delta U_{i-1/2}^n]} \quad (4.25)$$

$$r_i^+ = \frac{[\Delta U_{i-1/2}^n \bullet \Delta U_{i+1/2}^n]}{[\Delta U_{i+1/2}^n \bullet \Delta U_{i+1/2}^n]} \quad (4.26)$$

$$r_{i+1}^- = \frac{[\Delta U_{i+1/2}^n \bullet \Delta U_{i+3/2}^n]}{[\Delta U_{i+1/2}^n \bullet \Delta U_{i+1/2}^n]} \quad (4.27)$$

As diferentes posições da malha podem ser observadas na Figura 4.6.

4.6 – Posições da malha para TVD de Davis



Para os cálculos dos (r_i^\pm) , admitiu-se para (ΔU_i^\pm) que:

$$\Delta U_{i+1/2}^n = U_{i+1}^n - U_i^n \quad (4.28)$$

$$\Delta U_{i+3/2}^n = U_{i+2}^n - U_{i+1}^n \quad (4.29)$$

$$\Delta U_{i-3/2}^n = U_{i-1}^n - U_{i-2}^n \quad (4.30)$$

$$\Delta U_{i-1/2}^n = U_i^n - U_{i-1}^n \quad (4.31)$$

Através das Equações 4.28, 4.29, 4.30 e 4.31 é possível observar que elas são válidas somente para os pontos internos da discretização, ou seja, os pontos externos não terão o efeito TVD.

5 RESULTADOS

Este capítulo será dividido em quatro seções. Primeiramente será apresentada a interpretação dos resultados analíticos obtidos para o problema teste do tubo de choque. Em seguida, diferentes tamanhos de malha serão utilizados para obter os resultados numéricos via métodos de Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack. Na sequência será estudada e discutida a influência de três diferentes funções limitadoras no TVD de Davis, para melhorar os resultados obtidos pelos métodos numéricos descritos previamente. Nessa etapa será utilizado somente um tamanho de malha e será verificada, também, a influência de diferentes valores de CFL na solução. Por último, será comparado o melhor resultado obtido por Lax-Wendroff de dois passos e por MacCormack para identificar o melhor método numérico para a solução do problema teste do tubo de choque. Todos os cálculos desenvolvidos nesse trabalho foram realizados através do software MATLAB® versão 5.3 em um computador HP com processador Intel Core Duo T2050 (2M Cache, 1.60 GHz) e 2,49 GB de RAM.

5.1 RESULTADOS ANALÍTICOS

Utilizando as condições iniciais definidas no item 3.8.2 do Capítulo 3, a solução analítica do problema teste do tubo de choque foi calculada para sete propriedades do fluido ao longo do comprimento do tubo: pressão, massa específica, velocidade, número de Mach, temperatura, entropia e vazão mássica. As Figuras 5.1 até 5.7 ilustram os resultados para o tempo 0,0061 s, o qual representa os instantes iniciais após a ruptura da membrana que separava a região de alta e baixa pressão dentro do duto de acordo com Hirsch (1990).

Nas Figuras 5.1 até 5.7 é possível identificar facilmente as regiões de pressão definidas na Figura 3.5 do item 3.8 do Capítulo 3. Na Figura 3.5 se pode observar o comportamento da pressão ao longo do duto. A região de alta pressão que ainda não sofreu perturbação, assim como a região de baixa pressão, se torna evidente nas zonas L e R. Na zona 5 é possível verificar como ocorre a transição da região de alta pressão para a região de baixa pressão. Já nas zonas 3 e 2 se tem a região por onde a onda de rarefação e a onda de compressão já passaram, as quais são representadas pelo degrau existente no meio da curva, sendo contínuo ao longo da descontinuidade de contato.

Figura 5.1 – Pressão do fluido em função da distância pela solução analítica para 0,061 s.

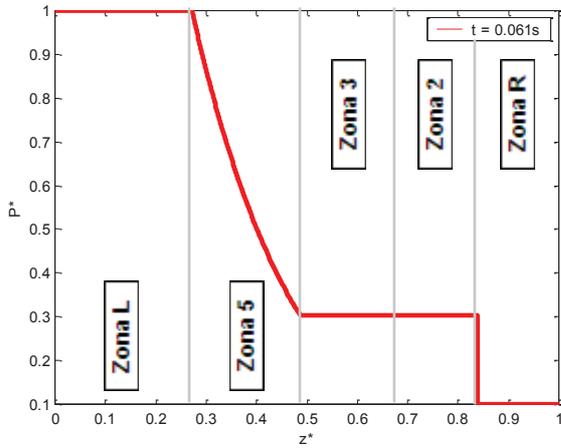


Figura 5.2 – Massa específica do fluido em função da distância pela solução analítica para 0,061 s.

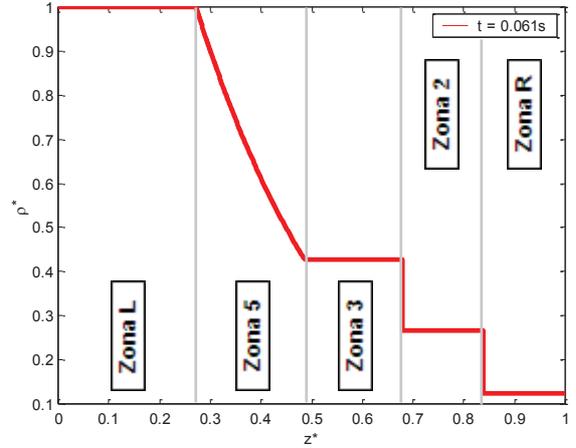


Figura 5.3 – Velocidade do fluido em função da distância pela solução analítica para 0,061 s.

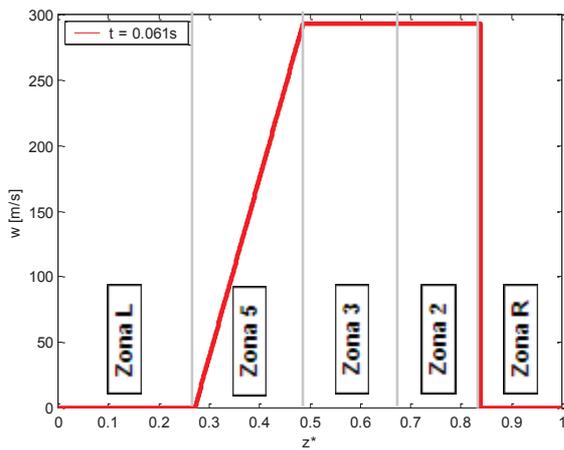


Figura 5.4 – Número de Mach do fluido em função da distância pela solução analítica para 0,061 s.

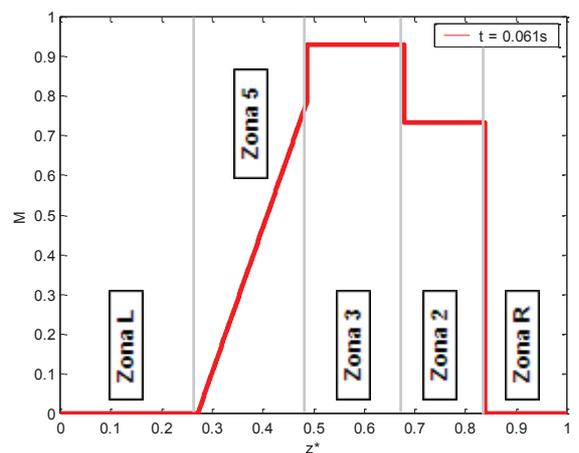


Figura 5.5 – Temperatura do fluido em função da distância pela solução analítica para 0,061 s.

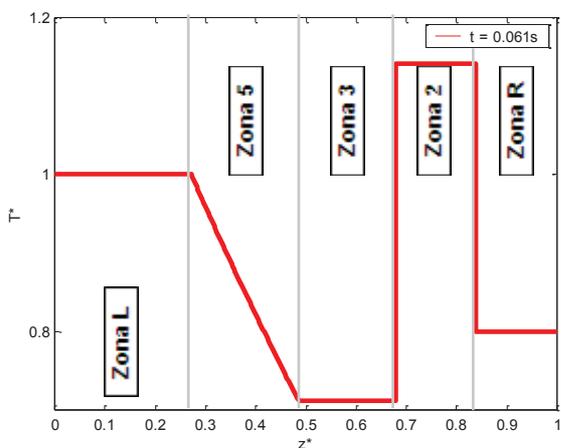


Figura 5.6 – Entropia do fluido em função da distância pela solução analítica para 0,061 s.

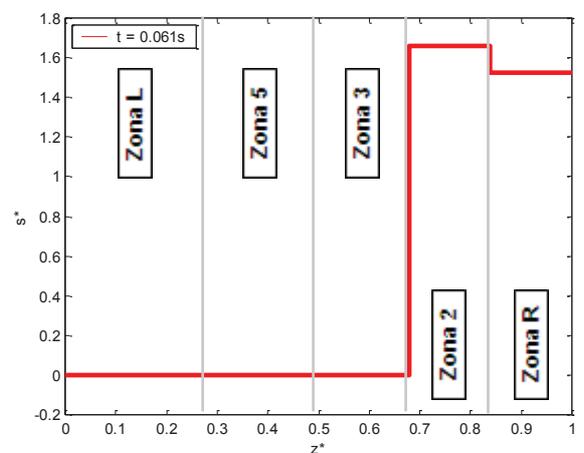
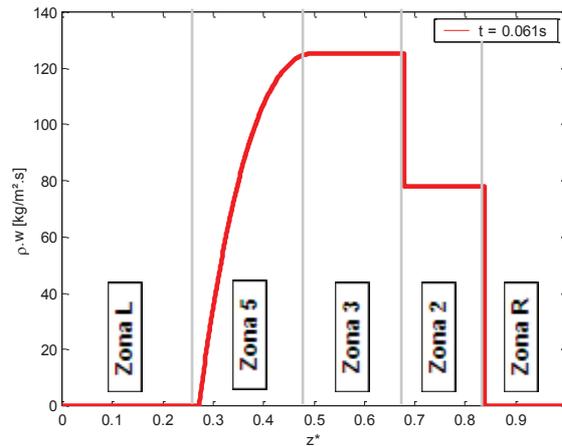


Figura 5.7 – Fluxo de massa do fluido por unidade e área em função da distância pela solução analítica para 0,061 s.



Nas Figuras 5.1 até 5.7 também fica claro que as ondas de compressão e rarefação de pressão se propagam em sentidos opostos, a primeira em direção à região de baixa pressão e a segunda em direção à região de alta pressão. Também é possível notar que as ondas possuem velocidades diferentes, pois ao longo do tempo uma maior quantidade de ar ao longo do duto, que se encontrava na região de baixa pressão, sofreu aumento de pressão, zonas 3 e 2, se comparado à região de alta pressão que sofreu redução de pressão, zona 5. Além disso, a transição de alta para baixa pressão na zona 5 ocorre de maneira muito mais suave que a transição de baixa para alta pressão nas zonas 3 e 2.

Diferentemente da pressão, a massa específica não é constante ao longo da descontinuidade de contato como indica a Figura 5.2. A descontinuidade de contato divide a curva em dois degraus, ou seja, a propriedade nas zonas 2 e 3 não é igual. Apesar dessa diferença, a curva da massa específica possui um comportamento muito similar ao da pressão, já que um aumento de pressão causa um aumento na massa específica de acordo com a relação dos gases ideais $RT = \frac{P}{\rho}$, assim como uma redução da pressão resulta em uma redução da massa específica.

Na Figura 5.3 se pode verificar o comportamento da velocidade do fluido ao longo do comprimento do duto. Nas extremidades do duto a velocidade das partículas é zero e devido às ondas de compressão e rarefação, as partículas são aceleradas aumentando sua velocidade. A velocidade máxima é, portanto, atingida pelo fluido como resultado das ondas de rarefação e compressão, tendo um aumento significativo chegando próximo a velocidade do som. Essa velocidade máxima deve ser, porém, inferior à velocidade do som, já que não se trata de um escoamento supersônico. Assim como a pressão, a velocidade do escoamento se mantém

constante ao longo da descontinuidade de contato, além de possuir uma variação linear na região de rarefação, comprovando que as velocidades das ondas de rarefação e compressão são diferentes.

A curva do número de Mach apresentada na Figura 5.4 é muito semelhante à curva da velocidade por se tratar de uma adimensionalização da velocidade local da partícula através da velocidade do som, o qual não deve ser maior do que 1 para respeitar a condição de escoamento não supersônico. Como o número de Mach também depende da massa específica, sua curva não é contínua ao longo da descontinuidade de contato.

Através da Figura 5.5 é possível analisar a curva da temperatura. Sua curva apresenta um comportamento diferenciado das curvas comentadas anteriormente, pois a temperatura é diretamente proporcional à pressão e inversamente proporcional à massa específica. A temperatura sofre uma redução ao longo da zona 5, acompanhando a redução da pressão, que é mais significativa que a redução de massa específica. Da zona 3 para a zona 2 a temperatura aumenta, pois a pressão se manteve constante ao longo da descontinuidade de contato, porém a massa específica não, ela sofreu uma redução.

O comportamento da entropia dividida pela constante universal dos gases pode ser visualizado na Figura 5.6. Como ela é função da pressão e da temperatura, fica claro que a contribuição da redução de pressão e de temperatura na zona 5 é a mesma, mantendo-a igual a zero. A partir da zona 3, assim que a temperatura começa a aumentar graças à pressão constante e redução de massa específica, a entropia dividida pela constante universal dos gases também aumenta. A partir do momento que a pressão e a temperatura reduzem novamente a, ela diminui e estabiliza em aproximadamente 1,5.

O fluxo de massa por unidade e área, Figura 5.7, depende da massa específica e da velocidade, sendo diretamente proporcional aos dois. Como o aumento da velocidade é muito mais expressivo que a redução da massa específica, a curva do fluxo de massa segue o mesmo comportamento da curva da velocidade, sendo, porém, influenciada pela não continuidade da massa específica ao longo da descontinuidade de contato. Graças aos altos valores da velocidade o fluxo de massa também apresenta um aumento significativo com a passagem das ondas de rarefação e compressão, cujo valor inicial também era zero.

5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS

A solução numérica das equações governantes do escoamento determinadas no Capítulo 3 foi calculada pelos métodos de Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack para

o problema teste do tubo de choque no tempo 0,0061 s. Três tamanhos de malha distintos foram utilizados, 100, 200 e 400 volumes, e o valor do CFL escolhido foi 0,95, para se obter um tempo computacional mais reduzido.

As Figuras 5.8 até 5.14 apresentam os resultados obtidos pelo método de Lax-Wendroff de dois passos em comparação com a solução analítica ao longo de todo o duto.

As curvas obtidas pelo método de Lax-Wendroff de dois passos ilustraram as oscilações características dos métodos de diferenças finitas de segunda ordem em regiões de descontinuidade. É possível observar que as oscilações se comportam de maneira diferente ao longo da curva e que, de maneira geral, o refinamento da malha não elimina ou reduz a quantidade de oscilações. Isso se deve a difusividade numérica, a qual aumenta com o refinamento da malha, como pode ser observado nos valores obtidos para o RMSE na Tabela 5.1. Por outro lado, o refinamento da malha aproxima cada vez mais a solução numérica da solução analítica, deixando-a menos suavizada nas regiões de descontinuidade.

Tabela 5.1 – Valor de RMSE para o cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos

	<i>Malha 100 volumes</i>	<i>Malha 200 volumes</i>	<i>Malha 400 volumes</i>
RMSE médio de todas as propriedades	2,31	2,39	4,14

Figura 5.8 – Pressão em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.

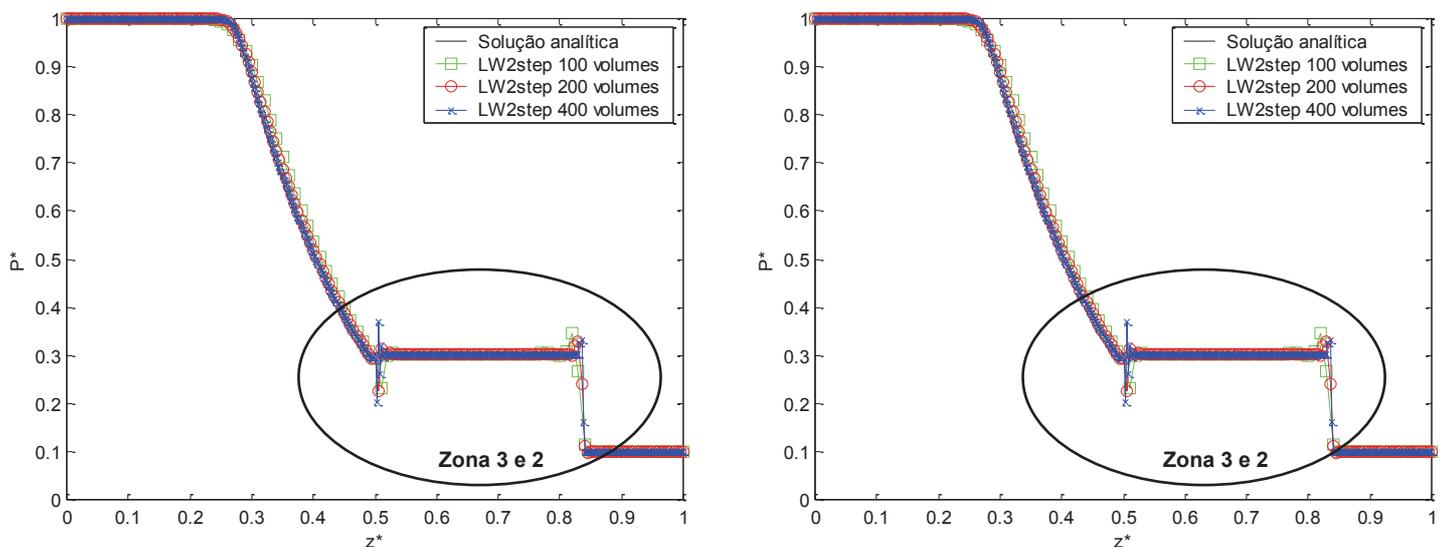
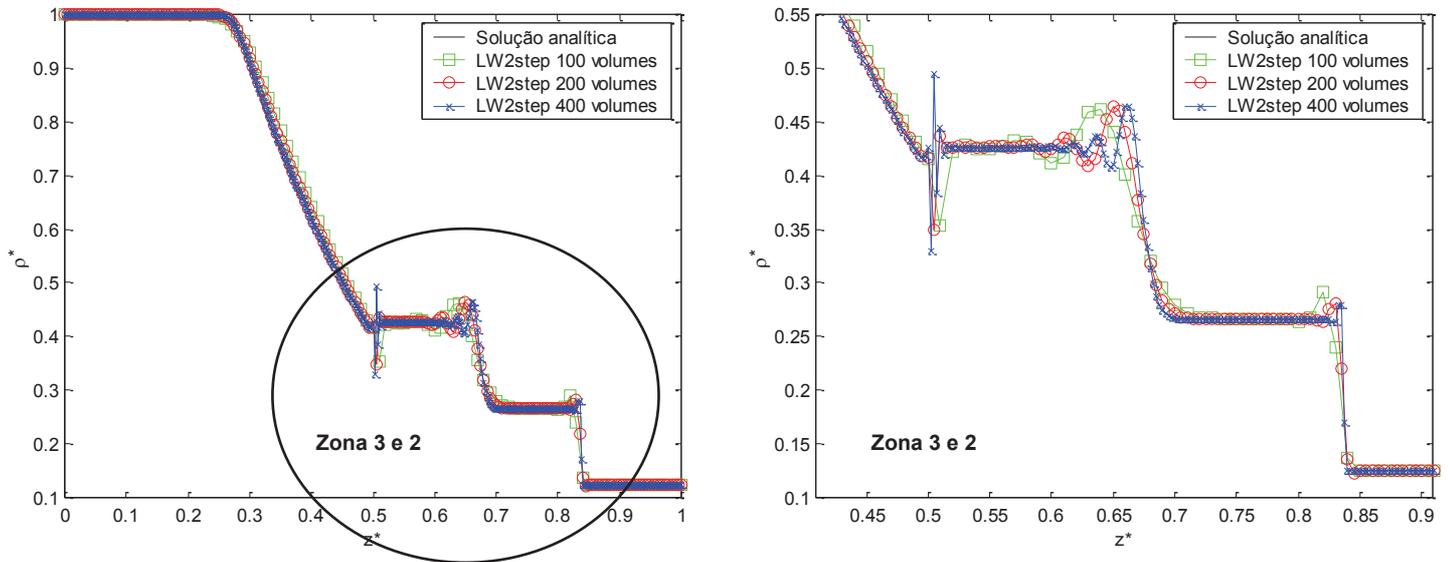


Figura 5.9 – Massa específica em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.



No início da superfície de contato, onde a onda de compressão já passou, aproximadamente 5 m, não há uma grande quantidade de oscilações, porém sua amplitude é muito alta, que no caso da velocidade e número de Mach, Figuras 5.10 e 5.11, indicam um escoamento supersônico, o que não representa a realidade. Nessa região também é possível observar que o refinamento da malha gerou um aumento na amplitude das oscilações.

Figura 5.10 – Velocidade em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.

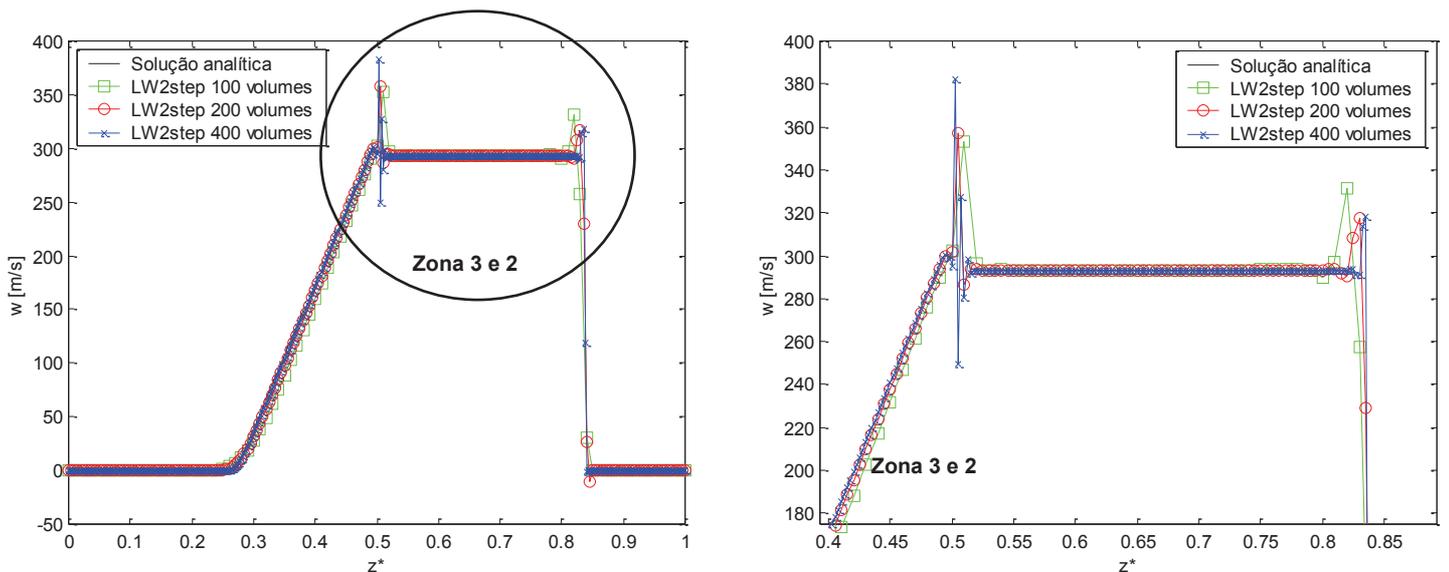


Figura 5.11 – Número de Mach em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.

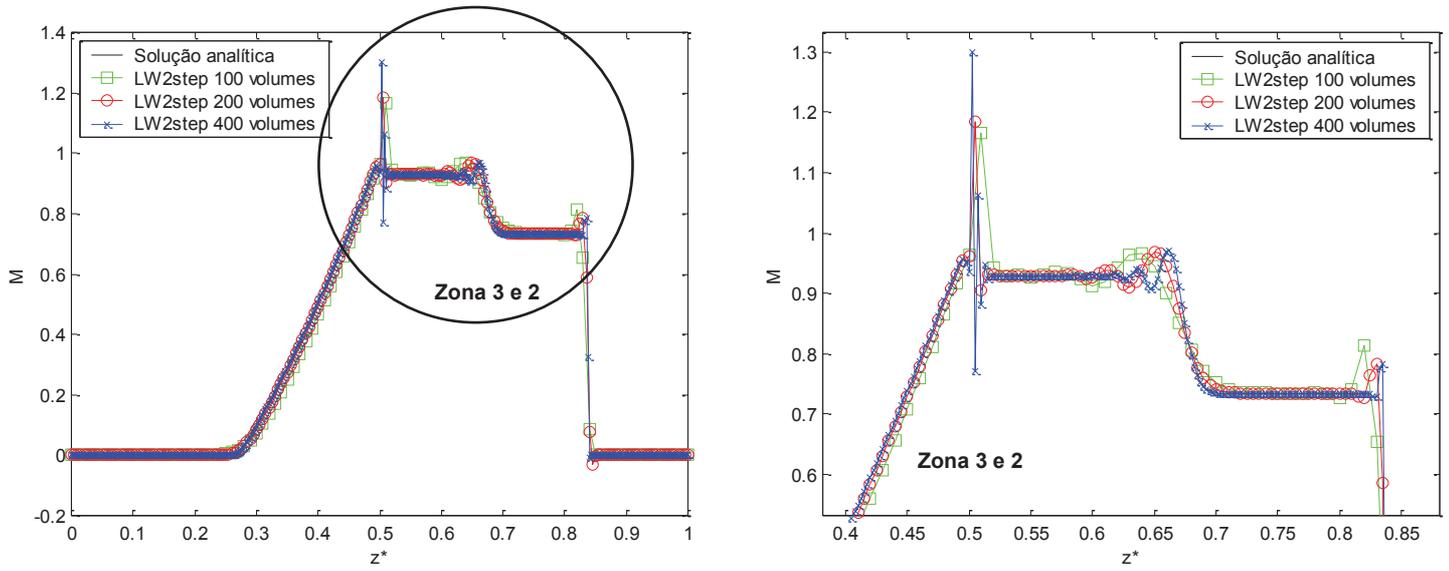


Figura 5.12 – Temperatura em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.

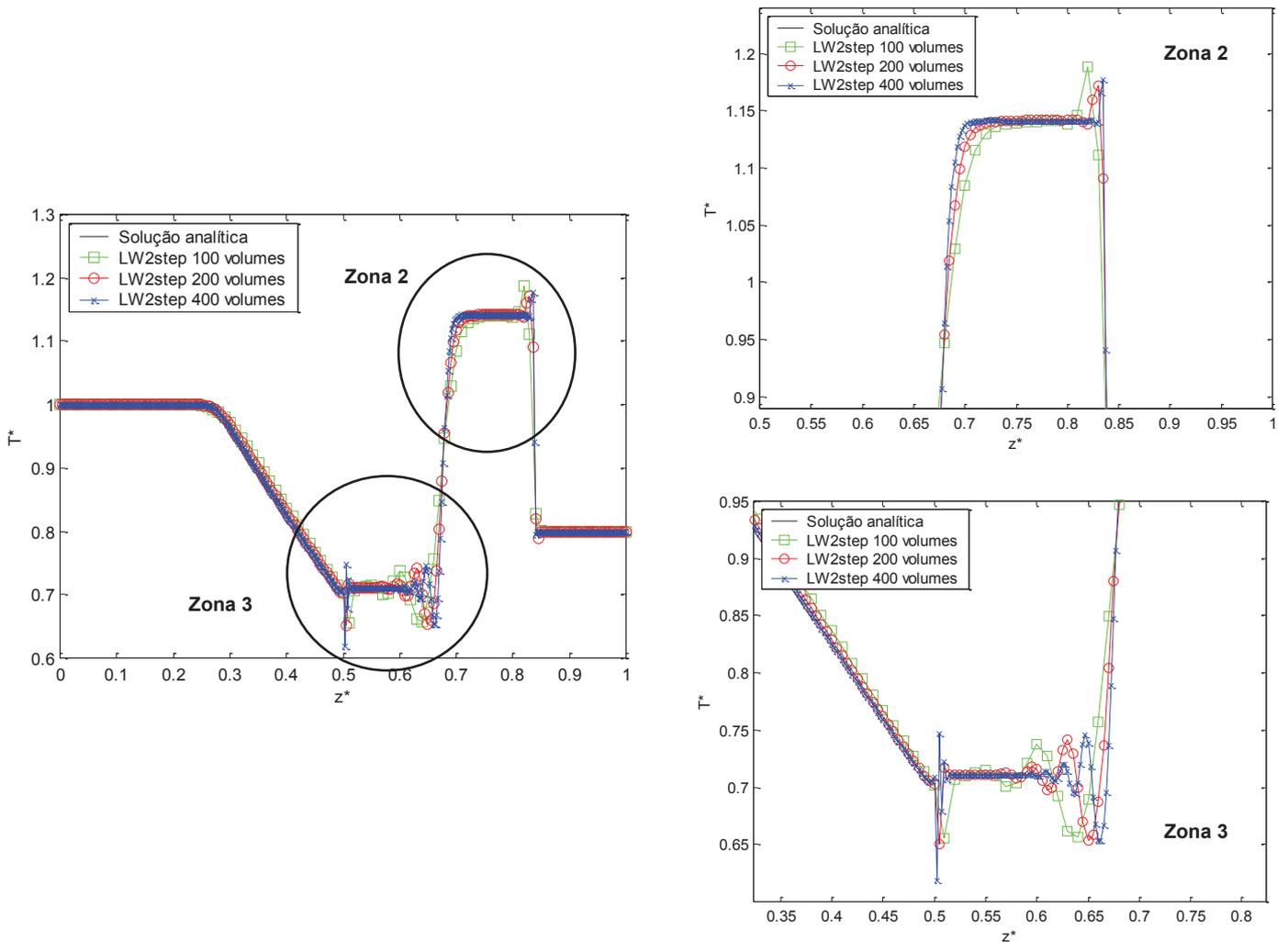


Figura 5.13 – Entropia em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.

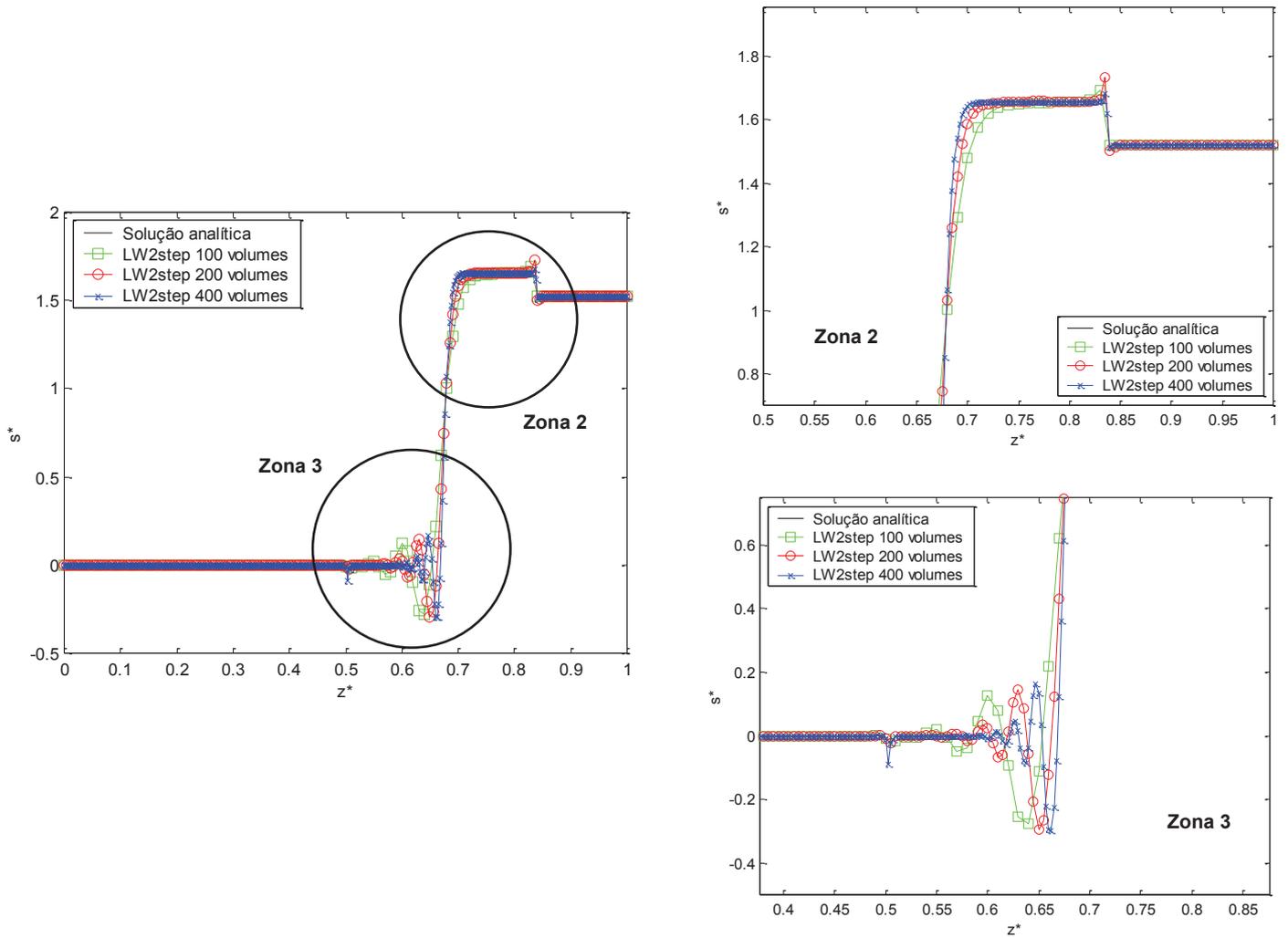
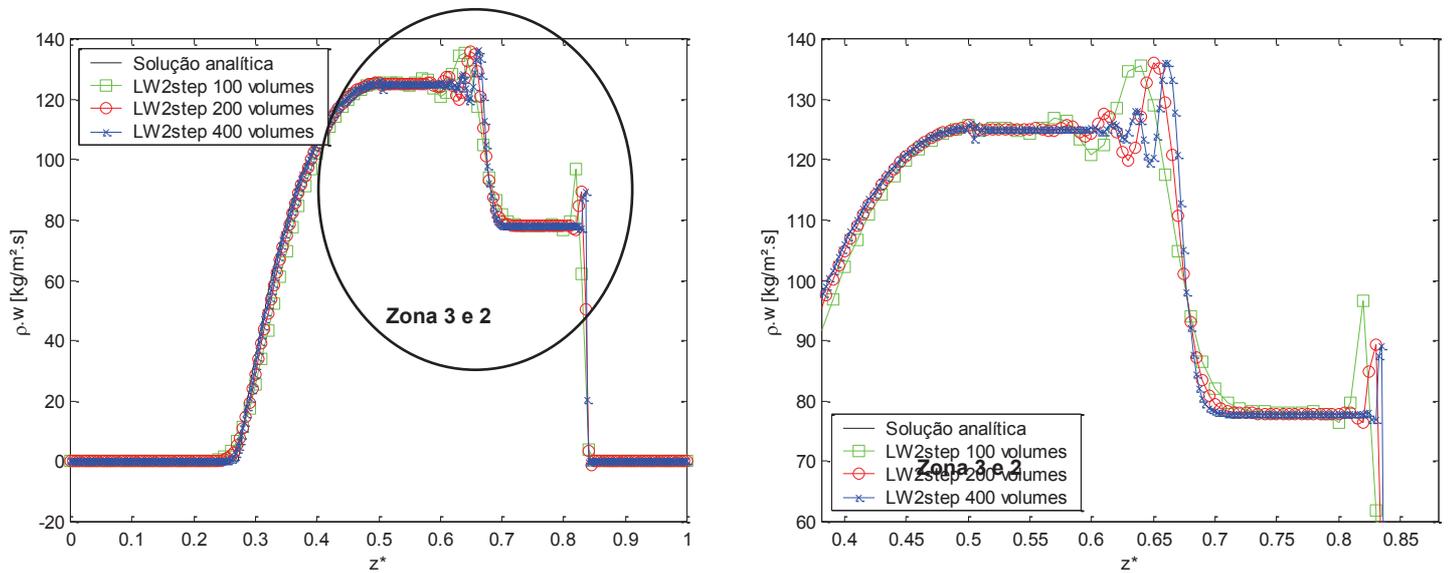


Figura 5.14 – Fluxo de Massa por unidade e área em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos no tempo 0,0061s e CFL 0,95.



As oscilações presentes que antecedem a região de baixa pressão, onda de choque, em aproximadamente 8,4 m, possuem uma amplitude menor que as do final da superfície de contato, porém os picos aparecem nas duas extremidades da descontinuidade. Aqui o refinamento da malha reduziu a amplitude das oscilações, mas sem removê-las por completo.

O grande problema está, nas oscilações que aparecem na região da descontinuidade de contato, entre as zonas 3 e 2 em aproximadamente 6 m e 7 m. Essas oscilações estão presente em grande quantidade e amplitude ao longo da curva, distorcendo completamente o seu comportamento. O resultado do refinamento da malha nessa região foi somente na proximidade das oscilações, não tendo nenhuma influência em sua amplitude.

A Tabela 5.2 mostra os valores do tempo computacional para cada tamanho de malha utilizado. O tempo computacional aumenta consideravelmente com o refinamento da malha, praticamente quadruplicando a cada vez que se duplica o tamanho da malha.

Tabela 5.2 – Valor de tempo computacional para cada tamanho de malha utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos

	<i>Malha = 100 volumes</i>	<i>Malha = 200 volumes</i>	<i>Malha = 400 volumes</i>
% do tempo em relação ao tempo computacional de Lax-Wendroff de dois passos com malha de 200 volumes	26,24%	100%	392,82%

Nas Figuras 5.15 até 5.21 são apresentados os resultados obtidos pelo método de MacCormack.

De maneira geral o comportamento obtido pelo método de MacCormack em relação ao refinamento da malha é muito similar ao do Lax-Wendroff de dois passos. Quanto maior o refinamento da malha, maior é a aproximação da solução numérica com a solução analítica, tornando-a menos difusiva nas regiões de descontinuidade. Por outro lado, as curvas geradas por MacCormack possui oscilações maiores em quantidade e amplitude do que o método de Lax-Wendroff de dois passos, isso para todos os tamanhos de malha. Os valores obtidos para o RMSE ilustram isso, Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Valor de RMSE para o cálculo numérico através de MacCormack

	<i>Malha 100 volumes</i>	<i>Malha 200 volumes</i>	<i>Malha 400 volumes</i>
RMSE médio de todas as propriedades	5,51	6,29	8,31

No início da zona 3, aproximadamente 5 m, é onde se observa a maior diferença entre os dois métodos numéricos. Nessa região o método de MacCormack apresentou oscilações com amplitudes muito grandes, que acabam distorcendo muito mais a solução que o método de Lax-Wendroff de dois passos. As curvas de velocidade e número de Mach, Figuras 5.17 e 5.18, além de indicarem um escoamento supersônico, mostram valores aproximadamente 60% maiores que a solução analítica, enquanto a solução por Lax-Wendroff de dois passos apresentou valores 20% maiores. Diferentemente do que ocorreu para o método de Lax-Wendroff de dois passos, o refinamento da malha não aumentou a amplitude das oscilações nessa região, mas reduziu-as levemente.

Outra diferença perceptível entre os dois métodos numéricos ocorre no final da zona 2, em aproximadamente 8,4 m, onde o método de MacCormack apresenta oscilações muito pequenas nas duas extremidades da descontinuidade. Essas oscilações têm sua amplitude reduzida com o refinamento da malha, tornando-se quase imperceptíveis para a malha de 400.

Figura 5.15 – Pressão em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.

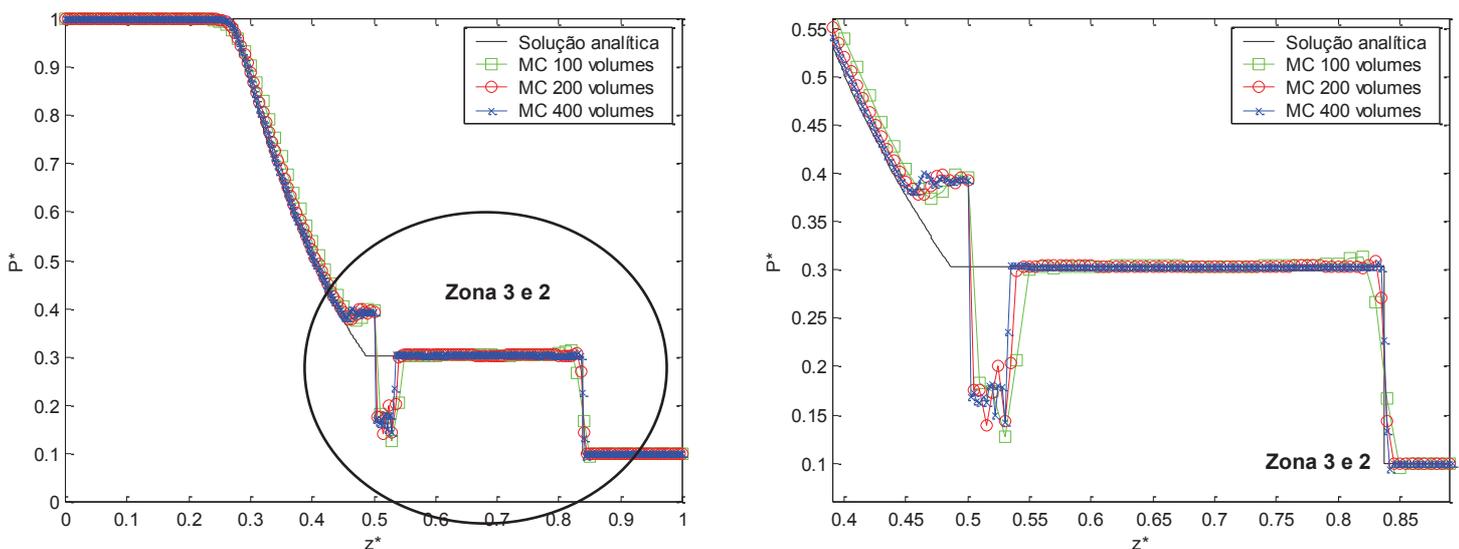


Figura 5.16 – Massa específica em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.

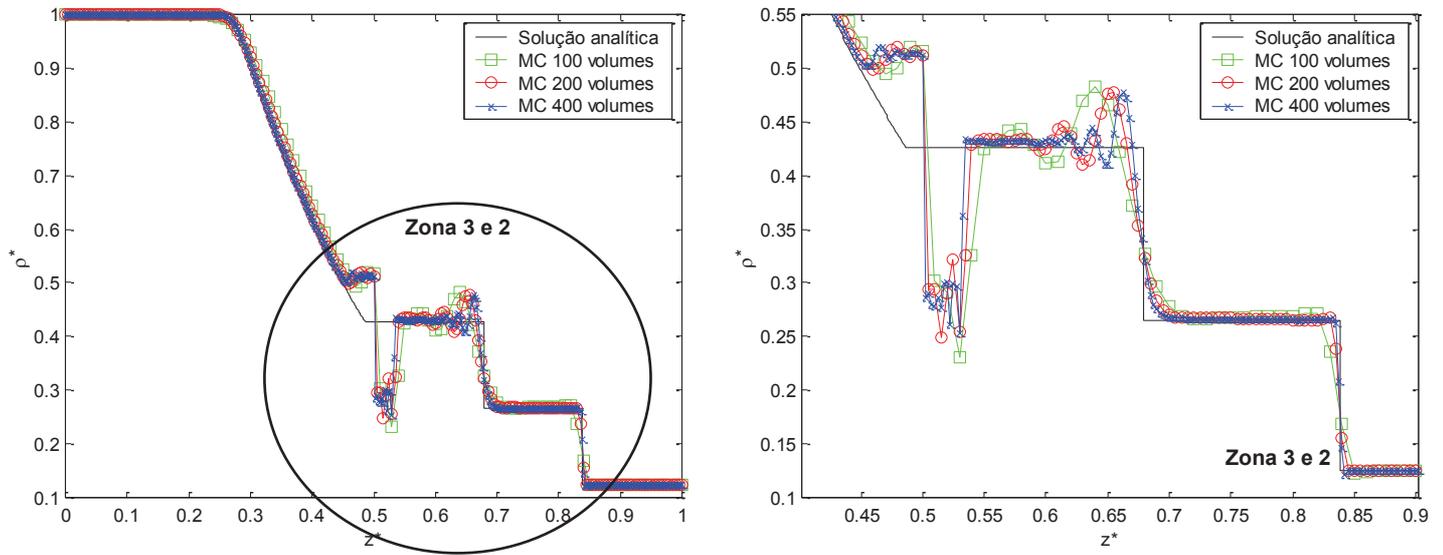
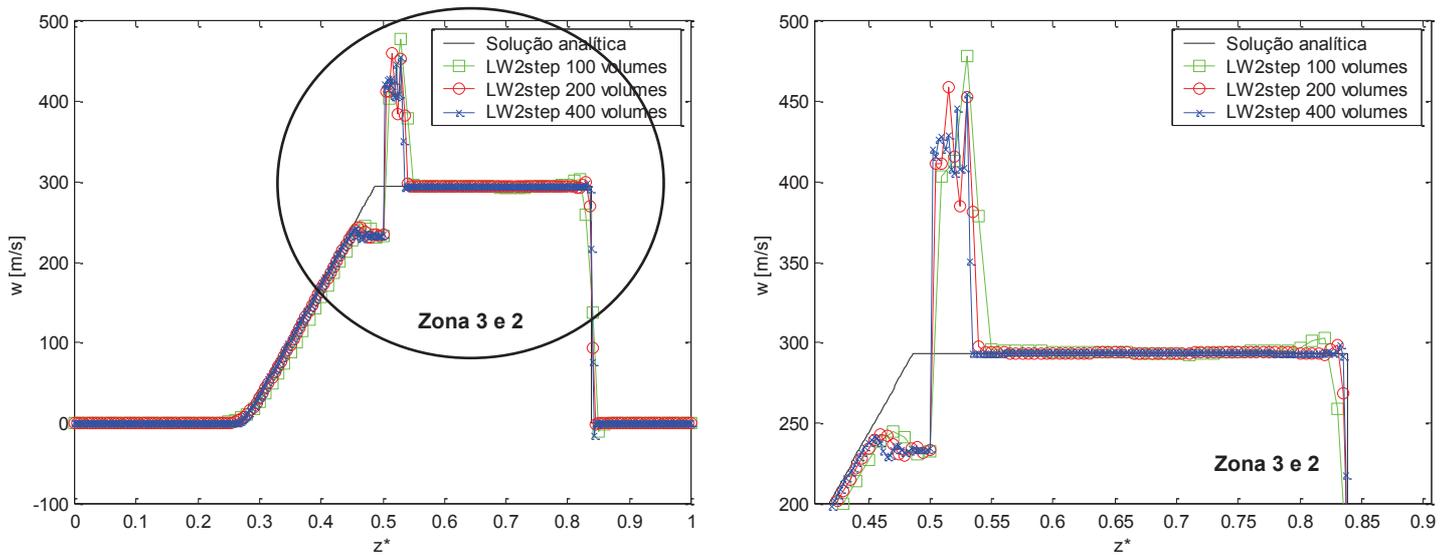


Figura 5.17 – Velocidade em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.



Já as oscilações apresentadas na zona 2, perto da descontinuidade de contato aproximadamente entre 6 m e 7 m, se comportaram de maneira muito parecida com o método de Lax-Wendroff de dois passos, são grandes em quantidade e amplitude e o refinamento da malha só resultou em uma aproximação das oscilações.

Figura 5.18 – Número de Mach em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.

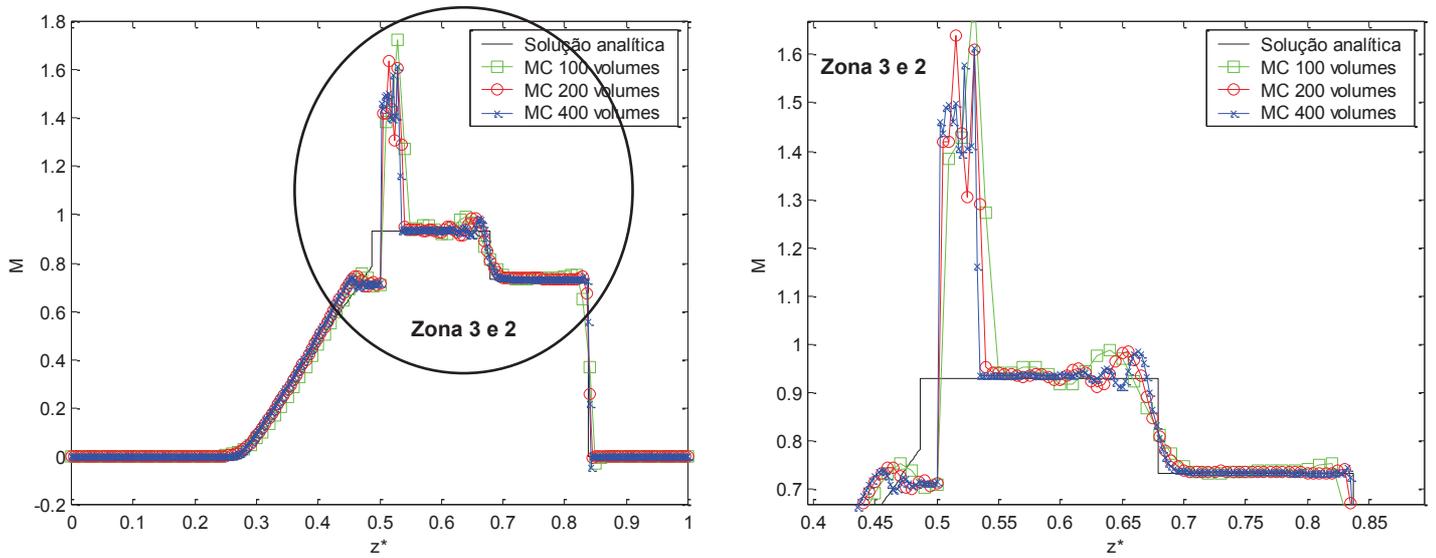


Figura 5.19 – Temperatura em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.

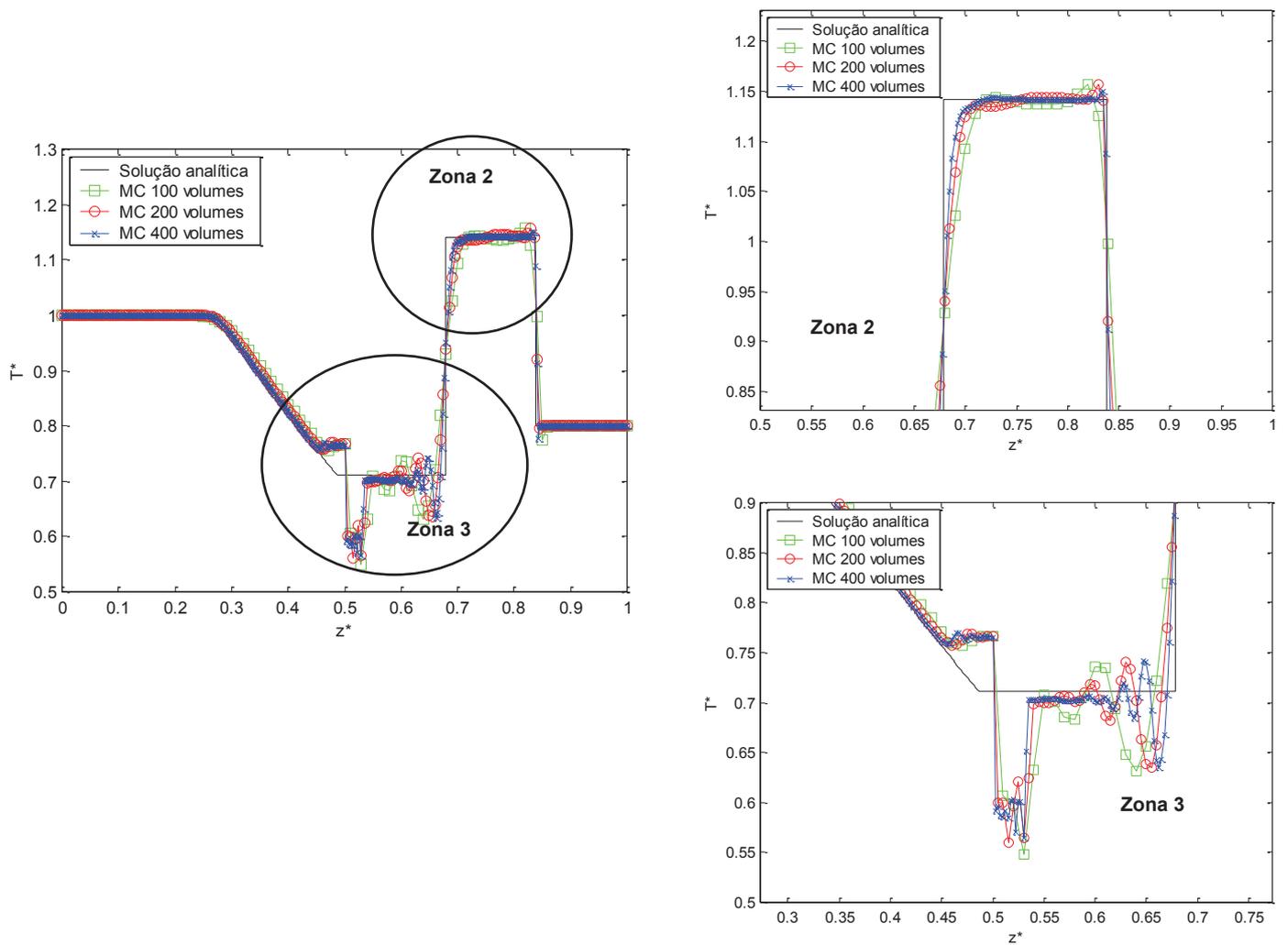


Figura 5.20 – Entropia em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.

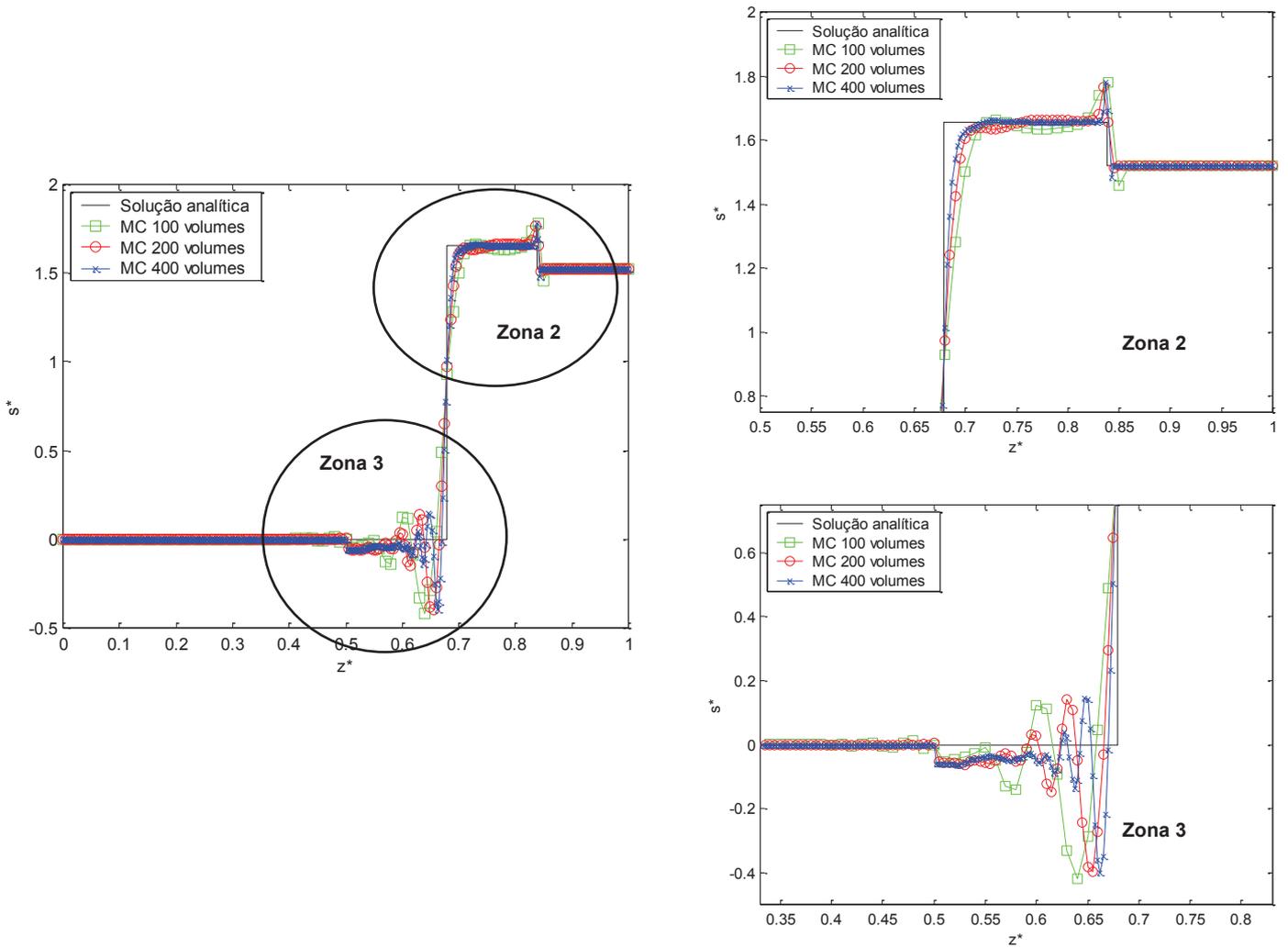
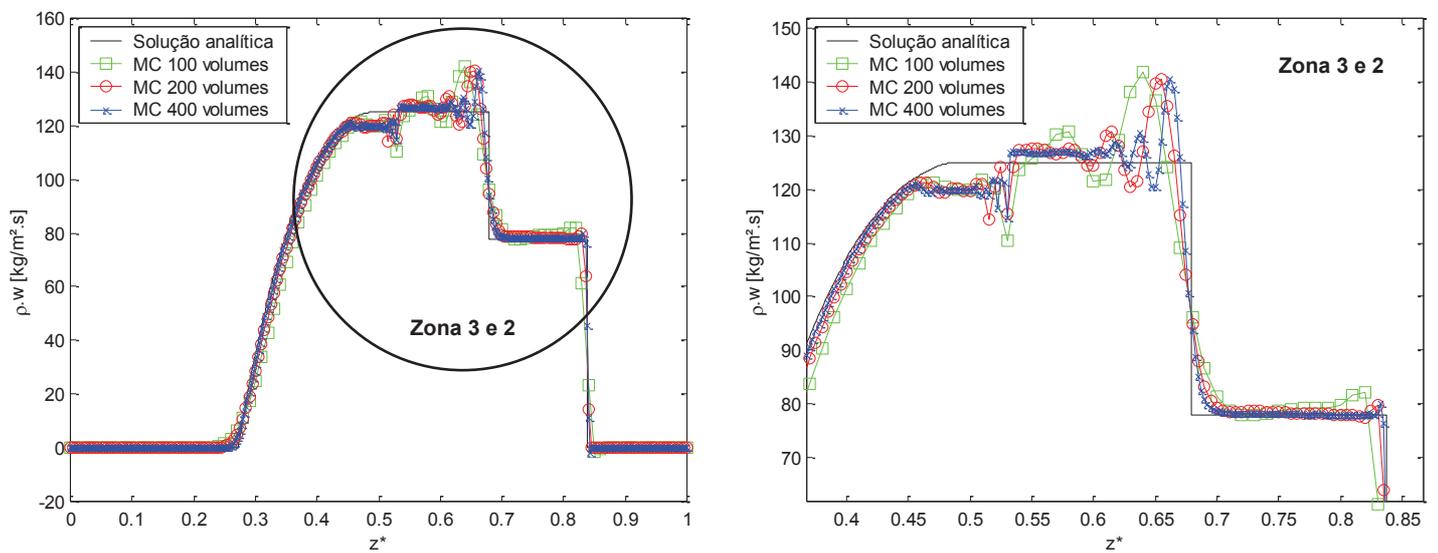


Figura 5.21 – Fluxo de Massa em função da distância para MacCormack no tempo 0,0061s e CFL 0,95.



Os valores obtidos para o tempo computacional estão apresentados na Tabela 5.4. Também foi observado para o método de MacCormack um aumento do tempo computacional de quatro vezes para cada vez que se dobrava o tamanho da malha utilizada, porém seus valores são ligeiramente menores do que os obtidos por Lax-Wendroff de dois passos.

Tabela 5.4 – Valor de tempo computacional para cada tamanho de malha utilizado no cálculo numérico através de MacCormack

	<i>Malha = 100 volumes</i>	<i>Malha = 200 volumes</i>	<i>Malha = 400 volumes</i>
% do tempo em relação ao tempo computacional de Lax-Wendroff de dois passos com malha de 200 volumes [s]	26,56%	99,06%	392,80%

Como o intuito desse trabalho é estudar limitadores que reduzam as oscilações dos métodos de diferenças finitas de segunda ordem, se optou por utilizar a malha de 200 volumes para continuar o estudo dos dois métodos numéricos. Essa escolha se deu pelo fato de que o aumento no tamanho de malha não eliminou as oscilações na solução, e o tempo computacional para a malha de 200 volumes não foi elevado gerando uma boa precisão. O aumento do tamanho de malha é, porém, indicado para se obter uma solução que represente mais fielmente os fenômenos em estudo.

5.2 RESULTADOS NUMÉRICOS PARA O TVD DE DAVIS

Buscando eliminar as oscilações dos métodos de Lax-Wendroff de dois passos e de MacCormack e obter uma solução mais precisa, adicionou-se aos métodos, o TVD de Davis, testando-o com três diferentes funções limitadoras. As funções limitadoras escolhidas foram Davis 1, Sweby e Van Albada, para cada uma delas testou-se cinco valores diferentes de CFL.

5.2.1 TVD de Davis e função limitadora de Davis 1

As Figuras 5.22 a 5.28 apresentam os resultados obtidos pelo método de Lax-Wendroff de dois passos, com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1.

De maneira geral os resultados obtidos nas Figuras 5.22 a 5.28 foram muito satisfatórios. As oscilações presentes no método original foram completamente eliminadas e as curvas sofreram uma leve suavização da solução somente nas zonas 2 e 3, perto da descontinuidade de contato, e da descontinuidade existente entre a região por onde a onda de compressão já passou e a região de baixa pressão.

Até chegar à zona 3, as curvas obtidas para todos os valores de CFL estão muito similares, é, no entanto, entre a zona 3 e 2, bem na descontinuidade de contato, que começa-se a observar a influência do CFL na solução. Aqui as curvas começam a se distanciar um pouco e é possível observar que a curva que apresenta a menor suavização da descontinuidade e segue melhor a solução analítica é a com CFL igual a 0,7, seguida pela curva com CFL igual a 0,6 e depois pela curva com CFL igual a 0,5.

Na zona 2 a influência do valor do CFL fica muito evidente. As curvas obtidas para CFL's iguais a 0,8 e 0,9 apresentam resultados muito distorcidos e sem semelhança com a solução obtida pelo método original. Isso indica que o TVD de Davis pode não ser válido para CFL's maiores do que 0,7. Analisando as demais curvas, é possível observar que novamente a obtida com CFL igual a 0,7 foi a que menos suavizou a solução. Era de se esperar que quanto menor fosse o valor do CFL, mais precisa seria a solução, porém não é o que se pode observar. Os valores obtidos para o RMSE, apresentados na tabela 5.5 confirmam isso.

Figura 5.22 – Pressão do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.

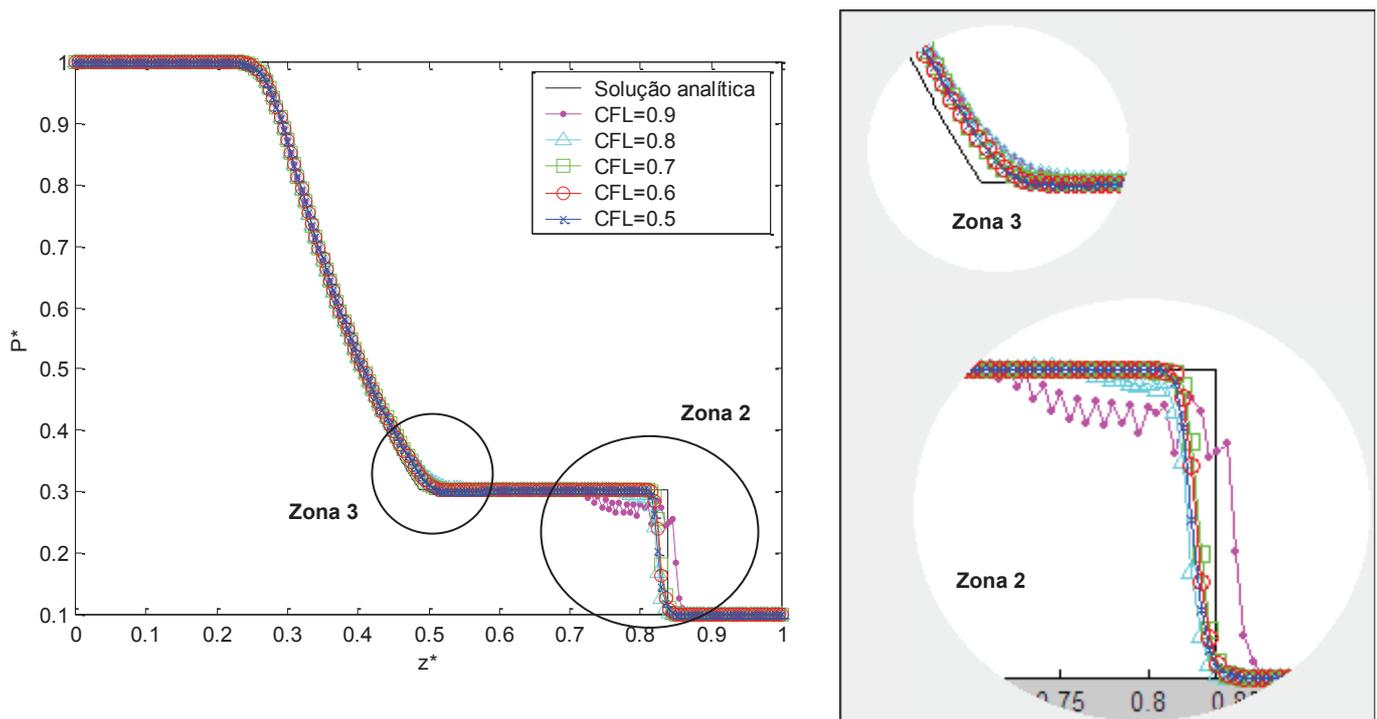


Figura 5.23 – Massa específica do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.

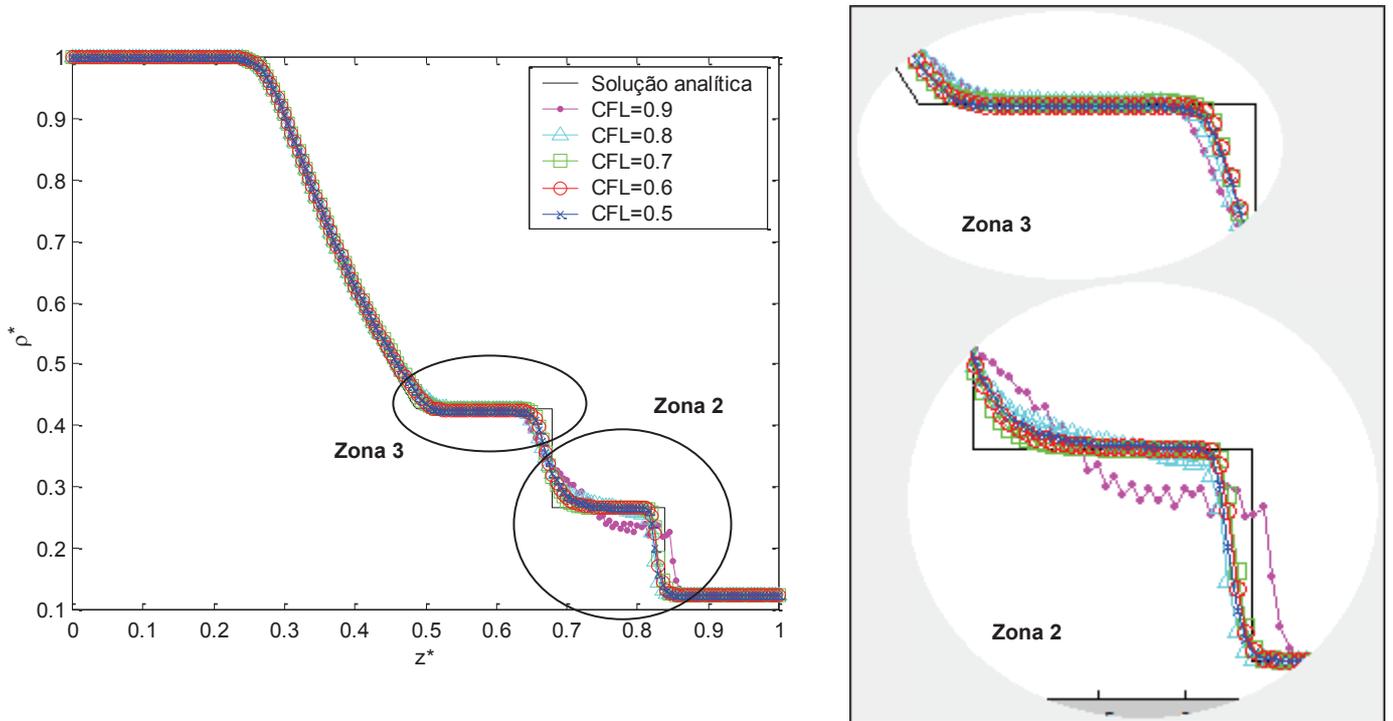


Figura 5.24 – Velocidade do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.

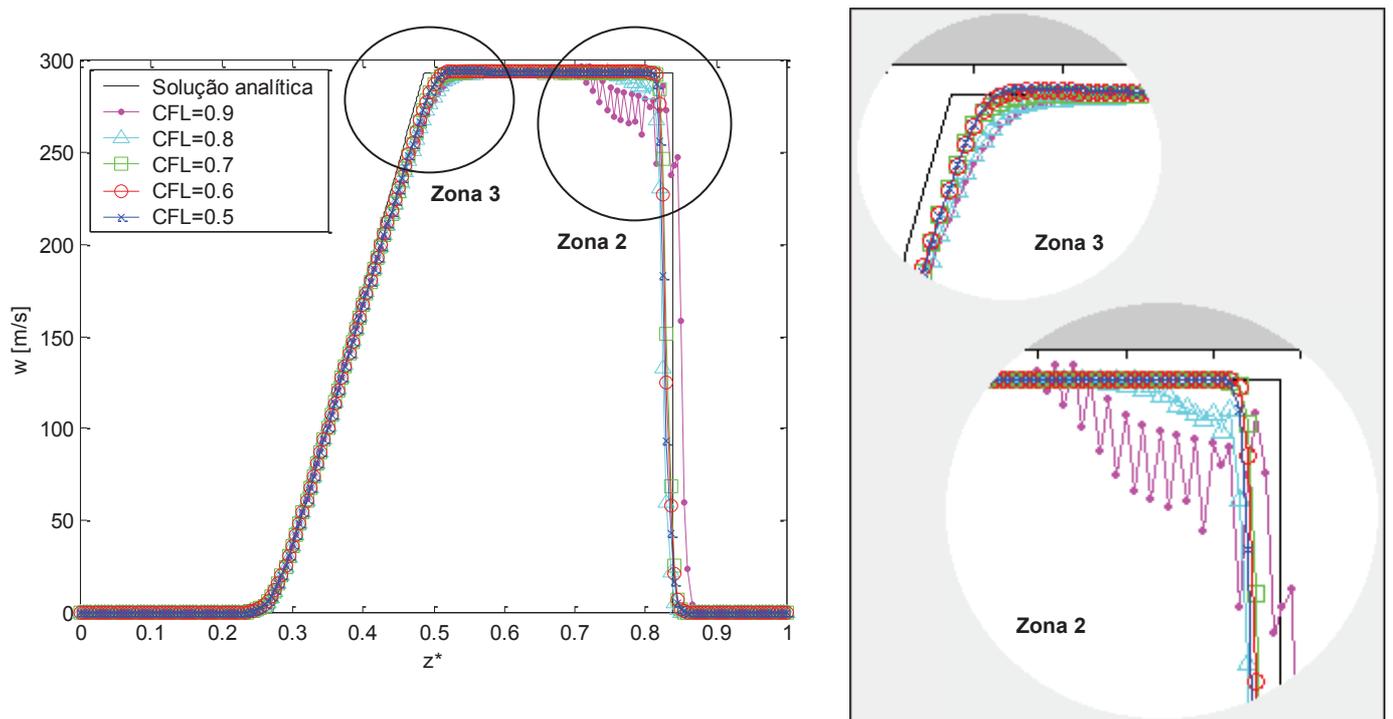


Figura 5.25 – Número de Mach em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.

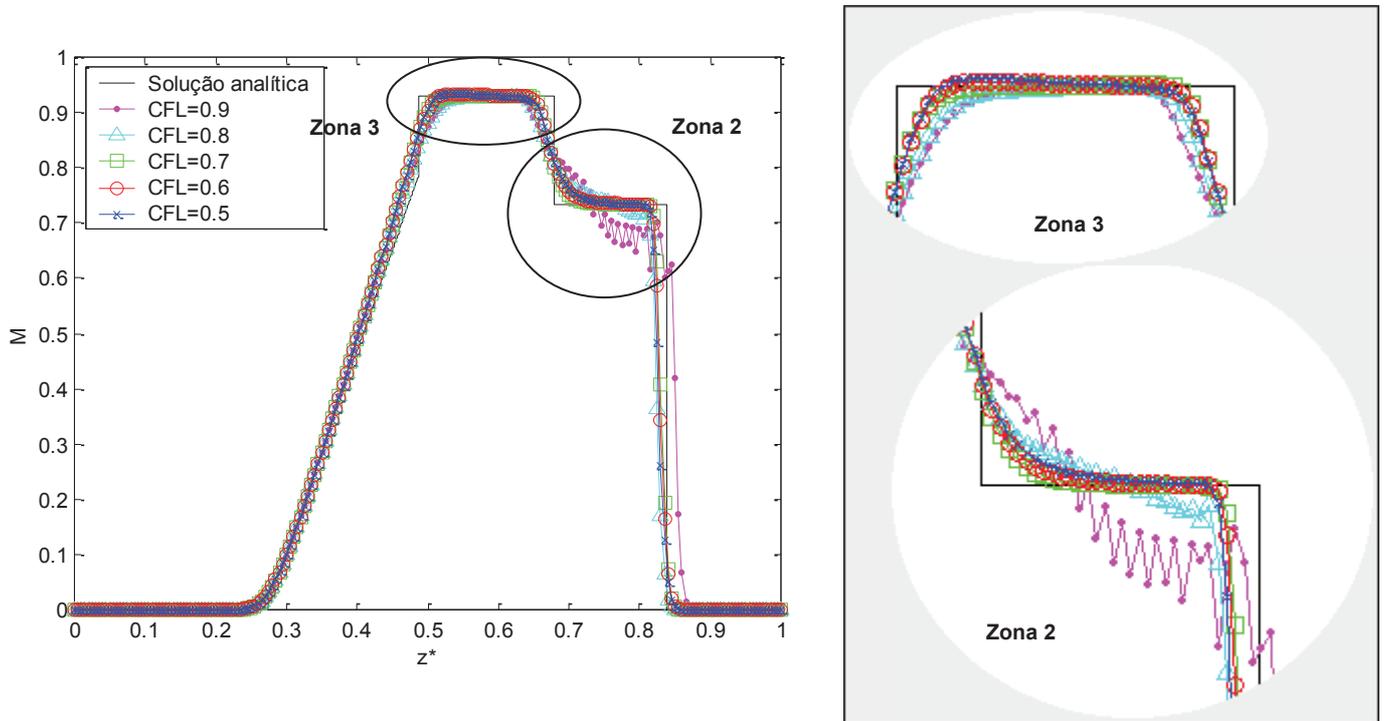


Figura 5.26 – Temperatura do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.

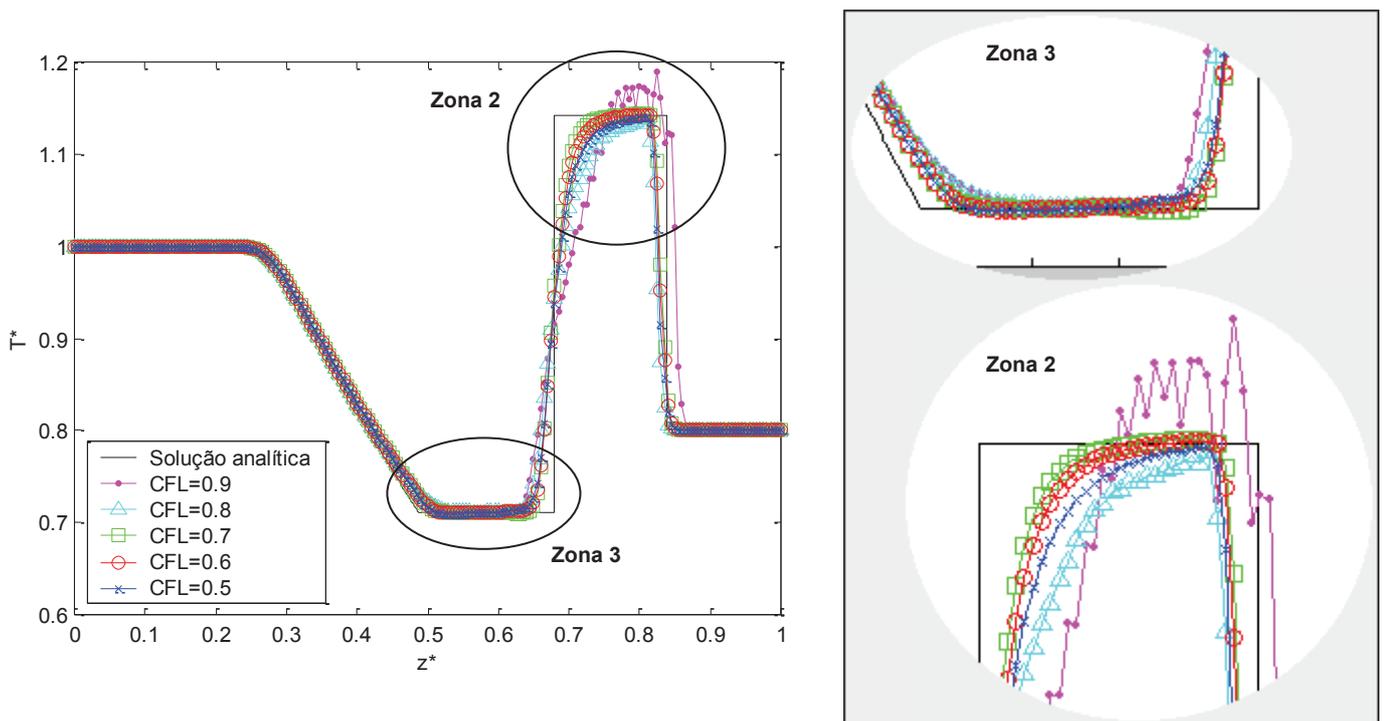


Figura 5.27 – Entropia do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.

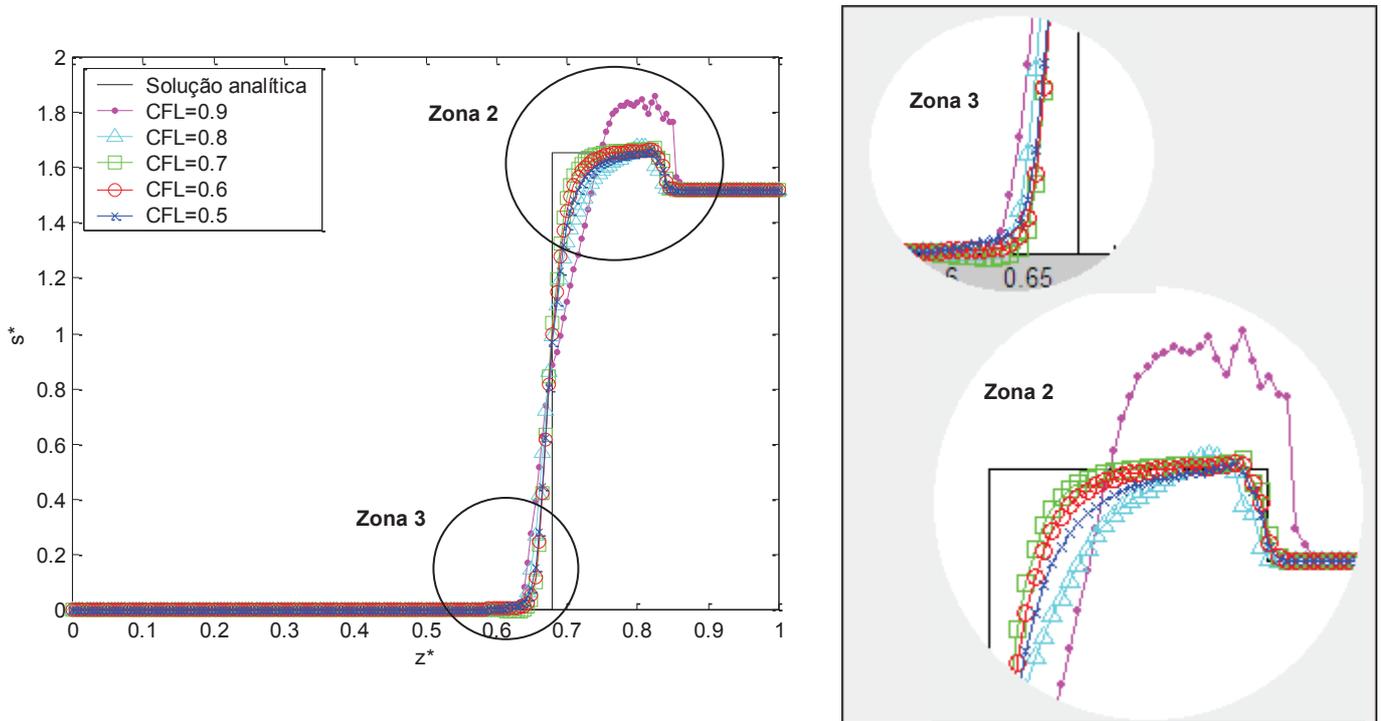


Figura 5.28 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.

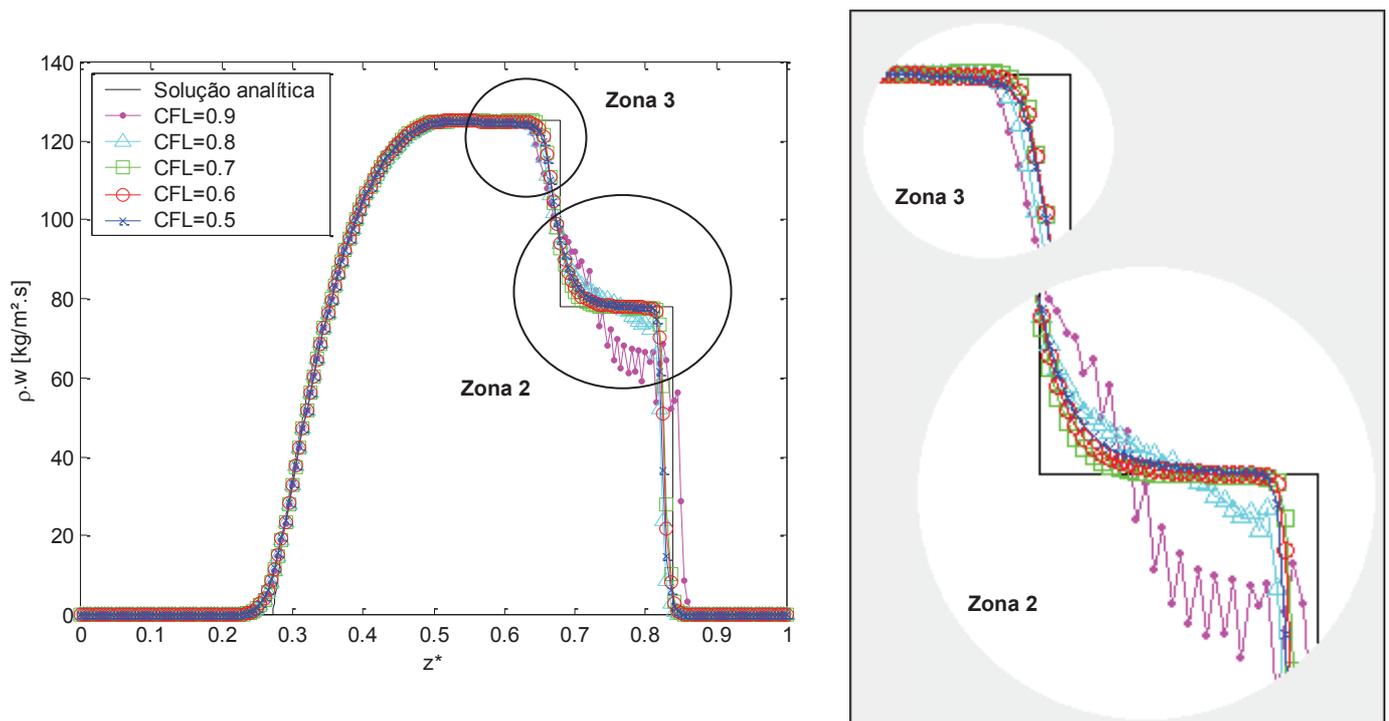


Tabela 5.5 – Valor de RMSE para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1

	<i>CFL = 0,5</i>	<i>CFL = 0,6</i>	<i>CFL = 0,7</i>	<i>CFL = 0,8</i>	<i>CFL = 0,9</i>
RMSE médio de todas as propriedades	4,73	4,18	3,85	5,47	5,45

A tabela 5.6 apresenta o valor do tempo computacional para cada CFL utilizado no cálculo da solução numérica, e é possível verificar que a adição do limitador TVD aumenta consideravelmente o tempo computacional, e no melhor caso, CFL igual a 0,7, é quase 700% do valor obtido pelo método original. O aumento do tempo computacional gerado pela redução do CFL não ocorre de maneira linear, tornando-se muito alto para CFL igual a 0,5.

Tabela 5.6 – Valor de tempo computacional para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1

	<i>CFL = 0,5</i>	<i>CFL = 0,6</i>	<i>CFL = 0,7</i>	<i>CFL = 0,8</i>	<i>CFL = 0,9</i>
% do tempo em relação ao tempo computacional de Lax-Wendroff de dois passos com malha de 200 volumes	974,06%	812,8%	698,12%	645,00%	621,56%

Os resultados encontrados para o método de MacCormack, com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, podem ser observados nas Figuras 5.29 a 5.35.

Assim como para o método de Lax-Wendroff de dois passos, o método de MacCormack apresentou resultados muito bons com a adição do TVD de Davis e a função limitadora de Davis 1. Apesar das oscilações do método original serem maiores em amplitude e quantidade, principalmente no início da zona 3, elas também foram completamente eliminadas resultando em curvas muito similares entre os dois métodos numéricos.

Mantendo a similaridade no resultado obtido entre os dois métodos, a curva obtida por MacCormack também foi levemente suavizada nas zonas 2 e 3, tanto na descontinuidade de contato, como entre a região afetada pela onda de compressão e a região de baixa pressão. Além disso, também foi na descontinuidade de contato, que se começou a ocorrer um leve distanciamento entre as curvas obtidas para cada CFL, indicando sua influência na solução. Aqui, a curva que ficou mais próxima da solução analítica, também foi a calculada com CFL igual a 0,7.

Figura 5.29 – Pressão do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.

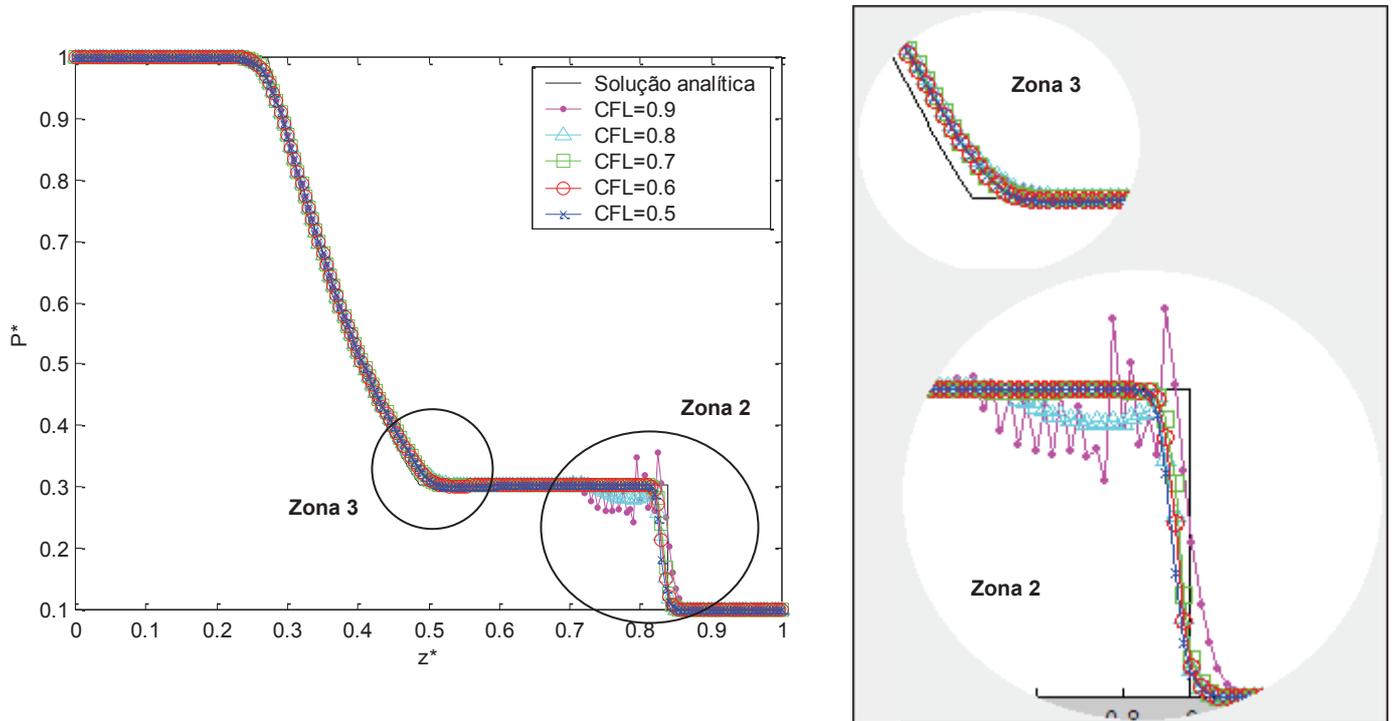


Figura 5.30 – Massa específica do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.

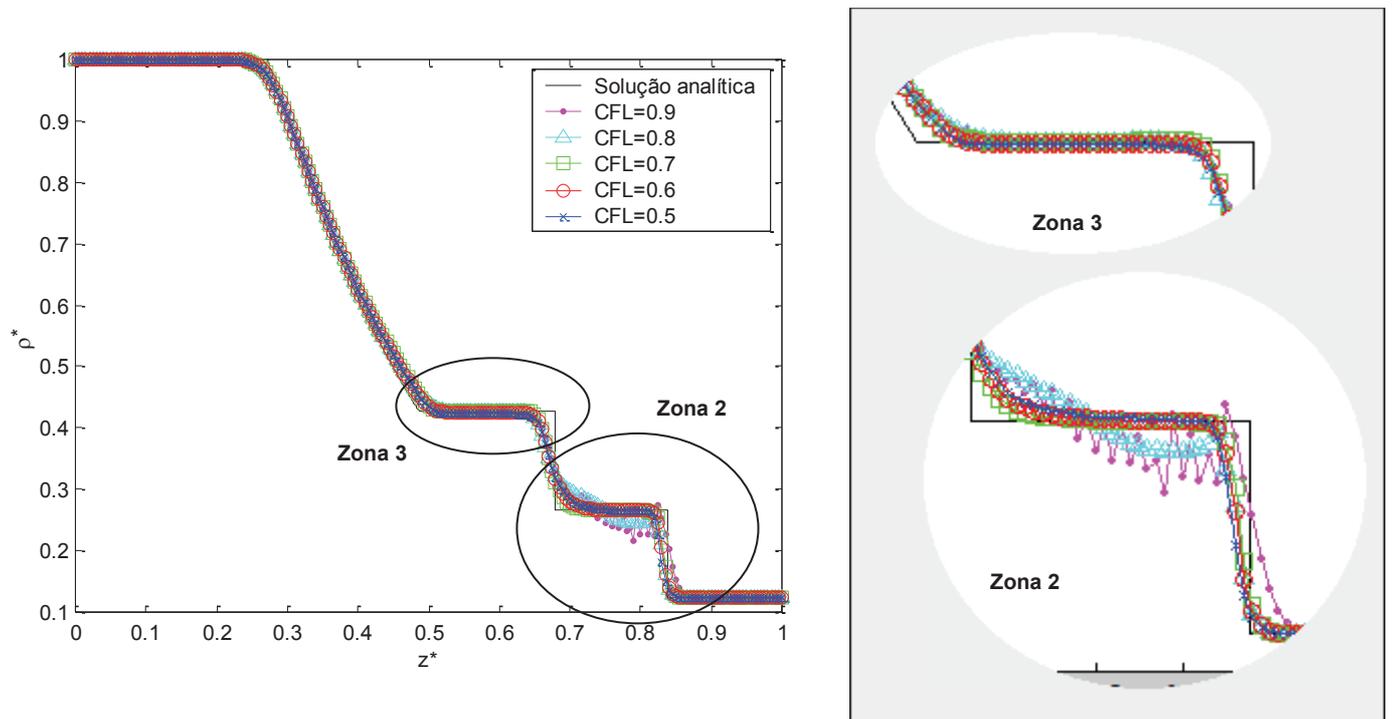


Figura 5.31 – Velocidade do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.

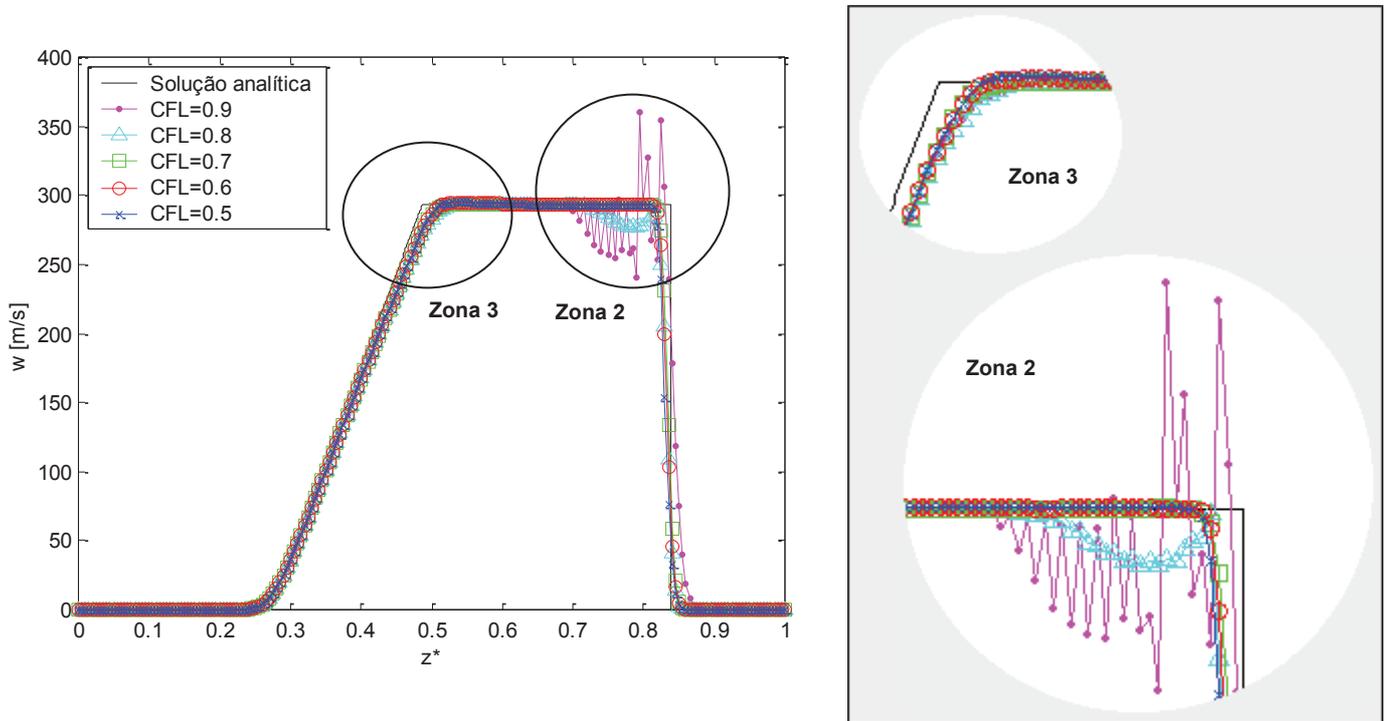


Figura 5.32 – Número de Mach em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis em 0,0061 s.

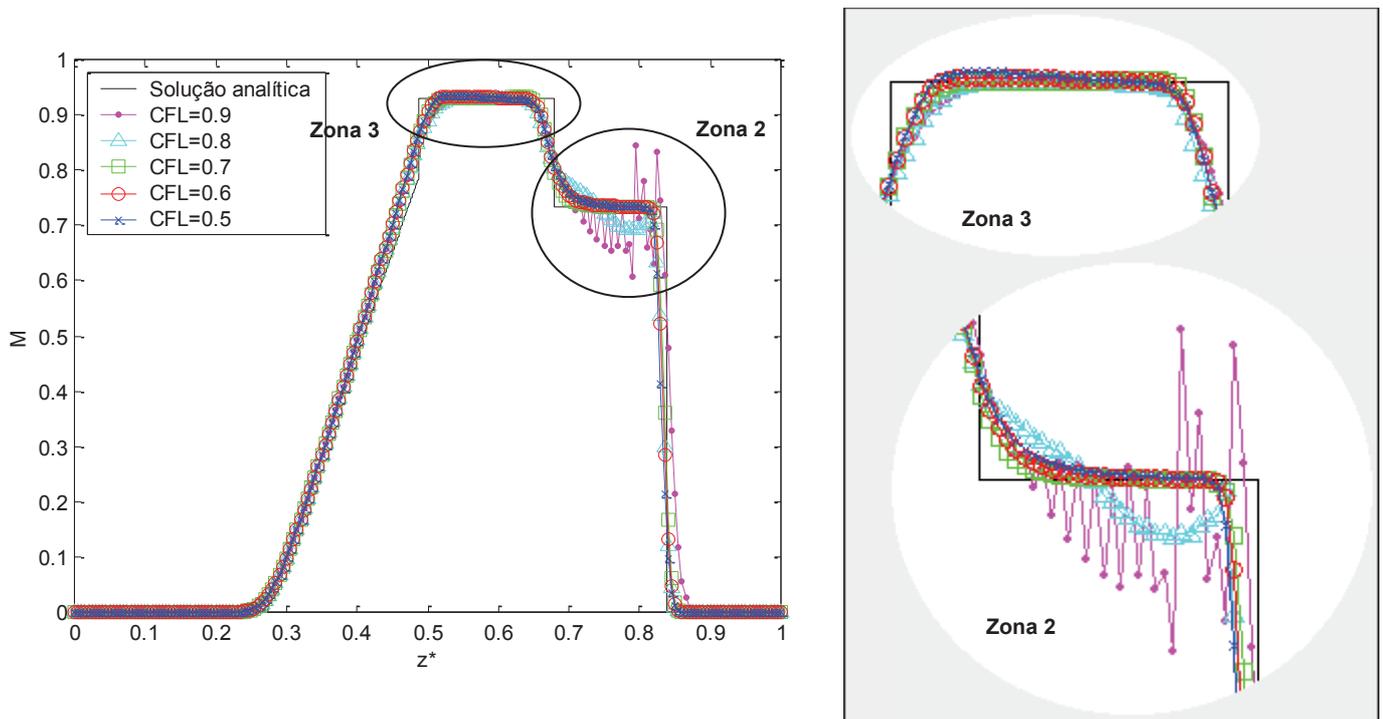


Figura 5.33 – Temperatura do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.

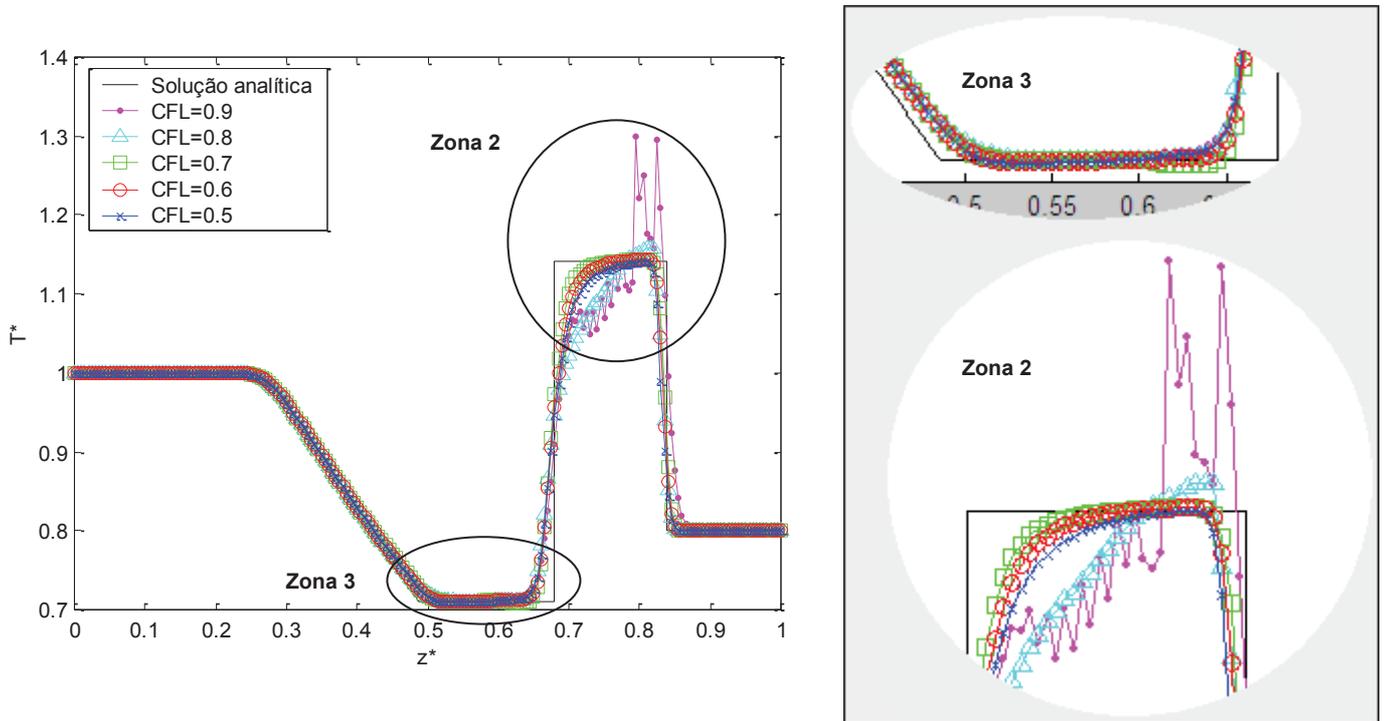


Figura 5.34 – Entropia do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.

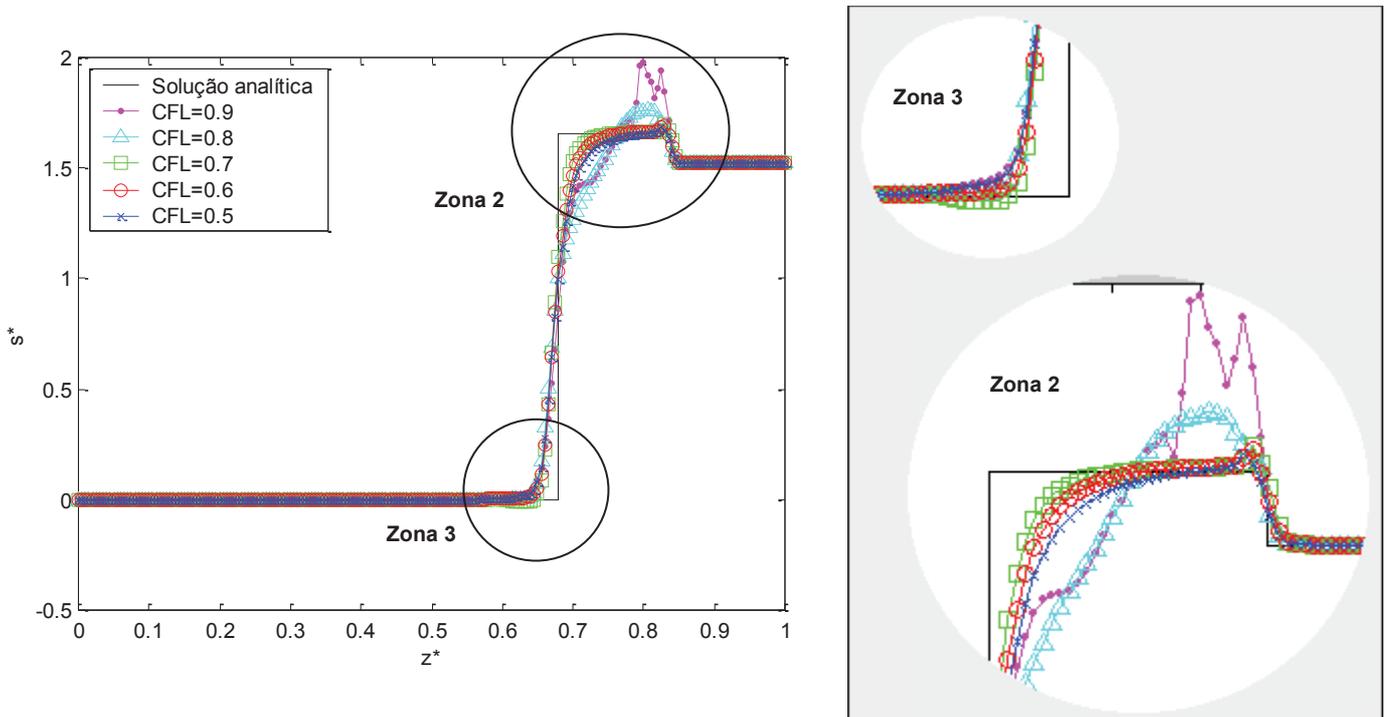
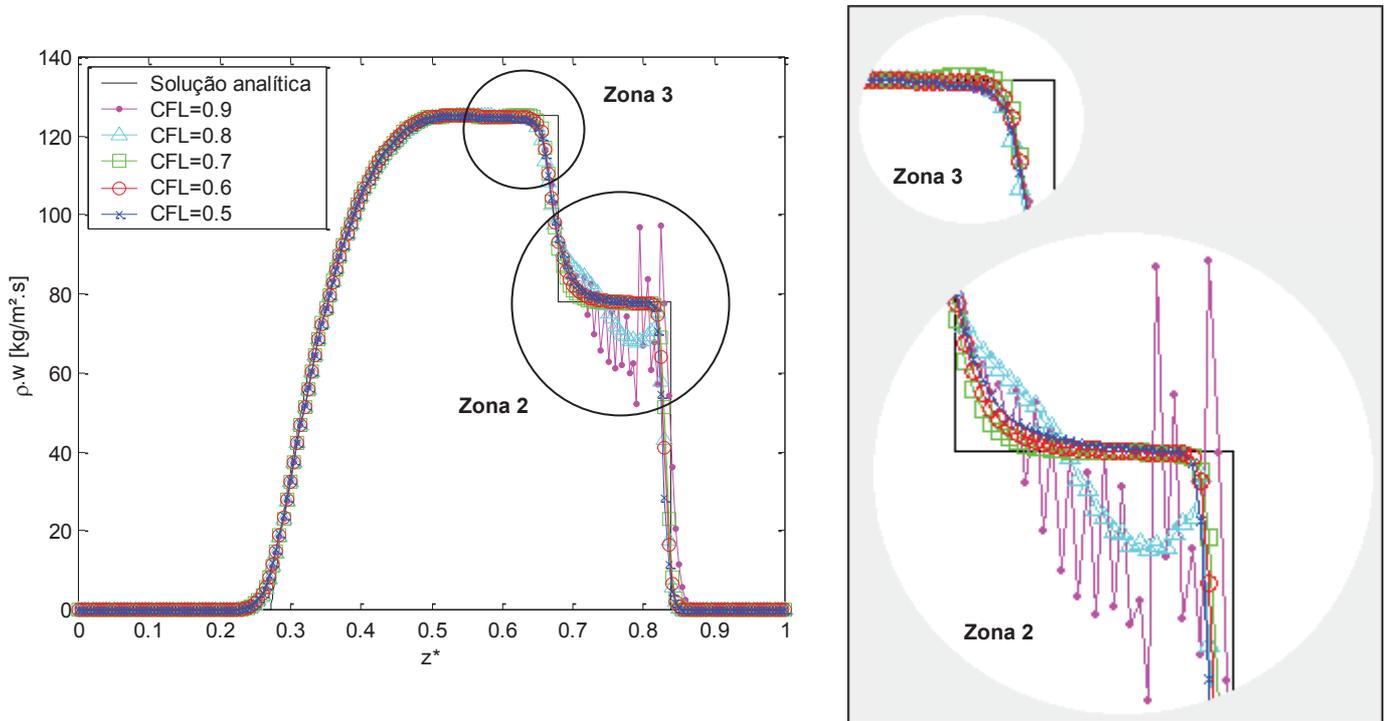


Figura 5.35 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1 em 0,0061 s.



Observando a zona 2 das Figuras 5.29 a 5.35, torna-se, mais uma vez, evidente que o TVD de Davis só é preciso para CFL's menores ou iguais a 0,7, pois as curvas obtidas com o método de MacCormack, para os CFL's iguais a 0,8 e 0,9, também distorceram a solução, porém em uma amplitude muito maior. Mais uma vez, nessa região, a curva calculada para o CFL igual a 0,7, foi a que apresentou resultados mais próximos ao da solução analítica, sendo esse comportamento comprovado pelos valores de RMSE obtidos, tabela 5.7.

Tabela 5.7 – Valor de RMSE para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Davis 1

	<i>CFL = 0,5</i>	<i>CFL = 0,6</i>	<i>CFL = 0,7</i>	<i>CFL = 0,8</i>	<i>CFL = 0,9</i>
RMSE médio de todas as propriedades	3,82	3,23	2,80	3,34	3,92

Na Tabela 5.8 é possível observar os resultados de tempo computacional para o método de MacCormack com a adição do TVD, os quais, assim como para Lax-Wendroff de dois passos, aumentaram consideravelmente em relação a um método sem TVD. Aqui a

redução do CFL também não resultou em um aumento linear do tempo computacional, gerando um valor muito alto para o CFL igual a 0,5.

Tabela 5.8 – Valor de tempo computacional para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Davis 1

	<i>CFL = 0,5</i>	<i>CFL = 0,6</i>	<i>CFL = 0,7</i>	<i>CFL = 0,8</i>	<i>CFL = 0,9</i>
% do tempo em relação ao tempo computacional de Lax-Wendroff de dois passos com malha de 200 volumes	967,18%	804,68%	689,06%	631,56%	619,08%

5.2.2 TVD de Davis e função limitadora de Sweby

Os resultados obtidos para o Lax-Wendroff de dois passos, com TVD de Davis e função limitadora de Sweby, estão apresentados nas Figuras 5.36 a 5.42. O valor escolhido para o β da equação de Sweby apresentada na Tabela 4.1 foi 1,5, pois dessa maneira se está testando o próprio Sweby e não uma generalização do método de Minmod ou de Superbee.

As curvas obtidas com a função limitadora de Sweby possuem um comportamento diferente do observado para a função de Davis 1. Com o Sweby, a solução ficou muito mais suavizada, desde o início da zona 5, onde começa a região de transição. Sendo assim, pode-se considerar essa função limitadora como difusiva. Por outro lado, ela ficou ligeiramente mais próxima da solução analítica na descontinuidade que antecede a região de baixa pressão. Analisando as Figuras 5.36 a 5.42, no final da zona 2, perto da descontinuidade, as curvas ainda apresentam o indício de uma pequena oscilação.

Utilizando Sweby, os resultados também ficaram distorcidos para CFL's iguais a 0,8 e 0,9 na zona 2, porém muito mais evidenciados, comprovando que o TVD de Davis só é preciso para CFL menores ou iguais a 0,7. Novamente, fugindo da ideia de que um menor CFL resulta em maior precisão, as curvas calculadas com CFL igual a 0,7 se aproximaram mais da solução analítica em comparação com os resultados para CFL's iguais a 0,5 e 0,6, como pode ser observados nas zonas 2 e 3 de cada curva, como indicam os valores de RMSE calculados, tabela 5.9

Figura 5.36 – Pressão do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.

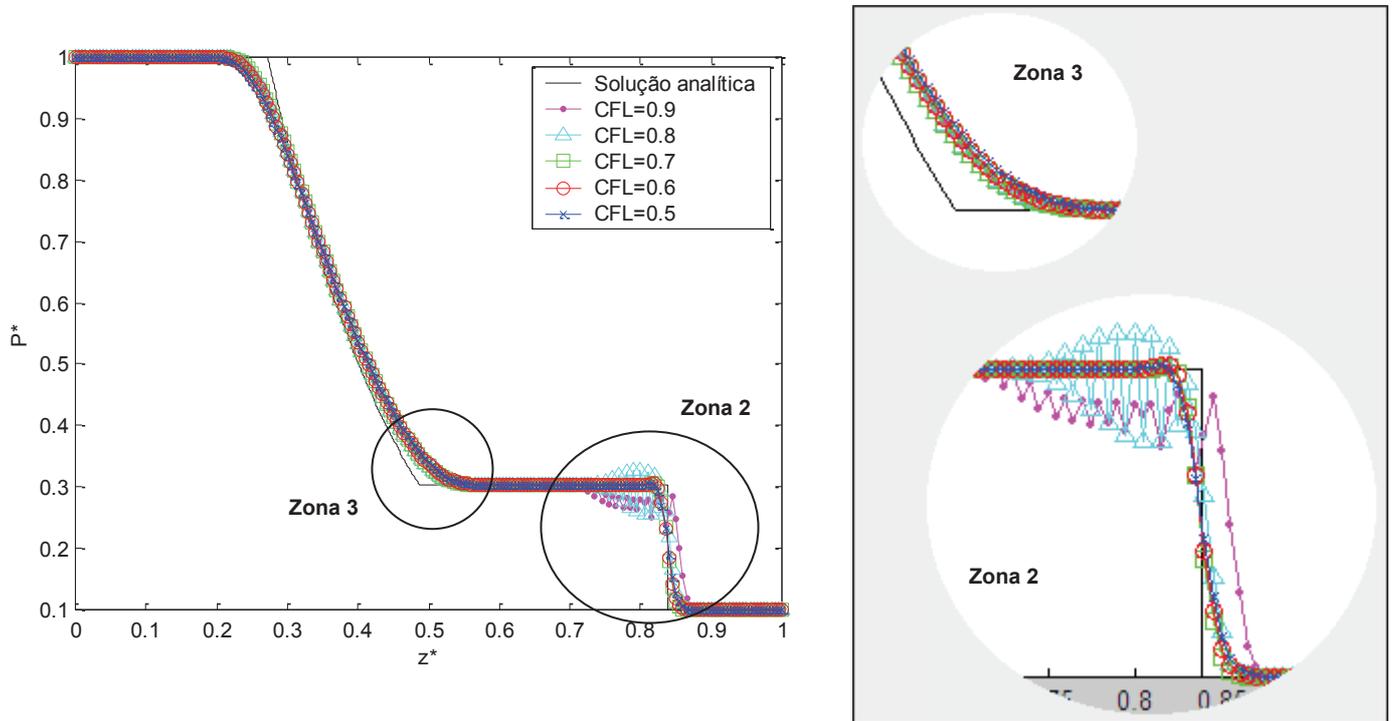


Figura 5.37 – Massa específica do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.

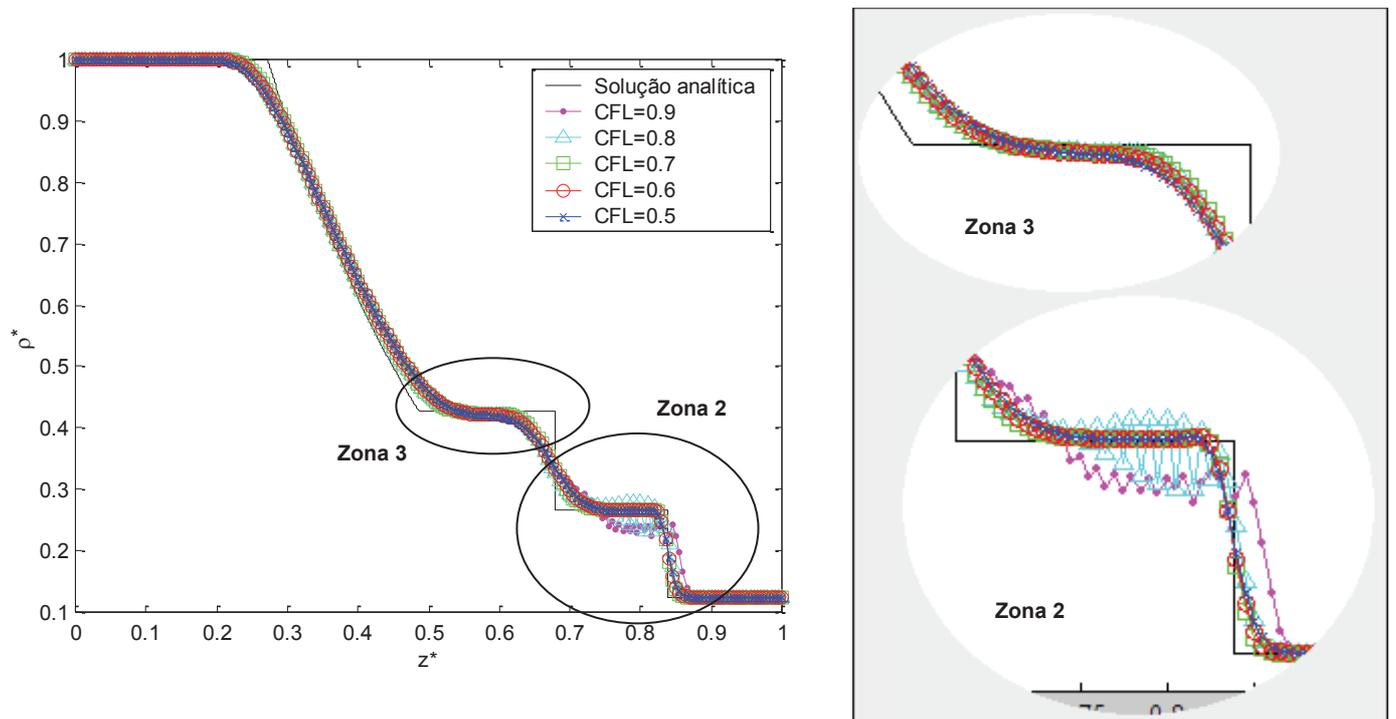


Figura 5.38 – Velocidade do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.

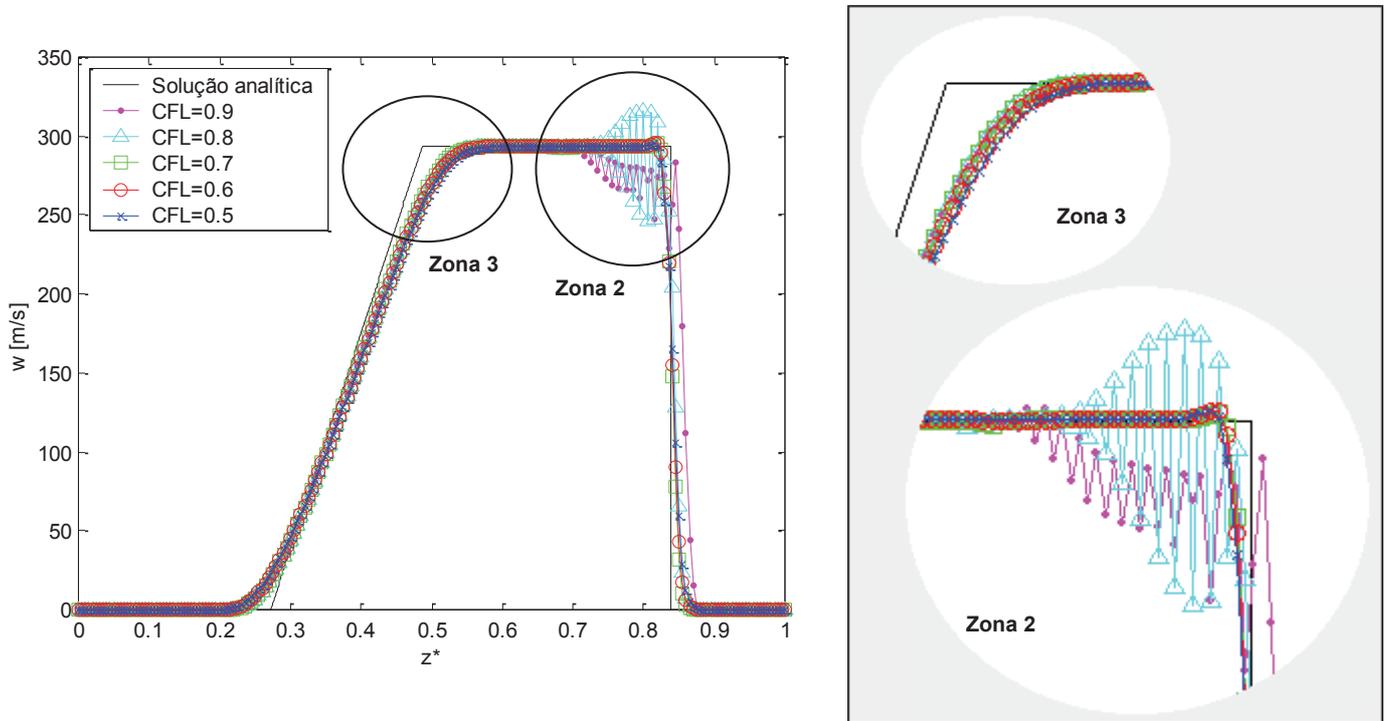


Figura 5.39 – Número de Mach em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.

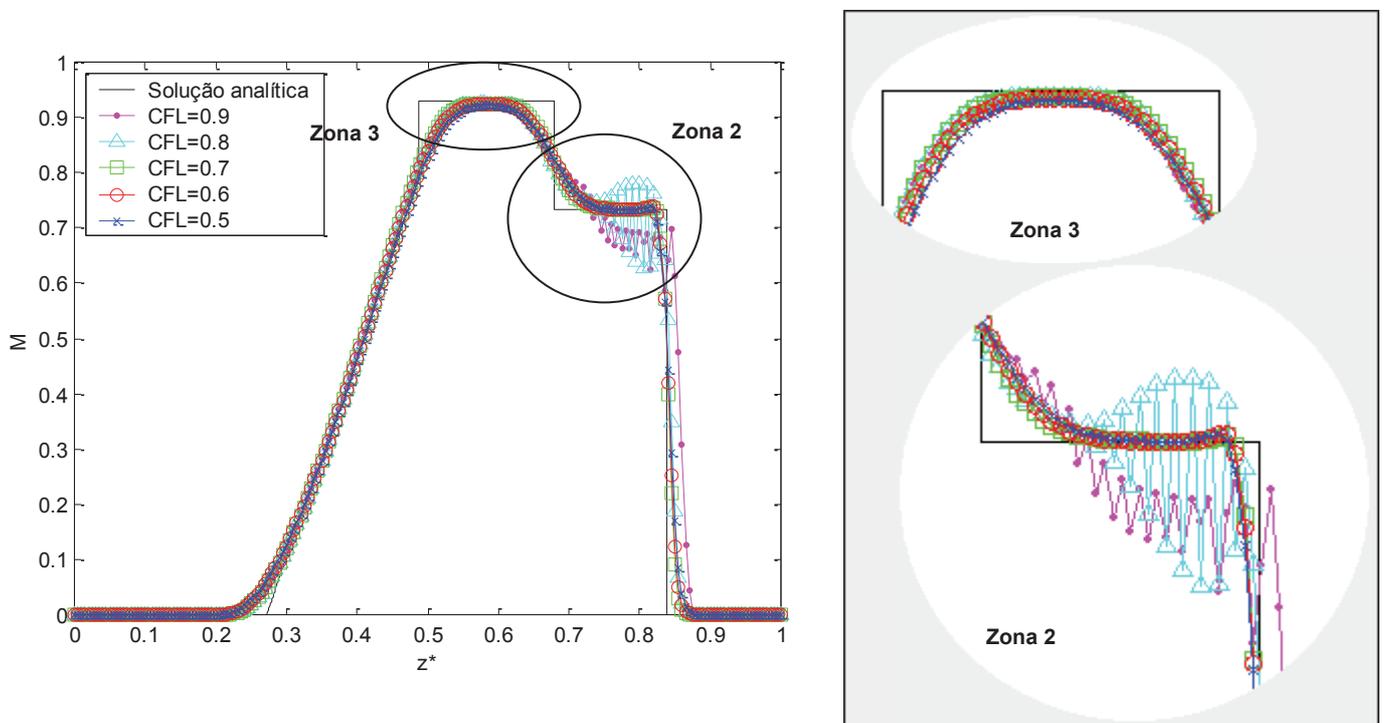


Figura 5.40 – Temperatura do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.

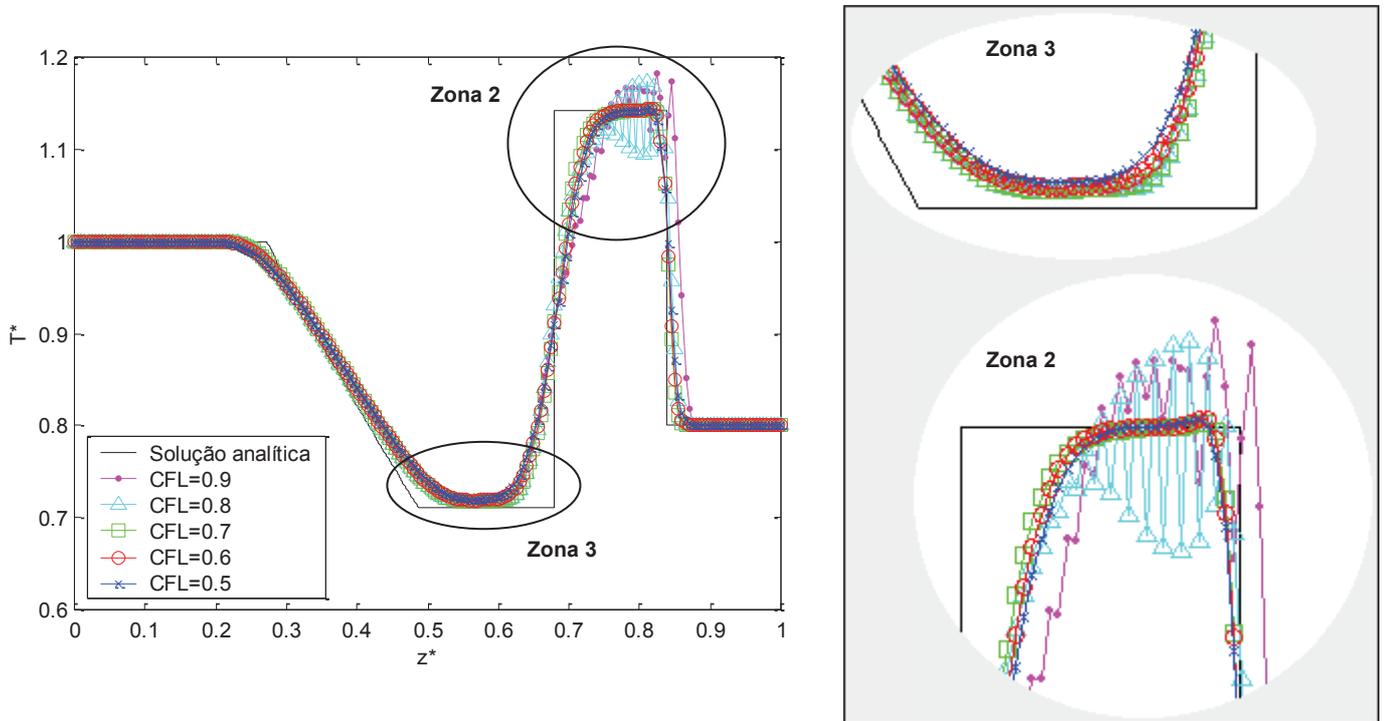


Figura 5.41 – Entropia do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.

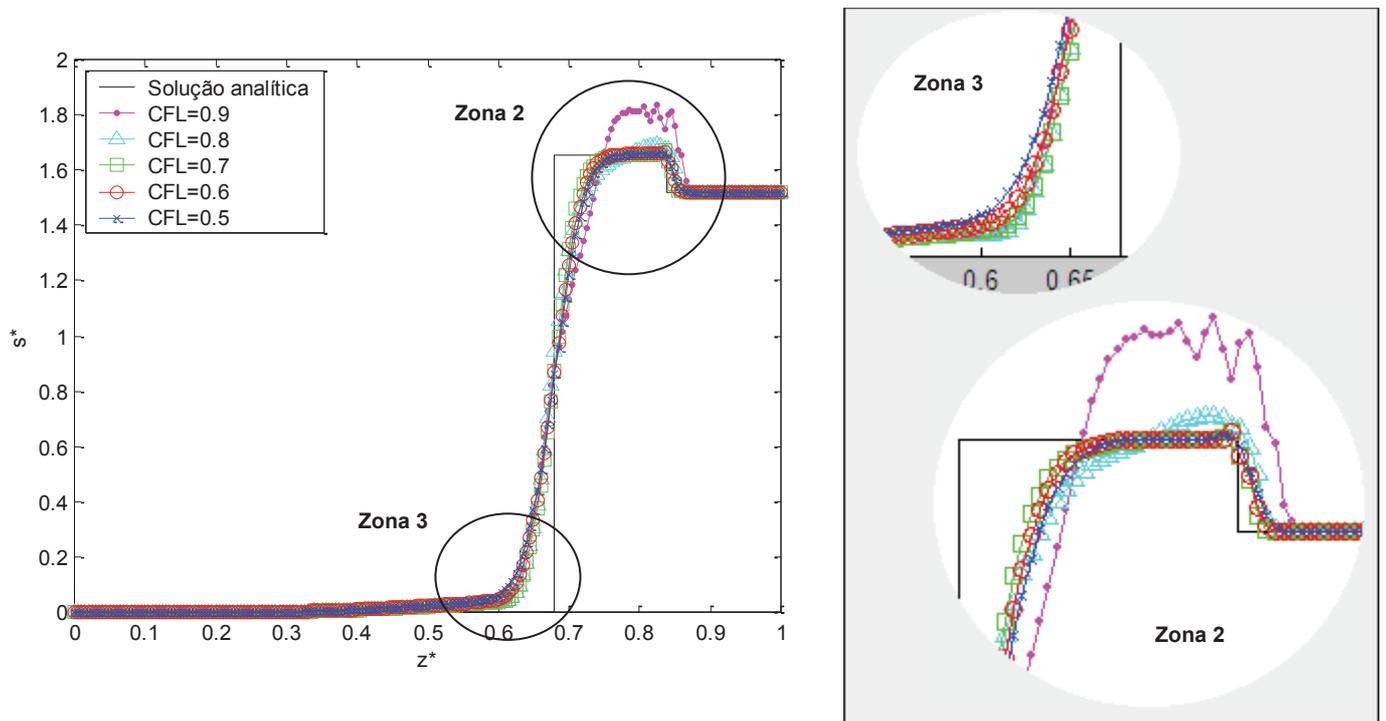


Figura 5.42 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.

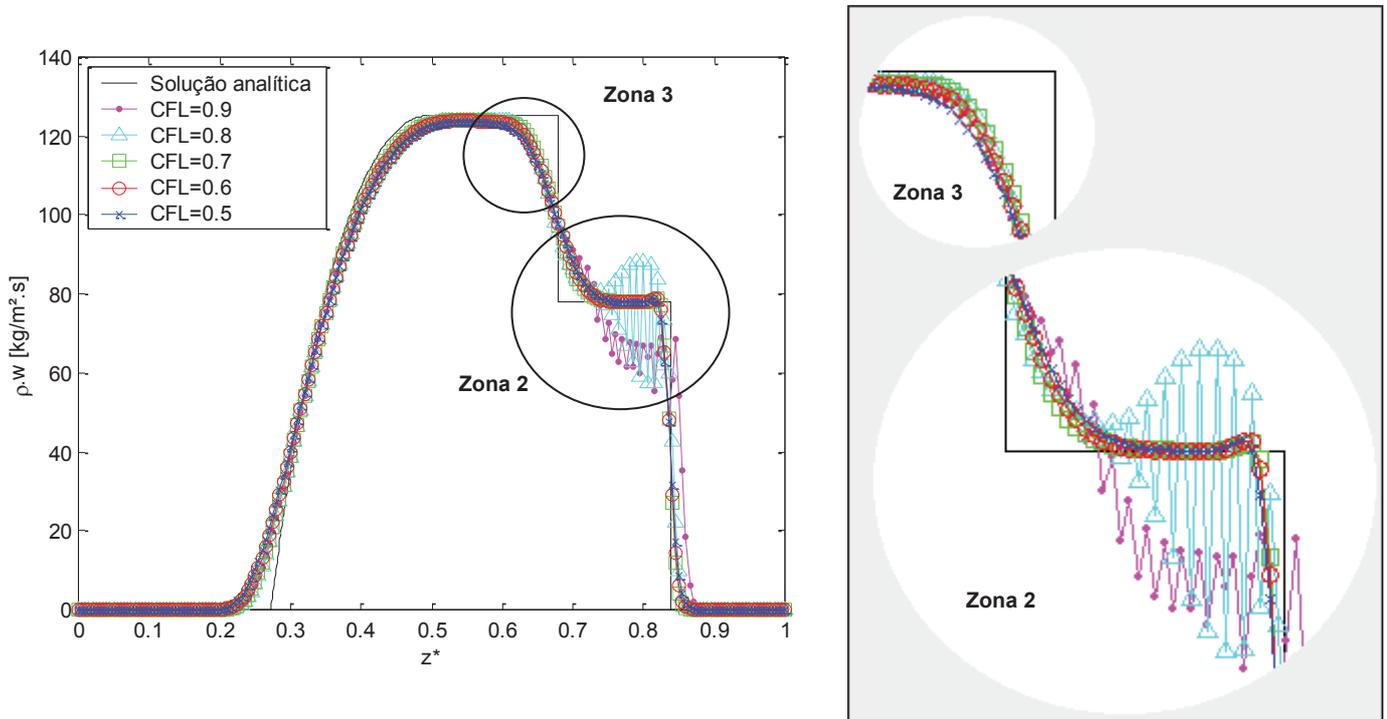


Tabela 5.9 – Valor de RMSE para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Sweby

	<i>CFL = 0,5</i>	<i>CFL = 0,6</i>	<i>CFL = 0,7</i>	<i>CFL = 0,8</i>	<i>CFL = 0,9</i>
RMSE médio de todas as propriedades	3,74	3,40	3,15	4,12	6,89

Os valores do tempo computacional estão apresentados na Tabela 5.10, e é possível notar que a função limitadora de Sweby aumenta muito os seus valores de, sendo ligeiramente maiores do que os valores obtidos pela função de Davis 1.

Tabela 5.10 – Valor de tempo computacional para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Sweby

	<i>CFL = 0,5</i>	<i>CFL = 0,6</i>	<i>CFL = 0,7</i>	<i>CFL = 0,8</i>	<i>CFL = 0,9</i>
% do tempo em relação ao tempo computacional de Lax-Wendroff de dois passos com malha de 200 volumes	1037,5%	862,80%	734,38%	687,18%	649,68%

Os resultados apresentados pelas curvas de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby, também para β igual a 1,5, estão exibidos nas Figuras 5.43 a 5.49. Os resultados apresentados mostram que o método de MacCormack também teve um comportamento similar ao Lax-Wendroff de dois passos para a função limitadora de Sweby.

As curvas suavizaram as discontinuidades desde o início da região de transição, zona 5, mas se mostraram mais próximas da discontinuidade que antecede a região de baixa pressão na zona 2, e o indício de uma pequena oscilação, no final da zona 2, também está presente no método de MacCormack.

Novamente as curvas para os CFL's iguais a 0,8 e 0,9 estão distorcidas na zona 2, que, com uma amplitude maior que a do método de Lax-Wendroff de dois passos, mostram a não validade do método para os CFL's maiores que 0,7. Os valores obtidos para o RMSE estão apresentados na tabela 5.11

Tabela 5.11 – Valor de RMSE para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Sweby

	<i>CFL = 0,5</i>	<i>CFL = 0,6</i>	<i>CFL = 0,7</i>	<i>CFL = 0,8</i>	<i>CFL = 0,9</i>
RMSE médio de todas as propriedades	3,76	3,51	3,28	6,47	7,46

Figura 5.43 – Pressão do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.

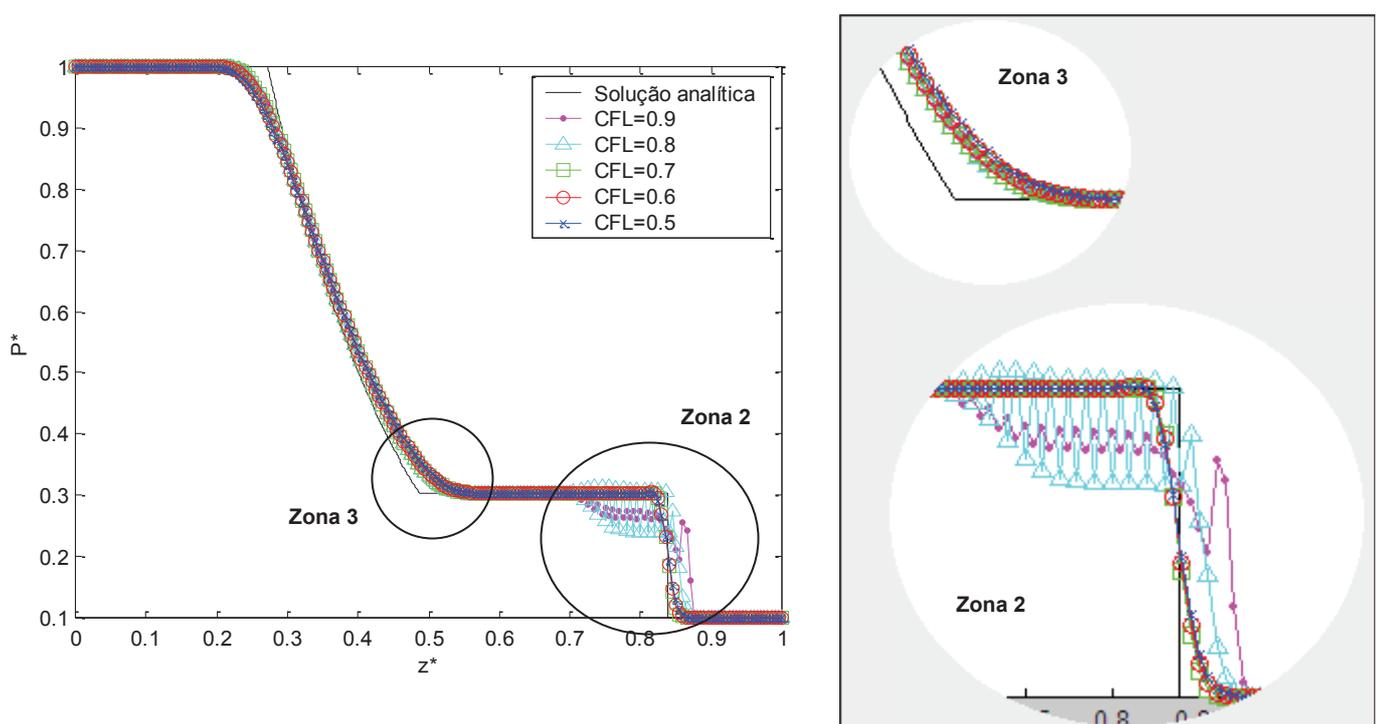


Figura 5.44 – Massa específica do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.

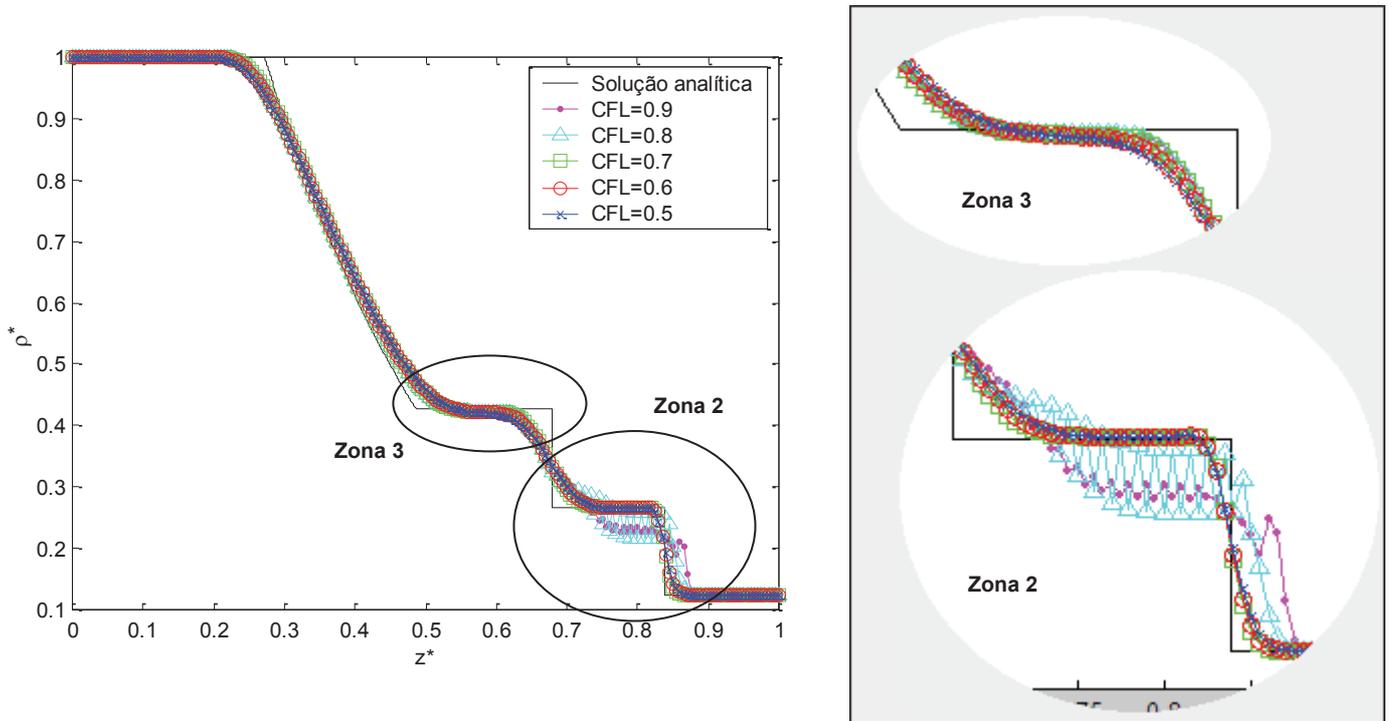


Figura 5.45 – Velocidade do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.

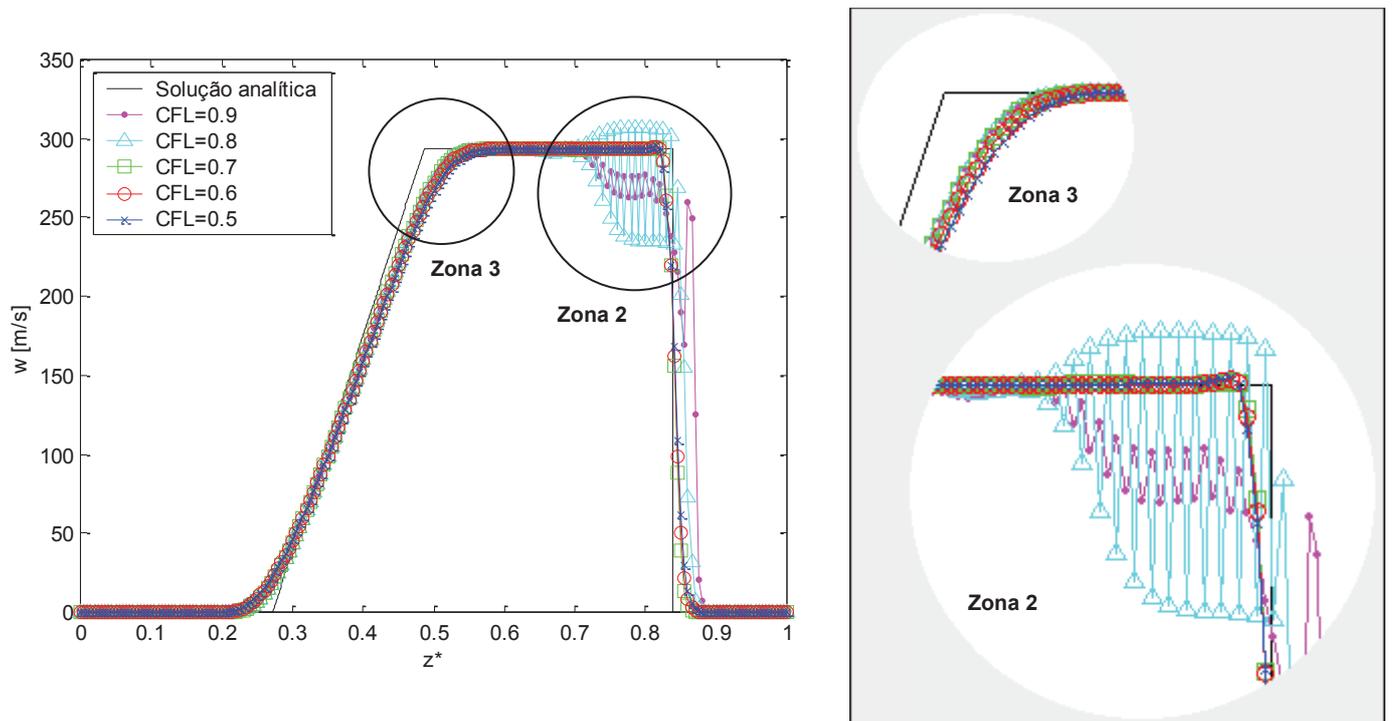


Figura 5.46 – Número de Mach em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.

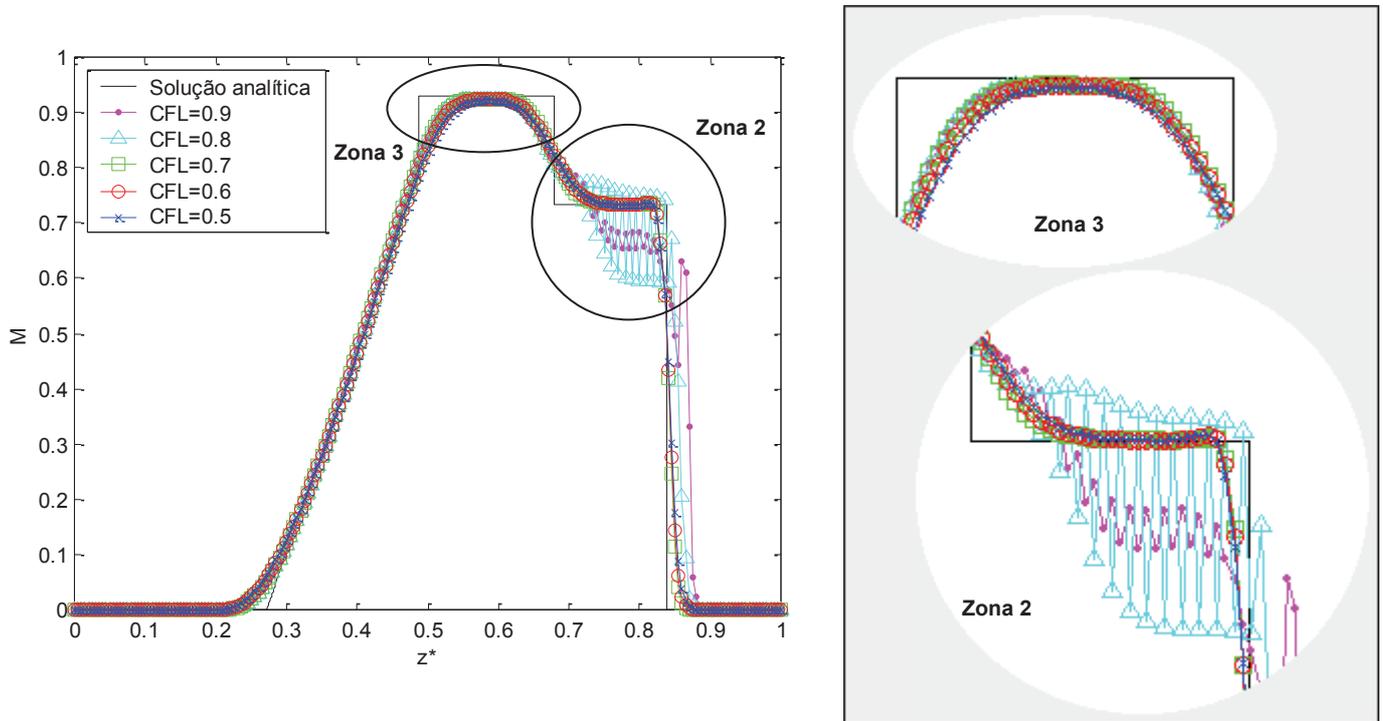


Figura 5.47 – Temperatura do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.

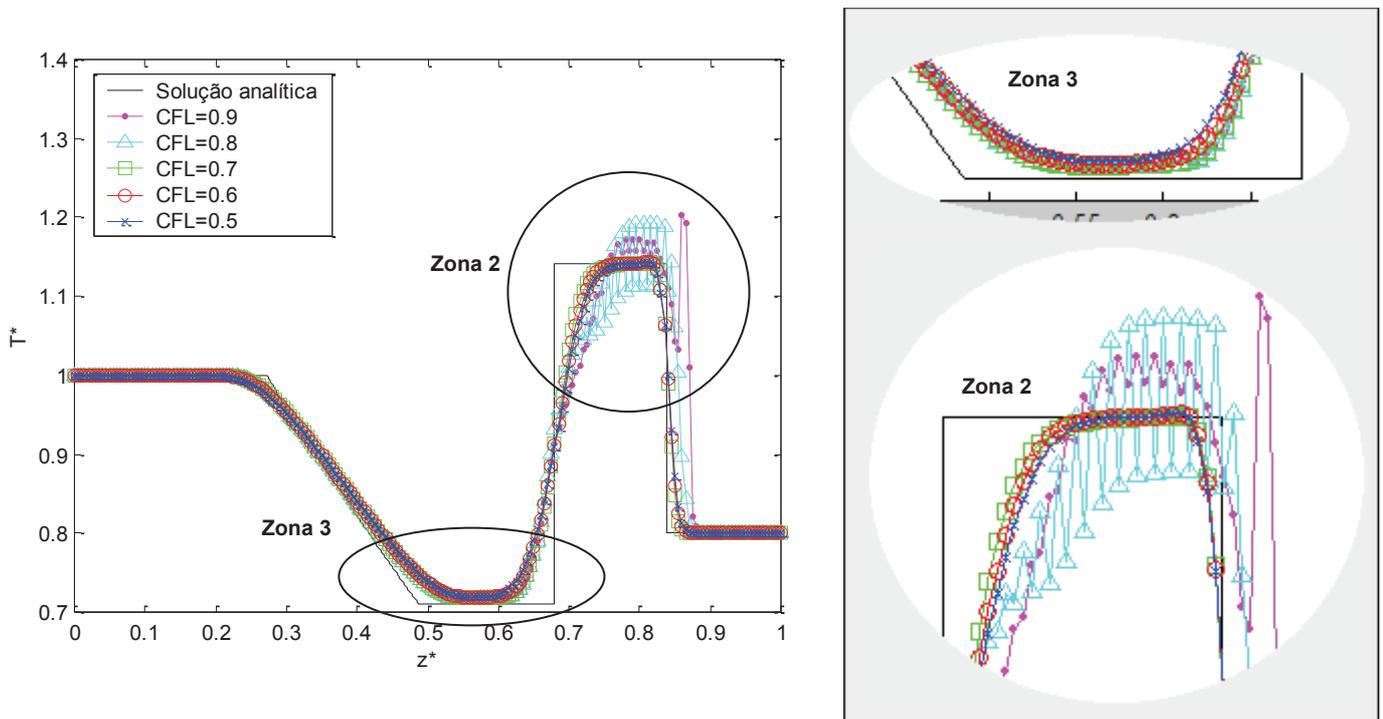


Figura 5.48 – Entropia do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.

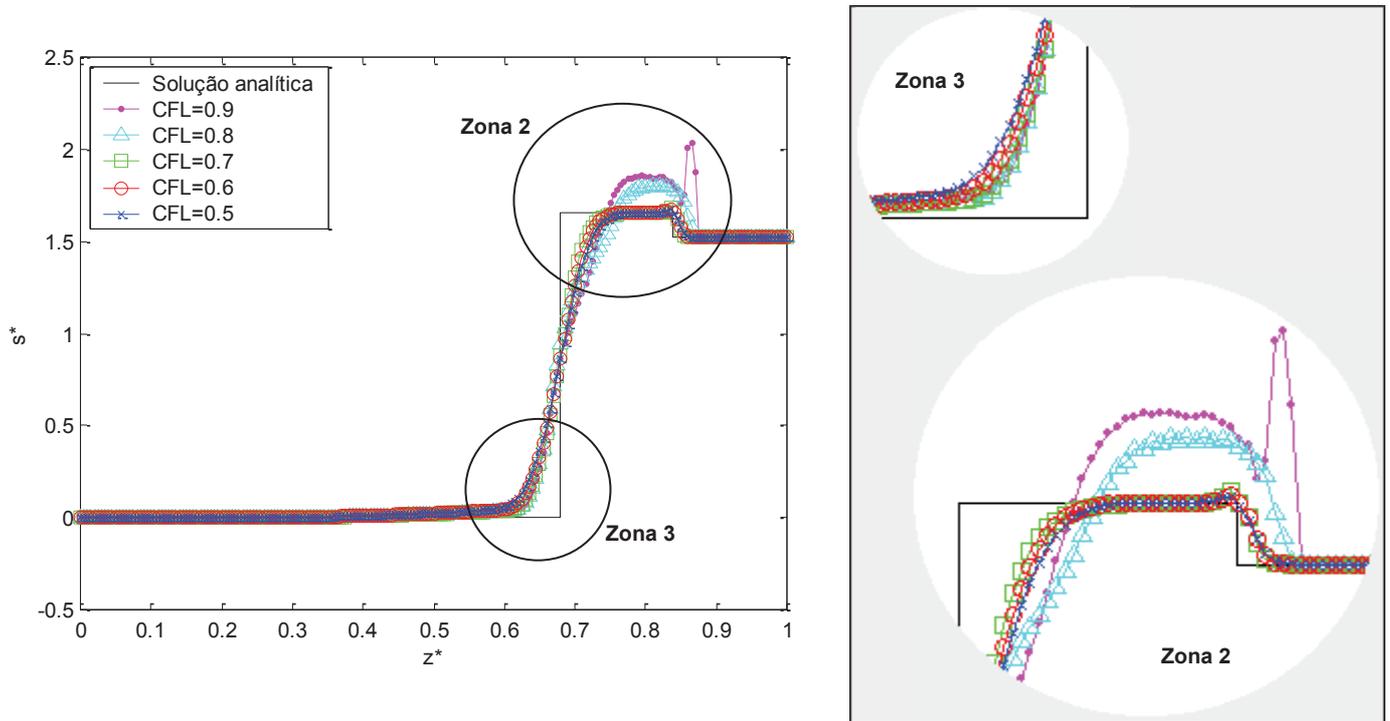
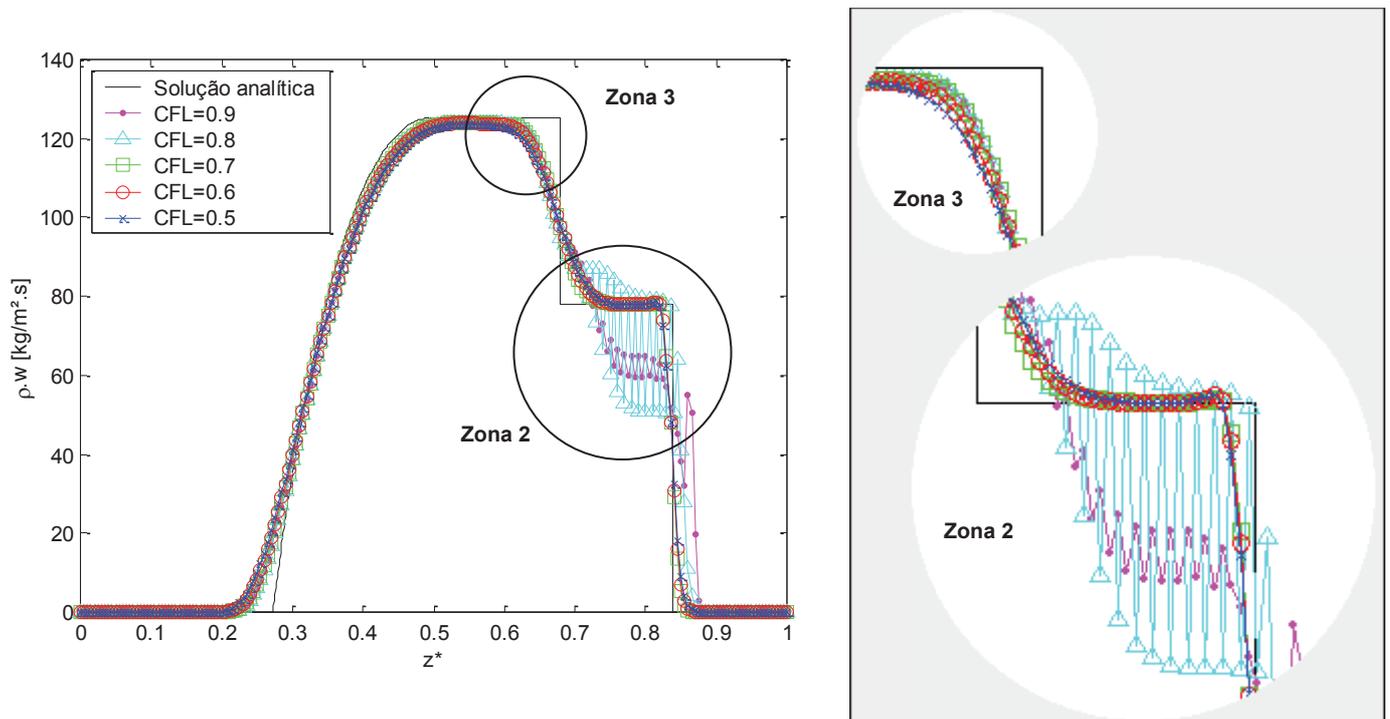


Figura 5.49 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Sweby em 0,0061 s.



Os valores dos tempos computacionais para a função limitadora de Sweby com o método de MacCormack se comportam da mesma maneira que o método de Lax-Wendroff de dois passos, como indica a Tabela 5.12.

Tabela 5.12 – Valor de tempo computacional para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Sweby

	<i>CFL = 0,5</i>	<i>CFL = 0,6</i>	<i>CFL = 0,7</i>	<i>CFL = 0,8</i>	<i>CFL = 0,9</i>
% do tempo em relação ao tempo computacional de Lax-Wendroff de dois passos com malha de 200 volumes	1028,76%	857,20%	727,18%	665,32%	637,18%

5.2.3 TVD de Davis e função limitadora de Van Albada

Os resultados obtidos para a função limitadora de Van Albada, aplicada ao método de Lax-Wendroff de dois passos, podem ser analisados através das Figuras 5.50 a 5.56.

Observando as curvas obtidas com função limitadora de Van Albada, é possível observar a sua similaridade com os resultados encontrados com a função limitadora de Sweby. As discontinuidades foram mais suavizadas desde o início da região de transição, zona 5, e principalmente na região da discontinuidade de contato entre as zonas 2 e 3. Além disso, a solução por Van Albada também se aproximou da solução analítica na discontinuidade que antecede a região de baixa pressão na zona 2.

Os resultados apresentados com Van Albada eliminaram, no entanto, todas as oscilações apresentadas pelo método original de Lax-Wendroff de dois passos, até mesmo na zona 2, onde Sweby apresentou uma pequena oscilação.

Nas zonas 2 e 3, novamente se torna claro que os resultados calculados com CFL igual a 0,7 geram uma curva mais próxima da solução analítica dos que os demais valores utilizados, como indicam os valores de RMSE apresentados na tabela 5.13. As curvas para os CFL's iguais a 0,8 e 0,9 continuam distorcendo a solução, porém muito menos do que para as demais funções limitadoras.

Figura 5.50 – Pressão do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.

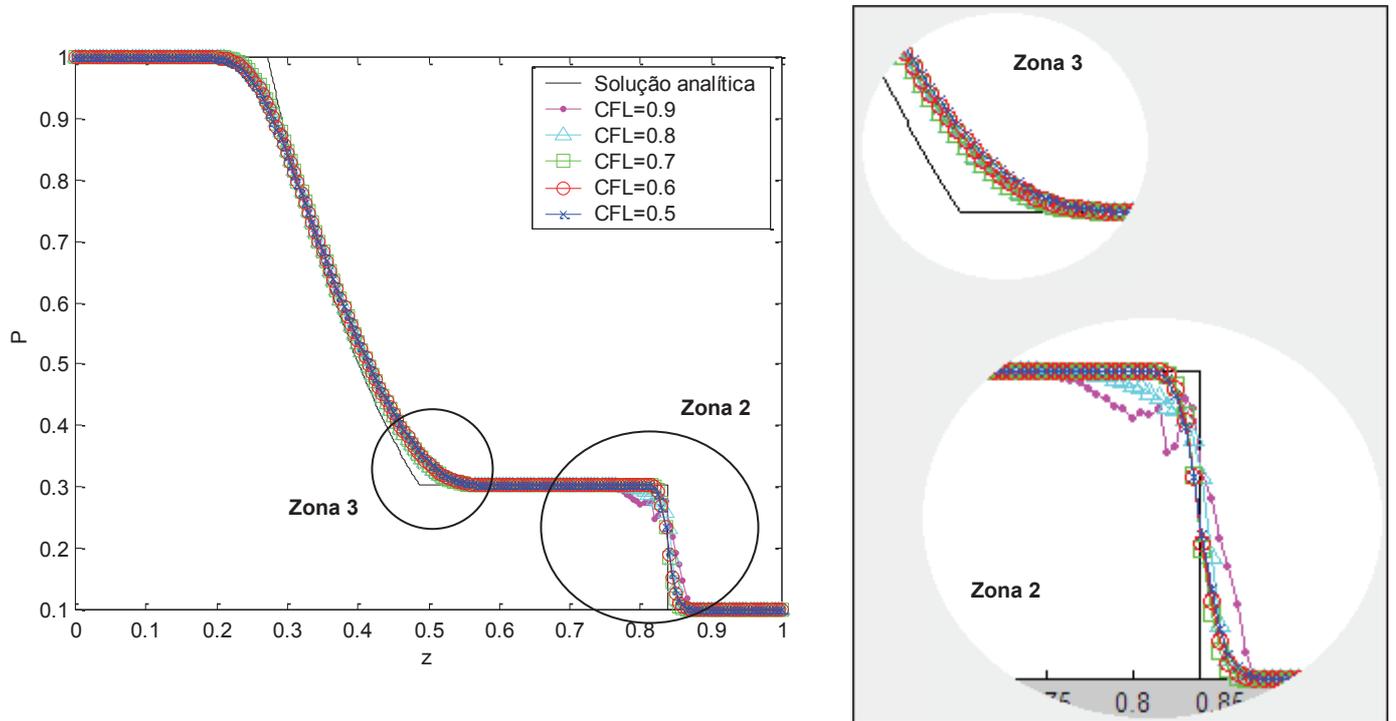


Figura 5.51 – Massa específica do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.

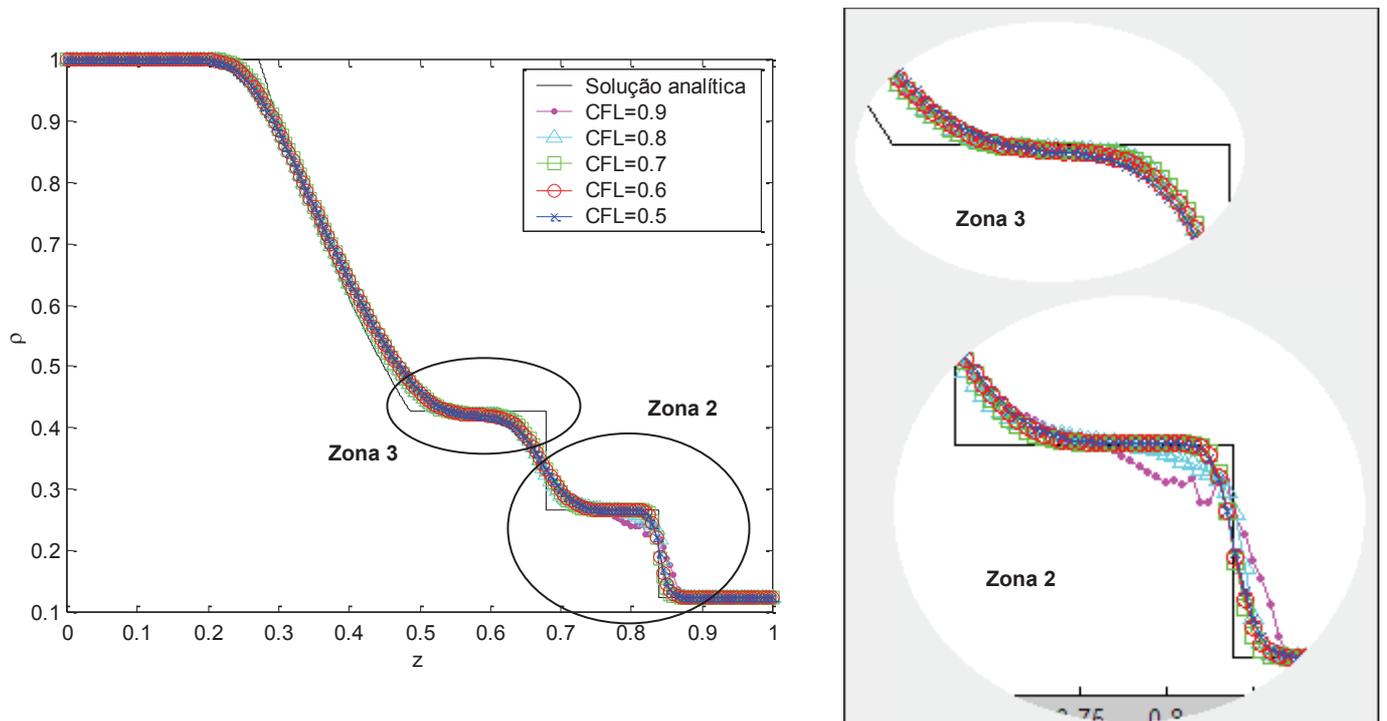


Figura 5.52 – Velocidade do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.

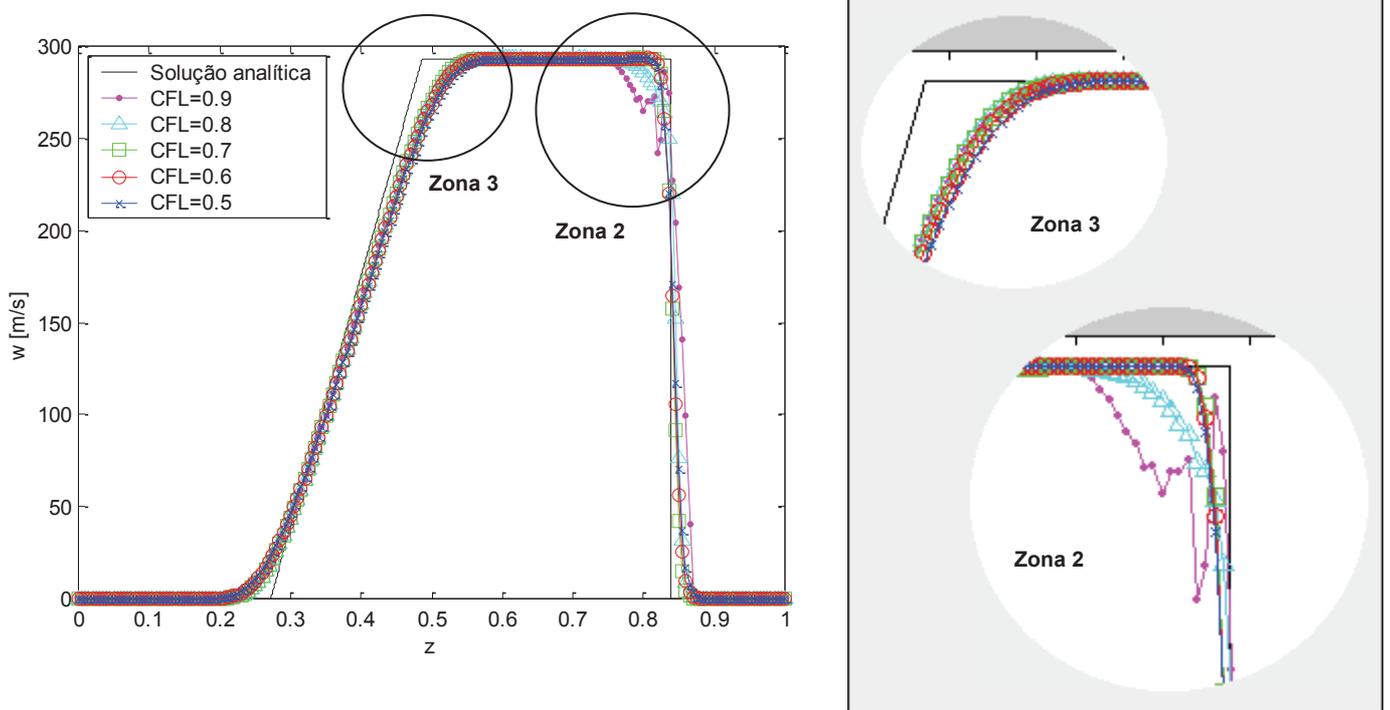


Figura 5.53 – Número de Mach em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.

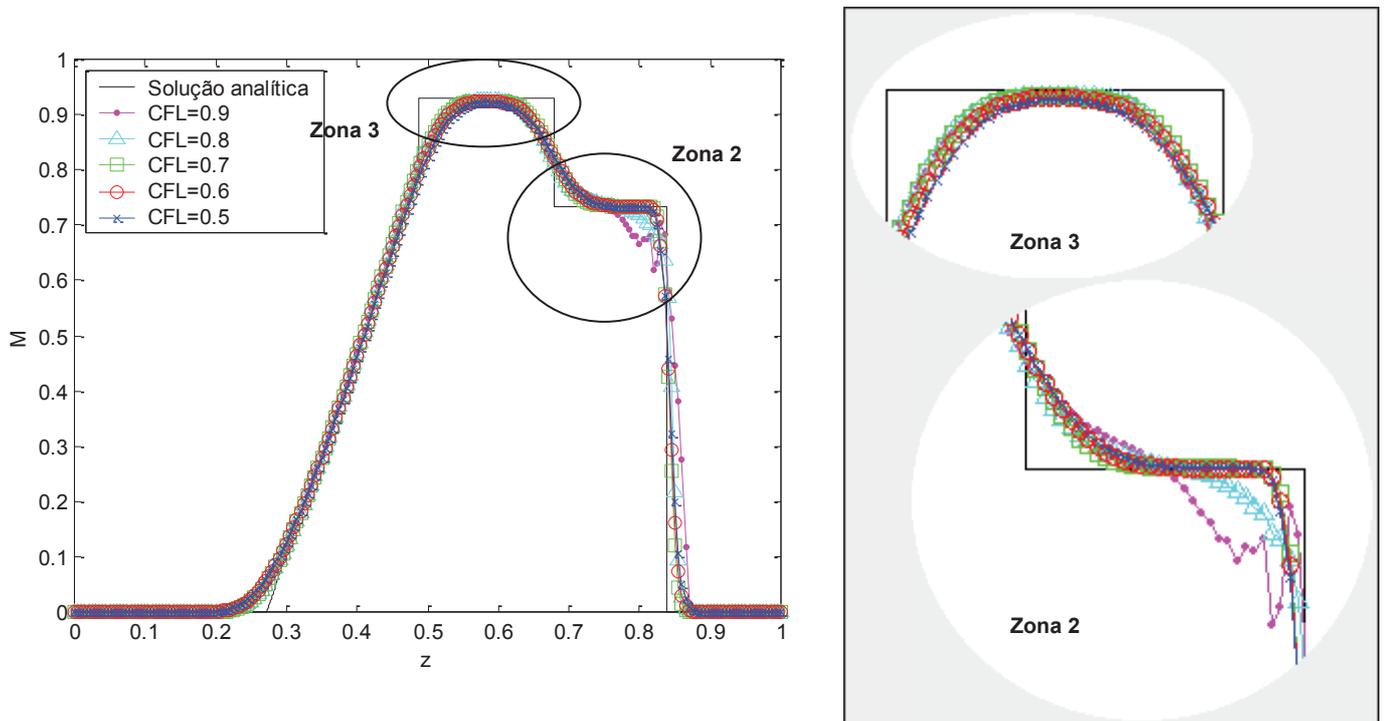


Figura 5.54 – Temperatura do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.

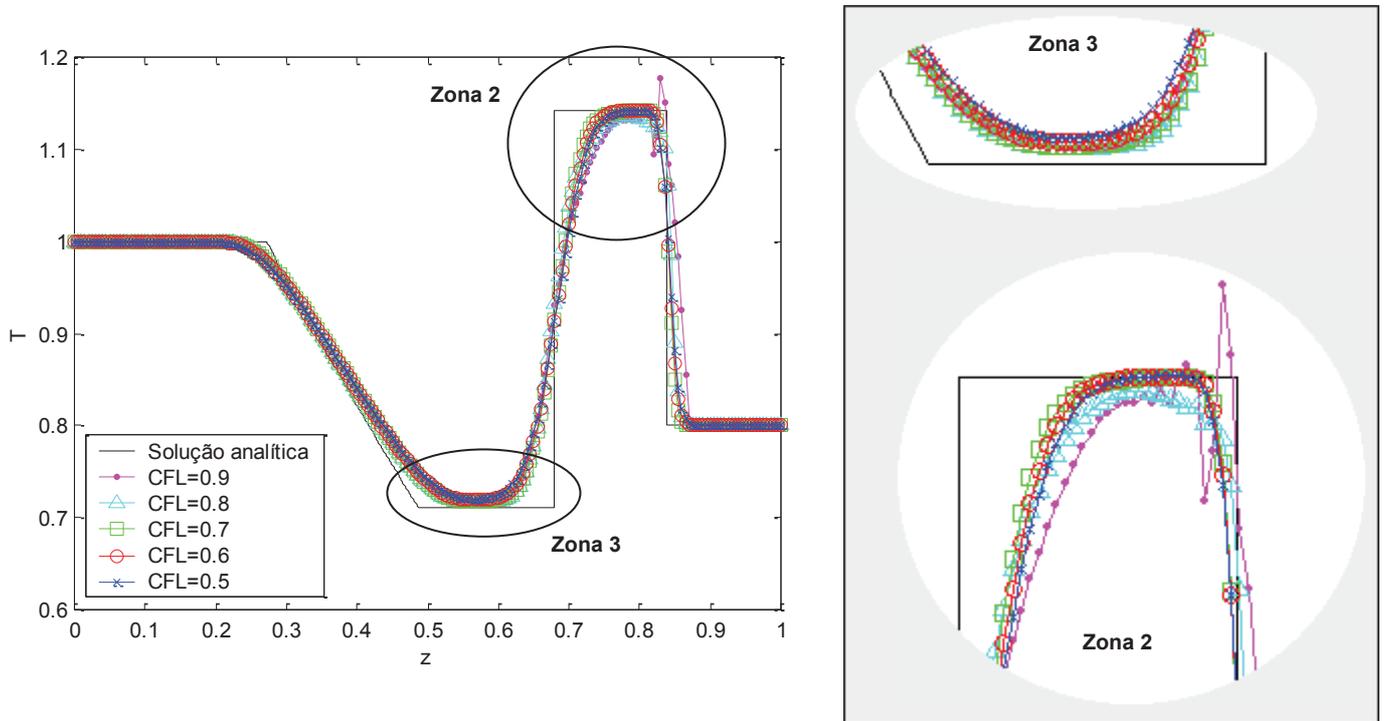


Figura 5.55 – Entropia do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.

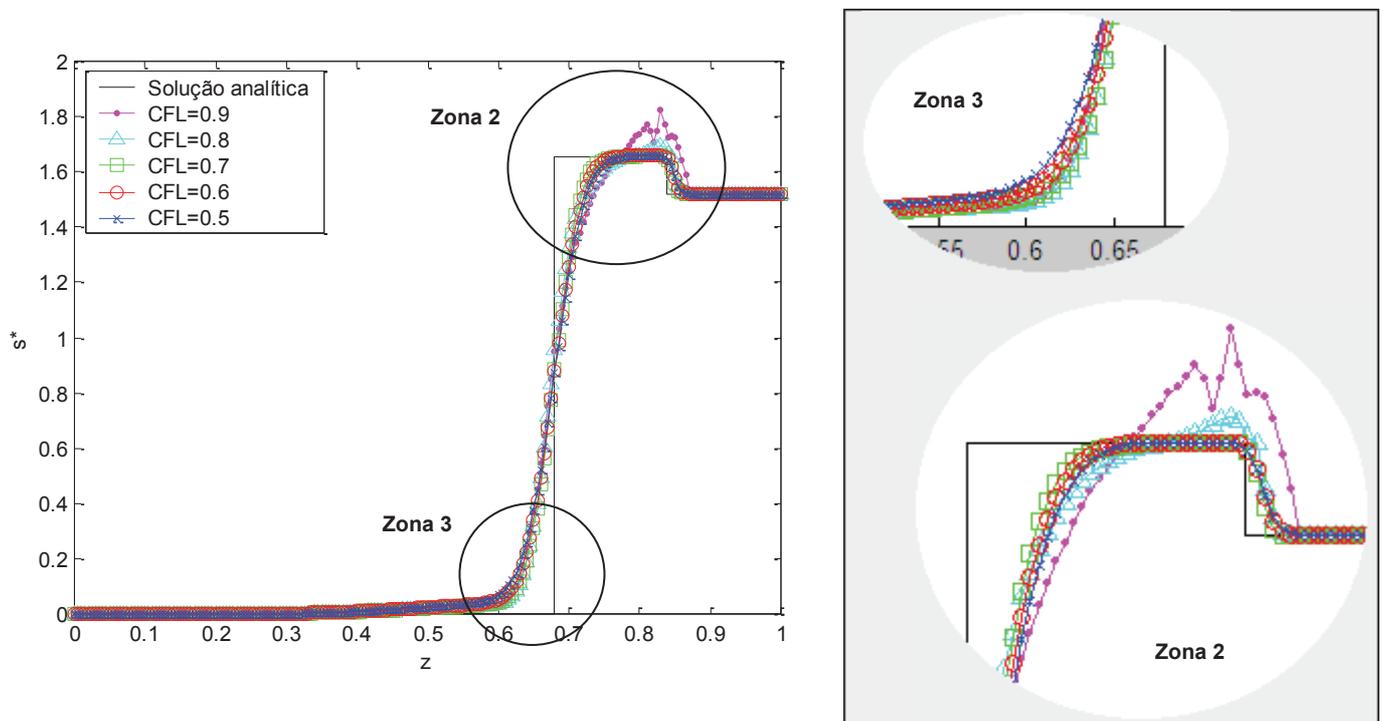


Figura 5.56 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.

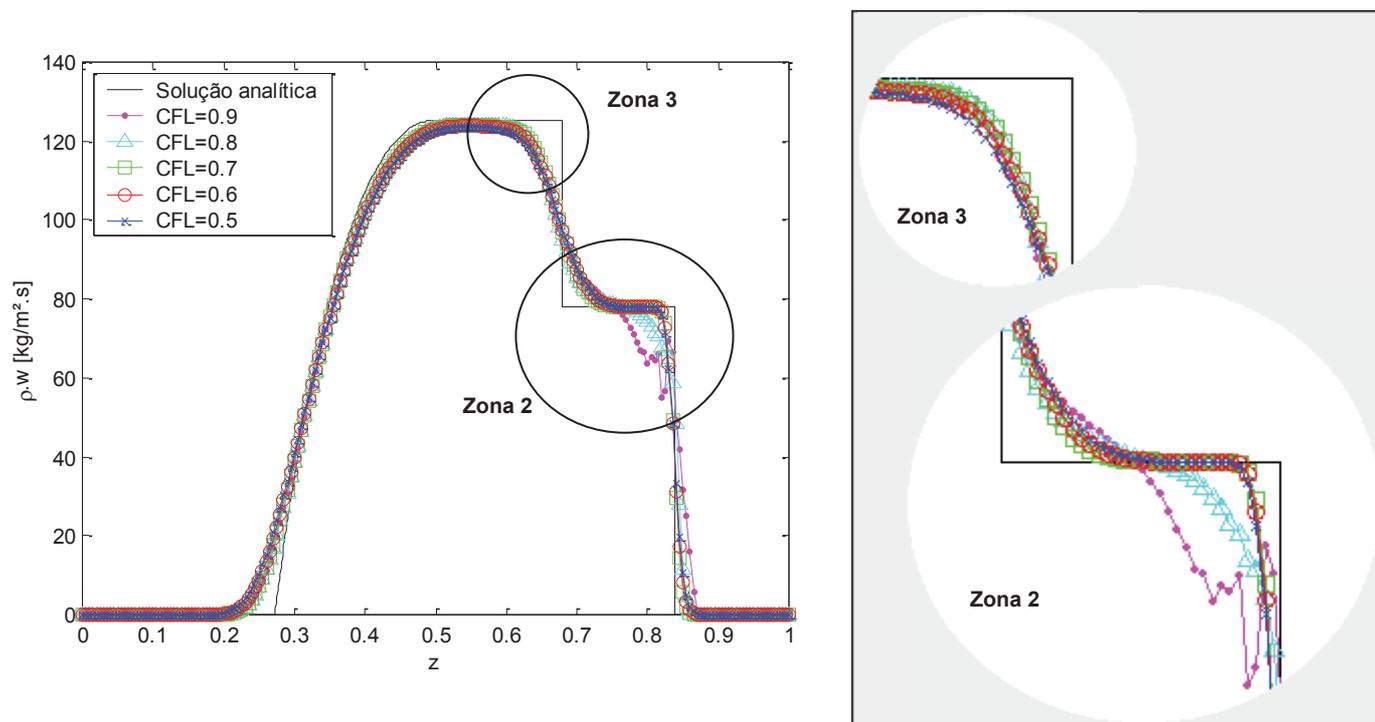


Tabela 5.13 – Valor de RMSE para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Van Albada

	<i>CFL = 0,5</i>	<i>CFL = 0,6</i>	<i>CFL = 0,7</i>	<i>CFL = 0,8</i>	<i>CFL = 0,9</i>
RMSE médio de todas as propriedades	3,88	3,60	3,34	4,18	5,49

Os valores do tempo computacional para cada um dos CFL's utilizados pode ser verificado na Tabela 5.14. Aqui o tempo computacional também é maior em relação aos resultados obtidos pela função limitadora de Davis 1, mas menores em relação a Sweby.

Tabela 5.14 – Valor de tempo computacional para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Van Albada

	<i>CFL = 0,5</i>	<i>CFL = 0,6</i>	<i>CFL = 0,7</i>	<i>CFL = 0,8</i>	<i>CFL = 0,9</i>
% do tempo em relação ao tempo computacional de Lax-Wendroff de dois passos com malha de 200 volumes	987,50%	825,32%	708,14%	645,64%	626,88%

As curvas obtidas para o método de MacCormack com função limitadora de Van Albada estão apresentadas nas Figuras 5.57 a 5.63. O comportamento observado foi muito similar ao do Lax-Wendroff de dois passos. Ocorreu uma suavização da curva perto de todas as descontinuidades, exceto a que antecede a região de baixa pressão, onde a curva numérica ficou mais próxima da solução analítica e todas as oscilações do método original foram eliminadas.

A utilização de CFL's iguais a 0,8 e 0,9 distorceu muito mais as curvas para o método de MacCormack do que para Lax-Wendroff de dois passos, para o CFL de 0,9 é possível observar a presença de um pico muito grande na descontinuidade existente no final da zona 2

Mais uma vez a curva que representou com mais precisão as descontinuidades presentes em cada uma das curvas geradas foi a calculada com CFL igual a 0,7. A tabela 5.15 apresenta os valores de RMSE para cada CFL.

Tabela 5.15 – Valor de RMSE para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Van Albada

	<i>CFL = 0,5</i>	<i>CFL = 0,6</i>	<i>CFL = 0,7</i>	<i>CFL = 0,8</i>	<i>CFL = 0,9</i>
RMSE médio de todas as propriedades	3,95	3,62	3,44	6,12	5,95

Figura 5.57 – Pressão do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.

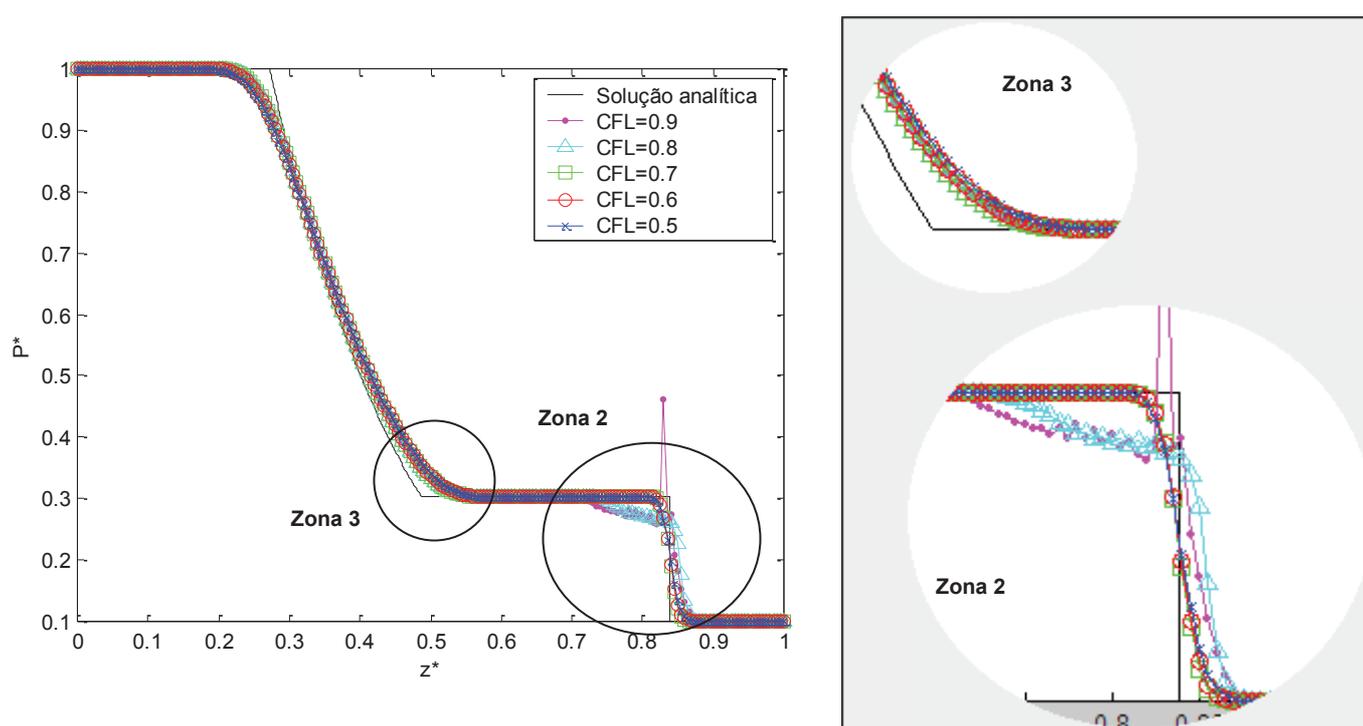


Figura 5.58 – Massa específica do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.

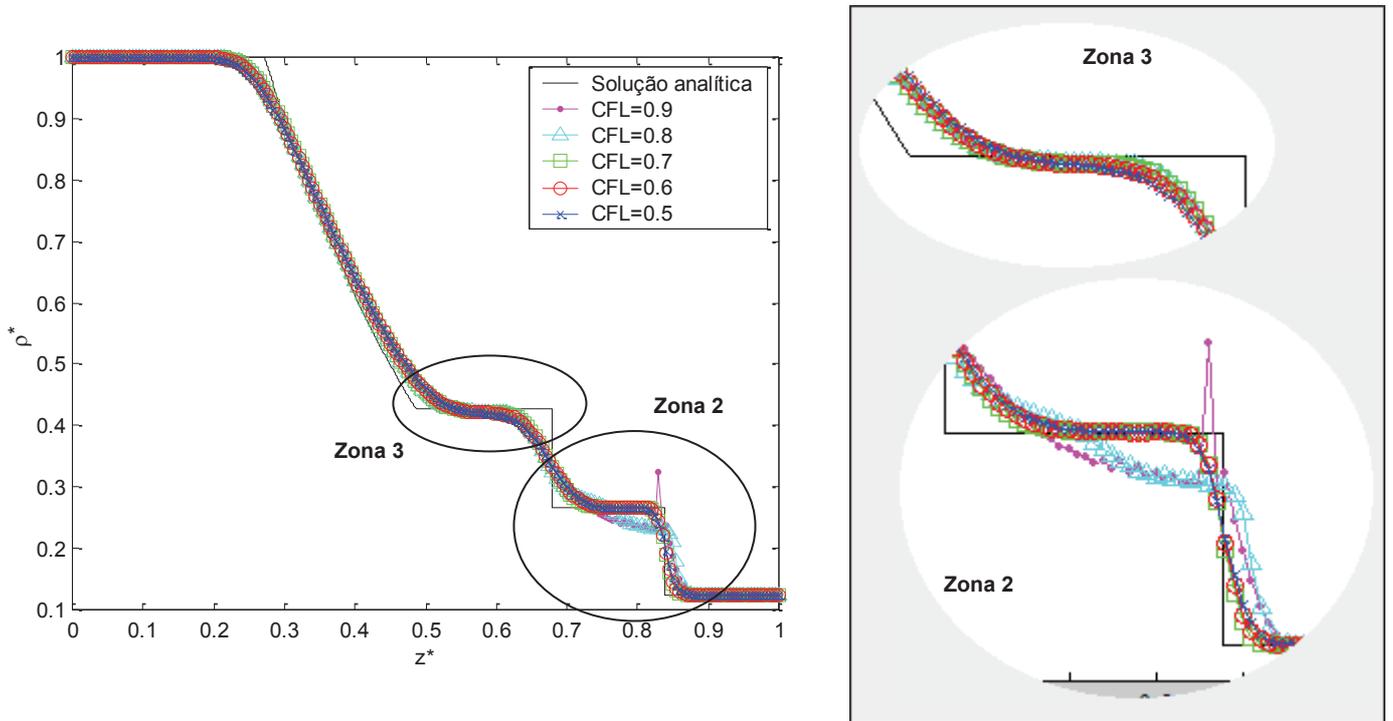


Figura 5.59 – Velocidade do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.

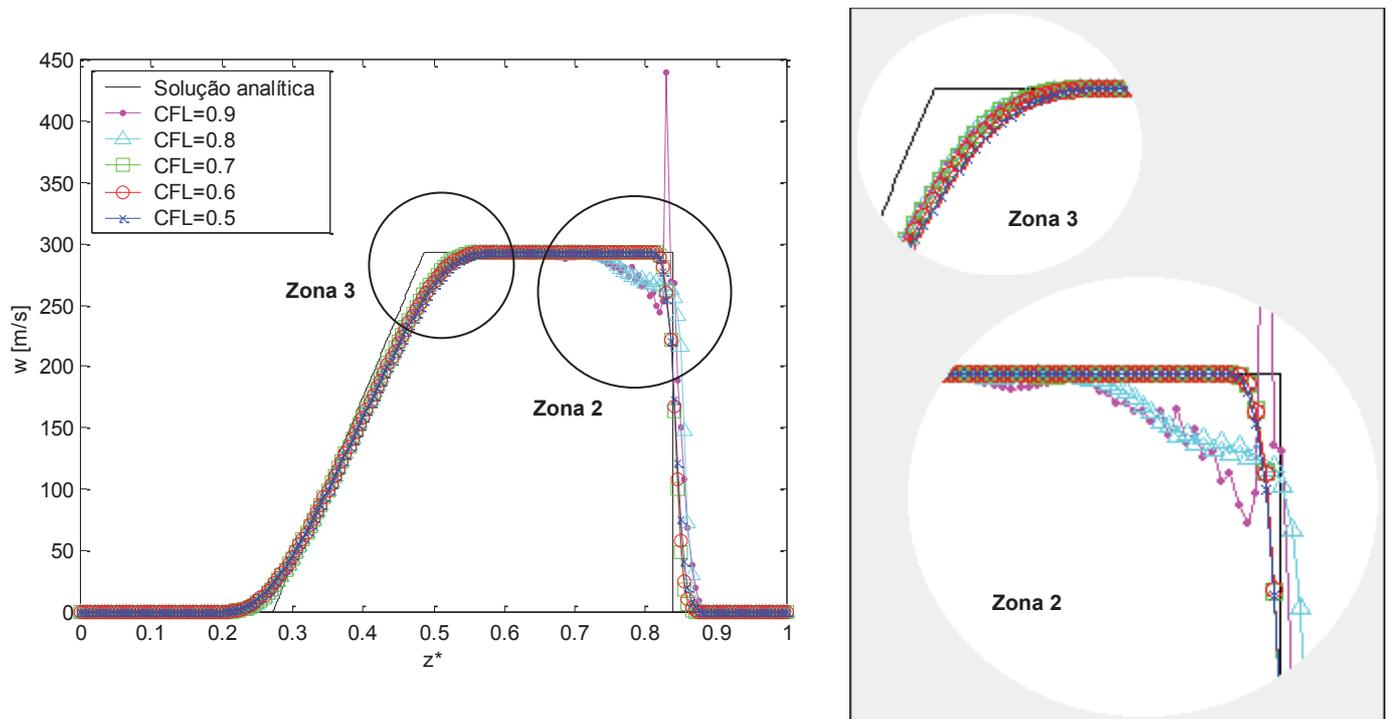


Figura 5.60 – Número de Mach em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.

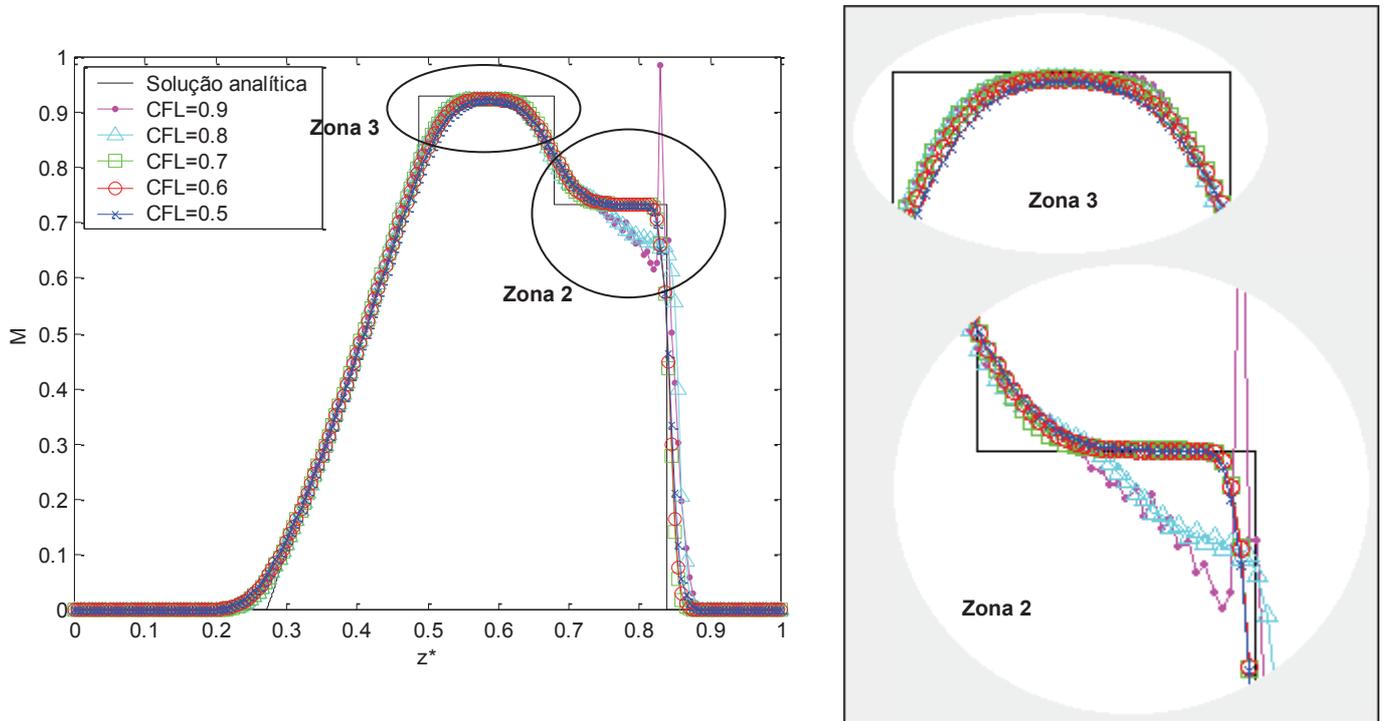


Figura 5.61 – Temperatura do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.

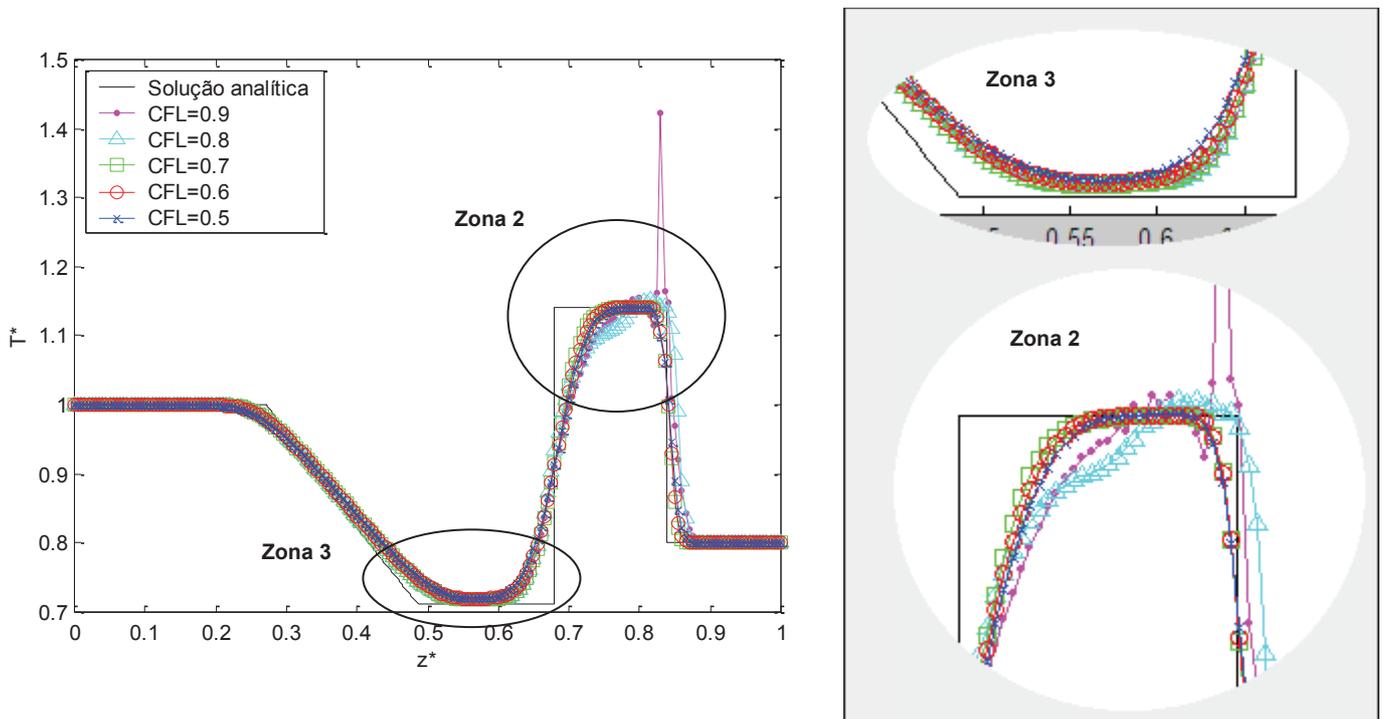


Figura 5.62 – Entropia do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.

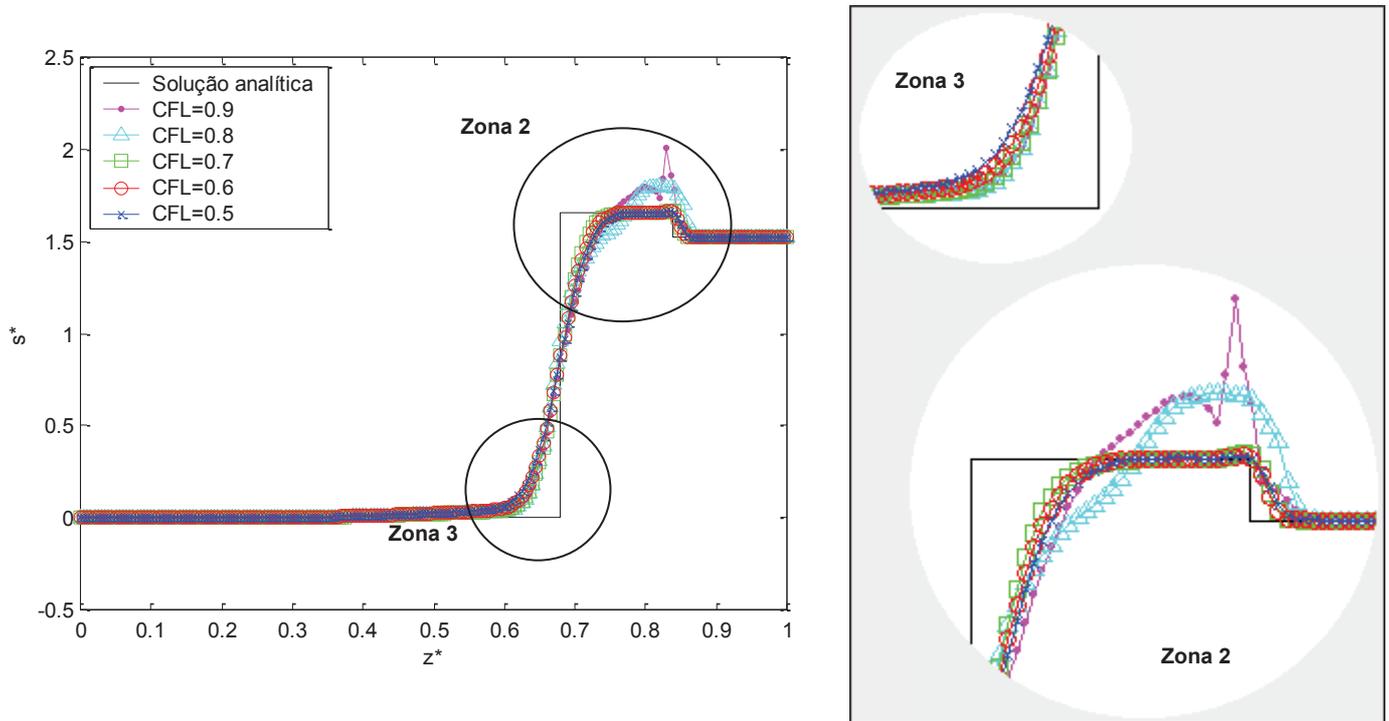
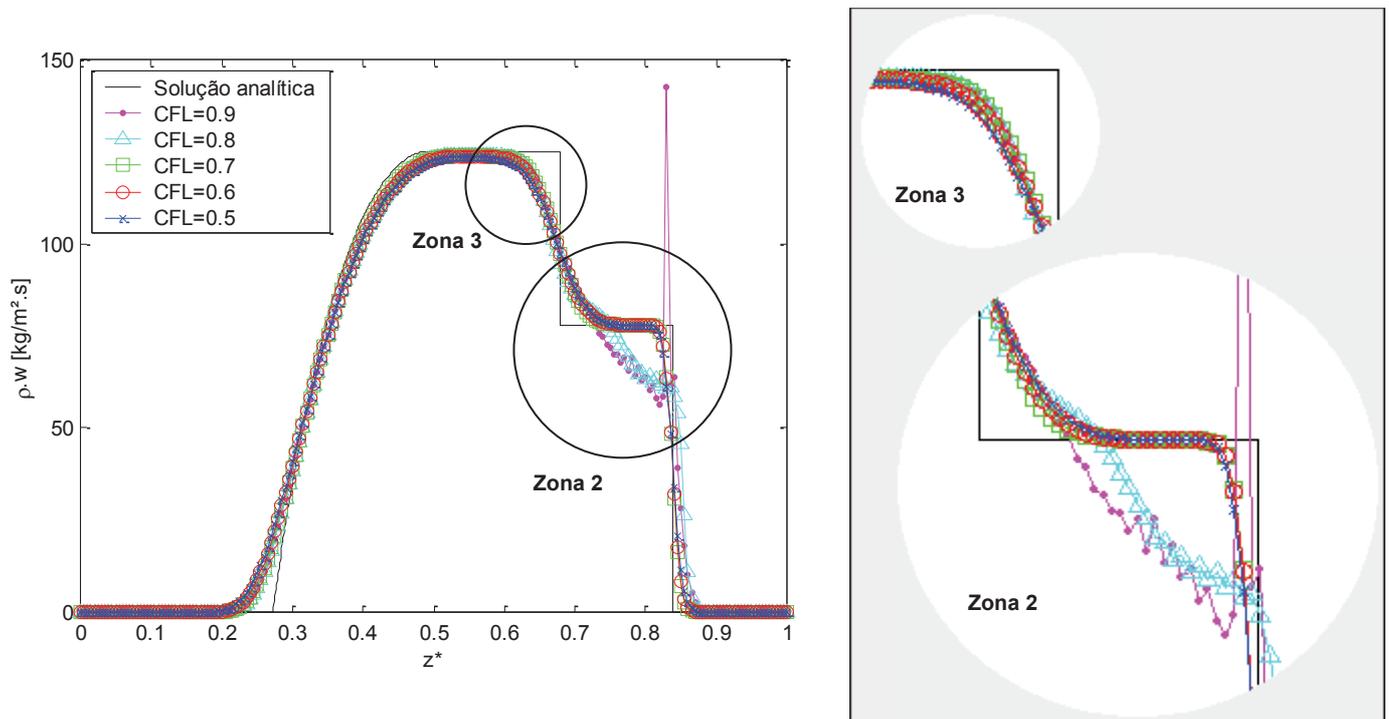


Figura 5.63 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Van Albada em 0,0061 s.



Na tabela 5.16 é possível verificar os valores de tempo computacional para os cinco valores de CFL, onde novamente seu aumento é maior do que o obtido com Davis 1, porém menor do que o obtido por Sweby.

Tabela 5.16 – Valor de tempo computacional para cada CFL utilizado no cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Van Albada

	<i>CFL = 0,5</i>	<i>CFL = 0,6</i>	<i>CFL = 0,7</i>	<i>CFL = 0,8</i>	<i>CFL = 0,9</i>
% do tempo em relação ao tempo computacional de Lax-Wendroff de dois passos com malha de 200 volumes	984,38%	812,50%	703,44%	635,62%	628,42%

5.2.4 Comparação entre funções limitadoras

Após comparar cinco valores distintos de CFL para a solução do problema teste do tubo de choque, utilizando os métodos numéricos de Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack, ambos com TVD de Davis e três diferentes funções limitadoras, ficou evidente que os resultados obtidos com CFL igual a 0,7 têm a melhor precisão por se aproximarem mais da solução analítica.

Sendo assim, decidiu-se comparar, para cada um dos métodos numéricos, os resultados obtidos pelas funções limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com o CFL igual a 0,7.

As comparações realizadas para o método de Lax-Wendroff de dois passos podem ser observadas nas Figuras 6.64 a 6.70.

Analisando as curvas geradas pelo método de Lax-Wendroff de dois passos, fica evidente, que a solução com a função limitadora de Davis 1, é a que melhor representa os fenômenos físicos que estão ocorrendo no problema teste do tubo de choque, ao longo de todo o comprimento do duto. Ela é a que menos suaviza a solução e elimina todas as oscilações geradas pelo método original.

Com a função limitadora de Davis 1, a região de transição, zona 5, é representada com bastante precisão. Já a descontinuidade de contato, entre as zonas 2 e 3, fica um pouco mais suavizada e essa suavização se mantém até a descontinuidade que antecede a região de baixa pressão, no final da zona 2. Nessa região, as curvas obtidas com as funções limitadoras de Sweby e Van Albada se aproximam mais da solução analítica.

Figura 5.64 – Pressão do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.

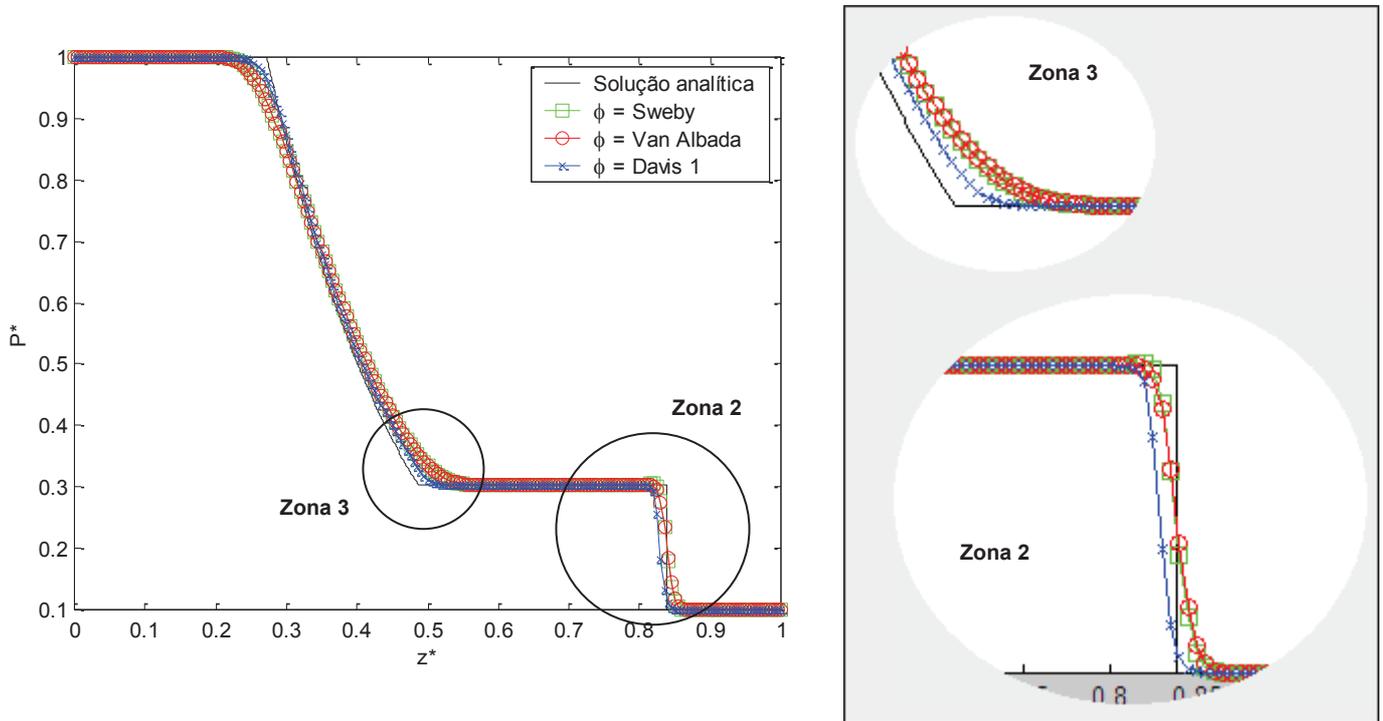


Figura 5.65 – Massa específica do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.

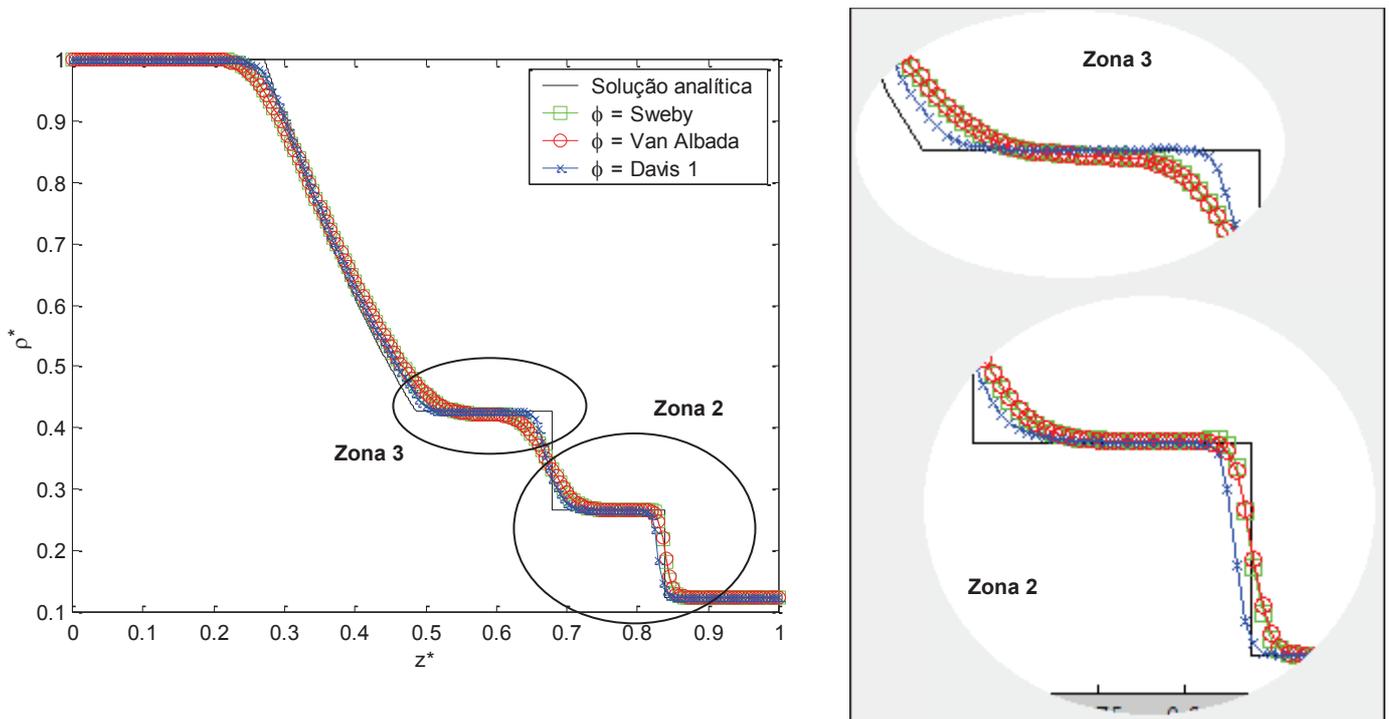


Figura 5.66 – Velocidade do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.

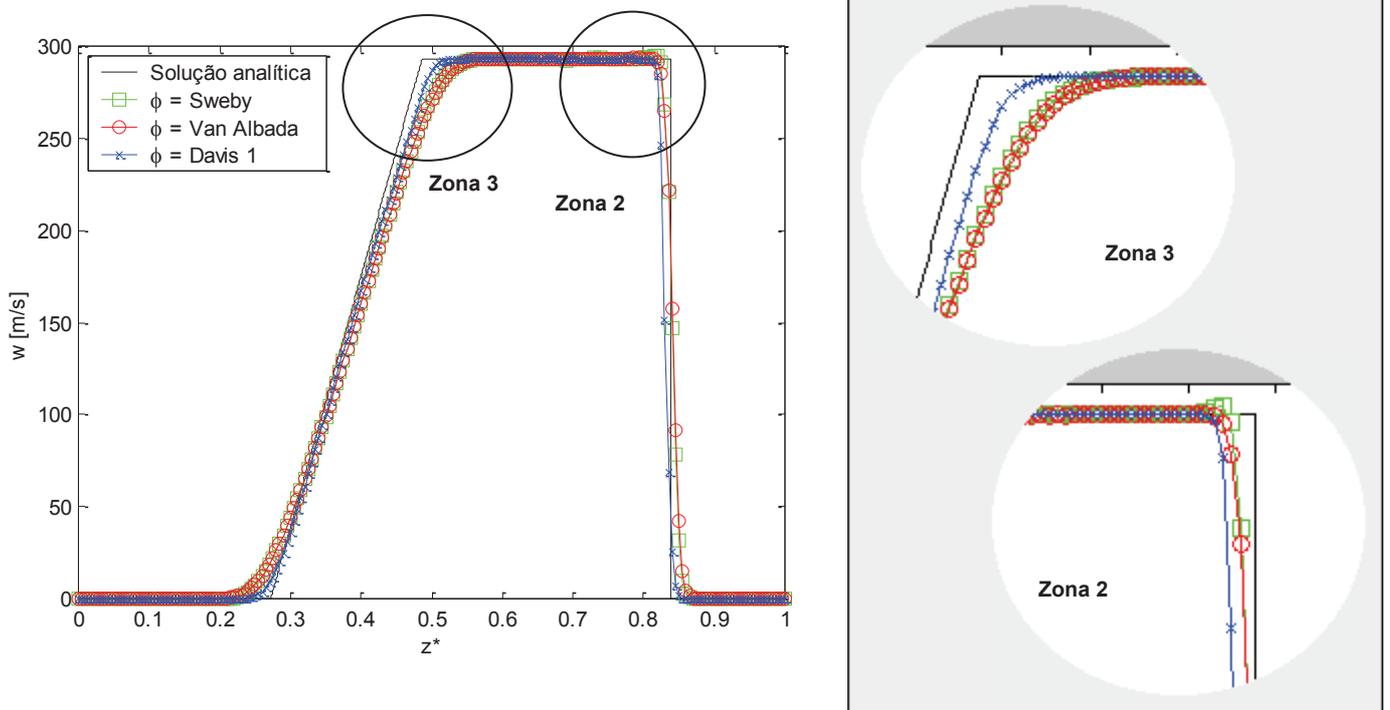


Figura 5.67 – Número de Mach em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.

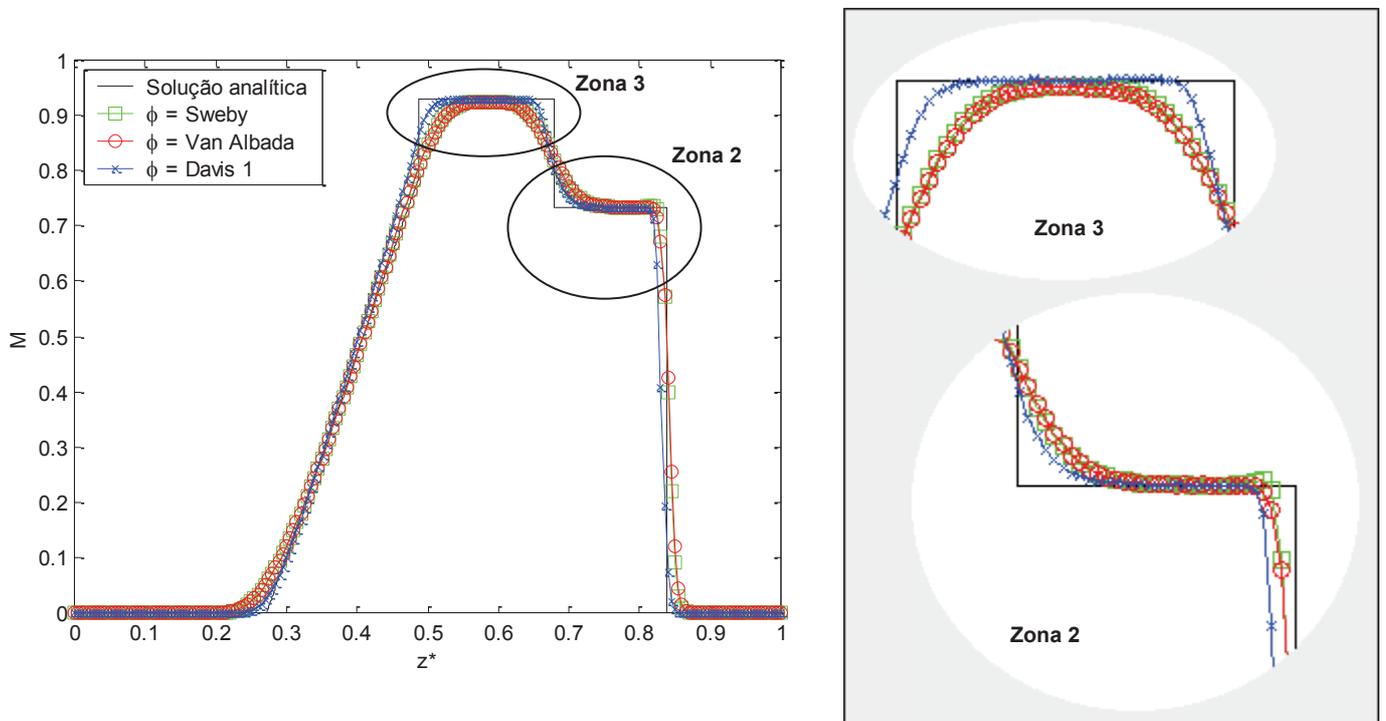


Figura 5.68 – Temperatura do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.

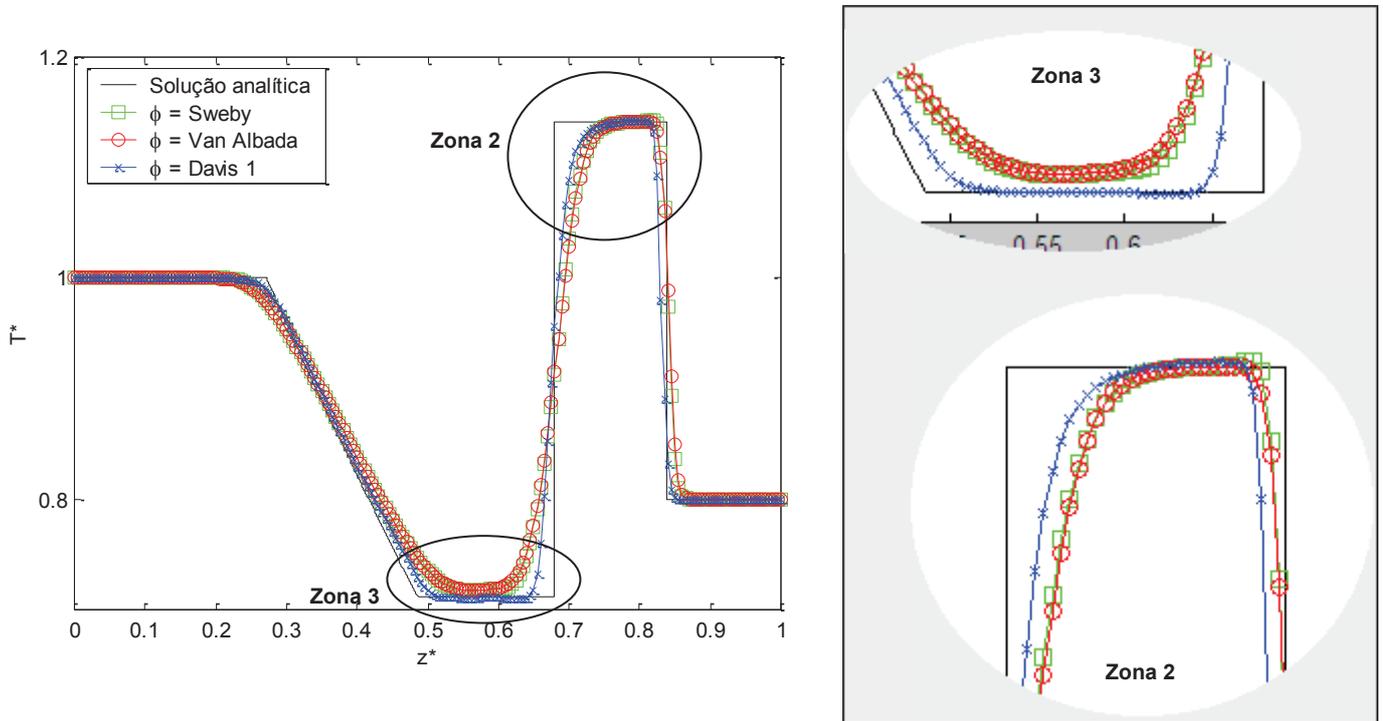


Figura 5.69 – Entropia do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.

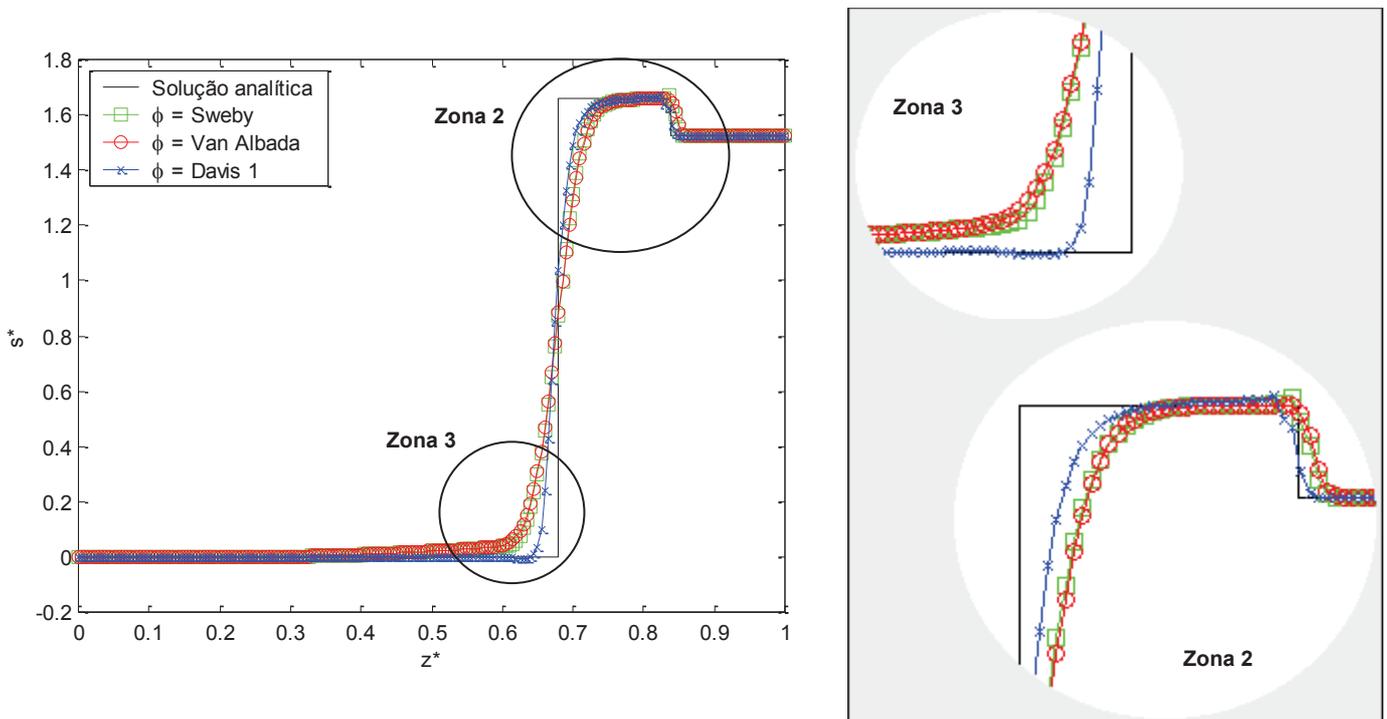
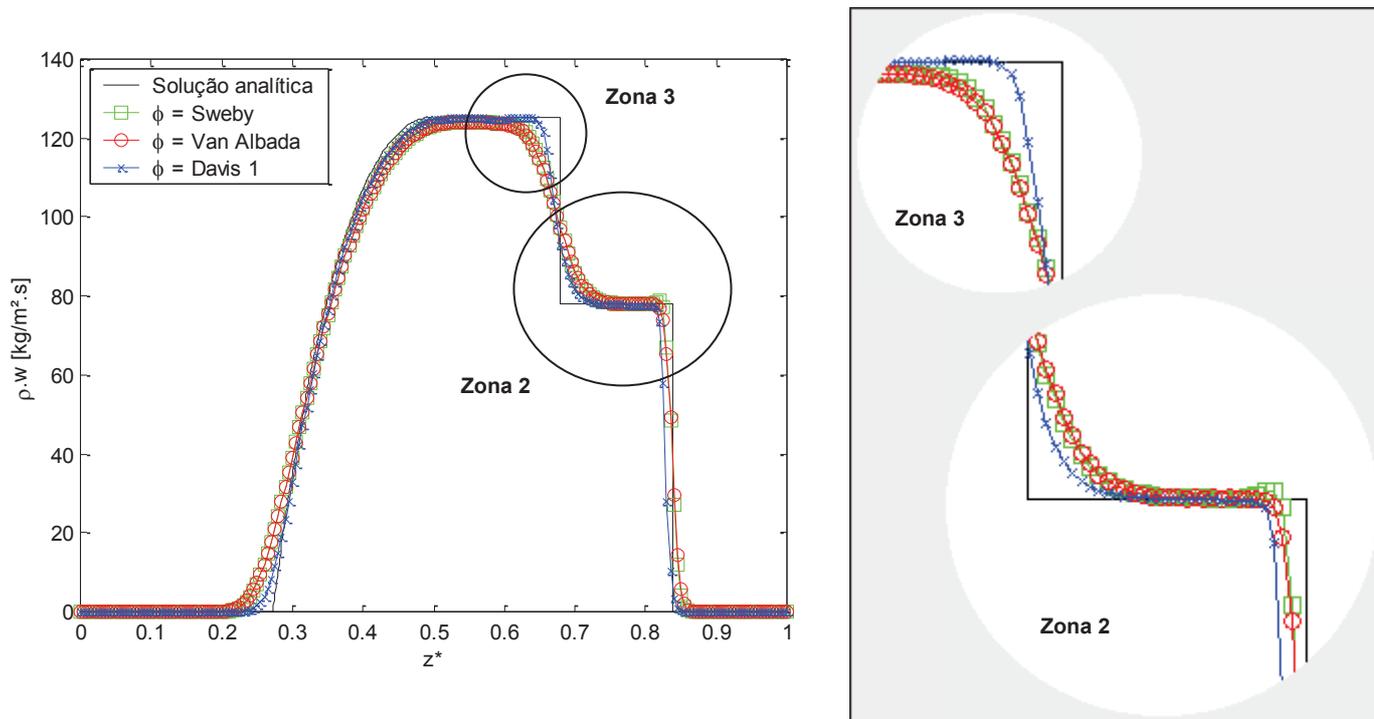


Figura 5.70 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.



A similaridade entre os resultados com as funções limitadoras de Sweby e Van Albada é facilmente notada nas Figuras 5.64 a 5.70. Ambas possuem o mesmo comportamento, suavizam mais as descontinuidades, mas também eliminam as oscilações geradas pelo método numérico original.

Entre as curvas de Sweby e Van Albada, é possível notar, porém, uma diferença, Sweby suaviza ligeiramente menos a solução perto das descontinuidades, apesar de apresentar o pequeno indício de uma oscilação no final da zona 2, na descontinuidade existente entre a região afetada pela onda de compressão e a região de baixa pressão. Os valores obtidos para o RMSE apresentados na tabela 5.17 comprovam esse comportamento.

Contraditoriamente, os resultados obtidos para o RMSE indicam que o maior erro ocorre utilizando-se a função limitadora de Davis 1. Isso se deve ao fato de que a descontinuidade que antecede a região de baixa pressão é antecipada quando se utiliza essa função limitadora, já os demais métodos acompanham melhor a solução exata nessa região.

Na tabela 5.18 é possível verificar os valores de tempo computacional para cada uma das funções limitadoras. Curiosamente o tempo computacional da solução com Davis 1, a que possuiu melhores resultados, é o menor, seguido por Van Albada e Sweby.

Tabela 5.17 – Valor de RMSE para o cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1, Sweby e Van Albada para CFL = 0,7

	<i>Davis 1</i> <i>CFL = 0,7</i>	<i>Sweby</i> <i>CFL = 0,7</i>	<i>Van Albada</i> <i>CFL = 0,7</i>
RMSE médio de todas as propriedades	3,85	3,15	3,34

Tabela 5.18 – Valor de tempo computacional para o cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1, Sweby e Van Albada para CFL = 0,7

	<i>Davis 1</i> <i>CFL = 0,7</i>	<i>Sweby</i> <i>CFL = 0,7</i>	<i>Van Albada</i> <i>CFL = 0,7</i>
% do tempo em relação ao tempo computacional de Lax-Wendroff de dois passos com malha de 200 volumes	698,12%	734,38%	708,14%

As Figuras 5.71 a 5.77 apresentam as comparações realizadas para o método de MacCormack.

Figura 5.71 – Pressão do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.

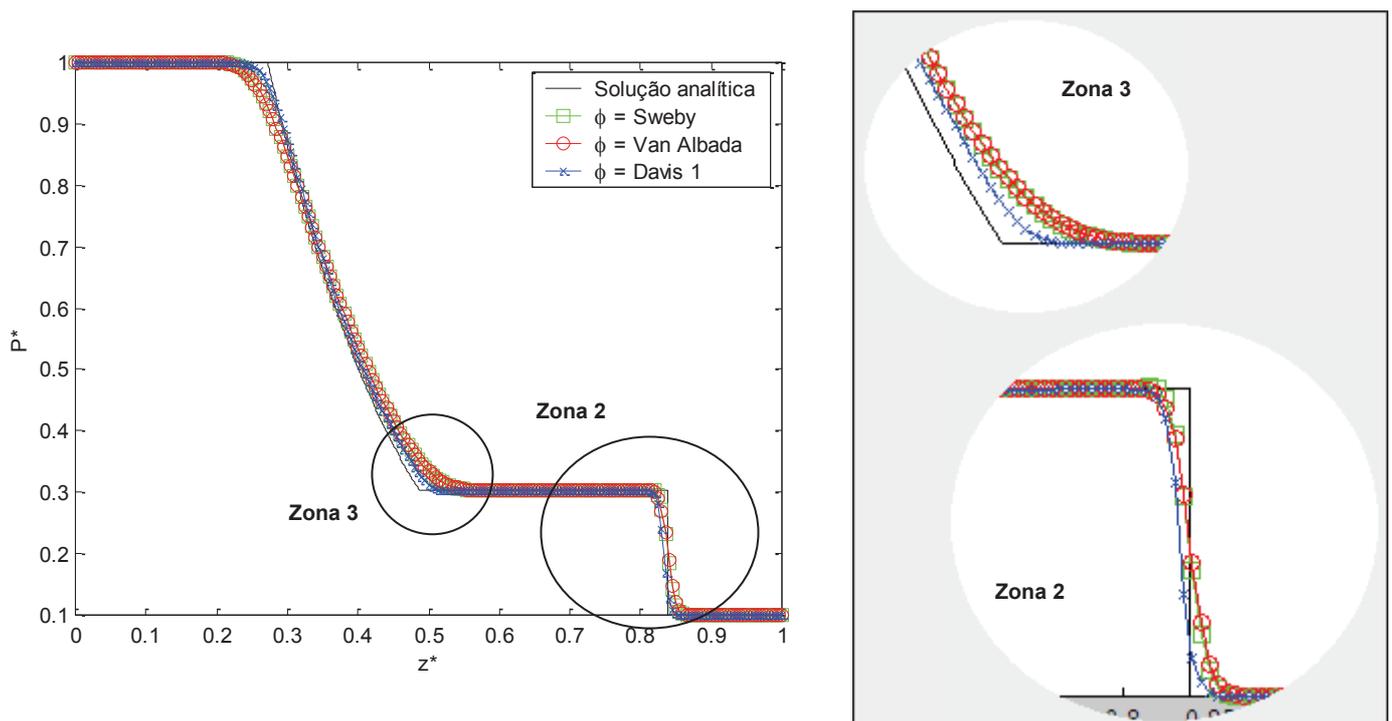


Figura 5.72 – Massa específica do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.

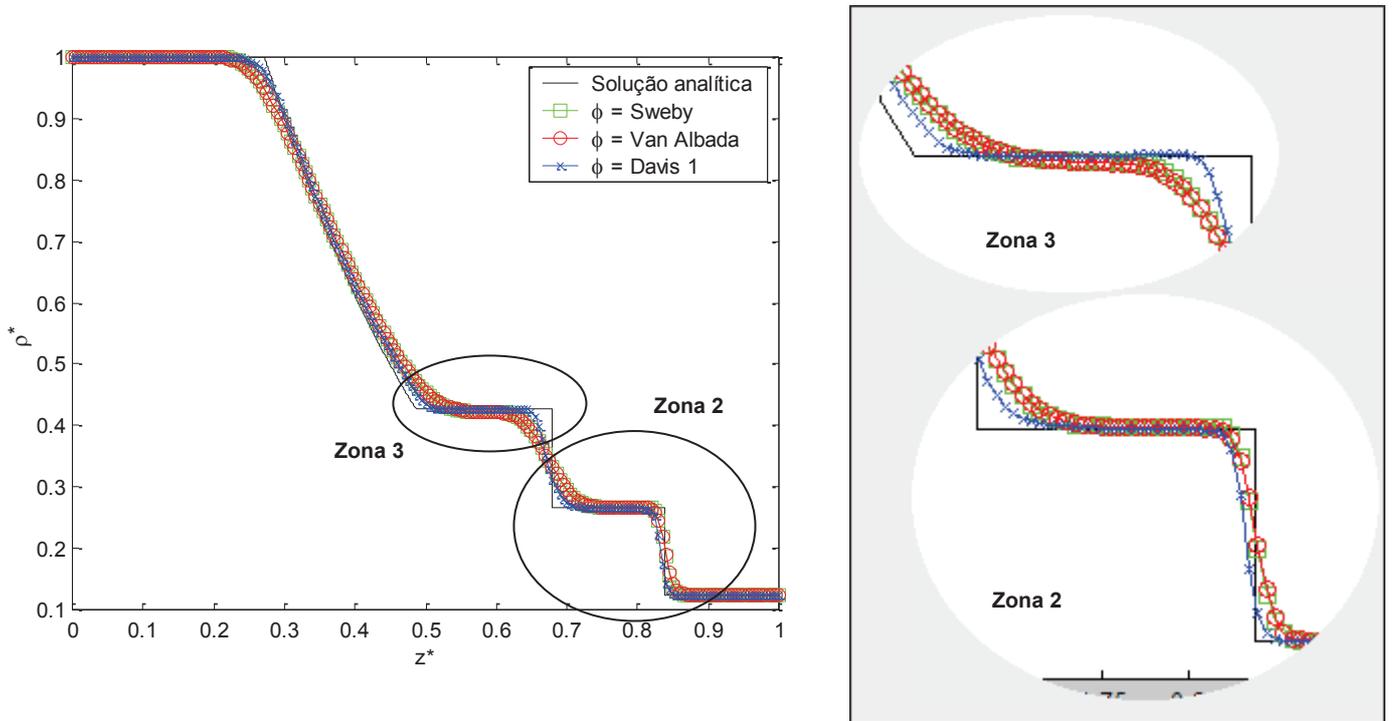


Figura 5.73 – Velocidade do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.

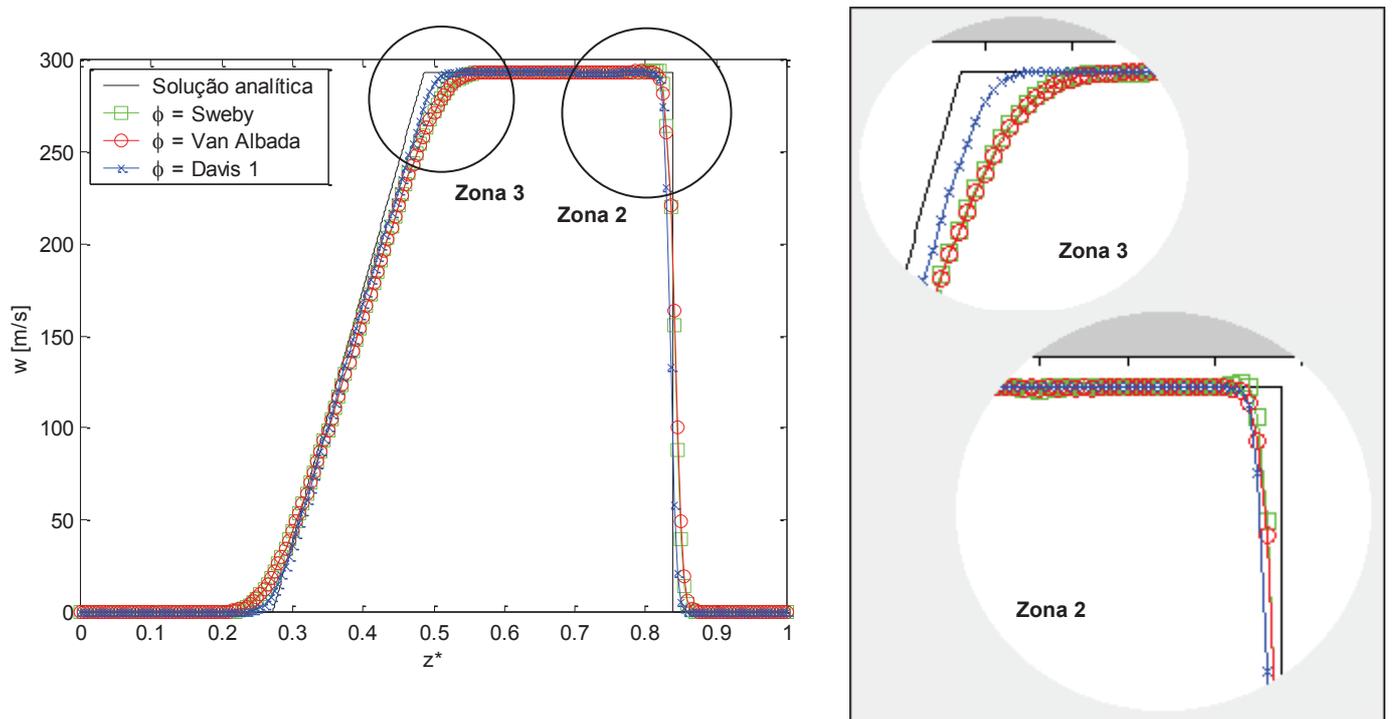


Figura 5.74 – Número de Mach em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.

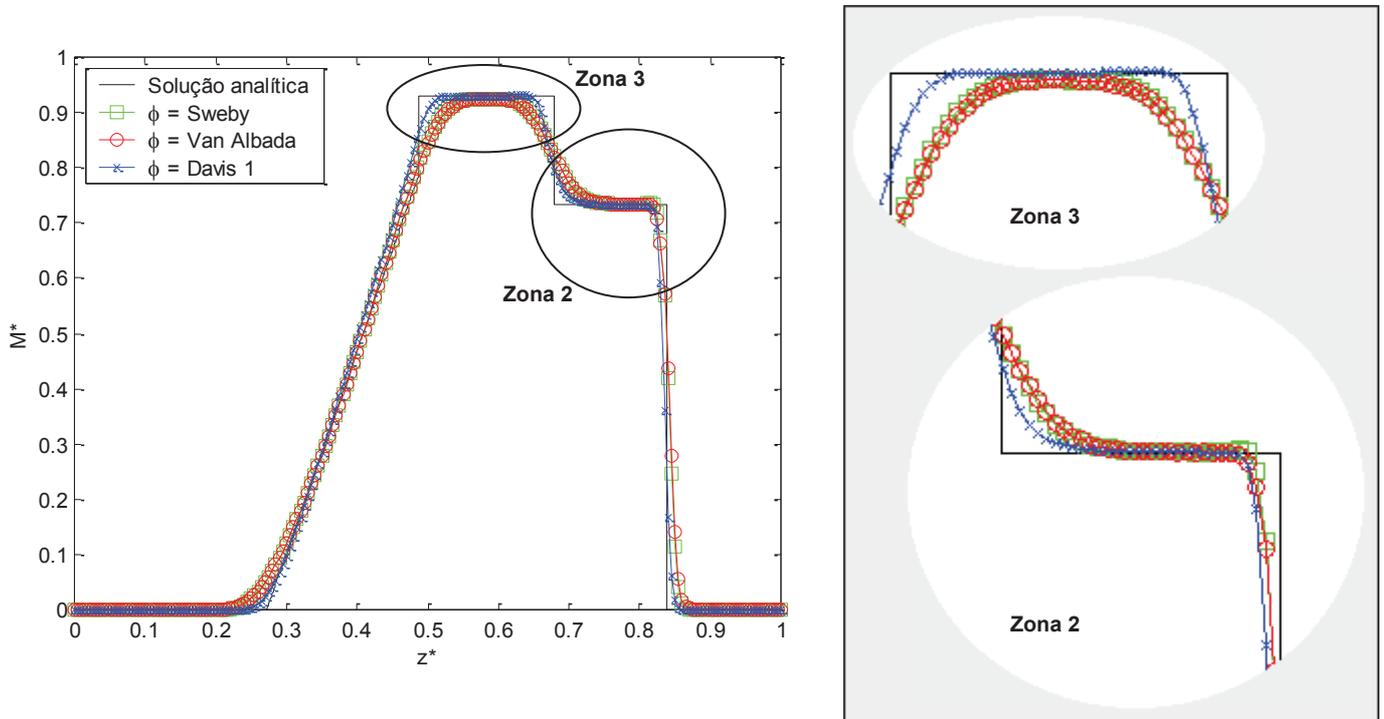


Figura 5.75 – Temperatura do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.

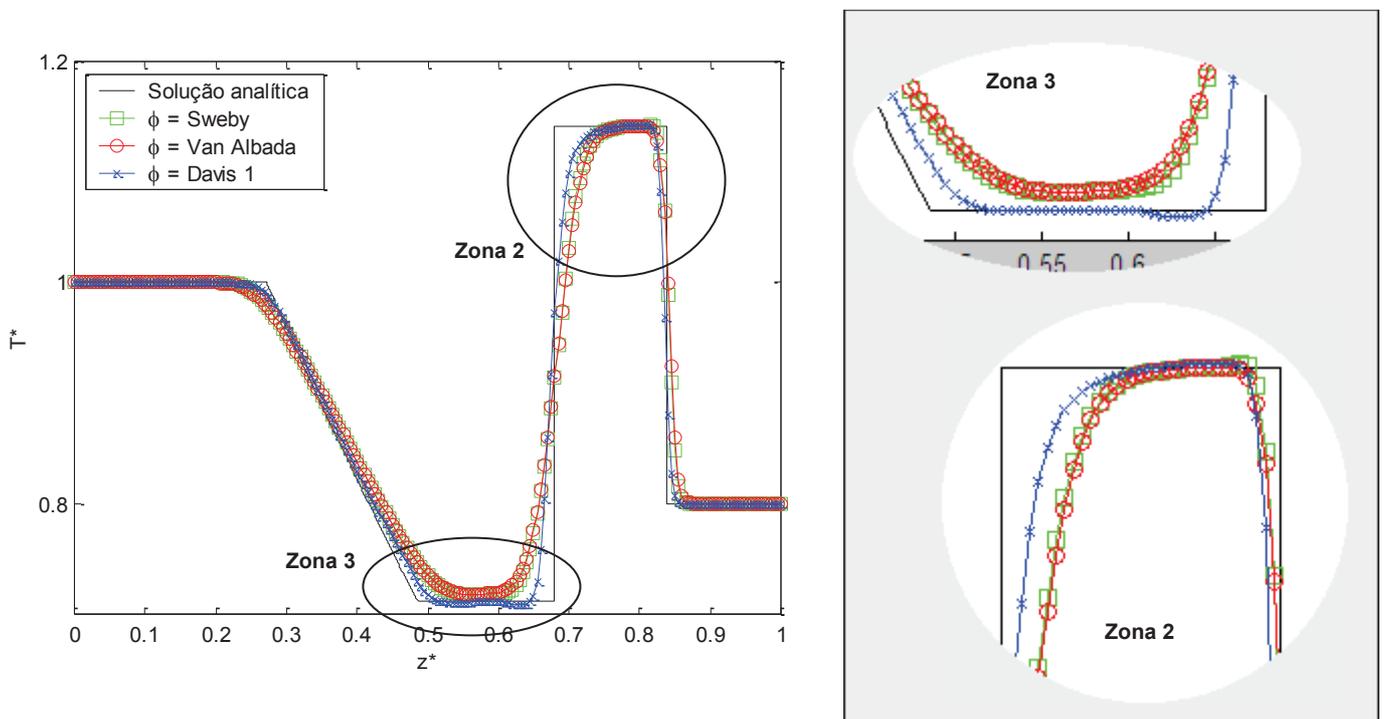


Figura 5.76 – Entropia do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.

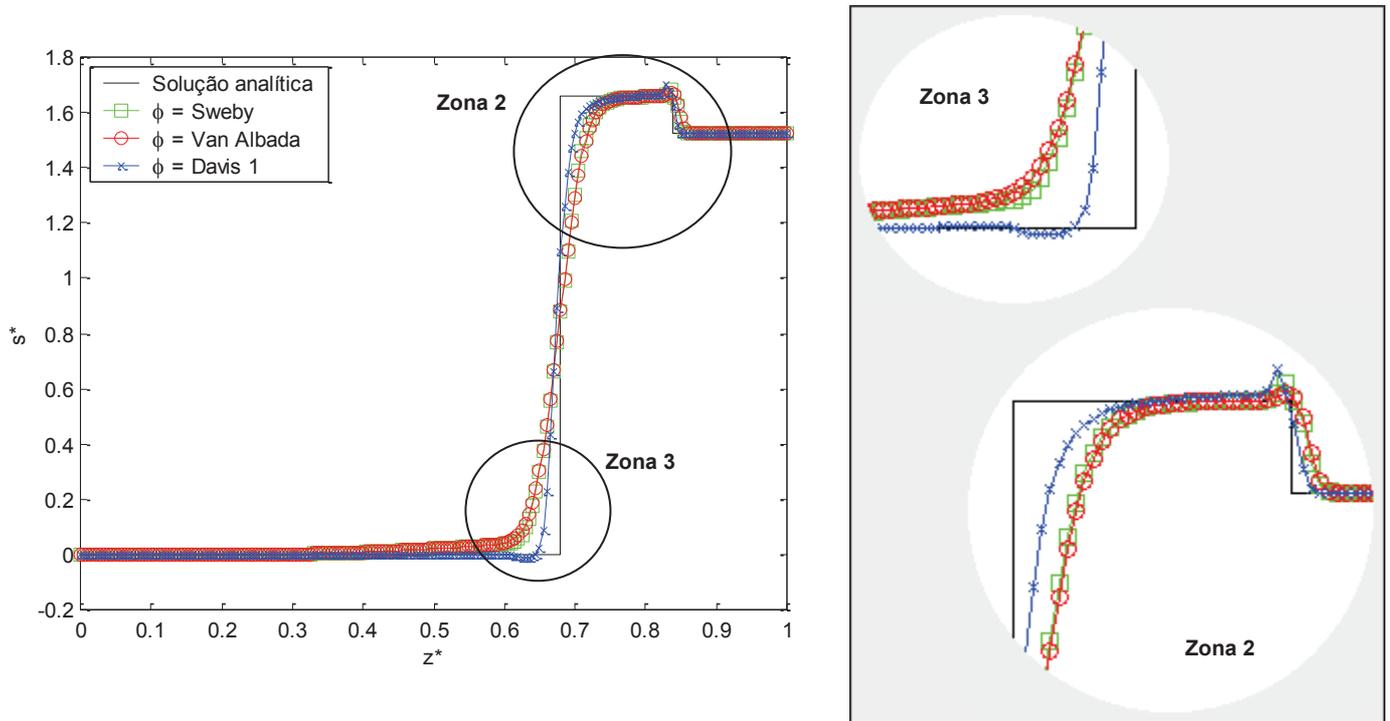
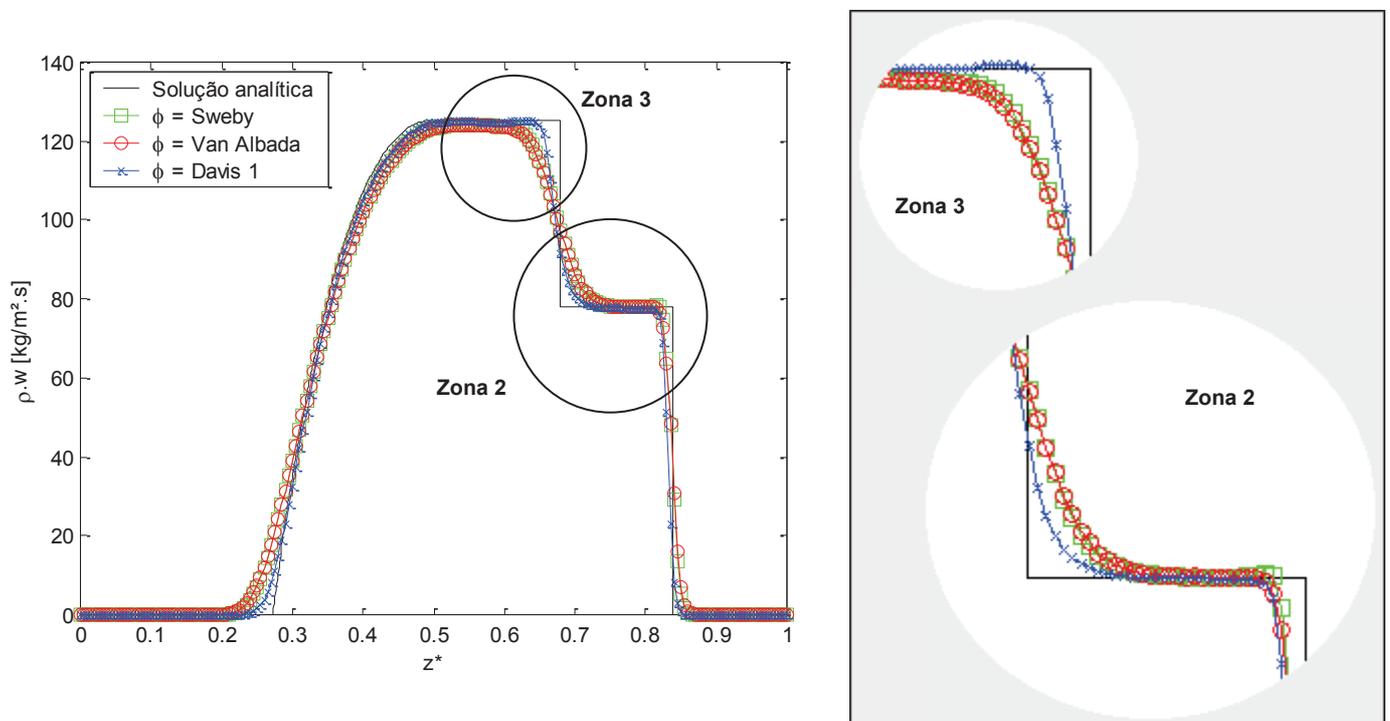


Figura 5.77 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para MacCormack com TVD de Davis e função limitadora de Davis 1, Sweby e Van Albada com CFL 0,7 em 0,0061 s.



Para o método de MacCormack também é possível notar, que os resultados que mais se aproximam da solução analítica, foram obtidos com a função limitadora de Davis 1. Aqui, os fenômenos observados no problema teste do tubo de choque, também estão mais bem representados graças à menor suavização das descontinuidades, e à eliminação de todas as oscilações geradas pelo método original.

Assim como o método de Lax-Wendroff de dois passos, a região de transição, zona 5, teve boa precisão, e foi na descontinuidade de contato que ocorreu a maior suavização da curva. Na última descontinuidade, no final da zona 2, o método de MacCormack, com função limitadora de Davis 1, apresentou um resultado mais próximo dos obtidos com Sweby e Van Albada.

Entre as curvas geradas com as funções limitadoras de Sweby e Van Albada, os resultados também foram muito similares ao longo de todas as descontinuidades. É possível perceber que a curva com Sweby ficou levemente mais próxima da solução analítica, no entanto não apresentou nenhum indício de oscilações, nem mesmo na zona 2 perto da descontinuidade que antecede a região de baixa pressão.

Os valores do RMSE para o método de MacCormack comprovam as análises feitas através das figuras 5.71 a 5.77. Nesse método os resultados obtidos com a função limitadora de Davis 1 realmente apresentaram o menor valor de RMSE, isso provavelmente ocorreu devido à sua maior proximidade em relação a solução analítica na última descontinuidade, no final da zona 2, tabela 5.19.

Tabela 5.19 – Valor de RMSE para o cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1, Sweby e Van Albada para CFL = 0,7

	<i>Davis 1</i> <i>CFL = 0,7</i>	<i>Sweby</i> <i>CFL = 0,7</i>	<i>Van Albada</i> <i>CFL = 0,7</i>
RMSE médio de todas as propriedades	2,80	3,28	3,44

O tempo computacional para o cálculo da solução com o método de MacCormack e função limitadora de Davis 1 também foi o menor, como mostra a tabela 5.20. Em sequência o menor tempo computacional foi obtido por Van Albada, seguido por Sweby.

Tabela 5.20 – Valor de tempo computacional para o cálculo numérico através de MacCormack com TVD de Davis e função limitadora Davis 1, Sweby e Van Albada para CFL = 0,7

	<i>Davis 1</i> <i>CFL = 0,7</i>	<i>Sweby</i> <i>CFL = 0,7</i>	<i>Van Albada</i> <i>CFL = 0,7</i>
% do tempo em relação ao tempo computacional de Lax-Wendroff de dois passos com malha de 200 volumes	689,06%	727,18%	703,44%

5.2.5 Comparação entre Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack

Entre as três funções limitadoras testadas com o TVD de Davis, tanto no método numérico de Lax-Wendroff de dois passos como no de MacCormack, a que apresentou os melhores resultados foi Davis 1 calculada para um CFL igual a 0,7. Sendo assim, com o intuito de identificar o melhor método numérico para representar os fenômenos do problema teste do tubo de choque, as Figuras 5.78 a 5.84 mostram a comparação entre Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack, ambos com Davis 1 e CFL igual a 0,7.

Figura 5.78 – Pressão do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.

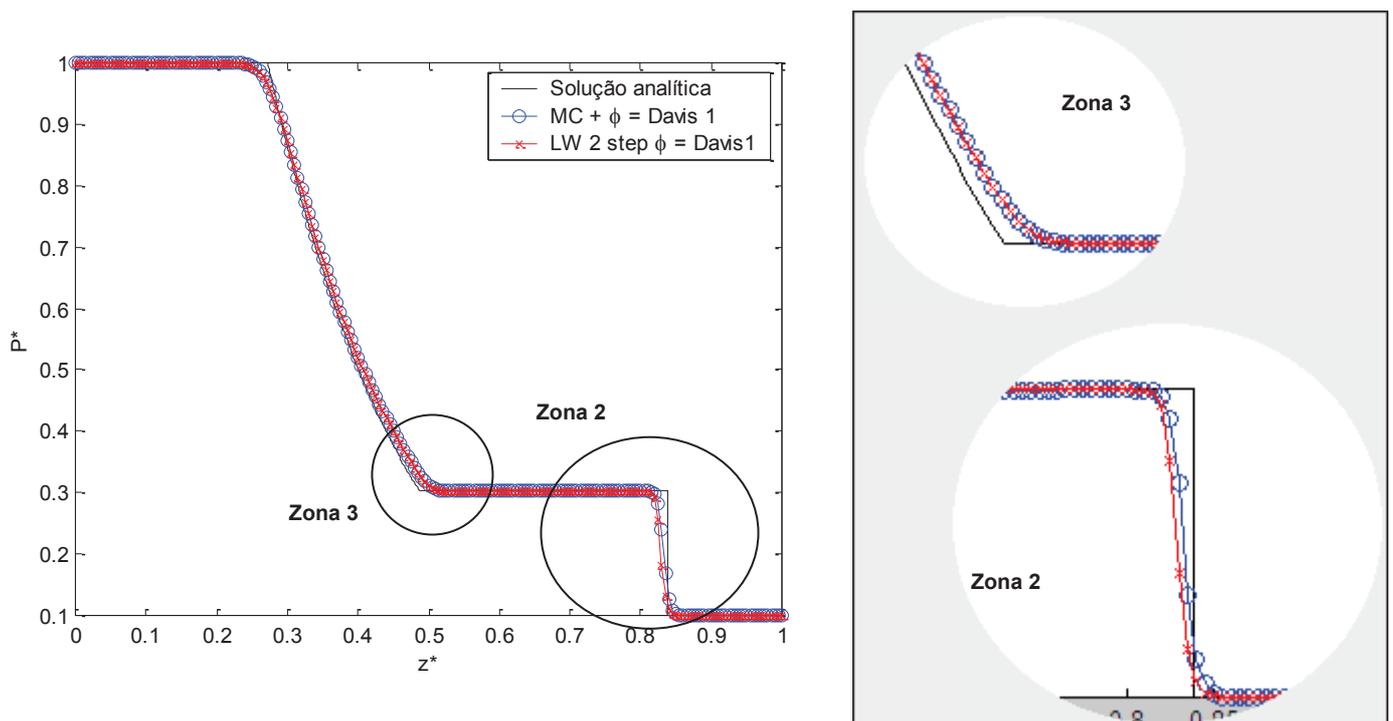


Figura 5.79 – Massa específica do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.

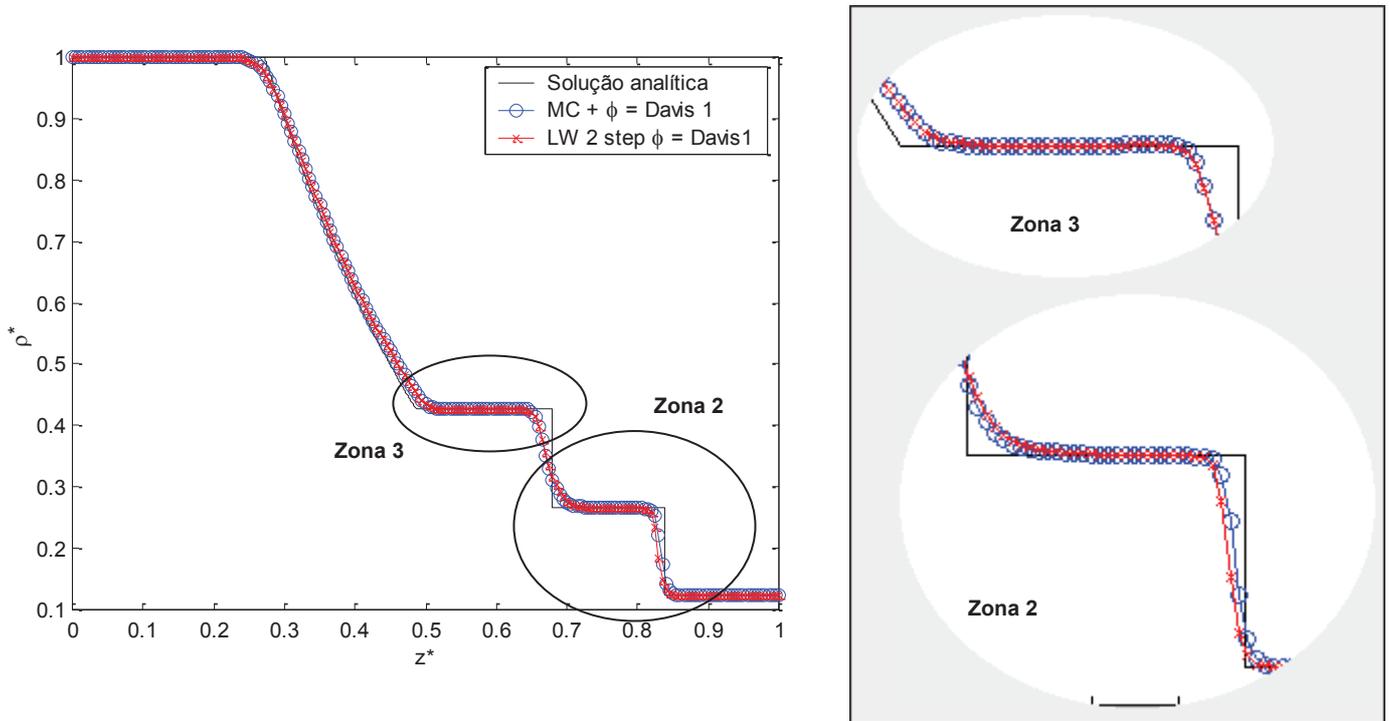


Figura 5.80 – Velocidade do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.

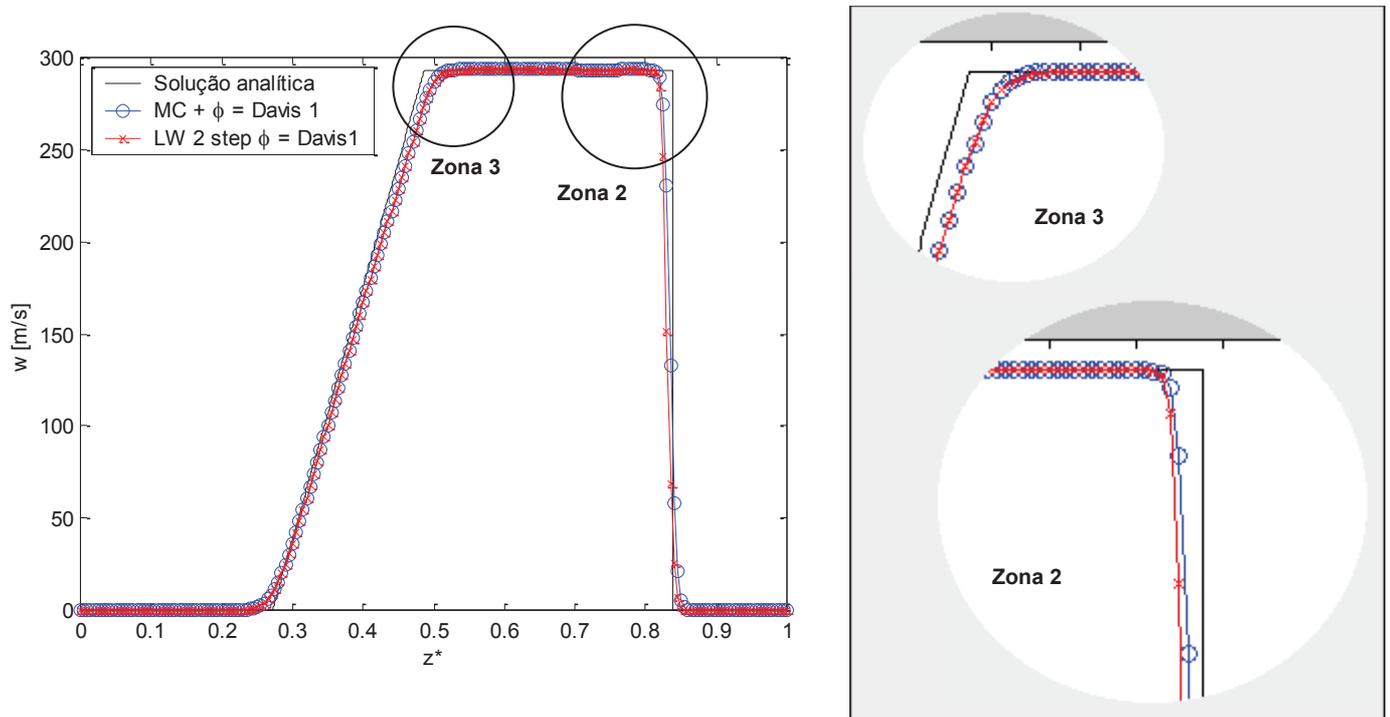


Figura 5.81 – Número de Mach em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.

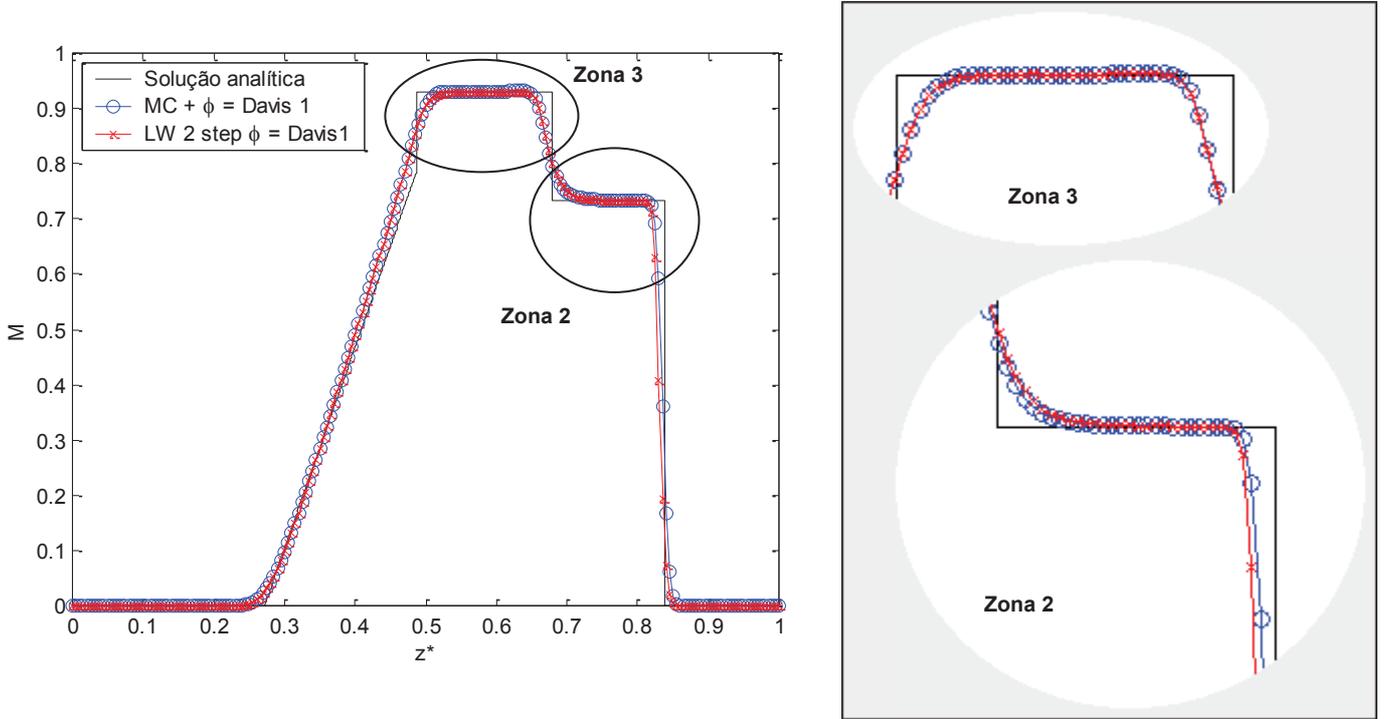


Figura 5.82 – Temperatura do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.

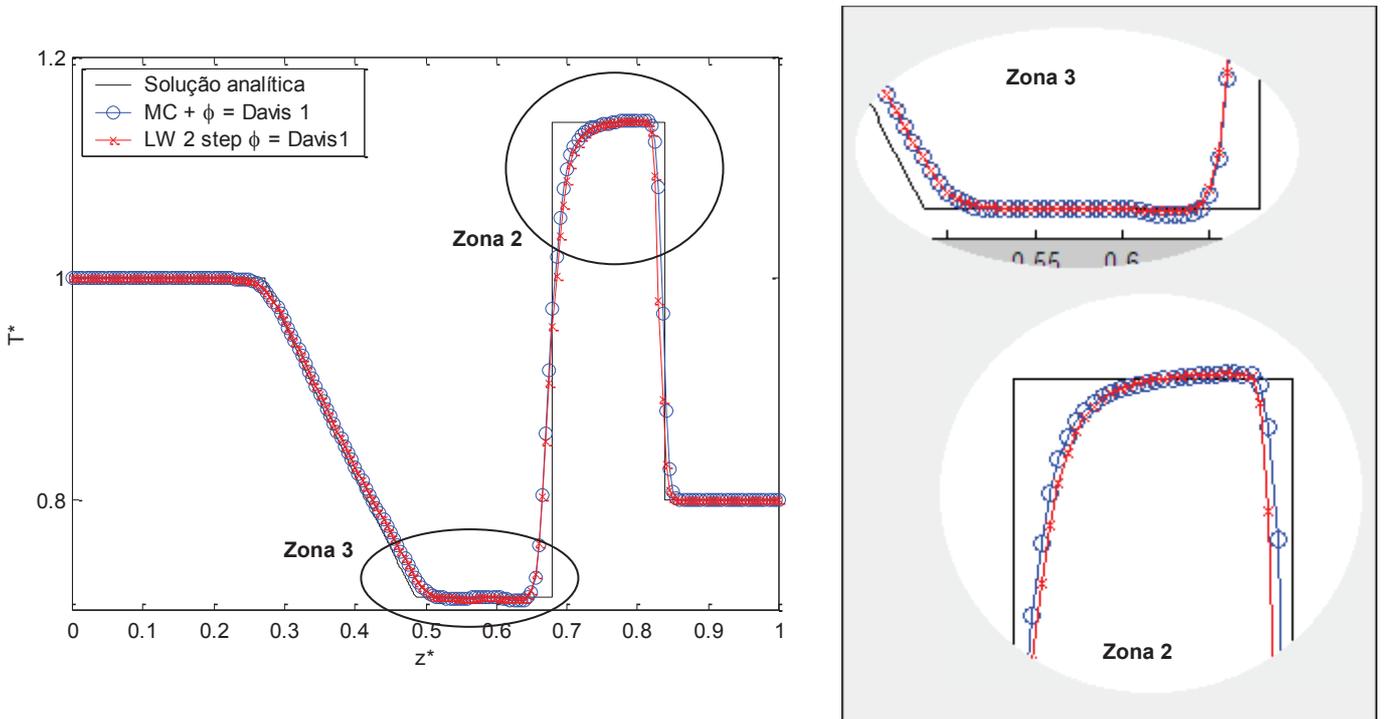


Figura 5.83 – Entropia do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.

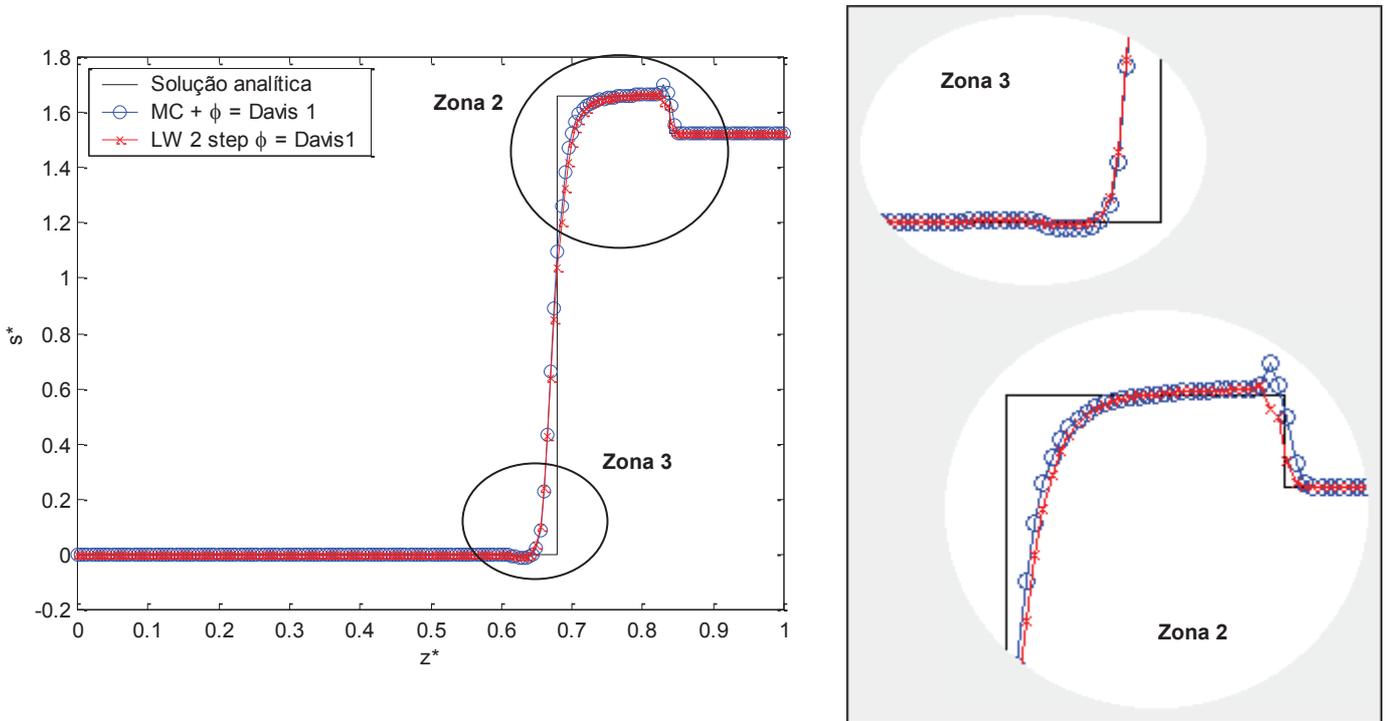
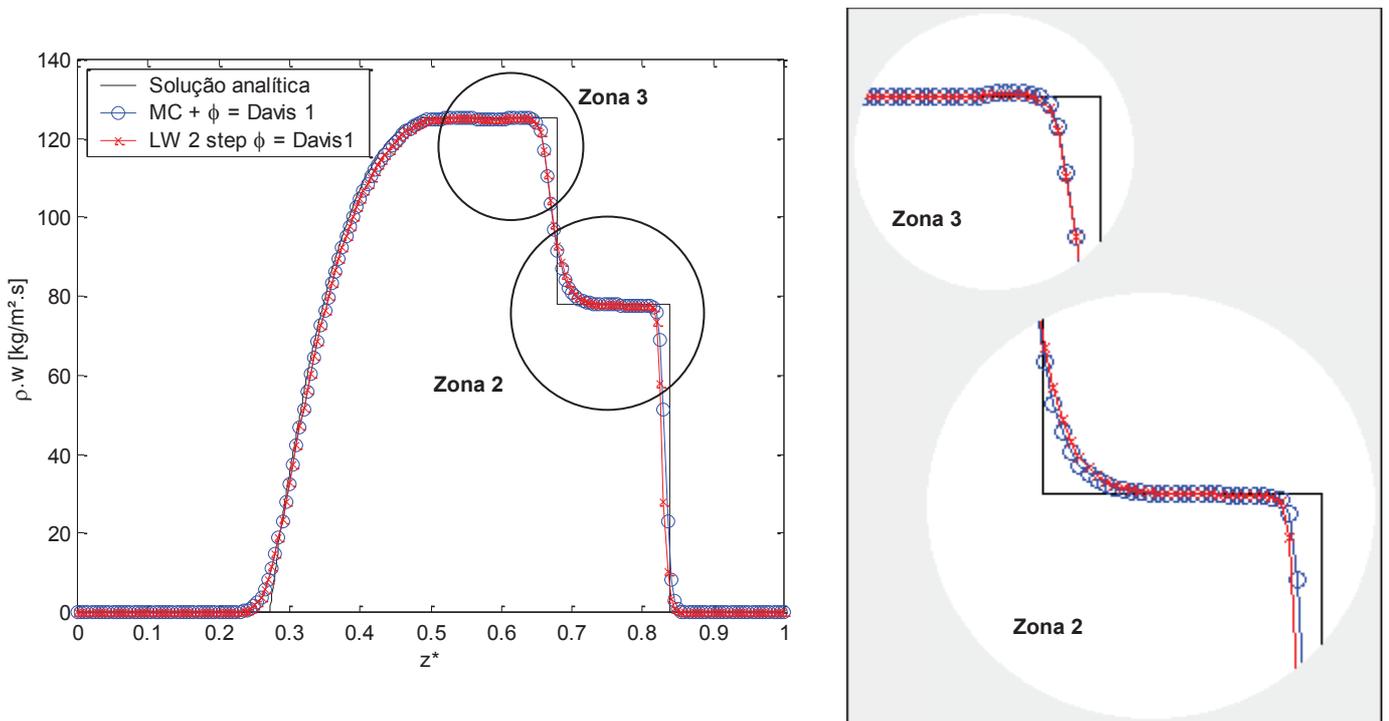


Figura 5.84 – Fluxo de massa do fluido em função da distância para Lax-Wendroff de dois passo e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL 0,7 em 0,0061 s.



Os resultados obtidos pelos dois métodos numéricos são muito semelhantes ao longo de todas as curvas obtidas para o problema teste do tubo de choque. Ambos os métodos representaram muito bem as regiões de descontinuidades, sem suavizar muito as curvas e sem apresentar qualquer indício de suas oscilações originais.

Na região de transição, zona 5, os resultados de Lax-Wendroff de dois passos e de MacCormack são basicamente iguais, é partir da zona 3 que se torna possível identificar algumas diferenças entre as soluções. As descontinuidades são suavizadas na mesma proporção para os dois métodos numéricos, porém, os resultados por MacCormack, alteram levemente o comportamento das curvas perto da descontinuidade de contato para o número de Mach, temperatura, entropia e fluxo de massa. Para as demais propriedades do fluido, o comportamento apresentado pelos dois métodos numéricos nessa região é o mesmo.

Na zona 2, entre a descontinuidade de contato e a região afetada pela onda de compressão, é onde ocorrem as maiores diferenças entre os dois métodos numéricos. Lax-Wendroff de dois passos acabou suavizando mais as descontinuidades do que MacCormack, mas novamente, MacCormack altera o comportamento da curva, deixando de ser tão fiel à solução analítica, só que dessa vez, somente para a entropia.

Apesar dos pequenos indícios de oscilação em algumas regiões das curvas, o MacCormack, com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL igual a 0,7, é ligeiramente mais preciso do que Lax-Wendroff de dois passos por ser capaz de representar com mais perfeição as descontinuidades, foco principal do estudo. Isso é comprovado pelos valores de RMSE apresentados na tabela 5.21, onde MacCormack possui o menor erro. Além disso, MacCormack apresenta o menor tempo computacional, apesar da diferença ser pequena, tabela 5.22.

Tabela 5.21 – Valor de RMSE para o cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1, Sweby e Van Albada para CFL = 0,7

	<i>Lax-Wendroff de dois passos</i> ($\varphi = \text{Davis 1}; CFL = 0,7$)	<i>MacCormack</i> ($\varphi = \text{Davis 1}; CFL = 0,7$)
RMSE médio de todas as propriedades	3,85	2,80

Tabela 5.22 – Valor de tempo computacional para o cálculo numérico através de Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack, ambos com TVD de Davis e função limitadora Davis 1 para CFL = 0,7

	<i>Lax-Wendroff de dois passos</i> ($\varphi = \text{Davis 1}; CFL = 0,7$)	<i>MacCormack</i> ($\varphi = \text{Davis 1}; CFL = 0,7$)
% do tempo em relação ao tempo computacional de Lax-Wendroff de dois passos com malha de 200 volumes	698,12%	689,06%

6 CONCLUSÕES

Buscando identificar um método numérico capaz de aliar precisão e tempo computacional para a análise unidimensional dos fenômenos inerciais e pulsantes que ocorrem nos dutos de admissão e exaustão de motores, decidiu-se estudar o problema teste do tubo de choque neste trabalho aplicando dois métodos de diferenças finitas com limitador de fluxo TVD de Davis e três diferentes funções limitadoras.

6.1 CONCLUSÕES SOBRE AS ANÁLISES NUMÉRICAS

As soluções para as leis de conservação do escoamento do tubo de choque foram obtidas pelos métodos numéricos de diferenças finitas de segunda ordem de Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack. Os resultados exibidos para ambos os métodos não foram satisfatórios. As oscilações características desses métodos na presença de descontinuidade, tão comentadas na literatura, realmente distorcem muito a solução, gerando dados não confiáveis para diversos tamanhos de malha. O aumento do tamanho de malha não elimina as oscilações, mas talvez possa ser utilizado para reduzir a suavização das descontinuidades. Sendo assim, os métodos originais não devem ser utilizados para analisar os fenômenos inerciais e pulsantes que ocorrem nos dutos de admissão e exaustão.

As análises realizadas mostram que é possível eliminar as oscilações dos métodos de segunda ordem com a utilização do TVD de Davis. Diferentes funções limitadoras podem ser utilizadas juntamente com o TVD de Davis, porém, sua adição, faz com as soluções só sejam válidas para CFL menor ou igual a 0,7. Diferentemente do esperado, a redução do valor de CFL não resultou em uma maior aproximação entre resultado numérico e analítico, os melhores resultados foram obtidos para CFL igual a 0,7.

Ao eliminar as oscilações em regiões de descontinuidade, as funções limitadoras acabam suavizando um pouco as curvas e foi possível observar diferentes comportamentos para cada uma das funções utilizadas. Sweby e Van Albada possuem resultados muito similares, mas apesar de Sweby suavizar menos as descontinuidades, ele acabou gerando um pequeno pico na descontinuidade que antecede a região de baixa pressão. Comparando Davis 1 com Sweby e Van Albada, fica evidente que essa foi a função que conseguiu representar com mais precisão os fenômenos que ocorrem no problema teste do tubo de choque, e que apesar de seu tempo computacional ser ligeiramente maior, vale a pena utilizá-la.

Analisando Lax-Wendroff de dois passos e MacCormack, ambos com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL igual a 0,7, pode-se dizer que o método que melhor representou os fenômenos estudados foi MacCormack, devido ao fato de que os resultados de Lax-Wendroff de dois passos acabam se distanciando da solução analítica em regiões de descontinuidade, foco principal do estudo. A diferença entre os tempos computacionais dos dois métodos ainda indica que o método de MacCormack possui um menor tempo computacional.

6.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Apresentam-se a seguir algumas sugestões para o desenvolvimento trabalhos futuros:

- ❖ Verificar a influência do tamanho de malha na redução da suavização das descontinuidades no método de MacCormack com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL igual a 0,7;
- ❖ Comparar os resultados numéricos e analíticos com resultados experimentais;
- ❖ Testar nos métodos de diferenças finitas o limitador WENO utilizado nos métodos de elementos finitos;
- ❖ Comparar os resultados obtidos pelos métodos de diferenças finitas com limitador TVD e o método de elementos finitos de Galerkin descontínuo com o limitador WENO
- ❖ Aplicar o método de MacCormack com TVD de Davis, função limitadora de Davis 1 e CFL igual a 0,7 a um duto de admissão ou exaustão real.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEGRE, J. A. A. V. **Simulação dos processos e análise exergetica do motor de ciclo Diesel**. 1993. 180f. Tese (Doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1993.
- ARORA, M.; ROE, P. L. A well-behaved TVD limiter for high-resolution calculations of unsteady flow. **Journal of Computational Physics**. v. 132, p. 3-11, 1997.
- ARPACI, V. S. **Conduction heat transfer**. London: Addison-Wesley Publishing Company, 1966.
- BALSARA, D. S.; SHU, C. W. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high order of accuracy. **Journal of Computational Physics**. v. 160, p. 405-452, 2000.
- BEZERRA, D. de J. **Métodos numéricos para Leis de Conservação**. 2003. 140f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.
- BORIS, J. P.; BOOK, D. L. Flux corrected transport. **Journal of Computational Physics**. v. 11, p. 38-69, 1973.
- BRAIN, M. **How HEMI Engine Work**. 2003. Disponível em: <<http://auto.howstuffworks.com/hemi1.htm>> Acessado em: 30 de novembro de 2014.
- CHORIN, A. J. Hermite expansions in Monte-Carlo computation. **Journal of Computational Physics**. v. 8, p. 472-482, 1971.
- COBERÁN, J. M.; GASCÓN, M. L. TVD schemes for the calculation of flow in pipes of variables cross-section. **Mathematical Computational Modelling**. v. 21, p. 85-92, 1995.
- COCKBURN, B.; SHU, C. W. The Runge-Kutta local projection P^l discontinuous Galerkin finite element method for scalar Conservation Laws. **IMA Preprint Series**. v. 388, 1988.
- COCKBURN, B.; SHU, C.W. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for Conservation Laws II: Genral framework. **Mathematic of Computation**. v. 52, p. 411-435, 1989.
- COCKBURN, B.; LIN, S. Y. TVB Runge-Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for Conservation Laws III: One-dimensional systems. **Journal of Computational Physics**. v. 84, p. 90-113, 1989.
- DARU, V.; TENAUD, C. High order one-step monotonicity-preserving schemes for unsteady compressible flow calculations. **Journal of Computational Physics**. v. 193, p. 563-594, 2004.
- DAVIS, S. F. A. A simplified TVD finite difference scheme via artificial viscosity. **SIAM Journal on Scientific & Statistical Computing**. v. 8, p. 1-18, 1987.

FÜRST, J.; FURMÁNEK, P. An implicit MacCormack scheme for unsteady flow calculation. **Computer & Fluids**. v. 46, p. 231-236, 2011.

GALIANO, S. J.; ZAPATA, M. U. A new TVD flux-limiter method for solving nonlinear hyperbolic equations. **Journal of Computational and Applied Mathematics**. v. 234, p. 1395-1403, 2010.

GÁSCON, L.; CORBERÁN, J. M. Construction of second-order TVD schemes for nonhomogeneous hyperbolic Conservation Laws. **Journal of Computational Physics**. v. 172, p. 261-297, 2001.

GLIMM, J. **Communication of Pure Application Mathematic**. v. 18, p. 697, 1965.

GODUNOV, S. K. A finite-difference method for the numerical computation and discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. **Mat. Sb.** v. 47, p. 271–306, 1959.

GODUNOV, S. K. et al. **Journal of Computational and Mathematical Physics**. v. 1, p. 1187, 1962.

HANRIOT, S. de M. **Estudo dos fenômenos pulsantes do escoamento de ar nos condutores de admissão em motores de combustão interna**. 2001. 169f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2001.

HARTEN, A. et al. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes III. **Journal of Computational Physics**. v. 131, p. 3-47, 1997.

HARTEN, A. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. **Journal of Computational Physics**. v. 135, p. 260-278, 1997.

HIRSCH, C. **Numerical Computation of Internal & External Flows**. v.1. 2ed. Oxford: John Wiley & Sons, 2007.

HIRSCH, C. Computational methods for inviscid and viscous flows. **Numerical computation of internal and external flows**. v. 2. Chichester: John Wiley & Sons, 1990.

HIXON, R.; TURKEL, E. Compact implicit MacCormack-type schemes with high accuracy. **Journal of Computational Physics**. v. 158, p. 51-70, 2000.

JIANG, G. S.; SHU, C. W. Efficient implementation of weighted ENO schemes. **Journal of Computational Physics**. v. 126, p. 202-228, 1996.

JENG, Y. N.; PAYNE, U. J. An adaptive TVD. **Journal of Computational Physics**. v. 118, p. 229-241, 1995.

KIM, H. Numerical solution of Burgers' equation with random initial conditional using the Wiener chaos expansion and the Lax-Wendroff scheme. **Applied Mathematics Letters**. v. 20, p. 545-550, 2007.

LAURA, M. **Apostila de motores a combustão interna**. 2013. 19f. Disponível em: <<http://wp.ufpel.edu.br/mlaura/files/2013/01/Apostila-de-Motores-a-Combust%C3%A3o-Interna.pdf>>. Acesso em 07 set. 2013.

LISKA, R. et al. The early influence of Peter Lax on Computational hydrodynamics and na application of Lax-Friedrichs and Lax-Wendroff on triagular grids in Lagrangian coordinates. **Acta Mathematica Scientia**. v. 31B, p. 2195-2202, 2011.

LIU, X. D. et al. Weighted essentially non-oscillatory schemes. **Journal of Computational Physics**. v. 115, p. 200-212, 1994.

LIU, W. et al. High order conservative Lagrangian schemes with Lax-Wendroff type time discretization for the compressible Euler equations. **Journal of Computational Physics**. v. 228, p. 8872-8891, 2009.

MORAN, M. J.; SHAPIRO, H. N. de. **Princípios de termodinâmica para engenharia**. 4ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002.

MONTEIRO, J. F. de C. **Modelos matemáticos e computacionais para simulação do escoamento em motores de combustão interna**. 1999. 149f. Dissertação (Mestrado) – Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 1999.

OCH, S. H. **Modelos físico e matemático para o estudo dos processos de admissão e exaustão em um motor monocilíndrico**. 2009. 92f. Dissertação (Mestrado) – Pontificia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2009.

ONORATI, A. et al. Modelling one-dimensional unsteady flows in ducts: symmetric finite difference schemes versus Galerkin Discontinuous finite element methods. **International Journal of Mechanical Sciences**. v. 39, p. 1213–1236, 1997.

OSHER, S. Riemann solvers, the entropy condition and difference approximations. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 21, p. 217-235, 1984.

PAYRI, F. et al. Application of MacCormack schemes to I.C. engine exhaust noise prediction. **Journal of Sound and Vibration**. v. 195, p. 757-773, 1996.

PAYRI, F. et al. Analysis of numerical methods to solve one-dimensional fluid-dynamic governing equations under impulsive flow in tapered ducts. **International Journal of Mechanical Science**. v. 46, p. 981-1004, 2004.

PEARSON, R. J.; WINTERBONE, D. E. The simulation of gas dynamics in engine manifolds using non-linear symmetric difference schemes. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**. v. 211, p. 601-616, 1997.

POLONI, M. et al. Comparison of unsteady flow calculations in a pipe by the method of characteristics and the two-step differential Lax-Wendroff method. **International Journal of Mechanical Sciences**. v. 29, p. 367-378, 1987.

QIU, J.; SHU, C. W. Hermite WENO schemes and their application as limiters for Runge-Kutta discontinuous Galerkin method: one dimensional case. **Journal of Computational Physics**. v. 193, p. 115-135, 2003.

QIU, J. et al. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters. **SIAM Journal on Science Computation**. v. 26, p. 907-929, 2005.

QIU, J. et al. The discontinuous Galerkin method with Lax-Wendroff type time discretizations. **Computational Methods Applied to Mechanical Engineering**. v. 194, p. 4528-4343, 2005.

QIU, J. WENO schemes with Lax-Wendroff type time discretizations for Hamilton-Jacobi equations. **Journal of Computational and Applied Mathematics**. v. 200, p. 591-605, 2007.

RICHTMYER, R.; MORTON, K. **Difference methods for initial-value problems**. 2ed. New York: Interscience, 1967.

ROE, P. L. Numerical algorithms for the linear wave equation. **Royal Aircraft Establishment Technical**. Report 81047, 1981.

ROSELLÓ, M. D. et al. Analytic-numerical approach to flow calculation in intake and exhaust systems of internal combustion engines. **Mathematical and Computer Modelling**. v. 36, p. 33-45, 2002.

RUSANOV, V. V. **Journal of Computational and Mathematical Physics**. v. 2.

SHAPIRO, A. H. **The dynamics and thermodynamics of compressible fluid flow**. New York: New York, 1953.

SHU, C. W.; OSHER, S. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. **Journal of Computational Physics**. v. 77, p. 439-471, 1988.

SOD, G. A. A survey of several finite difference methods for systems of nonlinear hyperbolic conservation laws. **Journal of Computational Physics**. v. 27, p. 1-31, 1978.

STONE, R. **Introduction to internal combustion engines**. 2ed. Warrenaue: Society of Automotive Engineers, 1993.

SWEBY, P. K. High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic Conservation Laws. **SIAM Journal on Numerical Analysis**. v. 21, p. 995-1011, 1984.

TANNEHILL, J. C. et al. **Computational fluid mechanics and heat transfer**. 2ed. Philadelphia: Taylor & Francis, 1997.

VERSTEEG, H.K.; MALALASEKERA, W. **An introduction to computational fluid dynamics the finite volume method**. 2ed. Harlow: Pearson Education Limited, 2007.

WARMING, R. F.; BEAM, R. M. Upwind second order difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. **Journal of Computational Physics**. v. 14, p. 1241-1249, 1976.

YEE, H. C. Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their application. **Journal of Computational Physics**. v. 68, p. 151-179, 1987.

ZALESAK, S. T. Fully multidimensional flux corrected transport algorithms for fluids, **Journal of Computational Physics**. v. 31, p. 335-362, 1979.

ZHU, J. et al. Runge-Kutta discontinuous Galerkin method using WENO limiters II: Unstructured meshes. **Journal of Computational Physics**. v. 227, p. 4330-4353, 2008.

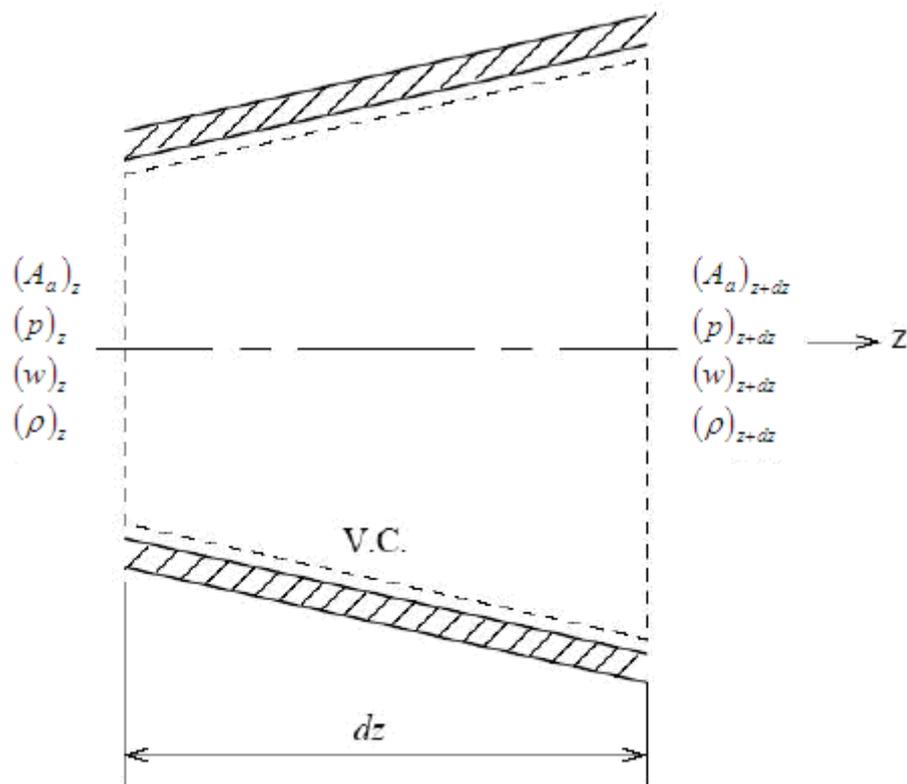
ZHU, J. et al. RKDG methods with WENO type limiters and conservative interfacial procedure for one-dimensional compressive multi-medium flow simulations. **Applied Numerical Mathematics**. v. 61, p. 554-580, 2011.

APÊNDICE A – Dedução das equações governantes do escoamento

A dedução das equações governantes do escoamento para as hipóteses apresentadas no Capítulo 3 foram desenvolvidas por ALEGRE, 1993.

O volume de controle diferencial admitido para a dedução da equação de balanço de massa é apresentado na Figura 3.1, onde A é a área do duto, P é a pressão, w é a velocidade e ρ é a massa específica.

Figura 3.1: Volume de controle diferencial do duto



Fonte: ALEGRE (1993)

Na equação geral da conservação de massa, a taxa na qual a massa é acumulada no volume de controle é igual ao fluxo líquido de massa para dentro da superfície de controle.

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} \rho dV + \int_{SC} \rho w dA_a \quad (A.1)$$

Como o diferencial do volume pode ser escrito como a área multiplicada pelo diferencial espacial, integrando no volume de controle e na superfície de controle tem-se:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t}(\rho A_a dz) + [(\rho w A_a)_{z+dz} - (\rho w A_a)_z] \quad (\text{A.2})$$

Aplicando a expansão em série de Taylor e desprezando-se os termos de ordem igual e superior a dois, obtém-se:

$$(\rho w A_a)_{z+dz} = (\rho w A_a)_z + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w A_a)dz \quad (\text{A.3})$$

Substituindo a expansão em série de Taylor na Equação A.2, chega-se à:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho A_a dz) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w A_a)dz = 0 \quad (\text{A.4})$$

Expandindo-se as derivadas, sendo $A dz$ constante no tempo, e rearranjando a equação, pode-se escrever:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) = -\frac{\rho w}{A_a} \frac{dA_a}{dz} \quad (\text{A.5})$$

A equação da quantidade de movimento indica que a soma da força resultante com o fluxo líquido de quantidade de movimento para o interior da superfície de controle resulta na taxa de variação da quantidade de movimento dentro do volume de controle.

$$F_{Bz} + F_{Sz} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{VC} w \rho dV + \int_{SC} w \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}_a \quad (\text{A.6})$$

Sendo a força atuante somente de superfície, então $F_{Sz} = f_a$. Integrando no volume de controle e na superfície de controle e substituindo o diferencial do volume pela área multiplicada pelo diferencial espacial, tem-se:

$$f_a = \frac{\partial}{\partial t}(\rho w A_a dz) + [(\rho w^2 A_a)_{z+dz} - (\rho w^2 A_a)_z] \quad (\text{A.7})$$

Utilizando a expansão em série de Taylor e desprezando-se os termos de ordem igual e superior a dois, obtém-se:

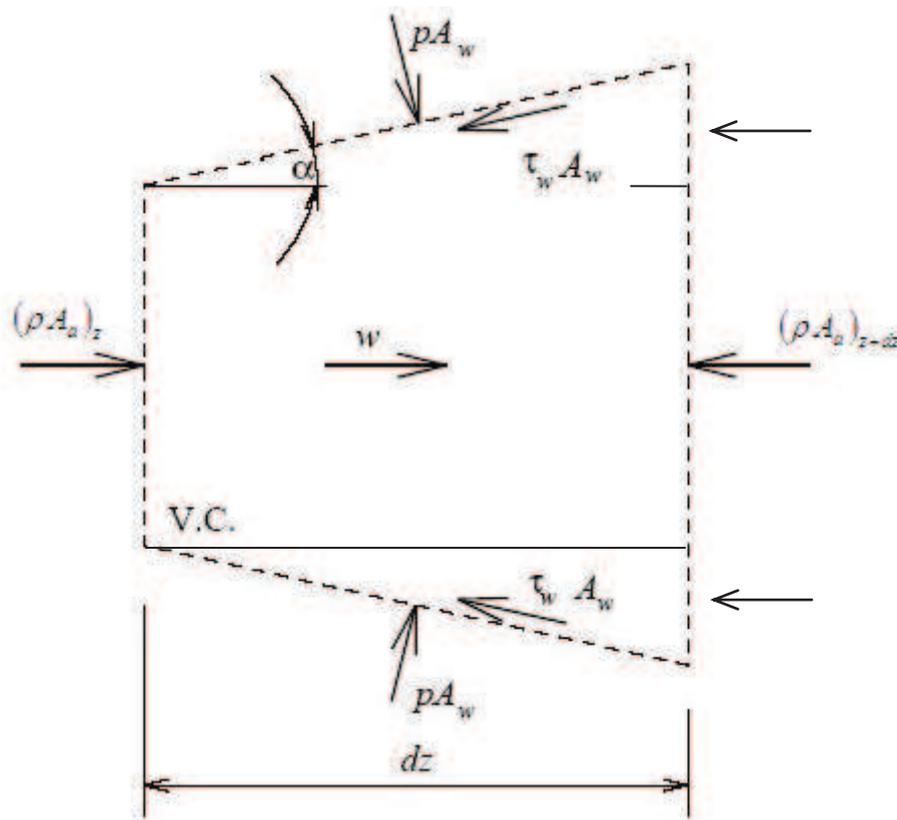
$$(\rho w^2 A_a)_{z+dz} = (\rho w^2 A_a)_z + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2 A_a) dz \quad (\text{A.8})$$

Substituindo na Equação A.7 a expansão em série de Taylor:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w A_a dz) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2 A_a) dz = f_a \quad (\text{A.9})$$

A Figura 3.2 apresenta as forças atuantes no volume de controle, as quais são a tensão cisalhante na parede do duto, τ_w , e a pressão, P .

Figura 3.2: Forças que atuam na superfície de controle



Fonte: ALEGRE (1993)

Como as forças cisalhantes e de pressão atuam na área correspondente à superfície lateral do duto, A_w , e suas componentes radiais são compensadas por simetria, a força, f_a , é então:

$$f_a = (P A_a)_z - (P A_a)_{z+dz} + P A_w \sin \alpha - \tau_w A_w \cos \alpha \quad (\text{A.10})$$

Para indicar que a força cisalhante tem sentido contrário à velocidade do escoamento, introduziu-se o termo $\frac{|w|}{w}$.

$$f_a = (P A_a)_z - (P A_a)_{z+dz} + P A_w \sin \alpha - \frac{|w|}{w} \tau_w A_w \cos \alpha \quad (\text{A.11})$$

Expandindo a parcela da pressão em série de Taylor desconsiderando-se os termos iguais e superiores a segunda ordem, tem-se:

$$(P A_a)_{z+dz} = (P A_a)_z + \frac{\partial}{\partial z} (P A_a) dz \quad (\text{A.12})$$

Substituindo a expansão de Taylor na Equação A.11, obtém-se:

$$f_a = -\frac{\partial}{\partial z} (P A_a) + P A_w \sin \alpha - \frac{|w|}{w} \tau_w A_w \cos \alpha \quad (\text{A.13})$$

Como a projeção da área lateral, A_w , no plano perpendicular ao sentido de escoamento é descrita pela expressão $A_w \cdot \sin \alpha$, e é igual à diferencial de área, dA_a , se multiplicar e dividir por dz resulta em:

$$A_w \sin \alpha = \frac{dA_a}{dz} dz \quad (\text{A.14})$$

Sabendo-se que:

$$A_w \cos \alpha = \pi D_d dz \quad (\text{A.15})$$

onde D_d é o diâmetro do duto, substituindo as duas últimas expressões na Equação A.13, chega-se à:

$$f_a = -A_a \frac{\partial P}{\partial z} dz - \frac{|w|}{w} \tau_w \pi D_d dz \quad (\text{A.16})$$

Substituindo, ainda, a expressão das forças na Equação A.9 da quantidade de movimento e dividindo tudo por $A_a dz$, a expressão resultante é:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{1}{A_a} \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2 A_a) + \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{|w|}{w} \tau_w \pi \frac{D_d}{A_a} = 0 \quad (\text{A.17})$$

Expandindo-se as derivadas e agrupando-se os termos semelhantes:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w^2 + P) = -\frac{\rho w^2}{A_a} \frac{dA_a}{dz} - \frac{|w|}{w} \tau_w \pi \frac{D_d}{A_a} \quad (\text{A.18})$$

Sendo a parcela $\pi \frac{D_d}{A}$ igual à $\frac{4}{D_d}$ e fazendo:

$$F_a = f_{atrFanning} \frac{|w|}{w} \frac{4}{D_d} \frac{w^2}{2} \quad (\text{A.19})$$

na qual $f_{atrFanning}$ é:

$$f_{atrFanning} = \frac{\tau_w}{\rho \frac{w^2}{2}} \quad (\text{A.20})$$

O parâmetro f_{atr} é o fator de atrito de Fanning, cujo valor é equivalente a um quarto do fator de atrito de Darcy. Esse, por sua vez, é função apenas do número de Reynolds para escoamentos laminares, porém, para escoamentos turbulentos ele se torna função do número de Reynolds e da rugosidade relativa. Para a obtenção do seu valor em escoamentos

turbulento em dutos de seção constante, tendo-se o número de Reynolds e a rugosidade relativa, pode-se utilizar o Diagrama de Moody ou a Equação de Colebrook, Equação A.21.

$$\frac{1}{f_{atrDarcy}^{0,5}} = -2 \log \left(\frac{e/D}{3,7} + \frac{2,51}{\text{Re } f_{atrDarcy}^{0,5}} \right) \quad (\text{A.21})$$

A equação de Colebrook é, no entanto, transcendente em $f_{atrDarcy}$, o que torna impossível isolar $f_{atrDarcy}$, sendo necessário resolvê-la por iterações ou através de algum aplicativo matemático.

Substituindo a Equação A.19 na Equação A.18, a quantidade de movimento pode ser finalmente escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho w) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w^2 + P) = -\frac{\rho w^2}{A_a} \frac{dA_a}{dz} - \rho F_a \quad (\text{A.22})$$

A equação do balanço de energia provém da primeira lei da Termodinâmica, na qual a taxa de transferência de calor para dentro do volume de controle, subtraída a taxa de trabalho produzido na superfície de controle e somado o fluxo líquido de entalpia de estagnação representa a taxa de variação da energia dentro do volume de controle, Equação A.23.

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\delta Q}{\delta t} - \frac{\delta W}{\delta t} + \sum \dot{m}_e (h_e + g z_e) - \sum \dot{m}_s (h_s + g z_s) \quad (\text{A.23})$$

Onde as entalpias de entrada e saída são entalpias de estagnação, ou seja, é a soma da entalpia específica com a energia cinética do fluido.

Devido a uma variação pequena ou nula de altura, despreza-se o termo de energia potencial gravitacional.

Sendo a vazão mássica de entrada:

$$\dot{m}_e = \dot{m}_z = (\rho w A_a)_z \quad (\text{A.24})$$

Aplicando a expansão em série de Taylor, sem considerar os termos iguais e superiores à segunda ordem, a vazão mássica de saída pode ser escrita como:

$$\dot{m}_s = \dot{m}_{z+dz} = (\rho w A_a)_z + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w A_a) dz \quad (\text{A.25})$$

Como $m = \rho A_a dz$ e a energia dentro do volume de controle é a energia interna mais a energia cinética, tem-se:

$$E = \rho A_a dz \left(u + \frac{w^2}{2} \right) \quad (\text{A.26})$$

A taxa de transferência de calor por unidade de massa, \dot{q} , é expressa por meio da seguinte equação:

$$\frac{\delta Q}{\delta t} = \dot{q} \rho A_a dz \quad (\text{A.27})$$

Sendo a entalpia específica, uma função da energia interna, da pressão e da massa específica, a entalpia de estagnação de entrada fica:

$$h_e = h_z = \left(u + \frac{w^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right)_z \quad (\text{A.28})$$

Utilizando a expansão em série de Taylor desconsiderando os termos de ordem igual e superior a dois, obtém-se para a entalpia de estagnação de saída:

$$h_s = h_{z+dz} = \left(u + \frac{w^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right)_z + \frac{\partial}{\partial z} \left(u + \frac{w^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) dz \quad (\text{A.29})$$

Substituindo as seis últimas expressões na Equação A.23, simplificando e agrupando as derivadas, chega-se para o balanço de energia em:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho A dz \left(u + \frac{w^2}{2} \right) \right] = \dot{q} \rho A_a dz - \frac{\partial}{\partial z} \left[(\rho w A_a) \left(u + \frac{w^2}{2} + \frac{P}{\rho} \right) \right] dz \quad (\text{A.30})$$

Para um gás ideal a energia interna só depende da temperatura, ou seja:

$$c_v = \frac{du}{dT} \quad (\text{A.31})$$

Multiplicando ambos os lados da Equação A.31 por dT e integrando a partir de um valor de referência, tem-se:

$$u - u_{ref} = c_v (T - T_{ref}) \quad (\text{A.32})$$

Para um gás ideal $R = c_p - c_v$, onde R é a constante particular do gás. Como os calores específicos são constantes, sua razão também o é:

$$k = \frac{c_p}{c_v} \quad (\text{A.33})$$

Com isso c_v pode ser escrito como:

$$c_v = \frac{R}{(k-1)} \quad (\text{A.34})$$

Substituindo a Equação A.34 na A.32, a energia interna específica fica:

$$u = \frac{RT}{k-1} \quad (\text{A.35})$$

Pela equação dos gases ideais e pela Equação A.34, a variação temporal de u pode ser escrita como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{k-1} \right) \quad (\text{A.36})$$

Substituindo as Equações A.35 e A.36 na Equação A.30, expandindo as derivadas, dividindo todos os termos por $A_a dz$ e sabendo-se que $RT = \frac{P}{\rho}$, obtém-se para o balanço de energia:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{P}{k-1} + \frac{\rho w^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left[w \left(\frac{kP}{k-1} + \frac{\rho w^2}{2} \right) \right] = \rho \dot{q} - \frac{w}{A_a} \left(\frac{kP}{k-1} + \frac{\rho w^2}{2} \right) \frac{dA_a}{dz} \quad (\text{A.37})$$

Para calcular a transferência de calor em escoamentos internos deve-se determinar se ele é laminar ou turbulento. No caso de dutos de admissão e exaustão de motores, o escoamento não é estacionário, ou seja, ora é laminar, ora é turbulento, portanto a transferência de calor entre o fluido e as paredes do duto é decorrência da convecção que resulta desse fenômeno. Para a convecção no duto, a taxa de transferência de calor por unidade de massa (\dot{q}) se relaciona com o fluxo de calor (q'') por:

$$\dot{q} = \frac{4}{\rho D_d} q'' \quad (\text{A.38})$$

A equação para o fluxo de calor é, por sua vez, dada por:

$$q'' = h_{conv} (T_w - T) \quad (\text{A.39})$$

onde T_w é a temperatura local da parede do duto e T é a temperatura local do fluido.

Admitindo-se a hipótese de um escoamento quase estacionário e completamente turbulento, segundo a analogia de Reynolds:

$$St = \frac{h_{conv}}{\rho w c_p} \quad (\text{A.40})$$

$$St = \frac{Nu}{Re Pr} \quad (\text{A.41})$$

onde St é o número de Stanton, Nu o número de Nusselt, Re o número de Reynolds e Pr o número de Prandtl.

Segundo a analogia de Reynolds modificada:

$$\frac{f_{atrFanning}}{2} = St Pr^{2/3} \quad (A.42)$$

Isolando St na Equação A.42 e a igualando à Equação A.41, tem-se:

$$Nu = \frac{f_{atrFanning}}{2} Re Pr^{1/3} \quad (A.43)$$

Agora, igualando as Equações A.40 e A.41, chega-se à:

$$\frac{h_{conv}}{\rho w c_p} = \frac{Nu}{Pr Re} \quad (A.44)$$

Substituindo Nu na equação anterior pela expressão da Equação A.43 e como

$c_p = \frac{kR}{k-1}$ de acordo com as Equações A.33 e A.34, h_{conv} pode ser escrito como:

$$h_{conv} = \frac{f_{atrFanning}}{2} Pr^{-2/3} \rho w \frac{kR}{k-1} \quad (A.45)$$

Como para o ar o valor médio de Pr é de 0,7, substituindo esse valor na Equação A.45 e substituindo-a na Equação A.38, a taxa de transferência de calor por unidade de massa é dada por (OCH, 2009):

$$\dot{q} = 2,537 f_{atrFanning} \frac{kR}{k-1} \frac{w}{D_d} (T_w - T) \quad (A.46)$$