

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ  
ESCOLA POLITÉCNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS

RAFAEL RODRIGUES GUIMARÃES WOLLMANN

**UMA ABORDAGEM DE DECOMPOSIÇÃO PARA O MODELO MATEMÁTICO DO  
PLANO MESTRE DE PRODUÇÃO QUE UTILIZA O CONCEITO DE *CLEARING  
FUNCTION* PARA ESTIMAR CAPACIDADE DISPONÍVEL DE UTILIZAÇÃO DE  
RECURSOS**

CURITIBA

2012

RAFAEL RODRIGUES GUIMARÃES WOLLMANN

**UMA ABORDAGEM DE DECOMPOSIÇÃO PARA O MODELO MATEMÁTICO DO  
PLANO MESTRE DE PRODUÇÃO QUE UTILIZA O CONCEITO DE *CLEARING  
FUNCTION* PARA ESTIMAR CAPACIDADE DISPONÍVEL DE UTILIZAÇÃO DE  
RECURSOS**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas, da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre.

Área de concentração: Concepção, Logística e Gestão de Sistemas Produtivos

Orientador: Prof. Dr. Raimundo José Borges de Sampaio.

CURITIBA

2012

## RESUMO

As formulações de programação matemática que abordam problemas de planejamento de produção tem sido propostas desde 1950, e desde então apresentam uma constante evolução. O modelo matemático do problema de planejamento de produção de grande porte, por conter muitas variáveis e muitas restrições funcionais, está, na prática, fora de alcance dos modelos de programação linear inteira no que diz respeito à possibilidade de obtenção da solução ótima em tempo computacional razoável. Por este motivo, a abordagem apresentada neste trabalho tem foco na decomposição do modelo matemático de planejamento de produção para reduzir o tempo computacional e o espaço de armazenamento. O modelo matemático apresentado incorpora a restrição de capacidade nominal de produção, neste caso, dada pela *Clearing Function*, em suas restrições de modo a torná-lo mais realista, porém, tal restrição quebra a linearidade do modelo transformando-o em um modelo convexo. Por este motivo, são apresentadas duas maneiras distintas de resolver o problema, a primeira utilizando programação convexa e a segunda, linearizando o modelo convexo, por programação linear. Além da inserção da restrição de capacidade, foi atribuída uma penalidade nos subproblemas de modo a balancear a produção em relação à capacidade nominal de produção instalada. Além disso, com a inserção da *Clearing Function*, tentou-se obter informações sobre a vantagem de ampliar a capacidade em algum período do horizonte de planejamento, permitindo precificar a capacidade mesmo antes dela atingir 100% de utilização.

**Palavras-chave:** *Clearing Function*. Planejamento de Produção. Decomposição. Penalidade.

## ABSTRACT

The mathematical programming formulations that address production planning problems have been proposed since 1950, and since then have a constant evolution. The mathematical production planning problem contains many functional constraints and it is in practice out of range of the integer linear programming models with regard to the possibility of obtaining the optimal solution in reasonable computational time. For this reason the approach presented in this paper focuses on the decomposition of the mathematical model of production planning to reduce the computational time and storage. The mathematical model incorporates the nominal capacity constraint, in this case, given by the Clearing Function at their restrictions in order to make it more realistic, however, such restriction break the linearity of the model by turning it into a convex model. For this reason, we present two different ways to solve the problem, first using convex programming, and then the second one, linearizing the convex model, using linear programming. Besides the inclusion of capacity constraint, a penalty was awarded the subproblems in order to balance the production related to a nominal production capacity installed. Moreover, with the insertion of Clearing Function, tried to obtain information about the advantage of expanding capacity in some period of the planning horizon, allowing the ability to price even before it reaches 100% utilization.

**Keywords:** Clearing Function. Production Planning. Decomposition. Penalty.

“O único lugar aonde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.”

Albert Einstein

Dedico este trabalho aos meus pais, por todo amor, dedicação e paciência para comigo, por serem fundamentais em minha constante evolução, e que este sirva de incentivo e motivação para minha irmã caçula, Renata Rodrigues Guimarães Wollmann, buscar e superar desafios.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço, com sinceridade e muito reconhecimento a todos que de alguma forma participaram para a concretização deste trabalho, em particular sou grato

Primeiramente a Deus, por me permitir, dentre outras tantas, mais uma vitória.

Ao meu orientador, Prof<sup>o</sup> Dr. Raimundo José Borges de Sampaio, sempre disposto a transmitir seu rico conhecimento com entusiasmo e seriedade, de maneira a contribuir fortemente para a evolução científica da Engenharia de Produção. Grato pela confiança, estímulo e tempo despendido para me orientar.

Aos funcionários e membros do PPGEPS – PUCPR, pelos auxílios e contribuições.

Agradeço aos membros da banca examinadora que, dotada de vasta experiência e conhecimentos científicos, enriqueceram este trabalho com suas valiosas contribuições.

À CAPES pela concessão da bolsa parcial tipo II, permitindo-me desenvolver no meio científico e aplicar as metodologias consolidadas no meio industrial.

Aos meus pais, Dewey Moreto Wollmann e Arlene Maria Rodrigues Guimarães Wollmann, pelo carinho, apoio, incentivo e condição de estudo, pois sem este não chegaria ao Mestrado. Grato pelos ensinamentos sempre transmitidos por exemplos de união, garra, fé e honestidade.

Aos colegas do PPGEPS – PUCPR que tornaram os árduos momentos de estudos mais agradáveis e descontraídos.

Finalmente, aos amigos e colegas que cativei ao longo da minha caminhada. Grato pelos momentos de companheirismo, apoio e distração quando necessário.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>9</b>
1.1	CONTEXTUALIZAÇÃO DO TRABALHO	9
1.2	TEMA E QUESTÃO DE PESQUISA	12
1.3	OBJETIVO	12
1.4	JUSTIFICATIVA	12
1.5	DEFINIÇÃO DA ABORDAGEM METODOLÓGICA	13
1.6	ESTRUTURA DO TRABALHO	14
<b>2</b>	<b>ARTIGOS SUBMETIDOS</b>	<b>16</b>
2.1	ARTIGO 1	16
2.2	ARTIGO 2	27
2.3	ARTIGO 3	38
<b>3</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>	<b>52</b>
3.1	CONCLUSÕES PARCIAIS	52
3.2	CONCLUSÃO FINAL	55
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>57</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO TRABALHO

As formulações de programação matemática que abordam problemas de planejamento de produção têm sido propostas desde 1950. Os problema de planejamento da produção envolvem essencialmente o suprimento da demanda pela produção. Isso significa avaliar os grupos de recursos disponíveis para a produção e alocá-los, da melhor maneira, de acordo com sua respectiva capacidade de produção, considerando os diferentes tipos de produto e suas respectivas matérias-primas (MISSBAUER; UZSOY, 2010).

A utilização da otimização para modelos de planejamento de produção teve origem no trabalho proposto por Modigliani e Hohn (1955), embora suas raízes remetam aos modelos desenvolvidos pelos economistas, Leontief e Koopmans em Koopmans *et al.* (1951), onde foi tratada a questão dos custos de produção *versus* o custo de manter estoques, considerando os custos de produção de maneira convexa e os custos de manter estoque de maneira linear. Os primeiros trabalhos na área de sequenciamento e programação da produção surgiram no mesmo período, em Jackson (1955) com o problema de sequenciamento para apenas uma máquina e em Manne (1960) com o problema de programação *jobshop* (MISSBAUER; UZSOY, 2010). Como o presente trabalho se refere ao planejamento da produção, o foco será direcionado a tal assunto.

Em meados dos anos 50 começou a ser idealizada a aplicação de Programação Linear (PL) quase que diretamente aos problemas de planejamento de produção. Em geral, os problemas de Modigliani e Hohn (1955) e Holt (1956) poderiam ser modelados de maneira linear, sendo estes problemas de planejamento de produção divididos em períodos, cada um associado a uma série de variáveis de decisão que refletem as decisões tomadas naquele período (MISSBAUER; UZSOY, 2010).

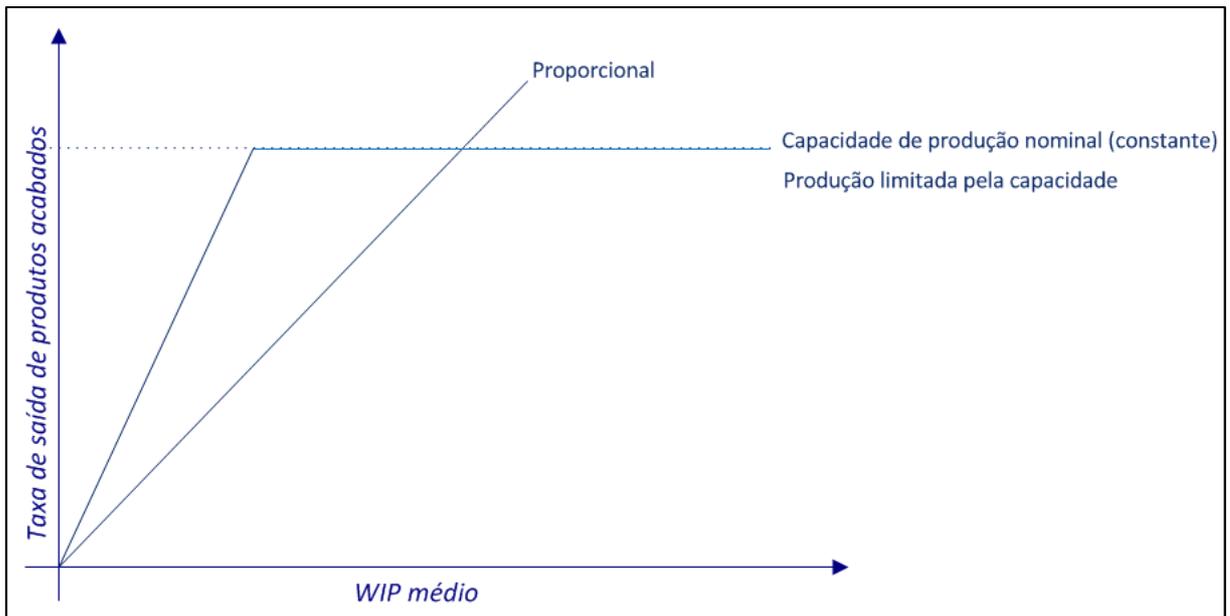
A PL é uma ferramenta amplamente utilizada para resolver os problemas de planejamento de produção, seja devido à sua simplicidade, seja porque as variáveis duais associadas à PL fornecem uma interpretação econômica direta para os propósitos de precificação de capacidade. No entanto, o modelo clássico de PL apresenta uma série de inconvenientes na medida em que suas recomendações são incompatíveis com o comportamento das filas observadas nas instalações de ambientes de produção. Um desses

inconvenientes é que as variáveis duais associadas com as restrições de capacidade somente assumem valores diferentes de zero quando os recursos são totalmente utilizados, contradizendo os resultados teóricos da teoria das filas e a experiência prática do chão de fábrica (HOPP *et al.*, 2001). Outro inconveniente grave está relacionado ao *lead time*. A maioria dos modelos de PL assume que um recurso pode manter um *lead time* constante, independentemente do carregamento do sistema, novamente contradizendo os resultados básicos da teoria das filas, que asseguram que esse parâmetro varia não linearmente com o carregamento do sistema (ASMUNDSSON *et al.*, 2009).

A experiência prática mostra, e a teoria das filas confirma que o desempenho dos sistemas de produção é afetado pelo carregamento do sistema relacionado com sua capacidade, em particular o *lead time*, isto é, o tempo médio entre a liberação para a produção e sua conclusão, que aumenta de maneira não linear com o aumento da utilização dos recursos (HOPP *et al.*, 2001). Assim, os modelos determinísticos para planejamento de produção sofrem de um problema que, para satisfazer a demanda com a oferta, eles precisam considerar os *lead times* para planejar as liberações, mas ao fazê-lo, eles determinam os níveis de utilização dos recursos que, por sua vez, determinam os *lead times* de produção. Uma série de abordagens iterativas para lidar com essa circularidade têm sido propostas em Asmundsson *et al.* (2009). Trata-se de fixar os *lead times* para obter um plano de liberação e, em seguida, simulando o plano de liberação obter um novo *lead time* de produção, e assim sucessivamente. Estas estimativas são então utilizadas para gerar novos planos de liberação, até que haja convergência do processo. No entanto, a convergência destas abordagens não está bem compreendida até onde se observa na literatura pertinente. Nesse trabalho esse problema de circularidade será enfrentado por meio da introdução do conceito de *Clearing Function* (CF), introduzida inicialmente por Graves (1986), Karmarkar (1989), e Srinivassan *et al.* (1988) e, mais recentemente estudada por Asmundsson *et al.* (2009), Kefeli *et al.* (2010), Irdem *et al.* (2010), e Uzsoy e Sampaio (2010), apenas para citar alguns trabalhos mais recentes. Uma revisão detalhada sobre o estado da arte da utilização de CFs pode ser encontrada em Missbauer e Uzsoy (2010).

Dentre os modelos mais simples de planejamento de produção, existem os que consideram o *lead time* constante (saídas de produto do sistema de maneira proporcional), desconsiderando a restrição de capacidade e os que consideram o *lead time* constante, da mesma maneira que o anterior, mas considerando a limitação pela capacidade nominal do equipamento, conforme representado na Figura 1.

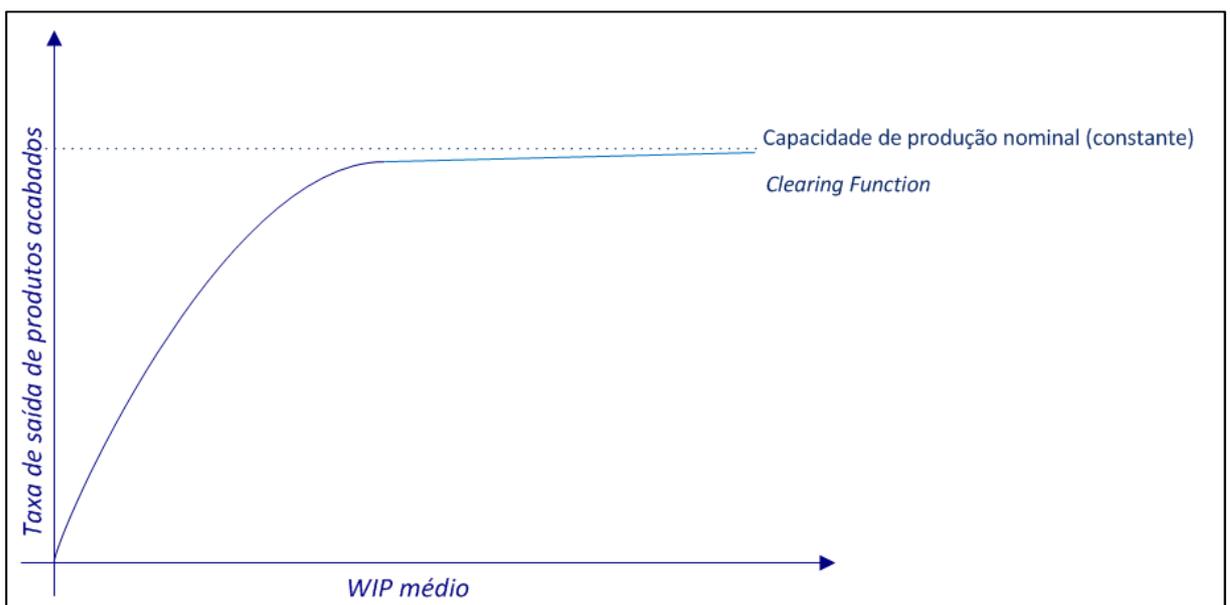
Figura 1 – Modelos simples de planejamento de produção.



Fonte: Adaptado de Karmakar (1989).

A CF, apresentada na Figura 2, é uma evolução das curvas apresentadas na Figura 1. A CF é uma função côncava crescente e limitada, que expressa a produção em cada período de tempo – as saídas do sistema, *outputs* – em função do nível médio de WIP (*Work In Process*) no sistema durante esse período.

Figura 2 – *Clearing Function*.



Fonte: Adaptado de Karmakar (1989).

Em outras palavras, no início do período quanto mais ordens de produção são liberadas – *releases* – mais produtos saem do sistema, com um WIP médio pequeno, tendo em vista que não há fila na entrada do centro de trabalho. Ao longo do tempo, o sistema atinge um determinado estado de carregamento, considerando sua capacidade nominal de produção e o *lead time*, gerando uma quantidade de WIP médio maior, tendo em vista que existirão ordens de produção aguardando a entrada no centro de trabalho para o processamento.

A curva que melhor representa a CF está demonstrada na Figura 1 e é proveniente de dados coletados no chão de fábrica e por meio de simulações. Os dados gerados são inseridos no gráfico e os pontos representados são ajustados por regressão, originando a curva característica da CF. Assim, a introdução da CF no modelo de planejamento da produção embora modifique a estrutura linear que gostaríamos de preservar, favorece a aplicação de métodos de decomposição, uma vez que está relacionada a cada período do horizonte de planejamento.

## 1.2 TEMA E QUESTÃO DE PESQUISA

Nesse trabalho são propostos dois esquemas de decomposição para resolver o problema de planejamento de produção para problemas de grande porte. Um por meio de um modelo de programação convexa e outro por meio de um modelo de programação linear.

## 1.3 OBJETIVO

O objetivo desse trabalho é resolver o problema de planejamento de produção com restrição de capacidade, de maneira exata, utilizando decomposição.

## 1.4 JUSTIFICATIVA

O modelo clássico de PL para o modelo de planejamento de produção é, claramente, um problema de grande porte, que envolve um número elevado de variáveis de decisão e de restrições funcionais. Sob a ótica da programação inteira, problemas com grandes dimensões

estão fora de questão no que diz respeito à possibilidade de obtenção de solução ótima em tempo computacional razoável, conforme demonstrado em Camargo e Sampaio (2010).

Além da obtenção de um tempo computacional menor, o modelo em questão fornece uma interpretação econômica quando avaliadas as variáveis duais, que são utilizadas para propósitos de precificação de capacidade.

Sendo assim, a redução do tempo computacional e a interpretação das variáveis duais para precificar capacidade, tornam a abordagem aqui introduzida da maior relevância para a Engenharia de Produção, pois torna possível estimar, em um tempo computacional razoável, os preços duais das capacidades, fato que dá condições ao tomador de decisão optar, ou não, pela ampliação da capacidade de produção das instalações industriais.

## 1.5 DEFINIÇÃO DA ABORDAGEM METODOLÓGICA

Inicialmente, a fim de resolver o problema de planejamento de produção de grande porte, foi considerado o modelo matemático sobre decomposição abordado por Chu (1991). Este modelo apresenta números pertencentes aos reais em suas restrições funcionais, além de relaxar a restrição de capacidade nominal de produção do sistema.

Tendo em vista o modelo de decomposição proposto por Chu (1991), Sampaio *et al.* (2009) propôs um modelo matemático para o planejamento de produção, utilizando decomposição, desta vez considerando as restrições funcionais como números inteiros, também relaxando a restrição de capacidade.

Sob as considerações da teoria das filas e as experiências práticas no chão de fábrica foi acrescido ao modelo de Sampaio *et al.* (2009), a questão do *lead time*, para considerar a variabilidade existente em um sistema de produção. Para considerar o *lead time*, foi necessário acoplar a CF ao modelo clássico.

Como a CF é uma função côncava, o modelo clássico deixa de ser linear para ser tratado como um modelo convexo, podendo ser resolvido de maneira convexa ou linear, por meio de aproximação por retas afins.

Os resultados numéricos obtidos por meio desta abordagem metodológica estão dispostos em tabelas nos respectivos artigos que são apresentados ao longo da seção 2.

## 1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está organizado em três seções, como segue:

- a) Seção 1 – Apresenta a introdução ao tema, onde constam a contextualização do trabalho, o tema e questão de pesquisa, o objetivo, a justificativa, definição da abordagem metodológica e a estrutura do trabalho.
- b) Seção 2 – Apresenta três artigos propostos, elaborados e selecionados de acordo com a finalidade deste trabalho, conforme Quadro 1. Embora os artigos apresentados tenham sido aprovados e constam nos anais dos congressos, para este trabalho foram realizadas algumas modificações com a finalidade de aperfeiçoar o estudo, já que se trata de um trabalho *a posteriori*.
- c) Seção 3 – Apresenta as conclusões parciais do trabalho, no que se refere aos artigos e a conclusão final do trabalho, no que se refere à dissertação.

Quadro 1 – Estrutura das etapas da pesquisa.

ESTUDOS	OBJETIVOS	TEMAS DE PESQUISA	JUSTIFICATIVAS
<b>Artigo 1</b>	- Resolver o problema de planejamento de produção, acoplando a restrição de capacidade nominal de produção, utilizando DECOMPOSIÇÃO.	- Avaliar o comportamento do modelo matemático de planejamento de produção, com restrição de capacidade, em relação à decomposição convexa e à decomposição linear.	- Reduzir o tempo computacional e o <i>storage</i> . - Disponibilizar duas maneiras distintas para decompor o problema de planejamento de produção.
<b>Artigo 2</b>	- Resolver o problema de planejamento de produção, acoplando a restrição de capacidade nominal de produção, utilizando DECOMPOSIÇÃO.	- Avaliar o comportamento das variáveis duais associadas às restrições de capacidade, presentes no modelo matemático de planejamento de produção.	- Reduzir o tempo computacional e o <i>storage</i> . - Avaliar a ampliação de capacidade de produção antes que os recursos estejam completamente tomados.

<b>Artigo 3</b>	- Resolver o problema de planejamento de produção, acoplado a restrição de capacidade nominal de produção, utilizando DECOMPOSIÇÃO.	- Avaliar o comportamento da penalidade nos subproblemas do modelo matemático de planejamento de produção, ao longo do horizonte de planejamento.	- Reduzir o tempo computacional e o <i>storage</i> .  - Exemplificar como age a penalidade nos subproblemas.
-----------------	---	---	--

Fonte: Autor (2012).

Embora os três artigos apresentados tenham um objetivo em comum, cada artigo apresentado nesta dissertação contempla o desenvolvimento de um estudo relacionado ao tema da pesquisa, a considerar:

- a) Artigo 1 – Apresenta o modelo de decomposição para os problemas de planejamento de produção incluindo a restrição de capacidade, pela inserção da CF, e o comportamento do modelo quando decomposto por meio de programação convexa e quando decomposto por meio de programação linear. A intenção de apresentar a decomposição para o problema de planejamento de produção é reduzir o tempo – custo – computacional e o espaço de armazenamento – *storage*. Além disso, são apresentadas duas maneiras de resolver o problema de modo a facilitar àqueles que possuem software para resolver de maneira convexa e àqueles que possuem software para resolver de maneira linear.
- b) Artigo 2 – O Artigo 2 é um complemento do Artigo 1. Ele também apresenta um modelo de decomposição para os problemas de planejamento de produção que incluem restrição de capacidade, pela inserção da CF, e o comportamento do modelo quando decomposto por meio de programação convexa e quando decomposto por meio de programação linear. O Artigo 2 demonstra e analisa o comportamento das variáveis duais associadas às restrições de capacidade. Tal avaliação tem relevância no que diz respeito à precificação da capacidade, sendo possível avaliar em qual momento o sistema necessita de ampliação de capacidade, mesmo antes de a produção atingir 100% da capacidade.
- c) Artigo 3 – Apresenta, de maneira detalhada, o uso da penalidade nos subproblemas do modelo de planejamento de produção, quando inserida a restrição de capacidade dada pela CF, utilizada no Artigo 1 e Artigo 2. A penalidade tem como objetivo balancear o sistema de modo que não seja priorizada apenas a produção de maior receita.

## **2 ARTIGOS SUBMETIDOS**

### **2.1 ARTIGO 1**

Submetido (XVI ICIEOM) em 25/04/2011

Aprovado (XVI ICIEOM) em 06/07/2011

Data e local do XVI ICIEOM: 04 a 07 de outubro de 2011, Belo Horizonte – MG.

# Using Clearing Function Approach with Decomposition for Production Planning Problems

R. J. B. de Sampaio\*, Reha Uzsoy† & Rafael R. G. Wollmann‡

\*Partially Supported by CAPES EXB:1217-10-0.

†Partially Supported by the National Science Foundation under Grant No. CCM-1029706 and by Intel Corporation.

‡Partially Supported by CAPES.

## Abstract

The idea of using Clearing Functions (CF) to represent the nonlinear dependence between workload and lead time in deterministic Linear Programming (LP) models for production planning, results in an increase in the size of the models to be solved. In this paper we address this problem by means of a decomposition approach similar to that of Sampaio *et al.ii* (2009), which has proven to be quite efficient for classical LP models for production planning, which we extend to take into account the piecewise linear approximation of the CF function.

**Key Words: Clearing Function, Production Planning, Decomposition.**

## 1. Introduction

Linear Programming (LP) is a widely used framework to address the problem of production planning, which has been studied for several decades. However, the classical LP model presents a number of drawbacks in that their recommendations are inconsistent with the queueing behavior observed in most production facilities. One such drawback is that the dual variables associated with capacity constraints will only take nonzero values when the resource is fully utilized, contradicting both theoretical results from queueing theory and practical experience on the shop floor. Another serious drawback is related to lead time. Most LP models assume that a resource can maintain a constant lead time regardless of its workload, again contradicting basic queueing insights. According to Hopp *et al.ii* (2001), practical experience and queueing theory shows that the performance of production systems are affected by the loading of the system related to its capacity, in particular the lead time, i.e., the mean time between the release of work for production and its completion, increase nonlinearly with increasing resources utilization. Thus, deterministic models for production planning suffer from a problem that in order to match demand and supply they need to consider lead times to plan releases, but in doing so they determine levels of resource utilization, which, in turn, determines the realized lead time of production. A number of iterative approaches have been proposed in Assmundsson *et al.ii* (2009) to deal with this circularity. These involve assuming fixed lead times to obtain a release plan, then simulating the release plan to obtain realized lead time estimates. These estimates are then used to generate a new release plan, until the procedure converges. However, the convergence of these approaches is currently not well understood.

In this paper we address the pointed circularity using clearing functions (CF), first introduced by Graves (1986), Karmarkar (1989), and Srinivassan *et al.ii* (1988), and more recently studied by Assmundsson *et al.ii* (2009), Kefeli *et al.ii* (2010), Irdem *et al.ii* (2010), and Uzsoy & Sampaio (2010), just to mention a few. A detailed review of the state of the art in

production planning using CFs is given by Uzsoy & Missbauer (2010). The CF is an increasing bounded concave function that expresses the expected throughput of a capacited resource over a period of time as a function of the average Work In Process (WIP) level in the system over that period. Thus, the introduction of CF in the production planning model appears to destroy its linear structure which we would like to preserve, but favors the application of decomposition approaches, since it is related to each specific planning period.

This paper is organized as follows. In Section 2, we present the model and structure of the problem, and in Section 3 we present a numerical illustration and some conclusions.

## 2. Model and Structure of the Problem

Consider the following product-mix problem: Products are indexed by  $i = 1, 2, \dots, N$ , components by  $k = 1, 2, \dots, K$ , and the discrete periods of the planning horizon by  $j = 1, 2, \dots, T$ . Let  $b_{ki}$  be the number of components  $k$  used to produce one unit of product  $i$ , and let  $h_i$  the standard time required to produce one unit of product  $i$ . Suppose that  $R_j$  is the labor resource (in units of standard time) available for use in period  $j$ , and furthermore, that any remaining resource  $R_j$  from a period  $j$  cannot be carried out to the next period. Denote by  $S_{kj}$  the supply of component  $k$  available for consumption in period  $j$ ,  $D_i$  the demand for product  $i$ , and  $C_{ij}$  the nominal capacity for production of product  $i$  in period  $j$ . Hence, if the revenue from each unit of product  $i$  produced at period  $j$  is  $c_{ij}$ , and the decision variables specifying levels of production for each product  $i$  in each period  $j$  are  $x_{ij}$ , the classical LP model for production planning can be formulated as:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize} \quad \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij} x_{ij} \\
 & \text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj}, \quad \forall k, \forall t, \\
 & \quad \quad \sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq R_j, \quad \forall j, \\
 & \quad \quad x_{ij} \leq C_{ij}, \quad \forall i, \forall j, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^T x_{ij} \leq D_i, \quad \forall i. \\
 & \quad \quad x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j
 \end{aligned} \tag{1}$$

This is a sparse and structured linear problem whose structure is very suitable for decomposition.

### 2.1. Period Based Decomposition of the Model

To discuss decomposition we begin by assuming that the planning horizon will be divided into  $T$  discrete periods. This allows the Jacobians of the constraints to be easily structured in blocks, which allows decomposition and reduces computational complexity by saving matrix decompositions. To illustrate, let us consider a particular instance of problem (1) for a planning horizon  $T = 2$  periods,  $K = 2$  different components, and  $N = 2$  different products. The mathematical model (1) becomes:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize} \quad c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22}; \\
 & \text{s. t.} \quad b_{11}x_{11} + b_{12}x_{21} \leq S_{11};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{21}x_{11} + b_{22}x_{21} &\leq S_{21}; \\
h_1x_{11} + h_2x_{21} &\leq R_1; \\
b_{11}x_{11} + b_{12}x_{21} + b_{11}x_{12} + b_{12}x_{22} &\leq S_{11} + S_{12}; \\
b_{21}x_{11} + b_{22}x_{21} + b_{21}x_{12} + b_{22}x_{22} &\leq S_{21} + S_{22}; \\
h_1x_{12} + h_2x_{22} &\leq R_2; \\
x_{11} &\leq C_{11}; \\
x_{21} &\leq C_{21}; \\
x_{12} &\leq C_{12}; \\
x_{22} &\leq C_{22}; \\
x_{11} &\leq D_1; \\
x_{11} + x_{12} &\leq D_1; \\
x_{21} &\leq D_2; \\
x_{21} + x_{22} &\leq D_2. \\
x_{11} \geq 0; x_{12} \geq 0; x_{21} \geq 0; x_{22} \geq 0;
\end{aligned} \tag{2}$$

A compact matrix representation of this problem can be developed as follows. Define:

- a)  $x^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{Nj})^T, j = 1, 2, \dots, T;$
- b)  $B = (b_{ki}), k = 1, 2, \dots, K, i = 1, 2, \dots, N;$
- c)  $S^{(j)} = (S_{1j}, S_{2j}, \dots, S_{Kj})^T, j = 1, 2, \dots, T;$
- d)  $C^{(j)} = (C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{Nj})^T, j = 1, 2, \dots, T;$
- e)  $D^{(i)} = D_i, i = 1, 2, \dots, N;$
- f)  $R^{(j)} = R_j, j = 1, 2, \dots, T;$
- g)  $c^{(j)} = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{Nj}), j = 1, 2, \dots, T;$
- h)  $I$  identity matrix of size  $N$ .

Then the structure and sparsity of the model (2) becomes apparent:

Maximize  $c^{(1)}x^{(1)} + c^{(2)}x^{(2)}$

$$\begin{aligned}
s. t. \quad Bx^{(1)} &\leq S^{(1)} \\
hx^{(1)} &\leq R^{(1)} \\
Bx^{(1)} + Bx^{(2)} &\leq S^{(1)} + S^{(2)} \\
0x^{(1)} + hx^{(2)} &\leq R^{(2)} \\
Ix^{(1)} &\leq C^{(1)} \\
0x^{(1)} + Ix^{(2)} &\leq C^{(2)} \\
Ix^{(1)} &\leq D^{(1)} \\
Ix^{(1)} + Ix^{(2)} &\leq D^{(2)} \\
x^{(1)} \geq 0; x^{(2)} \geq 0
\end{aligned} \tag{3}$$



classical model, but the resulting nonlinearity can be easily circumvented in the following way: Define the piecewise linear function,

$$\phi(w) = \underset{t}{\text{Minimum}} \{a_t w + b_t\}, \quad (6)$$

where  $a_t$  and  $b_t$  are estimated parameters. Then, following Rockafellar (1970),  $\phi(w)$  can be approximated to any degree of accuracy by  $\phi(w)$  as  $t$  increases, and the resulting LP model becomes,

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij} x_{ij} \\ & \text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\ & \quad \quad \sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq R^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, T \\ & \quad \quad x_{ij} - \phi_i(x_{ij}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T, \\ & \quad \quad \sum_{j=1}^T x_{ij} \leq D_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T. \end{aligned} \quad (7)$$

This LP model approximates model (5), which, in its turn, generalizes model (1) while circumventing its drawbacks related to the dual prices of capacity at low utilization levels and the dependence of lead times on workload.

### 2.3. Coupling Decomposition and CF Approach Model

The general decomposition of problem (4), one period at a time, according to Sampaio *et al.* (2009), is the following: First solve the subproblem,

$$\begin{aligned} & \text{Maximize} \quad c^{(1)} x^{(1)} \\ & \text{s. t.} \quad Bx^{(1)} \leq S^{(1)} \\ & \quad \quad hx^{(1)} \leq R^{(1)} \\ & \quad \quad Ix^{(1)} \leq C^{(1)} \\ & \quad \quad Ix^{(1)} \leq D^{(1)} \\ & \quad \quad x^{(1)} \geq 0, \end{aligned} \quad (8)$$

then, for  $j = 2, \dots, T$  and  $i = 2, \dots, N$ , iteratively, make the assignments

$$\begin{aligned} S^{(j)} & \leftarrow S^{(j)} + (S^{(j-1)} - B\hat{x}^{(j-1)}), \\ D^{(i)} & \leftarrow D^{(i)} + (D^{(i-1)} - \hat{x}^{(j-1)}), \end{aligned} \quad (9)$$

and solve the subproblem,

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize } c^{(j)}x^{(j)} \\
& \text{s. t. } \quad Bx^{(j)} \leq S^{(j)} \\
& \quad \quad hx^{(j)} \leq R^{(j)} \\
& \quad \quad Ix^{(j)} \leq C^{(j)} \\
& \quad \quad Ix^{(j)} \leq D^{(i)} \\
& \quad \quad x^{(j)} \geq 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

The optimal solutions to these subproblems give an optimal solution to problem (1), by Proposition 2, in Sampaio *et al.ii* (2009). Now let us adapt this decomposition to address the CF model (7). First, for simplicity of matrix representation, define a function  $\psi_i : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^i$ , where  $i$  is the number of products and  $\mathbb{T} = \{1, \dots, T\}$  is the set of periods in the planning horizon, as a vector function,

$$\psi_i(t) = \begin{pmatrix} \phi(x_{1t}) \\ \vdots \\ \phi(x_{it}) \end{pmatrix} \tag{11}$$

The model (7) can now be written as,

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize } \sum_{j=1}^T c^{(j)}x^{(j)} \\
& \text{s. t. } \quad Bx^{(1)} \leq S^{(1)} \\
& \quad \quad hx^{(1)} \leq R^{(1)} \\
& \quad \quad Ix^{(1)} \leq \psi_N^{(1)} \\
& \quad \quad Ix^{(1)} \leq D^{(1)} \\
& \quad \quad Bx^{(1)} + Bx^{(2)} \leq S^{(1)} + S^{(2)} \\
& \quad \quad 0x^{(1)} + hx^{(2)} \leq R^{(2)} \\
& \quad \quad 0x^{(1)} + Ix^{(2)} \leq \psi_N^{(2)} \\
& \quad \quad Ix^{(1)} + Ix^{(2)} \leq D^{(2)} \\
& \quad \quad \vdots \\
& \quad \quad Bx^{(1)} + Bx^{(2)} + \dots + Bx^{(T)} \leq \sum_{j=1}^T S^{(j)} \\
& \quad \quad 0x^{(1)} + 0x^{(2)} + \dots + hx^{(T)} \leq R^{(T)} \\
& \quad \quad 0x^{(1)} + 0x^{(2)} + \dots + Ix^{(T)} \leq \psi_N^{(T)} \\
& \quad \quad Ix^{(1)} + Ix^{(2)} + \dots + Ix^{(T)} \leq D^{(N)} \\
& \quad \quad x^{(1)} \geq 0, x^{(2)} \geq 0, \dots, x^{(T)} \geq 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

We claim that the model (12) can be solved to optimality through the following decomposition scheme. First solve the subproblem

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize } c^{(1)}x^{(1)} \\
& \text{s. t. } \quad Bx^{(1)} \quad \leq S^{(1)} \\
& \quad \quad hx^{(1)} \quad \leq R^{(1)} \\
& \quad \quad Ix^{(1)} \quad \leq \psi_N^{(1)} \\
& \quad \quad Ix^{(1)} \quad \leq D^{(1)} \\
& \quad \quad x^{(1)} \geq 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

then, for  $j = 2, \dots, T$  and  $I = 2, \dots, N$ , iteratively, make the assignments

$$\begin{aligned}
S^{(j)} &\leftarrow S^{(j)} + (S^{(j-1)} - B\hat{x}^{(j-1)}), \\
D^{(j)} &\leftarrow D^{(i)} + (D^{(i-1)} - \hat{x}^{(j-1)}),
\end{aligned} \tag{14}$$

and solve the subproblem,

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize } c^{(j)}x^{(j)} \\
& \text{s. t. } \quad Bx^{(j)} \quad \leq S^{(j)} \\
& \quad \quad hx^{(j)} \quad \leq R^{(j)} \\
& \quad \quad Ix^{(j)} \quad \leq \psi_N^{(j)} \\
& \quad \quad Ix^{(j)} \quad \leq D^{(i)} \\
& \quad \quad x^{(j)} \geq 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Theorem (1) below shows that, under very mild assumptions, the optimal solutions from these subproblems generate a sequence of solutions converging to an optimal solution of problem (5), as the approximation of  $\varphi$  by  $\phi$  gets better.

Theorem 1: Suppose problem (5) has an optimal solution, and that  $\varphi(\cdot)$  can be approximated to any degree of accuracy by  $\phi(\cdot)$ , and moreover, that the solution of subproblems are not totally degenerate. Then the sequence generated by the model (13)-(15), as  $t \rightarrow \infty$ , converges to an optimal solution of (5).

This theorem is a trivial consequence from the calculus fundamental theorem.

### 3. Numerical Illustration and Conclusions

The CF approach presented here allows two direct decomposition, one by means of convex subproblems if the user's primary interest is in the solution, price capacity, and there is an appropriate software to address convex problems, and another by means of linear subproblems if one is interested in the solution, in the dual prices of capacity at utilization levels below 100%, using linear programming. Since the computational cost of solving both optimization problems, convex and linear optimization, increases at least polynomially with the number of variables, decomposition saves time in all circumstances, and storage for large scale optimization problems. The challenge, in general, is how to model the problem without coupling constraints to allow easy decomposition. To illustrate both decomposition schemes,

we present a small example for a planning horizon of  $T = 2$  periods,  $K = 2$  different components, and  $N = 2$  different products. The data used for this illustration are given in Table 1 below.

$c_{11}$	$c_{21}$	$c_{12}$	$c_{22}$	$D_1$	$D_2$	$C_{11}$	$C_{21}$	$C_{12}$	$C_{22}$	$S_{11}$	$S_{21}$	$S_{12}$	$S_{22}$
9	15	9	15	128	100	68	110	62	90	300	410	600	820

**Table 1 – Data used for illustration**

The standard times for manufacturing a unit of each product are, respectively,  $h_1 = 3$ , and  $h_2 = 6$ , and the total availability of this resource for each one of the two periods are 580 unit of standard time. The results for convex subproblems are presented in Table 2, and for LP subproblems in Table 3, for four linear segments in the piecewise linear function  $\phi(\cdot)$ , and in Table 4 for eight linear segments in the same piecewise linear function.

Variables	First Period	Second Period	Full Problem
$f^*$	1480.000	749.000	2652.000
$x_{11}$	20.0000	00.0000	67.0000
$x_{21}$	86.6667	00.0000	50.0000
$x_{12}$	00.0000	61.0000	61.0000
$x_{22}$	00.0000	13.3333	50.0000

**Table 2 – Convex Decomposition**

Variables	First Period	Second Period	Full Problem
$f^*$	1422.517	1113.285	2651.735
$x_{11}$	51.1037	00.0000	63.9853
$x_{21}$	64.1722	00.0000	35.8278
$x_{12}$	00.0000	63.9853	63.9853
$x_{22}$	00.0000	35.8278	64.1722

**Table 3 – Linear Decomposition (4 Segments)**

Variables	First Period	Second Period	Full Problem
$f^*$	1480.000	775.9573	2651.915
$x_{11}$	20.0000	00.0000	63.9953
$x_{21}$	86.6667	00.0000	35.3310
$x_{12}$	00.0000	63.9953	63.9953
$x_{22}$	00.0000	13.3333	64.6690

**Table 4 – Linear Decomposition (8 Segments)**

This example clearly shows that decomposition does not work well if the model incorporates nominal constraint capacity. This looks like to be the reason why every author who deal with this problem drop relaxed nominal constraint capacity. However were are able to overcome this drawback introducing a shortage cost for scarcity which ultimately resulted in the following model, where  $k$  is the unit cost of shortage  $F$ ,

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize } \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij} x_{ij} - kF \\
& \text{s. t. } \quad \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\
& \quad \sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq R^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, T, \\
& \quad x_{ij} - \phi_i(x_{ij}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T, \\
& \quad \sum_{j=1}^T x_{ij} \leq D_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T, \\
& \quad D_i - \sum_{j=1}^T x_{ij} = F, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T, \\
& \quad x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T.
\end{aligned} \tag{16}$$

Variables	First Period	Second Period	Full Problem
$f^*$	1189.0000	1463.0000	2652.0000
$x_{11}$	67.0000	00.0000	67.0000
$x_{21}$	39.0000	00.0000	50.0000
$x_{12}$	00.0000	61.0000	61.0000
$x_{22}$	00.0000	61.0000	50.0000

**Table 5 – Convex Decomposition with shortage constraint coupled**

Variables	First Period	Second Period	Full Problem
$f^*$	1110.793	1536.088	2646.881
$x_{11}$	63.9853	00.0000	63.9853
$x_{21}$	35.9853	00.0000	35.7984
$x_{12}$	00.0000	63.9853	63.9853
$x_{22}$	00.0000	64.0147	64.1722

**Table 6 – Linear Decomposition (4 Segments) with shortage constraint coupled**

Variables	First Period	Second Period	Full Problem
$f^*$	1114.323	1536.028	2650.351
$x_{11}$	63.9953	00.0000	63.9953
$x_{21}$	35.9953	00.0000	35.3215
$x_{12}$	00.0000	63.9953	63.9953
$x_{22}$	00.0000	64.0047	64.6691

**Table 7 – Linear Decomposition (8 Segments) with shortage constraint coupled**

This another small illustration shows that when we use the shortage constraint, the model can be solved using decomposition and when the number of linear segments are increased in the piecewise linear approximation of CF, the resulting optimal value gets closer to the value predicted by the CF approach, as stated by Theorem 1. At the same time, it shows that the decomposition of the whole convex problem (CF approach) in convex subproblems is exact. However, the LP approach is far more stable, and even in this small case, the software used here (Student LINGO/WIN32 - <http://www.lindo.com>) has difficulty converging for the first convex subproblem because of numerical instability. Another interesting aspect of the LP approach is that related to obtaining the dual price of capacity at lower levels of utilization, which is easily obtained from the LP models. However, this issue is left for future work since

our focus in this paper is the use of the coupling decomposition with the CF function approach for planning production.

## References

**ASMUNDSSON, J.M.; RARDIN, R.L.; TURKSEVEN, C.H. & UZSOY, R.** *Production Planning with Resources Subject to Congestion*, Published online 20 January 2009 in Wiley Interscience (www.interscience.wiley.com), DOI 10.1002/nav.20335.

**GRAVES, S.C.** *A Tactical Planning Model for a Job Shop*, *Operations Research*, 34, 522–533, 1986.

**HOPP, W.J. & SPEARMAN, M.L.** *Factory Physics: Foundations of Manufacturing Management*, Irwin/McGraw–Hil, Boston, 2001.

**IRDEM, D.F.; KACAR, N.B. & UZSOY, R.** *An Exploratory Analysis of Two Iterative Linear Programming–Simulation Approaches for Production Planning*, *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, Vol. 23, NO. 3, August 2010.

**KARMARKAR, U.S.** *Capacity loading and release planning with work–in–process and lead times*. *Journal of Manufacturing and Operations Management*, 2, 105–123, 1989.

**KEFELI, A.; UZSOY, R.; FATHI, Y. & KAY, M.** *Using a mathematical programming model to examine the marginal price of capacity resources*, Approved in 2011 to appear in *Int. J. Production Economics*.

**KEMPF, K.G.; KESKINOCAK, P. & UZSOY, R.** *Planing Production and Inventories in the Extended Enterprise*, A State of Art Handbook, Volume 1, Springer 2011.

**MISSBAUER, H. & UZSOY, R.**, *Optimization Models for Production Planning*, in *Planning Production and Inventories in the Extended Enterprise Vol.1*, K.G. KEMPF, P. KESKINOCAK & R. UZSOY (eds), Springer, 2010.

**ROCKAFELAR, R.T.** *Convex Analysis*, Academic Press, 1970.

**SAMPAIO, R.J.B.; VIEIRA, G.E. & FAVARETTO, F.** *An Approach of Mathematical Programming to the Master Production Scheduling Problem*, Technical Report 2009, PUCPR-PPGEPS, Brazil.

**SRINIVASSAN, A.; CAREY, M. & MORTON, T. E.** *Resource Pricing and Aggregate Scheduling in Manufacturing Systems*, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA, 1988.

**UZSOY R. & SAMPAIO, R.J.B.** *Unifying inner and outer approach of Clearing Function to deal with Pricing Capacity of Resources at Lows Levels of Utilization*, in preparation.

## 2.2 ARTIGO 2

Submetido (XVIII SIMPEP) em 07/08/2011

Aprovado (XVIII SIMPEP) em 19/09/2011

Data e local do XVIII SIMPEP: 07 a 11 de novembro de 2011, Bauru – SP.

# Acoplando Clearing Function e Decomposição em Problemas de Planejamento de Produção

R. J. B. de Sampaio\*, Reha Uzsoy† & Rafael R. G. Wollmann‡

\*Partially Supported by CAPES EXB:1217-10-0.

†Partially Supported by the National Science Foundation under Grant No. CCM-1029706 and by Intel Corporation.

‡Partially Supported by CAPES.

## Abstract

A idéia de usar *Clearing Functions* (CF) para representar a dependência não linear entre o carregamento de um sistema de produção e o *lead time* em modelos determinísticos de Programação Linear (PL) para planejamento de produção resulta principalmente em duas modificações importantes: primeiro, o modelo torna-se não linear, e segundo, o tamanho do modelo a ser resolvido é aumentado significativamente. Neste trabalho esse problema será abordado por meio de um método de decomposição semelhante ao apresentado em Sampaio *et al.* (2009), que provou ser bastante eficiente para os modelos clássicos de PL para o planejamento de produção, que será estendido para levar em conta os preços duais associados aos níveis de utilização dos recursos.

**Palavras-chave:** *Clearing Function*, Planejamento de Produção, Decomposição.

## 1. Introdução

A Programação Linear (PL) é uma ferramenta amplamente utilizada para resolver problemas de planejamento de produção, que tem sido estudado por várias décadas. No entanto, o modelo clássico de PL apresenta uma série de inconvenientes na medida em que suas recomendações são incompatíveis com o comportamento das filas observadas nos ambientes de produção. Um desses inconvenientes é que as variáveis duais associadas com as restrições de capacidade somente assumem valores diferentes de zero quando os recursos são totalmente utilizados, contradizendo os resultados teóricos da teoria das filas e a experiência prática do chão de fábrica. Outro inconveniente grave está relacionado ao *lead time*. A maioria dos modelos de PL assumem que um recurso pode manter um *lead time* constante, independentemente do carregamento do sistema, novamente contradizendo os resultados básicos da teoria das filas. De acordo com Hopp *et al.* (2001), a experiência prática mostra, e a teoria das filas confirma que o desempenho dos sistemas de produção são afetados pelo carregamento do sistema relacionado com sua capacidade, em particular o *lead time*, isto é, o tempo médio entre a liberação para a produção e sua conclusão, aumentam de maneira não linear com o aumento da utilização dos recursos. Assim, os modelos determinísticos para planejamento de produção sofrem de um problema que, para satisfazer a demanda com a oferta eles precisam considerar o *lead times* para planejar as liberações, mas ao fazê-lo, eles determinam os níveis de utilização dos recursos que, por sua vez, determinam o *lead time* de produção. Uma série de abordagens iterativas para lidar com essa circularidade têm sido propostas em Assmundsson *et al.* (2009). Trata-se de fixar os *lead times* para obter um plano de liberação e, em seguida, simulando o plano de liberação obter um novo *lead time* de produção, e assim sucessivamente. Estas estimativas são então utilizadas para gerar novos planos de liberação, até que haja convergência do processo. No entanto, a convergência destas abordagens não estão bem compreendidas até onde se sabe.

Nesse trabalho esse problema de circularidade será enfrentado por meio da introdução do conceito de *Clearing Function* (CF), introduzida inicialmente por Graves (1986), Karmarkar (1989), e Srinivassan *et al.* (1988) e, mais recentemente estudada por Asmundsson *et al.* (2009), Kefeli *et al.* (2010), Irдем *et al.* (2010), e Uzsoy & Sampaio (2010), apenas para citar alguns trabalhos mais recentes. Uma revisão detalhada sobre o estado da arte da utilização de CFs pode ser encontrada em Uzsoy & Missbauer (2010). A CF é uma função côncava crescente e limitada, que expressa a produção em cada período de tempo em função do nível médio de WIP (*work in process*) no sistema durante esse período. Assim, a introdução da CF no modelo de planejamento da produção embora modifique a estrutura linear que gostaríamos de preservar, favorece a aplicação de métodos de decomposição, uma vez que está relacionada a cada período do horizonte de planejamento.

O restante deste artigo está organizado da seguinte maneira: Na Seção 2, é apresentado o modelo e a estrutura do problema, e na Seção 3, uma ilustração numérica e algumas conclusões.

## 2. Modelo e Estrutura do Problema

Considere o seguinte problema de mix de produção onde os produtos são indexados por  $i = 1, 2, \dots, N$ , os componentes por  $k = 1, 2, \dots, K$ , e os períodos do horizonte de planejamento por  $j = 1, 2, \dots, T$ . Seja  $b_{ki}$  o número de componentes  $k$  utilizados para produzir uma unidade do produto  $i$ , e  $h_i$  o tempo padrão requerido para produzir uma unidade do produto  $i$ . Suponha que  $R_j$  é a mão-de-obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser utilizada no período  $j$ , e, além disso, que cada recurso  $R_j$  de cada período  $j$  não pode ser carregado para o período seguinte.  $S_{kj}$  é a quantidade de componentes do tipo  $k$  disponível para consumo no início do período  $j$ ,  $D_{ij}$  a demanda para o produto  $i$  no período  $j$ , e  $C_{ij}$  a capacidade nominal de produção para o produto  $i$  no período  $j$ . Então, se a receita de cada unidade do produto  $i$  produzida no período  $j$  é  $c_{ij}$ , e se as variáveis de decisão especificando os níveis de produção para cada produto  $i$  em cada período  $j$  são  $x_{ij}$ , o modelo clássico de PL para o planejamento da produção pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize} \quad \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij} x_{ij} \\
 & \text{s. a.} \quad \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj}, \quad \forall k, \forall t, \\
 & \quad \quad \sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq R_j, \quad \forall j, \\
 & \quad \quad x_{ij} \leq C_{ij}, \quad \forall i, \forall j, \\
 & \quad \quad \sum_{j=1}^T x_{ij} \leq D_i, \quad \forall i. \\
 & \quad \quad x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j
 \end{aligned} \tag{1}$$

Este modelo de planejamento de produção é, portanto, um problema linear esparso e estruturado, cuja estrutura é bastante adequada para a decomposição como veremos a seguir.

### 2.1. Decomposição em Períodos com Base no Modelo

Para discutir a questão de decompor o modelo matemático (1), começamos assumindo que o horizonte de planejamento será dividido em  $T$  períodos discretos, isto é, somente consideraremos aqui a chamada decomposição míope, onde cada bloco resultante da

decomposição contém apenas um período. Isso permite que os Jacobianos das restrições sejam facilmente estruturados em blocos, o que facilita a decomposição e reduz a complexidade computacional mantendo a matriz de decomposição, constante. Para ilustrar, vamos considerar um caso particular do problema (1) para um horizonte de planejamento  $T = 2$  períodos,  $K = 2$  componentes diferentes, e  $N = 2$  produtos diferentes. O modelo matemático (1) se torna:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22}; \\
 & \text{s. a. } \quad b_{11}x_{11} + b_{12}x_{21} \leq S_{11}; \\
 & \quad \quad b_{21}x_{11} + b_{22}x_{21} \leq S_{21}; \\
 & \quad \quad h_1x_{11} + h_2x_{21} \leq R_1; \\
 & \quad \quad b_{11}x_{11} + b_{12}x_{21} + b_{11}x_{12} + b_{12}x_{22} \leq S_{11} + S_{12}; \\
 & \quad \quad b_{21}x_{11} + b_{22}x_{21} + b_{21}x_{12} + b_{22}x_{22} \leq S_{21} + S_{22}; \\
 & \quad \quad \quad \quad h_1x_{12} + h_2x_{22} \leq R_2; \\
 & \quad \quad \quad \quad x_{11} \leq C_{11}; \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_{21} \leq C_{21}; \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_{12} \leq C_{12}; \\
 & \quad x_{22} \leq C_{22}; \\
 & \quad \quad \quad \quad x_{11} \leq D_1; \\
 & \quad \quad \quad \quad x_{11} + \quad \quad \quad x_{12} \leq D_1; \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad x_{21} \leq D_2; \\
 & \quad \quad \quad \quad x_{21} + \quad \quad \quad x_{22} \leq D_2; \\
 & \quad \quad x_{11} \geq 0; x_{12} \geq 0; x_{21} \geq 0; x_{22} \geq 0;
 \end{aligned} \tag{2}$$

Uma representação compacta da matriz do problema pode ser desenvolvida de seguinte maneira:

- i)  $x^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{Nj})^T, j = 1, 2, \dots, T;$
- j)  $B = (b_{ki}), k = 1, 2, \dots, K, i = 1, 2, \dots, N;$
- k)  $S^{(j)} = (S_{1j}, S_{2j}, \dots, S_{Kj})^T, j = 1, 2, \dots, T;$
- l)  $C^{(j)} = (C_{1j}, C_{2j}, \dots, C_{Nj})^T, j = 1, 2, \dots, T;$
- m)  $D^{(i)} = D_i, i = 1, 2, \dots, N;$
- n)  $R^{(j)} = R_j, j = 1, 2, \dots, T;$
- o)  $c^{(j)} = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{Nj}), j = 1, 2, \dots, T;$
- p)  $I$  matriz identidade de tamanho  $N$ .

Reescrevendo o modelo (2) usando a notação acima resulta em:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } c^{(1)}x^{(1)} + c^{(2)}x^{(2)} \\
 & \text{s. a. } \quad Bx^{(1)} \leq S^{(1)} \\
 & \quad \quad hx^{(1)} \leq R^{(1)}
 \end{aligned} \tag{3}$$



$$\begin{aligned}
& \text{Maximize } \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij} x_{ij} \\
& \text{s. a. } \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\
& \sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq R^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, T, \\
& x_{ij} - \varphi(x_{ij}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T \\
& \sum_{j=1}^T x_{ij} \leq D_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T,
\end{aligned} \tag{5}$$

onde  $\varphi(x_{ij})$  denota o valor da função CF que governa a produção do produto  $i$  no período  $j$ . Como mencionado acima, a presença da CF destrói a linearidade do modelo clássico, mas a não linearidade resultante, quando necessário, pode ser facilmente contornada da seguinte maneira: Definir a função afim por partes,

$$\phi(w) = \underset{t}{\text{Minimum}} \{a_t w + b_t\}, \tag{6}$$

onde  $a_t$  e  $b_t$  são parâmetros estimados. Então, seguindo Rockafellar (1970),  $\varphi(w)$  pode ser aproximada com qualquer grau de precisão por  $\phi(w)$  à medida que  $t$  aumenta, e o modelo de PL resultante torna-se,

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize } \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij} x_{ij} \\
& \text{s. a. } \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\
& \sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq R^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, T \\
& x_{ij} - \phi_i(x_{ij}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T, \\
& \sum_{j=1}^T x_{ij} \leq D_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T.
\end{aligned} \tag{7}$$

Este modelo de PL aproxima o modelo (5) que, por sua vez, generaliza o modelo (1), contornando as suas desvantagens relacionadas com os preços duais das capacidades em níveis de baixa utilização, e a dependência dos *lead times* com o estado de carregamento do sistema.

### 2.3. Acoplado Decomposição e o Modelo de Abordagem CF

A decomposição geral do problema (4), um período por bloco, de acordo com Sampaio *et al.* (2009), é o seguinte: em primeiro lugar resolver o subproblema,

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize } c^{(1)} x^{(1)} \\
& \text{s. a. } Bx^{(1)} \leq S^{(1)} \\
& \quad \quad hx^{(1)} \leq R^{(1)} \\
& \quad \quad Ix^{(1)} \leq C^{(1)} \\
& \quad \quad Ix^{(1)} \leq D^{(1)}
\end{aligned} \tag{8}$$



$$\begin{aligned}
Bx^{(1)} + Bx^{(2)} + \dots + Bx^{(T)} &\leq \sum_{j=1}^T S^{(j)} \\
0x^{(1)} + 0x^{(2)} + \dots + hx^{(T)} &\leq R^{(T)} \\
0x^{(1)} + 0x^{(2)} + \dots + Ix^{(T)} &\leq \psi_N^{(T)} \\
Ix^{(1)} + Ix^{(2)} + \dots + Ix^{(T)} &\leq D^{(N)} \\
x^{(1)} \geq 0, x^{(2)} \geq 0, \dots, x^{(T)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Afirmamos que a solução ótima para o modelo (12) pode ser obtida pelo seguinte esquema de decomposição. Primeiro resolver o subproblema,

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize } c^{(1)}x^{(1)} \\
&\text{s. a. } \quad Bx^{(1)} \quad \leq S^{(1)} \\
&\quad \quad hx^{(1)} \quad \leq R^{(1)} \\
&\quad \quad Ix^{(1)} \quad \leq \psi_N^{(1)} \\
&\quad \quad Ix^{(1)} \quad \leq D^{(1)} \\
&\quad \quad x^{(1)} \geq 0,
\end{aligned} \tag{13}$$

Em seguida, para  $j = 2, \dots, T$  e  $i = 2, \dots, N$ , iterativamente, fazer as atribuições,

$$\begin{aligned}
S^{(j)} &\leftarrow S^{(j)} + (S^{(j-1)} - B\hat{x}^{(j-1)}), \\
D^{(j)} &\leftarrow D^{(i)} + (D^{(i-1)} - \hat{x}^{(j-1)}),
\end{aligned} \tag{14}$$

e resolver o subproblema,

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize } c^{(j)}x^{(j)} \\
&\text{s. a. } \quad Bx^{(j)} \quad \leq S^{(j)} \\
&\quad \quad hx^{(j)} \quad \leq R^{(j)} \\
&\quad \quad Ix^{(j)} \quad \leq \psi_N^{(j)} \\
&\quad \quad Ix^{(j)} \quad \leq D^{(i)} \\
&\quad \quad x^{(j)} \geq 0.
\end{aligned} \tag{15}$$

O teorema (1) abaixo mostra que, sob hipóteses bastante razoáveis as soluções ótimas desses subproblemas geram uma seqüência de soluções convergentes para uma solução ótima do problema (5), e que a qualidade dessa convergência depende da qualidade da aproximação de  $\varphi$  por  $\phi$ .

**Teorema 1:** Suponha que o problema (5) tenha uma solução ótima, e que  $\varphi(\cdot)$  pode ser aproximada com qualquer grau de precisão por  $\phi(\cdot)$ , e que além disso, a solução dos subproblemas não sejam totalmente degeneradas. Então a seqüência gerada pelo modelo (13) – (15), com  $t \rightarrow \infty$ , converge para uma solução ótima do problema.

Prova: Este teorema é uma consequência trivial do teorema fundamental do cálculo.

### 3. Ilustração Numérica e Conclusões

A abordagem CF aqui apresentada permite dois tipos de decomposição, uma por meio de subproblemas convexos se o interesse primário do usuário está na solução, na precificação de capacidade, e dispõe-se de software adequados para tratar problemas não lineares, e outro por meio de subproblemas lineares no caso de alguém estar interessado na solução, nos preços duais de capacidade com níveis de utilização abaixo de 100%, usando programação linear. Como o custo computacional para resolver ambos os problemas de otimização, o problema convexo e o problema linear crescem polinomialmente com o número de variáveis, a decomposição poupa tempo em todas as circunstâncias, e poupa armazenamento para problemas de otimização de larga escala. O desafio, em geral, é como modelar o problema sem restrições de acoplamento para permitir fácil decomposição. Para ilustrar o comportamento dos preços duais de acordo com os níveis de utilização, apresentamos um exemplo com 3 produtos, cada um deles contendo 5 componentes, ao longo de 12 períodos, que resulta em um problema com 36 variáveis e 145 restrições. Os dados utilizados para essa ilustração são apresentados abaixo nas Tabelas 1, 2, 3 e 4.

$c_{11}$	$c_{21}$	$c_{31}$	$c_{12}$	$c_{22}$	$c_{32}$	$c_{13}$	$c_{23}$	$c_{33}$
5	9	11	5	9	11	5	9	11

Tabela 1 – Custos unitários  $c$  dos produtos  $i$  para períodos  $j$

$D_1$	$D_2$	$D_3$
350	900	500

Tabela 2 – Demandas dos produtos  $i$

$C_{ij}$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$	$j=11$	$j=12$
$i=1$	35	37	26	29	28	36	27	31	32	23	24	29
$i=2$	88	79	74	67	89	75	60	68	82	70	80	73
$i=3$	63	57	39	50	34	47	52	37	53	33	40	42

Tabela 3 – Capacidades nominais de produção do produtos  $i$  nos períodos  $j$

$S_{kj}$	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	$j=5$	$j=6$	$j=7$	$j=8$	$j=9$	$j=10$	$j=11$	$j=12$
$k=1$	375	750	1125	1500	1875	2250	2625	3000	3375	3750	4125	4500
$k=2$	355	710	1065	1420	1775	2130	2485	2840	3195	3550	3905	4260
$k=3$	230	460	690	920	1150	1380	1610	1840	2070	2300	2530	2760
$k=4$	175	350	525	700	875	1050	1225	1400	1575	1750	1925	2100
$k=5$	500	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000	4500	5000	5500	6000

Tabela 4 – Componentes  $k$  para produção dos produtos  $i$  nos períodos  $j$

Considerando os dados do problema e a capacidade de produção para atender 100% da demanda ao final dos períodos, como apresentado na Tabela 3, o valor da função objetivo é 14.942,71.

Com a capacidade de produção aproximadamente 25% maior que a demanda (multiplicando os valores da tabela 3 por 1,25), o valor da função objetivo aumenta para 15.298,11.

Com a capacidade de produção aproximadamente 50% maior que a demanda (multiplicando os valores da tabela 3 por 1,50), o valor da função objetivo aumenta para 15.350,00.

Levando em conta o valor crescente da função objetivo associada ao aumento de capacidade, a Tabela 5 ilustra o comportamento das variáveis duais para cada produto em relação às capacidades de produção, com capacidade justa em relação à demanda, com folga de 25% e com folga de 50%.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$f^*$
<b>Capacidade justa (100%)</b>	36,360781	76,93126	30,75168	14.942,71
<b>Capacidade 25% ociosa (125%)</b>	7,507687	5,06578	23,91915	15.298,11
<b>Capacidade 50% ociosa (150%)</b>	0,00000	0,00000	0,00000	15.350,00

Tabela 5 – Comportamento das variáveis  $X$  duais para cada produto associadas às capacidades

Essa pequena ilustração mostra que sistemas produtivos eficientes devem operar com utilização abaixo de 100%, para atender a variabilidade inerente aos processos produtivos, fato que contraria o senso comum.

## Referências

- ASMUNDSSON, J.M.; RARDIN, R.L.; TURKSEVEN, C.H. & UZSOY, R. *Production Planning with Resources Subject to Congestion*, Published online 20 January 2009 in Wiley Interscience (www.interscience.wiley.com), DOI 10.1002/nav.20335.
- GRAVES, S.C. *A Tactical Planning Model for a Job Shop*, *Operations Research*, 34, 522–533, 1986.
- HOPP, W.J. & SPEARMAN, M.L. *Factory Physics: Foundations of Manufacturing Management*, Irwin/McGraw–Hil, Boston, 2001.
- IRDEM, D.F.; KACAR, N.B. & UZSOY, R. *An Exploratory Analysis of Two Iterative Linear Programming–Simulation Approaches for Production Planning*, *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, Vol. 23, NO. 3, August 2010.
- KARMARKAR, U.S. *Capacity loading and release planning with work–in–process and lead times*. *Journal of Manufacturing and Operations Management*, 2, 105–123, 1989.
- KEFELI, A.; UZSOY, R.; FATHI, Y. & KAY, M. *Using a mathematical programming model to examine the marginal price of capacity resources*, Approved in 2011 to appear in *Int. J. Production Economics*.
- KEMPF, K.G.; KESKINOCAK, P. & UZSOY, R. *Planing Production and Inventories in the Extended Enterprise*, *A State of Art Handbook*, Volume 1, Springer 2011.

MISSBAUER, H. & UZSOY, R., *Optimization Models for Production Planning*, in Planning Production and Inventories in the Extended Enterprise Vol.1, K.G. KEMPF, P. KESKINOCAK & R. UZSOY (eds), Springer, 2010.

ROCKAFELAR, R.T. *Convex Analysis*, Academic Press, 1970.

SAMPAIO, R.J.B.; UZSOY, R. & WOLLMANN, R.R.G. *Using a Clearing Function Approach with Decomposition for Production Planning Problems*, Aprovado em 2011 para o XVI ICIEOM, 2011.

SAMPAIO, R.J.B.; VIEIRA, G.E. & FAVARETTO, F. *An Approach of Mathematical Programming to the Master Production Scheduling Problem*, Technical Report 2009, PUCPR-PPGEPS, Brazil.

SRINIVASSAN, A.; CAREY, M. & MORTON, T. E. *Resource Pricing and Aggregate Scheduling in Manufacturing Systems*, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA, 1988.

UZSOY R. & SAMPAIO, R.J.B. *Unifying inner and outter approach of Clearing Function to deal with Pricing Capacity of Resources at Lows Levels of Utilization*, in preparation.

### 2.3 ARTIGO 3

Este artigo está em processo de submissão a um periódico.

# Using Penalty in Mathematical Decomposition for Production-Planning to Accommodate Clearing Function Constraints of Capacity

R. J. B. de Sampaio<sup>1</sup>, Reha Uzsoy<sup>2</sup>, Rafael R. G. Wollmann<sup>3</sup>  
and Fabio Favaretto<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Partially Supported by CAPES EXB:1217-10-0.

<sup>2</sup> Partially Supported by the National Science Foundation under Grant No. CCM-1029706 and by Intel Corporation.

<sup>3</sup> Partially Supported by CAPES.

<sup>4</sup> Partially Supported by CNPq under Grant No. and FAPEMIG under Grant No.

## Abstract

The idea of using Clearing Functions (CF) in Linear Programming (LP) models for production-planning, to represent the nonlinear dependence between workload and lead times in the system, results in a Nonlinear Programming (NP) model which, in general, is harder to decompose than LP models, and does not work properly under classical decomposition approach. In this paper we modified that classical decomposition approach using a penalty function for the subproblems, allowing to accommodate CF function capacity constraint, and accomplishing proper operation.

**Key Words: Clearing Function, Production Planning, Convex Programming, Mathematical Decomposition.**

## 1. The Problem

Linear Programming (LP) is a widely used framework to address the problem of production planning, which has been studied for several decades. However, standard LP model presents a number of drawbacks in that their recommendations are inconsistent with the queueing behavior observed in most production facilities. One such drawback is that the dual variables associated with capacity constraints will only take nonzero values when the resource is fully utilized, contradicting both theoretical results from queueing theory and practical experience on the shop floor. Another serious drawback is related to lead time. Most LP models assume that a resource can maintain a constant lead time regardless of its workload, again contradicting basic queueing insights, actually implying infinite capacity. According to Hopp *et al.* (2001), practical experience and queueing theory shows that the performance of production systems is affected by the loading of the system related to its capacity, in particular the lead time, i.e., the mean time between the release of work for production and its completion, increase nonlinearly with increasing resources utilization. Thus, deterministic models for production planning suffer from a problem that in order to match demand and supply they need to consider lead times to plan releases, but in doing so they determine levels of resource utilization, which, in turn, determines the realized lead time of production. A number of iterative approaches has been proposed in Assmundsson *et al.* (2009) to deal with this circularity. These involve assuming fixed lead times to obtain a release plan, then simulating the release plan to obtain realized lead times estimates. These estimates are then used to

generate a new release plan, until the procedure converges. However, at the best of our knowledge the convergence of these approaches is not well understood.

In this paper we address the pointed circularity through the use of clearing function, first introduced by Graves (1986), Karmarkar (1989), and Srinivassan *et al.* (1988), and more recently studied by Asmundsson *et al.* (2009), Kefeli *et al.* (2010), Irdem *et al.* (2010), and Uzsoy & Sampaio (2010), just to name a few. A detailed review of the state of the art in production-planning using CFs can be seen in Missbauer & Uzsoy (2010). The CF is an increasing bounded concave function that expresses the expected throughput of a capacitated resource over a period of time as a function of the average Work-In-Process (WIP) level in the system over that period. Thus, the introduction of CF into the production-planning model, while improving modelling the problem destroys its linear structure which usually we likely want to preserve. The resulting convex problem, however, may be approximate to any degree of accuracy by a large scale LP problem which, in general, may require decomposition technique to be solved. The classical scheme used to decompose this problem was proposed in Chu (1991) and Sampaio *et al.* (2009), however, does not work properly in presence of nominal capacity constraints, and since CF function is a kind of capacity constraint, it does not work properly in presence of CF function, as we can see in Sampaio *et al.* (2011), thus requiring a new decomposition scheme, which is actually the problem we address here. The scheme we present, which works properly in presence of CF function, combines decomposition with penalty function for the subproblems, which assure a quite balanced production related to capacity at each period in planning horizon. The result is a very suitable decomposition scheme, since from the practical point of view it is obvious, and from the theoretical point of view it satisfies the hypotheses of the usual scheme of big-M for Linear Programming which prescribe that if the problem has a feasible solution, and the penalty is big enough, then the simplex algorithm will give an optimal solution if it exist.

The remainder of this paper is organized as follows. In Section 2, we present the classical model and structure of the problem, in Section 3 we present and analyze the new model with the role of CF function, and in Section 4 we present a numerical illustration for the failure of the classical decomposition as well as the way the new decomposition scheme acts to overcome it, and finally some conclusions are presented.

## 2. Classical Model and Structure of the Problem

Consider the following production-planning problem: Products are indexed for  $i = 1, 2, \dots, N$ , the type of components are indexed for  $k = 1, 2, \dots, K$ , and the discrete periods of the planning horizon are indexed for  $j = 1, 2, \dots, T$ . Let  $b_{ki}$  be the number of components  $k$  used to produce one unit of product  $i$ , and let  $h_i$  the standard time required to produce one unit of product  $i$ . Suppose that  $R_j$  is the labor resource (in units of standard time) available for use in period  $j$ , and furthermore, that any remaining resource from  $R_j$  cannot be carried over from a period  $j$  to a next period  $j+1$ . Denote for  $S_{kj}$  the supply of components  $k$  available for consumption in period  $j$ , and  $D_i$  the maximum demand for product  $i$  at the end of planning horizon. Hence, if the revenue from each unit of product  $i$  produced at period  $j$  is  $c_{ij}$ , and the decision variables specifying levels of production in each period  $j$  are  $x_{ij}$ , a classical LP model proposed by Chu (1991) for production-planning is formulated as,

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij} x_{ij} \\ & \text{s. t. } \quad \sum_{i=1}^N b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj}, \quad \forall k, \forall t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^T x_{ij} &\leq D_i, \quad \forall i. \\ \sum_{i=1}^N h_i x_{ij} &\leq R_j, \quad \forall j,\end{aligned}\tag{1}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, \forall j$$

This classic production-planning model can be a large structured and sparse LP problem, in which case it could be solved using classical LP decomposition technics. It is worthy to realize that this class of models may fails in presence of nominal capacity constraints, as shown in Sampaio *et al.ii* (2011), as will be illustrated in a numerical example in the last section. To discuss decomposition for model (1) we begin by assuming that the planning horizon will be divided into  $T$  equal discrete periods, and as a consequence, the whole problem will be divided into  $T$  subproblems. In such case the Jacobian of the constraints will be constant to all the periods as we will see, which require only once Jacobian decomposition, reducing computational complexity to solve the problem. To illustrate the sparsity and structure of the problem tells define the following matrix representation,

- a)  $x^{(j)} = (x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{Nj})^T, j = 1, 2, \dots, T;$
- b)  $B = (b_{ki}), k = 1, 2, \dots, K, i = 1, 2, \dots, N;$
- c)  $S^{(j)} = (S_{1j}, S_{2j}, \dots, S_{Kj})^T, j = 1, 2, \dots, T;$
- d)  $R^{(j)} = R_j, j = 1, 2, \dots, T;$
- e)  $D = (D_1, D_2, \dots, D_N)^T;$
- f)  $c^{(j)} = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{Nj}), j = 1, 2, \dots, T;$
- g)  $h = (h_1, h_2, \dots, h_N) ;$
- h)  $I$  identity matrix of size  $N$ .

Then, the structure and sparsity of the model (1) becomes apparent, as it can be seen from using the matrix notation:

$$\begin{aligned}\text{Maximize } & \sum_{j=1}^T c^{(j)} x^{(j)} \\ \text{s. t. } & Bx^{(1)} \leq S^{(1)} \\ & Ix^{(1)} \leq D \\ & hx^{(1)} \leq R^{(1)} \\ & Ix^{(1)} \geq 0 \\ & \dots \dots \dots \\ & Bx^{(1)} + Bx^{(2)} \leq S^{(1)} + S^{(2)} \\ & Ix^{(1)} + Ix^{(2)} \leq D \\ & 0x^{(1)} + hx^{(2)} \leq R^{(2)} \\ & 0x^{(1)} + Ix^{(2)} \geq 0 \\ & \dots \dots \dots\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}
Bx^{(1)} + Bx^{(2)} + \dots + Bx^{(T)} &\leq \sum_{j=1}^T S^{(j)} \\
Ix^{(1)} + Ix^{(2)} + \dots + Ix^{(T)} &\leq D \\
0x^{(1)} + 0x^{(2)} + \dots + hx^{(T)} &\leq R^{(T)} \\
0x^{(1)} + 0x^{(2)} + \dots + Ix^{(T)} &\geq 0.
\end{aligned}$$

This LP model is well suited for decomposition by solving a period at a time, giving an optimal solution to problem (1), according to Chu (1991) and Sampaio *et al.* (2009). However, this model contains some obvious drawbacks: it assume that production may be kept increasing as long as we increase resources, only bounded by demand, which assume capacity is unbounded since lead time is kept constant. Second, it assume it can maintain lead time constant in the planning horizon no matter the workload of the system, which again assume unbounded capacity, and third, there is no minimal demand to be satisfied at the end of any period in the planning horizon, which makes the problem mode like a mix-product problem, that of production-planning.

### 3. New Model With Role of CF Function

Lets address the drawbacks pointed out above building a new model which contain a CF function for the purpose of at least partially consider lead time, mainly following the approach introduced in Sampaio *et al.* (2011), and introduce a penalty factor to model the subproblems generated by decomposition, to serve demand in presence of nominal capacity constraint. From Sampaio *et al.* (2009) and Sampaio *et al.* (2011), we observe that the classical decomposition models presented by Chu (1991) does not work properly, in general, if we bound nominal capacity, and thus, since CF function is a constraint of capacity related to the workload of the system, then this classical model presented by Chu (1991) does not work properly in presence of CF function, i.e., if releases are not sufficient to supply all the maximum demands in presence of nominal capacity the classical decomposition models fails, as demonstrated in Sampaio *et al.* (2011). Numerical example in Section 4 illustrates this situation. The failure in the decomposition scheme is likely because there is no penalty associated to unbalanced production to mach demand constraints in the subproblems generated by decomposition. To overcome this, we introduce a penalty parameter  $v_{ij}$  to force balanced use of resources related to capacity, for production of products  $i$  at period  $j$ . These parameters  $v_{ij}$  penalizes the distance between production capacity and decision production  $x_{ij}$ , for each product  $i$ , in each period  $j$ .

Now lets define for each period  $j$ , the concave CF function which governs production as a function of WIP, which in this model is only associated to the fixed plan of releases  $S_{kj}$ , as a concave function  $\varphi_j(\sum_k S_{kj}) \rightarrow \mathbb{R}$ , where  $\mathbb{R}$  is the numerical set of reals. The new model with CF function becomes,

$$\begin{aligned}
&\text{Maximize } \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij} x_{ij} \\
&\text{s. t. } \quad \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\
&\quad \sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq R^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, T, \\
&\quad \sum_{j=1}^T x_{ij} \leq D_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N x_{ij} - \varphi_j(\sum_{k=1}^K S_{kj}) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, T, \\ x_{ij} &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T. \end{aligned}$$

As mentioned before, the presence of CF function replace the linearity of the classical model to a nonlinear convex model. For the sake of simplicity, we are assuming here that the CF function for the releases is available for instance as a table of values, in which case the model is still linear, or piecewise linear. In general the mentioned nonlinearity can be easily circumvented in the following way: Let  $\widehat{W}$  be any reasonable measure of WIP at period  $j$ , and then define a piecewise linear function,

$$\phi_j(\widehat{W}) = \underset{t \in \mathbb{N}}{\text{Minimum}} \{a_t \widehat{W} + b_t\}, \quad (4)$$

where  $a_t$  and  $b_t$  are estimated parameters, and  $\mathbb{N}$  is the set of natural numbers. Then, following Rockafellar (1970), the CF concave function  $\varphi_j(\widehat{W})$  can be approximated to any degree of accuracy by  $\phi_j(\widehat{W})$  as  $t$  increases. The resulting non-smooth convex model becomes,

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij} x_{ij} \\ \text{s. t.} \quad & \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\ & \sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq R^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, T \\ & \sum_{j=1}^T x_{ij} \leq D_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ & \sum_{i=1}^N x_{ij} - \phi_j(\sum_{k=1}^K S_{kj}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, T, \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T. \end{aligned} \quad (5)$$

which can be easily replaced by a smooth LP equivalent model. The LP equivalent model approximates, to any degree of accuracy, the general convex model (3), which in its turn generalizes model (1) while partially circumventing the drawbacks related to its dependence of lead times on the workload of the system.

Despite the fact that this model looks like quite reasonable at first glance it carries a strong drawback, since it clearly may create capacity for a single specific product providing WIP for another. A clear example of this undesirable behavior can be find in Missbauer & Uzsoy (2010). Therefore, we must introduce a rule to prevent such undesirable behavior of the model requiring capacity to each single product, and to do so, lets assume that the total consumption of resource for each product  $i$  is bounded by a fraction of total capacity, i.e., for all  $i$ , and for all  $j$ ,

$$x_{ij} \leq \rho_{ij} \phi_j(\sum_{k=1}^K S_{kj}), \quad \rho_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^N \rho_{ij} = 1. \quad (6)$$

It must be realized that  $\rho_{ij}$  is a parameter informed to the model, and not a decision variable. Upon these assumptions, the model (5) will become,

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize } \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij} x_{ij} \\
& \text{s. t. } \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\
& \sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq R^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, T \\
& \sum_{j=1}^T x_{ij} \leq D_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\
& \sum_{i=1}^N x_{ij} - \phi_j(\sum_{k=1}^K S_{kj}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, T, \\
& x_{ij} - \rho_{ij} \phi_j(\sum_{k=1}^K S_{kj}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T, \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T.
\end{aligned} \tag{7}$$

This model is still not well defined, since by concavity of  $\phi_j$ , for all solutions satisfying the set of constraints (6), it will also satisfy,

$$\sum_{i=1}^N \xi_{it} X_{it} - \psi_t(\sum_{i=1}^N \theta_{it} \widehat{W}_{it}) \leq 0, \tag{8}$$

thus, implying that the set of constraints in (7) is redundant. Cleaning up the model from these redundancies we ultimately generate the CF model,

$$\begin{aligned}
& \text{Maximize } \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij} x_{ij} \\
& \text{s. t. } \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj}, \quad k = 1, 2, \dots, K, \quad t = 1, 2, \dots, T, \\
& \sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq R^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots, T \\
& \sum_{j=1}^T x_{ij} \leq D_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\
& x_{ij} - \rho_{ij} \phi_j(\sum_{k=1}^K S_{kj}) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T, \\
& x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, T.
\end{aligned} \tag{9}$$

For the sake of representation, let's define, for  $j = 1, 2, \dots, T$ ,

$$\begin{aligned}
\rho^{(j)} &= (\rho_{1j}, \rho_{2j}, \dots, \rho_{Nj})^T, \quad \bar{S}^j = \sum_{k=1}^K S_{kj}, \quad v^{(j)} = (v_{1j}, v_{2j}, \dots, v_{Nj}) \text{ and} \\
C^{(j)} &= \rho^{(j)} \phi_j(S^j)
\end{aligned}$$

where  $v^{(j)}$  is a vector that penalizes unbalanced production related to nominal capacity  $C^{(j)}$  prescribed by CF function. Furthermore, we assume that capacity is bounded by maximum demand, i.e.,  $C^{(j)} \leq D^{(j)}, \forall j$ , and that is enough resources for production at capacity level.

We claim that the following general procedure decompose problem (9), one period at a time, and that the optimal solution for the subproblems generated by decomposition presented gives

an optimal solution to this problem. The general procedure is the following: First solve the subproblem,

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } c^{(1)}x^{(1)} + v^{(1)}[x^{(1)} - C^{(1)}] \\
 & \text{s. t. } \quad Bx^{(1)} \quad \leq S^{(1)} \\
 & \quad \quad Ix^{(1)} \quad \leq D \\
 & \quad \quad Ix^{(1)} \quad \leq C^{(1)} \\
 & \quad \quad hx^{(1)} \quad \leq R^{(1)} \\
 & \quad \quad Ix^{(1)} \quad \leq 0,
 \end{aligned} \tag{10}$$

and then, for  $j=2, \dots, T$ , iteratively assign,

$$\begin{aligned}
 S^{(j)} & \leftarrow S^{(j)} + [S^{(j-1)} - B\hat{x}^{(j-1)}], \\
 D & \leftarrow [D - \hat{x}^{(j-1)}],
 \end{aligned} \tag{11}$$

where  $\hat{x}^{(j-1)}$  is an optimal solution for subproblem  $(j-1)$ , and solve the  $j^{\text{th}}$  subproblem,

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } c^{(j)}x^{(j)} + v^{(j)}[x^{(j)} - C^{(j)}] \\
 & \text{s. t. } \quad Bx^{(j)} \quad \leq S^{(j)} \\
 & \quad \quad Ix^{(j)} \quad \leq D \\
 & \quad \quad Ix^{(j)} \quad \leq C^{(j)} \\
 & \quad \quad hx^{(j)} \quad \leq R^{(j)} \\
 & \quad \quad Ix^{(j)} \quad \leq 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

As the matrices  $B$ ,  $I$ , and  $h$ , are constants, the subproblems (10) and (12) can be more simply written for  $j=1, 2, \dots, T$ , as,

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } c^{(j)}x^{(j)} + v^{(j)}[x^{(j)} - C^{(j)}] \\
 & \text{s. t. } \quad Ax^{(j)} \quad \leq b^{(j)} \\
 & \quad \quad x^{(j)} \quad \geq 0,
 \end{aligned} \tag{13}$$

where  $b^{(j)} = (S^{(j)} \ D \ C^{(j)} \ R^{(j)})^T$ , and  $A^T = (B^T \ I \ I \ h^T)$ .

The combination of optimal solution for these subproblems provides an optimal solution to problem (9), according to Proposition 1 below.

**Proposition 1.** Let  $x^* = (x^{*(1)}, x^{*(2)}, \dots, x^{*(T)})$  be an optimal solution for the problem (9), and let  $\hat{x}^{(j)}$ ,  $j=1, 2, \dots, T$ , be optimal solutions for subproblems (10)-(12), or what is the same, for subproblems (13) with condition (11), and suppose that the entries of the penalties vector,  $v^{(j)}$ , are arbitrarily large. Then, the combined subproblems vector solution  $\hat{x} = (\hat{x}^{(1)}, \dots, \hat{x}^{(T)})$ , is also an optimal solution for problem (9).

Since the prove we were able to built is too long we just give a scratch of it. The proof can be made using mathematical induction over the periods of the planning horizon  $T$ : first, it must be proved that the result is true for  $T=2$  periods, and then, supposing the result is true for any integer number of periods  $k$ , it must be proved it is true for  $T=k+1$  periods, thus concluding it is true for any planning horizon of  $T$  periods. A scratch of the proof for  $T=2$  periods shows up the kind of argument that could be used to accomplish the prove.

Proof for  $T=2$ . Lets suppose  $(x^{*(1)}, x^{*(2)})$  is an optimal solution for problem

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } \sum_{j=1}^2 c^{(j)} x^{(j)} \\
 & \text{s. t. } \quad Ax^{(1)} \quad \quad \quad \leq b^{(1)} \\
 & \quad \quad Ax^{(1)} + Ax^{(2)} \quad \leq b^{(1)} + b^{(2)} \\
 & \quad \quad x^{(1)}, x^{(2)} \quad \quad \geq 0,
 \end{aligned} \tag{14}$$

which is problem (9) for  $T=2$  periods. Then, the following are true,

- $Ax^{*(1)} \leq b^{(1)}$ ,  $0 \leq x^{*(1)} \leq C^{(1)}$ ;
- $Ax^{*(1)} + Ax^{*(2)} \leq b^{(1)} + b^{(2)}$ ,  $0 \leq x^{*(2)} \leq C^{(2)}$ , and,
- $c^{(1)}x^{(1)} + c^{(2)}x^{(2)} \leq c^{(1)}x^{*(1)} + c^{(2)}x^{*(2)} \leq c^{(1)}C^{(1)} + c^{(2)}C^{(2)}$ ,  $\forall (x^{(1)}, x^{(2)})$  feasible for problem (14).

Now lets suppose that  $\hat{x}^{(1)}$  is an optimal solution for the first subproblem of problem (14), which is,

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximize } c^{(1)}x^{(1)} + v^{(1)}[x^{(1)} - C^{(1)}] \\
 & \text{s. t. } \quad Ax^{(1)} \quad \quad \quad \leq b^{(1)} \\
 & \quad \quad x^{(1)} \quad \quad \quad \geq 0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Obviously,  $\hat{x}^{(1)} \leq x^{*(1)} + x^{*(2)}$ , since  $(\hat{x}^{(1)}, 0)$  is a feasible solution for problem (14), and furthermore,  $\hat{x}^{(1)} \leq C^{(1)}$ , by the role of CF function. Besides, the following are true,

- $A\hat{x}^{(1)} \leq b^{(1)}$ ,  $0 \leq \hat{x}^{(1)} \leq C^{(1)}$ ,  $\hat{x}^{(1)} \leq x^{*(1)} + x^{*(2)}$ , and
- $c^{(1)}x^{(1)} + v^{(1)}x^{(1)} \leq c^{(1)}\hat{x}^{(1)} + v^{(1)}\hat{x}^{(1)} \leq c^{(1)}C^{(1)} + v^{(1)}C^{(1)}$ ,  $\forall x^{(1)}$  feasible for problem (15), and in particular,

$$\bullet \quad c^{(1)}x^{*(1)} + v^{(1)}x^{*(1)} \leq c^{(1)}\hat{x}^{(1)} + v^{(1)}\hat{x}^{(1)} \leq c^{(1)}C^{(1)} + v^{(1)}C^{(1)}. \quad (\text{Eq 1})$$

Using conditions (11), the second subproblem of problem (14), will be

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } c^{(2)}x^{(2)} + v^{(2)}[x^{(2)} - C^{(2)}] \\ & \text{s. t. } \quad Ax^{(2)} \leq b^{(2)} + (b^{(1)} - A\hat{x}^{(1)}) \\ & \quad \quad x^{(2)} \geq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Let  $\hat{x}^{(2)}$  be an optimal solution for subproblem (16), then the following are true,

- $A\hat{x}^{(2)} \leq b^{(2)} + (b^{(1)} - A\hat{x}^{(1)}), \quad 0 \leq \hat{x}^{(2)} \leq C^{(2)}$ ;
- $(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)})$  is a feasible solution for problem (14), and,
- $c^{(2)}x^{(2)} + v^{(2)}x^{(2)} \leq c^{(2)}\hat{x}^{(2)} + v^{(2)}\hat{x}^{(2)} \leq c^{(2)}C^{(2)} + v^{(2)}C^{(2)}, \quad \forall x^{(2)}$  feasible for subproblem (16).

Combining above arguments with that of  $(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)})$  is a feasible solution for subproblem (14),

$$c^{(1)}\hat{x}^{(1)} + c^{(2)}\hat{x}^{(2)} \leq c^{(1)}x^{*(1)} + c^{(2)}x^{*(2)} \leq c^{(1)}C^{(1)} + c^{(2)}C^{(2)}. \quad (17)$$

However, since  $\hat{x}^{(1)}$  is an optimal solution for subproblem (15), then,

$$c^{(1)}\hat{x}^{(1)} + v^{(1)}[\hat{x}^{(1)} - C^{(1)}] \geq c^{(1)}x^{(1)} + v^{(1)}[x^{(1)} - C^{(1)}] \quad (18)$$

for all feasible solution for subproblem (15), and since  $\hat{x}^{(2)}$  is an optimal solution for subproblem (16), then,

$$c^{(2)}\hat{x}^{(2)} + v^{(2)}[\hat{x}^{(2)} - C^{(2)}] \geq c^{(2)}x^{(2)} + v^{(2)}[x^{(2)} - C^{(2)}], \quad (19)$$

for all feasible solution for subproblem (16). Combining these relations,  $c^{(1)}\hat{x}^{(1)} + v^{(1)}[\hat{x}^{(1)} - C^{(1)}] + c^{(2)}\hat{x}^{(2)} + v^{(2)}[\hat{x}^{(2)} - C^{(2)}]$  is an upper bound for problem

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } c^{(1)}x^{(1)} + v^{(1)}[x^{(1)} - C^{(1)}] + c^{(2)}x^{(2)} + v^{(2)}[x^{(2)} - C^{(2)}] \\ & \text{s. t. } \quad Ax^{(1)} \leq b^{(1)} \\ & \quad \quad Ax^{(1)} + Ax^{(2)} \leq b^{(1)} + b^{(2)} \end{aligned} \quad (20)$$

$$x^{(1)}, x^{(2)} \geq 0.$$

In particular, since  $(x^{*(1)}, x^{*(2)})$  is a feasible solution for subproblem (20), then

$$\begin{aligned} c^{(1)}x^{*(1)} + v^{(1)}[x^{*(1)} - C^{(1)}] + c^{(2)}x^{*(2)} + v^{(2)}[x^{*(2)} - C^{(2)}] &\leq \\ c^{(1)}\hat{x}^{(1)} + v^{(1)}[\hat{x}^{(1)} - C^{(1)}] + c^{(2)}\hat{x}^{(2)} + v^{(2)}[\hat{x}^{(2)} - C^{(2)}], \end{aligned} \quad (21)$$

from where we have that, when  $v^{(1)}, v^{(2)} \rightarrow \infty$ ,

$$c^{(1)}\hat{x}^{(1)} + c^{(2)}\hat{x}^{(2)} \geq c^{(1)}x^{*(1)} + c^{(2)}x^{*(2)}. \quad (22)$$

Combining relations (17) and (22) we conclude that  $(\hat{x}^{(1)}, \hat{x}^{(2)})$  is also an optimal solution to (14), as claimed.

#### 4. Numerical Illustration and Conclusions

The following small example illustrates the role of the theorem. The sequence of tables from Table-1 to Table-8 presents, respectively, the set of data used for illustrative example, a classical decomposition schema when the model contain capacity constraint (Table-2 to Table-4), and a new decomposition model with capacity constraint and penalty function (Table-2, and Table-5 to Table-8).

Incomes				Demand		Work Label		Nominal Capacity				Available Resources			
$c_{11}$	$c_{21}$	$c_{12}$	$c_{22}$	$D_1$	$D_2$	$WL_1$	$WL_2$	$C_{11}$	$C_{21}$	$C_{12}$	$C_{22}$	$S_{11}$	$S_{21}$	$S_{12}$	$S_{22}$
9	15	9	15	128	100	580	580	68	100	62	90	300	600	410	820

The standard time for manufacturing a unit of each product at any period are, respectively,  $h_1=3$ , and  $h_2=6$ . The Table-2 presents the results for illustrative example using the classical model with nominal capacity constraint,

Variable	Production 1 <sup>st</sup> Period	Production 2 <sup>nd</sup> Period	Total
Product 1	66.00000	62.00000	128.00000
Product 2	34.33333	65.66667	100.00000
Solution Value	1109.00000	1543.00000	2652.00000

The tables from Table-3 to Table-5 presents the results for illustrative example using the classical decomposition model with capacity constraint,

Table-3: Decomposition First Block (1 <sup>st</sup> Period)			
Variable	Production 1 <sup>st</sup> Period	Production 2 <sup>nd</sup> Period	Total
Product 1	20.00000	-	-
Product 2	86.66667	-	-
Solution Value	1480.00000	-	-

Table-4: Decomposition Second Block (2 <sup>nd</sup> Period)			
Variable	Production 1 <sup>st</sup> Period	Production 2 <sup>nd</sup> Period	Total
Product 1	-	62.00000	-
Product 2	-	13.33333	-
Solution Value	-	758.00000	-

Summing up the values from the tables Table-3 to Table-4,

Table-5: Totals			
Variable	Production 1 <sup>st</sup> Period	Production 2 <sup>nd</sup> Period	Total
Product 1	20.00000	62.00000	82.00000
Product 2	86.66667	13.33333	100.00000
Solution Value	1480.00000	758.00000	2238.00000

which results different values from Table-2, showing that classical decomposition in the sense of Chu (1991) does not works properly in presence of nominal capacity.

The next three tables are related to the new decomposition model with capacity constraint and penalty function. The solution for the whole problem is the same Table-2, and using decomposition the tables below,

Table-6: Decomposition First Block (1 <sup>st</sup> Period)			
Variable	Production 1 <sup>st</sup> Period	Production 2 <sup>nd</sup> Period	Total
Product 1	68.00000	-	-
Product 2	51.50000	-	-
Solution Value	1384.50000	-	-

Table-7: Decomposition Second Block (2 <sup>nd</sup> Period)			
Variable	Production 1 <sup>st</sup> Period	Production 2 <sup>nd</sup> Period	Total
Product 1	-	60.00000	-
Product 2	-	48.50000	-
Solution Value	-	1267.50000	-

Summing up the values from the tables Table-6 to Table-7,

Table-8: Decomposition Second Block (2 <sup>nd</sup> Period)			
Variable	Production 1 <sup>st</sup> Period	Production 2 <sup>nd</sup> Period	Total
Product 1	68.00000	60.00000	128.00000
Product 2	51.50000	48.50000	100.00000
Solution Value	1384.50000	1267.50000	2652.00000

The last columns of Table-2 and Table-8 shows that the solution provided by the new decomposition scheme is also an optimal solution to the illustrative problem, as assured by Proposition 1. It is easy to realize that no change would occur if we require that a certain minimum demand was met in each period of the planning horizon. What is certain is that the classical decomposition in the presence of nominal capacity constraint failed because the algorithm tries the early periods to allocate as much resources as possible to produce the most profitable product, virtually neglecting the remain products, and then follows trying to produce the second most profitable product and so on, which sometimes is not allowed by the capacity barrier. All account to say that classical decomposition only works in presence of abundant resources and unbounded capacity as well. The presence of penalty associated with the imbalance in production makes the algorithm find a tradeoff among the priorities of producing the more profitable products, with those of available capacity in the period, however, without depleting capacity only with the most profitable products. The rule introduce by the new approach is that: the more a product of high profitability is produced the more a production less profitable becomes attractive, in each production period, and this acts to preserve the balanced production and thus to accomplish the desired decomposition scheme.

### Referências

ASMUNDSSON, J.M.; RARDIN, R.L.; TURKSEVEN, C.H. & UZSOY, R. *Production Planning with Resources Subject to Congestion*, Published online 20 January 2009 in Wiley Interscience (www.interscience.wiley.com), DOI 10.1002/nav.20335.

CAMARGO, E.L. & SAMPAIO, R.J.B. *Uma abordagem de otimização de grande porte para o plano mestre de produção*. 48 f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2010.

- CHU, S.C.K. *A mathematical programming approach towards optimized master production scheduling*. Int. J. Production Economics 38 (1995) 269-279.
- GRAVES, S.C. *A Tactical Planning Model for a Job Shop*, Operations Research, 34, 522–533, 1986.
- HOPP, W.J. & SPEARMAN, M.L. *Factory Physics: Foundations of Manufacturing Management*, Irwin/McGraw–Hil, Boston, 2001.
- IRDEM, D.F.; KACAR, N.B. & UZSOY, R. *An Exploratory Analysis of Two Iterative Linear Programming–Simulation Approaches for Production Planning*, IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing, Vol. 23, NO. 3, August 2010.
- KARMAKAR, U.S. *Capacity loading and release planning with work–in–process and lead times*. Journal of Manufacturing and Operations Management, 2, 105–123, 1989.
- KEFELI, A.; UZSOY, R.; FATHI, Y. & KAY, M. *Using a mathematical programming model to examine the marginal price of capacity resources*, Approved in 2011 to appear in Int. J. Production Economics.
- KEMPF, K.G.; KESKINOC AK, P. & UZSOY, R. *Planing Production and Inventories in the Extended Enterprise*, A State of Art Handbook, Volume 1, Springer 2011.
- MISSBAUER, H. & UZSOY, R., *Optimization Models for Production Planning*, in Planning Production and Inventories in the Extended Enterprise Vol.1, K.G. KEMPF, P. KESKINOC AK & R. UZSOY (eds), Springer, 2010.
- ROCKAFELAR, R.T. *Convex Analysis*, Academic Press, 1970.
- SAMPAIO, R.J.B.; UZSOY, R. & WOLLMANN, R.R.G. *Using a Clearing Function Approach with Decomposition for Production Planning Problems*, Aprovado em 2011 para o XVI ICIEOM, 2011.
- SAMPAIO, R.J.B.; VIEIRA, G.E. & FAVARETTO, F. *An Approach of Mathematical Programming to the Master Production Scheduling Problem*, Technical Report 2009, PUCPR-PPGEPS, Brazil.
- SRINIVASSAN, A.; CAREY, M. & MORTON, T. E. *Resource Pricing and Aggregate Scheduling in Manufacturing Systems*, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, Pittsburgh, PA, 1988.
- UZSOY R. & SAMPAIO, R.J.B. *Unifying inner and outer approach of Clearing Function to deal with Pricing Capacity of Resources at Lows Levels of Utilization*, in preparation.

### 3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresenta inicialmente as conclusões parciais, de cada artigo, e qual a contribuição dada para esta dissertação e, por fim, a conclusão final do trabalho.

#### 3.1 CONCLUSÕES PARCIAIS

O presente trabalho abordou sobre a decomposição do modelo matemático do plano mestre de produção, com a utilização da *Clearing Function* introduzida no modelo para incorporar a restrição de capacidade, além de considerar a variabilidade existente nos sistemas de produção. Além disso,

O Artigo 1 apresentou duas maneiras distintas para decompor o modelo de planejamento de produção cujos dados de entrada – *inputs* – constam na Tabela 1. A primeira decomposição por programação convexa, Tabela 2, e a segunda decomposição por programação linear, Tabela 3 e Tabela 4. Desde que inserida a penalidade nos subproblemas do modelo, ambas as maneiras de decomposição convergem para a solução do problema inteiro, conforme indicado na Tabela 5.

Tabela 1 – Dados do problema de planejamento de produção, Artigo 1.

Receitas				Demanda		Mão de Obra		Capacidade Nominal				Recursos disponíveis			
$c_{11}$	$c_{21}$	$c_{12}$	$c_{22}$	$D_1$	$D_2$	$WL_1$	$WL_2$	$C_{11}$	$C_{21}$	$C_{12}$	$C_{22}$	$S_{11}$	$S_{21}$	$S_{12}$	$S_{22}$
9	15	9	15	128	100	580	580	68	100	62	90	300	600	410	820

Fonte: Autor (2012).

Tabela 2 – Decomposição convexa, Artigo 1.

Variáveis	Período 1	Período 2	Total
<b>Produto 1</b>	67.0000	61.0000	128.0000
<b>Produto 2</b>	39.0000	61.0000	100.0000
<b>Valor da Solução</b>	1189.0000	1493.0000	2652.0000

Fonte: Autor (2012).

Tabela 3 – Decomposição linear (4 segmentos de reta), Artigo 1.

<b>Variáveis</b>	<b>Período 1</b>	<b>Período 2</b>	<b>Total</b>
<b>Produto 1</b>	63.9853	63.9853	127.9706
<b>Produto 2</b>	35.9853	64.0147	100.0000
<b>Valor da Solução</b>	1110.7930	1536.0880	2646.8810

Fonte: Autor (2012).

Tabela 4 – Decomposição linear (8 segmentos de reta), Artigo 1.

<b>Variáveis</b>	<b>Período 1</b>	<b>Período 2</b>	<b>Total</b>
<b>Produto 1</b>	63.9953	63.9953	127.9906
<b>Produto 2</b>	35.9953	64.0047	100.0000
<b>Valor da Solução</b>	1114.3230	1536.0280	2650.351

Fonte: Autor (2012).

Tabela 5 – Solução para o problema inteiro, Artigo 1.

<b>Variáveis</b>	<b>Período 1</b>	<b>Período 2</b>	<b>Total</b>
<b>Produto 1</b>	67.0000	61.0000	128.0000
<b>Produto 2</b>	50.0000	50.0000	100.0000
<b>Valor da Solução</b>	1353.0000	1299.0000	2652.0000

Fonte: Autor (2012).

Conforme ilustrado nas tabelas pertencentes ao Artigo 1, a decomposição funciona na presença da restrição de capacidade, desde que inserida a penalidade no modelo de maneira a balancear o sistema. É possível concluir que a decomposição convexa apresenta o resultado exatamente igual ao resultado do problema inteiro, além disso, quanto maior o número de segmentos de reta traçados para linearizar a curva característica da CF, mais o resultado converge para a solução inteira. Sendo assim, caso o interessado não disponha de softwares adequados para programação convexa, é possível obter uma solução ótima para o problema de planejamento de produção utilizando programação linear.

O Artigo 2 apresentou as duas maneiras distintas de decomposição, assim como no Artigo 1, mas os experimentos numéricos foram direcionados para a avaliação do comportamento das variáveis duais associadas às restrições de capacidade, neste caso representadas pela CF, conforme demonstrado na Tabela 6.

Tabela 6 – Comportamento das variáveis duais associadas às restrições de capacidade, por produto, Artigo 2.

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$f^*$
<b>Capacidade justa (100%)</b>	36,360781	76,93126	30,75168	14.942,71
<b>Capacidade 25% ociosa (125%)</b>	7,507687	5,06578	23,91915	15.298,11
<b>Capacidade 50% ociosa (150%)</b>	0,00000	0,00000	0,00000	15.350,00

Fonte: Autor (2012).

Conforme ilustrado na Tabela 6, na medida em que as capacidades de produção são aumentadas, as variáveis duais associadas diminuem. Isso indica que quando um recurso está com folga em sua capacidade, a variável dual associada à restrição de capacidade daquele recurso é igual a zero. Além disso, com a inserção da CF no modelo, a variável dual associada à restrição de capacidade se torna diferente de zero momentos antes de o recurso estar completamente ocupado, permitindo o tomador de decisão decidir ou não por ampliar as instalações industriais antes mesmo de esgotar a capacidade.

O Artigo 3 apresentou a evolução da decomposição do modelo de planejamento de produção passo a passo, a partir do modelo clássico até a decomposição contemplando a restrição de capacidade dada pela CF. Além disso, foi detalhada a maneira como a penalidade se comporta nos subproblemas do modelo, de maneira a indicar qual o tamanho de tal penalidade a ser atribuída. A Tabela 7 e Tabela 8 apresentam os valores obtidos pelo experimento numérico realizado no Artigo 3.

Tabela 7 – Resultados do modelo matemático de planejamento de produção com capacidade nominal de produção incorporada, utilizando decomposição, Artigo 3.

<b>Variáveis</b>	<b>Período 1</b>	<b>Período 2</b>	<b>Total</b>
<b>Produto 1</b>	20.00000	62.00000	82.00000
<b>Produto 2</b>	86.66667	13.33333	100.00000
<b>Valor da Solução</b>	1480.00000	758.00000	2238.00000

Fonte: Autor (2012).

Tabela 8 – Resultados do modelo matemático de planejamento de produção com capacidade nominal de produção incorporada, utilizando decomposição e as penalidades atribuídas nos subproblemas, Artigo3.

<b>Variáveis</b>	<b>Período 1</b>	<b>Período 2</b>	<b>Total</b>
<b>Produto 1</b>	68.00000	60.00000	128.00000
<b>Produto 2</b>	51.50000	48.50000	100.00000
<b>Valor da Solução</b>	1384.50000	1267.50000	2652.00000

Fonte: Autor (2012).

Comparando os resultados obtidos nas tabelas do Artigo 3 fica clara a necessidade do uso da penalidade nos subproblemas, de modo a balancear o sistema, permitindo a resolução do problema de planejamento de produção, com restrição de capacidade, utilizando a decomposição.

### 3.2 CONCLUSÃO FINAL

A abordagem de decomposição acoplada com CF apresentada neste trabalho mostra que os esquemas clássicos de decomposição não funcionam muito bem quando o modelo incorpora a restrição de capacidade nominal, neste caso, dada pela CF. Este parece ser o motivo pelo qual outros autores que trataram com esse tipo de modelo dizem relaxar as restrições de capacidade. No entanto, inserindo a penalidade nos subproblemas do modelo foi possível realizar a decomposição na presença da restrição de capacidade.

Nesse trabalho foram apresentados dois tipos de decomposição, um por meio de subproblemas convexos, e outro, por meio de subproblemas lineares. A escolha do modelo depende de dois fatores, sendo um, a disponibilidade de software adequado para tratar de cada um dos tipos de modelo, e o outro, a capacidade de armazenamento, dado que no caso dos modelos lineares o número de restrições aumenta consideravelmente. Como o custo computacional para resolver ambos os problemas de otimização, tanto o problema convexo quanto o problema linear, crescem polinomialmente com o número de variáveis, a decomposição poupa tempo em todas as circunstâncias, além de poupar armazenamento para problemas de otimização de larga escala.

Com o acoplamento da CF, o modelo de planejamento de produção torna-se mais realista, pois considera fatores como capacidade de produção e *lead time*. Além disso, o estudo realizado ilustra que sistemas produtivos eficientes devem operar com utilização de

capacidade abaixo de 100%, para atender à variabilidade inerente aos processos produtivos. Esse fato parece mostrar que o senso comum não incorporar variabilidade.

## REFERÊNCIAS

ASMUNDSSON, J.M. *et al.* Production Planning with Resources Subject to Congestion, Published online 20 January 2009 in **Wiley Interscience** (www.interscience.wiley.com), DOI 10.1002/nav.20335.

CHU, S.C.K. *A mathematical programming approach towards optimized master production scheduling.* **Int. J. Production Economics** n.38, p.269-279, 1995.

GRAVES, S.C. *A Tactical Planning Model for a Job Shop,* **Operations Research**, n.34, p.522–533, 1986.

HOLT, C.C.; MODIGLIANI *et al.* *Derivation of a linear rule for production and employment.* **Manage Science** v.2, n.2, p.159-177, 1956.

HOPP, W.J.; SPEARMAN, M.L. **Factory Physics: Foundations of Manufacturing Management**, Boston: Irwin/McGraw–Hill, 2001.

IRDEM, D.F.; KACAR, N.B.; UZSOY, R. *An Exploratory Analysis of Two Iterative Linear Programming–Simulation Approaches for Production Planning,* **IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing**, v. 23, n.3, Aug 2010.

JACKSON, J.R. **Scheduling a production line to minimize maximum tardiness.** Los Angeles: University of California, 1955.

KARMARKAR, U.S. *Capacity loading and release planning with work–in–process and lead times.* **Journal of Manufacturing and Operations Management**, n.2, p.105–123, 1989.

KEFELI, A. *et al.* *Using a mathematical programming model to examine the marginal price of capacity resources,* **Int. J. Production Economics**, 2010, Aprovado em 2011.

KEMPF, K.G.; KESKINOCAK, P. & UZSOY, R. **Planing Production and Inventories in the Extended Enterprise: A State of Art Handbook**, v.1, Springer 2011.

KOOPMANS, T. **Activity analysis of production and allocation.** New York: Wiley, 1951.

MANNE, A.S. *On the job-shop scheduling problem.* **Operational Research** v.8, n.2, p.219-223, 1960.

MISSBAUER, H. & UZSOY, R., *Optimization Models for Production Planning*, **Planning Production and Inventories in the Extended Enterprise** v.1, Springer, 2010.

MODIGLIANI, F. & HOHN, F.E. *Production planning over time and the nature of the expectation and planning horizon*. **Econometrica**, v.23, n.1, p.46-66, 1955.

ROCKAFELAR, R.T. **Convex Analysis**, Academic Press, 1970.

SAMPAIO, R.J.B.; UZSOY, R. & WOLLMANN, R.R.G. *Acoplando Clearing Function e Decomposição em Problemas de Planejamento de Produção*. **XVIII SIMPEP**, Bauru, SP: FEB-UNESP, 2011.

SAMPAIO, R.J.B.; UZSOY, R. & WOLLMANN, R.R.G. *Using a Clearing Function Approach with Decomposition for Production Planning Problems*. **XVII ICIEOM**, Belo Horizonte, MG: ABEPRO, 2011.

SAMPAIO, R.J.B.; VIEIRA, G.E. & FAVARETTO, F. **An Approach of Mathematical Programming to the Master Production Scheduling Problem**. Curitiba, PR: PUCPR / PPGEPS, 2009 (relatório técnico de uso do departamento).

SRINIVASSAN, A.; CAREY, M. & MORTON, T. E. **Resource Pricing and Aggregate Scheduling in Manufacturing Systems**, Pittsburgh, PA: Graduate School of Industrial Administration, Carnegie-Mellon University, 1988.

UZSOY R. & SAMPAIO, R.J.B. *Unifying inner and outer approach of Clearing Function to deal with Pricing Capacity of Resources at Lows Levels of Utilization*. (Artigo em preparação, fornecido pelos autores), 2011.