

Rafael Maestrelli

Funções Ortonormais em Tempo Contínuo com Seleção Ótima
das Dinâmicas do Modelo na Identificação de Sistemas no
Domínio da Frequência

CURITIBA

2010

Rafael Maestrelli

Funções Ortonormais em Tempo Contínuo com Seleção Ótima
das Dinâmicas do Modelo na Identificação de Sistemas no
Domínio da Frequência

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas da Pontifícia Universidade Católica do Paraná como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção e Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Henrique da Costa Oliveira

CURITIBA

2010

Agradecimentos

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização e divulgação deste trabalho.

Em especial ao Professor Gustavo pelo apoio, orientação e oportunidades ofertadas desde a graduação e à CAPES pelo auxílio financeiro que deu suporte a este trabalho.

Agradeço à Engenheira Angélica da Costa Oliveira Rocha pelo fornecimento dos dados de medição dos transformadores para uso em pesquisa aplicada.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
1 Introdução	1
1.1 Introdução à Identificação de Sistemas no Domínio da Frequência	5
1.2 Revisão de Modelos Paramétricos para Identificação no Domínio da Frequência	7
1.2.1 Método de Levi	7
1.2.2 <i>Vector Fitting</i>	9
1.2.3 Conjunto Geradores Otimizados	12
1.2.4 Método de Imposição de Pólos e Ajuste da Posição Ótima dos Zeros	13
1.3 Estrutura do Trabalho	14
1.3.1 Contribuição	14
1.3.2 Estrutura da Dissertação	14
2 Identificação não paramétrica	16
2.1 Análise da resposta em frequência	16
2.2 Estimção Empírica da Função de Transferência	17
2.2.1 Transformada de Fourier	17
2.2.2 Estimção Empírica da Função de Transferência (ETFE)	19
2.2.3 ETFE suavizada	21
2.3 Comentários Finais	22

3	Bases de Funções Ortonormais em Tempo Contínuo	23
3.1	Espaço de Hilbert Relacionada a Funções em Tempo Contínuo	23
3.2	Expansões Ortonormais	25
3.3	Bases Ortonormais	25
3.4	Comentários Finais	28
4	Identificação Paramétrica de Sistemas no Domínio na Frequência	29
4.1	Identificação no Domínio da Frequência Usando Bases de Funções Ortonormais	30
4.2	Construção do Modelo em Espaço de Estados	31
4.3	Seleção Ótima dos Parâmetros do Modelo	36
4.3.1	Cálculo do Gradiente da Função Custo no Domínio da Frequência	38
4.4	Seleção Ótima dos Pólos do Modelo	41
4.5	Cálculo dos Coeficientes do Modelo	42
4.5.1	Solução por Mínimos Quadrados	42
4.5.2	Solução por Ponto de Mínimo	43
4.6	Seleção Inicial dos Pólos para Sistemas Mal Amortecidos	45
4.7	Comentários Finais	47
5	Exemplos de Utilização dos Métodos Propostos	48
5.1	Critérios de Avaliação da Qualidade do Modelo Identificado	50
5.2	Caso de Simulação com Pólos Reais	51
5.3	Caso de Simulação com Pólos Complexos	55
5.4	Modelagem do Simulador VCFP	60
5.4.1	Estimação não Paramétrica da Resposta em Frequência	61
5.4.2	Identificação Paramétrica	62

5.5	Identificação dos Transformadores Elétricos	70
5.5.1	Transformador de Taquaril	71
5.5.2	Transformador de Irapé	84
5.5.3	Transformador de Jaguará	89
6	Conclusões, Contribuições e Perspectivas Futuras	94
6.1	Conclusões e Contribuições	94
6.2	Perspectivas Futuras	95
	Apêndice A – Trabalhos Publicados	97
	Apêndice B – Cálculo do Gradiente da Função Custo no Domínio do Tempo	110
	Referências Bibliográficas	112

Resumo

A busca de modelos matemáticos que representem a dinâmica de sistemas é de grande utilidade, sendo foco de muitos estudos, tanto nas universidades quanto na indústria. Porém, na prática, não é simples obter um modelo deste, pois a modelagem de sistemas envolve conceitos físicos e/ou químicos que, juntos, podem dificultar o desenvolvimento de uma solução analítica. Para solucionar tal problema, métodos de identificação de sistemas são uma alternativa para obter modelos matemáticos de sistemas dinâmicos, uma vez que os dados de entrada e saída do sistema são utilizados em substituição a um conhecimento profundo sobre as leis que regem a dinâmica do processo, simplificando-as. A identificação de sistemas pode ser realizada no domínio do tempo ou da frequência, com modelos em tempo discreto ou contínuo, sendo que na identificação no domínio da frequência para modelos em tempo contínuo, os dados são um conjunto de frequências com as respostas em módulo e fase correspondentes do sistema. Uma das etapas da identificação é a seleção da estrutura do modelo, por exemplo, aqueles formados por uma base de funções ortonormais. Nesta pesquisa são abordados problemas com as seguintes peculiaridades: os sistemas são lineares; os dados estão no domínio da frequência; e os modelos matemáticos são parametrizados em tempo contínuo. A partir destes pontos, é estudada a base das funções ortonormais em tempo contínuo para a solução do problema de identificação. Desta forma, é necessário projetar as funções da base, o que consiste na escolha de pólos que representem adequadamente as dinâmicas presentes no sistema a ser identificado, sendo necessário para tal, o estudo de um método específico para a escolha desses pólos, no caso de o sistemas apresentar picos de ressonância. Estando os pólos definidos, é obtida a etapa do cálculo dos coeficientes das funções, na qual são explorados dois métodos para a solução dos mesmos. Entretanto, como a parametrização do modelo não é única, propõe-se a busca ótima dos parâmetros por meio do cálculo analítico do gradiente de uma função custo para proporcionar modelos matemáticos mais simples e precisos. Exemplos ilustram a validade e aplicabilidade da técnica em sistemas reais, em particular sistemas de potência elétrica (transformadores), VCFP (*Voice Coil-Driven Flexible Positioner*).

Palavras Chaves: Identificação no domínio da frequência, base de funções ortonormais em tempo contínuo, otimização de pólos, identificação aplicada a sistemas de potência, sistemas com modos ressonantes.

Abstract

The search for mathematical models that represent the system dynamics is of great use, as also the focus of many studies in the university and industry. However, in practice, is not simple to get one of this model as the modeling of systems involving physical concepts and / or chemicals, that together can impede the development of an analytical solution. To solve this problem, system identification methods are an alternative for obtaining mathematical models of dynamic systems, since the data input and output of the system are used in place of a thorough knowledge about the laws governing the dynamics of the process, simplifying procedures. The system identification can be performed in time domain or frequency, with models in discrete or continuous time, and in identifying the frequency domain for continuous time models, the data is a set of frequencies in the response module and corresponding phase of the system. One of the stages of identification is the selection of the model structure, for example, those formed by an orthonormal basis functions. This research presents issues with the following peculiarities: the systems are linear, the data is in the frequency domain, and the mathematical models are parameterized in continuous time. Then, the orthonormal basis functions is studied in continuous time for solving the problem of identification. Thus, it is necessary to design the basis functions, which consists of choosing clusters that adequately represent the dynamics present in the system to be identified, being required to do so, the study of a specific method for choosing these poles, if systems present the resonance peaks. Since are the poles defined, the step is obtained from the calculation of functions coefficients, which are explored two methods for their solution. However, as the parameterization of the model is not unique, it is proposed to search the optimal parameters through analytical calculation of the gradient of a cost function to provide mathematical models more simple and accurate. Examples illustrate the validity and applicability of the technique in real systems, particularly electric power system (transformers), VCFP (*emph* Voice Coil-Driven Flexible Positioner).

Keywords: Frequency domain identification, continuous time orthonormal basis functions, optimal pole choice, power system identification, systems with resonant modes.

1 Introdução

Representar, por meio de modelos matemáticos, sistemas e fenômenos observados sempre foi um desafio. Desde a antiguidade, o homem tem procurado descrever matematicamente sistemas reais para ajudar a entendê-los e, assim, resolver problemas com eles relacionados. Apesar da consolidação de técnicas de modelagem, o antigo desafio de representar um sistema real usando-se um modelo matemático ainda estimula diversos pesquisadores. Os principais fundamentos desta teoria estão descritos em Aguirre (2004), Coelho e Coelho (2004), Ljung (1999), Bosch e Klauw (2000), Pintelon e Schoukens (2001), Heuberger, Van den Hof e (Eds) (2005), Garnier e Wang (2008).

Segundo Kheir (1996), a identificação de sistemas é a arte de criar representações matemáticas de fenômenos físicos, químicos ou eletrônicos que aparecem na realidade. Essas representações devem ser relativamente simples mantendo precisão suficiente para ser útil para o propósito que levou o fenômeno a ser modelado. Dentro das várias formas de classificação de técnicas de modelagem matemática cita-se um grupo de três métodos denominados: modelagem caixa branca, modelagem caixa preta e modelagem caixa cinza.

O processo de modelagem matemática conhecido como modelagem caixa branca ou pela física (ou natureza) do processo requer um conhecimento prévio sobre as leis que regem a(s) dinâmica(s) envolvidas. Logo, no caso de um sistema físico, devem ser conhecidas as leis físicas que regem o sistema, como as leis de Newton, lei da conservação da massa, lei de Kirchhoff, entre outras, assumindo que os componentes do processo sejam ideais. Este tipo de modelo assume também que o sistema é completamente conhecido, ou seja, todos os comportamentos do sistema podem ser explicados segundo as leis presentes na teoria.

Embora a modelagem caixa branca seja uma abordagem útil, muitas vezes, não é realista assumir o conhecimento completo de um processo. Deve-se levar em consideração que saber exatamente a constante de inércia ou de fricção de um sistema ou o valor exato de uma capacitância é difícil. Já para sistemas mais complexos, as leis ide-

alizadas podem não conseguir descrever o sistema corretamente, ou a natureza interna do sistema não é conhecida o suficiente para permitir uma representação matemática de leis físicas. Como alternativa de modelagem de sistemas que não depende do equacionamento de fenômenos, a modelagem caixa preta ou simplesmente identificação de sistemas, é sugerida na literatura. Essa modelagem tem como característica a necessidade de pouco ou nenhum conhecimento prévio da estrutura interna do processo. A identificação de sistemas se propõe a obter um modelo matemático que explique a relação de causa e efeito entre as variáveis de entrada e saída do processo, em parte de forma aproximada, presentes nos dados de entrada e de saída (Aguirre, 2004; Garnier; Wang, 2008).

As razões para a ocorrência cada vez maior de modelagem caixa preta podem ser: a complexidade cada vez maior dos processos, sendo às vezes nada trivial escrever as equações básicas do sistema (modelagem baseada na física ou natureza do processo); o surgimento de computadores baratos e com bom desempenho, assim o processamento e análise dos dados retirados do processo é facilitado; o desenvolvimento de modelos que explicam cada vez melhor o comportamento dos dados.

A modelagem caixa cinza utiliza-se de uma mescla das duas modelagens citadas anteriormente, ou seja, usa de informações adicionais do sistema não contidas nos dados de identificação, porém conhecidas *a priori*.

A identificação (ou modelagem) é útil quando se deseja projetar um sistema de controle para o sistema, explicar o comportamento de um sistema existente, economizando, desta forma, tempo e dinheiro em testes experimentais. Enfim, a identificação é uma maneira de responder questões sobre o sistema sem a necessidade de fazer testes perigosos ou destrutivos. Pode-se também saber qual será o comportamento em condições operacionais padrões e/ou extremas sem danificar o sistema.

Segundo Ljung e Glad (1994) a identificação de sistemas é utilizada para:

1. Previsão ou Diagnóstico: é aplicada para prever o comportamento dinâmico de um sistema.
2. Supervisão: é utilizada em simulações onde avaliam-se características operacionais do sistema, para fins de projeto, tomada de decisão ou treinamento.

3. Otimização: é empregada em setores como escalonamento, manutenção e economia de sistemas industriais, com fins de maximizar a produção e minimizar os custos.
4. Análise e projeto de sistemas de controle: é utilizada para sintonia de controladores de diversos tipos.

As áreas que tem-se aplicado a identificação de sistemas são: Engenharia Elétrica como por exemplo, em transformadores e sistemas de potência; Engenharia Eletromecânica como por exemplo manipuladores robóticos (Johansson et al., 2000; Wernholt; Gunnarsson, 2004) e servomecanismos (Garcia, 1997); Engenharia Mecânica em sistemas HVAC (*Heating, Ventilation and Air Conditioning*) (Brus, 2005) e trocadores de calor (Weyer; Gábor; Katalin, 2000); Engenharia Química em colunas de destilação (El-Fandi; Henderson; McGhee, 1998); Engenharia Civil com aplicação em edificações (Freire, 2006); e também em outras áreas como Economia (Aguirre; Aguirre, 1998), Medicina (Westwick; Kearney, 2003; Ludeman, 1993), e Engenharia Ambiental (Bechmann et al., 1999).

As principais etapas de um problema de identificação de sistemas são mostradas na figura 1.1 e descritas a seguir (Aguirre, 2004; Pintelon; Schoukens; Vandersteen, 1997; Ljung, 1999; Heuberger; Van den Hof; (EDS), 2005):

1. Testes dinâmicos e coleta de dados. Como mencionado anteriormente o procedimento de identificação de sistemas está relacionado com a obtenção de modelos através de dados experimentais do processo, logo é necessário gerar dados suficientemente bons para a extração da(s) dinâmica(s) do sistema. Os dados podem ser extraídos no domínio do tempo ou da frequência, de acordo com o método de identificação utilizado. Esta etapa compreende os blocos de projeto do experimento e coleta dos dados.
2. Determinação da estrutura do modelo. Nesta etapa decide-se o modelo a ser usado para representar o sistema, que pode ser linear ou não linear, em tempo contínuo ou discreto, paramétrico ou não paramétrico, etc.
3. Estimação de parâmetros. Nesta etapa define-se o algoritmo a ser utilizado para a estimação dos parâmetros do modelo, cuja estrutura vêm da etapa anterior.

4. Validação do modelo. Após o cálculo dos parâmetros do modelo, é necessário verificar se as características de interesse do sistema a ser identificado estão representadas. Se o modelo contém as informações desejadas, ele pode ser utilizado. Caso contrário, os procedimentos supra citados são refeitos.

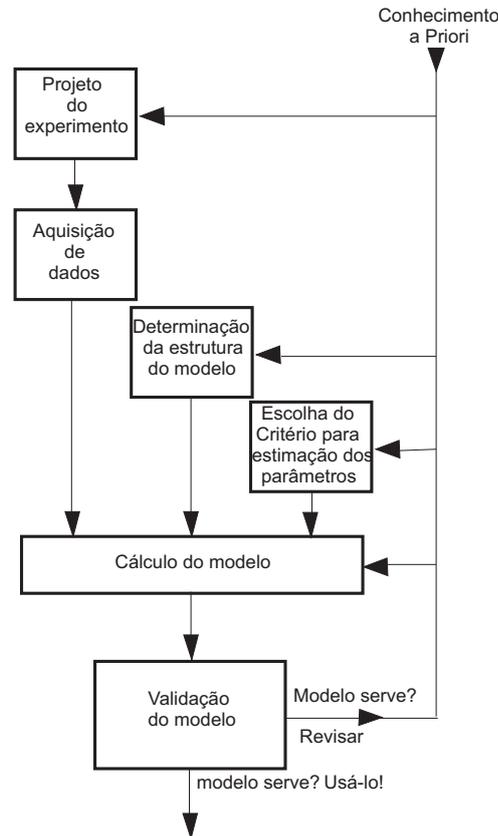


Figura 1.1: Diagrama de etapas da identificação de sistemas

Fonte: (Ljung, 1999, p. 15)

Definição 1.1 (Sistemas em tempo contínuo e em tempo discreto) *O sistema em tempo contínuo é representado por sinais de entrada $u(t)$ e de saída $y(t)$, onde $t \in \mathbb{R}$ representa o tempo, sistema em tempo contínuo é associado a Transformada de Laplace ($H(s)$) e com resposta em frequência é representada por $H(j\omega)$, onde ω representa as frequências.*

O sistema em tempo discreto é representado pelos sinais de entrada e saída, $u(k\Delta t)$ e $y(k\Delta t)$, ou $u(k)$ e $y(k)$ respectivamente, onde Δt é o período de amostragem, o número da amostra é representado por $k \in \mathbb{Z}$. O sistema em tempo discreto é associado a Transformada Z ($G(z)$) e representado na frequência por $G(e^{j\omega\Delta t})$. \square

1.1 Introdução à Identificação de Sistemas no Domínio da Frequência

A identificação no domínio da frequência se baseia na propriedade de que sistemas lineares assintoticamente estáveis, excitados por uma entrada senoidal tem, em regime permanente, uma resposta igualmente senoidal. Em particular, a amplitude é multiplicada por $|H(j\omega)|$ e a fase é defasada de $\angle H(j\omega)$ radianos, conforme:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\phi}, \quad (1.1)$$

onde ϕ é a defasagem em radianos da fase.

$$\phi = \angle H(j\omega). \quad (1.2)$$

Assuma que a curva de resposta em frequência de um sistema linear $H(s)$ dada por $H(j\omega)$, amostrada no conjunto de frequências dado por $W = \{\omega_1, \dots, \omega_{N_d}\}$ é conhecida, isto é, o valor de $H(j\omega_k)$ para $k = 1, \dots, N_d$ é conhecido. Então considere que o sistema $H(s)$ a ser identificado pode ser representado por uma função transferência racional com parâmetros $a_0, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m$ isto é:

$$\hat{H}(\theta, s) = \frac{a_0 + a_1s + \dots + a_ns^n}{b_0 + b_1s + \dots + b_ms^m}, \quad (1.3)$$

onde $\theta = [a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m]^T \in \mathbb{R}^{n+m+2}$ são os parâmetros a serem estimados. Lembrando que b_0 em muitos casos é definido sendo igual a 1.

A estimação dos parâmetros usualmente é realizada por um método numérico, onde se utiliza minimização de uma função de custo (geralmente na forma (1.4)), pois a solução analítica não é trivial. Diversos algoritmos de otimização podem ser utilizados para solucionar o problema.

$$J(\theta) = \min_{\theta \in \mathbb{R}^{2n+1}} J(\theta), \quad (1.4)$$

$$J(\theta) = \left\| H(j\omega) - \hat{H}(\Theta, j\omega) \right\|_2^2,$$

Diversos autores citam vantagens na utilização de dados no domínio da frequência no contexto da identificação de sistemas (Pintelon; Schoukens; Vandersteen, 1997;

Pintelon et al., 1994; Ljung, 1997; Schoukens; Pintelon, 1991). Algumas delas são:

- Fácil redução de ruído: o ruído aparece como frequências que não foram excitadas na entrada do sistema, assim as faixas de frequências não excitadas são identificadas e eliminadas da saída do sistema (Ljung, 1997; Schoukens; Pintelon, 1991).
- Redução do volume de dados: muitas amostras no domínio do tempo são substituídas por poucas linhas espectrais (Ljung, 1997; Schoukens; Pintelon, 1991).
- Quando é utilizado a DFT (*Discrete Fourier Transform*) para o cálculo do espectro (uso da ETFE por exemplo) o ruído no domínio da frequência é assintoticamente distribuído em uma curva normal complexa (Breillinger, 1981).
- Não é necessário estimação de estado inicial do sistema, pois o sistema já é analisado em estado estacionário (Schoukens; Pintelon, 1991).
- Validação do modelo, com uma excitação periódica do sistema há pontos muito bem estimados da resposta na frequência (Guillaume; Pintelon; Schoukens, 1992; Schoukens; Pintelon, 1991).
- É possível combinar resultados de diferentes experimentos (Ljung, 1997; Schoukens; Pintelon, 1991).

Nesse contexto, existem vários métodos de identificação de sistemas baseados em dados no domínio da frequência. O método mais tradicional neste sentido é o método de Levi (Levi, 1959), também abordado por Nunes (2006), que revisa o método clássico e propõe algumas modificações para uma melhora no desempenho. A aproximação por *Vector Fitting* e suas variações são abordadas em Gustavsen e Semlyen (1999), Gustavsen (2006), Deschrijver, Haegeman e Dhaene (2007), Deschrijver, Gustavsen e Dhaene (2007). A identificação utilizando o método de conjuntos pré-selecionados via imposição de pólos é apresentada por Valle (2005). Em Wulhynek (2002) e Ades (1999) é utilizado o conjunto geradores otimizados para identificar sistemas no domínio da frequência. Na sequência, detalhes sobre os métodos citados são descritos. Porém não são os únicos métodos existentes, outros exemplos são: Pleite et al. (2002) apresenta uma modelagem de sistema do tipo caixa-cinza aplicada a sistemas elétricos. As bases

de funções ortonormais são aplicadas na identificação de sistemas no domínio da frequência em tempo discreto nos seguintes trabalhos: Ninness (1996), De Vries e Van den Hof (1998), Akçay e Heuberger (2001). Em Rolain et al. (1995) e Rolain, Schoukens e Pintelon (1997) é apresentada uma técnica para estimação paramétrica de um modelo racional baseado na expansão do polinômio ortogonal de Forsythe. O trabalho apresentado em Pintelon et al. (1994) traz um apanhado de métodos para estimação dos parâmetros do modelo sem uma técnica de identificação específica. Ljung (1997) discute em seu trabalho algumas questões básicas sobre identificação no domínio da frequência. Partington (2004) apresenta uma revisão de técnicas que são tidas como efetivas na identificação de sistemas no domínio da frequência. Uma aplicação em sistemas MIMO (*Multi-Inputs Multi-Outputs*) é apresentada em Agüero, Yuz e Goodwin (2007). Em Wills, Ninness e Gibson (2007) a aproximação da resposta em frequência é realizada pela estimação das matrizes de um espaço de estados.

Os trabalhos (Reginato, 2008; Reginato; Oliveira, 2007a, 2007b, 2008a, 2008b) descrevem o processo de identificação de sistemas usando bases ortonormais formadas por funções internas em tempo discreto. Aspectos de identificação no domínio da frequência, de sistemas MISO e a seleção de pólos são descritos, sendo que um método híbrido para seleção de pólos neste contexto é proposto.

1.2 Revisão de Modelos Paramétricos para Identificação no Domínio da Frequência

Muitas técnicas tem sido propostas para obter modelos paramétricos formados por funções racionais a partir de curvas de resposta em frequência. Alguns deles, citados na Seção anterior, e serão descritos com mais detalhes a seguir.

1.2.1 Método de Levi

Segundo o método de Levi, a determinação dos parâmetros da equação (1.3) em função dos dados de resposta em frequência do sistema é feita por intermédio da resolução de equações lineares do tipo $Ax = b$. O sistema de equações é definido pela equação (1.5), levando em consideração que $b_0 = 1$ em (1.3), com a ordem do numerador

e denominador podendo ser diferentes uma da outra.

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & -\lambda_2 & 0 & \cdots & T_1 & S_2 & -T_3 & -S_4 & \cdots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & \cdots & -S_2 & T_3 & S_4 & -T_5 & \cdots \\ \lambda_2 & 0 & -\lambda_4 & 0 & \cdots & T_3 & S_4 & -T_5 & -S_6 & \cdots \\ 0 & \lambda_4 & 0 & -\lambda_6 & \cdots & -S_4 & T_5 & S_6 & -T_7 & \cdots \\ \vdots & \cdots \\ T_1 & -S_2 & -T_3 & S_4 & \cdots & U_2 & 0 & -U_4 & 0 & \cdots \\ S_2 & T_3 & -S_4 & -T_5 & \cdots & 0 & U_4 & 0 & -U_6 & \cdots \\ T_3 & -S_4 & -T_5 & S_6 & \cdots & U_4 & 0 & -U_6 & 0 & \cdots \\ S_4 & S_5 & -S_6 & -T_7 & \cdots & 0 & U_6 & 0 & -U_8 & \cdots \\ \vdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ T_1 \\ S_2 \\ T_3 \\ \vdots \\ 0 \\ U_2 \\ 0 \\ U_4 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

sendo,

$$\lambda_h = \sum_{k=0}^N \omega_k^h, \quad (1.6)$$

$$S_h = \sum_{k=0}^N \omega_k^h \operatorname{Re}(H(j\omega_k)), \quad (1.7)$$

$$T_h = \sum_{k=0}^N \omega_k^h \operatorname{Im}(H(j\omega_k)), \quad (1.8)$$

$$U_h = \sum_{k=0}^N \omega_k^h (\operatorname{Re}(H(j\omega_k))^2 + \operatorname{Im}(H(j\omega_k))^2). \quad (1.9)$$

onde $\operatorname{Re}(\cdot)$ é a parte real do número complexo, $\operatorname{Im}(\cdot)$ é a parte imaginária do número complexo e N é a soma das ordens dos polinômios da função de transferência (1.3), ou seja, $N = n + m$.

Modificações e Adaptações no Método de Levi

O método de Levi apresenta bom desempenho para sistemas de baixa ordem, porém, para estimações de um modelo paramétrico de ordem elevada (por exemplo, ordem 5 ou superior) a matriz da equação (1.5), equivalente a matriz A de um sistema $Ax = b$, torna-se mal condicionada. Isto é devido ao fato de que alguns elementos dessa matriz são iguais ao somatório de valores do vetor das frequências elevado à

potências que chegam a ser iguais à ordem do modelo. Estes elementos assumem valores grandes em comparação com outros elementos de A e, conseqüentemente, tem-se um mal condicionamento da matriz no cálculo de sua inversa gerando imprecisão numérica.

Duas modificações propostas em Nunes (2006) no método de Levi visam melhorar o condicionamento numérico do problema de estimação dos parâmetros de um modelo para $H(j\omega)$. São elas:

- a) normalização da faixa de frequências de $H(j\omega)$;
- b) utilização de escalonamento com pivoteamento parcial na solução da equação (1.5).

A primeira melhoria proposta trata de normalizar a faixa de valores amostrados de frequências. Para tal, o vetor de frequências ω é escalonado por um fator $\mu = \omega_N/f_d$, que gera um novo vetor de frequência normalizado (ω_{Normal}) dado pela equação (1.10), com f_d sendo a frequência máxima desejada no vetor normalizado e ω_N é a máxima frequência do vetor de frequências original ω .

$$\omega_{Normal} = \frac{\omega}{\mu} = \frac{\omega f_d}{\omega_N}. \quad (1.10)$$

O valor de f_d é estipulado de forma que deixe a faixa de frequência analisada maior que a frequência de corte do sistema real. Com a maior frequência passando a ser um valor menor, o resultado dos somatórios que resultam nos parâmetros de A torna-se menor, melhorando o condicionamento numérico do processo de inversão da matriz A .

A segunda melhoria consiste em resolver o sistema $Ax = b$ por escalonamento com pivoteamento parcial. Tal processo utiliza a eliminação de Gauss, que nada mais é que transformar a matriz aumentada $[A|b]$ em uma matriz equivalente no formato triangular superior. Com isso evita-se erros de arredondamento numérico e elimina-se a necessidade da inversão da matriz A .

1.2.2 *Vector Fitting*

Os autores Gustavsen e Semlyen (1999) propuseram um método para o ajuste de dados no domínio da frequência por funções polinomiais racionais denominado *Vector*

Fitting. O *Vector Fitting* é essencialmente uma reformulação robusta da iteração de Sanathanan-Koerner (Sanathanan; Koerner, 1963) usando bases de funções racionais (funções parciais) ao invés de polinomiais, e realocação de pólos ao invés de ponderação (Hendrickz; Dhaene, 2006).

No método *Vector Fitting*, o objetivo é aproximar resposta em frequência $f(s)$ com a função racional (1.11), onde os resíduos c_n e os pólos a_n podem ser escalares reais ou pares complexos conjugados e d e e são reais e opcionais

$$f(s) = \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{s - a_n} + d + se. \quad (1.11)$$

No ajuste por *Vector Fitting*, o processo tem dois estágios: no primeiro estágio, faz-se o uso de estimativas iniciais para os pólos, podendo estes serem reais ou complexos, dentro da faixa de frequência de interesse. Na sequência, uma função escalonamento é introduzida e, deste ajuste inicial, uma nova estimativa para os pólos é obtida, e utilizada no segundo estágio do ajuste, onde então os resíduos são estimados.

Em outras palavras, o método consiste na utilização de mínimos quadrados (MQ) sobre o problema linear (1.12), tal que

$$\sigma(s)f(s) = p(s), \quad (1.12)$$

onde

$$\sigma(s) = \sum_{n=1}^N \frac{c_n^*}{s - q_n} + 1, \quad (1.13)$$

$$p(s) = \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{s - q_n} + d + se, \quad (1.14)$$

sendo $\{q_n\}$ é o conjunto inicial de pólos. Como demonstrado em Gustavsen e Semlyen (1999) os pólos de $f(s)$ são iguais aos zeros de $\sigma(s)$ os quais são calculados como os auto-valores da matriz (Gustavsen, 2006):

$$\{a_n\} = \text{eig}(A - b \cdot c^T), \quad (1.15)$$

sendo A é uma matriz diagonal que contém os pólos iniciais q_n , b é um vetor coluna de unitário, e c^T é um vetor linha dos resíduos $\{c_n^*\}$. O processo é aplicado iterativamente

nas equações (1.11)-(1.15) que são resolvidas repetidamente com os novos pólos $\{a_n\}$ substituindo os pólos anteriores $\{q_n\}$. A cada iteração os resíduos da equação (1.11) são calculados usando o problema MQ com os pólos agora conhecidos.

As principais vantagens do *Vector Fitting* em relação a outros métodos são:

- Os métodos iterativos são na sua maioria lentos por necessitarem de um grande número de iterações. No *Vector Fitting*, o número de iteração tende a ser pequeno.
- Os métodos de ajuste de polinômios de alta ordem para os dados no domínio s (Transformada de Laplace) tendem a ter problemas numéricos para um amplo intervalo de frequência, e em sinais com presença de ruído. O *Vector Fitting* não vem apresentando problemas ocasionados por esse sinais.

Relaxed Vector Fitting

Levando em consideração as dificuldades na convergência do problema de mínimos quadrados, Gustavsen (2006) propõe uma modificação que melhoraria a convergência do problema de MQ (1.12). Para tanto, a equação (1.13) é substituída por:

$$\sigma(s) = \sum_{n=1}^N \frac{c_n^*}{s - q_n} + d^*, \quad (1.16)$$

onde d^* é real.

Para evitar a solução trivial, é adicionada uma equação ao resultado do problema MQ:

$$Re \left\{ \sum_{k=1}^{N_s} \left(\sum_{n=1}^N \frac{c_n^*}{s_k - q_n} + d^* \right) \right\} = N_s. \quad (1.17)$$

A equação (1.17) reforça que o somatório da parte real de $\sigma(s)$, para as várias amostras de frequências, seja um valor diferente de zero, sem fixar nenhuma das variáveis livres.

Com a mudança de σ a equação (1.15) é substituída por:

$$\{a_n\} = eig(A - b d^{*-1} \cdot c^T), \quad (1.18)$$

onde $eig(.)$ representa os auto-valores.

Os zeros calculados por (1.18) só são aplicados com d^* diferentes de zero. Se o valor absoluto de d^* for menor que a tolerância $tol = 10^{-8}$, a solução é então descartada e o problema MQ é solucionado novamente com o valor para d^* em (1.16) : $d^* = tol(d^* |d^*|)$.

1.2.3 Conjunto Geradores Otimizados

De acordo com Ades (1999), Wulhynek (2002), o método de Conjunto Geradores Otimizados (CGO) assume que a representação da função de transferência $H(s)$, pode ser expandida segundo é apresentado a seguir:

$$\hat{H}(s) = \sum_{k=0}^n c_k T_k(s), \quad (1.19)$$

com $c_k \in \mathbb{R}$. $T_0(s) = 1$ e $T_k(s)$ para $k \geq 1$ assume uma das seguintes formas:

$$T_k(s) = \left(\frac{1}{s + b_0} \right)^p \quad \text{ou} \quad T_k(s) = \left(\frac{a_1 s + a_2}{s^2 + b_1 s + b_2} \right)^p \quad (1.20)$$

com $a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ garantindo que os pólos de $T_k(s)$ estejam em \mathbb{C}^0 , e p exprime a multiplicidade dos pólos dessas bases.

A minimização da função de custo (1.4) é utilizada para a estimação dos parâmetros por um método numérico. O algoritmo de otimização BFGS (*Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno*) (Bazaraa; Sherali; Shetty, 2006) é utilizado para o cálculo da solução em conjunto com a busca unidimensional de Wolfe. O BFGS é responsável por definir, a cada iteração, uma direção de busca, e o método de Wolfe é responsável pela determinação do passo aceitável a cada iteração na direção de busca.

Além da utilização da CGO, Wulhynek (2002) propõe a expansão do modelo estimado utilizando bases de Laguerre, para comparação com a expansão feita com o CGO.

$$\hat{H}(s) = \sum_{k=1}^n c_k L_k(s), \quad (1.21)$$

com $L_k(s)$ sendo, para $k = 1, \dots, n$:

$$L_k(s) = \frac{\sqrt{2b}(s-b)^{k-1}}{(s+b)^k}, k = 1, 2, 3 \dots \quad (1.22)$$

Os coeficientes b são os pólos no plano $'s'$. O cálculo dos parâmetros de $C = [c_0, \dots, c_n]$ é feito de forma a proporcionar o melhor ajuste ao critério da equação (1.23).

$$\min_{C \in (\mathbb{R})^{n+1}} J(C) = \min_{C \in \mathbb{R}^{n+1}} \left\| H(j\omega) - \sum_{k=0}^n c_k R_k(j\omega) \right\|_2, \quad (1.23)$$

1.2.4 Método de Imposição de Pólos e Ajuste da Posição Ótima dos Zeros

Tal método é decorrido em Valle (2005) e consiste da expansão do Conjunto Gerador na forma:

$$\hat{H}(s) = \sum_{k=0}^n c_k R_k(s), \quad (1.24)$$

sendo $R_k(s)$ igual a:

$$R_k(s) = \frac{s^k}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + 1}. \quad (1.25)$$

Os pólos são sugeridos através do método de imposição de pólos, isto se dá levando em consideração algumas informações do sistema real a ser identificado. Neste caso é obtido o diagrama de Bode e verificado os picos ressonantes. Com esta informação é determinada a parte imaginária do par de pólos complexo conjugado referente a um pico ressonante. A parte real de cada par de pólos é definida por um processo iterativo que minimiza uma função custo. Se o sistema não possui picos ressonantes o método iterativo é utilizado para a obtenção de pólos reais que representem a dinâmica do sistema. Os coeficientes (c_k) com $k = 1, 2, \dots, n$ são calculados de forma análoga aos cálculo dos parâmetros c_k da equação (1.21). Após a determinação do conjunto de pólos e zeros, otimizados iterativamente, os parâmetros do modelo são estimados com o algoritmo de otimização BFGS (Bazaraa; Sherali; Shetty, 2006) em conjunto com a busca unidimensional de Wolfe. Também é proposta a comparação da expansão (1.24) com o Conjunto de Laguerre Estendido definido por Ades (1999). Tal conjunto consiste em adicionar um novo termo, $L_0 = 1$, ao conjunto de base original (1.21) onde L_0 é zero. A idéia é encontrar uma função biprópia por meio de uma função estritamente própria gerada pela base original de Laguerre. Detalhes da formulação são encontrados em Ades (1999), Valle (2005).

1.3 Estrutura do Trabalho

1.3.1 Contribuição

Este trabalho aborda o problema da identificação de sistemas no domínio da frequência usando base de funções ortonormais ou OBF (*Orthonormal Basis Functions*) em tempo contínuo, isto é, funções na variável complexa ' s ' associada à Transformada de Laplace. Descreve-se um método para representação das matrizes do espaço de estados do modelo OBF em tempo contínuo, utilizando-se as funções conhecidas como Takenaka-Malmquist. As funções ortonormais mais conhecidas, isto é, a base de funções de Laguerre e Kautz, podem ser vistas como um caso particular destas funções.

O problema da escolha dos pólos que parametrizam a base de funções é um problema recorrente no contexto da identificação de sistemas com base de funções. Neste sentido, apresenta-se neste trabalho um novo método para obtenção destes parâmetros baseado no cálculo analítico da direção ótima de busca. Esta direção ótima, que pode ser tanto para os pólos quanto para o conjunto pólos e coeficientes que vai alimentar um algoritmo de otimização para cálculo dos parâmetros do modelo. Este desenvolvimento é descrito no contexto do domínio da frequência e também no domínio do tempo. Quando os pólos do modelo já estão fixados, o método tradicional de estimação dos coeficientes é, neste documento, comparado com o novo método para cálculo analítico destes coeficientes. Considerando que o foco da dissertação é a identificação no domínio da frequência, uma maneira de se obter a resposta em frequência, a partir de dados no domínio do tempo, é também apresentada. Estudos de caso envolvendo dados reais de medição de resposta em frequência de sistemas dinâmicos são apresentados.

1.3.2 Estrutura da Dissertação

Esta dissertação está estruturada da seguinte maneira:

Capítulo 2: Apresenta-se os principais conceitos relativos a identificação não paramétrica do sistema, ou seja, a estimação da resposta em frequência através dos dados no tempo. Este passo é pré-requisito para a aplicação dos métodos desenvolvidos neste trabalho, quando a resposta em frequência do sistema a ser identificado não está

disponível. Para tanto são revisados os princípios da estimação empírica da função de transferência, ETFE (*Empirical Transfer Function Estimate*) (Bosch; Klauw, 2000; Ljung, 1999).

Capítulo 3: Descreve-se o espaço de Hilbert relacionado com funções em tempo contínuo (Oliveira e Silva, 1995b). Apresenta-se os conceitos relativos à expansão de sinais usando uma base de funções ortonormais ou OBF (*Orthonormal Basis Functions*) no domínio do tempo contínuo (Oliveira e Silva, 1995b; Eykhoff, 1974). As representações das funções de Laguerre, de Kautz e na Takenaka-Malmquist são apresentadas.

Capítulo 4: Aborda-se a representação de sistemas dinâmicos com base de funções ortonormais OBF no domínio do tempo contínuo (Akçay; Ninness, 1999a, 1999b). A seleção dos pólos das funções e o cálculo dos coeficientes da base de funções ortonormais são apresentados, em conjunto com o novo cálculo para a direção ótima de busca dos parâmetros do modelo, sejam somente os pólos ou o conjunto pólos e coeficientes. Descreve-se também um método analítico para cálculo dos coeficientes do modelo, em contraponto a estimação via mínimos quadrados.

Capítulo 5: Demonstra-se os resultados da identificação em casos reais e de simulação, através de gráficos comparativos e tabelas com erros de estimação. Os resultados aplicados a sistemas reais são realizados com dados de transformadores de energia elétrica e com dados do VCFP (*Voice Coil-Driven Flexible Positioner*), um simulador do movimento da cabeça de leitura de um disco rígido.

Capítulo 6: Apresenta-se as conclusões e discute a relevância dos resultados da dissertação. Posteriormente são apontadas possibilidades para novas pesquisas sobre o assunto abordado durante essa dissertação.

Dois apêndices são incluídos neste documento.

Apêndice A: Descreve-se as publicações em anais de congresso diretamente relacionadas com esta dissertação.

Apêndice B: Descreve-se uma variação do cálculo da direção ótima de busca, apresentada no Capítulo 4, visando aplicação com dados no domínio do tempo.

2 Identificação não paramétrica

Os métodos de identificação não paramétricos são aqueles que não resultam em um modelo matemático definido por parâmetros, mas em uma representação gráfica que representa a dinâmica do sistema, isto é, em um modelo não paramétrico (exemplo resposta ao impulso ou resposta em frequência). Este Capítulo trata da identificação de modelos não paramétricos descritos pela resposta em frequência. Essa etapa é necessária quando se assume uma identificação no domínio da frequência e a resposta em frequência do sistema não está disponível. Sendo assim, se a resposta temporal, ou seja, os dados no domínio do tempo, estão disponíveis, pode-se conseguir a resposta em frequência usando-se um método de identificação não paramétrica. A presença da resposta em frequência do sistema a ser identificado é um requisito para a aplicação de métodos analisados neste documento. Neste sentido, este Capítulo está estruturado como descrito a seguir: na Seção 2.1 é feita uma apresentação formal do que é a resposta em frequência e na Seção 2.2 é apresentada uma forma de se obter a resposta em frequência do sistema através de dados no domínio do tempo.

2.1 Análise da resposta em frequência

O conceito de resposta em frequência se baseia na propriedade de que sistemas lineares assintoticamente estáveis em regime permanente, excitados por uma entrada senoidal, têm em regime permanente uma resposta igualmente senoidal, de frequência ω . A fase e amplitude do sinal de saída são, em relação ao sinal de entrada, alteradas em função da frequência ω e das características dinâmicas do sistema (Oppenheim; Willsky; Nawab, 1997; Aguirre, 2004).

Assumindo uma entrada do tipo:

$$u(k) = A \cos(\omega_0 k), \quad (2.1)$$

aplicada em um sistema com resposta em frequência definida por $H(e^{j\omega})$ gera um sinal

de saída $y(k)$ em regime permanente dado por:

$$y(k) = A|H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 t + \phi) + v(k), \quad (2.2)$$

onde $\phi = \angle H(e^{j\omega_0})$ ou ângulo da resposta em frequência, e $v(k)$ é o termo que representa o ruído.

Portanto, os elementos da resposta em frequência, para uma dada frequência ω_0 , podem ser estimados através da comparação entre as amplitudes e defasagem dos sinais de entrada e saída. Com a aplicação de sinais de entrada com diferentes frequências, e repetindo a análise gráfica é obtida a resposta em frequência na faixa de frequências utilizada nos sinais de entrada. Este método de cálculo da resposta em frequência é amplamente utilizado, porém algumas dificuldades práticas estão presentes. Normalmente há ruído de medição prejudicando a análise visual. O fato de ser necessário que vários sinais de entrada sejam aplicados ao sistema torna o processo de coleta de dados longo. Finalmente, nem sempre é possível aplicar um sinal de entrada puramente senoidal em processos industriais.

2.2 Estimação Empírica da Função de Transferência

Um método para obtenção da resposta em frequência é conhecido como estimação empírica da função de transferência, do inglês *Empirical Transfer Function Estimate* (ETFÉ) (Ljung, 1999; Aguirre, 2004; Bosch; Klauw, 2000). Este método é baseado na transformada de Fourier discreta dos sinais de entrada e saída de um sistema, e em sua relação com a resposta em frequência. Na sequência apresenta-se conceitos da transformada de Fourier.

2.2.1 Transformada de Fourier

A definição das transformadas Discreta de Fourier (DFT) e Inversa da transformada Discreta de Fourier (IDFT) são dadas a seguir:

Definição 2.1 (*Discrete Fourier Transform (DFT)*) *Seja uma sequência finita dada por $u(k)$, $k = 1, 2, \dots, N$. A transformada discreta de Fourier DFT que leva $u(k)$*

para $U_N(\omega_\ell)$ é definida como sendo:

$$U_N(\omega_\ell) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N u(k) e^{-j\omega_\ell k} \quad \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N} \quad \ell = 1, \dots, N. \quad (2.3)$$

□

O sinal $u(k)$ pode ser recuperado com a Inversa da Transformada Discreta de Fourier (IDFT) do inglês *Inverse Discrete Fourier Transform* conforme apresenta-se a seguir.

Definição 2.2 (*Inverse Discrete Fourier Transform (IDFT)*) Seja $U_N(\omega_\ell)$ uma sequência finita de componentes de resposta em frequência, $\ell = 1, 2, \dots, N$, a inversa da transformada discreta de Fourier que leva $U_N(\omega_\ell)$ para $u(k)$ é definida como sendo (2.4):

$$u(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=1}^N U_N(\omega_\ell) e^{j\omega_\ell k} \quad \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}. \quad (2.4)$$

□

Da equação (2.3) tem-se que $U_N(\omega)$ é periódico com período de 2π , ou seja, $U_N(\omega + 2\pi) = U_N(\omega)$. A função $U_N(\omega)$ é completamente definida no intervalo $[0, \pi]$, porém é usual considerar $U_N(\omega)$ no intervalo de $[-\pi, \pi]$, logo a equação (2.4) é reescrita como (Bosch; Klauw, 2000; Ljung, 1999):

$$u(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\ell=-N/2+1}^{N/2} U_N(\omega_\ell) e^{j\omega_\ell k} \quad \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N} \quad \ell = 1, \dots, N. \quad (2.5)$$

onde assume-se que N é par. Para o caso de N ímpar o processo é análogo.

Na equação (2.5) a representação de $u(k)$ é feita através de uma combinação linear de sinais $e^{j\omega_\ell k}$ para N diferentes frequências ω_ℓ . É importante ressaltar que este somatório também pode ser escrito em termos de cossenos e senos de mesmas frequências, assim evitando os números complexos. A correlação entre $y(k)$ e o cosseno é definida por (2.6) e com o seno por (2.7) (Bosch; Klauw, 2000; Ljung, 1999):

$$I_C(\omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) \cos(\omega_0 k), \quad (2.6)$$

$$I_S(\omega_0) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N y(k) \sin(\omega_0 k), \quad (2.7)$$

estas relações para $u(k)$ são análogas.

A função de resposta em frequência é dada por:

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{I_C(\omega_0) - jI_S(\omega_0)}{A/2}, \quad (2.8)$$

onde A vem do sinal de entrada senoidal $u(k)$ dado pela equação (2.1).

O formato de análise da resposta em frequência por sua correlação com o cosseno e o seno é conhecido como método de correlação, abordado com mais detalhes em Bosch e Klauw (2000) e Ljung (1999). O método de correlação pode ser visto como um caso particular da análise de Fourier. Usando a definição de DFT em (2.3), tem-se:

$$Y_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N y(k) e^{-j\omega k}. \quad (2.9)$$

Comparando isso a definição de I_C (2.6) e I_S (2.7), nota-se que:

$$Y_N(\omega_0) = \sqrt{N}(I_C(\omega_0) - jI_S(\omega_0)). \quad (2.10)$$

Desde que $u(k) = A \cos(\omega_0 k)$, tem-se:

$$U_N(\omega_0) = \frac{\sqrt{N}A}{2}. \quad (2.11)$$

Com as duas últimas equações e com (2.8) define-se a função da resposta em frequência obtida pela análise de Fourier como sendo:

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{Y_N(\omega_0)}{U_N(\omega_0)}. \quad (2.12)$$

Tal análise da frequência corresponde a uma entrada senoidal simples de frequência ω_0 .

2.2.2 Estimação Empírica da Função de Transferência (ETFE)

Expandindo a idéia da análise de Fourier para o caso de entradas com múltiplas frequências é apresentada a chamada Estimação Empírica da Função de Transferên-

cia (ETFE). Este nome foi proposto por (Ljung, 1999), e a estimação da função de transferência é representada por:

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_\ell}) = \frac{Y_N(\omega_\ell)}{U_N(\omega_\ell)} \quad \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}, \quad \ell = 1, \dots, N, \quad (2.13)$$

com Y_N e U_N são a DFT de y e u respectivamente e assumindo que $U_N(\omega) \neq 0$, se essa condição não for satisfeita em alguma(s) frequência(s), simplesmente assume-se que a ETFE é indefinida em tais frequências.

A notação de duplo chapéu é utilizada pois a ETFE é uma aproximação grosseira da função de transferência. Isso é explicado pelo fato de que dado uma série de N amostras de entrada e saída, isso é reduzido a $N/2$ números complexos, ou seja, há uma relativa redução de dados. Considerando a sequência de dados com $2N$ números de $y(t)$ e $u(t)$ com $t = 1, 2, \dots, N$, com a ETFE isso é condensado para N números:

$$\text{Re}\hat{G}_N(e^{2\pi jk/N}), \quad \text{Im}\hat{G}_N(e^{2\pi jk/N}), \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1.$$

Segundo Bosch e Klauw (2000) e Ljung (1999) a ETFE tem dois casos distintos em relação aos sinais de entrada: sinais periódicos e não-periódicos.

Sinais Periódicos: A transformada de Fourier do sinal de entrada existe apenas em um número fixo de frequências, logo tem-se:

1. Para as dadas frequências a ETFE é uma estimação não tendenciosa da função de transferência.
2. A variância e covariância da ETFE decaem a taxa de $1/N$.

Sinais Não Periódicos: A transformada de Fourier é definida em N frequências, ou seja, é a realização de um processo estocástico.

1. A ETFE é uma estimação converge assintoticamente, ou seja, $\hat{G}_N(e^{j\omega})$ se aproxima de $G_N(e^{j\omega})$ da medida que $N \rightarrow \infty$.
2. A variância da ETFE não decai quando N é incrementado. Isto é determinado pela relação $\Phi(\omega)/|U_N(\omega)|^2$, onde $\Phi(\omega)$ é o espectro do sinal de ruído.
3. A covariância da ETFE decai $1/N$. Isto significa que assintoticamente a estimação de duas diferentes frequências não são correlacionadas.

A ETFE incrementa a qualidade da estimação se o número de amostras é incrementado e um sinal de entrada periódico é utilizado. Entretanto, se a entrada é um sinal não periódico, não há necessariamente uma melhora se o número de amostras for aumentado. Isto porque não há somente um aumento no tamanho do conjunto de dados, mas também no número de parâmetros a se estimar. O aumento da informação por parâmetros não reflete no decréscimo da variância, pois ela se mantém igual a proporção do sinal do ruído na frequência correspondente, fazendo com que a ETFE seja um método de estimação grosseiro para a estimação da função de transferência.

Devido os muitos dados de entrada e saída, são realizadas várias estimções independentes, por isso a variância não diminui. Isto deve-se ao fato de que é assumido linearidade do sistema real para realizar a estimação, o que reflete na falta de conhecimento e compreensão total dos dados, conseqüentemente as propriedades dos sistema nas diferentes frequências não são totalmente correlacionadas. Uma solução para isso é abordada a seguir.

2.2.3 ETFE suavizada

A melhoria na ETFE pode ser feita de diferentes formas como descrito no Capítulo 6 em Ljung (1999). Aqui é apresentada uma forma de ser feita a suavização da estimação. A ETFE é melhorada obtendo-se a média no intervalo entre duas frequências. Isto é valido desde que a verdadeira função de transferência do sistema seja uma função lisa em ω , e que a frequência distante $2\pi/N$ do ponto seja pequena comparada com o quão rápido o sistema muda (Bosch; Klauw, 2000; Ljung, 1999).

Com essas condições a estimação $\hat{G}_N(j\omega)$ para as frequências ω no intervalo:

$$\frac{2\pi k_1}{N} = \omega_0 - \Delta\omega \leq \omega \leq +\Delta\omega = \frac{2\pi k_2}{N}, \quad (2.14)$$

pode ser usada para melhorar a estimação em ω_0 com:

$$\hat{G}_N(e^{j\omega_0}) = \frac{1}{k_2 - k_1 + 1} \sum_{\ell=k_1}^{k_2} \hat{G}_N(e^{j\omega_\ell}) \quad \omega_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}. \quad (2.15)$$

O resultado da estimação é a média da ETFE sobre o intervalo de tamanho $k_2 - k_1 + 1$. Em resumo, a média feita sobre os pontos introduz ou aumenta o erro

sistemático (viés), e reduz a variância, quanto mais larga a janela maior será este efeito. Conseqüentemente a escolha do comprimento da janela é um compromisso entre a variância e o viés.

2.3 Comentários Finais

Neste capítulo foi discutido uma maneira de fazer a estimação da resposta em frequência de um sistema através de dados no tempo, tal procedimento é de grande utilidade neste documento pois a aplicação do método é baseada na resposta em frequência. Assim com a ETFE é possível identificar sistemas que a principio so dispõem da resposta no tempo. No próximo capítulo apresenta-se os conceitos sobre a base de funções ortonormais.

3 Bases de Funções Ortonormais em Tempo Contínuo

Uma base de funções ortonormais é constituída por um conjunto de funções que são mutuamente ortogonais e normais, ou seja, funções ortonormais. Para a melhor compreensão sobre funções ortonormais, são necessários alguns conceitos e noções sobre os chamados espaços de Hilbert, apresentados na Seção 3.1. Na Seção 3.2, é abordada a expansão destas funções em séries ortonormais. Na Seção 3.3 são apresentadas as bases ortonormais que serão utilizadas neste documento dentro do contexto de identificação de sistemas.

3.1 Espaço de Hilbert Relacionada a Funções em Tempo Contínuo

Segundo Oliveira e Silva (1995b), o espaço de Hilbert em relação à funções é um espaço de funções lineares, possivelmente com dimensão infinita, com operação de produto interno denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e definida entre duas funções do espaço. Este produto interno é usado para definir a norma de qualquer função deste espaço, por exemplo, a norma 2 é a raiz quadrada do produto interno da função com ela mesma, sendo denotada por $\| \cdot \|_2$. Esta norma define a distância entre quaisquer duas funções do espaço. Uma característica importante do espaço de Hilbert é que a métrica deste espaço é fechada, ou seja, qualquer sequência de Cauchy das funções converge para uma função do espaço. Uma introdução aos espaços de Hilbert é feita em (Young, 1988), já uma leitura mais avançada e completa pode ser encontrada em (Rudin, 1987).

Denota-se $L^2(S)$ o espaço de Hilbert de funções quadraticamente integráveis em $S \subseteq \mathbb{R}$, com produto interno:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_S f(t)g^*(t)dt, \quad (3.1)$$

onde $*$ denota a operação complexo conjugado do elemento, lembrando que uma função

é dita quadraticamente integrável se:

$$\int_S f(t)^2 dt < \infty. \quad (3.2)$$

Em termos de engenharia, funções assim são ditas como tendo energia finita. S pode ser finito ou infinito, desde que permaneça como um subconjunto de \mathbb{R} . A norma é dada por:

$$\|f(t)\|_2 = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle} = \sqrt{\int_S f(t)^2 dt}, \quad (3.3)$$

A ortogonalidade entre funções complexas de um espaço de Hilbert é obtida quando o produto interno entre funções diferentes é zero, sendo o produto interno definido por (3.1) (Eykhoff, 1974; Kreyszig, 2006; Oliveira e Silva, 1995b). Uma função do espaço de Hilbert é normal se sua norma é igual a um, sendo a norma definida por (3.3) (Eykhoff, 1974; Kreyszig, 2006; Oliveira e Silva, 1995b). Logo um conjunto de funções $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ do espaço de Hilbert \mathcal{H} é dito ortonormal, se as funções deste conjunto forem ortogonais entre si e adicionalmente a norma de cada função for igual a um. O conjunto $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ é completo em \mathcal{H} , se e somente se cada função de \mathcal{H} puder ser arbitrariamente bem aproximada por uma combinação linear de um número finito de funções de $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$. Sendo assim esse conjunto $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ é denominado de base ortonormal completa de \mathcal{H} (Eykhoff, 1974; Oliveira e Silva, 1995b).

A Transformada de Fourier de $L^2(S)$ define o espaço Hilbert $L^2(j\mathbb{R})$ de funções quadraticamente integráveis em $j\mathbb{R}$, onde $j\mathbb{R}$ é o conjunto de números puramente imaginários, e tem o produto interno definido como (Akçay; Ninness, 1999a, 1999b; Heuberger; Van den Hof; (EDS), 2005; Oliveira e Silva, 1995b):

$$\langle F(j\omega), G(j\omega) \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)G^*(j\omega)d\omega. \quad (3.4)$$

Analogamente, a Transformada de Laplace bilateral do espaço $L^2(S)$ gera o espaço de funções $L^2(j\mathbb{R})$ com o produto interno sendo definido por (Akçay; Ninness, 1999a, 1999b; Heuberger; Van den Hof; (EDS), 2005; Oliveira e Silva, 1995b):

$$\langle F(s), G(s) \rangle = \frac{1}{2\pi j} \int_{j\mathbb{R}} F(s)G^*(-s^*)ds. \quad (3.5)$$

3.2 Expansões Ortonormais

Partindo de uma base ortonormal completa, dada por $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$, uma função $f(t)$ qualquer do espaço pode ser escrita como (Eykhoﬀ, 1974; Heuberger; Van den Hof; (EDS), 2005; Oliveira e Silva, 1995b):

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(t), \quad (3.6)$$

onde

$$c_i = \int_S f(t) \phi_i(t) dt = \langle f(t), \phi_i(t) \rangle, \quad (3.7)$$

e

$$\langle f(t), f(t) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2, \quad (3.8)$$

essas duas últimas equações podem ser interpretadas como a verificação da ortonormalidade e completicidade das funções ϕ_i . Se $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 < \infty$ então $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(t)$ converge a um elemento do espaço de Hilbert \mathcal{H} . Segundo Oliveira e Silva (1995b), isso constitui o chamado teorema de Riesz-Fisher.

De forma análoga, tem-se que em uma base de funções completa $\{\Phi_i(S)\}_{i=1}^{\infty}$, qualquer função $F(s)$ estritamente própria ($F(\infty) = 0$), pode ser escrita como:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Phi_i(s), \quad (3.9)$$

com c_i sendo os coeficientes da expansão em séries da função $F(s)$, o mesmo coeficiente da equação (3.6) enquanto as funções da equação (3.9) são as Transformadas de Laplace das respectivas funções da equação (3.6). Em outras palavras a equação (3.9) é a Transformada de Laplace de (3.6).

3.3 Bases Ortonormais

Conforme já definido, uma base de funções é ortonormal se o produto interno entre funções diferentes for zero e as funções tenham norma unitária. Para a construção de bases que atendam a tal requisito pode-se utilizar o procedimento de ortonormalização de Gram-Schmidt (Heuberger; Van den Hof; (EDS), 2005; Golub; Van Loan, 1996;

Pintelon; Schoukens, 2001).

As Bases de Funções de Laguerre (Partington, 1991; Wahlberg; Mäkilä, 1996; Mäkilä, 1990; Heuberger; Van den Hof; (EDS), 2005; Clement, 1982), de Kautz (Akçay; Ninness, 1999a; Wahlberg; Mäkilä, 1996; Kautz, 1954) e as construídas com as Funções de Takenaka-Malmquist (Takenaka, 1925; Malmquist, 1926; Heuberger; Van den Hof; (EDS), 2005) correspondem ao conceito de funções ortonormais. As funções de Takenaka-Malmquist são mais gerais que as funções de Laguerre ou de Kautz pois aceitam pólos reais e/ou pólos complexos diferentes, enquanto que as funções de Laguerre ou de Kautz são construídas usando somente uma dinâmica no caso de Laguerre quando se escolhe $p_n = p \in \mathbb{R}$ e no caso da base de Kautz quando se escolhe $p_n = p \in \mathbb{C}$. Tais bases foram originalmente criadas no domínio do tempo discreto e posteriormente transformadas para o domínio do tempo contínuo. Uma maneira de fazer essa transformação é o uso da chamada Transformação Bilinear (Heuberger; Van den Hof; (EDS), 2005; Oliveira e Silva, 1995b) dada por:

$$s = a \frac{z-1}{z+1}, \quad ds = \frac{2a}{(z+1)^2} dz, \quad (3.10)$$

e a troca inversa corresponde a:

$$z = \frac{a+s}{a-s}, \quad dz = \frac{2a}{(a-s)^2} ds. \quad (3.11)$$

O parâmetro a é um número real positivo arbitrário, que normalmente é substituído por 1 (Oliveira e Silva, 1995b).

A base de funções ortonormais de Takenaka-Malmquist no domínio do tempo contínuo, com $p_n \in \mathbb{C}$, $Re(p_n) \geq 0$, $\forall n$, é dada por (Akçay; Ninness, 1999a; Heuberger; Van den Hof; (EDS), 2005; Oliveira e Silva, 1995b; Deschrijver; Dhaene, 2006):

$$\Phi_n(s) = \frac{\sqrt{2Re(p_n)}}{s+p_n} \varphi_{n-1}(s), \quad (3.12)$$

$$\varphi_n(s) = \prod_{k=1}^n \frac{s-p_k^*}{s+p_k}, \quad \varphi_0(s) = 1.$$

A base de funções racionais $\{\Phi_n(s)\}_{n \geq 1}$ é ortonormal de acordo com o produto interno definido em (3.5). A seguir é apresentada a prova de que $\{\Phi_n(s)\}_{n \geq 1}$ é ortonormal. Esta prova está baseada nos resultados apresentados em (Deschrijver; Dhaene,

2006; Deschrijver; Haegeman; Dhaene, 2007; Gomez, 1998).

Uma maneira de se obter a base de Takenaka-Malmquist é através da aplicação do procedimento de Gram-Schmidt em funções parciais. Assuma um conjunto de funções ortonormais $\Phi_n(s)$ do tipo:

$$\Phi_n(s) = \frac{Q_n(s)}{\prod_{k=1}^n (s + p_k)} \quad (3.13)$$

para $n = 1, \dots, N_l$ and $Q_n(s)$ um polinômio arbitrário de ordem $n - 1$.

Com a definição do produto interno (3.5), então o polinômio $Q_n(s)$ é determinado impondo a condição de ortonormalidade entre as bases. Considerando a construção da primeira função $\Phi_1(s)$, sendo $\Phi_1 = \gamma_1/(s + p_1)$ visto que a ordem de Q_n é, tem-se:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1(s), \Phi_1(s) \rangle &= \frac{1}{2\pi j} \int_{j\mathbb{R}} \Phi_1(s) \Phi_1^*(-s^*) ds \\ &= \frac{1}{2\pi j} \int_{j\mathbb{R}} \frac{|\gamma_1|^2}{(s + p_1)(-s + p_1^*)} ds \\ &= \frac{|\gamma_1|^2}{p_1 + p_1^*}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Para que $\Phi_1(s)$ seja normal, γ_1 deve ser dado por $\gamma_1 = \kappa_1 \sqrt{2Re(p_1)}$, onde κ_1 é um número complexo, unitário e arbitrário, que pode ser interpretado como o coeficiente c_1 da expansão em séries da função segundo (3.6). Logo tem-se que $\Phi_1(s)$ é

$$\Phi_1(s) = \kappa_1 \sqrt{2Re(p_1)} \frac{1}{s + p_1}. \quad (3.15)$$

Para a construção da segunda base $\Phi_2(s)$, sabe-se que deve ser ortogonal a $\Phi_1(s)$, tal que:

$$\langle \Phi_1(s), \Phi_2(s) \rangle = \frac{1}{2\pi j} \int_{j\mathbb{R}} \Phi_1(s) \Phi_2^*(-s^*) ds = 0, \quad (3.16)$$

isto implica que $\Phi_2(s)$ deve ser cancelado para $s = -p_1$, conseqüentemente, $Q_2(s) = \gamma_2(s - p_1^*)$. A constante γ_2 é determinada impondo a condição de normal igual a 1, isto é:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_2(s), \Phi_2(s) \rangle &= \frac{1}{2\pi j} \int_{j\mathbb{R}} \frac{\gamma_2(s - p_1^*)}{(s + p_1)(s + p_2)} \times \frac{\gamma_2^*(-s - p_1)}{(-s + p_1^*)(-s + p_2^*)} ds \\ &= \frac{|\gamma_2|^2}{p_2 + p_2^*}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

De forma análoga ao caso anterior, tem-se que $\gamma_2 = \kappa_2 \sqrt{2\text{Re}(p_2)}$, onde κ_2 é número complexo, unitário e arbitrário visto como o coeficiente c_2 da expansão. Então $\Phi_2(s)$ é dada por:

$$\Phi_2(s) = \kappa_2 \sqrt{2\text{Re}(p_2)} \frac{s - p_1^*}{(s + p_1)(s + p_2)}. \quad (3.18)$$

Continuando conforme apresentado, a forma geral (3.12) é obtida e fica provado que a base é ortonormal.

Um problema associado com a formulação descrita de funções ortonormais é que sua resposta ao impulso é um sinal complexo se o pólo da função for complexo. No caso de sistemas dinâmicos, pólos complexos aparecem em pares conjugados e por isso, pode-se escrever duas novas funções a partir de uma combinação linear das funções com pólos complexos originais de forma que a resposta ao impulso das novas funções seja um sinal real. A combinação linear de Φ_n e Φ_{n+1} forma duas novas funções Φ_n' e Φ_n'' com resposta ao impulso real para substituir as originais com resposta ao impulso complexa em qualquer aplicação em que haja a necessidade da resposta ao impulso pertencer ao conjunto dos reais \mathbb{R} . Segundo Oliveira e Silva (1995b) a fórmula para as funções de Kautz Φ_n' e Φ_n'' são:

$$\Phi_n'(s) = \frac{\sqrt{2\text{Re}(p_n)}(s - |p_n|)}{(s + p_n)(s + p_{n+1})} \varphi_{n-1}(s), \quad (3.19)$$

$$\Phi_{n+1}''(s) = \frac{\sqrt{2\text{Re}(p_n)}(s + |p_{n+1}|)}{(s + p_n)(s + p_{n+1})} \varphi_{n-1}(s), \quad (3.20)$$

onde $p_n = p_{n+1}^*$, ou seja são pólos complexos e conjugados. A função $\varphi_n(s)$ permanece inalterada, como já definida na equação (3.12).

3.4 Comentários Finais

No presente capítulo foi apresentado os conceitos sobre funções ortonormais. As quais são indispensáveis para o próximo capítulo onde aborda-se a parametrização de um modelo usando uma base de funções ortonormais. Junto com a parametrização apresenta-se método de seleção/cálculo dos parâmetros, com uma abordagem para estimação dos mesmos através de um processo de otimização.

4 Identificação Paramétrica de Sistemas no Domínio na Frequência

No Capítulo 3, a expansão de uma função com energia finita e de sua Transformada de Laplace em funções ortonormais foi apresentada. Neste capítulo, este resultado é aplicado na identificação paramétrica de sistemas no domínio da frequência. Na Seção 4.1 é feita a introdução ao processo de identificação no domínio da frequência quando o modelo é formado por uma expansão em funções ortonormais; na Seção 4.2 tem-se a realização em espaço de estados do modelo construído com a base de funções ortonormais.

A parametrização do modelo com bases ortonormais pode ser abordada de diferentes formas. Um primeira visão é apresentada na Seção 4.3, que diz respeito a otimização dos parâmetros em conjunto, ou seja, otimização dos pólos e coeficientes ao mesmo tempo através do gradiente que dá a direção ótima de busca para o método de otimização. Como obter tal gradiente é abordado na Seção 4.3.1. Para uma comparação da validade do cálculo do gradiente.

A Seção 4.3 trata da introdução a métodos de otimização. Com o intuito de buscar o lugar ótimo para os parâmetros selecionam-se dois métodos de otimização. Um dos métodos utiliza somente informações sobre a função custo para proceder a minimização, o outro método utiliza-se da informação do gradiente da função custo, calculado analiticamente, além da informação da própria função custo para o processo de minimização.

Um segundo modo de seleção dos parâmetros é a apresentada na Seção 4.4. Nesta abordagem, não otimizam-se os pólos e coeficientes em conjunto, mas em duas fases. Na primeira fase é otimizado o conjunto de pólos e em seguida, na segunda fase, é calculado o conjunto de coeficientes correspondente como apresentado na Seção 4.5.

Para utilizar-se do segundo modo de seleção dos parâmetros é necessário um modo para o cálculo dos coeficientes uma vez que somente os pólos são otimizados. Como calcular os coeficientes da base é o assunto abordado na Seção 4.5, onde apresentam-

se duas formas para o cálculo dos coeficientes da base de funções ortonormais uma vez feita a seleção dos pólos. Na sequência, a Seção 4.6 discute a importância da correta seleção dos pólos da base, visto que são eles que representam as dinâmicas dominantes do sistema na base de funções.

4.1 Identificação no Domínio da Frequência Usando Bases de Funções Ortonormais

Considere N_d dados da resposta em frequência de $H(j\omega)$. O objetivo da identificação no domínio da frequência é parametrizar o modelo estruturado $\hat{H}(j\omega)$ para aproximá-lo de $H(j\omega)$, com o uso de uma combinação linear de funções $\Phi_n(s)$ previamente escolhidas. Como descrito no Capítulo 3, $\hat{H}(j\omega_k)$ é definido por:

$$\hat{H}(j\omega_k) = \sum_{i=1}^{N_l} c_i \Phi_i(j\omega_k), \quad (4.1)$$

ou

$$\hat{H}(j\omega_k, \theta) = \Psi(j\omega_k)^T C, \quad (4.2)$$

onde

$$C = [c_1 \cdots c_{N_l}]^T, \quad (4.3)$$

e

$$\Psi(j\omega_k) = [\Phi_1(j\omega_k) \cdots \Phi_{N_l}(j\omega_k)]^T, \quad (4.4)$$

nestas equações N_l representa o número total de funções do modelo e $\{\omega_k\}_{k=1}^{N_d}$ é o conjunto de valores de frequência onde os dados de $H(j\omega)$ são disponíveis.

Com as devidas definições feitas, o procedimento para identificação de sistemas usando funções de bases ortonormais em tempo contínuo consiste em:

- Escolher a estrutura das bases, que podem ser as bases de Takenaka-Malmquist ou seus casos particulares, como as bases de Laguerre ou de Kautz, seus parâmetros ou pólos e o número de funções N_l . Estas informações definem as matrizes A e B de uma realização em espaço de estados. Tal realização contém a informação sobre $\Psi(j\omega)$, conforme é apresentado na próxima seção.
- Estimar os coeficientes da base, estes são representados pela matriz C e devem

ser obtidos a partir dos pólos previamente definidos. Este procedimento pode ser feito iterativamente e inicializado usando algum conhecimento a priori sobre a dinâmica do sistema.

4.2 Construção do Modelo em Espaço de Estados

Considere o sistema dinâmico, do tipo SISO (*Single Input Single Output*), linear em seus parâmetros, causal e com memória finita. Conforme apresentado no Capítulo 3, resposta ao impulso e a função de transferência deste sistema podem ser aproximados com precisão arbitrária através de:

$$\hat{h}(t) = \sum_{i=1}^{N_l} c_i \phi_i(t). \quad (4.5)$$

ou com a Transformada de Laplace, tal que:

$$\hat{H}(s) = \sum_{i=1}^{N_l} c_i \Phi_i(s). \quad (4.6)$$

Observa-se que o limite superior do somatório é N_l não mais o infinito, isto porque, como abordado na Seção 3.2, os coeficientes convergem para zero quando i é incrementado. Então assume-se que a série pode ser truncada em N_l termos.

O erro de aproximação da série é definido como,

$$\varepsilon_{N_l}(t) = h(t) - \hat{h}(t), \quad (4.7)$$

e pode ser feito tão pequeno como se queira, bastando para isso aumentar o número de termos da aproximação.

Sendo $U(s)$ a Transformada de Laplace do sinal de entrada de $H(s)$, então a Transformada de Laplace da saída estimada $\hat{Y}(s)$ do modelo $\hat{H}(s)$ é:

$$\hat{Y}(s) = H(s)U(s) = \sum_{i=1}^{N_l} c_i \Phi_i(s) U(s), \quad (4.8)$$

com isso é possível descrever os sinais de entrada e saída do sistema através da realização do espaço de estados de $H(s)$ como é descrito a seguir.

A função de transferência $\Phi_n(s)$, definida por (3.12) é dada pela realização em paralelo de N_l termos $\varphi_i(s)$, como é ilustrado na figura 4.1, cada um tendo um diferente pólo (real ou complexo), sabendo-se que o um pólo complexo vem em pares conjugados. Estes N_l pólos contém, *a priori*, informações sobre as dinâmicas dominantes do sistema. É possível escrever $\Phi_n(s)$ usando $\Phi_{n-1}(s)$, como é mostrado a seguir. Então define-se $\phi_i(t)$ e $\Phi_i(s)$ como a i -ésima saída da função ortonormal, e a entrada como $u(t)$ e $U(s)$, então:

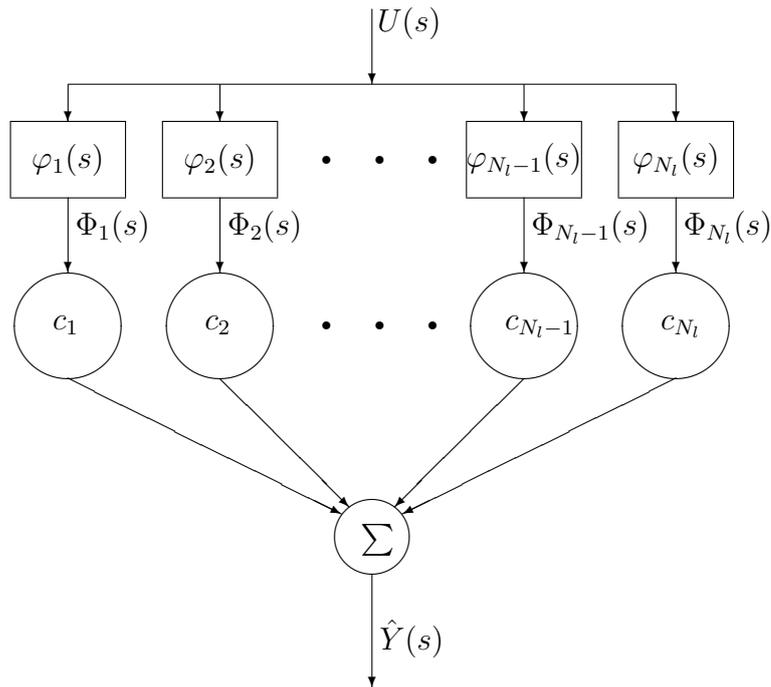


Figura 4.1: Estrutura de funções de bases ortonormais

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(s)(s + p_1) &= k_1 U(s), \\
 \Phi_2(s)(s + p_2) &= \frac{k_2}{k_1} \Phi_1(s) (s - p_1^*), \\
 \Phi_3(s)(s + p_3) &= \frac{k_3}{k_1 k_2} \Phi_2(s) (s - p_2^*), \\
 &\vdots \\
 \Phi_{N_l}(s)(s + p_{N_l}) &= \frac{k_{N_l}}{k_1 \cdots k_{N_l-1}} \Phi_{N_l-1}(s) (s - p_{N_l-1}^*),
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

isolando $\Phi_n(s)$ em função de $\Phi_{n-1}(s)$:

$$\begin{aligned}
\Phi_1(s) &= \frac{k_1}{(s + p_1)} U(s), \\
\Phi_2(s) &= \frac{k_2 (s - p_1^*)}{k_1 (s + p_2)} \Phi_1(s), \\
\Phi_3(s) &= \frac{k_3 (s - p_2^*)}{k_1 k_2 (s + p_3)} \Phi_2(s), \\
&\vdots \\
\Phi_{N_l}(s) &= \frac{k_{N_l} (s - p_{N_l-1}^*)}{k_1 \cdots k_{N_l-1} (s + p_{N_l})} \Phi_{N_l-1}(s),
\end{aligned} \tag{4.10}$$

onde k_n é definido, para $n = 1, 2, \dots, N_l$

$$k_n = \sqrt{2Re(p_n)}, \tag{4.11}$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace em cada equação de (4.10) e tem-se os termos $\dot{\phi}_n(t)$ em função de $\dot{\phi}_{n-1}(s)$:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1(t) &= -p_1 \phi_1(t) + k_1 u(t), \\
\dot{\phi}_2(t) &= -p_2 \phi_2(t) - (k_2/k_1) 2Re(p_1) \phi_1(t) + k_2 u(t), \\
\dot{\phi}_3(t) &= -p_3 \phi_3(t) - (k_3/k_2) 2Re(p_2) \phi_2(t) - (k_3/k_1) 2Re(p_1) \phi_1(t) + k_3 u(t), \\
&\vdots \\
\dot{\phi}_{N_l}(t) &= -p_{N_l} \phi_{N_l}(t) - (k_{N_l}/k_{N_l-1}) 2Re(p_{N_l-1}) \phi_{N_l-1}(t) - \\
&\quad \cdots - (k_{N_l}/k_1) 2Re(p_1) \phi_1(t) + k_{N_l} u(t).
\end{aligned} \tag{4.12}$$

As funções da equação (4.12) podem ser arrumadas na seguinte representação matricial:

$$\dot{\psi}(t) = A\psi(t) + Bu(t), \tag{4.13}$$

onde o vetor de estados $\psi(t)$ é construído com $\phi_i(t)$ sinais, como segue:

$$\psi(t) = [\phi_1(t) \ \phi_2(t) \ \phi_3(t) \ \cdots \ \phi_{N_l}(t)]^T, \tag{4.14}$$

com A e B sendo:

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{k_2}{k_1} 2\text{Re}(p_1) & -p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{k_3}{k_1} 2\text{Re}(p_1) & -\frac{k_3}{k_2} 2\text{Re}(p_2) & -p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -\frac{k_{N_l}}{k_1} 2\text{Re}(p_1) & -\frac{k_{N_l}}{k_2} 2\text{Re}(p_2) & -\frac{k_{N_l}}{k_3} 2\text{Re}(p_3) & \cdots & -p_{N_l} \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$B = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & \cdots & k_{N_l} \end{bmatrix}^T. \quad (4.16)$$

Para facilitar os cálculos as matrizes A e B são decompostas de forma que:

$A = KPK^{-1}$ e $B = KM_l$ com

$$P = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -2\text{Re}(p_1) & -p_2 & 0 & \cdots & 0 \\ -2\text{Re}(p_1) & -2\text{Re}(p_2) & -p_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -2\text{Re}(p_1) & -2\text{Re}(p_2) & -2\text{Re}(p_3) & \cdots & -p_{N_l} \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

$$M_l = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (4.18)$$

onde M_l tem dimensão $1 \times N_l$, e

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k_{N_l} \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Assim a realização em espaço de estados completa do sistema, modelado com funções de bases ortonormais, é dada por:

$$\begin{cases} \dot{\psi}(t) = A \psi(t) + B u(t) \\ \hat{y}(t) = C^T \psi(t) \end{cases}, \quad (4.20)$$

com a aplicação da Transformada de Laplace:

$$\begin{cases} s\Psi(s) = A \Psi(s) + B U(s) \\ \hat{Y}(s) = C^T \Psi(s) \end{cases}, \quad (4.21)$$

com $\Psi(s)$ sendo a Transformada de Laplace de $\psi(t)$, ou seja:

$$\Psi(s) = [\Phi_1(s) \ \Phi_2(s) \ \Phi_3(s) \ \cdots \ \Phi_{N_l}(s)]^T, \quad (4.22)$$

e isolando $\Psi(s)$ na primeira parte da realização do espaço de estados (4.21) tem-se:

$$\begin{cases} \Psi(s) = (sI - A)^{-1} + B U(s) \\ \hat{Y}(s) = C^T \Psi(s) \end{cases}, \quad (4.23)$$

lembrando que I representa uma matriz identidade de mesma dimensão da matriz A .

A matriz P , que compõe a matriz A , contém elementos complexos se os pólos escolhidos forem complexo conjugados. Para fazer com que a matriz A tenha somente elementos reais deve ser feita a substituição do bloco (4.24) da matriz P pelo bloco (4.25), isso quando $p_n = p_{n+1}^*$ (Deschrijver; Dhaene, 2006). A prova é apresentada em (Deschrijver; Dhaene, 2005).

$$\begin{bmatrix} -p_n & 0 \\ 2Re(-p_n) & (-p_{n+1}) \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\begin{bmatrix} Re(-p_n) & Re(-p_n) - |p_n| \\ Re(-p_n) + |p_n| & Re(-p_1) \end{bmatrix}. \quad (4.25)$$

Nas próximas seções aborda-se o problema de seleção dos parâmetros da base, os coeficientes e pólos, de duas visões diferentes, a primeira é a seleção ótima dos parâmetros de modo conjunto, os coeficientes e pólos ao mesmo tempo. A segunda abordagem é a seleção ótimo somente dos pólos, onde os coeficientes são calculados a cada novo conjunto de pólos ótimos.

4.3 Seleção Ótima dos Parâmetros do Modelo

Os parâmetros de uma base de funções ortonormais podem ser selecionados de ótima, visando a melhor representação do sistema através do modelo OBF nesta seção são apresentados dois modos para seleção dos parâmetros da base. Entretanto esses não são os únicos modos de estimação dos parâmetros para um modelo. Como exemplo cita-se (Agüero; Yuz; Goodwin, 2007; Wills; Ninness; Gibson, 2007).

Antes de entrar em detalhes dos modos de seleção utilizados no trabalho define-se uma função custo $J(\theta)$ (4.26), tal que:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \|H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k, \theta)\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_d} |H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k, \theta)|^2 \quad (4.26)$$

onde θ é o conjunto de parâmetros a serem otimizados, isto é, pólos e coeficientes do modelo, os quais serão detalhados na Seção 4.3.1.

Visto que equações do tipo (4.26), de forma geral, não podem ser minimizadas por métodos analíticos ou resolvidos por métodos diretos, como por exemplo mínimos quadrados (MQ), a solução de pode ser encontrada por métodos numéricos os quais são brevemente introduzidos a seguir. Para um melhor entendimento sobre solução de problemas por métodos numéricos, ver por exemplo Bertsekas (1996), Jr e Schanabel (1983), Luenberger (1973), Nocedal e Wright (1999).

Um método numérico para minimização de uma função custo $J(\theta)$, busca o ponto de mínimo iterativamente. Usualmente feito de acordo com $\theta_{i+1} = \theta_i + \gamma d_i$, onde d_i é a direção de busca baseada em informações sobre $J(\theta)$ adquiridas previamente e γ é uma constante positiva que determina o decréscimo, ou passo de minimização, do valor de $J(\theta)$. Então dependendo da informação fornecida pelo usuário para determinar a direção de busca d_i , a minimização numérica pode ser dividida em três grande grupos (Bertsekas, 1996; JR; Schanabel, 1983; Luenberger, 1973; Nocedal; Wright, 1999):

1. Métodos que utilizam somente os valores da função custo $J(\theta)$.
2. Métodos que utilizam valores da função custo $J(\theta)$ e do seu gradiente.
3. Métodos que utilizam valores da função custo $J(\theta)$, do seu gradiente e também

do Hessiano da função, ou a segunda derivada.

Algoritmos do grupo 1 também podem utilizar informações sobre o gradiente, contudo tal informação é obtida por aproximações diferenciais e procede como um método de quase-Newton ou tem outro padrão específico de busca, ver por exemplo Powell (1964). A mais conhecida sub classe do grupo 2 consiste de métodos de quase-Newton, com alguma forma de estimar o Hessiano sem ele ser fornecido. E os tipos algoritmos do grupo 3 correspondem métodos de Newton, que utilizam a direção de busca de "Newton": $d_i = -[J''(\theta_i)]^{-1}J'(\theta_i)$, onde J'' indica a segunda derivada ou Hessiano e J' a primeira derivada ou gradiente.

Para a minimização da função custo definida em (4.26), serão utilizados dois métodos: o primeiro se encaixa no grupo 1, onde é só fornecida a informação de função custo; o segundo se encaixa no grupo 2, onde é fornecida a informação sobre a função custo e sobre a primeira derivada ou gradiente da função custo. Apesar de na implementação computacional, os dois métodos utilizam-se das informações sobre o gradiente o primeiro método faz estimativas numéricas para obter direção de busca, enquanto o segundo necessita que a informação seja fornecida a rotina de otimização.

Os dois métodos utilizados neste trabalho são implementados com algoritmos presentes no pacote de ferramentas de otimização do software Matlab da Mathworks (*Matlab Optimization Toolbox*). O algoritmo de otimização utilizado no primeiro caso é conhecido por *trust-region-reflective* (implementado com a função *fmincon* do Matlab), onde é fornecida somente a informação sobre a função custo a ser minimizada. Para mais detalhes sobre este método ver Nocedal e Wright (1999).

O método de Levenberg-Marquardt (implementado com a função *fsolve* do Matlab) é bem conhecido, tendo como característica a aproximação do Hessiano sendo feita somente com a informação das derivadas de primeira ordem correspondentes, as quais são fornecidas com o gradiente, para maiores detalhes ver Levenberg (1944), Marquardt (1963), Nocedal e Wright (1999), Nelles (2001). Por isso o segundo método é de grande importância pois necessita da informação sobre a derivada primeira (gradiente) da função custo, levando a uma das contribuições deste trabalho que é o cálculo do gradiente da função custo no domínio da frequência. No apêndice B é apresentado o cálculo do gradiente da função custo no domínio do tempo como um subproduto desta

dissertação.

4.3.1 Cálculo do Gradiente da Função Custo no Domínio da Frequência

O método de Levenberg-Marquardt foi escolhido pois necessita que a informação sobre o gradiente da função custo seja fornecida à rotina, e nesta seção é demonstrado como obter o gradiente da função custo dada pela equação (4.26) de forma analítica.

Seja o critério de custo no domínio da frequência $J(\theta)$, que se deseja minimizar definido em (4.26). A equação $\hat{H}(j\omega)$ já foi definida como:

$$\hat{H}(j\omega) = \sum_{i=1}^{N_l} c_i \Phi_i(j\omega, p). \quad (4.27)$$

O problema de otimização é dado por:

$$\min_{\theta} J(\theta), \quad (4.28)$$

sendo $\theta = \begin{bmatrix} \rho \\ C \end{bmatrix}$, com $\rho = [p_1 \ \dots \ p_{N_l}]^T$ e $C = [c_1 \ \dots \ c_{N_l}]^T$, sendo N_l o número de bases escolhidas.

Então o gradiente de $J(\theta)$, que indica a direção de minimização da função, é calculado como:

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = \nabla_{\theta} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_d} |H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k, \theta)|^2, \quad (4.29)$$

N_d representa o número de amostras disponíveis para a identificação.

Aplicando essa regra de derivação na equação (4.29) tem-se:

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = - \sum_{k=1}^{N_d} |H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k, \theta)| \frac{H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k, \theta)}{|H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k, \theta)|} \nabla_{\theta} \hat{H}(j\omega_k, \theta), \quad (4.30)$$

simplificando obtém-se a equação:

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = - \sum_{k=1}^{N_d} [H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k, \theta)] \nabla_{\theta} \hat{H}(j\omega_k, \theta). \quad (4.31)$$

Como definido θ é função dos pólos e dos coeficientes, logo reescreve-se o gra-

diente como:

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = \begin{bmatrix} \nabla_{\rho} J(\theta) \\ \nabla_C J(\theta) \end{bmatrix},$$

Logo o cálculo do gradiente da função custo é dividido em duas partes, gradiente em relação aos coeficientes e em relação aos pólos das bases. Assim o gradiente em relação aos coeficientes é dado por:

$$\nabla_C J(\theta) = - \sum_{k=1}^{N_d} [H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k, \theta)] \Psi(j\omega_k, \rho), \quad (4.32)$$

pois substituindo (4.27) em (4.31) tem-se:

$$\nabla_C \sum_{i=1}^{N_l} c_i \Phi_i(j\omega, \rho) = \sum_{i=1}^{N_l} \Phi_i(j\omega, \rho) \quad (4.33)$$

onde $\Psi(j\omega, \rho) = [\Phi_1(j\omega, \rho), \dots, \Phi_{N_l}(j\omega, \rho)]^T$, que é a própria base de funções ortonormais.

Substituindo (4.27) em (4.31) fazendo o gradiente de $J(\theta)$ em relação aos pólos das bases :

$$\nabla_{\rho} J(\theta) = - \sum_{k=1}^{N_d} [H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k, \theta)] \nabla_{\rho} \Psi(j\omega_k, \rho)^T C, \quad (4.34)$$

logo é necessário calcular $\nabla_{\rho} \Psi_i(j\omega, \rho)$ para se obter $\nabla_{\theta} J(\theta)$.

Como já definido $\Psi(j\omega, \rho)$ é obtido pela equação:

$$\Psi(j\omega) = (j\omega I - A)^{-1} B. \quad (4.35)$$

Lembrando que os elementos A e B da equação anterior somente depende de ρ , logo o gradiente de $J(\theta)$ em relação aos conjunto de pólos ρ pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho} \Psi(j\omega) &= \nabla_{\rho} [(j\omega I - A)^{-1} B], \\ \nabla_{\rho} \Psi(j\omega) &= \nabla_{\rho} [(j\omega I - A)^{-1}] B + (j\omega I - A)^{-1} \nabla_{\rho} [B], \\ \nabla_{\rho} \Psi(j\omega) &= (j\omega I - A)^{-2} \nabla_{\rho} [A] B + (j\omega I - A)^{-1} \nabla_{\rho} [B]. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Observa-se que é necessário o cálculo de $\nabla_{\rho} A$ e $\nabla_{\rho} B$, sabendo que $A = K P K^{-1}$ e $B = K M_L$ com K , P e M_L como definidos em (4.21), os gradiente em questão são

calculadas:

$$\nabla_{\rho}A = \nabla_{\rho}(K)PK^{-1} + K\nabla_{\rho}(P)K^{-1} + KP\nabla_{\rho}(K^{-1}), \quad (4.37)$$

$$\nabla_{\rho}B = \nabla_{\rho}(K)M_L. \quad (4.38)$$

Como ρ é dado por:

$$\rho = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_{N_l} \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

o gradiente $\nabla_{\rho}\Phi_i(j\omega)$ é dado por:

$$\nabla_{\rho}\Phi_i(j\omega) = \begin{bmatrix} \partial\Phi_i(j\omega)/\partial p_1 \\ \partial\Phi_i(j\omega)/\partial p_2 \\ \vdots \\ \partial\Phi_i(j\omega)/\partial p_i \\ \vdots \\ \partial\Phi_i(j\omega)/\partial p_{N_l} \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

com $M = N_l$.

Levando em consideração que $\partial\Phi_i(j\omega)/\partial p_l = 0$ para $l > i$. Com isso tem-se que:

$$\nabla_{\rho}\Psi(j\omega) = [\nabla_{\rho}\Phi_1(j\omega) \quad \nabla_{\rho}\Phi_2(j\omega) \quad \nabla_{\rho}\Phi_3(j\omega) \quad \dots]^T, \quad (4.41)$$

substituindo $\nabla_{\rho}\Phi_i(j\omega)$ de (4.40) em (4.41) obtém-se:

$$\nabla_{\rho}\Psi(j\omega) = \begin{bmatrix} \partial\Phi_1(j\omega)/\partial p_1 & \partial\Phi_2(j\omega)/\partial p_1 & \partial\Phi_3(j\omega)/\partial p_1 \\ \partial\Phi_1(j\omega)/\partial p_2 & \partial\Phi_2(j\omega)/\partial p_2 & \partial\Phi_3(j\omega)/\partial p_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial\Phi_1(j\omega)/\partial p_{N_l} & \partial\Phi_2(j\omega)/\partial p_{N_l} & \partial\Phi_3(j\omega)/\partial p_{N_l} \end{bmatrix}^T. \quad (4.42)$$

Então fazendo $\partial\Psi(j\omega)/\partial p_1$ tem-se a primeira linha de $\nabla_{\rho}\Psi(j\omega)$ o que implica em:

$$\partial A/\partial p_1 = (\partial K/\partial p_1)PK^{-1} + K(\partial P/\partial p_1)K^{-1} + KP(\partial K^{-1}/\partial p_1), \quad (4.43)$$

e em

$$\partial B/\partial p_1 = (\partial K/\partial p_1)M_L. \quad (4.44)$$

E assim para os demais pólos da base de funções, isso implica que para o cálculo de $\nabla_\rho A$ e $\nabla_\rho B$ é necessário o cálculo do Jacobiano das matrizes K , P e K^{-1} . Tal Jacobiano é calculado da seguinte forma:

$$\nabla_p K = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}(p_1)}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}(p_2)}} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2\text{Re}(p_3)}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4.45)$$

$$\nabla_p K^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\text{Re}(p_1)\sqrt{2\text{Re}(p_1)}} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2\text{Re}(p_2)\sqrt{2\text{Re}(p_2)}} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2\text{Re}(p_3)\sqrt{2\text{Re}(p_3)}} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

$$\nabla_p P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots \\ -2 & -1 & 0 & \cdots \\ -2 & -2 & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

4.4 Seleção Ótima dos Pólos do Modelo

No caso de funções ortonormais, os coeficientes da base dependem dos respectivos valores dos pólos então é valido fazer somente a seleção ótima dos pólos e em seguida calcular os coeficientes. A escolha ótima para os pólos de uma base ortonormal é foco de muitos pesquisadores. Por exemplo Fu e Dumont (1993), Wang e Cluett (1994), Oliveira e Silva (1995a), Malti, Ekongolo e Ragot (1998) abordam o caso de otimização da base ortonormal de Laguerre. Tanguy et al. (2002) apresentam a escolha apropriada para a base de Kautz, e no trabalho de da Rosa, Campello e Amaral (2008) é feito o cálculo de direções de busca para as bases de Kautz e GOBF em tempo discreto. Contudo nenhum desses trabalhos aborda o problema de identificação no domínio da

frequência.

Então como mencionado anteriormente o ajuste dos parâmetros da base de funções ortonormais pode ser realizada em duas fases, a primeira com a seleção ótima dos pólos e a seguinte com o cálculo dos coeficientes de acordo o respectivo conjunto de pólos. A otimização dos pólos pode ser feita com os mesmos métodos apresentados na Seção 4.3 e com a uso da mesma função custo (4.26). Porém o conjunto de parâmetros θ fica somente em função dos pólos (ρ) o que implica que os coeficientes não são otimizados, logo o conjunto C deve ser calculado por um dos métodos que serão apresentados na Seção 4.5. Sendo assim somente, o parâmetro ρ é otimizado, o que implica que $\nabla_{\theta} J(\theta) = [\nabla_{\rho} J(\rho)^T]$. Como θ é somente em função dos pólos, ou seja, $\theta = \rho$, para este caso utiliza-se o gradiente definido em (4.34).

4.5 Cálculo dos Coeficientes do Modelo

Conforme descrito na Seção 4.1, o primeiro passo da identificação de sistema usando bases ortonormais é a definição da estrutura do modelo, dada pela quantidade de pólos distintos presentes na base e pelo número N_l de funções. Assumindo que estes parâmetros (pólos e número de bases) são conhecidos, resta o cálculo dos coeficientes da matriz C do modelo. A seguir, este problema é resolvido de duas maneiras: uma que utiliza a estimação do tipo mínimos quadrados não-recursivo e outra forma também analítica que tem como objetivo igualar o gradiente do critério de custo (4.48) a zero, pois o gradiente da função em seu ponto de mínimo é igual a zero.

4.5.1 Solução por Mínimos Quadrados

O método consiste na solução de um sistema do tipo $Ax = b$ usando o método dos mínimos quadrados que minimiza a seguinte função custo:

$$J(C) = \min_C \frac{1}{N_d} \|H(j\omega) - \Psi(j\omega)^T C\|_2. \quad (4.48)$$

Assume-se que: um conjunto discreto de frequências $\{\omega_k\}_{k=1}^{N_d}$ é dado; a resposta em frequência do sistema nestes pontos, i.e., $H(j\omega_k)$ é conhecida; e que a base de funções

está definida, i.e., $\Psi(j\omega_k)$ pode ser calculada usando a equação (4.23). Logo:

$$\Psi(j\omega) = \begin{bmatrix} Re(\Psi(j\omega_1)) \\ \vdots \\ Re(\Psi(j\omega_{N_d})) \\ Im(\Psi(j\omega_1)) \\ \vdots \\ Im(\Psi(j\omega_{N_d})) \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

$$H(j\omega) = \begin{bmatrix} Re(H(j\omega_1)) \\ \vdots \\ Re(H(j\omega_{N_d})) \\ Im(H(j\omega_1)) \\ \vdots \\ Im(H(j\omega_{N_d})) \end{bmatrix}, \quad (4.50)$$

e $x = C$, os coeficientes a serem estimados. Os elementos de $\Psi(j\omega)$ e $H(j\omega)$ são separados em suas partes reais e imaginárias para facilitar os cálculos.

A estimação dos coeficientes do modelo é solucionada através da solução de um problema do tipo mínimos quadrados não-recursivo, segundo:

$$C = [\Psi(j\omega)^T \Psi(j\omega)]^{-1} \Psi(j\omega)^T H(j\omega) \quad (4.51)$$

4.5.2 Solução por Ponto de Mínimo

A solução por ponto de mínimo para o cálculo dos coeficientes também consiste em resolver um sistema de equações do tipo $Ax = b$, porém A e b são descritos com base nos cálculos dos coeficientes do conjunto gerador otimizado (CGO) segundo Wulhynek (2002). Contudo a formulação do problema tem algumas particularidades como demonstrado a seguir.

Considerando a função custo $J(C)$ (4.48) e levando em conta que para realização dos cálculos a seguir a determinação de C é um problema analítico com $J(C)$ sendo convexa em relação ao parâmetro C , logo isso implica que a mesma possui um único mínimo e que o seu gradiente neste ponto é igual a zero. Então a equação (4.48) é

reescrita:

$$J(C) = \frac{1}{N_d} \sqrt{\sum_{k=1}^{N_d} |H(j\omega_k) - \Psi(j\omega_k)^T C|^2}, \quad (4.52)$$

suprimindo o somatório oriundo da definição da norma dois pela multiplicação de matrizes sem nenhum prejuízo ao resultado, tem-se

$$J(C) = \frac{1}{N_d} \sqrt{|H(j\omega) - \Psi(j\omega)^T C|^2}, \quad (4.53)$$

como $J(C) \geq 0$, pode-se elevar os dois lados da igualdade a potência de dois sem nenhum prejuízo ao resultado final, tal que:

$$J^2(C) = \frac{1}{N_d} |H(j\omega) - \Psi(j\omega)^T C|^2, \quad (4.54)$$

desenvolvendo a potência de dois tem-se:

$$J^2(C) = \frac{1}{N_d^2} [(H(j\omega) - \Psi(j\omega)^T C) (H(j\omega) - \Psi(j\omega)^T C)^*], \quad (4.55)$$

$$J^2(C) = \frac{1}{N_d^2} [(H(j\omega) - \Psi(j\omega)^T C) (H^*(j\omega) - \Psi(j\omega)^{*T} C)]. \quad (4.56)$$

Lembrando que $\nabla J^2(C) = 0$, sendo:

$$\nabla_C J^2 = \left(\frac{\partial J^2}{\partial c_1}, \frac{\partial J^2}{\partial c_2}, \dots, \frac{\partial J^2}{\partial c_{N_d}} \right)^T, \quad (4.57)$$

com o gradiente aplicado na equação (4.56), tem-se:

$$\begin{aligned} \nabla_C J^2(C) &= \frac{1}{N_d^2} [\nabla_C [H(j\omega) - \Psi(j\omega)^T C] (H^*(j\omega) - \Psi(j\omega)^{*T} C), \\ &+ (H(j\omega) - \Psi(j\omega)^T C) \nabla_C [H^*(j\omega) - \Psi(j\omega)^{*T} C]], \end{aligned} \quad (4.58)$$

onde os gradientes podem ser calculados como:

$$\begin{aligned} \nabla_C [H(j\omega) - \Psi(j\omega)^T C] &= -\Psi(j\omega), \\ \nabla_C [H^*(j\omega) - \Psi(j\omega)^{*T} C] &= -\Psi(j\omega)^*, \end{aligned} \quad (4.59)$$

lembrando que $\Psi(j\omega_k)$ já foi definido pela equação (4.4), substituindo as derivadas na equação (4.58), obtém-se:

$$\begin{aligned} \nabla_C J^2(C) &= \frac{1}{N_d^2} [-\Psi(j\omega) (H^*(j\omega) - \Psi(j\omega)^{*T} C), \\ &+ (H(j\omega) - \Psi(j\omega)^T C) - \Psi(j\omega)], \end{aligned} \quad (4.60)$$

como $\forall s \in \mathbb{C}$ tem-se a seguinte propriedade:

$$s + s^* = 2\text{Re}(s) = 2\text{Re}(s^*), \quad (4.61)$$

aplica-se tal propriedade na equação (4.60):

$$\begin{aligned} \nabla_C J^2(C) &= \frac{1}{N_d^2} 2\text{Re} [-\Psi(j\omega) (H^*(j\omega) - \Psi(j\omega)^{*T} C)], \\ \nabla_C J^2(C) &= \frac{1}{N_d^2} 2\text{Re} [\Psi(j\omega) \Psi(j\omega)^{*T} C - \Psi(j\omega) H^*(j\omega)]. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Finalmente usando a definição que o gradiente é nulo no ponto de mínimo obtém-se:

$$\frac{1}{N_d^2} 2\text{Re} \Psi(j\omega) \Psi(j\omega)^{*T} C = \frac{1}{N_d^2} 2\text{Re} \Psi(j\omega) H^*(j\omega). \quad (4.63)$$

Como comentado no início da Seção o cálculo por ponto de mínimo dos coeficientes é a solução de um problema do tipo $Ax = b$, observando a equação (4.63), tem-se que:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{N_d^2} 2\text{Re} \Psi(j\omega) \Psi(j\omega)^{*T} \\ b &= \frac{1}{N_d^2} 2\text{Re} \Psi(j\omega) H^*(j\omega), \end{aligned} \quad (4.64)$$

e como no caso no método por mínimos quadrados $x = C$, ou seja, os coeficientes a serem estimados.

Uma vantagem do uso da solução por ponto de mínimo é o ganho de tempo nos cálculos, visto que são necessárias três operações com matrizes e não a solução de um problema de mínimos quadrados. Contudo deve-se ter cuidado quanto ao número de funções N_l elevado, pois isso pode gerar o mal condicionamento da matriz A do sistema de equações.

4.6 Seleção Inicial dos Pólos para Sistemas Mal Amortecidos

Uma boa seleção dos pólos se dá com o posicionamento de pólos complexos conjugados e/ou reais distribuídos dentro da faixa de frequência de interesse que representem bem as dinâmicas do sistema. As dinâmicas dominantes são aquelas que

permitem que a função estimada tenha um melhor ajuste com a função do sistema. O diagrama de Bode ou diagrama de resposta em frequência possibilita a identificação das dinâmicas do sistema, por exemplo a largura de banda, margem de ganho e de fase, taxa de decaimento do módulo e picos de ressonância são extraídos da observação do diagrama de Bode.

No caso de sistemas mal amortecidos, as dinâmicas observadas são os picos de ressonância. Nestes casos, um par de pólos é selecionado observando-se os picos de ressonância da resposta em frequência. A frequência que possui o pico de ressonância dá a informação sobre a parte imaginária do pólo (β) e a parte real (α) é escolhida de modo que:

$$-p_n = -\alpha + j \beta, \quad \alpha = \frac{\beta}{\lambda}, \quad (4.65)$$

onde λ é um valor arbitrário.

Existem outros esquemas para se escolher a localização dos pólos. Entretanto segundo Deschrijver e Dhaene (2006) o esquema apresentado se for utilizado no caso que pretenda-se utilizar uma rotina de otimização para procurar pólos ótimos será necessário um número menor de iterações os demais esquemas. Neste trabalho considera-se $\lambda = 100$ pois este simples procedimento produz pólos iniciais com partes reais suficientemente pequenas, tal procedimento tenta evitar o problema de mal-condicionamento, como é explicado em Gustavsen e Semlyen (1999).

As duas abordagens de seleção ótima apresentadas nas seções anteriores, a princípio não necessitam de uma boa seleção inicial dos pólos. Porém, se o modo de seleção inicial desta seção for utilizada pode-se evitar que o método chegue a um mínimo local, como também reduzir o tempo gasto na otimização e diminuir número de iterações necessárias para se chegar a um mínimo da função. No trabalho de Maestrelli e Oliveira (2010) é abordado este tipo de seleção do pólos para o início do processo de otimização.

4.7 Comentários Finais

Neste capítulo apresentou-se a parametrização de um modelo através de uma base de funções ortonormais. Na sequência demonstrou-se algumas abordagens para o cálculo dos parâmetros da base. Os dois modos de seleção ótima não são únicos, pois a seleção inicial dos pólos demonstrada a pouco gera uma boa aproximação porém, necessita que o número de funções na base seja consideravelmente elevado, isso motiva a otimização somente dos pólos para reduzir o número de funções na base. Lembrando que o foco deste documento não é a escolha ideal do número de funções, para tanto nos exemplos a serem apresentados no próximo capítulo o número de bases é escolhido de forma arbitrária e sem critério específico.

5 Exemplos de Utilização dos Métodos Propostos

Neste Capítulo, ilustra-se a utilização dos métodos propostos através de testes de identificação de sistemas usando casos reais e de simulação. Os casos de simulação apresentados exploram as características dos métodos de seleção dos parâmetros e por serem simples demonstram a convergência do algoritmo de otimização que utiliza o cálculo analítico da direção ótima de busca. Isto é de particular importância pois, nos exemplos aborda-se a otimização em duas fases, ou seja, usa-se o método onde somente o conjunto de pólos é otimizado (Seção 4.4).

Dois exemplos são estudados como casos de simulação, um deles é um sistema com três pólos reais, caso que pode ser visto como a expansão do problema de identificação com base de Laguerre. O outro exemplo refere-se a um sistema com pólos complexos conjugados, que é o caso da base de Kautz, cujo método de seleção de pólos é inicializado segundo abordagem apresentada na Seção 4.6. Nestes casos, faz-se a comparação entre o algoritmo com uso da direção ótima calculada no decorrer do Capítulo 4 e o algoritmo de otimização sem uso deste resultado. Além disso, comparam-se os métodos de cálculo dos coeficientes da série descritos na Seção 4.5.

Para ilustrar a necessidade do conceito de identificação não paramétrica revista na Seção 2, faz-se também uma aquisição de dados no domínio do tempo de um sistema dinâmico denominado VCFP (*Voice Coil-Driven Flexible Positioner*). Na sequência, utiliza-se a ETFE para estimação da resposta em frequência do sistema e, no passo seguinte, faz-se a identificação paramétrica conforme os procedimentos descritos nos Capítulos 3 e 4.

Os demais casos reais tratam de três transformadores de energia em uso pela CEMIG (Companhia de Energia de Minas Gerais), dos quais as respectivas respostas em frequência são conhecida.

Nestes exemplos, faz-se a comparação entre os métodos de otimização, um utilizando o cálculo analítico da direção ótima de busca e um não utilizando este cálculo.

Como foi abordado na Seção 4.3, o método de Levenberg-Marquardt é do grupo 2, ou seja, usa a informação da direção ótima de busca calculada no Capítulo 4, já o *trust-region-reflective* é do grupo 1 e utiliza somente a informação sobre a função custo. Ambos os métodos de otimização foram configurados com os seguintes critérios: um máximo de 200 iterações; máximo 400 avaliações da função custo durante o processo de otimização; a variação mínima da função custo e dos parâmetros está definida como 10^{-20} ; e a variação máxima não tem limites nos casos utilizados.

Define-se aqui que nas tabelas comparativas para representar a otimização com o uso do gradiente calculado analiticamente utiliza-se a sigla CGA (com gradiente analítico) e no caso da otimização de não utiliza a informação do gradiente analítico a abreviação referente é SGA (sem gradiente analítico). São apresentadas tabelas com as informações sobre o desempenho dos métodos de otimização tais como: valor da função custo ao final do processo, tempo decorrido para otimização, o número de iterações e o número de avaliações da função custo realizadas.

O procedimento de otimização dos parâmetros é realizado selecionado-se o número e local dos pólos que representam bem as dinâmicas do sistema, depois é escolhido o número de funções e assim inicia-se o processo que otimiza somente o conjunto inicial de pólos e não todos os pólos da expansão. Então a função custo parametrizada por θ , com $\theta = [\rho^T C^T]$, agora passa somente a depender dos pólos do sistema, ou seja, $\theta = [\rho^T]$. Logo a cada iteração que os pólos são otimizados os coeficientes são calculados novamente como definido na Seção 4.5. Defini-se que onde realiza-se a análise dos dois métodos de cálculo dos coeficientes, a solução por mínimos quadrados não recursivo é representado por MQ e a solução por ponto de mínimo é representada por PdM.

O tempo de otimização está vinculado com a seguinte configuração: Matlab R2010a de 64 bits instalado em um Windows 7 de 64 bits com o hardware sendo um processador duplo núcleo à 2,70 GHz (AMD 7750), com 2 módulos de 2 Gb de memória trabalhando a 800 Mhz (Corsair XMS2).

Por fim na Seção 5.1 são apresentados os critérios para a quantificar os resultados. Contudo, esses não serão os únicos recursos apresentados, serão utilizados gráficos comparativos do erro entre as curvas de resposta em frequência do sistema e do modelo estimado.

5.1 Critérios de Avaliação da Qualidade do Modelo Identificado

Para quantificar a qualidade dos modelos identificados são usados três critérios, o Erro Médio Quadrático que dá ao leitor da média dos erro da resposta em frequência, a Norma Euclidiana que analise a energia do erro, e a Norma Infinita que é o máximo do erro em módulo.

Erro Médio Quadrático

O MSE (*Mean Square Error*) é definido como sendo a diferença entre a resposta em frequência do sistema com a resposta em frequência do modelo estimado.

$$MSE = \frac{1}{N_d} \sum_{k=1}^{N_d} |H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k)|^2. \quad (5.1)$$

Norma Euclidiana ou Norma L_2

A norma Euclidiana ou norma L_2 da diferença entre a resposta em frequência do sistema e a resposta em frequência do modelo estimado é definida segundo (Gradshteyn; Ryzhik, 2007), como:

$$\|H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{N_d} |H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k)|^2}. \quad (5.2)$$

Norma L_∞

A norma L_∞ da diferença entre a resposta em frequência do sistema e a resposta em frequência do modelo estimado é definida segundo (Gradshteyn; Ryzhik, 2007), tal que:

$$\|H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k)\|_\infty = \max_{k=1}^{N_d} |H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k)|. \quad (5.3)$$

5.2 Caso de Simulação com Pólos Reais

Para o caso de sistemas com dinâmicas representadas por pólos reais a seguinte função de transferência foi selecionada:

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}. \quad (5.4)$$

A resposta em frequência do modelo obtém-se através da simulação realizada pelo Matlab, e com este caso, tem-se o objetivo de demonstrar que o método de identificação é capaz de aproximar a curva de resposta em frequência com grande precisão e que o gradiente da função custo em relação aos pólos converge para os pólos do sistema analisado. Na figura 5.1 observa-se o modelo estimado com funções definidas pelos pólos em $s_1 = -0,9$, $s_2 = -2,1$ e $s_3 = -3,1$, valores iniciais dos pólos para o processo de otimização, o modelo é definido como tendo três funções na base ($N_l = 3$). Para ilustrar o desempenho dos métodos de otimização descritos no Capítulo 4, são apresentados os resultados da estimação de um modelo usando o método CGA, que utiliza a informação sobre o gradiente calculado na Seção 4.4, e também pelo método SGA, que não utiliza a informação sobre o gradiente. Os dados do sistema e dos modelos estimados são apresentados nas figuras 5.2a e 5.2b, com a figura 5.3 ilustrando a evolução dos pólos, em valor absoluto, durante a otimização, sendo que a estrela de cor vermelha indica a posição inicial do pólo e o círculo na cor verde a posição final do mesmo. A tabela 5.1a traz informações sobre o desempenho dos métodos de otimização tais como: valor da função custo ao final do processo, tempo decorrido para otimização, o número de iterações e o número de avaliações da função custo realizadas.

Na tabela 5.1b é verificada a posição inicial dos pólos contra a posição após a otimização. Os critérios estabelecidos na Seção 5.1 são apresentados na tabela 5.1c.

Apesar do resultado visualizados nas figuras estarem próximos o método SGA chegou mais perto dos pólos ótimos com um custo computacional menor que o método CGA, porém necessitou de 60 avaliações da função custo a mais, por isso é esperado que tenha um resultados melhor. Contudo, os dois modelos obtidos são satisfatórios.

Figura 5.1: Estimação inicial

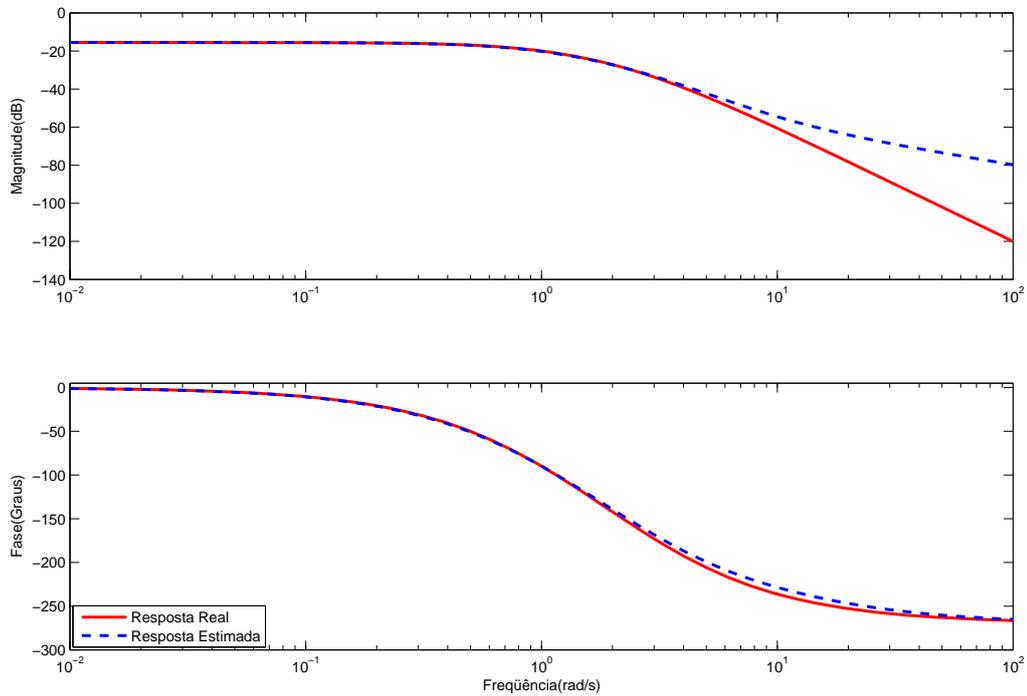


Tabela 5.1: Informações sobre a otimização do caso 1

(a) Dados do desempenho da otimização para $N_l = 3$

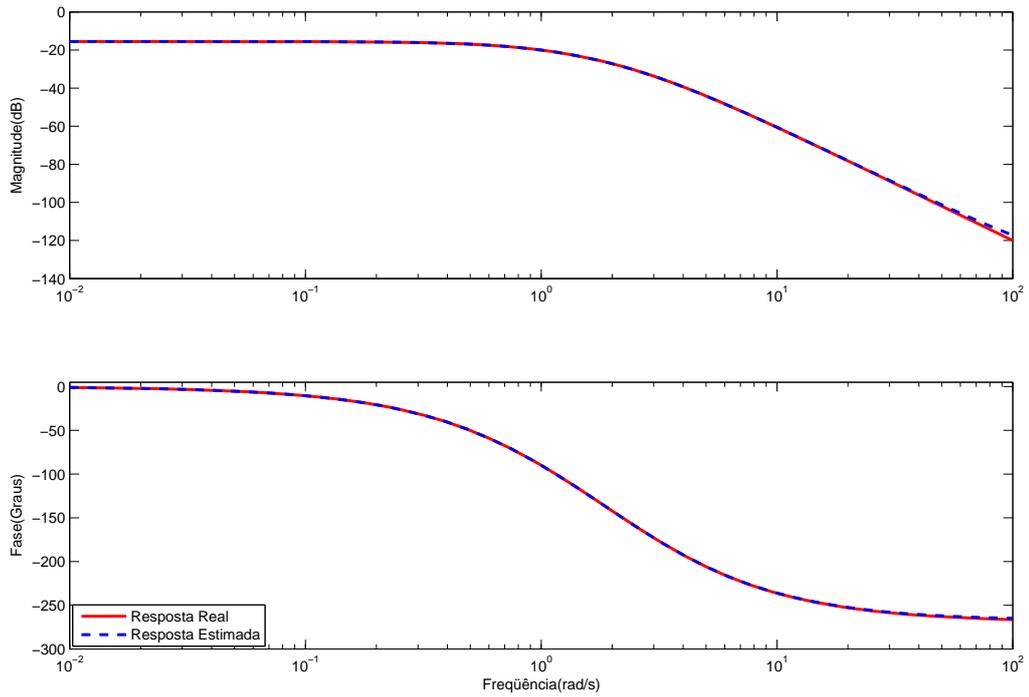
Dados sobre a otimização para $N_l = 3$	Dados com CGA	Dados com SGA
Função custo ($J(\theta)_{ini}$) = $5,3796 \times 10^{-5}$	$1,6580 \times 10^{-10}$	$2,1022 \times 10^{-18}$
Tempo computacional em segundos	16,48	9,54
Iterações	81	44
Avaliações da função custo	120	180

(b) Pólos iniciais x Pólos otimizados

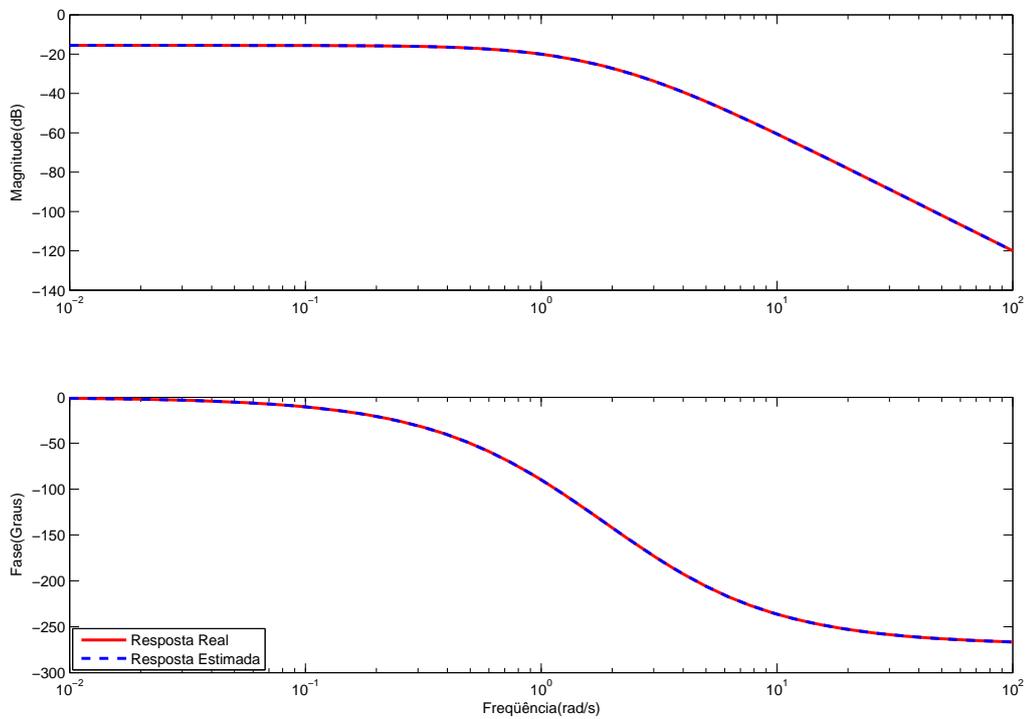
Iniciais	Finais com CGA	Finais com SGA
-0,9	-0,99909873274113	-0,99999990792795
-2,1	-2,01152874217663	-2,00000087451159
-3,1	-2,97829161551843	-2,99999860122763

(c) Critérios de avaliação (iniciais x finais)

Critério	Iniciais	Finais com CGA	Finais com SGA
MSE	$7,8145 \times 10^{-5}$	$2,5639 \times 10^{-10}$	$2,7382 \times 10^{-18}$
L_2	$1,0759 \times 10^{-4}$	$4,6002 \times 10^{-6}$	$4,2044 \times 10^{-18}$
L_∞	0,0028	$3,3160 \times 10^{-10}$	$6,0821 \times 10^{-10}$

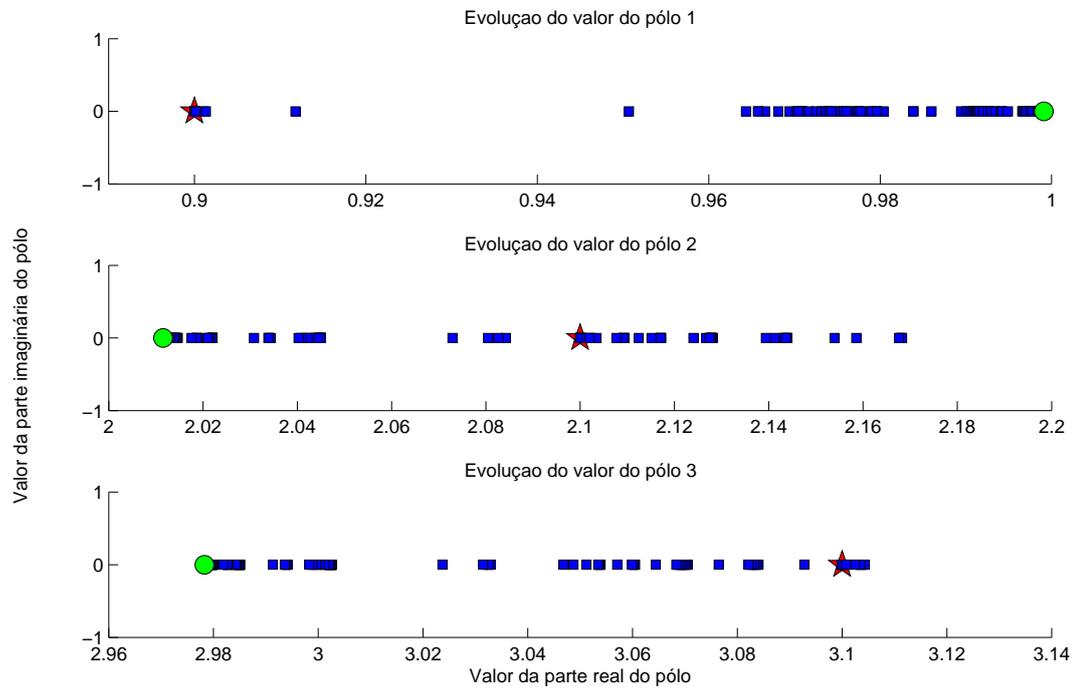


(a) Otimização dos pólos com CGA

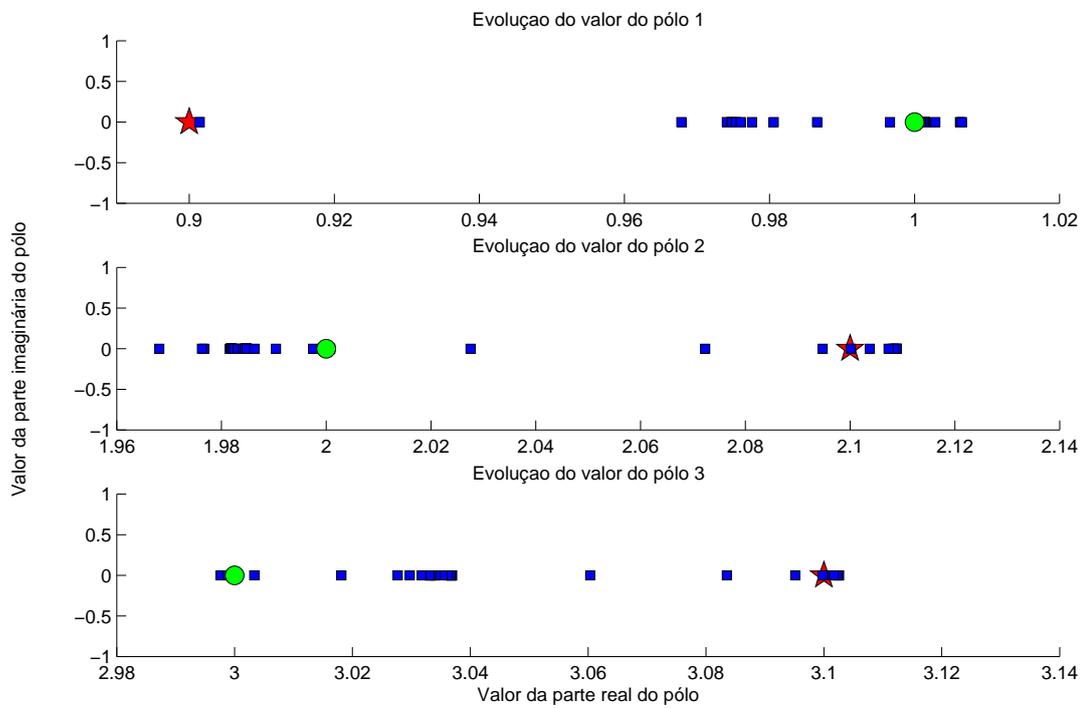


(b) Otimização dos pólos com SGA

Figura 5.2: Identificação do caso exemplo 1



(a) Evolução dos pólos com CGA



(b) Evolução dos pólos com SGA

Figura 5.3: Evolução dos pólos na otimização do caso 1.

5.3 Caso de Simulação com Pólos Complexos

O caso de sistemas com dinâmicas representadas por um par de pólos complexos conjugados é exemplificado através da função de transferência (5.5) que é utilizada na simulação realizada pelo Matlab para obtenção da resposta em frequência.

$$H(s) = \frac{1}{(s + 0,5 + 5j)(s + 0,5 - 5j)}. \quad (5.5)$$

O objetivo deste exemplo é mostrar que o método é capaz de aproximar a curva de resposta em frequência com pólos complexos conjugados. Na figura 5.4 é observada a aproximação do modelo estimado com pólos em $s_1 = -0.51 \pm j 5.1$ e duas funções na base ($N_l = 2$), tais valores mencionados são os parâmetros iniciais do processo de otimização, assim aqui chamados de parâmetros de estimação inicial. O resultado da identificação após o processo de otimização pelo método de CGA, com cálculo exato da direção ótima de busca, e pelo método do SGA, são verificados nas figuras 5.5a e 5.5b. A figura 5.6 traz a evolução dos pólos durante a otimização. Na tabela 5.2a, tem-se as informações sobre o desempenho dos métodos de otimização. A tabela 5.2b apresenta a posição inicial e final dos pólos. Os critérios estabelecidos de avaliação são apresentados na tabela 5.2c. Neste exemplo, os resultados da aproximação do modelo usando a direção exata do valor ótimo para o pólo são ligeiramente melhores que no método tradicional.

Como comentado na Seção 4.5, o cálculo dos coeficientes pelo método apresentado na Seção 4.5.2, aqui denominado de Ponto de Mínimo (PdM) tende a levar a um ganho de tempo na identificação e conseqüentemente na otimização. Na tabela 5.3 é realizada a comparação da otimização (usando o algoritmo SGA) com a única diferença sendo o tipo do cálculo dos coeficientes, isto é PdM ou Mínimos Quadrados Tradicional (MQ). Nota-se que há uma pequena diferença no valor do pólo ótimo e também nos valores dos dois coeficientes, lembrando que são duas funções na base. Tal diferença faz a função custo aumentar seu valor na escala de 10^{-22} sendo realmente uma pequena diferença. O ganho de tempo é cerca de 1,1 segundos. Este tempo é pequeno, porém compatível com a dimensão do problema e ilustra a potencialidade de ganho de tempo computacional do método.

Figura 5.4: Estimação inicial

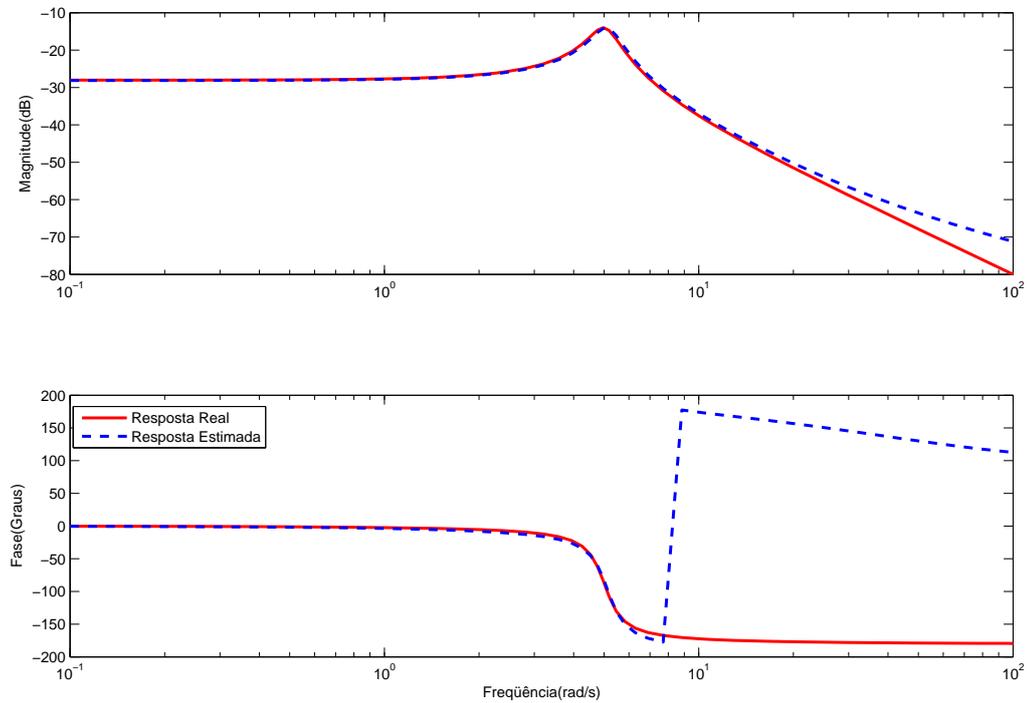


Tabela 5.2: Informações sobre a otimização do caso 2

(a) Dados do desempenho da otimização para $N_l = 2$

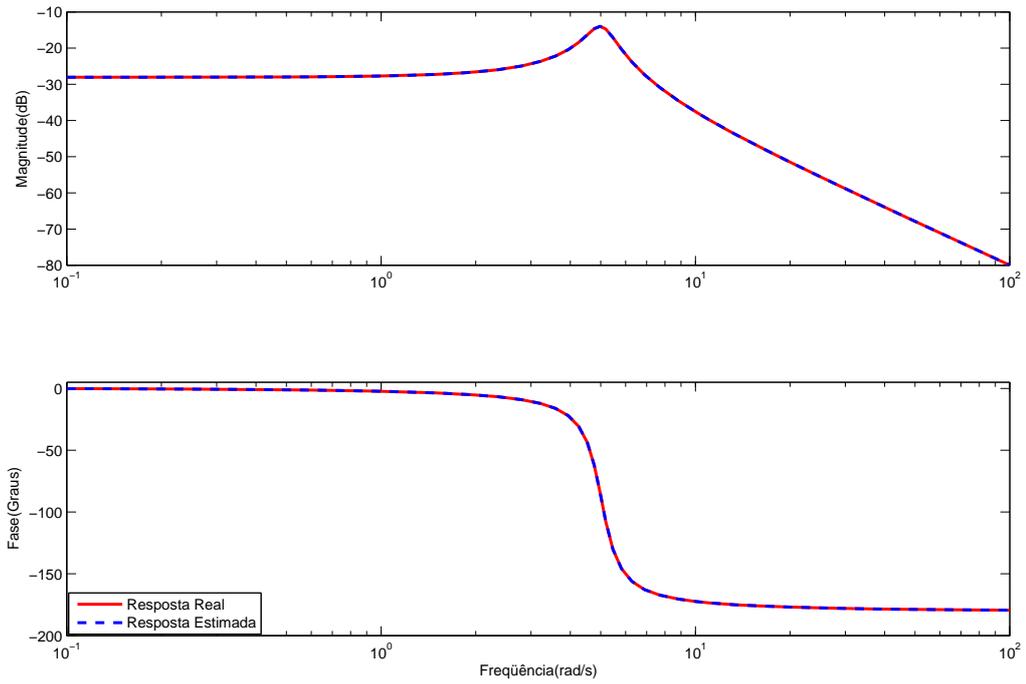
Dados sobre a otimização para $N_l = 2$	Dados com CGA	Dados com SGA
Função custo ($J(\theta)_{ini}$) = $9,2557 \times 10^{-4}$	$2,6565 \times 10^{-17}$	$1,2947 \times 10^{-16}$
Tempo computacional em segundos	24,76	2,31
Iterações	200	9
Avaliações da função custo	203	30

(b) Pólos iniciais x Pólos otimizados

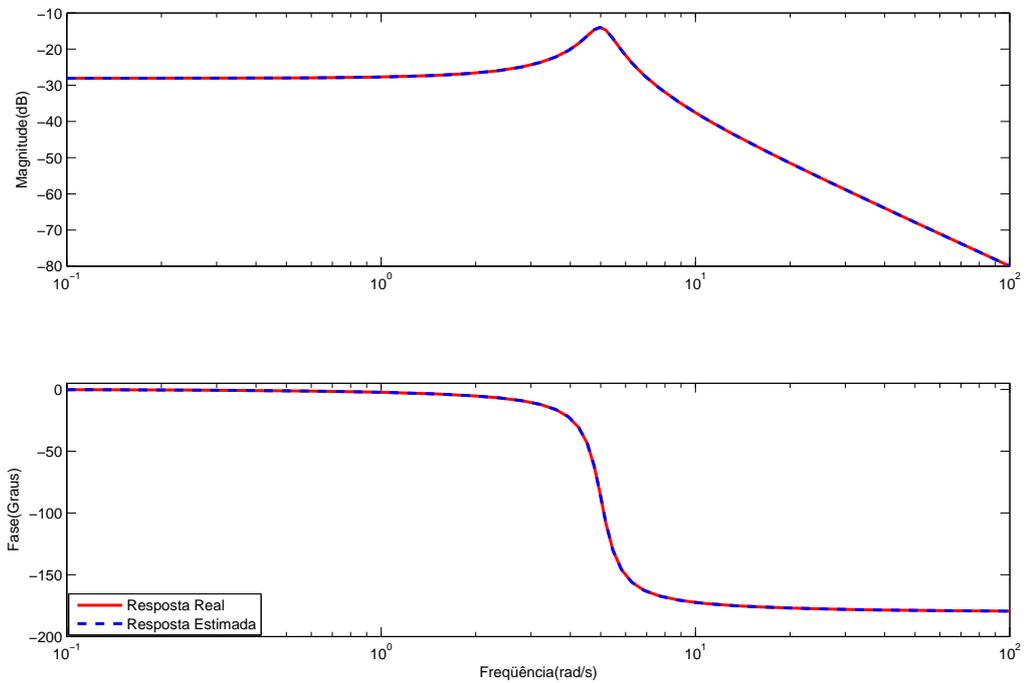
Iniciais	$-0,51 \pm j5,1$
Finais com CGA	$-0,50000001526181 \pm j 5,000000003219395$
Finais com SGA	$-0,49999998389791 \pm j 4,999999965439440$

(c) Critérios de avaliação (iniciais x finais)

Critério	Iniciais	Finais com CGA	Finais com SGA
MSE	$7,2938 \times 10^{-4}$	$2,7974 \times 10^{-17}$	$1,1473 \times 10^{-16}$
L_2	0,0019	$5,3131 \times 10^{-17}$	$2,5894 \times 10^{-16}$
L_∞	0,0167	$2,7212 \times 10^{-9}$	$5,8127 \times 10^{-9}$



(a) Otimização dos pólos com CGA



(b) Otimização dos pólos com SGA

Figura 5.5: Identificação do caso exemplo 2

Tabela 5.3: Informações sobre o cálculo analítico dos coeficientes no caso 2

(a) Dados do desempenho da otimização SGA para $N_l = 2$

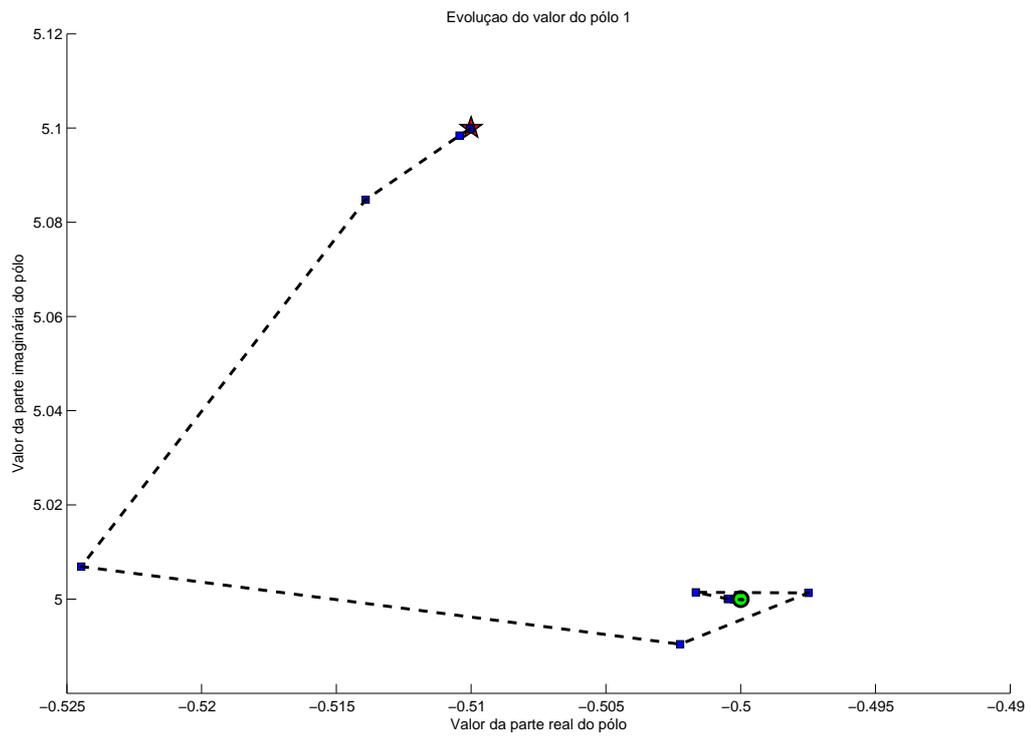
	PdM	MQ
Função custo	$1,294699 \times 10^{-16}$	$1,294708 \times 10^{-16}$
Tempo computacional em segundos	1,20	2,31
Iterações	9	9
Avaliações da função custo	30	30

(b) Pólos e Coeficientes

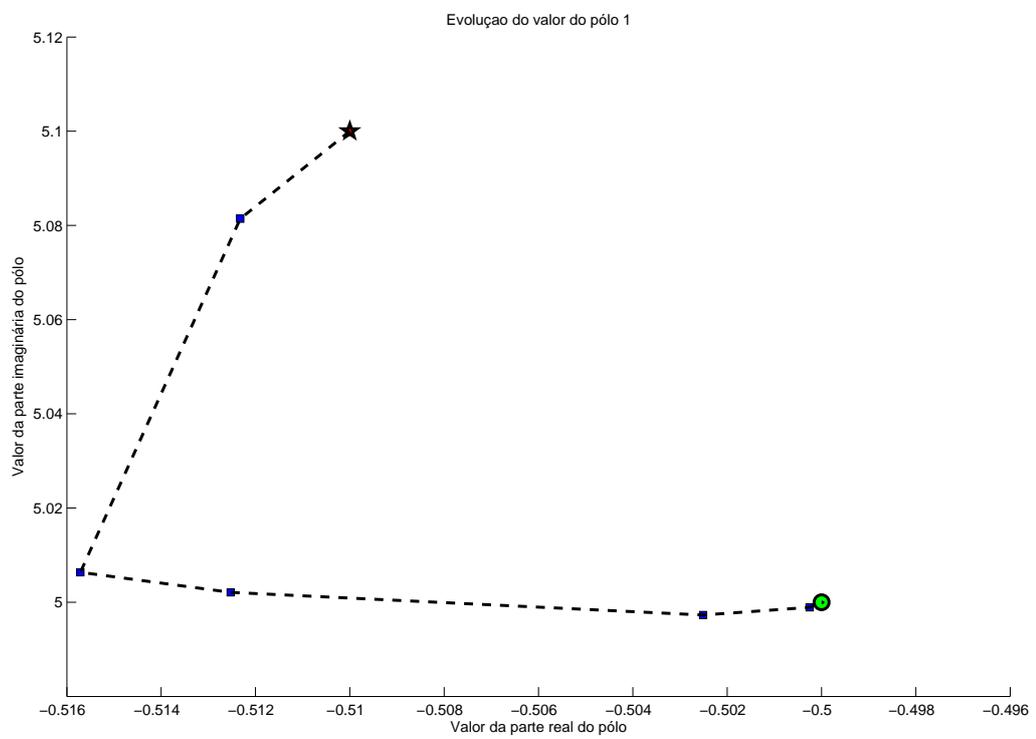
Pólos		
PdM	$-0,49999998389799 \pm j 4,999999965439551$	
MQ	$-0,49999998389791 \pm j 4,999999965439440$	
Coeficientes		
PdM	$-0,09950371419334$	$0,09950372314883$
MQ	$-0,09950371419332$	$0,09950372314885$

(c) Critérios de avaliação

Critério	PdM	MQ
MSE	$1,1473 \times 10^{-16}$	$1,1473 \times 10^{-16}$
L_2	$2,5893 \times 10^{-16}$	$2,5894 \times 10^{-16}$
L_∞	$5,8127 \times 10^{-9}$	$5,8127 \times 10^{-9}$



(a) Evolução dos pólos com CGA

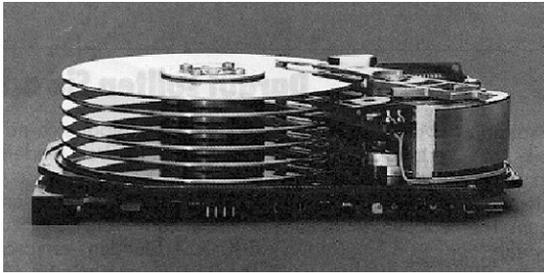


(b) Evolução dos pólos com SGA

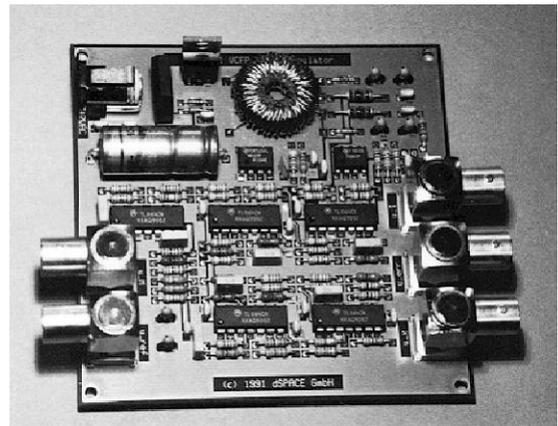
Figura 5.6: Evolução dos pólos na otimização do caso 2.

5.4 Modelagem do Simulador VCFP

O simulador VCFP é um circuito analógico de um sistema eletromecânico de sétima ordem, típico de atuadores rápidos de mecanismos de posicionamento achados em unidades de disco rígido (HD ou *Hard Disk*) para computadores. Este sistema é ilustrado na figura 5.7.



(a) Exemplo de uma unidade de disco para computadores



(b) Foto do circuito VCFP

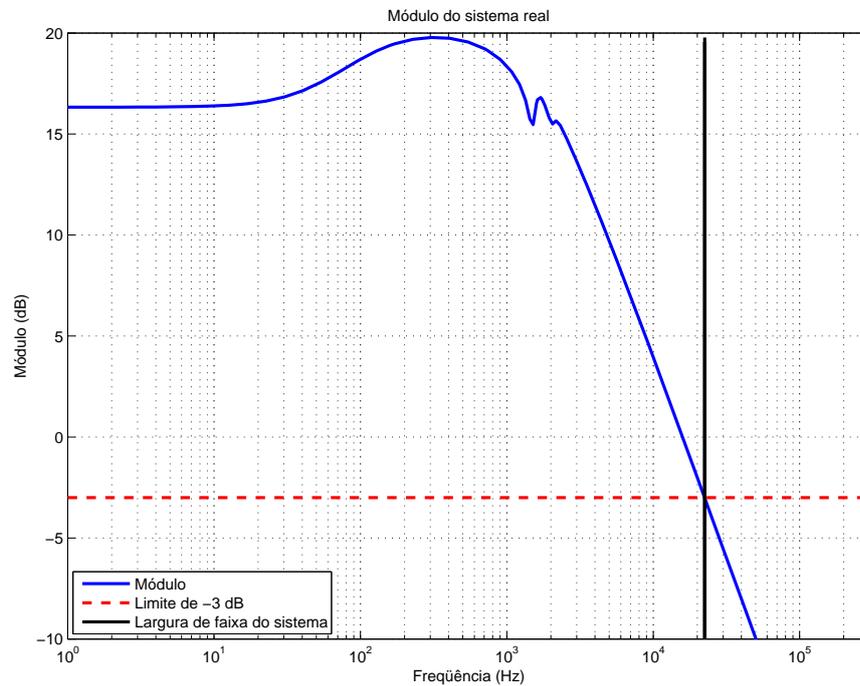
Figura 5.7: Sistema do VCFP

Uma outra etapa na coleta de dados é a escolha do tempo de amostragem na literatura. O teorema de Shannon diz que um sinal que não contenha componentes de frequência acima de $1/2T_s$ pode ser determinado unicamente a partir de amostras de tal sinal separadas por T_s . Na prática usa-se uma frequência que é entre 5 a 10 vezes maior frequência de interesse contida nos dados do sistema.

O critério de escolha de frequência de amostragem previamente mencionada nem sempre ajuda, pois não se tem conhecimento *a priori* da maior frequência de interesse. No presente trabalho, como o foco não é a escolha do tempo de amostragem, o período de amostragem é escolhido com base no espaço de estados, equivalente ao sistema, que foi fornecido pela dSpace, fabricante do VCFP. A seleção do período de amostragem foi feita com base no valor de 20 a 40 vezes o valor da frequência equivalente a $-3dB$ do módulo, ou seja a largura de faixa do modelo fornecido. Segundo o modelo fornecido pelo fabricante o sistema apresenta o seguinte diagrama de módulo:

A frequência equivalente a $-3dB$ segundo a indicado na figura ?? é aproxi-

Figura 5.8: Diagrama de módulo do modelo fornecido



madamente de $22,46 \text{ kHz}$. O valor a ser selecionado está entre 20 a 40 vezes maior, o que representa uma faixa entre $1,1 \cdot 10^{-6}$ a $2,2 \cdot 10^{-6}$ segundos, entretanto o sistema de aquisição de dados não aceita um valor menor que 10^{-4} , para o período de amostragem. Logo o período de amostragem Δt utilizado é de 10^{-4} segundos, que apesar de ser menor do que o desejado, é capaz de representar a dinâmica do sistema em até 5 kHz .

A coleta dos dados é auxiliada pelo *hardware* de aquisição de dados da dSAPCE e pelo *software* ControlDesk em conjunto com MATLAB. Utilizando o período de amostragem previamente selecionado com um sinal quadrado de amplitude aleatória dentro do limite de -1 a 1 volts, com período 100 vezes maior que o período de amostragem é feita a aquisição de dados no domínio do tempo conforme observa-se na figura 5.9.

5.4.1 Estimação não Paramétrica da Resposta em Frequência

Com os dados coletados do sistema VCFP no domínio do tempo (ver figura 5.9)obtem-se a resposta no domínio da frequência fazendo o uso do procedimento conhecido como ETFE (Capítulo 2). Para tanto, usa-se da ferramenta Matlab da *Math-*

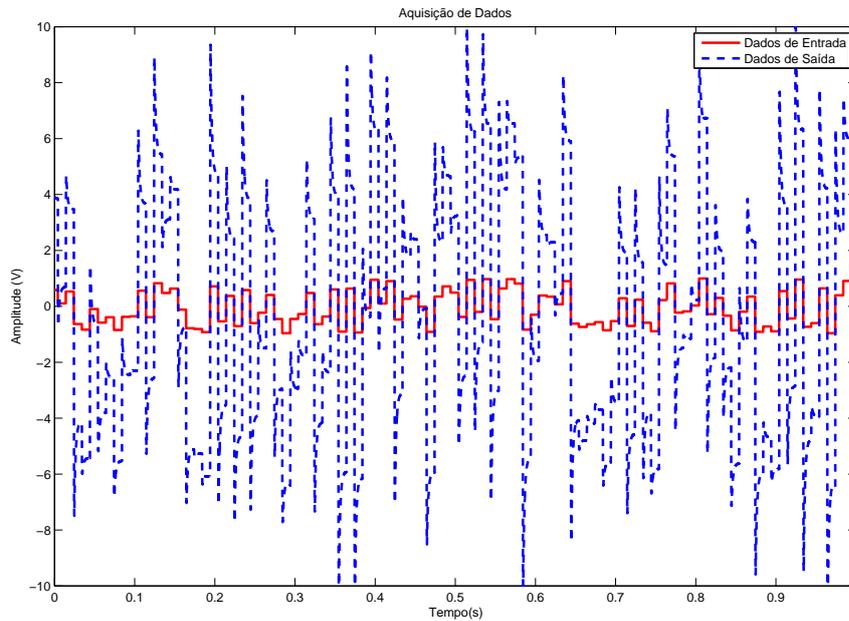


Figura 5.9: Aquisição dos dados no domínio do VCFP

Works que possui uma função para fazer a estimação não paramétrica da resposta em frequência usando a ETFE. Após o procedimento da ETFE, pode-se aplicar uma suavização da curva estimada para diminuir o efeito do ruído nos dados. A figura 5.10 apresenta a curva de resposta em frequência estimada com os dados no domínio do tempo antes e após o processo de suavização, realmente a ETFE aproxima bem a resposta em frequência do sistema, contudo neste caso a diferença observada no gráfico se deve ao problema do tempo de amostragem inadequado, pois como abordado em Maestrelli (2007) e mencionado anteriormente o ideal seria um período de amostragem de 10^{-6} segundos e o aparelho disponível para aquisição consegue amostrar no máximo a que 10^{-4} segundos.

5.4.2 Identificação Paramétrica

De posse da estimação da resposta em frequência do sistema, inicia-se a fase de identificação paramétrica utilizando uma base de funções ortonormais em tempo contínuo. Os pólos iniciais para a estimação estão definidos como sendo um pólo real $s_1 = -1000$ e um par de pólos complexos conjugados $s_2 = -108,7 \pm j 10870$. Para apresentar a aproximação do modelo com diferentes números de funções na base, quatro

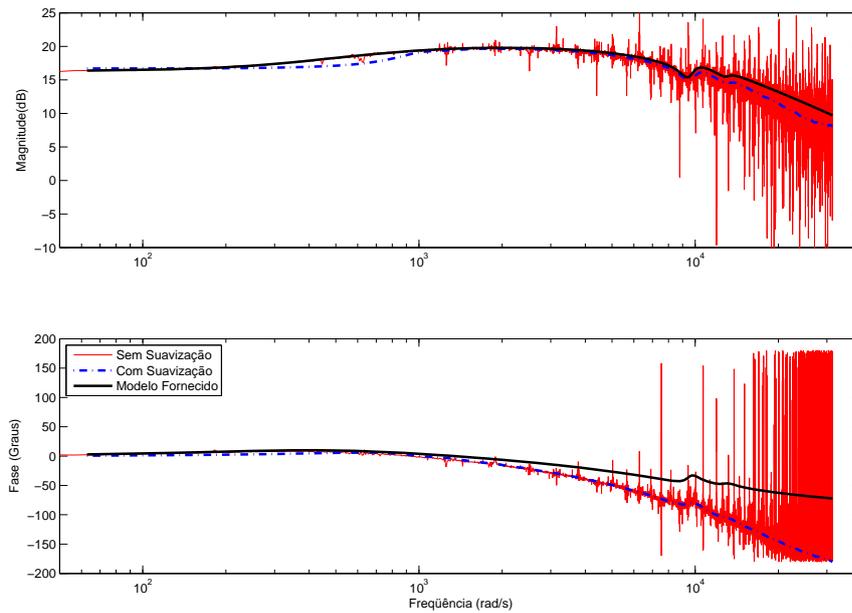


Figura 5.10: Estimação não paramétrica da resposta em frequência do VCFP

valores diferentes são utilizados: 12, 60, 90 e 120, a resposta em frequência dos modelos estimados sem qualquer processo de otimização dos pólos é apresentada da figura 5.11 até a figura 5.14. A tabela 5.4 traz o comparativo dos critérios de avaliação com cada valor de N_l .

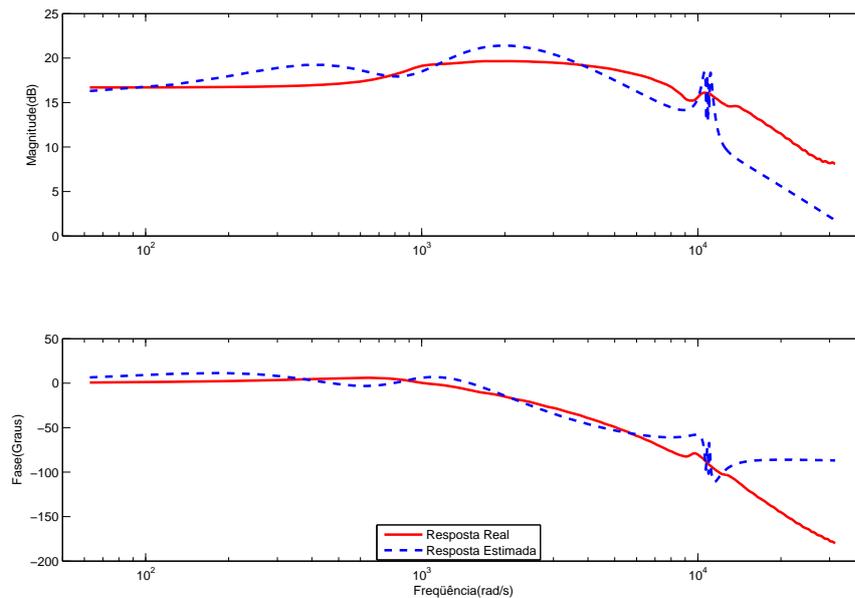


Figura 5.11: Identificação com 12 funções

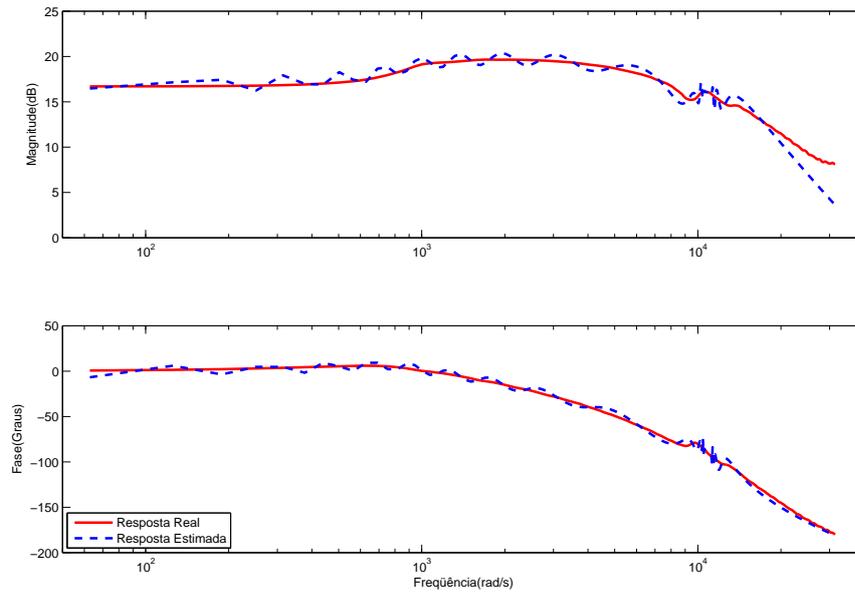


Figura 5.12: Identificação com 60 funções

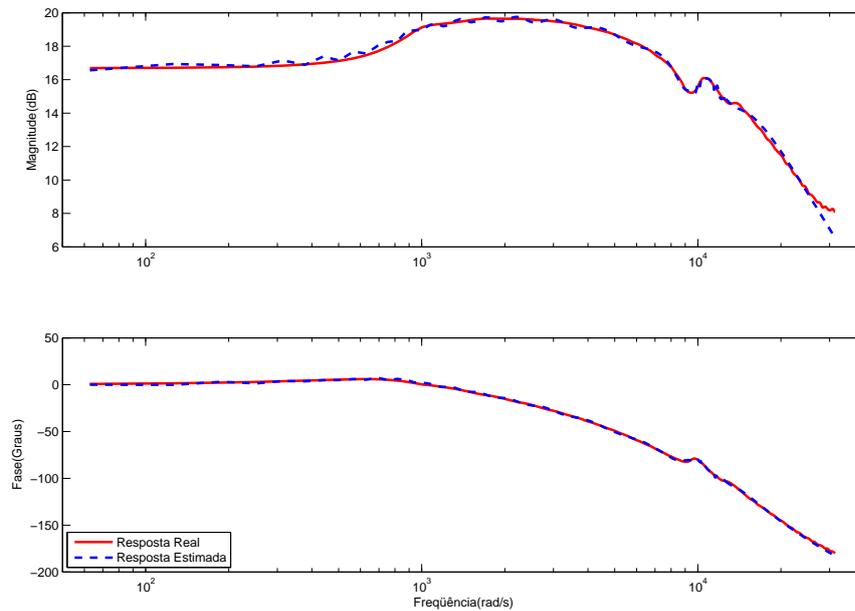


Figura 5.13: Identificação com 90 funções

Neste caso, o objetivo é demonstrar a possibilidade de identificar sistemas no domínio da frequência tendo somente dados no domínio do tempo. Contudo os métodos de otimização se comportaram de formas diferentes como é observado na tabela 5.6, e figuras 5.15 e 5.16 para os casos de $N_l = 12$ e $N_l = 90$ respectivamente. Os dois métodos se comportaram conforme segue, o método de cálculo da direção ótima de

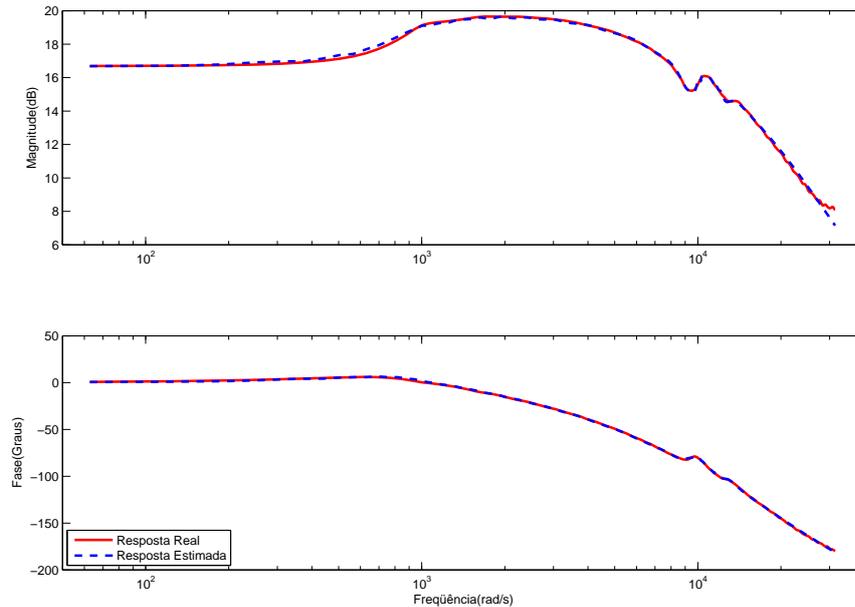


Figura 5.14: Identificação com 120 funções

Tabela 5.4: Critérios de avaliação na estimação do VCFP

Critério	Número de bases			
	12	60	90	120
MSE	3250	221,42	12,07	2,93
L_2	3480	239,90	15,63	4,35
L_∞	3,25	1,39	0,43	0,30

busca (Levenberg-Marquardt) no caso de 12 funções na base parou após 3 iterações e 13 avaliações da função custo em um mínimo local, já com o método *trust-region-reflective* nas mesmas condições iniciais após 243 avaliações da função custo obteve-se uma boa aproximação. Contudo, com o mesmo método, quando aumentado o número de funções para 60 obteve-se um desempenho menor que o CGA, pois atingiu-se o limite de 400 avaliações da função custo, um dos critérios de parada definidos. O mesmo ocorreu para $N_l = 90$ e 120 sendo que, no último caso não houve alteração nos valores dos parâmetros após as 400 avaliações. Mais detalhes são observados na tabela 5.5, onde todas as otimizações realizadas com CGA foram interrompidas pois a função custo chegou em um mínimo, mesmo que local, e como já mencionado no caso da otimização SGA, somente o caso com 12 funções na base parou por chegar em um mínimo, os demais casos chegaram ao limite imposto para o número de avaliações da função custo.

Tabela 5.5: Dados de performance da otimização do VCFP

Número de funções	12		60		90		120	
Algoritmo	CGA	SGA	CGA	SGA	CGA	SGA	CGA	SGA
Função custo inicial	1744,5		119,95		7,81		2,18	
Função custo final	76,82	5,58	0,88	2,92	0,78	7,19	0,62	2,17
Tempo (s)	4,24	19,86	7,70	98,09	17,57	204,23	25,14	334,97
Iterações	3	57	2	100	4	9	3	9
Avaliações da função	13	203	9	400	21	400	16	400

Tabela 5.6: Critérios de avaliação na otimização do VCFP

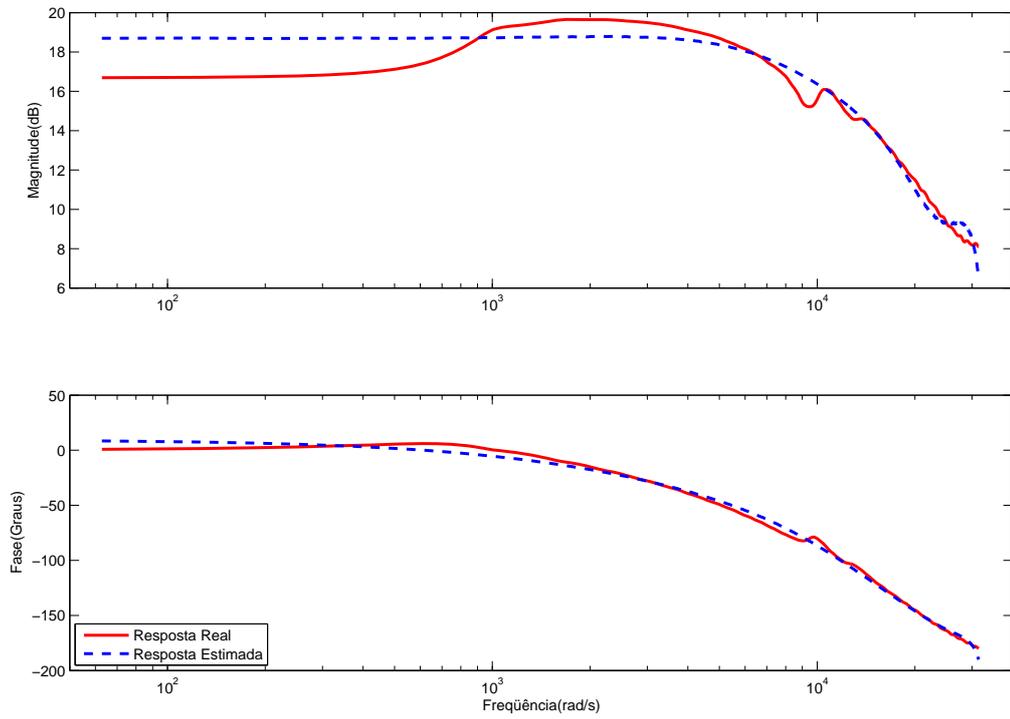
(a) Critérios de avaliação na otimização com CGA

Critério	Número de bases			
	12	60	90	120
MSE	89,68	1,04	0,58	0,50
L_2	153	1,77	1,57	1,24
L_∞	2,04	0,28	0,36	0,35

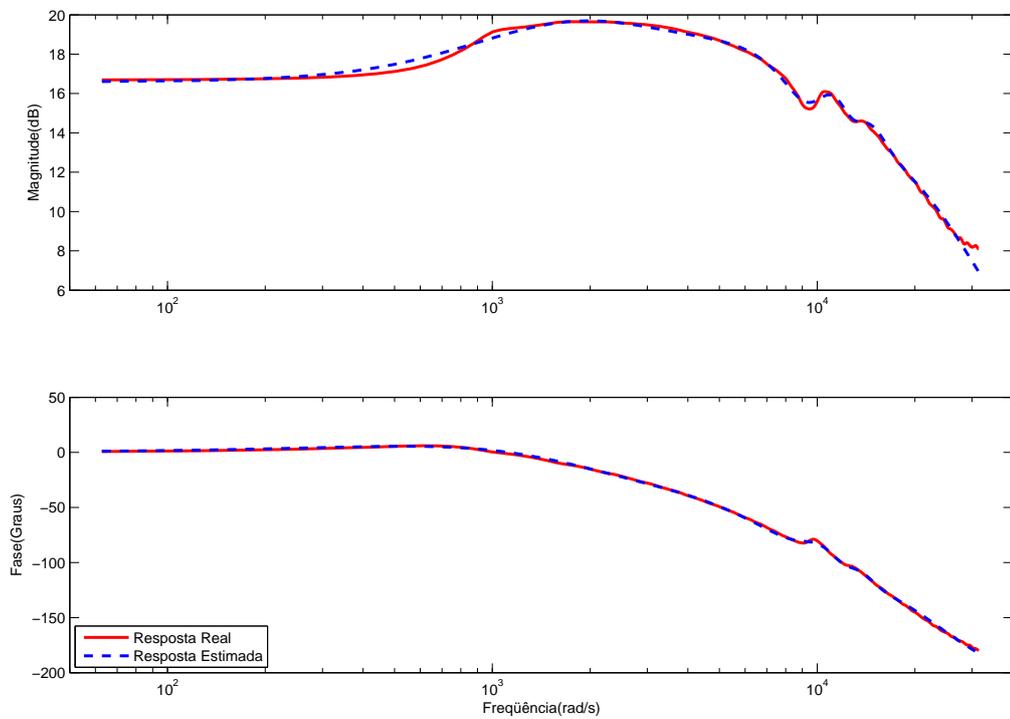
(b) Critérios de avaliação na otimização com SGA

Critério	Número de bases			
	12	60	90	120
MSE	8,13	4,53	11,04	2,93
L_2	11,15	5,84	14,38	4,35
L_∞	0,39	0,30	0,42	0,30

Na tabela 5.7 são apresentados os valores dos pólos após a estimação. Observe-se que, no caso do algoritmo de CGA com 12 e 60 funções, o pólo real com sinal positivo indicando que ele está no semi-plano direito do plano 's', o que é indesejável na identificação pois o sistema é instável. Tal fato demonstra que a função custo tem dois mínimos de magnitudes semelhantes, com um desses mínimos tendo pólos no semi-plano direito do plano complexo. Visto que com 90 e 120 funções o gradiente caminhou para o outro mínimo com pólos estáveis, que aparenta ser o mínimo global pela tendência de conversão de todos os casos com otimização SGA e com os dois últimos casos com CGA.

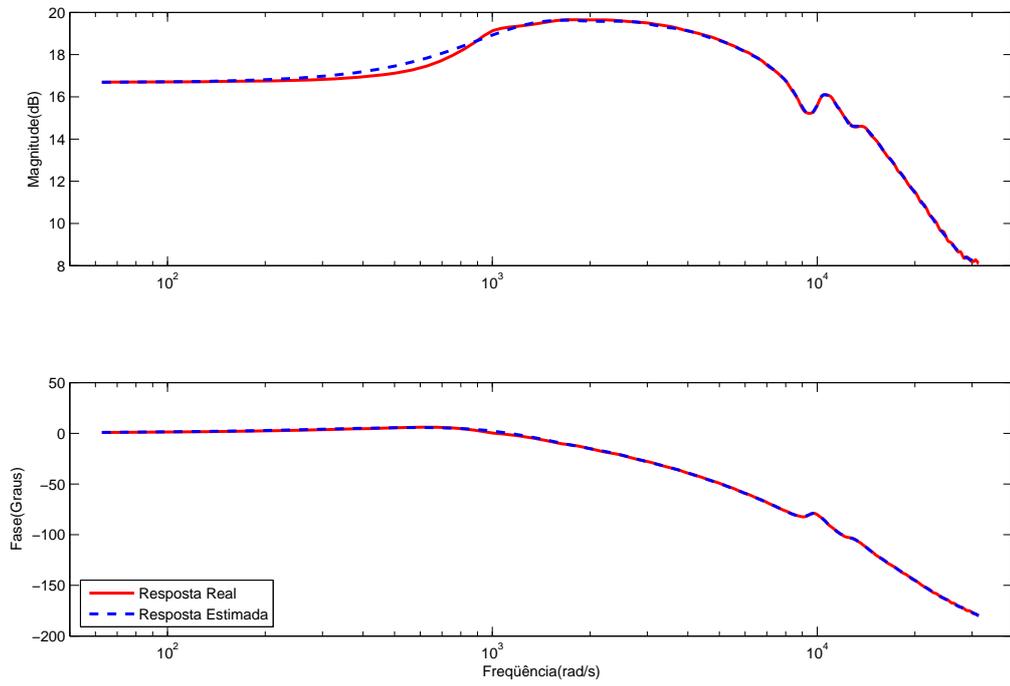


(a) Otimização com 12 funções e CGA

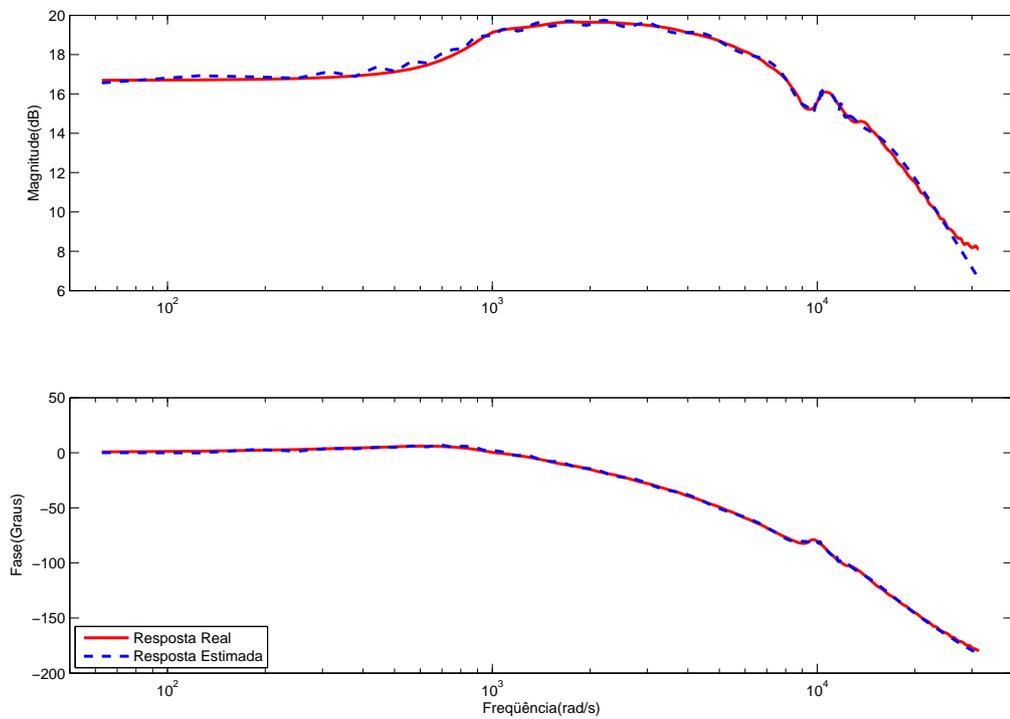


(b) Otimização com 12 funções e SGA

Figura 5.15: Comparativo para otimização com 12 funções



(a) Otimização com 90 funções e CGA



(b) Otimização com 90 funções e SGA

Figura 5.16: Comparativo para otimização com 12 funções

Tabela 5.7: Pólos após a otimização

(a) Pólos otimizados com 12 funções

Algoritmo utilizado	SGA	CGA
Pólo real	$-2,5031 \cdot 10^3$	$21,5318 \cdot 10^6$
Pólos complexos	$-4,6544 \cdot 10^3 \pm j \cdot 11,8789 \cdot 10^3$	$-25,8347 \cdot 10^5 \pm j \cdot 23,0263 \cdot 10^5$

(b) Pólos otimizados com 60 funções

Algoritmo utilizado	SGA	CGA
Pólo real	$-1,7446 \cdot 10^3$	$11,0523 \cdot 10^6$
Pólos complexos	$-0,9055 \cdot 10^3 \pm j \cdot 10,8420 \cdot 10^3$	$-50,7821 \cdot 10^3 \pm j \cdot 12,3271 \cdot 10^3$

(c) Pólos otimizados com 90 funções

Algoritmo utilizado	SGA	CGA
Pólo real	$-1,0018 \cdot 10^3$	$-11,9237 \cdot 10^3$
Pólos complexos	$-0,1153 \cdot 10^3 \pm j \cdot 10,8699 \cdot 10^3$	$-0,1087 \cdot 10^3 \pm j \cdot 10,8700 \cdot 10^3$

(d) Pólos otimizados com 120 funções

Algoritmo utilizado	SGA	CGA
Pólo real	$-1,0000 \cdot 10^3$	$-13,8379 \cdot 10^3$
Pólos complexos	$-0,1086 \cdot 10^3 \pm j \cdot 10,8700 \cdot 10^3$	$-0,1087 \cdot 10^3 \pm j \cdot 10,8700 \cdot 10^3$

5.5 Identificação dos Transformadores Elétricos

Nesta seção, os métodos descritos neste documento são aplicados na determinação de modelos de transformadores de potência através de curvas de resposta em frequência. Em particular, estudam-se equipamentos da CEMIG (Companhia de Energia de Minas Gerais), localizados nas sub-estações de Taquaril, Jaguará e Irapé como visto na figura 5.17. O transformador localizado em Taquaril é um autotransformador monofásico com as seguintes especificações $345/230 - 13,8KV, 225/225 - 75MVA$, e os dados da resposta em frequência representam a impedância de saída do transformador. O autotransformador de Jaguará é trifásico definido por $500/345 - 13,8KV, 400/400 - 133MVA$ com a resposta em frequência analisada representando a impedância de saída do transformador. No autotransformador monofásico de Irapé as especificações são as mesmas do trafo de Taquaril porém a resposta em frequência representa a transferência de tensão (em pu) entre os terminais do transformador.

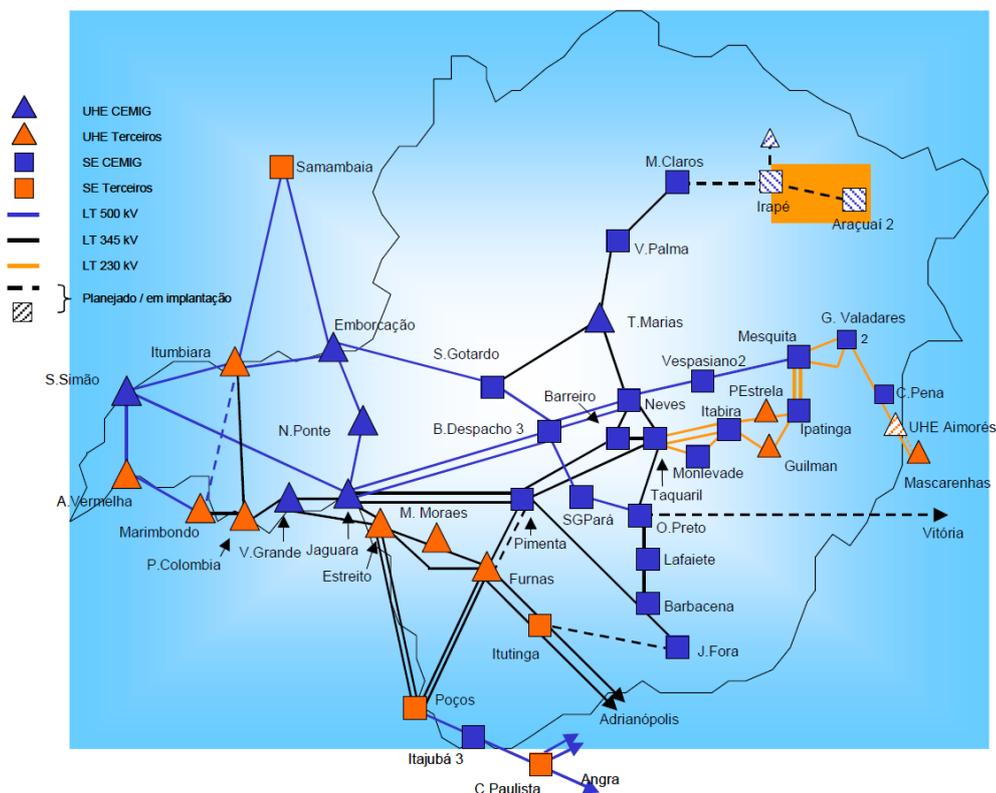


Figura 5.17: Sistema simplificado dos principais elos do sistema da CEMIG.

Fonte: ANEEL.

Considerando que os autotransformadores conhecidos por trafos de Jaguará e

Irapé foram trabalhados em (Oliveira; Maestrelli; Rocha, 2009; Maestrelli; Oliveira, 2010) a identificação destes equipamentos será abordada com menos detalhes que a identificação realizada com os dados do trafo de Taquaril.

5.5.1 Transformador de Taquaril

O diagrama de resposta em frequência relacionada com o transformador de Taquaril é apresentado na figura 5.18. A partir destes dados, pode-se obter a informação necessária para a definição dos pólos da base de funções, isto é, com a informação retirada dos quatro picos de ressonância de interesse no sistema, cujas as frequências são: $2,2 \times 10^3$, $7,7 \times 10^4$, $1,2 \times 10^5$ e $6,1 \times 10^6$ em radianos por segundo. As frequências são relacionadas no plano complexo da variável 's' em pares complexo conjugados tal que: $s_1 = -22 \pm j 2,2 \times 10^3$; $s_2 = -770 \pm j 7,7 \times 10^4$; $s_3 = -1,2 \times 10^3 \pm j 1,2 \times 10^5$ e $s_4 = -6,1 \times 10^4 \pm j 6,1 \times 10^6$. Estes valores são utilizados como ponto inicial para os métodos de busca de pólo ótimo.

Então, escolhendo uma base definida com quatro pares de pólos e quatro valores para o número de funções $N_l = 16, 40, 80$ e 160 , parametriza-se o modelo dado por (4.21). Os coeficientes C são estimados com o método MQ de acordo com a equação (4.51), o resultado da identificação é apresentado nas figura 5.19 à 5.22, e comprovam que somente após o número de funções na base ultrapassar 80 obtém-se uma boa aproximação da curva sem qualquer processo de otimização. A tabela 5.8 traz os critérios de avaliação do sistema para cada valor escolhido para N_l , nas tabelas 5.9 e 5.10 observa-se os critérios de avaliação após cada um dos dois modos de otimização.

Tabela 5.8: Critérios de avaliação na estimação do trafo de Taquaril

Critério	Número de bases			
	16	40	80	160
MSE	$1,63 \times 10^{10}$	$1,96 \times 10^9$	$7,46 \times 10^6$	$2,63 \times 10^6$
L_2	$1,25 \times 10^{11}$	$1,29 \times 10^{10}$	$1,86 \times 10^7$	$7,41 \times 10^6$
L_∞	$2,47 \times 10^5$	$7,54 \times 10^4$	$1,67 \times 10^3$	800,66

Os modelos com 80 e 160 funções na base conseguiram boas aproximações. Na sequência, o procedimento de otimização dos pólos é realizado. O método SGA obteve um bom resultado com 40 funções na base (figura 5.27a), já no caso da otimização

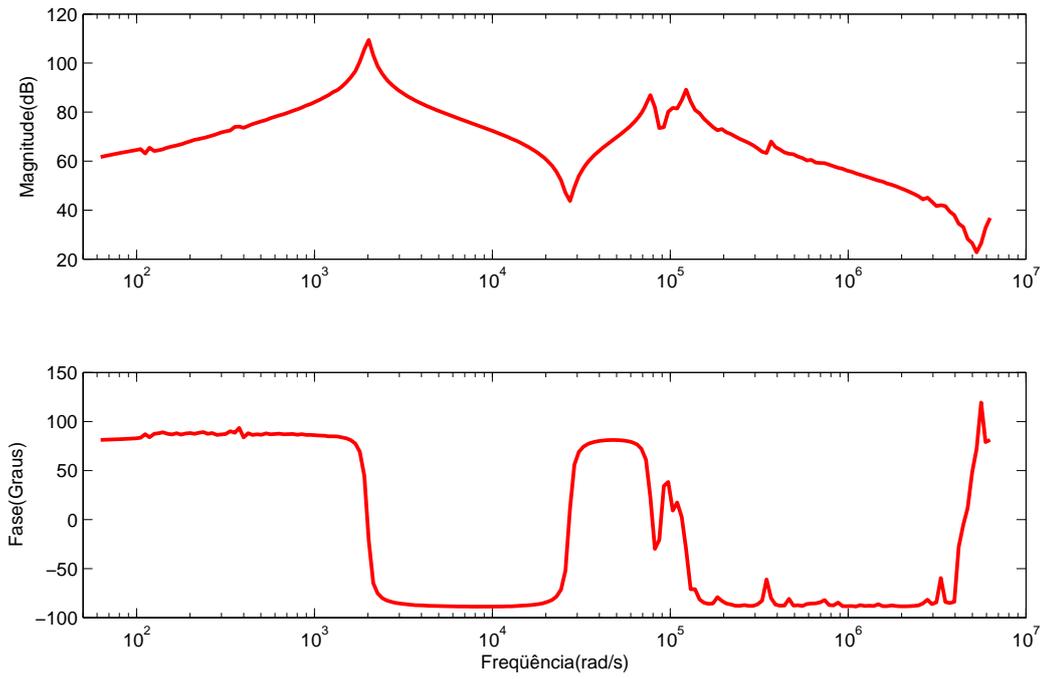


Figura 5.18: Diagrama da resposta em frequência do transformador de Taquaril

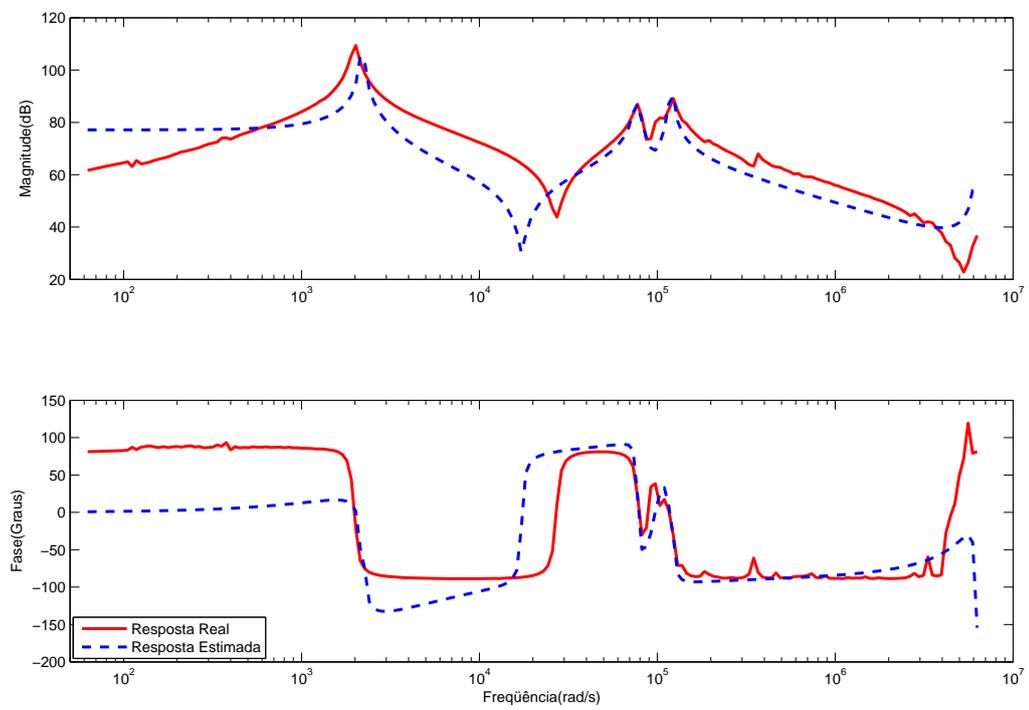


Figura 5.19: Identificação com 16 funções

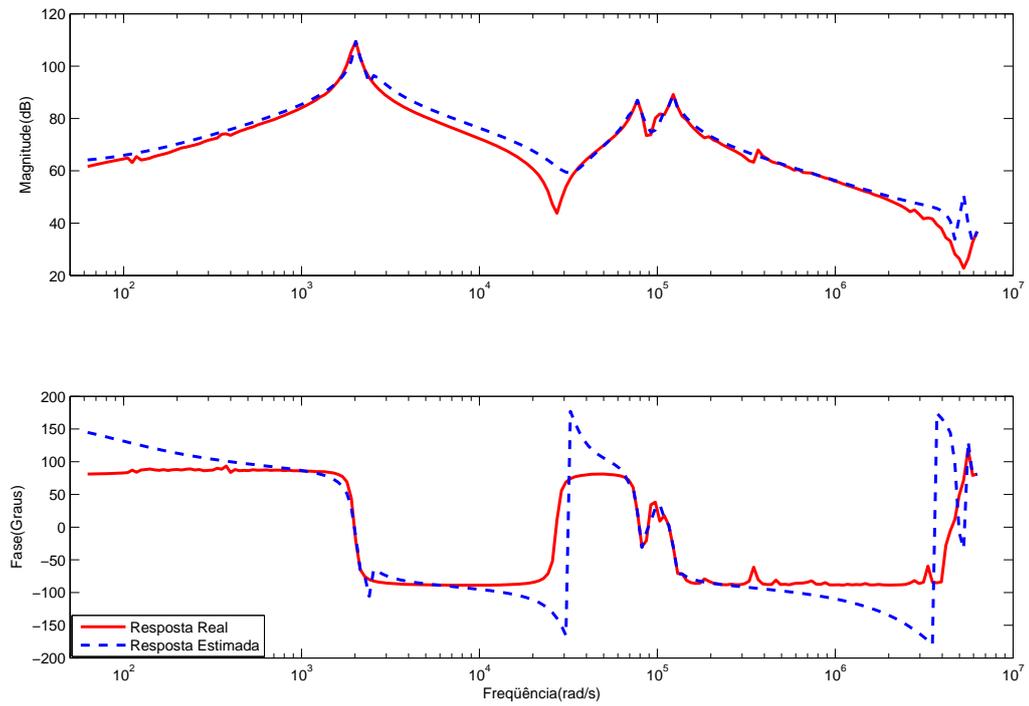


Figura 5.20: Identificação com 40 funções

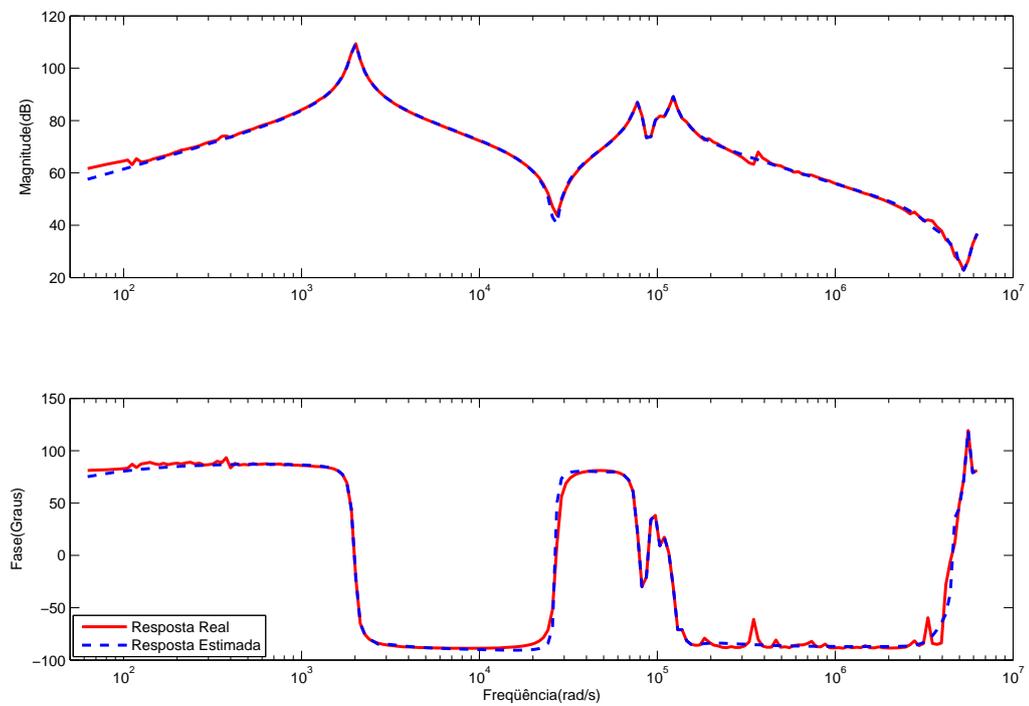


Figura 5.21: Identificação com 80 funções

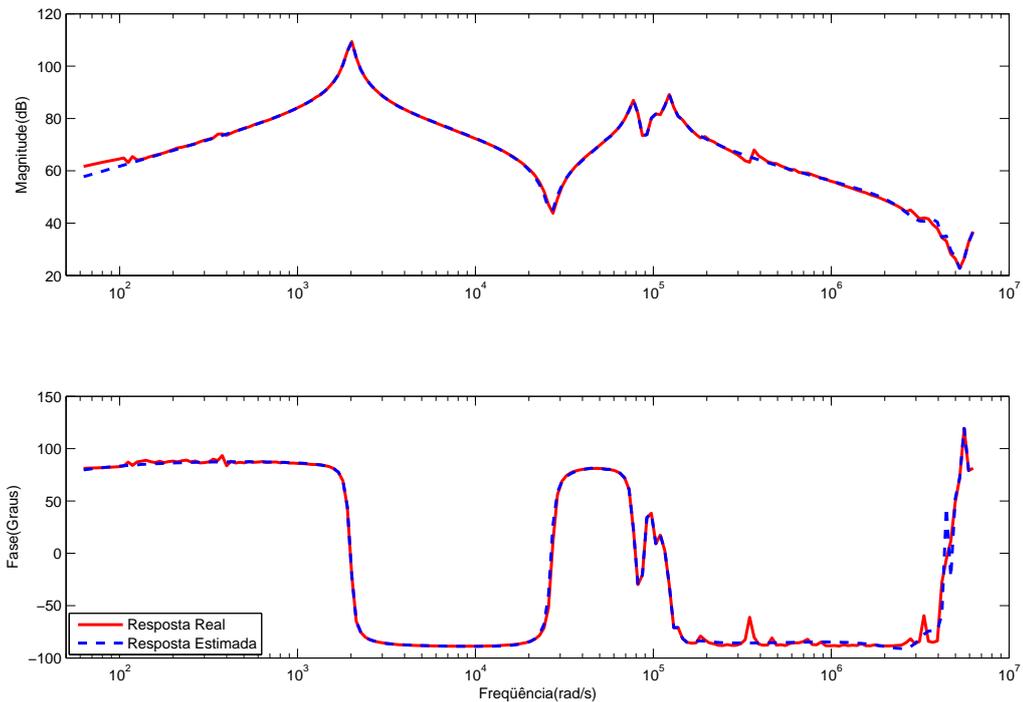


Figura 5.22: Identificação com 160 funções

Tabela 5.9: Critérios de avaliação na otimização CGA do trafo de Taquaril

Critério	Número de bases			
	16	40	80	160
MSE	$8,36 \times 10^9$	$2,05 \times 10^9$	$4,64 \times 10^6$	$1,53 \times 10^6$
L_2	$5,98 \times 10^{10}$	$1,10 \times 10^{10}$	$1,06 \times 10^7$	$5,52 \times 10^6$
L_∞	$1,62 \times 10^5$	$6,12 \times 10^4$	789,70	779,97

Tabela 5.10: Critérios de avaliação na otimização SGA do trafo de Taquaril

Critério	Número de bases			
	16	40	80	160
MSE	$9,22 \times 10^8$	$1,97 \times 10^7$	$3,09 \times 10^6$	$1,94 \times 10^6$
L_2	$3,34 \times 10^9$	$5,62 \times 10^7$	$8,06 \times 10^6$	$5,05 \times 10^6$
L_∞	$2,69 \times 10^4$	$3,58 \times 10^3$	826,27	692,58

CGA, que usa o cálculo analítico do gradiente, o resultado não foi satisfatório como observado na figura 5.27b. Para o caso de 80 funções houve uma melhora em relação a estimação inicial como o esperado. Na otimização para o modelo com 16 funções não obteve uma melhora significativa não interessando apresentar o resultado gráfico. Alguns detalhes da otimização são apresentados na tabela 5.11. Da figura 5.23 até a

figura 5.26 observa-se o erro de estimação após a otimização para cada valor de N_l .

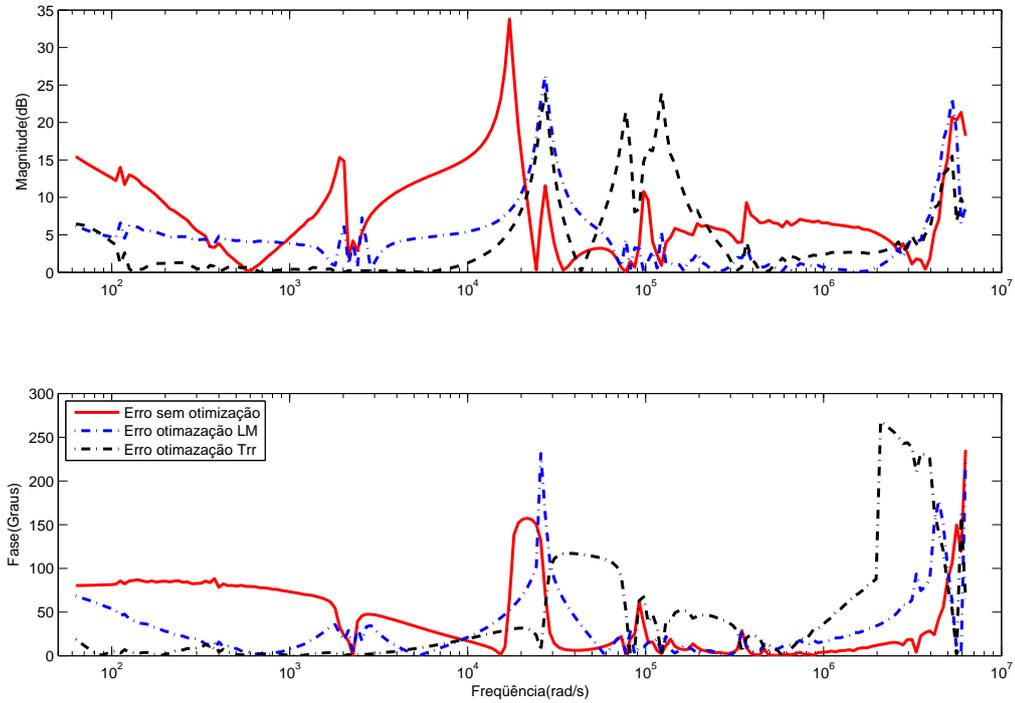


Figura 5.23: Erro na estimação com 16 funções

Tabela 5.11: Dados do desempenho da otimização do trafo de Taquaril

(a) Dados do desempenho ($N_l = 16$ e 40)

N° funções	16		40	
Algoritmo	CGA	SGA	CGA	SGA
Custo inicial	$6,3 \times 10^{10}$		$6,5 \times 10^9$	
Custo final	$3,0 \times 10^{10}$	$1,7 \times 10^9$	$5,5 \times 10^9$	$2,8 \times 10^7$
Tempo(s)	2,44	28,85	3,34	47,40
Iterações	1	31	1	41
Avaliações	10	400	9	400

(b) Dados do desempenho ($N_l = 80$ e 160)

N° funções	80		160	
Algoritmo	CGA	SGA	CGA	SGA
Custo inicial	$9,3 \times 10^6$		$3,7 \times 10^6$	
Custo final	$5,3 \times 10^6$	4×10^6	$2,8 \times 10^6$	$2,5 \times 10^6$
Tempo(s)	6,19	98,58	20,36	245,14
Iterações	2	16	4	26
Avaliações	20	400	22	400

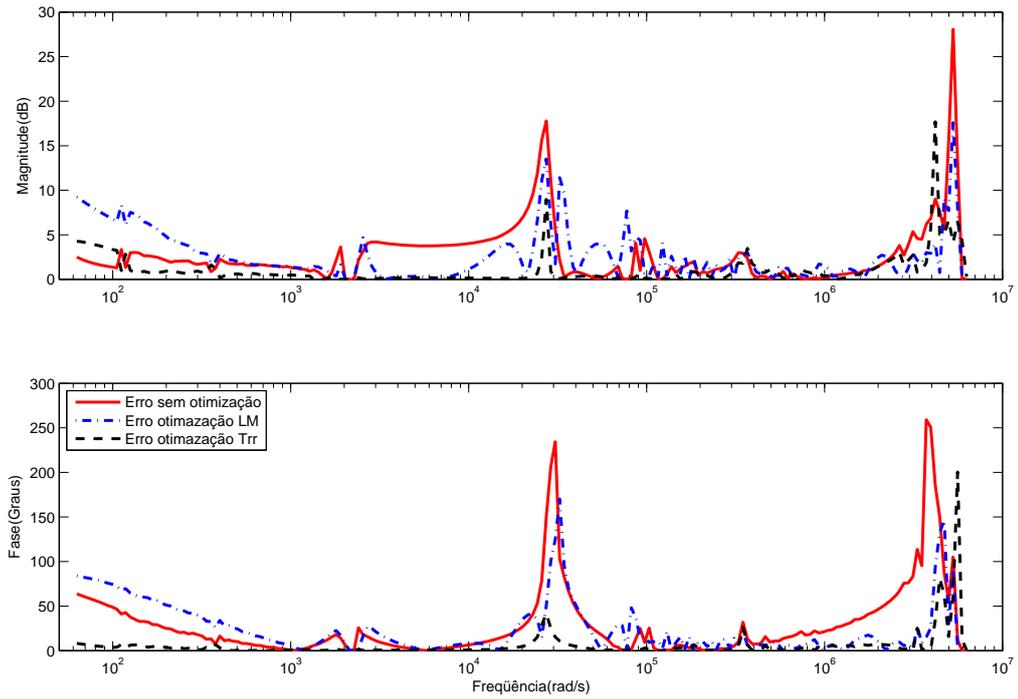


Figura 5.24: Erro na estimação com 40 funções

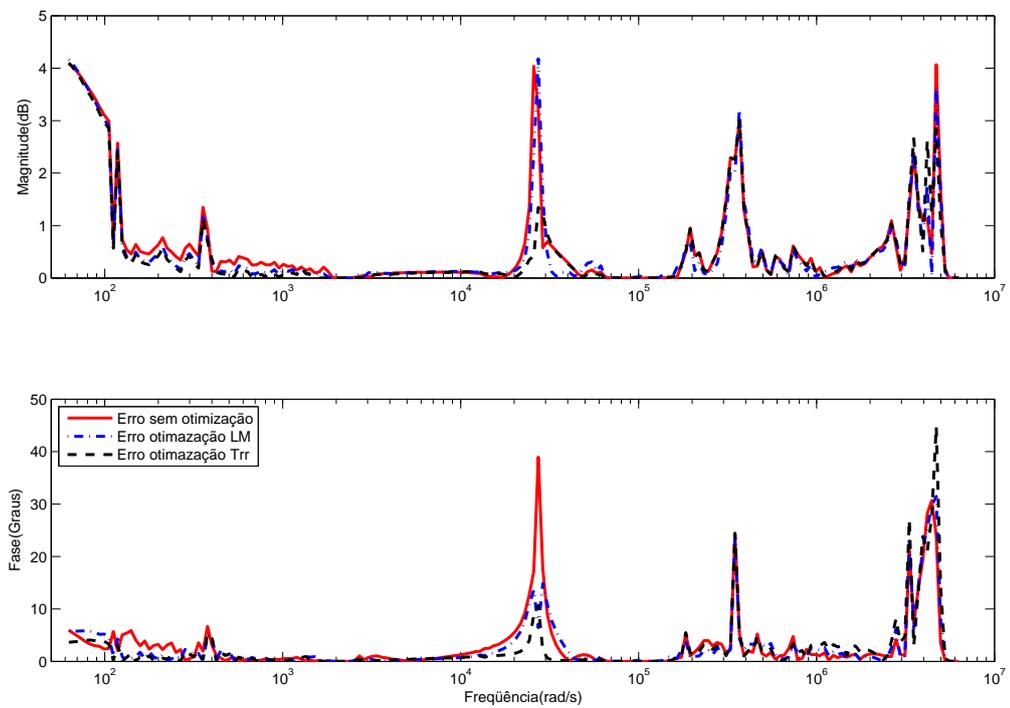


Figura 5.25: Erro na estimação com 80 funções

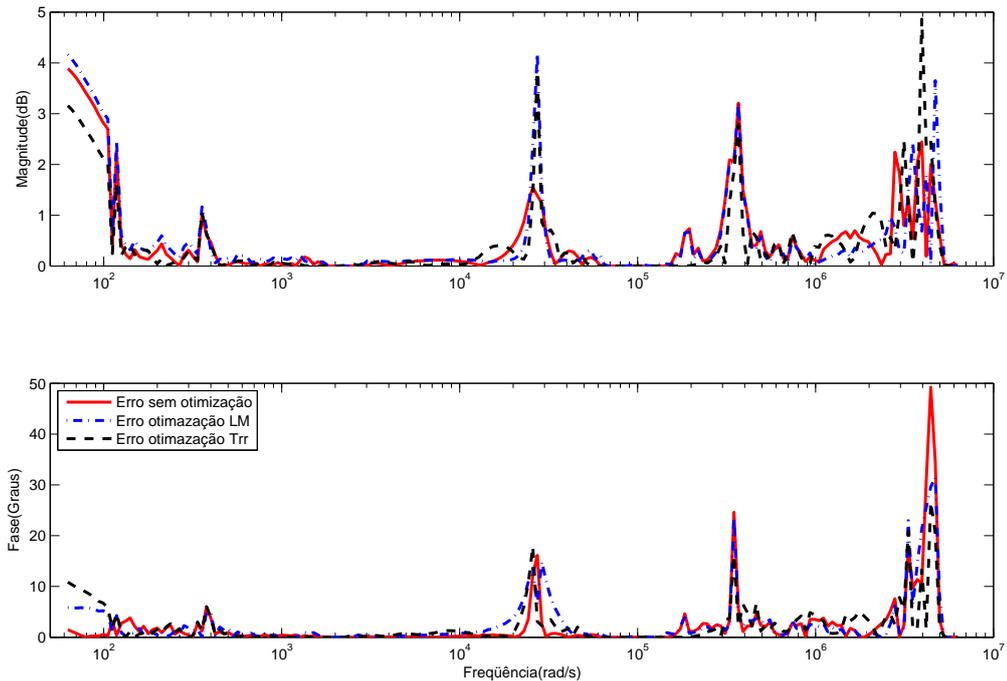
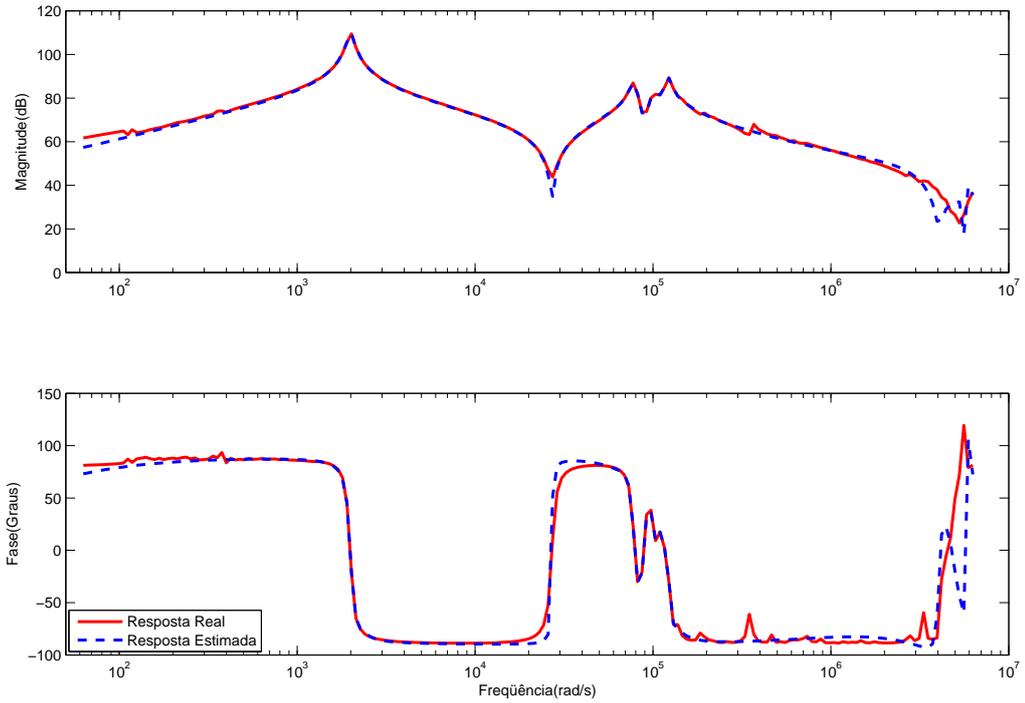
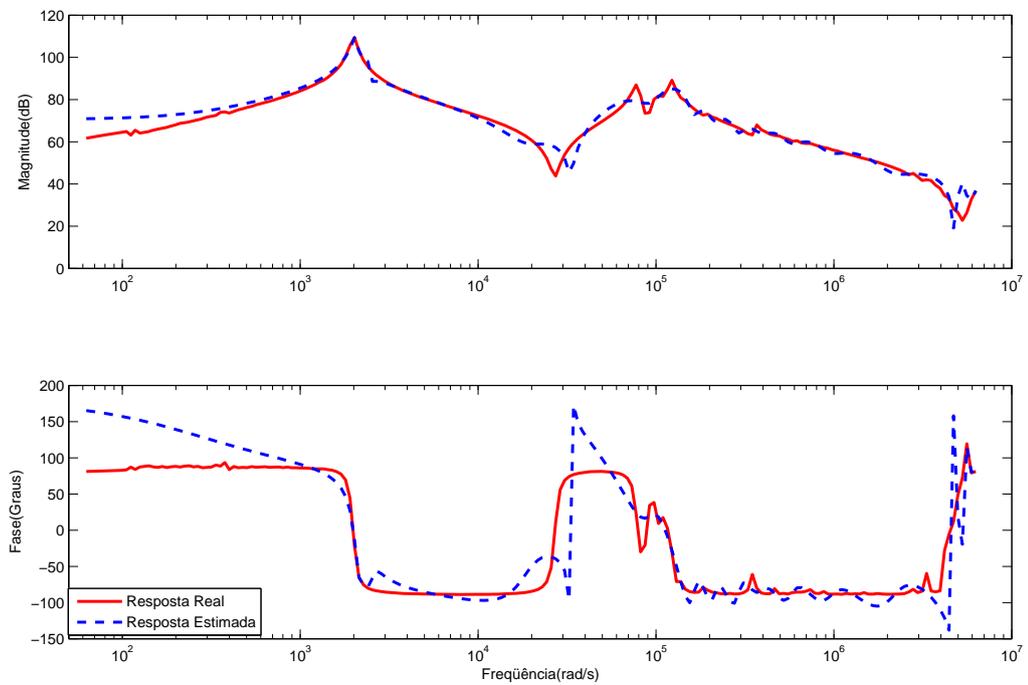


Figura 5.26: Erro na estimação com 160 funções

Agora é realizada a análise do uso do cálculo por ponto de mínimo dos coeficientes, abordado na Seção 4.5.2, na identificação e no processo de otimização com 160 funções na base. Na figura 5.28 o resultado da identificação demonstra um problema de mal condicionamento da matriz no caso de ponto de mínimo, pois a aproximação é pior que a mesma realizada com o cálculo dos coeficientes por mínimos quadrados (verificar a figura 5.22), o número elevado de funções na base gerou o mal condicionamento da matriz. Embora a aproximação seja pior, quando utiliza-se o processo de otimização o resultado é bem semelhante e em alguns casos melhor como pode ser observado nas figuras 5.29a e 5.29b. A figura 5.30 traz o erro do diagrama de Bode da otimização com o cálculo dos coeficientes via método MQ e PdM. Em ambas as simulações há um ganho de tempo porém com um aumento na função custo, o que não significa que a aproximação seja ruim. Um fato interessante é que mesmo com uma aproximação inicial pior após a otimização a função custo chega a se aproximar ao valor obtido com o cálculo MQ dos coeficientes. Uma análise pode ser feita observando-se a tabela 5.12.



(a) Otimização SGA com 40 funções



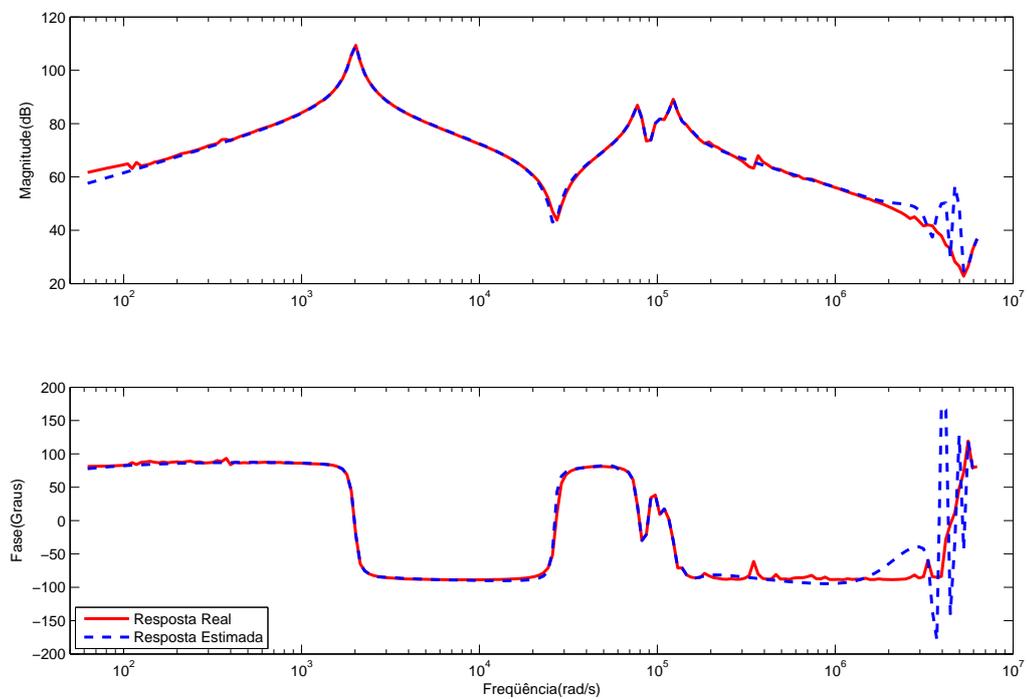
(b) Otimização CGA com 40 funções

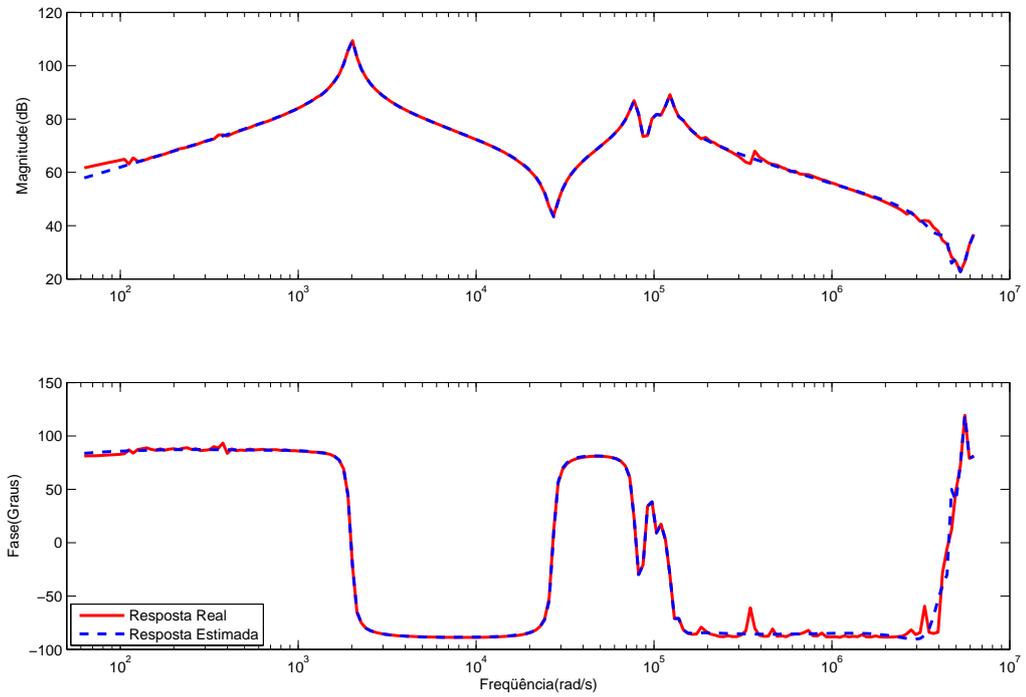
Figura 5.27: Otimização com 40 funções para o trafo de Taquaril

Tabela 5.12: Dados de performance da otimização com o cálculo PdM x com cálculo MQ

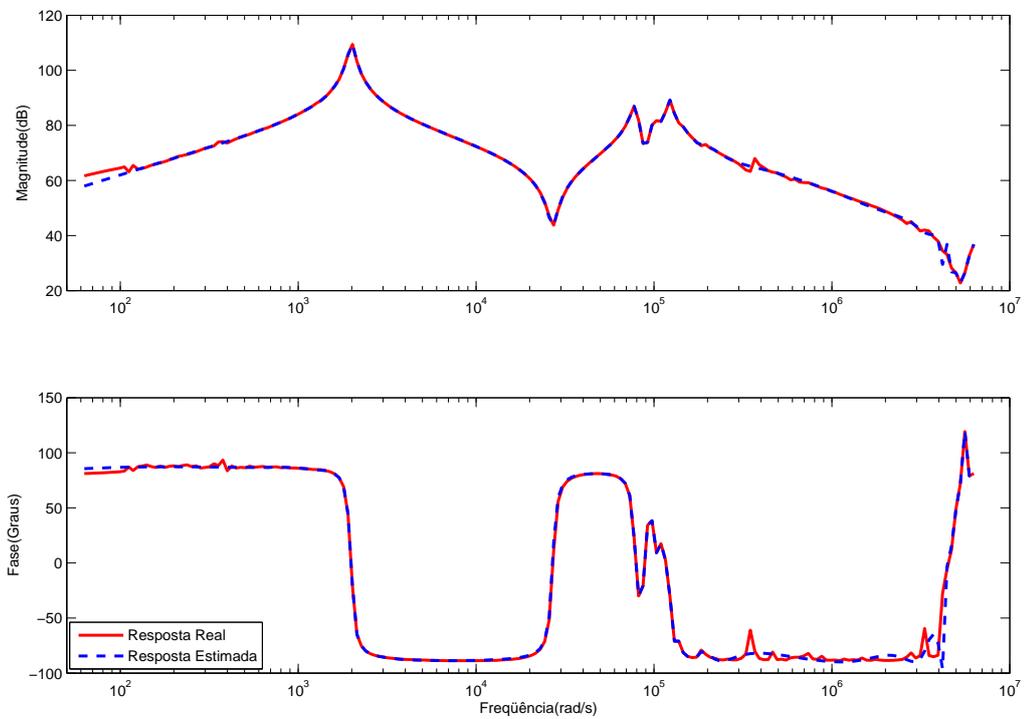
Método de cálculo	PdM		MQ	
	CGA	SGA	CGA	SGA
Custo inicial	$8,05 \times 10^6$		$3,7 \times 10^6$	
Custo final	$3,37 \times 10^6$	$3,09 \times 10^6$	$2,8 \times 10^6$	$2,5 \times 10^6$
Tempo(s)	14,54	191,73	20,36	245,14
Iterações	2	9	4	26
Avaliações	14	400	22	400

Figura 5.28: Estimação com PdM



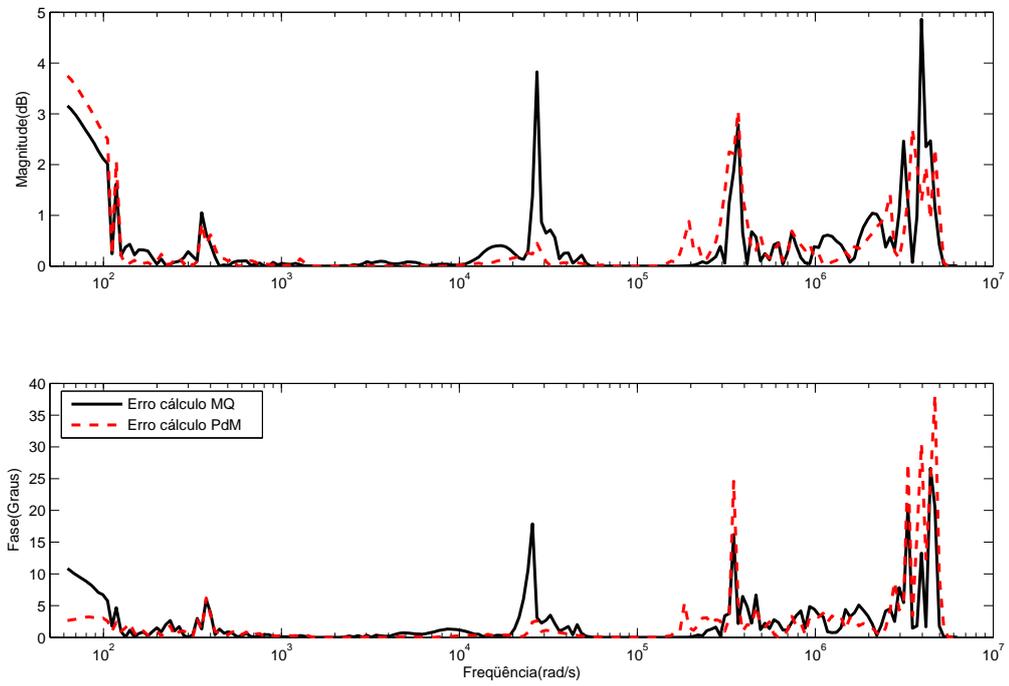


(a) Estimação com otimização SGA e PdM

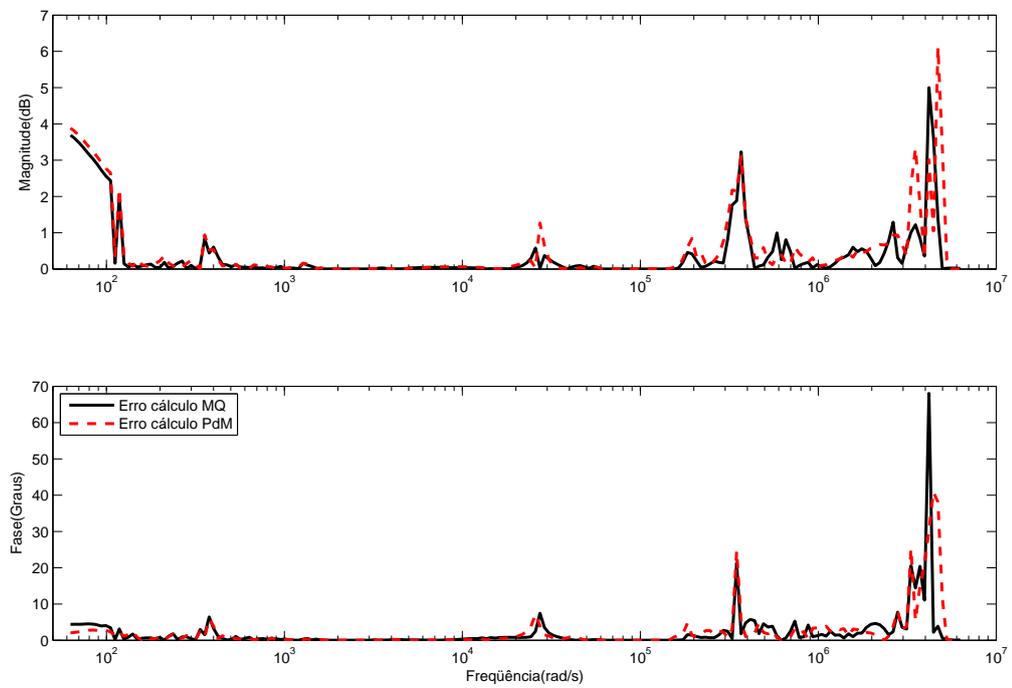


(b) Estimação com otimização CGA e PdM

Figura 5.29: Estimação do trafo de Taquaril com o cálculo dos coeficientes por PdM



(a) Erro PdM x MQ na otimização SGA



(b) Erro PdM x MQ na otimização CGA

Figura 5.30: Erro do método PdM x MQ de cálculo dos coeficientes

Análise de Robustez do Modelo em Tempo Contínuo

Como foi abordado em Maestrelli e Oliveira (2010) modelos em tempo discreto apresentam sensibilidade quando realiza-se o arredondamento do valor do pólo, ou seja, há perda de precisão na representação do pólo otimizado, quando os modelos em tempo contínuo tem o valor da seleção ótima do pólo truncado a sensibilidade é menor, indicando que a identificação com funções em tempo contínuo mostra ser mais robusta.

Com isso o modelo com 160 funções é utilizado para ilustrar o problema de sensibilidade abordado na Seção 4.1, os pólos otimizados são truncados e o critério da norma 2 (L_2) é usado para comparação dos resultados. Esta escolha é devido a que este critério se mostrou o mais sensível, facilitando assim a verificação do fenômeno. Os resultados são apresentados na tabela 5.13. Os pólos truncados são os pólos ótimos obtidos com a otimização CGA como demonstra a tabela 5.14. No caso de identificação em tempo discreto apresentado em Oliveira, Maestrelli e Rocha (2009), o arredondamento dos pólos é da ordem de 10^{-4} , no caso contínuo o mesmo arredondamento é feito, porém para enfatizar a robustez da identificação em tempo contínuo é feito o truncamento na ordem de 10^{-2} , 10^0 e 10^2 , ou seja mesmo truncando os pólos otimizados na casa das centenas a alteração no critério é pequena comparada a magnitude do caso em tempo discreto para uma arredondamento da ordem de 10^{-4} . O período de amostragem dos dados neste caso é $3,14 \times 10^{-7}$.

Tabela 5.13: Critério L_2 com o truncamento dos pólos otimizados(Taquaril)

Arredondamento	L_2 com pólos completos	L_2 com pólos truncados
Caso Contínuo		
10^2	$5,523817 \times 10^6$	$5,522909 \times 10^6$
10^0		$5,522778 \times 10^6$
10^{-2}		$5,523808 \times 10^6$
10^{-4}		$5,523817 \times 10^6$
Caso Discreto		
10^{-4}	$4,856721 \times 10^6$	$5,25251 \times 10^6$

Tabela 5.14: Truncamento dos pólos otimizados

(a) Pólos truncados (pólos 1 e 2)

Arredondamento	Pólo 1	Pólo 2
10^2	$-300 \pm j 2200$	$-800 \pm j 77000$
10^0	$-301 \pm j 2201$	$-847 \pm j 77003$
10^{-2}	$-301.94 \pm j 2201.47$	$-847.29 \pm j 77003.02$
10^{-4} Contínuo	$-301.9499 \pm j 2201.4773$	$-847.2956 \pm j 77003.0297$
10^{-4} Discreto	$0.9999 \pm j 0.0006$	$0.9992 \pm j 0.0268$

(b) Pólos truncados (pólos 3 e 4)

Arredondamento	Pólo 3	Pólo 4
10^2	$-4900 \pm j 120000$	$-111400 \pm j 6101000$
10^0	$-4914 \pm j 120071$	$-111449 \pm j 6101066$
10^{-2}	$-4914.23 \pm j 120071.08$	$-111449.20 \pm j 6101066.04$
10^{-4} Contínuo	$-4914.2361 \pm j 120071.0862$	$-111449.2093 \pm j 6101066.0408$
10^{-4} Discreto	$0.9986 \pm j 0.0440$	$-0.3895 \pm j 0.9192$

5.5.2 Transformador de Irapé

Considerando a resposta em frequência do trafo de Irapé retira-se a informação sobre os quatros picos de ressonância de interesse. As frequências dão a posição da parte imaginária do pólos tal que os pólos selecionados são: $s_1 = -230 \pm j 2,3 \times 10^4$; $s_2 = -750 \pm j 7,5 \times 10^4$; $s_3 = -1,7 \times 10^3 \pm j 1,7 \times 10^5$ e $s_4 = -2,8 \times 10^3 \pm j 2,8 \times 10^5$. Definindo dois valores para o número de funções na base para aproximar a curva de resposta em frequência do sistema $N_l = 80$ e 160. Nas figuras 5.31 e 5.34 é apresentada a identificação com os pólos selecionados. Da figura 5.31 à 5.36 observa-se a curva estimada, para cada valor de N_l selecionado, após a otimização dos pólos com o uso do algoritmo CGA que utiliza o cálculo do gradiente apresentado na Seção 4.4. Os critérios de avaliação da identificação são observados na tabela 5.15.

O modelo com 80 funções na base não conseguiu uma boa aproximação mesmo depois da otimização dos pólos mesmo porque a otimização não progrediu por ter achado um mínimo local. Contudo o caso de 160 funções obteve-se a melhora esperada com a otimização dos pólos, detalhes da otimização são apresentados na tabela 5.16, os resultados obtidos com a otimização por SGA foram inclusos na tabela para comparação. Como no caso do trafo do Taquaril o modelo com 160 funções é utilizado para ilustrar o problema de sensibilidade no truncamento dos pólos, na tabela 5.17 é observado que a sensibilidade ao truncamento não foi tão grande comparada ao caso de Taquaril algo esperado pois Irapé tem um período de amostragem maior na casa de 10^{-6} segundos enquanto Taquaril está na casa de 10^{-7} segundos. Um fato inesperado é a diminuição do critério L_2 para o truncamento dos pólos em Irapé, contudo tal redução é de difícil percepção através de um gráfico. Os pólos otimizados para o caso de 160 funções são: $s_1 = -1283.559251 \pm j 23072.557549$; $s_2 = -3357.369129 \pm j 75315.390868$; $s_3 = -27759.755872 \pm j 176055.942594$ e $s_4 = -32243.815811 \pm j 300637.122785$.

Tabela 5.15: Critérios de avaliação do trafo de Irapé

Critério	Número de bases			
	80	160	80 com CGA	160 com CGA
MSE	0,0133	0,0480	0,0132	0,0024
L_2	0,0242	0,0113	0,0240	0,0072
L_∞	0,0434	0,0311	0,0423	0,0228

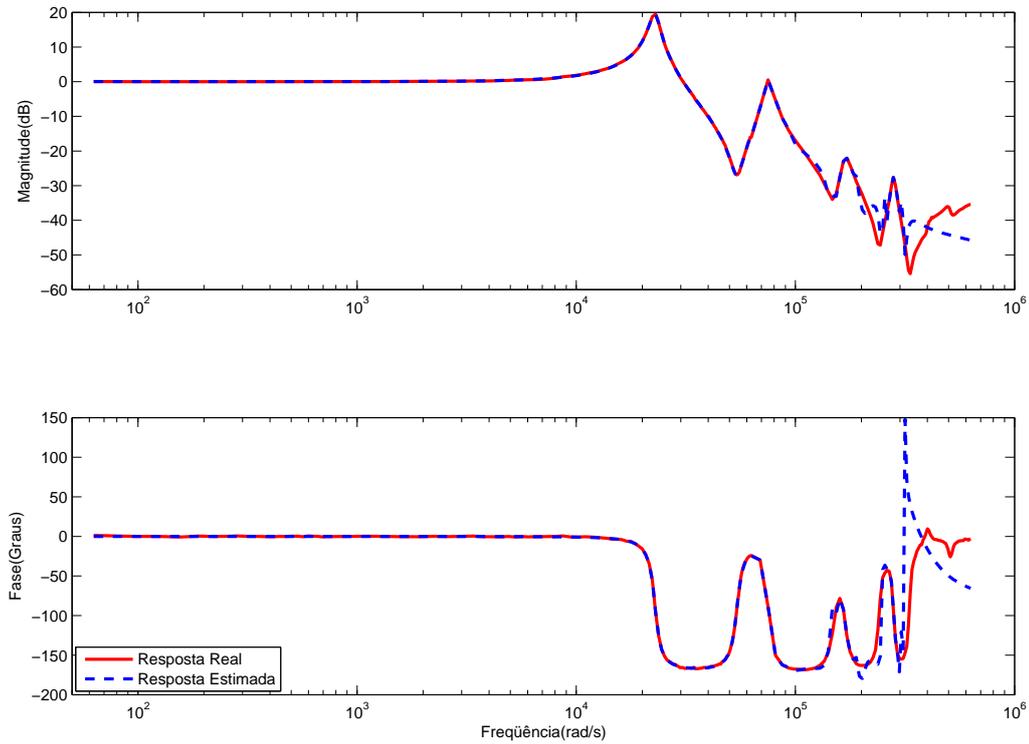


Figura 5.31: Identificação com 80 funções

Tabela 5.16: Dados do desempenho da otimização do trafo de Irapé

N° funções	80		160	
	CGA	SGA	CGA	SGA
Custo inicial	0,012039636		0,0056320448	
Custo final	0,012023674	0,012039630	0,0036114888	0,0056320214
Tempo(s)	6,22	72,99	25,68	231,89
Iterações	2	15	7	8
Avaliações	17	400	28	400

Tabela 5.17: Critério L_2 com o truncamento dos pólos otimizados(Irapé)

Arredondamento	L_2 com pólos completos	L_2 com pólos truncados
Caso Contínuo		
10^2	0,007222977737	0,007020224722
10^0		0,007221837936
10^{-2}		0,007222973263
10^{-4}		0,007223054984
Caso Discreto		
10^{-4}	0,005843423081	0,005835096925

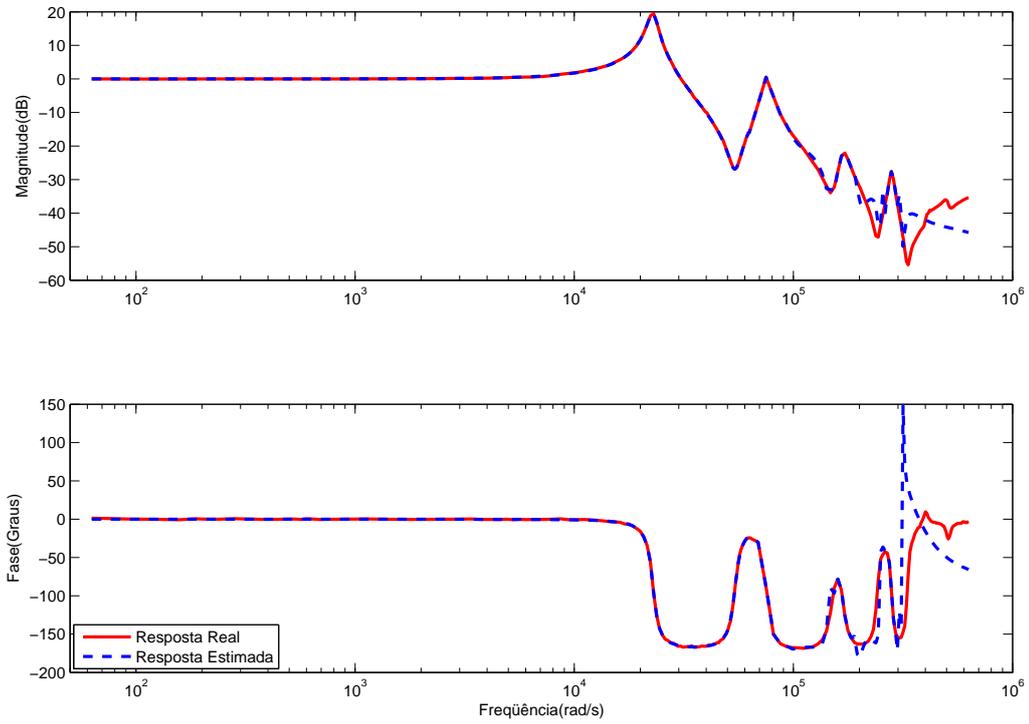


Figura 5.32: Otimização SGA com 80 funções

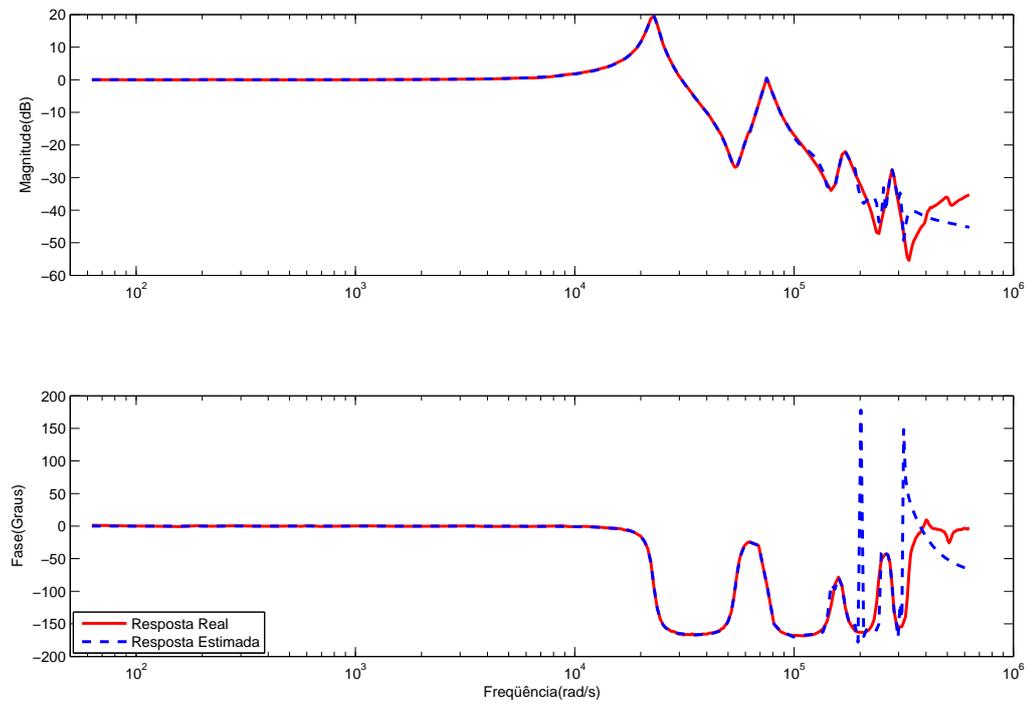


Figura 5.33: Otimização CGA com 80 funções

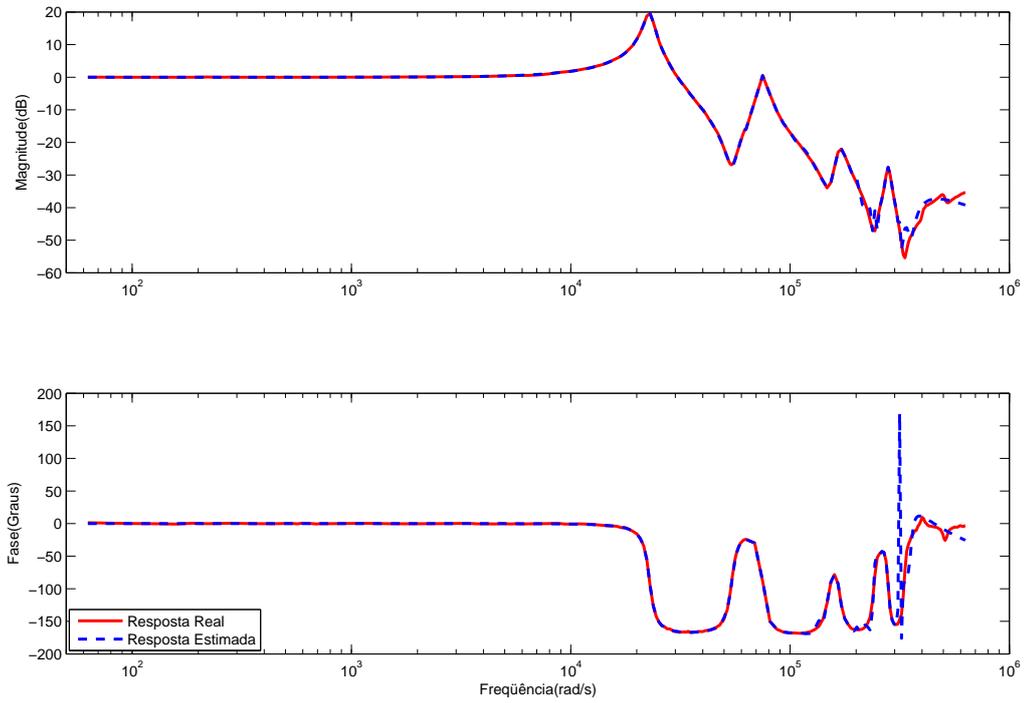


Figura 5.34: Identificação com 160 funções

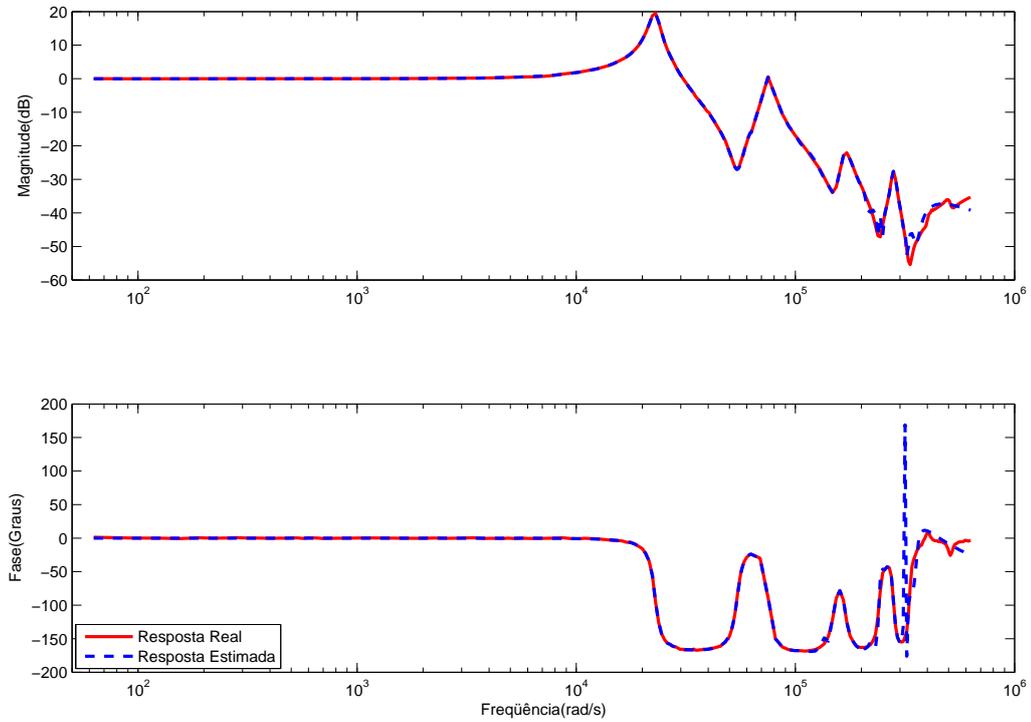


Figura 5.35: Otimização SGA com 160 funções

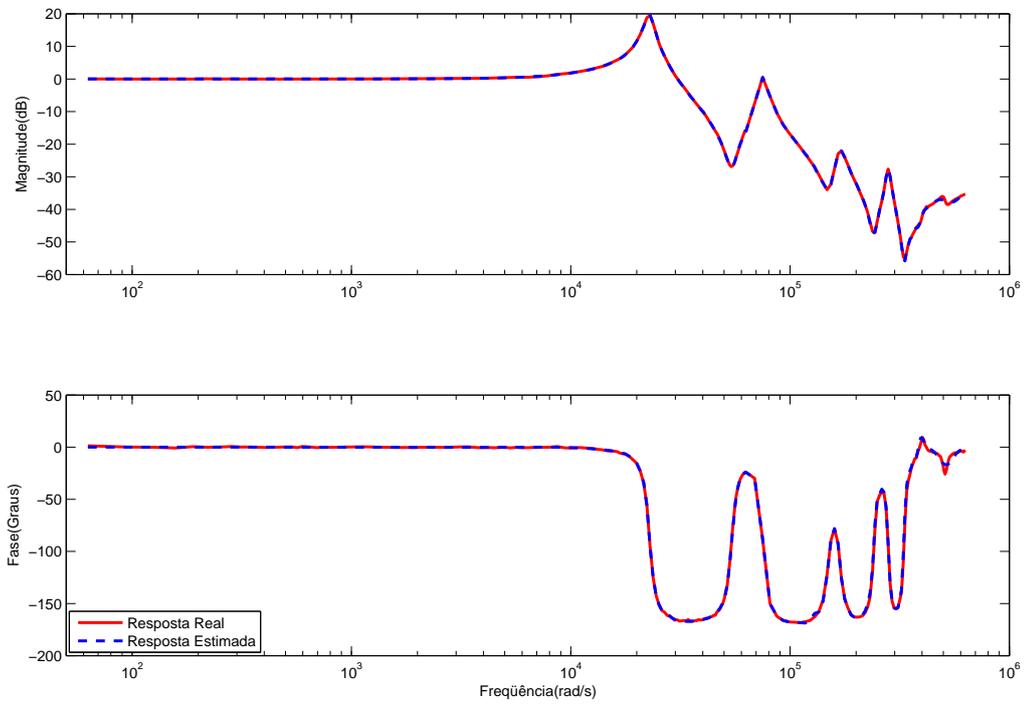


Figura 5.36: Otimização CGA com 160 funções

5.5.3 Transformador de Jaguará

Da resposta em frequência do trafo de Jaguará obtém-se informação sobre três picos de ressonância tais frequências originam os seguintes pólos: $s_1 = -19.1 \pm j 1910$; $s_2 = -409 \pm j 40900$ e $s_3 = -2190 \pm j 219000$. Definindo dois valores para o número de funções na base para aproximar a curva de resposta em frequência do sistema $N_l = 60$ e 120. Nas figuras 5.37 e 5.38 é apresentada a identificação antes e após a otimização dos pólos com o uso do algoritmo CGA e o SGA. Os critérios de avaliação da estimação do modelo são observados na tabela 5.18. As figuras 5.39 e 5.40 apresentam os resultados da otimização dos pólos por CGA e as figuras 5.41 e 5.42 o resultado da otimização com SGA.

Otimização por CGA obteve um bom resultado para o modelo com 60 funções na base. Para caso de 120 funções obteve-se um resultado parecido com as duas otimizações, tendo o CGA uma pequena vantagem no erro médio quadrático (MSE) e no erro absoluto máximo L_∞ . Na tabela 5.19 observa-se a comparação dos métodos de otimização. A exemplo do teste feito com os trafos anteriores realiza-se o truncamento dos pólos, como no trabalho de Oliveira, Maestrelli e Rocha (2009) o modelo discreto foi identificado com 150 funções utiliza-se o mesmo número de funções no modelo contínuo (pólos otimizados com CGA) para ilustrar o problema, na tabela 5.20 é observado o resultado. Como o trafo de Jaguará teve a maior diferença no critério com os pólos truncados a figura 5.43 ilustra a alteração no erro do diagrama de módulo de fase do sistema.

Tabela 5.18: Critérios de avaliação do trafo de Jaguará

Critério	Número de bases					
	60	60 (CGA)	60 (SGA)	120	120 (CGA)	120 (SGA)
MSE	$1,21 \times 10^9$	$6,33 \times 10^8$	$2,19 \times 10^8$	$6,63 \times 10^7$	$1,39 \times 10^7$	$1,40 \times 10^7$
L_2	$5,14 \times 10^9$	$2,38 \times 10^9$	$9,67 \times 10^8$	$2,91 \times 10^8$	$3,66 \times 10^7$	$3,23 \times 10^7$
L_∞	$4,63 \times 10^4$	$2,60 \times 10^4$	$1,95 \times 10^4$	$9,15 \times 10^3$	$1,62 \times 10^3$	$1,99 \times 10^3$

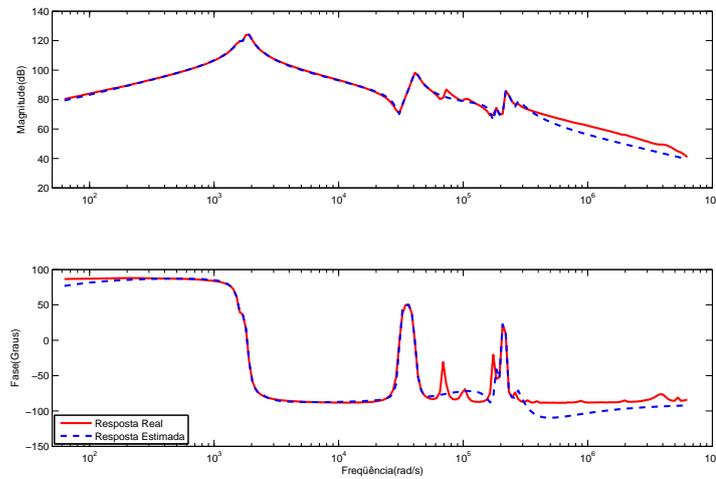


Figura 5.37: Identificação com 60 funções

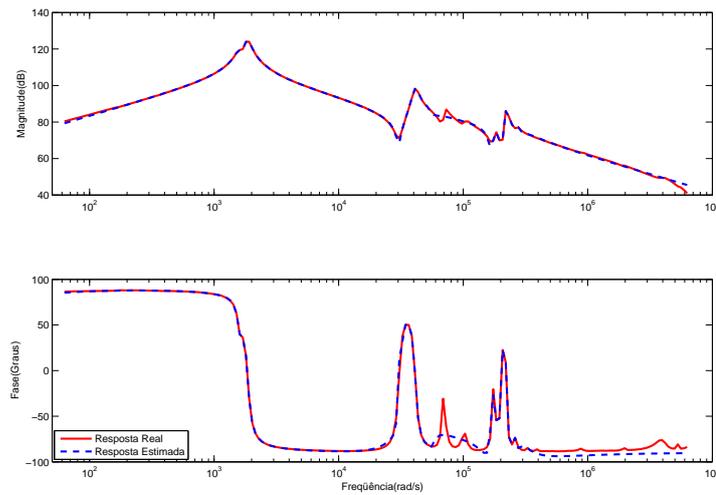


Figura 5.38: Identificação com 120 funções

Tabela 5.19: Dados do desempenho da otimização do trafo de Jaguará

N^o funções	60		120	
Algoritmo	CGA	SGA	CGA	SGA
Custo inicial	$2,5733 \times 10^9$		$1,4592 \times 10^9$	
Custo final	$1,1923 \times 10^9$	$4,8376 \times 10^8$	$1,8314 \times 10^7$	$1,6175 \times 10^7$
Tempo(s)	3,81	64,14	36,55	187,12
Iterações	1	18	25	23
Avaliações	6	400	54	400

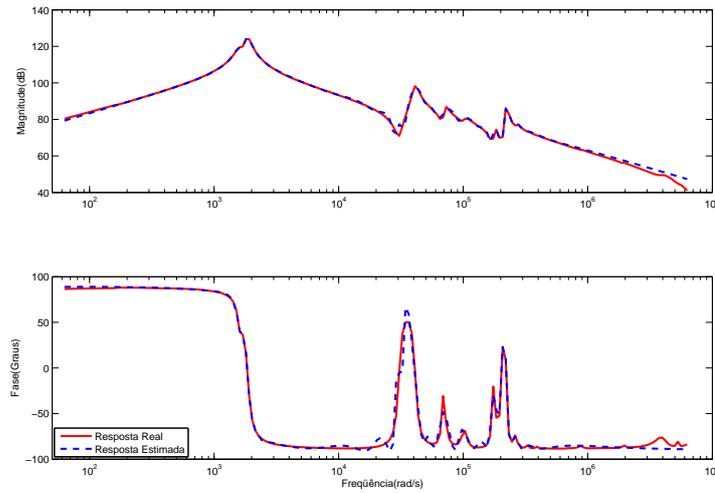


Figura 5.39: Otimização por CGA com 60 funções

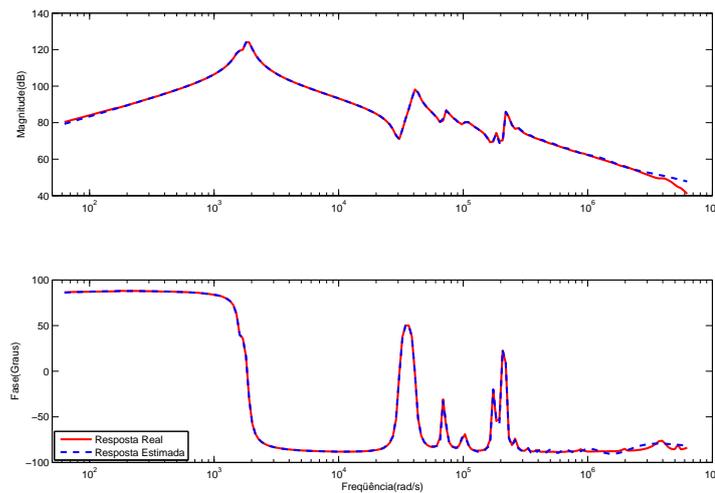


Figura 5.40: Otimização por CGA com 120 funções

Tabela 5.20: Critério L_2 com o truncamento dos pólos otimizados(Jaguara)

Arredondamento	L_2 com pólos completos	L_2 com pólos truncados
Caso Contínuo		
10^2	$1,7196316757 \times 10^7$	$1,6232806556 \times 10^7$
10^0		$1,7194818126 \times 10^7$
10^{-2}		$1,7196106894 \times 10^7$
10^{-4}		$1,7196315002 \times 10^7$
Caso Discreto		
10^{-4}	$1,1792829111 \times 10^7$	$1,5818145267 \times 10^8$

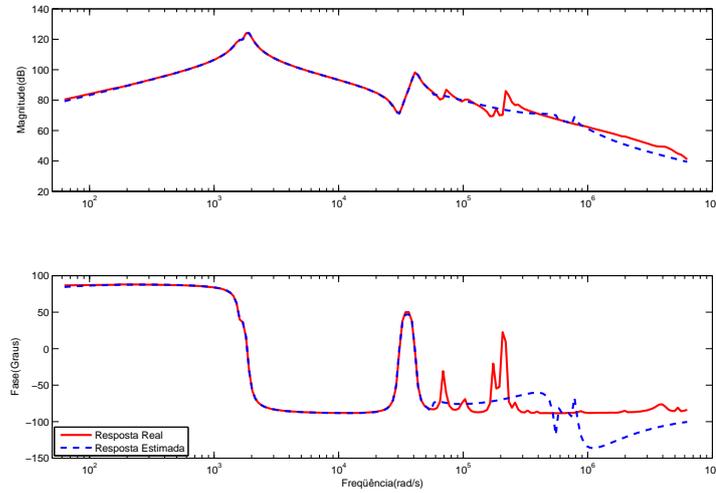


Figura 5.41: Otimização por SGA com 60 funções

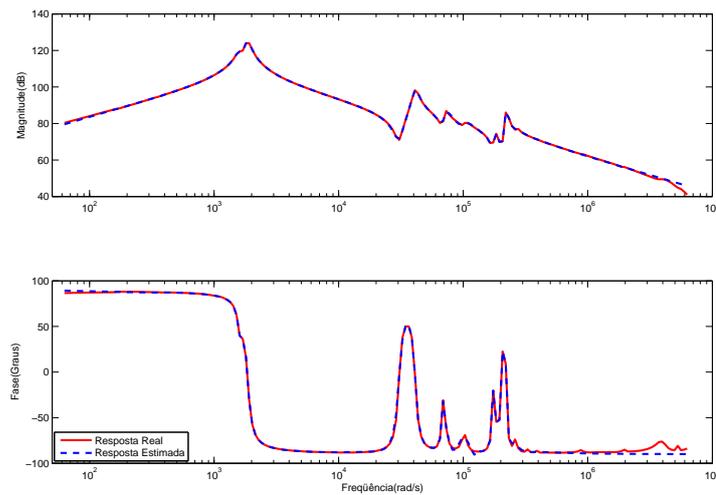
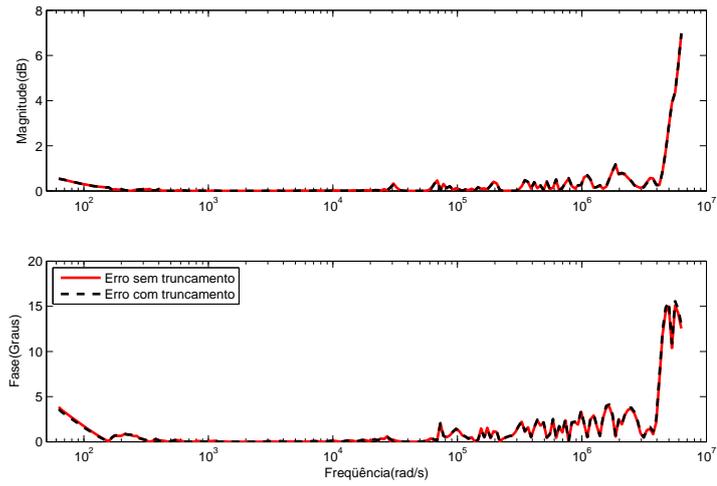
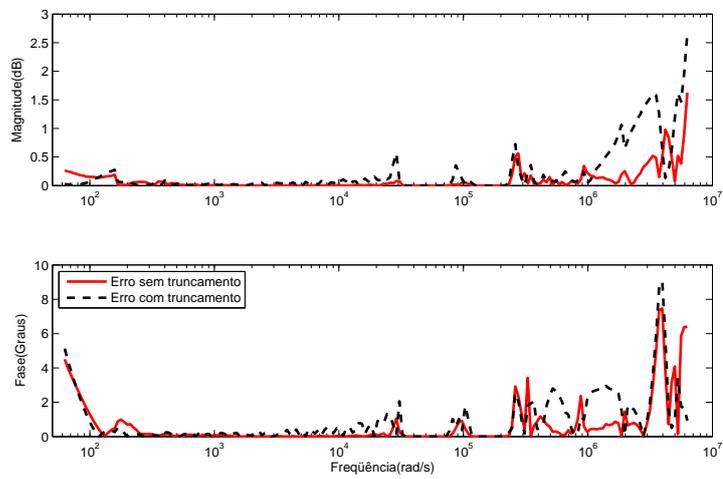


Figura 5.42: Otimização por SGA com 120 funções



(a) Erro no truncamento do modelo contínuo



(b) Erro no truncamento do modelo discreto

Figura 5.43: Erro no truncamento dos pólos do modelo de Jagura

6 Conclusões, Contribuições e Perspectivas Futuras

6.1 Conclusões e Contribuições

Na presente dissertação foi discutido o problema da identificação de sistemas com base de funções ortonormais e dados no domínio da frequência. Como resultado foi apresentado a realização em espaço de estados do modelo de funções ortonormais generalizadas. A representação do modelo identificado é importante sobre vários aspectos, como por exemplo para o projeto de sistemas de controladores ou no uso em programas de simulação.

Uma das motivações para o desenvolvimento desta dissertação foi carência de resultados de identificação de sistemas usando modelos OBF em tempo contínuo e no domínio da frequência, principalmente no que diz respeito à seleção/estimação dos parâmetros do modelo. Este tipo de resultado é mais frequentemente encontrado no domínio do tempo e usando modelos em tempo discreto. Contudo, mostrou-se que através da estimação empírica da função transferência (EFTE) é possível usar o mesmo método de identificação somente se os dados no domínio do tempo estiverem disponíveis, assim o método não fica limitado somente a identificação de dados no domínio da frequência.

No que diz respeito a parametrização do modelo de funções ortonormais, estudou-se duas maneiras de calcular os coeficientes. A maneira mais tradicional encontrada na literatura (estimação via mínimos quadrados) e um método baseado no ponto de mínimo da função. O método aqui denominado de ponto de mínimo obteve bons resultados quando aplicado a modelos com baixo número de funções na base. No caso de modelos com número elevado de funções, mesmo com ganho de tempo computacional no processo de identificação, é necessário atentar para um possível decréscimo de precisão modelo estimado. Quando o cálculo dos coeficientes por ponto de mínimo é utilizado no processo de otimização dos pólos, o resultado é semelhante ao caso do cálculo dos coeficientes por mínimos quadrados, isto porque a otimização feita nos pólos minimiza o efeito do problema de mal condicionamento da matriz, conforme abordado nos exem-

plos. Por esse motivo, na identificação sem otimização dos pólos procurou-se utilizar o cálculo por mínimos quadrados, que tem um melhor ajuste quando o número de funções é elevado.

Com o processo de otimização foi possível explorar o cálculo analítico da direção ótima de busca apresentado na Seção 4.4, que é o principal resultado teórico desta dissertação. O método de Levenberg-Marquardt usando o gradiente calculado analiticamente conforme descrito neste documento mostrou ter a convergência mais rápida que o método que estima a direção de busca numericamente (caso do método de *trust-region-reflective*). O método que não utiliza o cálculo da direção de busca proposto neste trabalho, chega a resultados melhores em alguns casos por conseguir sair de mínimos locais, caso os encontre, vantagem que não existe com o cálculo analítico do gradiente de descida. Porém essa vantagem faz com que a convergência seja mais lenta. Resultados de aplicação dos métodos propostos mostraram que estes são promissores para aplicação em diferentes classes de sistemas. Finalmente, o procedimento para a escolha do valor inicial dos pólos a serem otimizados mostrou-se importante, pois já aproxima de forma satisfatória a curva do modelo estimado da curva de resposta em frequência do sistema.

6.2 Perspectivas Futuras

Algumas questões levantadas pelo método proposto ficaram em aberto e podem ser exploradas em trabalhos futuros. A questão mais importante é relacionada ao processo de otimização dos parâmetros da base em conjunto, ou seja, a otimização dos pólos em conjunto com a dos coeficientes como apresentado na apresentada na Seção 4.3.1. A otimização dos coeficientes em conjunto com os pólos pode gerar modelos mais precisos e também acarretar um convergência mais rápida, já que não será mais necessário estimar os coeficientes a cada novo conjunto de pólos, porque o processo fornece um conjunto de coeficientes referente a cada conjunto de pólo otimizado, isso em todas as iteração.

O cálculo dos coeficientes por ponto de mínimo obteve bons resultados em conjunto com a otimização, mostrando ser promissor. Contudo, uma análise para minimizar

o efeito do mal condicionamento da matriz, quando utiliza-se um valor elevado para o número de funções da base acarretará a melhora dos resultados da identificação sem algum processo de otimização e conseqüentemente haverá uma melhoria no resultado da identificação após um processo de otimização dos pólos.

Outro ponto relacionado à seleção dos parâmetros da base é a influência do número de funções na base. Os exemplos dão uma idéia de como a análise atenciosa sobre o assunto pode gerar modelos menores com a mesma precisão na aproximação que os modelos grandes. Por modelos menores entende-se com menos parâmetros, como exemplo número de funções na base reduzido e/ou um conjunto menor de pólos.

Um estudo da capacidade do método aproximar outros tipos de sistemas pode ser conduzido para provar que o uso de funções ortonormais na identificação em tempo contínuo é aplicável a uma grande gama de sistemas.

APÊNDICE A – Trabalhos Publicados

Os trabalhos publicados a partir dessa dissertação estão listados a seguir:

- Oliveira, G. H. C., Maestrelli, R. and Rocha, A. C. O.. An Application of Orthonormal Basis Functions in Power Transformers Wide Band Modeling, Proc. of the IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA), 2009.
- Maestrelli, R. e Oliveira, G. H. C.. Método Para Identificação de Sistemas Contínuos Mal Amortecidos no Domínio da Frequência Usando Funções Ortonormais, Proc. Congresso Brasileiro de Automática, 2010.

An Application of Orthonormal Basis Functions in Power Transformers Wide Band Modeling

G. H. C. Oliveira, R. Maestrelli and A. C. O. Rocha

Abstract—This paper is focused on the problem of obtaining wide band transformer models for electrical power system transient simulation purposes. It is analyzed the use of orthonormal basis functions models in such context. A model structure selection strategy, based on the transformer properties, is discussed and the frequency-domain parameter estimation procedure is presented. Identification results, based on actual transformer frequency response data, are presented and discussed.

I. INTRODUCTION

The procedure for determining dynamic models has an important role in electrical power systems field where components like transmissions lines or power transformers should be well represented in order to perform transient studies. These models are necessary to improve simulations characterized by different frequency ranges, mainly the ones involving interaction between components of the electrical system.

So, the identification of models that represent those components in a wide range of frequencies is of interest for the improvement of power system transient analysis of power systems [1], [2], [3], [4].

In this context, transformer (or other power system equipment) modeling can be performed by analyzing their physical characteristics, a common procedure used by manufacturers. This procedure, known as white box identification, generally uses first principles models to represent the equipment. This methodology is usually hard to implement, since the equipments' built-in details are usually not available (or known only by the manufacturer). Power transformers modeling can also be performed by methods denoted by system identification, in particular, black-box system identification methods [5]. These methods are based on experimental data, time-domain or frequency-domain data, which describes the dynamic behavior of the system.

A models structure for dynamic systems that has been applied in system identification context is the one known as Orthonormal Basis Functions (OBF) [6]. In [7], [8], the use of OBF for electrical power systems components modeling has been proposed. Such technique allows representing any linear causal stable system and the model can be described by using the well known state space representation, allowing its application on computational software for transient analysis.

G. H. C. Oliveira and R. Maestrelli are with PPGEPS / Pontifical Catholic University of Paraná. Curitiba/PR/Brazil gustavo.oliveira@pq.cnpq.br

A. C. O. Rocha is with CEMIG. Companhia Energética de Minas Gerais, Belo Horizonte/MG/Brazil acrocha@cemig.com.br

In fact, the use of orthonormal function presents some interesting properties in the context of system identification [6], [9], [10]. The model is presented as an output error structure, is linear in the parameters, and preserves the convexity for the identification procedure. The model complexity can be changed with minimal parameter changes. An example is the Vector Fitting method [2], originally proposed based on partial fraction decomposition, and now have versions that use orthonormal functions [11], [12]. The steps for model parameter's estimation are the following. First, the basis function parametrization (its poles) is performed and then the function weights (model parameters) are estimated. This paper proposes a methodology, with emphasis on power transformers modeling, for basis function pole selection. System identification results, using actual power transformer data, illustrate the method properties.

The paper is organized as follows. A review of the main issues related with OBF for dynamic system modeling is presented in Section II, and the problem of finding the basis functions parametrization is discussed in Section III. OBF model parameter estimation in the frequency domains is described in Section IV. Some application examples, using actual power system equipment data, are presented in Section V. Finally, conclusions are addressed in Section VI.

II. SYSTEM MODELING USING ORTHONORMAL BASIS FUNCTIONS

A SISO linear causal dynamic system, with finite memory, can be described by its transfer function $H(z)$ or its impulse response $h(k)$, that is:

$$Y(z) = H(z)U(z), \quad (1)$$

or

$$y(k) = \sum_{i=0}^{\infty} h(k-i)u(i). \quad (2)$$

In this equation, $u(k)$ and $y(k)$ are the input and output discrete-time signals, respectively. Moreover, if the impulse response has finite memory, $h(k)$ can be represented by a series of orthonormal functions, as follows:

$$h(k) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(k), \quad (3)$$

where $\phi_i(k)$, $i = 1, \dots, \infty$, is a base of orthonormal functions and c_i is the i -th series coefficient. By substituting (1) into (1):

$$y(k) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \sum_{i=0}^{\infty} \phi_j(k-i)u(k), \quad (4)$$

and by applying the Z -Transform, one obtains:

$$Y(z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \Phi_j(z)U(z). \quad (5)$$

The series coefficients converge to zero as j increases. So, the series approximation error, defined as:

$$\varepsilon_n(k) = y(k) - \sum_{j=1}^n c_j \sum_{i=0}^{\infty} \phi_j(k-i)u(k), \quad (6)$$

can be made as small as wished just by augmenting the series approximation truncation value n . Therefore, the model output $\hat{y}(k)$ or $\hat{Y}(z)$ is given by:

$$\hat{Y}(z) = \sum_{j=1}^n c_j \Phi_j(z)U(z). \quad (7)$$

The key idea of such approach is to describe the system impulse response, and consequently, the system transfer function, by a series of orthonormal functions. So, an orthonormal basis is defined. Different orthonormal functions can be used in such context and a class of these functions is the one constructed by using the dominant system dynamic(s), given in terms of poles, in a rational transfer function format [6]. An issue related with the problem of defining a rational orthonormal basis is the choice of the value and number of different modes in the basis functions. For instance, rational orthonormal functions characterized by one single mode, which is given by a real pole or a pair of complex ones, are known as Laguerre and Kautz functions, respectively. However, by defining basis with more than one dynamic, one can improve the series convergence, leading to a more parsimonious representation in relation to basis having only one mode. This is particularly useful in electrical power system applications, especially in power transformer modeling, whose frequency response presents resonant peaks in a wide band of frequencies. Such issue have been analyzed in [7], [8]. A way to defining basis functions with several modes is to use inner functions, as it will be show in following. Such kind of basis is known as Generalized Orthonormal Basis Functions (GOBF) [9] (or Orthonormal Basis Generated by Inner Functions - OBGIF). Laguerre and Kautz basis can be viewed as a special case of GOBF ones. Lets $G_i(z)$ a transfer function with all-pass behavior, defined by:

$$G_i(z) = \frac{1 - p_i^* z}{z - p_i}, \quad (8)$$

where p_i is a complex pole and p_i^* is its complex conjugate. Since $G_i(z)G_i(1/z^*)^* = 1$, $G_i(z)$ can be called an inner function. Lets $G_b(z)$ a transfer function given by a cascade realization of n_b functions $G_i(z)$, each one having a different pole (real or complex), knowing that the complex ones

come in conjugate pairs. These n_b poles contain the a priori information about the system dominant dynamics. $G_b(z)$ is also an inner function. Lets the quadruple (A, B, C, D) the space state realization of $G_b(z)$, and:

$$V_1(z) = (zI - A)^{-1}B. \quad (9)$$

An orthonormal basis can be defined by a cascade realization of n_g functions $G_b(z)$ as follows. Lets $\phi_{ij}(k)$ the i -th element of the signal vector $v_j(k)$ and $V_j(z)$, i.e., the Z inverse transform of $v_j(k)$, given by:

$$V_j(z) = (zI - A)^{-1}BG_b^{j-1}(z), \quad j = 1, \dots, n_g. \quad (10)$$

So $\phi_{ij}(k)$, $i = 1, \dots, n_b$ and $j = 1, \dots, n_g$ is a set of functions that forms a complete basis in the Lebesgue space [9]. Model (7) can thus be rewritten as follows:

$$\hat{Y}(z) = \sum_{j=1}^{n_g} C_j V_j(z)U(z), \quad (11)$$

where C_j vector contains the n_b coefficients of the system orthonormal basis realization. By defining $L_j(z)$ equal to the product $V_j(z)U(z)$, one obtains:

$$\hat{Y}(z) = \sum_{j=1}^{n_g} C_j L_j(z) = CL(z), \quad (12)$$

where C and $L(z)$ are the concatenation of C_j and $L_j(z)$, respectively, for $j = 1, \dots, n_g$. The model structure is illustrated by Fig. 1 and the space state realization is given by:

$$\begin{cases} L(k+1) &= AL(k) + Bu(k) \\ \hat{y}(k) &= CL(k), \end{cases} \quad (13)$$

where the state vector and matrices A e B are obtained by using the number of inner functions and its previously selected poles locations.

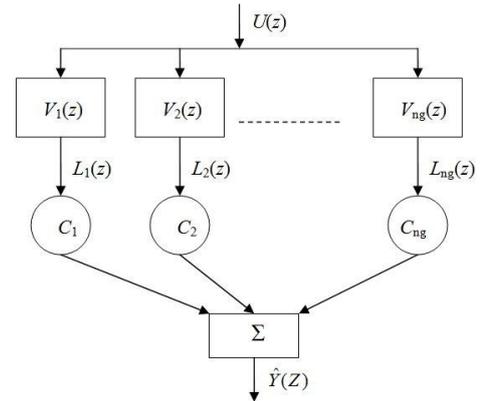


Fig. 1. Orthonormal basis model structure

The procedure for system identification by using OBGIF model structure can be viewed as follows:

- First, it is necessary to select the basis structure, basically, the function poles (8) and the number of functions (n_g). These parameters will define matrices A and B order and elements.
- Second, the model parameters, represented by matrix C , are estimated. Such procedure can be performed iteratively and initialized by using some prior knowledge about the system dynamics.

III. BASIS FUNCTIONS DESIGN

Due to the property of completeness, any pole or poles can be selected to model a given stable linear process. However, an adequate choice can lead to a more efficient representation of the system since the better is the pole choice, the faster will be the series convergence then, the number of basis functions can be decreased (the smaller will be the number of model parameters).

The problem of basis function pole selection have been studied and analyzed by several authors. An review of many techniques can be found in [6], [12]. Such problem can be, however, classified in different ways: the first classification is related with the number of different poles found in the basis, and it can be: *i*) a single real dynamic (Laguere functions), *ii*) a single complex dynamic (Kautz functions), *iii*) more than one dynamic. Another relevant aspect is the type of a priori information available for the pole selection, for instance *i*) the system impulse response signal, *ii*) a set of input / output data, *iii*) the actual transfer function. A third point related with such subject is the type of solution applied for the pole selection, and it can be: *i*) an analytical solution, *ii*) a numerical solution and *iii*) a hybrid solution, denomination used here to indicate a solution where some system a priori or analytic-obtained information is used to feed a numerical solution. Finally, it can be classified in terms of the type of information involved for the pole selection: *i*) time-domain data or *ii*) frequency-domain data.

Following, where are analyzing the case of more than one dynamic, a set of input / output data, a hybrid solution and frequency-domain data.

Let $y(k)$ being the actual process output and $\hat{y}(k)$ the model output, computed with a basis function model with n_g inner functions, each one having n_b different poles. This set of poles that form the whole basis will be denoted in following by p . Therefore, from (1) and (13), one obtains $H(z)$ and $\hat{H}(z, p)$ that are the actual and the model transfer functions.

The optimal set of function poles is the one that minimizes a cost function constructed by using the norm of the error between the actual data and the model prediction. In the frequency-domain data case, and assuming frequency responses computed over the following set of frequencies given by:

$$W_N = \{\omega_1 \cdots \omega_N\}, \quad (14)$$

where N is the number of available frequency-domain data, a cost function related with the model approximation can be:

$$J(p) = \sum_{k=1}^N \left(\| H(e^{j\omega_k}) - \hat{H}(e^{j\omega_k}, p) \|_2 \right)^2, \quad (15)$$

where, $\| \cdot \|_2$ denotes the norm-2 and $H(e^{j\omega_k})$ is the system frequency response value for $w = w_k$ and $\hat{H}(e^{j\omega_k}, p)$ is model frequency response value, computed with the poles set p and for $w = w_k$. Therefore, the problem of finding the optimal basis dynamics is equivalent to:

$$p^* = \underset{p}{\operatorname{arg\,min}} J(p), \quad (16)$$

s.to $p \in \Omega$

where p^* is the optimal pole location for a given set of frequency-domain data and Ω is the space of all stable poles in the Z plane. However, problem (16) is highly nonlinear and may contain several local minima that must be avoided. So, this highlights the importance of the optimization problem initial conditions selection. In the wide band power transformer modeling case, a procedure for this purpose is proposed in following. In fact, due to the power transformer geometry and components, its frequency response is usually characterized by a set of resonant peaks and phase changes. So, in order to initialize the optimization procedure (16), one can first, *i*) select the number of function dynamics n_b equal to the number of resonant peaks. Then, *ii*) Each pole value is selected in following. The complex part of each pole is made equal to the resonant frequency and the real part is made 100 times smaller than the complex part. This procedure is quite similar to others in the literature. For instance, it is well known that the selected pole should be close to the system dominant dynamics. In such class of application, the dominant dynamics are represented by the resonant peaks. In Vector Fitting method [2], for instance, it is suggested that the initial pole imaginary part should be linearly distributed in the frequency range and the pole real part should be 100 times smaller than the complex one.

The pole is then mapped from the s -plane to the z -plane, by using a convenient sampling time. Such value can be obtained from the maximum frequency value present in the data. Then, the model structure, that is, matrices A and B of (13), is defined. Due to the model properties, such selection can be used directly for the parameter estimation procedure (see next section). The model is robust when non-optimal but adequate poles are selected. This is one of the advantages of OBF structure. However, used as an initial value for the pole optimization procedure, better convergence can still be achieved. An optimization method for orthonormal basis functions is studied in [13].

IV. FREQUENCY DOMAIN SYSTEM IDENTIFICATION

The model frequency response is given by:

$$\hat{H}(e^{j\omega_k}) = \sum_{j=1}^{n_g} C_j V_j(e^{j\omega_k}), \quad (17)$$

or

$$\hat{H}(e^{j\omega_k}, \theta) = \phi^T(e^{j\omega_k})\theta, \quad (18)$$

where

$$\theta = [C_1 \cdots C_{n_g}], \quad (19)$$

and

$$\phi(e^{j\omega_k}) = [V_1(e^{j\omega_k})^T \cdots V_{n_g}(e^{j\omega_k})^T]. \quad (20)$$

The model parameter estimation, based on the least square problem, is given by:

$$\theta = \arg \min \frac{1}{N} \sum_{w_k \in W_N} \|H(e^{j\omega_k}) - \phi(e^{j\omega_k})^T \theta\|_2. \quad (21)$$

V. EXAMPLES

Following, the approach presented in the previous sections is applied to two case studies, each one using an actual frequency response power transformer data. Such equipments under responsibility of a Brazilian energy company named CEMIG, that is, The Minas Gerais State Energy Company. In order to have an geographic idea, Minas Gerais is a Brazilian state (having 586528 km^2) located in the south-east of the country and its map with the CEMIG transmission system can be depicted in Fig. 2. The two equipments are located in the Jaguará and Irapé substations. These substations and the CEMIG's high voltage transmission system are also presented in Fig. 2.

In the following examples, the model poles selection is based on the procedure described in section III, which describes method for selecting initial poles for an optimization algorithm. The optimization procedure used here is the one described in [13].

The idea is to show that the initial parameters allows a quite good approximation by the model, but further benefits can be obtained by the use of an optimization method.

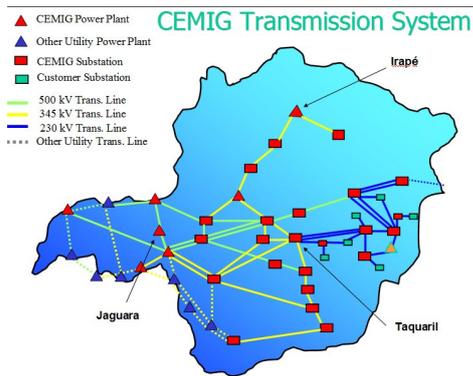


Fig. 2. CEMIG's transmission line system

In order to measure the model quality, the mean square error (MSE) and L_∞ norm of the approximation error, that is:

$$MSE \doteq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \|H(e^{j\omega_k}) - \hat{H}(e^{j\omega_k})\|^2, \quad (22)$$

$$L_\infty \doteq \max_{k=1, \dots, N} \|H(e^{j\omega_k}) - \hat{H}(e^{j\omega_k})\|, \quad (23)$$

will be used.

A. The Jaguará Power Transformer

The first data set is obtained from a transformer located at the Jaguará substation. It is a tree-phase power transformer defined by $500 + 4 \times 2.5\%/345 - 13.8$ KV, $400/400 - 133$ MVA. A frequency response related with this transformer is presented in Fig. 3. It represents a terminal impedance frequency response data test. The procedure for obtaining an orthonormal basis function based model is described in following.

The first step is to define the basis structure, which is given by the set of basis functions poles and by the number of functions in the basis. The basis poles selection procedure is discussed in following. By means of the frequency response shape, one can notice three main resonant peaks, close to the frequencies 1.91×10^3 , 4.09×10^4 and 2.19×10^5 . Such frequencies can be related to three continuous-time (s plane) pairs of complex poles, given by: $s_1 = -10 \pm j1.8 \times 10^3$; $s_2 = -100 \pm j4.09 \times 10^4$ and $s_3 = -1000 \pm j2.19 \times 10^5$; Assuming the sample time as 3.14×10^{-7} seconds (since the curve's maximum frequency is close to 10^{-7} rad/s) such poles can be further mapped to discrete-time (z-plane) poles and used to build the inner functions.

So the chosen basis functions is defined by three pairs of poles. By using a basis with 150 functions, one can define a model such as (13). The C vector is estimated by using (21). The frequency response of the model, compared with the actual frequency response is presented in Fig. 3. Both curves are quite close to each other, highlighting the good approximation of the model. It should be emphasized that this is just a first approximation. An optimization phase can be further performed (by using (16)) and the same or better approximations could be obtained with a more parsimonious model structure. However, the idea is to show that the proposed methodology for pole selection can easily lead to good models.

By using the previous selected poles, an optimization phase can be further performed (by using (16)). In the present case, the following poles were obtained: $z_1 = 0.999737960453932 \pm j0.000544296620221$; $z_2 = 0.998102810978878 \pm j0.015192057846984$ and $z_3 = 0.996646277738518 \pm j0.051625059539579$. The frequency response of the new model, compared with the actual frequency response is presented in Fig. 4. The new error between the actual and the model frequency responses are presented in Fig. 5. Although the model initial approximation (before the optimization phase) is quite good, one can remark a gain in the model approximation after the optimization phase in the whole frequency band, mainly in frequencies close to $\pi/\Delta t$ and in a peak close to 10^5 rad/s . Table 1

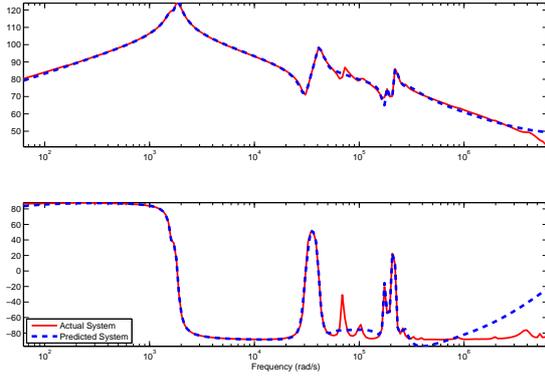


Fig. 3. Jaguara Transformer actual and model frequency responses.

TABLE I
ERROR NORMS FOR JAGUARA TRANSFORMER MODELS

	MSE	L_∞
first approximation	2.25×10^8	1.05×10^4
second approximation	3.97×10^6	888.43

contains the model error norms for the first and second approximation (i.e., after an optimization procedure).

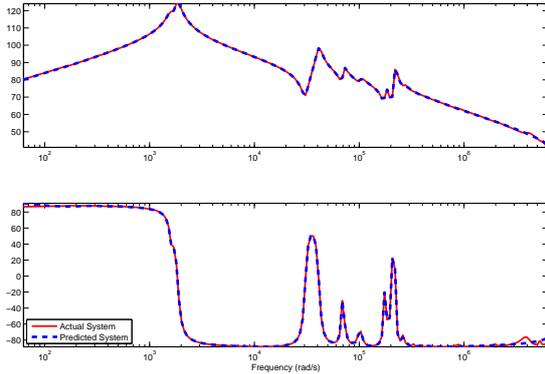


Fig. 4. Jaguara Transformer actual and model frequency responses with optimization.

B. The Irapé Power Transformer

The second data set is obtained from a transformer located at the Irapé substation. It is a bank of three mono-phase power autotransformer defined by $345 \pm 2 \times 2.5\%/230 - 13.8KV$, $225/225 - 75MVA$. A frequency response related with this transformer is presented in Fig. 6. It represents a frequency response data test relating the voltage (pu) on the input terminal $Y1 - Y2$ to the voltage (pu) on the output terminal $X1 - H0X0$. The procedure for obtaining an orthonormal basis function based model is described in following.

The first step is to define the basis structure. By means of the frequency response shape, one can notice four main

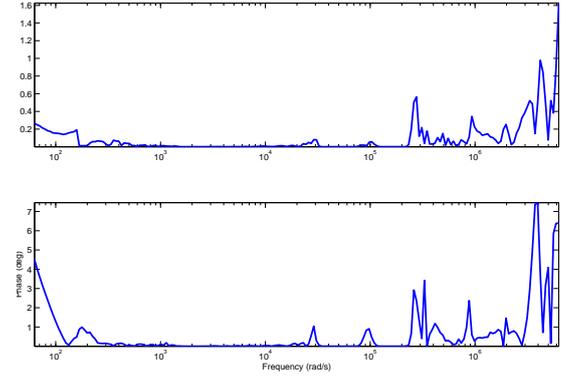


Fig. 5. Errors between the actual and model frequency responses for the Jaguara Transformer with optimization.

resonant peaks, close to the frequencies 2.3×10^4 ; 7.5×10^4 , 1.72×10^5 and 2.8×10^5 . Such frequencies can be related to four continuous-time (s plane) pairs of complex poles, given by: $s1 = -100 \pm j2.3 \times 10^4$; $s2 = -100 \pm j7.5 \times 10^4$ and $s3 = -1000 \pm j1.72 \times 10^5$ and $s4 = -1000 \pm j2.8 \times 10^5$. Assuming the sample time as 3.14×10^{-6} seconds (since the curve's maximum frequency is close to 10^{-6} rad/s) we obtain the mapped discrete-time (z-plane) poles for constructing the inner functions.

So the chosen basis functions is defined by these four pairs of poles. By using a basis with 160 functions, the frequency response of the model, compared with the actual frequency response is presented in Fig. 6. Both curves are quite close to each other, highlighting the good approximation of the model.

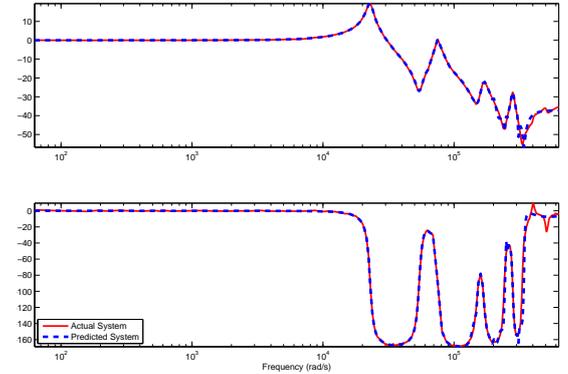


Fig. 6. Irapé Transformer Actual and model frequency responses.

By using the previous selected poles, an optimization phase can be further performed (by using (16)). In the present case, the following poles were obtained: $z1 = 0.991955289251360 \pm j0.075199466895447$; $z2 = 0.894900572604934 \pm j0.320335112033658$ and $z3 = 0.847212591957111 \pm j0.294839666709261$ and $z4 = 0.617751161360377 \pm j0.759289791260353$. The frequency response of the new model, compared with the actual fre-

TABLE II
ERROR NORMS FOR IRAPÉ TRANSFORMER MODELS

	MSE	L_∞
first approximation	0.0055	0.0329
second approximation	0.0018	0.0229

quency response is presented in Fig. 7. The error between the actual and the model frequency responses are presented in Fig. 8. Although the model initial approximation is quite good, one can remark a gain in the model approximation after the optimization phase, mainly in high frequencies. Table 2 contains the model error norms for the first and second approximation (i.e., after an optimization procedure).

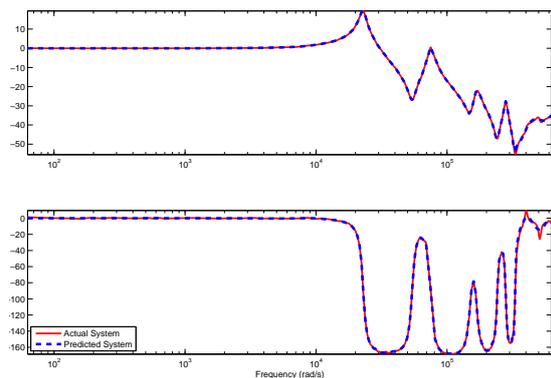


Fig. 7. Irapé Transformer Actual and model frequency responses with optimization.

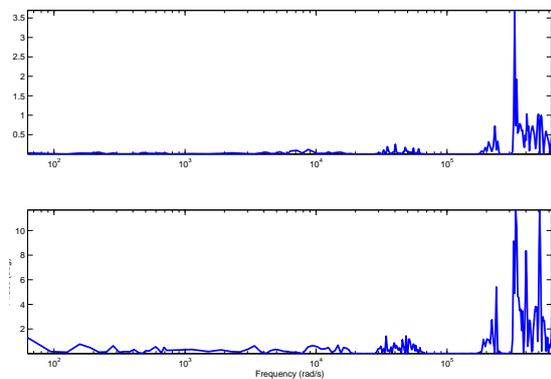


Fig. 8. Errors between the actual and model frequency responses of the Irapé Transformer with optimization.

VI. CONCLUSIONS

This paper was focused on the problem of determining wide band transformer models for transient analysis purposes. It is proposed the use of orthonormal basis functions modeling structure for the system representation. Due to the data set usually encountered in power transformers tests, the

system identification procedure was described and performed in the frequency-domain.

The base structure was also selected to fit the application particularities, so a method for functions poles selection based on the resonant peaks in the frequency response data was proposed.

Two actual application data were used to test the validity of the modeling approach and the result accurate were quite good. So, good system approximations can easily obtained, having in mind that still better results, in terms of a more parsimonious representation, can also be achieved by applying a further optimization procedure with the initial values given by the proposed poles location.

VII. ACKNOWLEDGMENT

The first author gratefully acknowledges the CNPq, Brazilian National Council for Research and Development, grant number 554979/2006 – 4.

REFERENCES

- [1] P.T.M. Vaessen. "Transformer Model For High Frequencies". *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 3, no. 4, pp. 1761-1768, 1988.
- [2] B. Gustavsen and A. Semlyen. "Rational Approximation of Frequency Domain Responses by Vector Fitting", *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 14, no. 3, 1999.
- [3] A. Morched L. Marti and J. Ottevangers "A High Frequency transformer Model for the EMTP". *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 8, no. 3, pp. 1615-1626. 1993.
- [4] A. Keyhani, S. W. Chua and S. A. Sebo. "Maximum Likelihood Estimation of Transformer High Frequency Parameters From Test Data". *IEEE Trans. on Power Delivery*, vol. 6, no. 2. pp. 858 - 865, 1991.
- [5] L. Ljung. *System Identification: Theory for the user*. Prentice Hall, 2a ed., 1999
- [6] P.S.C. Heuberger, P.M.J. Van den Hof and B. Wahlberg. "Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions", Springer Verlag, 2005.
- [7] G. H. C. Oliveira. "Modelagem de Componentes de Sistemas Elétricos de Potência Usando Bases de Funções Ortonormais". *Eletroevolução*, vol. 47, pp. 37-45, 2008. In Portuguese.
- [8] B. C. Reginato and G. H. C. Oliveira. "Aplicação de Bases de Funções Ortonormais Generalizadas em Modelos do Sistema Elétrico de Potência". *Eletroevolução*, vol. 51, pp. 18-26, 2008. In Portuguese.
- [9] P. M. J. Van Den Hof, P. S.C. Heuberger and J. Bokor. "System identification with generalized orthonormal basis functions". *Automatica*, vol. 31, no. 12, pp 1821-1834, 1995.
- [10] B. Ninness, H. Hjalmarsson and F. Gustafsson. "The Fundamental Role of General Orthonormal Bases in System Identification". *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 44, no. 7, pp. 1384-1406. 1999.
- [11] D. Deschrijver and T. Dhaene. "Broadband Macromodelling of Passive Components using Orthonormal Vector Fitting". *Electronic Letters*, vol. 41, no. 21. 2005.
- [12] Silva, T. O. "Optimal Pole Conditions for Laguerre and Two-Parameter Kautz Models: A Survey of Known Results". *Proc. of the IFAC Symposium on System Identification (SYSID)*, pp. 457-462. 2000.
- [13] B. C. Reginato and G. H. C. Oliveira. "On Selecting the MIMO Generalized Orthonormal Basis Functions Poles by Using Particle Swarm Optimization". *IEEE European Control Conference*, vol., pp., 2007.

MÉTODO PARA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS CONTÍNUOS MAL AMORTECIDOS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA USANDO FUNÇÕES ORTONORMAIS

RAFAEL MAESTRELLI*, GUSTAVO H. C. OLIVEIRA†

*Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR)
Curitiba, PR, Brasil

†Departamento de Engenharia Elétrica (DELT)
Universidade Federal do Paraná (UFPR)
Curitiba, PR, Brasil

Emails: rafamaestrelli@hotmail.com, gustavo@eletrica.ufpr.br

Abstract— This paper is focused on the problem of obtaining models for low damping systems by using orthonormal basis functions and frequency domain data. It is analyzed the use of continuous-time rational orthonormal basis functions in such context. An issue related with such modeling strategy is the basis design, that is, the function pole selection, usually associated with nonlinear optimization problems. So, a basis design strategy, based on an initializing procedure that uses the resonant frequency response curve peaks is described, analyzed and the subsequent parametric estimation procedure is presented. Identification results, obtained with actual power transformers frequency response data, are presented, discussed and compared with the discrete-time case.

Keywords— Frequency domain system identification, Continuous-time dynamic system, Orthonormal basis functions, Undamped systems.

Resumo— Este artigo aborda o problema de identificação de sistemas mal amortecidos através de bases de funções ortonormais com uso de dados no domínio da frequência. Neste contexto, é analisada a utilização de bases de funções ortonormais em tempo contínuo. Um problema relacionado com a modelagem de sistemas através de funções ortonormais é a seleção correta dos parâmetros das funções, isto é, seus pólos. Esta seleção está usualmente associada com a solução de problemas de otimização não-linear com mínimos locais. Neste sentido, pontos importantes são diminuir a possibilidade de cair em soluções de ótimo local e determinar a quantidade de variáveis do problema, isto é, o número de pólos diferentes presentes na base de funções. Então, este artigo descreve e analisa um procedimento para inicializar o processo de otimização baseado nos picos de ressonância da curva de resposta em frequência. Os resultados do procedimento, aplicado em dados reais de um transformador de potência, são apresentados e comparados com uma abordagem análoga.

Keywords— Identificação de sistemas no domínio da frequência, Sistemas em tempo contínuo, Bases de funções ortonormais, Sistemas mal amortecidos.

1 INTRODUÇÃO

O procedimento para determinação de modelos de sistemas dinâmicos através de dados experimentais de entrada e saída é de grande importância em muitas áreas do conhecimento. Quando os dados estão no domínio da frequência, o problema de identificação tem propriedades interessantes, como por exemplo (Pintelon and Schoukens, 2001; Ljung, 1994): a fácil redução do ruído via pré-filtragem dos dados, a redução do volume de dados, a possibilidade de combinar resultados de vários experimentos separados, dentre outras.

Neste sentido, modelos em tempo discreto são naturalmente adequados para aplicação de algoritmos de identificação de sistemas com dados amostrados. Porém, modelos em tempo contínuo também apresentam vantagens no processo de identificação de sistemas. Algumas são, por exemplo (Garnier et al., 2008): a flexibilidade na seleção do tempo de amostragem para simulação computacional, um melhor conhecimento sobre as propriedades físicas do sistema identificado, a preservação da relação entre pólos e zeros do sistema, a possibilidade de usar dados amostrados em tempos não uniformes, a ausência de problemas de sensibilidade encontrados em modelos em tempo discreto, notadamente quando o período de

amostragem é muito pequeno em relação à dinâmica dominante do sistema etc.

Por outro lado, sistemas com baixo amortecimento e vários picos de ressonância podem ser encontrados em muitos problemas da engenharia. Estruturas móveis, robôs manipuladores flexíveis, e transformadores de sistemas elétricos de potência se encaixam nesta classe de sistema dinâmico. Quando a resposta em frequência deste tipo de sistema é observada, nota-se a presença de muitas dinâmicas relevantes, os picos de ressonância, em diferentes pontos da faixa observada. Como consequência, a estimação do modelo deve ser feita por uma larga faixa de frequências para a correta representação de todas as dinâmicas presentes no sistema.

Uma estrutura de modelo para identificação de sistemas do tipo caixa-preta é aquela conhecida por Bases de Funções Ortonormais (*Orthonormal Basis Functions* - OBF), ver (Heuberger et al., 2005; Oliveira et al., 2010) e referências inclusas. Tal estrutura permite aproximar, com uma norma \mathcal{H}_2 arbitrária, qualquer sistema estável, linear e causal. Frequentemente implementada na forma de modelos em tempo discreto, as OBFs também podem ser construídas usando funções em tempo contínuo. Alguns exemplos são (Deschrijver and Dhaene, 2006; Ninness et al., 1999).

No contexto de identificação de sistemas com modelos OBF, um ponto importante é a seleção de quantas e quais dinâmicas distintas (pólos) serão incluídas na base de funções que forma o modelo. Logo, muitos trabalhos vêm abordando o problema da seleção de pólos da base de funções, por exemplo, os trabalhos (Silva, 2000; Tanguy et al., 2002; Reginato and Oliveira, 2007)), sendo que a grande maioria se dedica ao caso de sistemas em tempo discreto (i.e., a seleção de pólos discretos).

Este artigo analisa um método para a seleção de pólos da base de funções de modelos OBF em tempo contínuo, aplicado para o problema de identificação no domínio da frequência de sistemas mal amortecidos. O método está baseado na utilização de um algoritmo de otimização não-linear, cuja condição inicial é definida pelos picos de ressonância da resposta em frequência. Tal procedimento está testado, com bons resultados, para o caso de bases de funções ortonormais em tempo discreto (Oliveira et al., 2009), e aqui é testado para o caso de funções em tempo contínuo. Um estudo de caso, com dados reais de resposta em frequência de transformadores de potência, é apresentado. Os resultados apresentados comprovam a validade do método.

O documento está estruturado conforme descrito a seguir. Um resumo sobre a modelagem de sistemas com funções ortonormais em tempo contínuo é apresentado na Seção II. O problema do projeto das bases e o método proposto são descritos na Seção III. A estimação paramétrica do modelo, no domínio da frequência, é revista na Seção IV. Exemplos, usando dados reais, são analisados na Seção V, e as conclusões do trabalho estão Seção VI.

2 REPRESENTAÇÃO DE SISTEMAS CONTÍNUOS LINEARES COM FUNÇÕES ORTONORMAIS

Um sistema dinâmico linear SISO causal, com memória finita, pode ser descrito por uma função de transferência $H(s)$ ou por um sinal de resposta ao impulso $h(t)$, como segue:

$$Y(s) = H(s)U(s) \quad (1)$$

ou

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (2)$$

Nesta equação, $u(t)$ e $y(t)$ são os sinais de entrada e de saída, respectivamente. Assumindo que a resposta ao impulso tem memória finita, $h(t)$ pode ser representada através de uma série de funções ortonormais, isto é:

$$h(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \phi_i(t), \quad (3)$$

onde $\{\phi_i(t)\}_{i=1}^{\infty}$ forma uma base de funções ortonormais e o conjunto $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ são os coeficientes da série. Substituindo (3) em (2), tem-se:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \int_0^{\infty} \phi_i(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad (4)$$

e aplicando a Transformada de Laplace, obtém-se:

$$Y(s) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \Phi_i(s)U(s). \quad (5)$$

Na determinação do modelo, assume-se que a série é truncada em n termos, tal que,

$$\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^n c_i \int_0^{\infty} \phi_i(t - \tau)u(\tau)d\tau, \quad (6)$$

ou

$$\tilde{Y}(s) = \sum_{i=1}^n c_i \Phi_i(s)U(s) = \tilde{H}(s)U(s). \quad (7)$$

sendo o erro da aproximação definido por:

$$\varepsilon_n(t) = y(t) - \tilde{y}(t). \quad (8)$$

Este erro pode ser feito tão pequeno quanto se queira, bastando aumentar ordem de truncamento n .

A idéia chave dessa aproximação é descrever a resposta ao impulso do sistema, e consequentemente, sua função de transferência, como uma série de funções ortonormais. Uma questão associada com esta aproximação é a parametrização das funções da base, definida pela escolha do número de pólos diferentes, e seus valores, presentes na base. Por exemplo, a parametrização pode ser feita de tal modo que a base tenha um pólo real ou um par de pólos complexos e conjugados, o que resulta nas funções de Laguerre e de Kautz, respectivamente. Contudo, é possível melhorar a convergência da série ao definir bases de funções com mais de uma dinâmica, isto é, diminuir a norma do erro de aproximação para uma dada ordem de truncamento n . Bases de funções com mais de uma dinâmica são particularmente úteis em sistemas cuja resposta em frequência apresenta picos de ressonância distribuídos em uma larga faixa de frequências.

Neste sentido, uma base ortonormal com mais de uma dinâmica é definida por (Ninness et al., 1999):

$$\begin{aligned} \Phi_i(s) &= \frac{\sqrt{2\Re\{p_i\}}}{s + p_i} \Gamma_{i-1}(s), \quad i \geq 1, \\ \Gamma_i(s) &= \prod_{k=1}^i \frac{s - \bar{p}_k}{s + p_k}, \quad i \geq 1, \end{aligned} \quad (9)$$

com $\Phi_0(s)$ e $\Gamma_0(s)$ iguais a 1 e $p_i \in \mathbb{C}$ (\bar{p}_i é o complexo conjugado de p_i). $\Phi_n(s)$ é a função de transferência contruída pela realização em cascata de n funções $\Gamma_i(s)$, cada uma podendo ter um pólo diferente (real ou complexo), lembrando que pólos complexos devem estar acompanhados de seu conjugado. Estes n pólos contêm as informações *a priori* sobre as dinâmicas dominantes do sistema. Cada função $\Phi_i(s)$ pode ser escrita usando $\Phi_{i-1}(s)$, como é demonstrado a seguir. Seja $l_i(t)$ (com Transformada de Laplace representada por $L_i(s)$) a saída da i -ésima função ortonormal, quando a entrada é $u(t)$ ($U(s)$). Então:

$$\begin{aligned}
L_1(s)(s+p_1) &= k_1 U(s), \\
L_2(s)(s+p_2) &= \frac{k_2}{k_1} L_1(s)(s-\bar{p}_1), \\
L_3(s)(s+p_3) &= \frac{k_3}{k_1 k_2} L_2(s)(s-\bar{p}_2), \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{10}$$

sendo as constantes k_i definidas como:

$$k_i = \sqrt{2\Re(p_i)}. \tag{11}$$

Ao aplicar a transformada inversa de Laplace em (10), obtém-se:

$$\dot{\mathbf{I}}(t) = \mathbf{KAK}^{-1}\mathbf{I}(t) + \mathbf{KB}u(t), \tag{12}$$

onde o vetor de estados $\mathbf{I}(k)$ e as matrizes A , B e K são construídos como segue:

$$\mathbf{I}(t) = \begin{bmatrix} l_1(t) \\ l_2(t) \\ l_3(t) \\ \vdots \end{bmatrix}, \tag{13}$$

$$A = \begin{bmatrix} -p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 2\Re(-p_1) & -p_2 & 0 & \dots \\ 2\Re(-p_1) & 2\Re(-p_2) & -p_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \ddots \end{bmatrix}, \tag{14}$$

$$B = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \dots]^T. \tag{15}$$

e K é uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal são k_i .

Se for necessário incluir pólos complexos nas bases, um novo par de funções ortonormais pode ser criado como combinação linear da função (9). Neste trabalho, o par de pólos é dado por (Deschrijver and Dhaene, 2006).

A realização em espaço de estados do sistema (7) é dada por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{I}}(t) = \mathbf{KAK}^{-1}\mathbf{I}(t) + \mathbf{KB}u(t) \\ \hat{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{I}(t), \end{cases} \tag{16}$$

onde as matrizes A , B e K são obtidas usando o número de bases e a localização pré-selecionada dos pólos.

3 SELEÇÃO DOS PARÂMETROS DAS BASES

Uma vez que a base de funções descrita na seção anterior é completa no espaço de funções quadraticamente integráveis, qualquer pólo(s) pode(m) ser selecionado(s) para representar um processo linear e estável. Entretanto, uma escolha adequada do pólo proporciona uma representação mais eficiente do sistema no sentido de melhorar a convergência da série. Isto implica na redução no número total de parâmetros do modelo.

Existem diferentes aspectos a serem analisados quanto a seleção dos pólos: o primeiro é relativo ao número de pólos diferentes encontrados nas bases, e podem ser classificados como: *i*) dinâmica com um pólo real (funções de Laguerre), *ii*) dinâmica com um par de pólos complexos e conjugados (funções de Kautz), *iii*) dinâmica com pólos distintos. Outro ponto relacionado a este problema é o tipo de solução aplicada para a seleção do pólo, que pode ser: *i*) solução analítica, *ii*) solução numérica e *iii*) solução híbrida, denominação usada aqui para indicar uma solução que faz uso de alguma informação do sistema para melhorar a eficiência da solução numérica. Finalmente, tem-se a classificação do tipo de informação envolvida na seleção do pólo: *i*) dados no domínio do tempo ou *ii*) dados no domínio da frequência.

Na sequência, o caso de mais de uma dinâmica, solução híbrida e dados no domínio da frequência é abordado.

4 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Seja $\tilde{H}(s, \hat{C}, \mathbf{p})$ uma função transferência estimada, com realização definida pelo uso de funções de bases ortonormais (modelo (16)), com n_g pólos distintos, denotados como \mathbf{p} , cujo vetor de parâmetros \hat{C} é estimado usando mínimos quadrados em função de n , n_g e \mathbf{p} . Assume-se que a resposta em frequência do sistema real $H(j\omega)$ está disponível em um conjunto de frequências dados por:

$$W_N = \{\omega_1 \dots \omega_N\}, \tag{17}$$

sendo N o número total de dados disponíveis no domínio da frequência.

Uma função custo relacionada com a aproximação do modelo pode ser definida por:

$$\begin{aligned}
J(\mathbf{p}) &= \sum_{k=1}^N \Re e (\|H(j\omega_k) - \tilde{H}(j\omega_k, \hat{C}, \mathbf{p})\|_2)^2 \\
&\quad + \sum_{k=1}^N \Im m (\|H(j\omega_k) - \tilde{H}(j\omega_k, \hat{C}, \mathbf{p})\|_2)^2,
\end{aligned} \tag{18}$$

sendo que $\|\cdot\|_2$ representa a norma-2 e $\tilde{H}(j\omega_k, \hat{C}, \mathbf{p})$ é a resposta em frequência estimada do modelo para $\omega = \omega_k$.

Com isso, o problema da seleção do conjunto de pólos ótimos para a base de funções é o que minimiza a função custo formada pela norma do erro entre os dados reais e os do modelo, isto é:

$$\mathbf{p}^* = \underset{\mathbf{p} \in \Omega}{\arg \min} J(\mathbf{p}), \tag{19}$$

\mathbf{p}^* é a localização ótima do pólo para um dado conjunto de dados no domínio da frequência e Ω é o espaço de todos os pólos estáveis do plano s .

O problema (19) é não linear e pode conter vários mínimos locais e, portanto, a seleção das condições

iniciais do problema de otimização é relevante. No caso de sistema com baixo amortecimento, a resposta em frequência é usualmente caracterizada por um conjunto de picos de ressonância e um processo para a seleção inicial dos pólos é descrito a seguir.

A identificação do sistema pode ser inicializada usando o conhecimento prévio sobre as dinâmicas do sistema, conforme descrito a seguir:

Inicialização: Para inicializar o processo faz-se: *i*) seleção do número de dinâmicas diferentes presentes no modelo, definidas como sendo n_g que é feito igual ao número de picos de ressonância presentes nos dados de resposta em frequência. As funções da base são construídas usando os n_g pólos diferentes. A seguir, *ii*) para cada pólo, seleção da parte complexa igual à frequência (em radianos por segundo) dos picos de ressonância e seleção da parte real 100 vezes menor do que a parte complexa correspondente (similar à (Gustavsen and Semlyen, 1999)). Neste ponto, as matrizes A e B do modelo (16) estão definidas.

Dadas as propriedades do modelo, esta seleção pode ser usada diretamente para o processo de estimação dos parâmetros, sem necessidade de realizar outras iterações. Entretanto, uma melhor aproximação pode ser obtida quando estes pólos são usados como a condição inicial para procedimento de otimização não linear aqui definido.

Mínimos Quadrados: Na sequência, estima-se os valores da matriz \hat{C} via mínimos quadrados. Neste sentido, o modelo de resposta em frequência é dado por:

$$\tilde{H}(j\omega_k, \hat{C}, \mathbf{p}) = \sum_{i=1}^n c_i L_i(j\omega_k, \mathbf{p}), \quad (20)$$

ou

$$\tilde{H}(j\omega_k, \theta) = \phi^T(j\omega_k, \mathbf{p}) \hat{C}, \quad (21)$$

sendo

$$\hat{C} = [c_1 \quad \dots \quad c_n], \quad (22)$$

e

$$\phi(j\omega_k) = [L_1(j\omega_k)^T \quad \dots \quad L_n(j\omega_k)^T]. \quad (23)$$

A estimação dos parâmetros, baseada no problema de mínimos quadrados, é dada por:

$$\hat{C}^* = \arg \min_{\mathbf{C}} \frac{1}{N} \sum_{w_k \in W_N} \|H(j\omega_k) - \phi(j\omega_k)^T \hat{C}\|_2. \quad (24)$$

Estimação de pólos: um novo conjunto de valores para os pólos distintos \bar{e} é calculado usando um método de otimização não-linear.

5 EXEMPLO

Na sequência, o procedimento apresentado na seção anterior é aplicado a um estudo de caso com dados reais de resposta em frequência um transformador de potência. O equipamento (trifásico 500/345 – 13.8 kV, 400/400 – 133 MVA) está localizado na subestação de Jaguará, pertencente ao sistema de

transmissão de alta voltagem da CEMIG (ver figura 1). Para ilustrar o tamanho da aplicação abordada no exemplo, a Figura 2 contém um transformador de potência similar (225 MVA e 275-kV) fabricado no Brasil. O algoritmo de otimização utilizado no exemplo é conhecido por (*trust-region-reflective*), implementado na caixa de ferramentas de otimização do software Matlab da Mathworks (*Matlab Optimization Toolbox*).

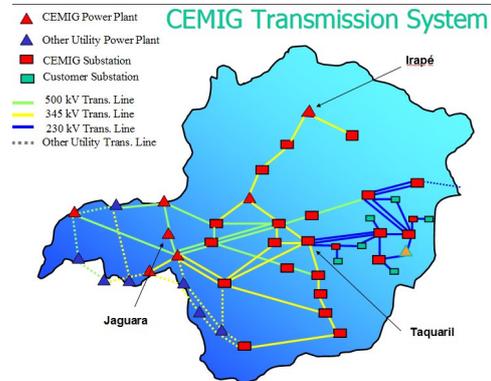


Figura 1: Sistema de transmissão da CEMIG.



Figura 2: Transformador de potência, 225 MVA.

Para quantificar a qualidade do modelo, são utilizados o MSE (*mean square error*) e a norma infinita do erro L_∞ , dadas por:

$$MSE \doteq \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |H(j\omega_k) - \tilde{H}(j\omega_k)|^2, \quad (25)$$

$$L_\infty \doteq \max_{k=1, \dots, N} |H(j\omega_k) - \tilde{H}(j\omega_k)|, \quad (26)$$

A resposta em frequência medida da impedância terminal do transformador é apresentada na Fig. 3.

O primeiro passo é definir a estrutura das bases, o que implica em definir o conjunto de pólos e o número de funções da base. Através da curva de resposta em frequência, observa-se três picos de ressonância em frequências aproximadamente localizadas em: 1.91×10^3 , 4.09×10^4 e 2.19×10^5 rad/s. Cada pico de ressonância dá origem a um par de pólos complexos conjugados, dados por: $s_1 = -10 \pm j1.91 \times 10^3$; $s_2 = -100 \pm j4.09 \times 10^4$ e $s_3 = -1000 \pm j2.19 \times 10^5$, os quais definem a base de funções.

Usando bases com 60, 150 e 240 funções, obtêm-se três modelos na estrutura (16). O vetor C é estimado usando (24).

Apesar da aproximação com a seleção inicial para os pólos ser boa, realiza-se na sequência a fase de otimização, e então, uma melhor aproximação é obtida.

A localização final ótima para os pólos da base com 150 funções é $s_1 = -256.113864 \pm j2373.643432$, $s_2 = -345.949368 \pm j45888.458672$ e $s_3 = -286.310449 \pm j196126.928526$. A Tabela 1 contém a norma do erro de estimação dos 3 modelos para a primeira aproximação (*i.e.*, com os o conjunto de pólos iniciais) e para a segunda aproximação (*i.e.*, após o processo de otimização). Para o modelo construído com 150 funções, observa-se uma melhoria de aproximadamente 10 vezes. A Tabela 1 ilustra a influência do número de funções selecionadas e, como esperado, quanto maior é o número de funções, menor é o erro de estimação.

A resposta em frequência dos três modelos, comparados com a resposta em frequência do sistema real, é apresentada na Fig. 3, sendo o erro ao longo da frequência ilustrado na Fig. 4. Observa-se que a melhoria relacionada com o aumento do número de funções se dá na faixa das média a altas frequências.

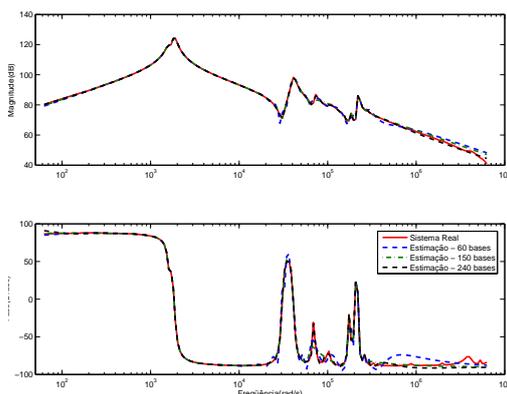


Figura 3: Resposta em Frequência do modelo e a real, do transformador de Jaguará.

Tabela 1: Erros de modelagem do transformador de Jaguará

	MSE	L_∞
150 bases (1^a aprox.)	2.20×10^8	1.05×10^4
60 bases (otim)	1.938×10^8	1.342×10^4
150 bases (otim)	4.812×10^7	7.823×10^3
240 bases (otim)	1.053×10^7	2.582×10^3

Uma importante vantagem do uso de modelos em tempo contínuo é a ausência de problemas de sensibilidade numérica relacionados com o uso de frequências elevadas de amostragem, o que ocorre com modelos

em tempo discreto. Tal questão é abordada a seguir.

A identificação usando modelos OBF, para o mesmo conjunto de dados porém em tempo discreto, está descrita em (Oliveira et al., 2009). Neste sentido, a seguir compara-se a sensibilidade do erro do modelo em função da posição ótima dos pólos.

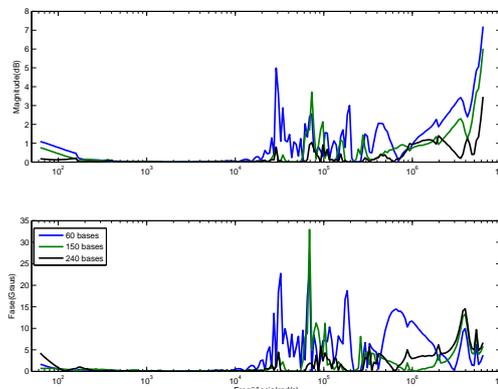


Figura 4: Erro entre a resposta em Frequência do modelo e a real, do transformador de Jaguará.

Conforme (Oliveira et al., 2009), os pólos ótimos em tempo discreto para um modelo OBF com 150 funções são: $z_1 = 0.999737960453932 \pm j0.000544296620221$; $z_2 = 0.998102810978878 \pm j0.015192057846984$ e $z_3 = 0.996646277738518 \pm j0.051625059539579$. O tempo de amostragem está definido como sendo 3.14×10^{-7} segundos, uma vez que a máxima frequência presente nos dados reais medidos está próxima de 10^{-7} rad/s.

Assume-se agora a situação onde o modelo é estimado com pólos dados por $z_1 = 0.9997 \pm j0.0005$; $z_2 = 0.9981 \pm j0.0152$ e $z_3 = 0.9966 \pm j0.0516$, isto é, com um truncamento na quarta casa decimal em relação ao valor ótimo calculado pelo método de otimização. A Tabela 2 contém o erro do modelo para o conjunto de pólos ótimo e pólos quase-ótimos. Nota-se que, devido ao pequeno tempo de amostragem necessário para representar a larga faixa de frequências relevantes presentes nesta classe de sistemas, o pequeno truncamento no valor dos pólos levou a um aumento de 10 vezes no erro de aproximação do modelo.

Tabela 2: Erros de modelagem do transformador de Jaguará (tempo discreto)

150 bases	MSE	L_∞
pólos ótimos	3.97×10^6	888.43
pólos truncados	4.28×10^7	3.78×10^3

A mesma experiência é realizada para modelo em tempo contínuo, porém com truncamento de todas as casas decimais, isto é, $s_1 = -245 \pm j2362$, $s_2 = -334 \pm j45877$ e $s_3 = -275 \pm j196115$. A Tabela 3 apresenta o erro do modelo para o conjunto de pólos

ótimos e pólos quase-ótimos. Nota-se que a aproximação do modelo em tempo contínuo não sofre alterações significativas com a alteração citada no valor dos pólos. A menor sensibilidade da aproximação do modelo com pólos em tempo contínuo em relação à localização dos pólos, quando comparada com o caso em tempo discreto, melhora a robustez numérica do método de otimização na seleção do valor ótimo dos pólos.

Tabela 3: Erros de modelagem do transformador de Jaguara (tempo contínuo)

150 bases	MSE	L_∞
pólos ótimos	4.8116×10^7	7.8227×10^3
pólos truncados	4.6263×10^7	7.8193×10^3

6 CONCLUSÕES

Este trabalho abordou o problema da determinação de modelos para sistemas com modos mal-amortecidos, usando dados de resposta em frequência. Em diversas aplicações, como é o caso da modelagem de transformadores de potência, o uso de dados no domínio da frequência é um requisito justificado pela presença de instrumentos de medição disponíveis no mercado (conhecidos como *Frequency Response Analyzer - FRA*).

A estrutura de modelos formada por bases de funções ortonormais em tempo contínuo e a estimação de parâmetros no domínio da frequência foram descritas. As dificuldades relacionadas com a seleção dos parâmetros das funções foram revistas. Assim, tendo como ponto de partida o caso de sistemas de baixo amortecimento e picos de ressonância em uma larga faixa de frequências, um método para definir o número e o valor inicial dos pólos distintos da bases de funções foi apresentado.

Os dados de resposta em frequência de um transformador real validaram o método proposto. A influência do número de funções na base e a sensibilidade da aproximação do modelo, em função da localização dos pólos e quando comparada com o caso análogo em tempo discreto, foram analisadas.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao CNPq (Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico), à Fundação Araucária (Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado do Paraná) e à CEMIG (Centrais Energéticas de Minas Gerais), pelo fornecimento dos dados do transformador.

Referências

Deschrijver, D. and Dhaene, T. (2006). Parametric identification of frequency domain systems

using orthonormal rational bases, *Proc. of the IFAC Symp. on System Identification (SYSID)*, Australia .

Garnier, H., Wang, L. and Young, P. (2008). *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*, Springer-Verlag, chapter Direct Identification of Continuous-time Models from Sampled Data: Issues, Basic Solutions and Relevance, pp. 1–30.

Gustavsen, B. and Semlyen, A. (1999). Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting, *IEEE Trans. on Power Delivery* **14**(3).

Heuberger, P. S. C., Van den Hof, P. M. J. and Wahlberg, B. (2005). *Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions*, Springer Verlag.

Ljung, L. (1994). Some results on identifying linear systems using frequency domain data, *IEEE Transactions on Automatic Control* **39**(11): 2245–2260.

Ninness, B., Hjalmarsson, H. and Gustafsson, F. (1999). Orthonormal basis functions for continuous-time systems and l_p convergence, *Mathematics of Control, Signals and Systems* (12): 295–300.

Oliveira, G. H. C., da Rosa, A., Campello, R. J. G. B., Machado, J. B. and Amaral, W. C. (2010). An introduction to models based on laguerre, kautz and other related orthonormal functions, *International Journal of Modelling, Identification and Control (Print)*, .

Oliveira, G. H. C., Maestrelli, R. and Rocha, A. C. O. (2009). An application of orthonormal basis functions in power transformers wide band modeling, *Proc. of the IEEE International Conference on Control and Automation (ICCA)*, New Zealand .

Pintelon, R. and Schoukens, J. (2001). *System Identification a Frequency Domain Approach*, IEEE Press.

Reginato, B. C. and Oliveira, G. H. C. (2007). Generalized orthonormal basis functions poles by using particle swarm optimization, *Proc. of the European Control Conference (ECC)*, Greece .

Silva, T. O. (2000). Optimal pole conditions for laguerre and two-parameter kautz models: A survey of known results, *Proc. of the IFAC Symposium on System Identification (SYSID)*, USA .

Tanguy, N., Morvan, R., Vilbé, P. and Calvez, L.-C. (2002). Pertinent choice of parameters for discrete kautz approximation, *IEEE Trans. on Automatic Control* **47**(5): 783–787.

APÊNDICE B – Cálculo do Gradiente da Função Custo no Domínio do Tempo

O mesmo procedimento feito no domínio da frequência é feito no domínio do tempo, a diferença está no critério de custo considerado. Lembrando que este cálculo não será utilizado nos exemplos, só é incluído para aumentar a contribuição teórica da dissertação.

A função custo no domínio do tempo é dada por:

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \|y(t_k) - \hat{y}(t_k, \theta)\|_2^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_d} |y(t_k) - \hat{y}(t_k, \theta)|^2 \quad (\text{B.1})$$

onde θ é o mesmo definido no domínio da frequência, N_d é o numero de amostras e sendo N_l é o numero de bases, a resposta estimada no domínio do tempo $\hat{y}(t)$ é definida como:

$$\hat{y}(t) = \sum_{i=1}^{N_l} c_i \phi_i(t, p) \quad (\text{B.2})$$

O problema de otimização é definido por (4.28), logo o gradiente que dá a direção de minimização do problema é dado por:

$$\nabla_{\theta} J(\theta) = - \sum_{k=1}^{N_d} |y(t_k) - \hat{y}(t_k, \theta)| |\nabla_{\theta} - \hat{y}(t_k, \theta)|, \quad (\text{B.3})$$

sabendo que $\nabla_{\theta} J(\theta) = [\nabla_{\rho} J(\theta)^T \nabla_C J(\theta)^T]$, tem-se:

$$\nabla_C J(\theta) = - \sum_{k=1}^{N_d} |y(t_k) - \hat{y}(t_k, \theta)| |\psi(t, \rho)|, \quad (\text{B.4})$$

e

$$\nabla_{\rho} J(\theta) = - \sum_{k=1}^{N_d} \sum_{i=1}^{N_l} |y(t_k) - \hat{y}(t_k, \theta)| |c_i \nabla_{\rho} \phi_i(t, \rho)|, \quad (\text{B.5})$$

como o gradiente da função custo em relação aos coeficientes e aos pólos da base, respectivamente. Logo é necessário calcular $\nabla_{\rho} \phi_i(t, p)$.

A realização em espaço de estados no domínio do tempo contínuo com relação

a base de funções ortonormais é dado por:

$$\psi(t) = e^{At}\phi(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad (\text{B.6})$$

considerando uma entrada tipo impulso e condições iniciais nulas tem-se:

$$\psi(t) = e^{At}B, \quad (\text{B.7})$$

sendo A e B as mesmas matrizes do domínio da frequência definidos em (4.20), e t representa o tempo.

Com isso o gradiente em relação aos pólos pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \nabla_{\rho}\psi(t) &= \nabla_{\rho}(e^{At}B) \\ \nabla_{\rho}\psi(t) &= \nabla_{\rho}[At]e^{At}B + e^{At}\nabla_{\rho}[B]. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

O cálculo de $\nabla_{\rho}A$ e $\nabla_{\rho}B$ é o mesmo apresentado na Seção 4.3.1, por se tratarem das mesmas matrizes.

Referências Bibliográficas

- Ades, R. *Problema $H - 2/H_2$ - Soluções Aproximadas por Meio de Expansão em Bases*. Tese (Doutorado) — PUC-RJ, Rio de Janeiro/RJ/Brasil, 1999.
- Agüero, J. C.; Yuz, J. I.; Goodwin, G. C. Frequency domain identification of mimo state space models using the em algorithm. *European Control Conference*, 2007.
- Aguirre, A.; Aguirre, L. Time series analysis of monthly beef cattle prices with nonlinear autoregressive models. *Applied Economics*, v. 32, p. 245–275, 1998.
- Aguirre, L. A. *Introdução À Identificação De Sistemas: Técnicas Lineares e Não-Lineares Aplicadas a Sistemas Reais*. 2. ed. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2004.
- Akçay, H.; Heuberger, P. A frequency-domain iterative identification algorithm using general basis functions. *Automatica*, n. 37, p. 663–674, 2001.
- Akçay, H.; Ninness, B. Orthonormal basis functions for modelling continuous-time systems. *Signal Process.*, v. 77, n. 1, p. 261–274, 1999a.
- Akçay, H.; Ninness, B. Orthonormal basis functions for modelling continuous-time systems and l_p convergence. *Math. Control Signals Systems*, v. 12, p. 295–305, 1999b.
- Bazaraa, M. S.; Sherali, H.; Shetty, C. M. *Nonlinear Programming*. New York, EUA: John Wiley & Sons, Inc, 2006.
- Bechmann, H. et al. Grey-box modelling of pollutant loads from a sewer system. *Urban Water*, v. 1, n. 1, p. 71–78, 1999.
- Bertsekas, D. P. *Constrained Optimization and Laguerre Multiplier Methods*. [S.l.]: Athena Scientific, 1996.
- Bosch, P. P. J. van den; Klauw, A. C. van der. *Modeling, Identification and Simulation of Dynamical Systems*. Boca Raton: CRC, 2000.
- Breillinger, D. R. *Time Series: Data Analysis and Theory*. New York: McGraw-Hill, 1981.
- Brus, L. Nonlinear identification of a solar heating system. *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, Toronto, EUA, p. 1491–1497, 2005.
- Clement, P. R. Laguerre functions in signal analysis and parameter identification. *J. of the Franklin Institute*, v. 313, p. 85–95, 1982.

- Coelho, A. A. R.; Coelho, L. S. *Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares*. SC - Florianópolis: UFSC, 2004.
- da Rosa, A.; Campello, R. J. G. B.; Amaral, W. C. Cálculo de direções de busca exatas para otimização de filtros de laguerre e de kautz. *Proc. XVII Congresso Brasileiro de Automática*, 2008.
- De Vries, D. K.; Van den Hof, P. M. Frequency domain identification with generalized orthonormal basis functions. *IEEE Trans. on Automatic Control*, v. 43, n. 5, p. 656–669, 1998.
- Deschrijver, D.; Dhaene, T. Broadband macromodeling of passive components using orthonormal vector fitting. *Inst. Elect. Eng. Electron. Lett.*, v. 41, n. 21, p. 1160–1161, October 2005.
- Deschrijver, D.; Dhaene, T. Parametric identification of frequency domain systems using orthonormal rational bases. *14 IFAC Symposium on System Identification*, p. 837–842, 2006.
- Deschrijver, D.; Gustavsen, B.; Dhaene, T. Advancements in iterative methods for rational approximation in the frequency domain. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 22, n. 3, p. 1633–1642, July 2007.
- Deschrijver, D.; Haegeman, B.; Dhaene, T. Orthonormal vector fitting: A robust macromodeling tool for rational approximation of frequency domain responses. *IEEE Transactions Adv. Packag.*, v. 30, n. 2, p. 216–255, May 2007.
- El-Fandi, M.; Henderson, I. A.; McGhee, J. System identification of a two input two-output simulated distillation column using noninteracting multisymbol signals. *Proceedings of the 12th European Simulation Multiconference on Simulation*, Manchester, UK, p. 176–179, 1998.
- Eykhoff, P. *System Identification: Parameter and State Estimation*. [S.l.]: John Wiley, 1974.
- Freire, R. Z. *Técnicas Avançadas de Controle Aplicadas a Sistemas de Climatização Visando Conforto Térmico*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, PR, Brasil, 2006.
- Fu, Y.; Dumont, G. A. An optimum time scale for discrete laguerre network. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 38, n. 6, p. 934–938, June 1993.
- Garcia, C. *Modelagem e simulação de processos industriais e de sistemas eletromecânicos*. São Paulo, SP, Brasil: EDUSP, 1997.
- Garnier, H.; Wang, L. *Identification of Continuous-time Models from Sampled Data*. 1. ed. London, UK: Springer-Verlag, 2008.

- Golub, G. H.; Van Loan, C. F. *Matrix computations*. 3. ed. Baltimore, MD, USA: Johns Hopkins University Press, 1996.
- Gomez, J. C. *Analysis of Dynamic System Identification using Rational Orthonormal Bases*. Tese (Doutorado) — DECE/The University of Newcastle, Callaghan/Australia, 1998.
- Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M. *Table of Integrals, Series, and Products*. 7. ed. London, UK: Elsevier Academic Press, 2007.
- Guillaume, G.; Pintelon, R.; Schoukens, J. Nonparametric frequency response functions estimators based on nonlinear averaging techniques. *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, v. 41, n. 6, p. 739–746, 1992.
- Gustavsen, B. Improving the pole relocating properties of vector fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 21, n. 3, p. 1587–1592, July 2006.
- Gustavsen, B.; Semlyen, A. Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*, v. 14, n. 3, p. 1052–1061, July 1999.
- Hendrickz, W.; Dhaene, T. A discussion of "rational approximation of frequency domain responses by vector fitting". *IEEE Transactions on Power Syst.*, v. 21, n. 1, p. 441–443, February 2006.
- Heuberger, P. S. C.; Van den Hof, P. M. J.; (EDS), B. W. *Modelling and Identification with Rational Orthogonal Basis Functions*. London: Springer, 2005.
- Johansson, R. et al. State-space system identification of robot manipulator dynamics. *Mechatronics*, v. 10, p. 403–418, 2000.
- JR, J. E. D.; Schanabel, R. B. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Uppes Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 1983.
- Kautz, W. H. Transient synthesis in the time-domain. *IRE Trans. Circuit Theory*, v. 1, p. 29–39, 1954.
- Kheir, N. A. *Systems Modeling and Computer Simulation*. 2. ed. New York: M. Dekker, 1996.
- Kreyszig, E. *Advanced Engineering Mathematics*. 9. ed. [S.l.]: John Wiley, 2006.
- Levenberg, K. A method for the solution of certain nonlinear problems on least squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, v. 2, n. 2, p. 1664–168, 1944.
- Levi, E. C. Complex-curve fitting. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-4, p. 37–44, May 1959.
- Ljung, L. Some results on identifying linear systems using frequency domain data. *IEEE Transactions on Automatic Control*, December 1997.

- Ljung, L. *System Identification: Theory For The User*. 2. ed. [S.l.]: Upper Saddle River: Prentice Hall PTR, 1999.
- Ljung, L.; Glad, T. *Modeling of Dynamic Systems*. [S.l.]: Prentice Hall, 1994.
- Ludeman, L. C. Blind nonlinear system identification during ventricular fibrillation. *Proceedings of the Twelfth Southern Biomedical Engineering Conference*, p. 309–311, 1993.
- Luenberger, D. G. *Introduction to Linear and Nonlinear Programing*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1973.
- Maestrelli, R. *Comparação entre Métodos de Identificação nos Domínios do Tempo e da Frequência para Projeto de Estratégias de Controle*. 2007. Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR. Trabalho de Conclusão de Curso.
- Maestrelli, R.; Oliveira, G. H. C. Método para identificação de sistemas contínuos mal amortecidos no domínio da frequência usando funções ortonormais. *Proc. Congresso Brasileiro de Automática*, 2010.
- Malmquist, F. Sur la détermination d'une classe de fonctions analytiques par leurs valeurs dans un ensemble donné de points. *Compte Rendus Sixieme Congr. Math. Scand.*, n. 39, p. 253–259, 1926.
- Malti, R.; Ekongolo, S. B.; Ragot, J. Dynamic siso and miso system approximations based on optimal laguerre models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 43, n. 9, p. 1318–1323, 1998.
- Marquardt, D. W. An algoritihm for the least-squares estimation of nonlinear parameters. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, v. 11, n. 2, p. 431–441, 1963.
- Mäkilä, P. Approximation of stable systems by laguerre filters. *Automatica*, n. 26, p. 333–345, 1990.
- Nelles, O. *Nonlinear System Identification*. Berlin: Springer-Verlag, 2001.
- Ninness, B. Frequency domain estimation using orthonormal bases. *Proceedings of the 13th IFAC World Congress*, p. 381–386, 1996.
- Nocedal, J.; Wright, S. J. *Numerical Optimization*. New Yprk: Springer-Verlag, 1999.
- Nunes, M. F. *Estudo Comparativo Sobre Métodos de Identificação Para Levantamento de Modelos a Partir de Dados de Resposta em Freqüência*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Militar de Engenharia - IME, Brasil, 2006.
- Oliveira e Silva, T. A. M. On the determination of the optimal pole position of laguerre filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*, v. 43, n. 9, p. 2079–2087, 1995a.

- Oliveira e Silva, T. A. M. Rational orthonormal functions on the unit circle and on the imaginary axis, with applications in system identification. Trabalho não Publicado disponível em : <http://www.ieeta.pt/tos/bib/8.2.html>. Oct 1995b.
- Oliveira, G. H. C.; Maestrelli, R.; Rocha, A. C. O. An application of orthonormal basis functions in power transformers wide band modeling. *IEEE International Conference on Control and Automation*, 2009.
- Oppenheim, A. V.; Willsky, A. S.; Nawab, S. H. *Signals & Systems*. 2. ed. [S.l.]: Prentice Hall, 1997.
- Partington, J. Approximation of delay systems by fourier-laguerre series. *Automatica*, n. 27, p. 569–572, 1991.
- Partington, J. R. Some frequency-domain approaches to the model reduction of delay systems. *Annual Reviews in Control*, v. 28, n. 1, p. 65–73, 2004.
- Pintelon, R. et al. Parametric identification of transfer functions in frequency domain - a survey. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 11, p. 2245–2260, November 1994.
- Pintelon, R.; Schoukens, J. *System Identification a Frequency Domain Approach*. New York: IEEE Press, 2001.
- Pintelon, R.; Schoukens, J.; Vandersteen, G. Frequency domain system identification using arbitrary signals. *IEEE Transactions on Automatic Control*, December 1997.
- Pleite, J. et al. A procedure to model the frequency response. *Proceedings of the 2002 ACM Symposium on Applied Computing*, ACM, p. 189–193, 2002.
- Powell, M. D. J. An efficient method for finding the minimum of a function of several variables without calculating derivatives. *Comput. J.*, v. 7, p. 155–162, 1964.
- Reginato, B. C. *Ambiente Computacional para Identificação de Sistemas nos Domínios do Tempo e da Frequência usando Bases de Funções Ortonormais Generalizadas*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná - PUCPR, Brasil, 2008.
- Reginato, B. C.; Oliveira, G. H. C. On selecting the mimo generalized orthonormal basis functions poles by using particle swarm optimization. In: *Proc. of the European Control Conference*. Kos, Greece: [s.n.], 2007a.
- Reginato, B. C.; Oliveira, G. H. C. Bases de funções ortonormais generalizadas na modelagem de componentes do sistema elétrico de potência. 2007b.
- Reginato, B. C.; Oliveira, G. H. C. Estudo de caso da modelagem de transformadores do sistema furnas usando bases ortonormais. In: *V WORKSPOT- INTERNATIONAL WORKSHOP ON POWER TRANSFORMERS*. Belém, PA, Brasil: [s.n.], 2008a.

- Reginato, B. C.; Oliveira, G. H. C. Algoritmo híbrido para seleção de pólos em modelos formados por bases de funções ortonormais generalizadas. In: *CBA 2008 - Congresso Brasileiro de Automática*. Juiz de Fora, MG, Brasil: [s.n.], 2008b.
- Rolain, Y. et al. Best conditioned parametric identification of transfer functions models in the frequency domain. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 40, n. 11, p. 1954–1960, 1995.
- Rolain, Y.; Schoukens, J.; Pintelon, R. Order estimation for linear time-invariant systems using frequency domain identification methods. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 10, p. 1408–1417, October 1997.
- Rudin, W. *Real and Complex Analysis*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1987.
- Sanathanan, C. K.; Koerner, J. Transfer function synthesis as a ratio of two complex polynomials. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-8, p. 56–58, January 1963.
- Schoukens, J.; Pintelon, R. *Identification of Linear Systems: A Practical Guideline to Accurate Modeling*. London: Pergamon Press, 1991.
- Takenaka, S. On orthogonal functions and a new formula of interpolation. *Jpn. J. Math.*, p. 129–145, 1925.
- Tanguy, N. et al. Pertinent choice of parameters for discrete kautz approximation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 47, n. 5, p. 783–787, May 2002.
- Valle, R. C. do. *Identificação de Sistemas Pré Seleccionados Via Imposição de Pólos*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Militar de Engenharia - IME, Brasil, 2005.
- Wahlberg, B.; Mäkilä, P. Approximation of stable linear dynamical systems using laguerre and kautz functions. *Automatica*, n. 32, p. 693–708, 1996.
- Wang, L.; Cluett, W. R. Optimal choice of time-scaling factor for linear system approximations using laguerre models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 7, p. 1463–1467, 1994.
- Wernholt, E.; Gunnarsson, S. *Nonlinear Grey-Box Identification of Industrial Robots Containing Flexibilities*. SE-581 83 Linköping, Sweden, Nov 2004.
- Westwick, D. T.; Kearney, R. E. *Identification of Nonlinear Physiological Systems*. [S.l.]: Wiley-IEEE Computer Society Pr, 2003.
- Weyer, E.; Gábor, S.; Katalin, H. Grey box fault detection of heat exchangers. *Control Engineering Practice*, v. 8, p. 121–131, 2000.
- Wills, A.; Ninness, B.; Gibson, S. Maximum likelihood estimation of state space models from frequency domain data. *European Control Conference*, 2007.

Wulhynek, S. *Identificação de Sistemas no Domínio da Freqüência Utilizando Conjunto Geradores Otimizados*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Militar de Engenharia - IME, Brasil, 2002.

Young, N. *An Introduction to Hilbert Space*. 1. ed. Cambridge,UK: Cambridge University Press, 1988.