

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**TÉCNICAS DE IDENTIFICAÇÃO DE AMORTECIMENTO
ESTRUTURAL**

Trabalho apresentado como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em
Engenharia Mecânica na Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Paulo Rogerio Novak

Curitiba, 29 de maio de 2003

TERMO DE APROVAÇÃO

PAULO ROGÉRIO NOVAK

“Técnicas de Identificação de Amortecimento Estrutural”

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, do Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Presidente: 
Prof. Dr. Nilson Barbieri (Orientador)
Curso de Engenharia Mecânica, (PUCPR).


Prof. Dr. Renato Barbieri (Co-orientador)
Curso de Engenharia Mecânica (PUCPR)


Prof. Dr. José Maria Campos dos Santos
Faculdade de Engenharia Mecânica (UNICAMP).


Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado
Curso de Engenharia Mecânica (PUCPR)

Curitiba, 29 de maio de 2003.

Resumo

Muitos pesquisadores estão trabalhando no desenvolvimento de técnicas de identificação de amortecimento estrutural. Geralmente essas técnicas são baseadas e testadas com simulações numéricas de modelos matemáticos e com a validação através de resultados experimentais.

Neste trabalho, é apresentado o estudo sobre algumas técnicas de identificação de amortecimento estrutural, dando ênfase na verificação da capacidade de identificação da matriz de amortecimento em sistemas mecânicos reais. As técnicas utilizadas foram: amortecimento proporcional generalizado (Adhikari, 2000), sistema com amortecimento viscoso levemente não-proporcional (Adhikari, 2000), Método Iterativo (Pilkey, 1998), e Método Direto (Pilkey, 1998). Os sistemas utilizados nos estudos de casos foram: sistema com dois graus de liberdade (duas rotações), sistema de placa engastada em uma extremidade e livre na outra, e sistema de cabos de linha de transmissão. Para cada sistema foram realizadas simulações numéricas e análise modal experimental. Foram aplicadas técnicas de identificação de parâmetros modais tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, para levantamento dos parâmetros físicos dos sistemas. Aplica-se uma técnica de redução de modelos conforme o número de pontos de dados coletados. Utilizando-se das técnicas de identificação de amortecimento estrutural ajusta-se a matriz reduzida de amortecimento do sistema.

Abstract

Many researchers are working in the development of techniques of identification of structural damping. Those techniques are usually based and tested in numeric simulations of mathematical models and validation through experimental results.

In this work, study is presented on some techniques of identification of structural damping, giving emphasis in the verification of the capacity of identification of a damping matrix in real mechanical systems. The used techniques were: generalized proportional damping (Adhikari, 2000), viscously damped system with light non-proportional damping (Adhikari, 2000), iterative method (Pilkey, 1998) and direct method (Pilkey, 1998). The systems used in the study of cases were: system with two degrees of freedom (two rotations), system of clamped plate in a extremity and free in the other, and system of transmission line cables. For each system numeric simulations and experimental modal analysis were accomplished. They were so much applied techniques of modal identification parameters in the time domain as in the frequency domain, for rising of the physical parameters of the systems. A technique of reduction of models is applied according to the number of collected points data. By using of the techniques of identification of structural damping the reduced damping matrix of the system is adjusted.

Agradecimentos

Aos meus Pais, por ajudarem a tornar meus sonhos realidade.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, ao coordenador Prof. PhD. João Elias Abdalla Filho, e principalmente ao meu orientador Prof. Dr. Nilson Barbieri e ao co-orientador Prof. Dr. Renato Barbieri, pelo apoio, suporte, idéias e confiança.

Aos meus Pais, Avó, irmãs, amigos e a todos os familiares que auxiliaram e apoiaram durante esses anos.

Aos funcionários dos laboratórios, biblioteca, e especialmente à secretária Jane, pela dedicação e empenho.

À CAPES pela bolsa de estudo concedida.

À PUC-PR pela oportunidade concedida.

Aos amigos e bolsistas do mestrado, à Fabiana e a todas as pessoas que de forma direta e indireta auxiliaram no desenvolvimento deste trabalho.

À Deus, por me dar forças e permitir que eu esteja ultrapassando mais um obstáculo em minha vida.

Sumário

Resumo	iii
Abstract	iv
Sumário	vi
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
Capítulo 1	
Introdução	1
Capítulo 2	
Desenvolvimento matemático	9
2.1 Técnicas de identificação de parâmetros modais	9
2.1.1 Método Exponencial Complexo	9
2.1.2 Método de Identificação de Ibrahim.....	15
2.1.3 Método da Fração Racional Polinomial.....	20
2.1.4 Método do Envelope de Hilbert	26
2.2 Técnicas de identificação de amortecimento estrutural.....	29
2.2.1 Amortecimento Proporcional Generalizado	29
2.2.2 Sistema com Amortecimento Viscoso Levemente Não Proporcional.....	32
2.2.3 Método Iterativo	37
2.2.4 Método Direto	39

Capítulo 3

Estudo de casos	41
3.1 Caso 1: Sistema com dois graus de liberdade.....	42
3.2 Caso 2: Placa engastada.....	48
3.3 Caso 3: Sistema de cabos de linhas de transmissão.....	52

Capítulo 4

Resultados e Discussões	58
4.1 Exemplo numérico utilizando dados analíticos.....	58
4.2 Caso 1: Sistema com dois graus de Liberdade.....	62
4.3 Caso 2: Placa Engastada.....	73
4.4 Caso 3: Sistema de cabos de linhas de transmissão.....	88

Capítulo 5

Conclusões e sugestões	102
-------------------------------	------------

Referências Bibliográficas	104
-----------------------------------	------------

Anexo A

Técnicas de redução de modelos	108
A.1 Redução Estática e Expansão	109
A.2 Sistema Reduzido Melhorado.....	110
A.3 Sistema Reduzido Melhorado Iterativo	111

Anexo B

Teoria de placa - modelo matemático	113
B.1 Teoria de Placa	113
B.2 Desenvolvimento do Elemento	116

Anexo C

Equipamentos	122
---------------------	------------

Lista de Figuras

Figura (2.1.4.1) - Procedimento para aplicar o método do envelope de Hilbert para múltiplos graus de liberdade.(a) MDOF FRF , (b) MDOF IRF, (c) Modo isolado, (d) IRF do modo isolado, (e) Envelope do modo isolado e (f) Envelope na escala de logaritmo natural.....	28
Figura (3.1.1) – Bancada com sistema de dois graus de liberdade.....	42
Figura (3.1.2) - Esquema da bancada com sistema de dois graus de liberdade.	43
Figura (3.1.3) - Sistema com dois graus de liberdade.....	44
Figura (3.2.1) - Bancada com placa engastada.	49
Figura (3.2.2) - Esquema da bancada com placa engastada.....	49
Figura (3.2.3) - Vista superior da placa engastada. Localização dos sensores em relação a origem. S1(0.31,0), S2(0.31,0.0975), S3(0.155,0.195) em metros.....	51
Figura (3.3.1) - Bancada para ensaios automatizados de cabos condutores.	52
Figura (3.3.2) - Esquema da bancada para ensaios automatizados de cabos condutores.	53
Figura (3.3.3) - Elemento de viga submetido a um esforço axial.....	55
Figura (4.1.1) - Curva do fator de amortecimento do exemplo.	59
Figura (4.2.1) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.....	63
Figura (4.2.2) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.....	64
Figura (4.2.3) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.....	66
Figura (4.2.4) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.....	67
Figura (4.2.5)- Curva do fator de amortecimento para o sistema de dois graus de liberdade.....	69

Figura (4.3.1) - Primeiro modo de vibrar($\omega_1 = 17.5785 \text{ Hz}$).	74
Figura (4.3.2) - Segundo modo de vibrar($\omega_2 = 63.6524 \text{ Hz}$).	74
Figura (4.3.3) - Terceiro modo de vibrar($\omega_3 = 109.0570 \text{ Hz}$).	75
Figura (4.3.4) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.....	76
Figura (4.3.5) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.....	77
Figura (4.3.6) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.....	79
Figura (4.3.7) - Curva do fator de amortecimento para a placa engastada.....	83
Figura (4.4.1) - Gráfico da FRF experimental e ajustado pelo RFP	88
Figura (4.4.2) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.....	89
Figura (4.4.3) - Gráfico da FRF experimental e ajustado pelo RFP.	90
Figura (4.4.4) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.....	91
Figura (4.4.5) - Gráfico da FRF experimental e ajustado pelo RFP	92
Figura (4.4.6) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.....	93
Figura (4.4.7) - Primeiro modo de vibrar do cabo	94
Figura (4.4.8) - Segundo modo de vibrar do cabo.....	95
Figura (4.4.9) - Terceiro modo de vibrar do cabo	95
Figura (B.1.1) – Sistema de referência para placa.	113
Figura (C.1) - Hewlett Packard (HP) Dynamic Signal Analyzer 3566/67	122
Figura (C.2) – Martelo de impacto	123
Figura (C.3) – Acelerômetro	123
Figura (C.4) – Sensor de proximidade.....	124

Lista de Tabelas

Tabela (4.1.1) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento proporcional generalizado.	60
Tabela (4.1.2) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento não proporcional.	60
Tabela (4.1.3) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método iterativo.	61
Tabela (4.1.4) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método direto.	62
Tabela (4.2.1) - Estimação dos parâmetros modais do primeiro modo de vibrar através de diferentes métodos.	63
Tabela (4.2.2) - Estimação dos parâmetros modais do primeiro modo de vibrar através de diferentes métodos.	64
Tabela (4.2.3) - Comparação da relação dos autovetores A_2 e A_1 teóricos, com os obtidos através das técnicas de identificação de parâmetros, referente ao primeiro modo de vibração.	65
Tabela (4.2.4) - Estimação dos parâmetros modais do segundo modo de vibrar através de diferentes métodos.	65
Tabela (4.2.5) - Estimação dos parâmetros modais do segundo modo de vibrar através de diferentes métodos.	66
Tabela (4.2.6) - Comparação da relação dos autovetores A_2 e A_1 teóricos, com os obtidos através das técnicas de identificação de parâmetros, referente ao segundo modo de vibração.	68

Tabela (4.2.7) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento proporcional generalizado.	70
Tabela (4.2.8)-Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento não proporcional.	71
Tabela (4.2.9) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método iterativo.	72
Tabela (4.2.10) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método direto.	73
Tabela (4.3.1) - Estimação dos parâmetros modais através de diferentes métodos.	75
Tabela (4.3.2) - Estimação dos parâmetros modais através de diferentes métodos.	76
Tabela (4.3.3) - Estimação dos parâmetros modais através de diferentes métodos.	78
Tabela (4.3.4) - Comparação dos resultados via FEM com os encontrados através do método de Ibrahim (ITD).	80
Tabela (4.3.5) - Comparação dos resultados via FEM com os encontrados através do método exponencial complexo (CEM).	80
Tabela (4.3.6) - Comparação dos resultados via FEM com os encontrados através do método fração racional polinomial (RFP).	81
Tabela (4.3.7) - Comparação dos resultados via FEM com os encontrados através do método de envelope de Hilbert (HEM).	81
Tabela (4.3.8) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento proporcional generalizado.	84
Tabela (4.3.9) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento não proporcional.	85
Tabela (4.3.10) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método iterativo.	86
Tabela (4.3.11) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método direto.	87
Tabela (4.4.1) - Estimação dos parâmetros modais através do método RFP para o primeiro ponto medido.	88

Tabela (4.4.2) - Estimacão dos parâmetros modais através do método RFP para o segundo ponto medido.....	89
Tabela (4.4.3) - Estimacão dos parâmetros modais através do método RFP para o terceiro ponto medido.....	91
Tabela (4.4.4) - Comparaco dos resultados via FEM com os encontrados experimentalmente através do método fraco polinomial (RFP).....	94
Tabela (4.4.5) - Comparaco dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento proporcional generalizado.....	98
Tabela (4.4.6) - Comparaco dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento não proporcional.....	99
Tabela (4.4.7) - Comparaco dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método iterativo.....	100
Tabela (4.4.8) - Comparaco dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método direto.....	101

Capítulo 1

Introdução

A correlação entre dados analíticos e resultados experimentais apresenta dificuldades inerentes na obtenção dos mesmos. Quando testes de vibração são conduzidos, várias fontes de erros podem estar presentes: calibração incorreta dos equipamentos, ruído excessivo, equipamentos danificados, interpretação incorreta dos dados, localização incorreta do transdutor, etc. Modelos numéricos de elementos finitos podem também conter erros: conceitos incorretos de modelagem, incertezas nas propriedades dos materiais, detalhes insuficientes de modelagem, condições de contorno incorretas, etc. Quando os resultados numéricos são diferentes dos dados experimentais, o modelo de elemento finito deve ser corrigido ou realimentado de tal forma que haja uma concordância entre os valores analíticos e experimentais. Desta forma, a realimentação de modelos pode ser considerada como a melhor representação dinâmica de uma estrutura. As correções dos modelos matemáticos são feitas através do processamento de dados de testes estruturais e comparado com os valores obtidos computacionalmente.

Friswell, Garvey e Penny (1995, 1998), utilizaram um método de realimentação para sistemas reduzidos (IRS- Improved Reduced System) que permite estimar com maior precisão parâmetros modais de um sistema completo. A redução do modelo é feita através de procedimentos dinâmicos. Um processo iterativo permite a convergência para um modelo reduzido que reproduz um conjunto modal do sistema

completo. Esse procedimento é baseado em um sistema de equações particionadas conforme os sinais medidos e os sinais não medidos, ou seja:

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

onde: M é a matriz de inércia, K é a matriz de rigidez, x é o vetor deslocamento, f é o vetor excitação, m são os pontos nodais medidos e s são os pontos nodais não medidos.

Na aplicação de modelos reduzidos, um fator limitante, é o procedimento adequado para descrever a matriz de amortecimento do sistema. Neste sentido, Pilkey (1998), descreve dois tipos de procedimentos, direto e iterativo, para computação da matriz de amortecimento C de um sistema qualquer.

- Procedimento iterativo: conhecendo-se as matrizes de inércia M , autovalores Λ (formada pelos autovalores λ) e autovetores Φ (formada pelos autovetores ϕ). O procedimento inicia-se com uma matriz de amortecimento inicial e vai sendo realimentada até atingir a convergência:

$$\phi_i^T (2[M]\lambda_i + [C_{m-1}])\phi_i = 1 \quad (\text{normalização dos autovetores}) \quad (1.2)$$

$$[C_m] = -[M] \left([\Phi][\Lambda]^2[\Phi]^T + [\bar{\Phi}][\bar{\Lambda}]^2[\bar{\Phi}]^* \right) [M] \quad (\text{ajuste da matriz } C) \quad (1.3)$$

- Procedimento direto: conhecendo-se as matrizes de inércia M , autovalores Λ (formada pelos autovalores λ) e autovetores Φ (formada pelos autovetores ϕ) e matriz de rigidez K .

$$\phi_i^T ([M]\lambda_i^2 - [K])\phi_i = \lambda_i \quad (1.4)$$

$$[C_m] = -[M] \left([\Phi][\Lambda]^2[\Phi]^T + [\bar{\Phi}][\bar{\Lambda}]^2[\bar{\Phi}]^* \right) [M] \quad (1.5)$$

onde os símbolos (sobrescritos) representam: T matriz transposta, $-$ matriz complexa conjugada e $*$ matriz complexa conjugada transposta.

O ajuste é feito através de matrizes reduzidas, obtidas pelo método IRS Friswell et al (1995, 1998) e uma matriz modal contendo os graus de liberdade onde são obtidos valores experimentais.

Adhikari (2000), desenvolve algumas técnicas para a análise e identificação de amortecimento em sistemas estruturais. Uma delas usa-se os fatores de amortecimento e as frequências naturais correspondentes para estimar uma função de forma:

$$\xi(\omega) = \sum_{j=1}^N a_{j-1} \omega^{j-1} \quad (1.6)$$

onde N é o número de fatores de amortecimento (ξ_i) e frequências naturais (ω_i) conhecidas.

Escrevendo os fatores de amortecimento em função das frequências naturais e substituindo ω_i^2 por $[M]^{-1}[K]$, têm-se:

$$[C] = 2[M] \sqrt{[M]^{-1}[K]} \times \left(a_0 [I] + \sum_{j=2}^N a_{j-1} \left(\sqrt{[M]^{-1}[K]} \right)^{j-1} \right) \quad (1.7)$$

Outra técnica estudada por Adhikari (2000), necessita-se apenas das frequências naturais e os modos de vibrar complexos para identificar a matriz amortecimento:

$$\lambda_j \approx \pm \omega_j + \frac{iC'_{jj}}{2} \quad (1.8)$$

$$\hat{z}_j = \hat{u}_j + i \hat{v}_j \quad (1.9)$$

$$C = \left[(\hat{U}^T \hat{U})^{-1} \hat{U}^T \right]^T C' \left[(\hat{U}^T \hat{U})^{-1} \hat{U}^T \right] \quad (1.10)$$

Onde: λ_j é a frequência natural complexa, \hat{z}_j os modos de vibrar complexos, $\hat{U} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_m] \in \Re^{N \times m}$ (parte real dos autovetores), $\hat{V} = [\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_m] \in \Im^{N \times m}$ (parte imaginária dos autovetores) e C' é a matriz de amortecimento nas coordenadas modais

Para validação dos modelos existe a necessidade do ajuste de parâmetros modais.

Iglesias (2000), utiliza várias técnicas de extração de parâmetros modais: Complex Exponential Method (CEM), Ibrahim Time Domain (ITD), Rational Fraction Polynomial Method (RFPM) e Hilbert Envelope Method (HEM), para estimar o fator de amortecimento de sistemas mecânicos.

Normalmente na realimentação de modelos são usados conjuntos incompletos de modos experimentais. Devido a uma limitação física relativa a quantidade de sensores e posição de fixação, os dados experimentais são limitados a poucos pontos. Esta limitação acaba por inserir erros aos sistemas. Estes erros podem modificar as características do sistema. Para tentar reduzir os efeitos de uma medição imprecisa, a escolha dos pontos de colocação dos sensores é de fundamental importância.

Adhikari e Woodhouse (2001a, 2001b) considerando um sistema levemente amortecido e utilizando os modos de vibrar complexos e as frequências naturais complexas, apresentam uma metodologia para obter a matriz de amortecimento viscoso (não-proporcional) e a matriz de amortecimento não-viscoso.

Adhikari e Woodhouse (2001c), apresentam uma metodologia para identificação da matriz amortecimento preservando a simetria, o que não acontece em Adhikari e Woodhouse (2001a, 2001b). Essa metodologia é baseada na minimização do erro via mínimos quadrados. Os resultados mostram-se razoavelmente bons e com a preservação da simetria na matriz amortecimento.

Reynier e Abou-Kandil (1999), propõem dois métodos para determinar a melhor localização de sensores. O primeiro método baseia-se na minimização do ruído, no qual são estimadas as coordenadas modais através de mínimos quadrados. O segundo método é baseado em observações, neste caso o menor autovetor observado

contém pouca informação. Os dois métodos permitem obter uma redução significativa no número de sensores através da otimização da colocação dos mesmos, analisando-se os pontos mais suscetíveis a erros.

Mottershead e Friswell (1993), apresentam uma revisão bem consistente a respeito de realimentação de modelos matemáticos obtidos através do Método de Elementos Finitos (MEF) e dados experimentais obtidos através da colocação de sensores no sistema em análise. As correções dos modelos matemáticos são feitas através do processamento de dados de testes estruturais e comparação com os valores obtidos computacionalmente. Na opinião dos autores, as técnicas mais promissoras ainda necessitam serem testadas em meio industrial.

Friswell, Inman e Pilkey (1998), apresentam um método direto de realimentação baseado em dados modais medidos. Nesse método assume-se que a matriz massa é correta e as matrizes de amortecimento e rigidez são realimentadas simultaneamente, de tal forma que o modelo realimentado reproduz os dados modais medido.

Cha e Gu (2000), apresentam um novo algoritmo de realimentação que utiliza as frequências naturais medidas e os modos de vibrar para realimentar as matrizes de massa e rigidez da estrutura. Esse novo algoritmo mostrou-se hábil e apresentou resultados precisos para realimentação de modelos de elementos finitos com dados experimentais.

Lamarque, Pernot and Cueur (2000), apresentam uma fórmula baseada em ondas (wavelet-based) que é semelhante a fórmula de decremento logarítmico para estimar o fator de amortecimento de respostas no domínio do tempo. As comparações entre valores teóricos e numéricos apresentam excelentes resultados, quando a relação sinal-ruído é baixa.

Dalenbring (1999), propõe um método para estimar o amortecimento baseado no modelo de receptância modal, funções de amortecimento do material, e das funções resposta frequência medidas experimentalmente. Esse método foi aplicado em duas placas. A comparação entre os dados medidos e a FRF calculada, usando o método de elementos finitos apresentou bons resultados, com respeito as frequências de ressonâncias e aos valores de amplitude.

Prells e Friswell (2000), investigaram a diferença entre os modelos de amortecimento viscoso (não proporcional) e proporcional.

Baruch (1998), apresenta dois métodos para descobrir falha (damage) em estruturas usando modelos reduzidos. O método de aproximação estática mostrou-se muito eficiente e ocasionalmente melhor que a aproximação dinâmica.

Friswell, Penny e Garvey (1996), apresentam uma comparação entre os métodos Improved Reduction System (IRS), Reduction to Modal Co-ordinates e Reduction Via a Balanced Realisation, utilizados na redução de modelos. Todos os métodos obtiveram resultados aceitáveis, mas o que obteve maior precisão foi o IRS.

Lee e Kim (2001), apresentam um método melhorado para identificar o amortecimento característico de um sistema dinâmico, através das funções respostas frequência medidas. O método foi testado em uma viga fina com dois valores de amortecimento. Os resultados mostram precisão em sistemas reais se o nível de ruído presente na FRF for menor ou igual a relação de amortecimento equivalente.

Ruotolo e Storer (2001), descrevem um método de análise modal geralmente utilizado em sistemas com alta densidade modal chamada técnica suavizadora global (GST – Global Smoothing Technique) que utiliza a função resposta frequência medida. Os autores utilizaram este método na análise modal de carros.

Liu (1996), apresenta um método para estimação dos parâmetros modais (State Space Method). Esse método é baseado no modelo de decomposição de valores singulares (SVD – Singular Value Decomposition) para formar uma matriz de dados bem condicionados e obter os parâmetros modais pela autodecomposição da matriz de dados. O desempenho do método é bem superior aos que utilizam o algoritmo de Prony, pois possui resposta computacional mais rápida e é menos sensível a ruídos.

Bosse, Tasker e Fisher (1998), descrevem a teoria e a execução de hardware de um algoritmo desenvolvido para a identificação dos parâmetros modais online. Esse Método captura o comportamento da estrutura em tempo real e exibe as frequências e os fatores de amortecimento do sistema.

Richardson e Formenti (1982), propõem ajustar frações racionais aos dados de uma função resposta frequência e para resolução do sistema de equações utilizam o conceito de polinômios ortogonais de meias funções, sendo que as meias funções são geradas usando o método de Forsythe.

Grafe (1998), apresenta um estudo sobre o método de realimentação de modelos baseado em função resposta em frequência e identifica suas limitações.

Rad (1997), apresenta um excelente material sobre realimentação de modelos, o qual descreve e avalia os principais métodos utilizados na realimentação de modelos numéricos de estruturas dinâmicas.

Lee e Park (1994), propõem o uso do Hilbert Envelope Method (HEM), para extração de parâmetros modais (frequências naturais, resíduos e fator de amortecimento) em sistemas com múltiplos graus de liberdade, especialmente no caso onde ocorre alta densidade modal o que conduziria a grandes erros em outros métodos.

Pena (1996), apresenta um estudo sobre os principais métodos para obtenção de parâmetros modais tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, sendo comparadas às vantagens e desvantagens existentes em cada um.

Borges (2001), apresenta um estudo e implementação de métodos de ajuste de modelos baseados em FRFs medidas, cujas variáveis a serem ajustadas são os parâmetros físicos e/ou geométricos.

Barbieri et al (2003a), apresentam um estudo teórico e experimental sobre o comportamento dinâmico de cabos de linhas de transmissão. O método das frações racionais polinomiais (RFP) foi usado para a identificação dos parâmetros modais, em seguida através de modelos reduzidos foi estimada a matriz de amortecimento estrutural.

Barbieri et al (2003b), estabelecem um procedimento para identificação de amortecimento em cabos de linhas de transmissão calculando de um modo simples a matriz de amortecimento do sistema. Os autores utilizaram procedimentos diferentes para a identificação da matriz amortecimento, os quais obtiveram bons resultados.

Esta dissertação tem como objetivo a aplicação das técnicas de identificação de matriz de amortecimento estrutural em sistemas mecânicos. Ela é composta de cinco capítulos listados a seguir com seus respectivos títulos e temas abordados.

Capítulo 1 - Introdução

Capítulo 2 – Desenvolvimento matemático

Neste capítulo serão abordados os principais métodos de identificação de parâmetros modais (no domínio do tempo e no domínio da frequência), técnicas de identificação de amortecimento estrutural.

Capítulo 3 – Estudo de casos

São apresentados os materiais e procedimentos usados para determinação dos modelos teóricos e experimentais, dos três estudos de caso: (1) Sistema com dois graus de liberdade, (2) Placa engastada e (3) Sistema de cabos de linhas de transmissão.

Capítulo 4 – Resultados e discussões

Nesse capítulo serão mostrados os resultados e discussões dos estudos de casos.

Capítulo 5 – Conclusões e sugestões

Capítulo 2

Desenvolvimento matemático

2.1 Técnicas de identificação de parâmetros modais

2.1.1 Método Exponencial Complexo

No domínio de frequência, a função resposta em frequência (FRF) em termos da receptância H_{jk} (deslocamento do ponto j devido a uma força aplicada no ponto k) para um sistema linear, com amortecimento viscoso e com N graus de liberdade (DOF) pode ser dada por:

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^N \left(\frac{{}_r A_{jk}}{\omega_r \xi_r + i(\omega - \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2})} + \frac{{}_r A_{jk}^*}{\omega_r \xi_r + i(\omega + \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2})} \right) \quad (2.1.1.1)$$

onde ω_r é a frequência natural, ξ_r é a razão de amortecimento e ${}_r A_{jk}$ é o resíduo que corresponde a cada modo r e $*$ denota complexo conjugado. Outro modo de escrever equação (2.1.1.1) é:

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{r A_{jk}}{\omega_r \xi_r + i(\omega - \omega_r')} \quad (2.1.1.2)$$

onde:

$$\omega_r' = \omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2}$$

$$\omega_{r+N}' = -\omega_r' \quad (2.1.1.3)$$

$${}_{r+N} A_{jk} = {}_r A_{jk}^*$$

O método exponencial complexo foi um dos primeiros métodos propostos para estimação simultânea de parâmetros modais de sistemas com vários graus de liberdade que utiliza dados no domínio do tempo. Informações complementares sobre esse método podem ser vistas em Ewins (1984), Iglesias (2000) e Pena (1996).

A equação (2.1.1.4) representa a resposta de uma estrutura submetida a uma excitação impulsiva ou obtida por meio de uma transformada inversa de Fourier aplicada a uma função resposta em frequência (FRF):

$$h_{jk}(t) = \sum_{r=1}^{2N} {}_r A_{jk} e^{s_r t} \quad (2.1.1.4)$$

ou

$$h(t) = \sum_{r=1}^{2N} A_r' e^{s_r t} \quad (2.1.1.5)$$

Onde $s_r = -\omega_r \xi_r + i\omega_r'$ e N é o número de graus de liberdade do modelo.

Observa-se na equação (2.1.1.4) que a resposta no tempo $h(t)$, é dada pela soma das contribuições de cada modo próprio de vibrar.

Se a FRF é obtida para um número de pontos de frequência igualmente espaçados, a função resposta ao impulso será descrita por um conjunto de valores “ h_i ”, espaçados por um intervalo de tempo Δt :

$$\begin{aligned}
 h_0 &= h(0) = \sum_{r=1}^{2N} A_r' \\
 h_1 &= h(\Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} A_r' e^{s_r(\Delta t)} \\
 h_2 &= h(2 \cdot \Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} A_r' e^{s_r(2 \cdot \Delta t)} \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 h_L &= h(L \cdot \Delta t) = \sum_{r=1}^{2N} A_r' e^{s_r(L \cdot \Delta t)}
 \end{aligned} \tag{2.1.1.6}$$

Ou pode-se usar uma notação abreviada, representada como:

$$\begin{aligned}
 h_0 &= \sum_{r=1}^{2N} A_r' \\
 h_1 &= \sum_{r=1}^{2N} A_r' V_r \\
 h_2 &= \sum_{r=1}^{2N} A_r' V_r^2 \\
 &\vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 h_L &= \sum_{r=1}^{2N} A_r' V_r^L
 \end{aligned} \tag{2.1.1.7}$$

com

$$V_r = e^{s_r \Delta t} \tag{2.1.1.8}$$

Considerando a equação (2.1.1.7) para um conjunto de dados com “ L ” amostras:

$$\begin{cases} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_L \end{cases} = \begin{cases} A_1' + A_2' + \cdots + A_{2N}' \\ V_1 A_1' + V_2 A_2' + \cdots + V_{2N} A_{2N}' \\ V_1^2 A_1' + V_2^2 A_2' + \cdots + V_{2N}^2 A_{2N}' \\ \vdots \\ V_1^L A_1' + V_2^L A_2' + \cdots + V_{2N}^L A_{2N}' \end{cases} \quad (2.1.1.9)$$

A equação (2.1.1.9) pode ser usada para montar um problema de autovalores, desde que "L" exceda 4N, cuja solução fornecerá as frequências naturais do modelo.

Os valores de h_i são conhecidos, mas os valores de A_r' e V_r não. As raízes de s_r para um sistema subamortecido sempre ocorrem em pares complexo conjugados, podendo-se modificar a variável V_r . Sempre existe um polinômio em V_r de ordem L com coeficientes reais β (chamados coeficientes autoregressivos) tal que:

$$\beta_0 + \beta_1 V_r + \beta_2 V_r^2 + \cdots + \beta_L V_r^L = 0 \quad (2.1.1.10)$$

Pode-se reescrever a equação (2.1.1.10) como:

$$\sum_{j=0}^{2N} \beta_j V_r^j = 0 \quad (2.1.1.11)$$

Para determinar os valores dos coeficientes β , e determinar V_r , multiplica-se cada linha de ambos os lados da equação (2.1.1.9) pelo coeficiente β_i , $i = 0, \dots, L$, resultando:

$$\begin{cases} \beta_0 h_0 \\ \beta_1 h_1 \\ \beta_2 h_2 \\ \vdots \\ \beta_L h_L \end{cases} = \begin{cases} \beta_0 A_1' + \beta_0 A_2' + \cdots + \beta_0 A_{2N}' \\ \beta_1 V_1 A_1' + \beta_1 V_2 A_2' + \cdots + \beta_1 V_{2N} A_{2N}' \\ \beta_2 V_1^2 A_1' + \beta_2 V_2^2 A_2' + \cdots + \beta_2 V_{2N}^2 A_{2N}' \\ \vdots \\ \beta_{2N} V_1^L A_1' + \beta_{2N} V_2^L A_2' + \cdots + \beta_{2N} V_{2N}^L A_{2N}' \end{cases} \quad (2.1.1.12)$$

Somando todas as linhas da equação (2.1.1.12), obtém-se:

$$\sum_{j=0}^L \beta_j \cdot h_j = \sum_{j=0}^{2N} \left(\beta_j \cdot \sum_{r=1}^L A_r' \cdot V_r^j \right) = \sum_{r=1}^{2N} \left(A_r' \cdot \sum_{j=0}^L \beta_j \cdot V_r^j \right) \quad (2.1.1.13)$$

Nota-se que o somatório interno do lado direito da equação (2.1.1.13) é exatamente igual a equação (2.1.1.11) que é nula, logo:

$$\sum_{j=0}^L \beta_j \cdot h_j = 0 \quad (2.1.1.14)$$

Através da equação (2.1.1.14) pode-se calcular os valores dos coeficientes β pois h_j é medido. Estes coeficientes são usados para calcular as raízes V_r da equação (2.1.1.10). Estas raízes são calculadas fazendo-se $M = L/2$, e $n = DOF + 1$. Com n conjuntos de dados h_j (colunas da matriz contida na equação (2.1.1.15)), cada conjunto modificado por um intervalo de tempo Δt , e assumindo β_L igual a 1, têm-se:

$$\begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & \cdots & h_{n-1} \\ h_1 & h_2 & h_3 & \cdots & h_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M-1} & h_M & h_{M+1} & \cdots & h_{n+M-2} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} h_n \\ h_{n+1} \\ \vdots \\ h_{n+M-1} \end{Bmatrix} \quad (2.1.1.15)$$

Este sistema na forma compacta pode ser representado por:

$$\underset{M \times n}{[h]} \underset{n \times 1}{\{\beta\}} = \underset{M \times 1}{\{h'\}} \quad (2.1.1.16)$$

Desta equação, como $[h]$ e $\{h'\}$ são conhecidos, é possível calcular $\{\beta\}$. Para um conjunto de dados, onde o número de equações é superior ao número de incógnitas,

na forma da equação (2.1.1.16), a melhor estimativa de $\{\beta\}$ pode ser obtida pelo método dos mínimos quadrados.

$$\{\beta\} = ([h]^T [h])^{-1} ([h]^T \{h\}) \quad (2.1.1.17)$$

Após determinados os valores dos coeficientes $\{\beta\}$, passa-se à solução da equação polinomial dada pela equação (2.1.1.10), para encontrar as raízes V_r . Assim, para determinar as frequências naturais e a razão de amortecimento emprega-se a equação (2.1.1.8), como segue:

$$R_r = \ln(V_r) = s_r \cdot \Delta t$$

$$f_r = \frac{|R_r|}{2\pi \cdot \Delta t} \quad (2.1.1.18)$$

$$\xi_r = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{Imag}(R_r)}{\text{Real}(R_r)}\right)^2}}$$

Com os valores de V_r , pode-se calcular os resíduos A_r' escrevendo a equação (2.1.1.7) na forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ V_1 & V_2 & \dots & V_{2N} \\ V_1^2 & V_2^2 & \dots & V_{2N}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_1^{2N-1} & V_2^{2N-1} & \dots & V_{2N}^{2N-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1' \\ A_2' \\ A_3' \\ \vdots \\ A_{2N}' \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_{2N} \end{Bmatrix} \quad (2.1.1.19)$$

2.1.2 Método de Identificação de Ibrahim

Informação complementar sobre este método pode ser obtido em Ewins (1984) e Iglesias (2000). A equação do movimento livre de um sistema mecânico pode ser representada por:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = 0 \quad (2.1.2.1)$$

Como no método exponencial complexo, assume-se que a solução dessa equação é:

$$\{x\} = \{pe^{st}\} \quad (2.1.2.2)$$

Então

$$[s^2[M] + s[C] + [K]]p = 0 \quad (2.1.2.3)$$

Para um sistema subamortecido, as raízes s_r da equação (2.1.2.3) são complexas e ocorrem em pares conjugados como,

$$s_r = a_r \pm ib_r = -\xi_r \omega_r \pm i\omega_r \sqrt{1 - \xi_r^2} \quad (2.1.2.4)$$

onde ξ_r é a razão de amortecimento, e ω_r é a frequência natural em radianos por segundos correspondente ao modo r .

Para um sistema com N graus de liberdade a resposta no ponto i e tempo t_j pode ser expressa como o somatório das respostas individuais de cada modo.

$$x_i(t_j) = \sum_{r=1}^{2N} p_{ir} e^{s_r t_j} \quad (2.1.2.5)$$

onde p_{ir} é o i -ésimo componente do autovetor $\{p_r\}$.

Considerando-se medições realizadas em “ L ” instante de tempos diferentes, pode-se expressar a resposta medida na forma matricial como:

$$\{x(t_1) \quad x(t_2) \quad \dots \quad x(t_L)\} = \{p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_{2N}\} \begin{bmatrix} e^{s_1 t_1} & e^{s_1 t_2} & \dots & e^{s_1 t_L} \\ e^{s_2 t_1} & e^{s_2 t_2} & \dots & e^{s_2 t_L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{s_{2N} t_1} & e^{s_{2N} t_2} & \dots & e^{s_{2N} t_L} \end{bmatrix} \quad (2.1.2.6)$$

ou

$$\{X_0\} = \{P\} [A] \quad (2.1.2.7)$$

$1 \times L$ $1 \times 2N$ $2N \times L$

As respostas que ocorrem após a um intervalo de tempo (Δt) em relação ao primeiro tempo mostrado na equação (2.1.2.6), serão expressas por:

$$\{x(t_1 + \Delta t) \quad \dots \quad x(t_L + \Delta t)\} = \{p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_{2N}\} \begin{bmatrix} e^{s_1(t_1 + \Delta t)} & e^{s_1(t_2 + \Delta t)} & \dots & e^{s_1(t_L + \Delta t)} \\ e^{s_2(t_1 + \Delta t)} & e^{s_2(t_2 + \Delta t)} & \dots & e^{s_2(t_L + \Delta t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{s_{2N}(t_1 + \Delta t)} & e^{s_{2N}(t_2 + \Delta t)} & \dots & e^{s_{2N}(t_L + \Delta t)} \end{bmatrix} \quad (2.1.2.8)$$

$$= \{p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_{2N}\} \begin{bmatrix} e^{s_1 \Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{s_2 \Delta t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{s_{2N} \Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s_1 t_1} & e^{s_1 t_2} & \dots & e^{s_1 t_L} \\ e^{s_2 t_1} & e^{s_2 t_2} & \dots & e^{s_2 t_L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{s_{2N} t_1} & e^{s_{2N} t_2} & \dots & e^{s_{2N} t_L} \end{bmatrix}$$

ou

$$\{X_1\} = \{P\} [\hat{A}] [A] \quad (2.1.2.9)$$

$1 \times L$ $1 \times 2N$ $2N \times 2N$ $2N \times L$

Do mesmo modo, as respostas que ocorrem após dois intervalos de tempo ($2\Delta t$) em relação ao primeiro tempo mostrado na equação (2.1.2.6), serão expressas por:

$$\begin{aligned}
 & \{x(t_1 + 2\Delta t) \quad \dots \quad x(t_L + 2\Delta t)\} \\
 &= \{p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_{2N}\} \begin{bmatrix} e^{s_1(t_1+2\Delta t)} & e^{s_1(t_2+2\Delta t)} & \dots & e^{s_1(t_L+2\Delta t)} \\ e^{s_2(t_1+2\Delta t)} & e^{s_2(t_2+2\Delta t)} & \dots & e^{s_2(t_L+2\Delta t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{s_{2N}(t_1+2\Delta t)} & e^{s_{2N}(t_2+2\Delta t)} & \dots & e^{s_{2N}(t_L+2\Delta t)} \end{bmatrix} \\
 &= \{p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_{2N}\} \begin{bmatrix} e^{s_1 2\Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{s_2 2\Delta t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{s_{2N} 2\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s_1 t_1} & e^{s_1 t_2} & \dots & e^{s_1 t_L} \\ e^{s_2 t_1} & e^{s_2 t_2} & \dots & e^{s_2 t_L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{s_{2N} t_1} & e^{s_{2N} t_2} & \dots & e^{s_{2N} t_L} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.1.2.10}$$

ou

$$\{X_2\} = \{P\} [\hat{\Lambda}]^2 [\Lambda]$$

$\begin{matrix} 1 \times L & 1 \times 2N & 2N \times 2N & 2N \times L \end{matrix}$

(2.1.2.11)

Assim, as respostas que ocorrem após m intervalos de tempo ($m \cdot \Delta t$) em relação ao primeiro tempo mostrado na equação(2.1.2.6), podem ser representadas por:

$$\begin{aligned}
 & \{x(t_1 + m.\Delta t) \quad \dots \quad x(t_L + m.\Delta t)\} \\
 &= \{p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_{2N}\} \begin{bmatrix} e^{s_1(t_1+m.\Delta t)} & e^{s_1(t_2+m.\Delta t)} & \dots & e^{s_1(t_L+m.\Delta t)} \\ e^{s_2(t_1+m.\Delta t)} & e^{s_2(t_2+m.\Delta t)} & \dots & e^{s_2(t_L+m.\Delta t)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{s_{2N}(t_1+m.\Delta t)} & e^{s_{2N}(t_2+m.\Delta t)} & \dots & e^{s_{2N}(t_L+m.\Delta t)} \end{bmatrix} \\
 &= \{p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_{2N}\} \begin{bmatrix} e^{s_1 m.\Delta t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{s_2 m.\Delta t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{s_{2N} m.\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{s_1 t_1} & e^{s_1 t_2} & \dots & e^{s_1 t_L} \\ e^{s_2 t_1} & e^{s_2 t_2} & \dots & e^{s_2 t_L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{s_{2N} t_1} & e^{s_{2N} t_2} & \dots & e^{s_{2N} t_L} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.1.2.12}$$

ou

$$\{X_m\} = \{P\} [\hat{\Lambda}]^m [\Lambda]$$

$\begin{matrix} 1 \times L & 1 \times 2N & 2N \times 2N & 2N \times L \end{matrix}$

(2.1.2.13)

As respostas dadas pelas equações (2.1.2.6), (2.1.2.8), (2.1.2.10) e (2.1.2.12) podem ser manipuladas para montar um problema de autovetores e autovalores. Agrupam-se as respostas para m medições em duas matrizes:

$$\begin{bmatrix} \{X_0\} \\ \{X_1\} \\ \{X_2\} \\ \vdots \\ \{X_{m-1}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ P\hat{\Lambda} \\ P\hat{\Lambda}^2 \\ \vdots \\ P\hat{\Lambda}^{m-1} \end{bmatrix} \Lambda \quad (2.1.2.14)$$

ou na forma resumida

$$\begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix}_{mxL} = \begin{bmatrix} \Psi \end{bmatrix}_{mxL} \begin{bmatrix} \Lambda \end{bmatrix}_{2NxL} \quad (2.1.2.15)$$

e

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi} \end{bmatrix}_{mxL} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P\hat{\Lambda} \\ P\hat{\Lambda}^2 \\ P\hat{\Lambda}^3 \\ \vdots \\ P\hat{\Lambda}^m \end{bmatrix} \Lambda \quad (2.1.2.16)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi} \end{bmatrix}_{mxL} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi} \end{bmatrix}_{mxL} \begin{bmatrix} \Lambda \end{bmatrix}_{2NxL} = \begin{bmatrix} \Psi \end{bmatrix}_{mxL} \begin{bmatrix} \hat{\Lambda} \end{bmatrix}_{2Nx2N} \begin{bmatrix} \Lambda \end{bmatrix}_{2NxL} \quad (2.1.2.17)$$

As equações (2.1.2.14) e (2.1.2.16) são manipuladas visando eliminar $[\Lambda]$

$$\begin{bmatrix} \hat{\Phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\Psi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi \end{bmatrix} \quad (2.1.2.18)$$

É definida um matriz quadrada $[A_s]$

$$[A_s] = [\hat{\Psi}]^{-1} [\Psi] \quad (2.1.2.19)$$

Substituindo a equação (2.1.2.19) na equação (2.1.2.18)

$$[A_s] [\Phi] = [\hat{\Phi}] \quad (2.1.2.20)$$

A melhor estimativa de $[A_s]$ pode ser obtida pelo método dos mínimos quadrados (Ewins, 1984), resultando em duas expressões, que são:

$$[A_s] = \left([\hat{\Phi}] [\hat{\Phi}]^T \right) \left([\Phi] [\hat{\Phi}]^T \right)^{-1} \quad (2.1.2.21)$$

$$[A_s] = \left([\hat{\Phi}] [\Phi]^T \right) \left([\Phi] [\Phi]^T \right)^{-1}$$

Para se ter uma melhor estimativa dos fatores de amortecimento, utiliza-se uma combinação da equação (2.1.2.21), que é conhecida como mínimos quadrados duplos (DLS):

$$[A_s] = \frac{1}{2} \left[\left([\hat{\Phi}] [\hat{\Phi}]^T \right) \left([\Phi] [\hat{\Phi}]^T \right)^{-1} + \left([\hat{\Phi}] [\Phi]^T \right) \left([\Phi] [\Phi]^T \right)^{-1} \right] \quad (2.1.2.22)$$

Das equações (2.1.2.15) e (2.1.2.17), tem-se:

$$[A_s] [\Psi] - [\Psi] [\hat{\Lambda}] = 0 \quad (2.1.2.23)$$

Esta equação pode ser escrita para cada vetor coluna $[\Psi_r]$ de $[\Psi]$, como segue:

$$[[A_s][\Psi_r] - e^{s_r \Delta t} [\Psi_r]] = 0 \quad (2.1.2.24)$$

$$[[A_s] - e^{s_r \Delta t} [I]][\Psi_r] = 0 \quad (2.1.2.25)$$

Após o cálculo de $[A_s]$ na equação (2.1.2.22), resolve-se a equação (2.1.2.25), a qual resulta em m autovalores e autovetores.

As raízes da equação (2.1.2.3), $s_r = a_r \pm ib_r$, são usados para calcular os fatores de amortecimento e as frequências naturais.

$$e^{(a+ib)\Delta t} = V_r \quad (2.1.2.26)$$

Assim,

$$\begin{aligned} R_r &= \ln(V_r) \\ f_r &= \frac{|R_r|}{2\pi \Delta t} \\ \xi_r &= \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\text{Im}ag(R_r)}{\text{Re}al(R_r)}\right)^2}} \end{aligned} \quad (2.1.2.27)$$

Com os valores de V_r , substituindo na equação (2.1.1.7) e substituindo $h(t)$ por $x(t)$, calculam-se os resíduos.

2.1.3 Método da Fração Racional Polinomial

Este método é empregado no domínio de frequência. A formulação do FRF é expressa na forma de fração racional em vez da forma de fração parcial, a função de erro é de certo modo estabelecida a fim de que o sistema resultante de equações seja linear. O sistema linear resultante das equações envolve matrizes que estão mal condicionadas, o método de gradiente é usado para minimizar esta função de erro e a estimativa inicial é calculada usando o método de mínimos quadrados.

Algumas derivações desse método pode ser obtidas com mais detalhes em Maia (1988), Richardson e Formenti (1982), Iglesias (2000) e Pena (1996).

A FRF, em termos da receptância, para um sistema linear com N graus de liberdade e amortecimento viscoso pode ser obtida com a equação de fração parcial:

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_r + i\omega B_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + i2\xi_r \omega_r \omega} \quad (2.1.3.1)$$

onde A_r e B_r são constantes.

Esta equação também pode ser expressa na forma de frações racionais:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^{2N} b_k (i\omega)^k} \quad (2.1.3.2)$$

A equação (2.1.3.2) representa simplesmente a relação entre dois polinômios, onde em geral as ordens dos polinômios do numerador e do denominador são independentes uma da outra. O polinômio do denominador é classicamente conhecido como polinômio característico do sistema.

A diferença entre a FRF analítica $H(\omega)$ e a FRF experimental $H_e(\omega)$ é a função erro que é dada por:

$$e_j = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega_j)^k}{\sum_{k=0}^{2N} b_k (i\omega_j)^k} - H_e(\omega_j) \quad (2.1.3.3)$$

A função erro é modificada para a seguinte função:

$$e'_j = e_j \sum_{k=0}^{2N} b_k (i\omega_j)^k \quad (2.1.3.4)$$

e fazendo $b_{2N} = 1$, tem-se:

$$e_j = \sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega_j)^k - H_e(\omega_j) \left[\sum_{k=0}^{2N-1} b_k (i\omega_j)^k + (i\omega_j)^{2N} \right] \quad (2.1.3.5)$$

Um vetor erro é definido para todas L frequências medidas:

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_L \end{Bmatrix} \quad (2.1.3.6)$$

A equação (2.1.3.5) pode ser representada na forma matricial, como segue:

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} 1 & (i\omega_1) & (i\omega_1)^2 & \cdots & (i\omega_1)^{2N-1} \\ 1 & (i\omega_2) & (i\omega_2)^2 & \cdots & (i\omega_2)^{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & (i\omega_L) & (i\omega_L)^2 & \cdots & (i\omega_L)^{2N-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{2N-1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} H_e(\omega_1) & H_e(\omega_1)(i\omega_1) & \cdots & H_e(\omega_1)(i\omega_1)^{2N-1} \\ H_e(\omega_2) & H_e(\omega_2)(i\omega_2) & \cdots & H_e(\omega_2)(i\omega_2)^{2N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_e(\omega_L) & H_e(\omega_L)(i\omega_L) & \cdots & H_e(\omega_L)(i\omega_L)^{2N-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{2N-1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} H_e(\omega_1)(i\omega_1)^{2N} \\ H_e(\omega_2)(i\omega_2)^{2N} \\ \vdots \\ H_e(\omega_L)(i\omega_L)^{2N} \end{Bmatrix} \quad (2.1.3.7)$$

ou

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} P \\ (L \times 1) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a \\ (L \times 2N) (2N \times 1) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} T \\ (L \times 2N) (2N \times 1) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b \\ (2N \times 1) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} W \\ (L \times 1) \end{Bmatrix} \quad (2.1.3.8)$$

A equação que será minimizada com o método dos gradientes é a função quadrática de erro mostrada a seguir:

$$J = \{E^*\}^T \{E\} \quad (2.1.3.9)$$

onde * indica o complexo conjugado. Substituindo a equação (2.1.3.8) na equação (2.1.3.9), e após algumas manipulações, tem-se:

$$J = \{a\}^T \operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix} P^* \\ T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P \\ T \end{bmatrix}\right)\{a\} + \{b\}^T \operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix} T^* \\ W \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T \\ W \end{bmatrix}\right)\{b\} + \{W^*\}^T \{W\} -$$

(2.1.3.10)

$$2\{a\}^T \operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix} P^* \\ T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T \\ W \end{bmatrix}\right)\{b\} - 2\{a\}^T \operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix} P^* \\ T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix}\right) + 2\{b\}^T \operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix} T^* \\ W \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T \\ W \end{bmatrix}\right)$$

Esta equação possui matrizes mal condicionadas, por isto é resolvido através do método dos gradientes a fim de minimizar a função erro da equação (2.1.3.10). O método dos mínimos quadrados pode ser usado para obter as condições iniciais necessárias para o método dos gradientes (Iglesias,2000).

O método dos mínimos quadrados é feito pegando as derivadas da equação (2.1.3.10) em relação a $\{a\}$ e $\{b\}$, e igualando a zero. Então é obtido o sistema de equações:

$$\operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix} P^* \\ T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P \\ T \end{bmatrix}\right)\{a\} - \operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix} P^* \\ T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix}\right)\{b\} - \operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix} P^* \\ T \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix}\right)\{a\} = \{0\}$$

(2.1.3.11)

$$\operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix} T^* \\ W \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} T \\ W \end{bmatrix}\right)\{b\} - \operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix} T^* \\ W \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} P \\ W \end{bmatrix}\right)\{a\} + \operatorname{Re}\left(\begin{bmatrix} T^* \\ W \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} W \\ W \end{bmatrix}\right)\{b\} = \{0\}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{G\} \\ \{F\} \end{Bmatrix}$$

(2.1.3.12)

Onde:

$$\begin{aligned}
[Y] &= \text{Re}\left([P^*]^T [P]\right) \\
[X] &= -\text{Re}\left([P^*]^T [T]\right) \\
[Z] &= \text{Re}\left([T^*]^T [T]\right) \\
\{G\} &= \text{Re}\left([P^*]^T \{W\}\right) \\
\{F\} &= -\text{Re}\left([T^*]^T \{W\}\right)
\end{aligned} \tag{2.1.3.13}$$

Resolve-se o sistema para os valores iniciais de $\{a\}$ e $\{b\}$. Usam-se estes valores para avaliar o gradiente. O gradiente em relação a $\{a\}$ é a derivada parcial da equação (2.1.3.10) em relação a $\{a\}$:

$$\text{Re}\left([P^*]^T [P]\right)\{a\} - \text{Re}\left([P^*]^T [T]\right)\{b\} - \text{Re}\left([P^*]^T \{W\}\right) = \{M\} \tag{2.1.3.14}$$

onde $\{M\}$ é o vetor gradiente em relação a $\{a\}$.

O gradiente em relação a $\{b\}$ é a derivada parcial da equação (2.1.3.10) em relação a $\{b\}$:

$$\text{Re}\left([T^*]^T [T]\right)\{b\} - \text{Re}\left([T^*]^T [P]\right)\{a\} + \text{Re}\left([T^*]^T \{W\}\right) = \{N\} \tag{2.1.3.15}$$

onde $\{N\}$ é o vetor gradiente em relação a $\{b\}$.

Então com as equações (2.1.3.14) e (2.1.3.15) o vetor gradiente é:

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} M \\ N \end{Bmatrix} \tag{2.1.3.16}$$

A direção do vetor gradiente é calculada subtraindo-se do coeficiente com o objetivo de mudar a direção onde a função é minimizada. A direção do vetor gradiente é:

$$\{S\} = \frac{-\{V\}}{\|\{V\}\|} \quad (2.1.3.17)$$

onde $\|\{V\}\|$ é o vetor normal.

Então os coeficientes novos são:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \{V\} + \{S\} \quad (2.1.3.18)$$

O vetor gradiente e suas respectivas normais são calculados e comparados com a tolerância desejada. Se o valor é maior que a tolerância, a direção do vetor gradiente é subtraída do coeficiente com o objetivo de encontrar novos coeficientes. O processo é repetido até que a normal do vetor gradiente seja menor que a tolerância.

Após obter os coeficientes da equação de fração racional (2.1.3.2), pode-se calcular os parâmetros modais. A raiz ou pólos do polinômio do denominador contém os valores da frequência natural e do fator de amortecimento. Estes podem ser obtidos através de:

$$f_r = \frac{|P_r|}{2\pi} \quad (2.1.3.19)$$

$$\xi_r = -\frac{\text{Re } al(P_r)}{|P_r|}$$

onde P_r é o pólo do modo r .

Para calcular os resíduos, a fração racional é expandida em equações de frações parciais e o numerador se torna um par de constante complexa conjugada, chamada resíduo.

2.1.4 Método do Envelope de Hilbert

A forma de um sinal que contém um componente oscilando rapidamente e que varia lentamente com tempo é chamada “envelope”. Com o uso das transformadas de Hilbert, as oscilações rápidas podem ser removidas do sinal para produzir a representação do envelope. Informações adicionais com respeito a esse método podem ser obtidas em Lee e Park (1994) e Iglesias (2000).

A transformada de Hilbert para um sinal $x(t)$ é:

$$X_{Hi}(t) = \frac{-1}{\pi} * x(t) = f(t) * x(t) - F^{-1}\{F(j\omega)X(j\omega)\} \quad (2.1.4.1)$$

A transformada de Hilbert é equivalente a um filtro, no qual as amplitudes dos componentes espectrais são inalterados, mas as fases delas são alteradas por $\pi/2$, positivamente ou negativamente de acordo com o sinal de ω .

As transformadas de Hilbert de funções pares são ímpares e de funções ímpares são pares. O componente de cosseno transforma em componente negativo de seno e componente de seno transforma em componente de cosseno.

A transformada de Hilbert é usada para calcular um novo sinal de tempo do sinal original. Ambos os sinais são combinados para formar o sinal analítico como é mostrado:

$$\overline{x(t)} = x(t) - iX_{Hi}(t) \quad (2.1.4.2)$$

A amplitude do sinal analítico é o envelope do sinal original de tempo. Quando o envelope é plotado em escala dB, o gráfico é uma reta inclinada. A inclinação da reta é relacionada com o fator de amortecimento como será mostrado a seguir.

A função de resposta de impulso de um sistema com um grau de liberdade pode ser representada como:

$$x(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n (\sqrt{1-\xi^2}) t) \quad (2.1.4.3)$$

onde ω_n é a frequência natural, ξ é o fator de amortecimento, e A é o resíduo. A transformada de Hilbert para este sinal é:

$$X_{Hi}(t) = Ae^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_n(\sqrt{1-\xi^2})t) \quad (2.1.4.4)$$

O sinal analítico é:

$$\overline{x(t)} = Ae^{-\xi\omega_n t} \left(\sin(\omega_n(\sqrt{1-\xi^2})t) + i \cos(\omega_n(\sqrt{1-\xi^2})t) \right) \quad (2.1.4.5)$$

A amplitude do sinal analítico elimina o componente oscilatório e representa o envelope ou seja:

$$\overline{x(t)} = \sqrt{(Ae^{-\xi\omega_n t})^2 \left(\sin^2(\omega_n(\sqrt{1-\xi^2})t) + \cos^2(\omega_n(\sqrt{1-\xi^2})t) \right)} = Ae^{-\xi\omega_n t} \quad (2.1.4.6)$$

Fazendo o logaritmo natural de cada lado da equação, tem-se:

$$\ln|\overline{x(t)}| = \ln(Ae^{-\xi\omega_n t}) = \ln(A) - (\xi\omega_n)t \quad (2.1.4.7)$$

Esta é a equação de uma linha reta. Se a inclinação da linha é calculada, estima-se o fator de amortecimento como:

$$\xi = \frac{-\text{inclinação}}{\omega_n} \quad (2.1.4.8)$$

Este é um método para um grau de liberdade. A figura (2.1.4.1) mostra o procedimento para aplicar a múltiplos graus de liberdade.

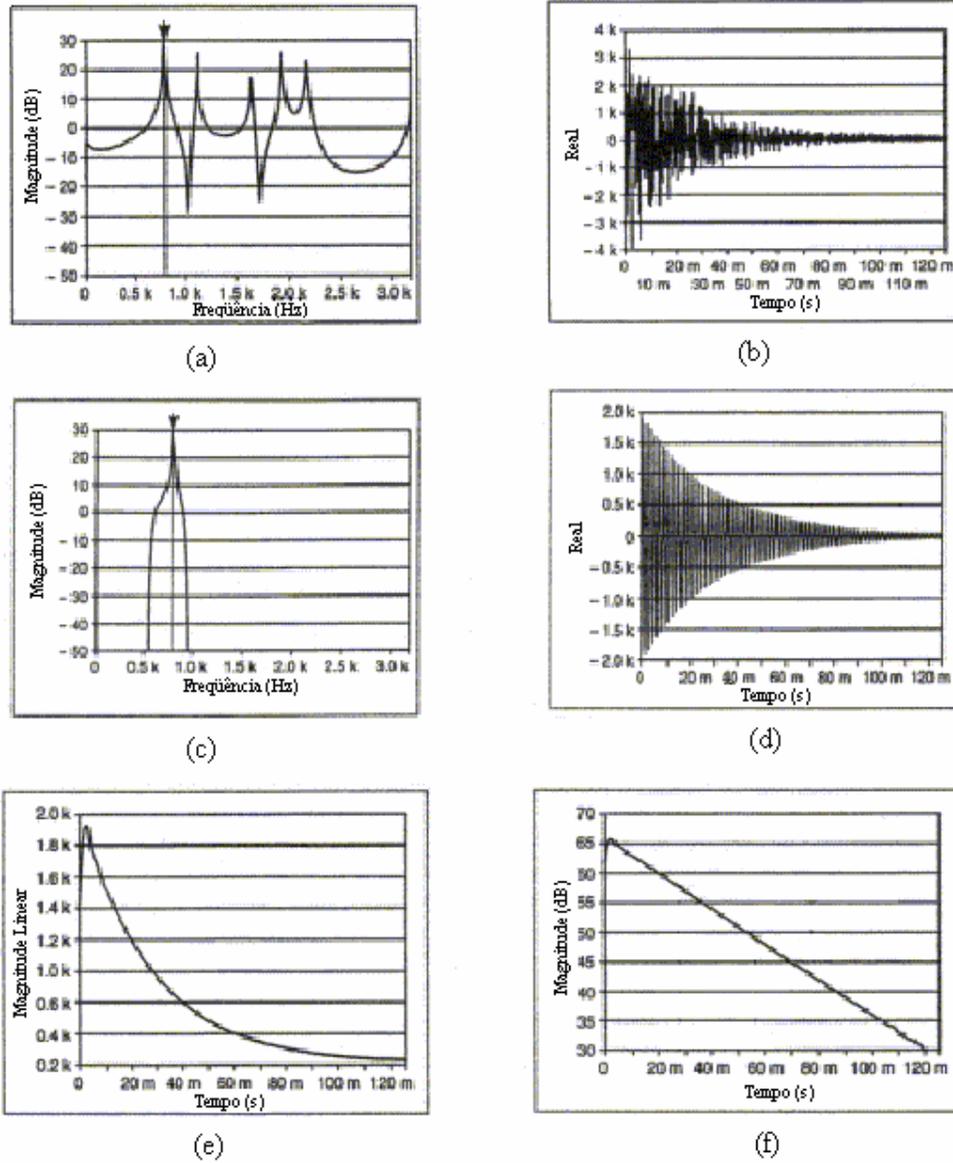


Figura (2.1.4.1) - Procedimento para aplicar o método do envelope de Hilbert para múltiplos graus de liberdade. (a) MDOF FRF, (b) MDOF IRF, (c) Modo isolado, (d) IRF do modo isolado, (e) Envelope do modo isolado e (f) Envelope na escala de logaritmo natural.

A figura 2.1.4.1(a) mostra a função resposta em freqüência, a figura 2.1.4.1(b) mostra a função impulso correspondente, que não pode ser usada para calcular o

amortecimento porque contém a contribuição dos cinco modos de vibrar. O amortecimento de cada modo de vibrar pode ser determinado filtrando o sinal ao redor de cada frequência natural e calculando a função resposta impulso correspondente.

A figura 2.1.4.1(c) mostra um único modo isolado, e sua função resposta impulso é mostrada na figura 2.1.4.1(d). A figura 2.1.4.1(e) mostra a amplitude da transformada de Hilbert da função resposta impulso em uma escala linear. Usando-se a escala em dB, figura 2.1.4.1(f), o envelope torna-se uma linha reta. O método linear dos mínimos quadrados pode ser usado para calcular a inclinação da linha com o objetivo de estimar o fator de amortecimento (ξ).

Após estimado o fator de amortecimento, de cada modo, os autovalores podem ser calculados. A equação (2.1.4.6) pode ser usada para determinar os resíduos.

2.2 Técnicas de identificação de amortecimento estrutural

A equação do movimento de vibração livre de um sistema amortecido viscoso pode ser expresso por:

$$M\ddot{q}(t) + C\dot{q}(t) + Kq(t) = 0 \quad (2.2.1)$$

Neste caso as equações de movimento são caracterizadas por três matrizes simétricas reais que trazem uma certa complicação adicional, se comparados aos sistemas não amortecidos onde as equações de movimento são caracterizadas através de duas matrizes.

2.2.1 Amortecimento Proporcional Generalizado

Esse método foi desenvolvido por Adhikari (2000). A determinação de uma matriz de amortecimento a partir da matriz de massa e rigidez não é possível para a maioria dos sistemas. Por esta razão, supondo que M e K são conhecidas,

freqüentemente procura-se encontrar C em termos de M e K tais que o sistema ainda possua modos normais clássicos.

Teorema 2.1

Se M, C e K são matrizes positivas definidas e existe uma matriz não singular $X \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ tal que $X^T M X, X^T C X$ e $X^T K X$ são todas matrizes diagonais reais então:

$$(a) \quad KM^{-1}C = CM^{-1}K$$

$$(b) \quad MK^{-1}C = CK^{-1}M \quad (2.3.1.1)$$

$$(c) \quad MC^{-1}K = KC^{-1}M$$

Assumindo que o sistema é positivo definido. Considerando as condições (a) e (b) do teorema 2.1 e pré-multiplicando (a) por M^{-1} e (b) por K^{-1} tem-se :

$$(M^{-1}K)(M^{-1}C) = (M^{-1}C)(M^{-1}K) \text{ ou } AB = BA \quad (2.2.1.2)$$

$$(K^{-1}M)(K^{-1}C) = (K^{-1}C)(K^{-1}M) \text{ ou } A^{-1}D = DA^{-1}$$

Onde $A = M^{-1}K$, $B = M^{-1}C$ e $D = K^{-1}C$. Nota-se que a condição (c) do teorema 2.1 não é considerada, pois se pré-multiplicar (c) por C^{-1} , será obtido uma condição similar a equação (2.2.1.2) mas envolvendo termos C em ambas as matrizes. Por esta razão utilizam-se somente as relações de comutação da equação (2.2.1.2). Para qualquer duas matrizes A e B , se A comuta com B , $f(A)$ também comuta com B , onde $f(z)$ é qualquer função analítica de variável z . Assim, devido as relação de comutação representadas pela equação (2.2.1.2) podem ser usadas quase todas funções conhecidas para representar $M^{-1}C$ em termos de $M^{-1}K$ e também $K^{-1}C$ em

termos de $K^{-1}M$, quer dizer, representações como $C = Mf_1(M^{-1}K)$ e $C = Kf_2(K^{-1}M)$ são válidos para qualquer $f(z)$ analítico. Somando estas duas representações e levando A e A^{-1} no argumento da função como (trivial) A e A^{-1} sempre comuta, assim pode-se expressar a matriz amortecimento na forma de:

$$C = Mf_1(M^{-1}K, K^{-1}M) + Kf_2(M^{-1}K, K^{-1}M) \quad (2.2.1.3)$$

Tal que o sistema possua modos normais clássicos. Se pós-multiplicar a condição (a) do teorema 2.1 por M^{-1} e (b) por K^{-1} tem-se:

$$(KM^{-1})(CM^{-1}) = (CM^{-1})(KM^{-1}) \quad (2.2.1.4)$$

$$(MK^{-1})(CK^{-1}) = (CK^{-1})(MK^{-1})$$

Seguindo um procedimento semelhante ao anterior a matriz de amortecimento pode ser expressa na seguinte forma:

$$C = f_3(KM^{-1}, MK^{-1})M + f_4(KM^{-1}, MK^{-1})K \quad (2.2.1.5)$$

para que sistema (2.2.1) possua modos normais clássicos. As equações (2.2.1.3) pode ser chamada de função de forma direita (right-functional form) e a (2.2.1.5) de função de forma esquerda (left-functional form).

As funções f_i , $i = 1, \dots, 4$ podem ter formas muito gerais - elas podem consistir em um número arbitrário de multiplicações, divisões, adições, subtrações ou qualquer outras funções ou podem ser até mesmo funções compostas. Assim, qualquer forma concebível de funções analíticas que são válidas para escalares podem ser usadas nas equações (2.2.1.3) e (2.2.1.5). De modo natural, também são válidos as restrições comuns aplicáveis nas funções escalares. Embora a função f_i , $i = 1, \dots, 4$ sejam gerais, a expressão de C em (2.2.1.3) ou (2.2.1.5) pode ser

restringida devido ao valor dos argumentos das funções. Como consequência, C representada em (2.2.1.3) ou (2.2.1.5) não está entre os inteiros $\Re^{N \times N}$ assim o sistema não possui modos normais clássicos.

Da análise modal experimental obtêm-se os fatores de amortecimento (ξ_i) e as frequências naturais correspondentes (ω_i) , os quais são necessários para obter uma função de amortecimento f_i da forma:

$$\xi_i(\omega) = \sum_{j=1}^N a_{j-1} \omega^{j-1} \quad (2.2.1.6)$$

onde N é o número de fatores de amortecimento (ξ_i) e frequências naturais (ω_i) conhecidas.

Multiplicando-se os dois lados da equação por $2\omega_i$, tem:

$$2\xi_i \omega_i = 2\omega_i \left(\sum_{j=1}^N a_{j-1} \omega_i^{j-1} \right) \text{ com } i=1, \dots, N \quad (2.2.1.7)$$

A equação (2.2.1.7) é uma função de ω_i que pode ser ajustada substituindo ω_i^2 por $[M]^{-1}[K]$ e os termos constantes pela matriz identidade $[I]$, obtendo-se a matriz de amortecimento:

$$[C] = 2[M] \sqrt{[M]^{-1}[K]} \times \left(a_0 [I] + \sum_{j=2}^N a_{j-1} \left(\sqrt{[M]^{-1}[K]} \right)^{j-1} \right) \quad (2.2.1.8)$$

2.2.2 Sistema com Amortecimento Viscoso Levemente Não Proporcional

Este método foi desenvolvido por Adhikari (2000) e utiliza as expressões de perturbação de primeira ordem como base para o procedimento de ajuste, e assume-se que o sistema é levemente amortecido.

Autosoluções de sistemas com amortecimento viscoso consistem somente de modos elásticos. Todos os resultados derivados dos modos elásticos podem ser aplicados para sistemas com amortecimento viscoso se a matriz de amortecimento for constante, portanto pode-se aproximar os autovalores como:

$$s_j \approx \pm i\omega_j - \frac{C'_{jj}}{2} = -\frac{C'_{jj}}{2} \pm \omega_j \quad (2.2.2.1)$$

e os autovetores como aproximação de primeira ordem,

$$z_j \approx x_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{s_j C'_{kj} x_k}{(\omega_k^2 + s_j^2 + s_j C'_{kk})} \quad (2.2.2.2)$$

Supõe-se que λ_j e z_j são as freqüências naturais complexas e os modos de vibrar complexos. Usando-se as equações aproximadas descritas anteriormente e fazendo $s_j = i\lambda_j$, obtém-se a expressão de aproximação para a freqüência natural complexa,

$$\lambda_j \approx \pm \omega_j + \frac{iC'_{jj}}{2} \quad (2.2.2.3)$$

e a expressão de aproximação de primeira ordem dos autovetores complexos,

$$z_j \approx x_j + i \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^N \frac{\omega_j C'_{kj}}{(\omega_j^2 - \omega_k^2)} x_k \quad (2.2.2.4)$$

Então, tem-se:

$$\hat{z}_j = \hat{u}_j + i\hat{v}_j \quad (2.2.2.5)$$

onde $\hat{z}_j \in C^N$ é a medida para o j -ésimo modo complexo e N é o número de pontos medidos na estrutura. m é o número de modos a ser considerado, em geral $m \neq N$, usualmente $N \geq m$. Se os modos de vibrar complexos medidos são consistentes com o modelo de amortecimento viscoso, a parte real de cada frequência natural complexa é a frequência natural não amortecida dada por:

$$\hat{\omega}_j = \Re(\hat{\lambda}_j) \quad (2.2.2.6)$$

onde $\hat{\lambda}_j$ é a j -ésima frequência natural complexa medida.

Similarmente, a parte real de cada modo complexo corresponde ao modo não amortecido e assim a relação de ortogonalidade de massa será satisfeita. Expandindo-se a parte imaginária de \hat{z}_j como uma combinação linear de \hat{u}_j :

$$\hat{v}_j = \sum_{k=1}^m B_{kj} \hat{u}_k \quad \text{onde } B_{kj} = \frac{\hat{\omega}_j C'_{kj}}{\hat{\omega}_j^2 - \hat{\omega}_k^2} \quad (2.2.2.7)$$

Com $N \geq m$ esta relação não pode ser satisfeita. Então as constantes B_{kj} devem ser calculadas tal que o erro representado em \hat{v}_j pela soma seja minimizada. O interesse é calcular C'_{kj} através de B_{kj} , lembrando que se $k = j$, C'_{jj} é obtido através da parte imaginária da frequência natural complexa:

$$C'_{jj} = 2\Im(\hat{\lambda}_j) \quad (2.2.2.8)$$

O erro representado na equação (2.2.2.7) pode ser expresso como:

$$\mathcal{E}_j = \hat{v}_j - \sum_{k=1}^m B_{kj} \hat{u}_k \quad (2.2.2.9)$$

Para a minimização do erro o método de Galerkin pode ser usado. Os modos de vibrar não amortecidos $\hat{u}_l, \forall l = 1, \dots, m$ são considerados como “função peso”. Usando o método de Galerkin sobre $\varepsilon_j \in \mathfrak{R}^N$ para um valor fixo de j tem-se:

$$\hat{u}_l^T \varepsilon_j = 0; \quad \forall l = 1, \dots, m \quad (2.2.2.10)$$

Combinando-se as equações (2.2.2.9) e (2.2.2.10), têm-se:

$$\hat{u}_l^T \left\{ \hat{v}_j - \sum_{k=1}^m B_{kj} \hat{u}_k \right\} = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{k=1}^m W_{lk} B_{kj} = D_{lj} \quad \text{para} \quad l = 1, \dots, m \quad (2.2.2.11)$$

com $W_{lk} = \hat{u}_l^T \hat{u}_k$ e $D_{lj} = \hat{u}_l^T \hat{v}_j$, podendo ser representada na forma matricial,

$$WB = D \quad (2.2.2.12)$$

onde $B \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ é uma matriz de coeficientes desconhecidos a ser determinado,

$W = \hat{U}^T \hat{U} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ e $D = \hat{U}^T \hat{V} \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ com

$$\hat{U} = [\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_m] \in \mathfrak{R}^{N \times m} \quad (2.2.2.13)$$

$$\hat{V} = [\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_m] \in \mathfrak{R}^{N \times m}$$

B é determinada através de:

$$B = W^{-1} D = [\hat{U}^T \hat{U}]^{-1} \hat{U}^T \hat{V} \quad (2.2.2.14)$$

Os coeficientes da matriz de amortecimento modal podem ser encontrados a partir de:

$$C'_{kj} = \frac{(\hat{\omega}_j^2 - \hat{\omega}_k^2)B_{kj}}{\hat{\omega}_j} \text{ para } k \neq j \quad (2.2.2.15)$$

As equações (2.2.2.13) e (2.2.2.12) juntamente com a equação (2.2.2.8) definem a matriz de amortecimento modal $C' \in \mathfrak{R}^{m \times m}$. Se $\hat{U} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$ é uma matriz modal não amortecida completa, a matriz de amortecimento nas coordenadas modais é dada por

$$C' = \hat{U}^T C \hat{U} \quad (2.2.2.16)$$

e nas coordenadas originais,

$$C = (\hat{U}^T)^{-1} C' (\hat{U})^{-1} \quad (2.2.2.17)$$

Para os casos em que $\hat{U} \in \mathfrak{R}^{N \times m}$, o método do pseudo-inversa é usado afim de obter a matriz de amortecimento nas coordenadas originais, que é dada por:

$$C = \left[(\hat{U}^T \hat{U})^{-1} \hat{U}^T \right]^T C' \left[(\hat{U}^T \hat{U})^{-1} \hat{U}^T \right] \quad (2.2.2.18)$$

Este método necessita somente das frequências naturais complexas e dos modos de vibrar para obtenção da matriz amortecimento C . O método é muito simples e não requer muito tempo de computação. Outra vantagem é a não necessidade da estimação das matrizes de massa e rigidez, nem do conjunto completo de dados modais para obter uma estimativa da matriz de amortecimento (Adhikari,2000).

2.2.3 Método Iterativo

Esse método foi desenvolvido por Pilkey (1998). Dado o problema de interesse como:

$$D^{(2)}(\lambda) \equiv (M\lambda^2 + C\lambda + K) \quad (2.2.3.1)$$

Teorema 2.2

Se M e K são matrizes reais simétricas, M é não singular, tal que:

$$(M\lambda + K)q = 0 \quad (2.2.3.2)$$

$$(M^T\lambda + K^T)r = 0$$

Então pode ser normalizado como:

$$R^T M Q = I \quad \text{e} \quad R^T K Q = -\Lambda \quad (2.2.3.3)$$

assim,

$$(M\lambda + K)^{-1} = Q(I\lambda - \Lambda)^{-1} R^T \quad (2.2.3.4)$$

Teorema 2.3

Se M é não singular e $D^{(2)}(\lambda)$ tem uma degeneração igual ao múltiplo de λ_i para $i = 1, 2, \dots, 2n$, então os autovetores podem ser normalizados de tal forma que

$$\begin{aligned} \lambda^0 [D^2(\lambda)]^{-1} &= Q\Lambda^0 (I\lambda - \Lambda)^{-1} R^T \\ \lambda^1 [D^2(\lambda)]^{-1} &= Q\Lambda^1 (I\lambda - \Lambda)^{-1} R^T \end{aligned} \quad (2.2.3.5)$$

e

$$\lambda^2 [D^2(\lambda)]^{-1} = Q\Lambda^2(I\lambda - \Lambda)^{-1}R^T + M^{-1} \quad (2.2.3.6)$$

onde Q e R são matrizes que contêm o autovetores à direita e à esquerda da função quadrática descrita acima. Os sobrescritos 0,1 e 2 são expoentes nos autovetores.

Como as matrizes dos autovetores direito e esquerdo são idênticas e os autovetores acontecem em pares conjugados complexos, usam-se os teoremas descritos acima para gerar as equações

$$u_i^T (2[M]\lambda_i + [C])u_i = 1 \quad (2.2.3.7)$$

$$[C] = -[M] \left([\Phi][\Lambda]^2 [\Phi]^T + [\bar{\Phi}][\bar{\Lambda}]^2 [\Phi]^* \right) [M] \quad (2.2.3.8)$$

Inicia-se o método com a matriz de massa, autovalores e autovetores do sistema. Estima-se uma matriz de amortecimento inicial, o qual pode ser qualquer matriz escalar. Logo os autovetores devem ser normalizados usando

$$\phi_i^T (2[M]\lambda_i + [C_0])\phi_i = 1 \quad (2.2.3.9)$$

C então é calculada usando-se a equação (2.2.3.8). Como a nova matriz amortecimento calculada não é igual a matriz de amortecimento inicial, é necessário um processo iterativo. Na próxima iteração, os autovetores são novamente normalizados usando a matriz de massa inicial e a nova matriz de amortecimento

$$\phi_i^T (2[M]\lambda_i + [C_1])\phi_i = 1 \quad (2.2.3.10)$$

O amortecimento é novamente calculado usando a equação (2.2.3.8). O procedimento iterativo continua usando a matriz de amortecimento atualizada para normalizar os autovetores até que o erro entre as matrizes de amortecimento seja suficientemente pequeno para atingir a convergência.

A maioria dos sistemas estruturais pode ser resolvida usando este método com poucas exceções. Se a diferença entre a matriz de amortecimento e a matriz de massa for pequena ocorre a divergência do procedimento iterativo e, se os valores da matriz de amortecimento estiverem perto dos valores da matriz rigidez o procedimento iterativo fornecerá uma matriz de amortecimento que ficará oscilando entre as duas soluções (Pilkey, 1998).

2.2.4 Método Direto

Informações adicionais sobre esse método pode ser obtida em Pilkey (1998). Este método direto também normaliza os autovetores:

$$\phi_i^T (2[M]\lambda_i + [C])\phi_i = 1 \quad (2.2.4.1)$$

Conhecendo a matriz de massa e rigidez, como também os autovetores e autovalores do sistema, pode-se encontrar a matriz de amortecimento. O problema de autovalor para a equação de movimento pode ser escrito como:

$$\phi_i^T C \phi_i = -\phi_i^T \left(K \left(\frac{1}{\lambda_i} \right) + M \lambda_i \right) \phi_i \quad (2.2.4.2)$$

Substituindo-se (2.2.4.2) na equação (2.2.4.1) obtem-se uma nova condição de normalização. Para um sistema subamortecido os autovetores são normalizados por:

$$\phi_i^T ([M]\lambda_i^2 - [K])\phi_i = \lambda_i \quad (2.2.4.3)$$

então a matriz de amortecimento simétrica pode ser encontrada por:

$$[C_m] = -[M] \left([\Phi][\Lambda]^2 [\Phi]^T + [\bar{\Phi}][\bar{\Lambda}]^2 [\Phi]^* \right) [M] \quad (2.2.4.4)$$

onde os símbolos (sobrescritos) representam: T matriz transposta, $-$ matriz complexa conjugada e $*$ matriz complexa conjugada transposta. Φ é uma matriz de autovetores, e Λ é uma matriz diagonal que contém os autovalores.

Capítulo 3

Estudo de casos

As técnicas mostradas no capítulo 2 foram aplicadas em três casos distintos de sistemas mecânicos: sistema com dois graus de liberdade, um sistema de placa engastada e um sistema de cabos de linhas de transmissão, para todos os casos além da análise experimental foi desenvolvido um modelo matemático, o qual é imprescindível para a validação dos resultados. Os tipos de casos, bem como, o modelo matemático, os equipamentos e procedimentos utilizados na análise experimental serão detalhados a seguir.

3.1 Caso 1: Sistema com dois graus de liberdade

Descrição da bancada

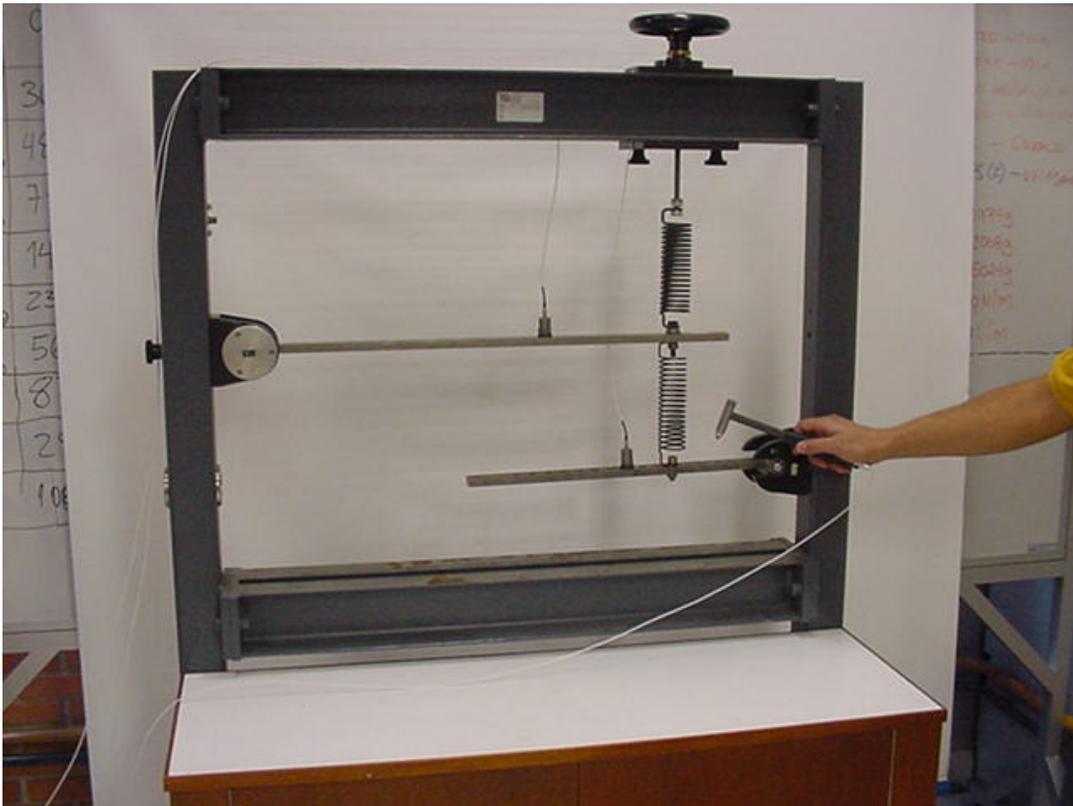


Figura (3.1.1) – Bancada com sistema de dois graus de liberdade.

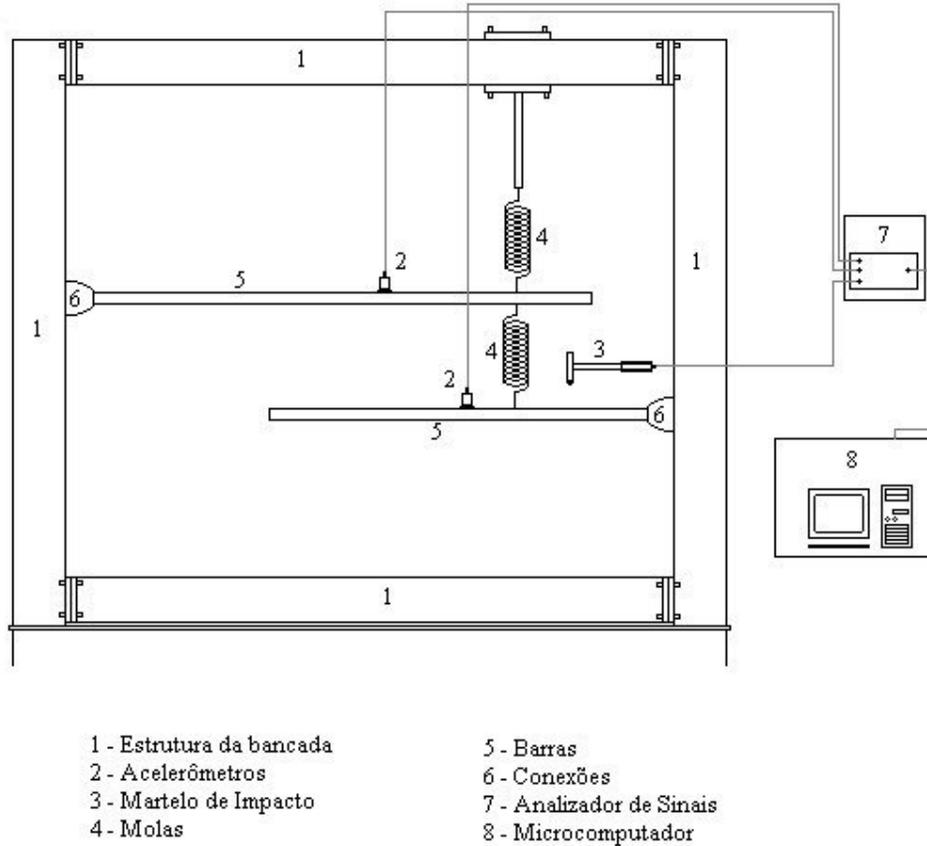


Figura (3.1.2) - Esquema da bancada com sistema de dois graus de liberdade.

A figura 3.1.2 mostra esquematicamente os componentes básicos da bancada com sistema de 2 graus de liberdade. O microcomputador (8) acoplado com o analisador de sinais (7) armazena os dados de resposta do sistema. A bancada é composta por uma estrutura extremamente rígida (1) na qual é acoplado, por meio de conexões que permitem somente rotação (6), um sistema de barras (5) e de molas (4). Os sensores de vibração (2) são colocados em pontos localizados nas barras e a excitação é feita diretamente através de um martelo de impacto (3).

Dados do sistema.

No sistema foram utilizadas duas barras de aço: uma com comprimento de $0,75\text{m}$ (L_{AC}) e com peso de $1,941\text{ Kg}$ (m_{barra1}) e a outra barra com $0,49\text{ m}$ (L_{DF}) de comprimento e com peso de $1,016\text{ Kg}$ (m_{barra2}).

A massa em excesso correspondente a cada barra pesam: $32,4 \cdot 10^{-3}\text{ Kg}$ ($m_{excesso1}$) e $51,7 \cdot 10^{-3}\text{ Kg}$ ($m_{excesso2}$) e seus comprimentos são: $0,0125\text{ m}$ ($L_{excesso1}$) e $0,02\text{ m}$ ($L_{excesso2}$). A massa dos parafusos, utilizado para fixação das molas, pesam: $279,8 \cdot 10^{-3}\text{ Kg}$ ($m_{parafuso1}$) e $43,5 \cdot 10^{-3}\text{ Kg}$ ($m_{parafuso2}$) e suas distância em relação ao eixo de rotação medem: $0,66\text{ m}$ ($d_{parafuso1}$) e $0,16\text{ m}$ ($d_{parafuso2}$). O acelerômetro pesa $44 \cdot 10^{-3}\text{ Kg}$ ($m_{acelerômetro}$) e suas distância em relação ao eixo de rotação medem $0,24\text{ m}$ ($d_{acelerometro1}$) e $0,435\text{ m}$ ($d_{acelerometro2}$). As molas utilizadas tem rigidez de 3900 N/m (K_1) e 900 N/m (K_2). E os comprimentos L_{BC} e L_{DE} mostrados na figura (3.1.3) valem $0,09\text{ m}$ e $0,16\text{ m}$, respectivamente.

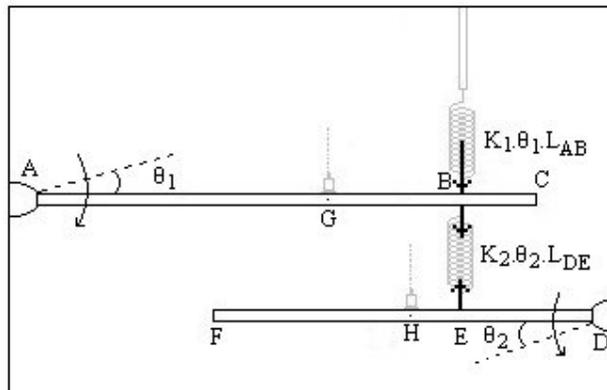
Modelo matemático

Figura (3.1.3) - Sistema com dois graus de liberdade.

Considerando o sistema não-amortecido da figura (3.1.3) e adotando-se os deslocamentos angulares θ_1 e θ_2 , medidos a partir da referência inercial, as equações diferenciais do movimento para o sistema são:

$$\sum M_A = I_1 \cdot \ddot{\theta}_1 \quad (3.1.1)$$

$$\sum M_D = I_2 \cdot \ddot{\theta}_2 \quad (3.1.2)$$

I_1 e I_2 são os momentos de inércia do sistema e são dados como:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{Barra1} + I_{Parafuso1} + I_{acelerometro1} + I_{Excesso1} \\ I_2 &= I_{Barra2} + I_{Parafuso2} + I_{acelerometro2} + I_{Excesso2} \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

Onde:

$$\begin{aligned} I_{Barra1} &= \frac{m_{barra1} \cdot L_{AC}^2}{3} \\ I_{Barra2} &= \frac{m_{barra2} \cdot L_{DF}^2}{3} \\ I_{Excesso1} &= \frac{m_{excesso1} \cdot L_{excesso1}^2}{3} \\ I_{Excesso2} &= \frac{m_{excesso2} \cdot L_{excesso2}^2}{3} \\ I_{Parafuso1} &= m_{parafuso1} \cdot (d_{parafuso1})^2 \\ I_{Parafuso2} &= m_{parafuso2} \cdot (d_{parafuso2})^2 \\ I_{Acelerometro1} &= m_{acelerometro} \cdot (d_{acelerometro1})^2 \\ I_{Acelerometro2} &= m_{acelerometro} \cdot (d_{acelerometro2})^2 \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

Resolvendo as equações (3.1.1) e (3.1.2) têm-se:

$$I_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + K_1 \cdot x_1 \cdot L_{AB} + K_2 \cdot (x_1 - x_2) \cdot L_{AB} = 0 \quad (3.1.5)$$

$$I_2 \cdot \ddot{\theta}_2 + K_2 \cdot (x_2 - x_1) \cdot L_{DE} = 0 \quad (3.1.6)$$

Fazendo:

$$x_1 = L_{AB} \cdot \theta_1 \quad (3.1.7)$$

$$x_2 = L_{DE} \cdot \theta_2$$

Substituindo a equação (3.1.7) nas equações (3.1.5) e (3.1.6) tem-se:

$$I_1 \cdot \ddot{\theta}_1 + (K_1 \cdot L_{AB}^2 + K_2 \cdot L_{AB}^2) \cdot \theta_1 - K_2 \cdot L_{AB} \cdot L_{DE} \cdot \theta_2 = 0 \quad (3.1.8)$$

$$I_2 \cdot \ddot{\theta}_2 - K_2 \cdot L_{AB} \cdot L_{DE} \cdot \theta_1 + K_2 \cdot L_{AB}^2 \cdot \theta_2 = 0 \quad (3.1.9)$$

Expressando-se na forma matricial :

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (K_1 + K_2)L_{AB}^2 & -K_2 L_{AB} L_{DE} \\ -K_2 L_{AB} L_{DE} & K_2 L_{AB}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.1.10)$$

Propondo a solução:

$$\theta_1 = A_1 \text{sen}(\omega t)$$

$$\dot{\theta}_1 = -A_1 \omega \text{cos}(\omega t) \quad (3.1.11)$$

$$\ddot{\theta}_1 = -A_1 \omega^2 \text{sen}(\omega t)$$

e

$$\theta_2 = A_2 \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$\dot{\theta}_2 = -A_2 \omega \operatorname{cos}(\omega t) \quad (3.1.12)$$

$$\ddot{\theta}_2 = -A_2 \omega^2 \operatorname{sen}(\omega t)$$

Substituindo as equações (3.1.11) e (3.1.12) na equação (3.1.10) tem-se:

$$\begin{bmatrix} -I_1 \omega^2 + (K_1 + K_2)L_{AB}^2 & -K_2 L_{AB} L_{DE} \\ -K_2 L_{AB} L_{DE} & -I_2 \omega^2 + K_2 L_{DE}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.1.13)$$

Através de (3.1.13) determinam-se os autovalores e autovetores do sistema.

Análise experimental

Os equipamentos utilizados para análise experimental são:

- Hewlett Packard (HP) Dynamic Signal Analyzer 3566/67, para diferentes tipos de análise dinâmica tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, com dezesseis canais e interface com microcomputadores - Anexo C.
- Bancada com sistema de dois graus de liberdade - Figura (3.1.1 e 3.1.2)
- Martelo de Impacto – Anexo C
 - Modelo – 086C03 (PCB)*
 - Range – 0 – 500lb*
 - Sensibilidade – Plastic - 9,48 mV/lb / Vinyl – 2,13 mV/N*
- Acelerômetros – Anexo C
 - Modelo – 353B34 (PCB)*
 - Sensibilidade – 96,7 mV/g / 97,2 mV/g*
- Software Matlab 6.0.

Procedimento

Um martelo de impacto é usado para excitar o sistema. A resposta é medida com dois acelerômetros localizados em posições diferentes como mostradas na figura (3.1.2).

Com o uso do martelo de impacto excitou-se o sistema num ponto localizado na barra AC figura (3.1.3) e mediu-se a Função Resposta em Freqüência (FRF) nos acelerômetros mostrados na figura (3.1.3). Excitou-se novamente o sistema num ponto localizado na barra DF, e mediu-se a Função Resposta em Freqüência (FRF) nos acelerômetros. Com as FRFs obtidas, são utilizadas as técnicas de identificação de parâmetros, para determinação das freqüências naturais, fatores de amortecimento e os autovetores. Com os parâmetros determinados, aplicam-se as técnicas de identificação de amortecimento estrutural para identificar a matriz de amortecimento estrutural.

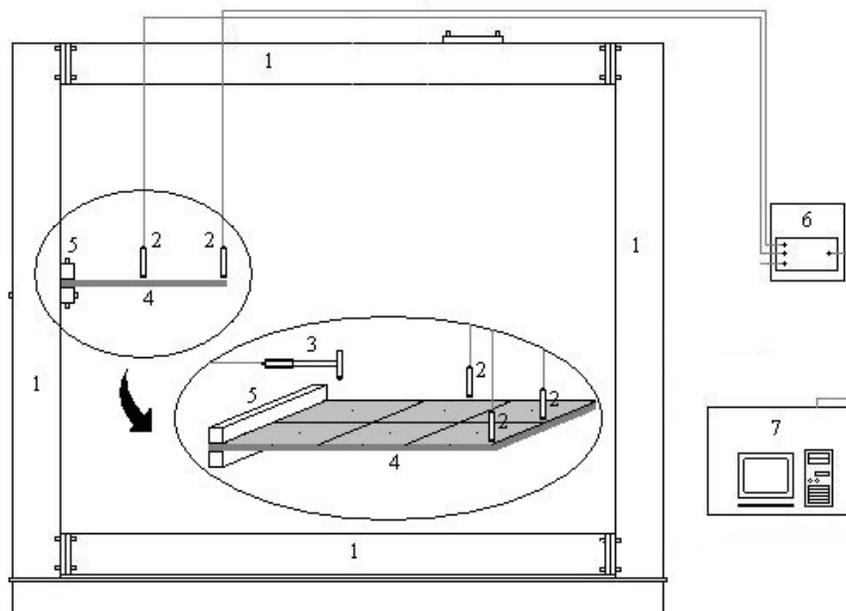
3.2 Caso 2: Placa engastada.

Descrição da bancada

A figura 3.2.1 mostra esquematicamente os componentes básicos da bancada com uma placa engastada. O microcomputador (7) acoplado com o analisador de sinais (2) armazena os dados de resposta do sistema. A bancada é composta por uma estrutura extremamente rígida (1) na qual é acoplada por meio de um engaste (5), uma placa (4). Os sensores de vibração (2) são colocados próximos (sem contato) dos pontos localizados na placa e a excitação é feita diretamente através de um martelo de impacto (3).



Figura (3.2.1) - Bancada com placa engastada.



- | | |
|-----------------------------|--------------------------|
| 1 - Estrutura da bancada | 5 - Engaste |
| 2 - Sensores de proximidade | 6 - Analizador de Sinais |
| 3 - Martelo de impacto | 7 - Microcomputador |
| 4 - Placa | |

Figura (3.2.2) - Esquema da bancada com placa engastada.

Dados da placa

Material – Aço

Dimensão – 0,31m x 0,195m x 0.002m

Modulo de Elasticidade – 210 GPa

Densidade – 7904,06 Kg / m³

Modelo Matemático

Foi utilizado um software desenvolvido em Fortran (Anexo B), o qual fornece os autovalores e autovetores do sistema de placa, bem como as matrizes de massa e rigidez.

Análise experimental

Os equipamentos utilizados para análise modal são:

- Hewlett Packard (HP) Dynamic Signal Analyzer 3566/67, para diferentes tipos de análise dinâmica tanto no domínio do tempo como no domínio da frequência, com dezesseis canais e comunicação com microcomputadores – Anexo C.
- Bancada com uma placa engastada - Figura (3.2.1 e 3.2.2)
- Martelo de Impacto – Anexo C.
Modelo – 086C03 (PCB)
Range – 0 – 500lb
Sensibilidade – Plastic - 9,48 mV/lb / Vinyl – 2,13 mV/N
- Sensores de proximidade – Anexo C.
Modelo – 403
Range – 20/100 mil
Sensibilidade – 200 mV/mil
Gap set – 12V
- Osciloscópio
Modelo – HP 54602B 150 MHz
- Software Matlab 6.0.

Procedimento

Um martelo de impacto é usado para excitar o sistema. A resposta é medida com sensores de proximidade localizados em posições diferentes, como mostra a figura (3.2.3).

Com o uso do martelo de impacto excitou-se o sistema a fim de obter a Função Resposta em Frequência (FRF) através dos sinais dos sensores de proximidades. Com a FRF obtida são utilizadas as técnicas de identificação de parâmetros, para determinação das frequências naturais, fatores de amortecimento e os autovetores. São aplicadas técnicas de identificação de amortecimento estrutural para encontrar a matriz de amortecimento estrutural.

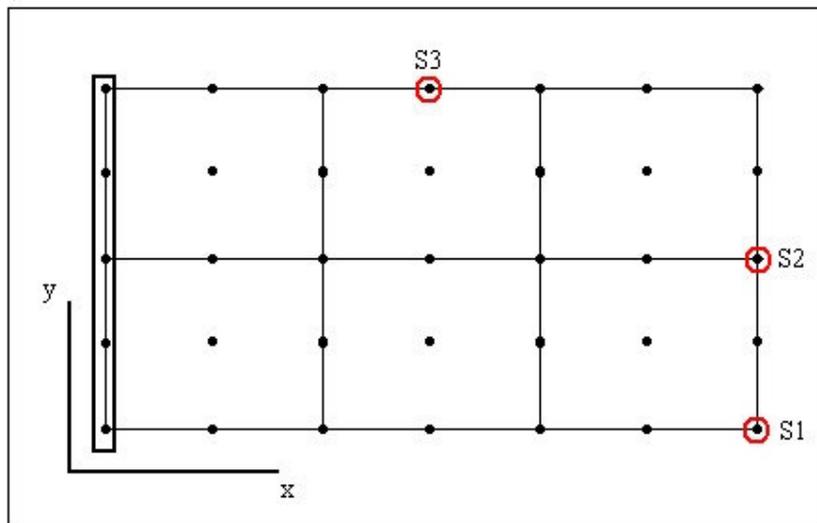


Figura (3.2.3) - Vista superior da placa engastada. Localização dos sensores em relação a origem. S1(0.31,0), S2(0.31,0.0975), S3(0.155,0.195) em metros.

3.3 Caso 3: Sistema de cabos de linhas de transmissão

Descrição da bancada de testes



Figura (3.3.1) - Bancada para ensaios automatizados de cabos condutores.

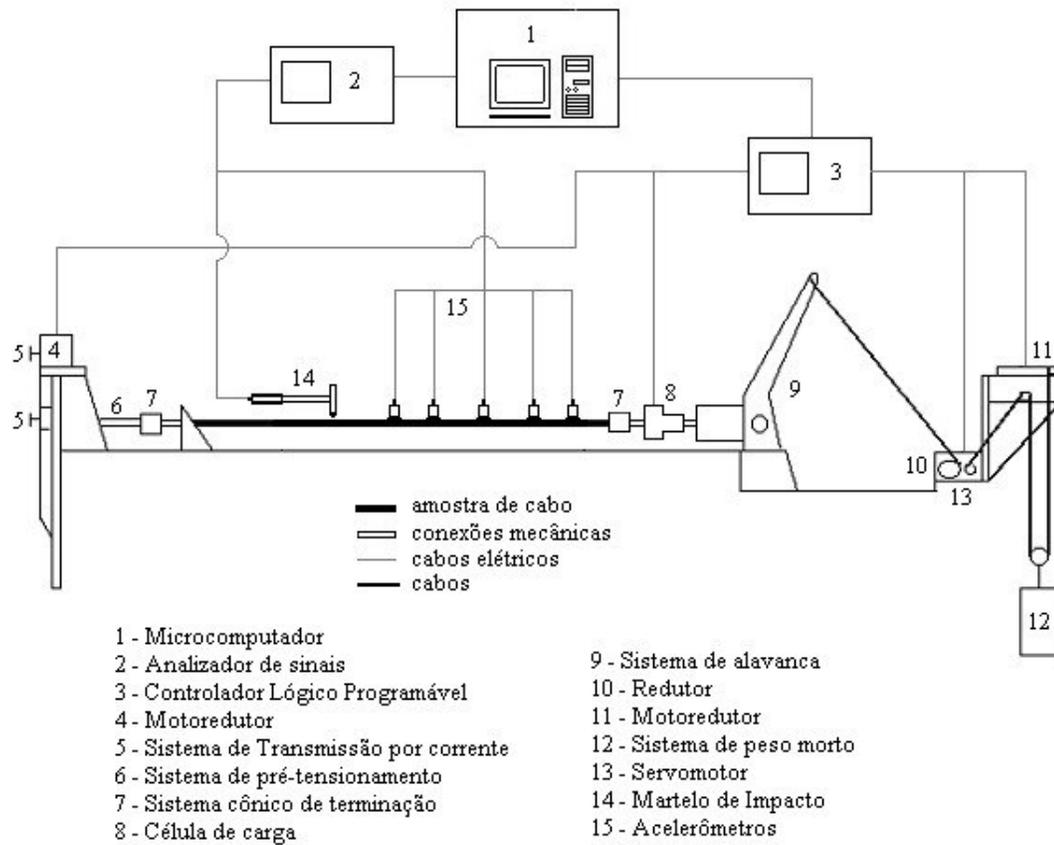


Figura (3.3.2) - Esquema da bancada para ensaios automatizados de cabos condutores.

A figura 3.3.2 mostra esquematicamente os componentes básicos da bancada de cabos condutores. O microcomputador (1) controla o desempenho do teste através do uso de um CLP – Controlador Lógico Programável (3) e monitoramento contínuo de um sensor de força (7).

Um sistema de pretensionamento mecânico (4-6) serve para aplicar uma tensão mecânica da ordem de 5% da carga de ruptura do material, para colocação dos sensores. A capacidade de tracionamento mecânico deste sistema é da ordem de 10 kN.

O sistema (8-12) serve para controlar automaticamente a carga mecânica no cabo, usando um sistema de servomecanismo (13). O sinal elétrico de controle é proporcional à diferença entre a carga mecânica programada e a carga medida pela

célula de carga (8). A capacidade de tracionamento mecânico deste sistema é 200 kN. Em caso de falta de energia somente o computador e alguns instrumentos permanecem operando através de um “no break”.

Para economizar energia, um sistema automático de peso-morto (12) é usado para manter a tensão mecânica na amostra. Este sistema permite uma grande economia de energia elétrica.

A célula de carga de 200 kN tem uma resolução de 96 N e outra célula de carga de 50 kN tem uma resolução de 25 N.

Os sensores de vibração (acelerômetros) são colocados ao longo da amostra e a excitação é feita diretamente na mesma através de um martelo de impacto.

Dados do cabo

Comprimento do Cabo (L) – 32.322m

Tração no Cabo – 15860 N;

Densidade x Área – 0.8128 kg/m

Modulo de Elasticidade x Inércia – 10.0866 N.m²

Localização dos Sensores - Sensor 1 – L/2

Sensor 2 – 3L/8

Sensor 3 – L/4

Modelo matemático

Para a análise do efeito de vibrações em cabos condutores, o modelo físico considerado é o de uma viga sob a ação de uma carga axial. O modelo normalmente utilizado para avaliar o comportamento do cabo submetido à ação de um esforço externo (como por exemplo, a excitação devido ao vento) e a um esforço axial (carga para manter o cabo sob a tensão mecânica de projeto), é mostrado na figura (3.3.3). Consideram-se assim, os efeitos da carga axial e da flexão que são os principais fatores que fazem que os cabos falhem por fadiga.

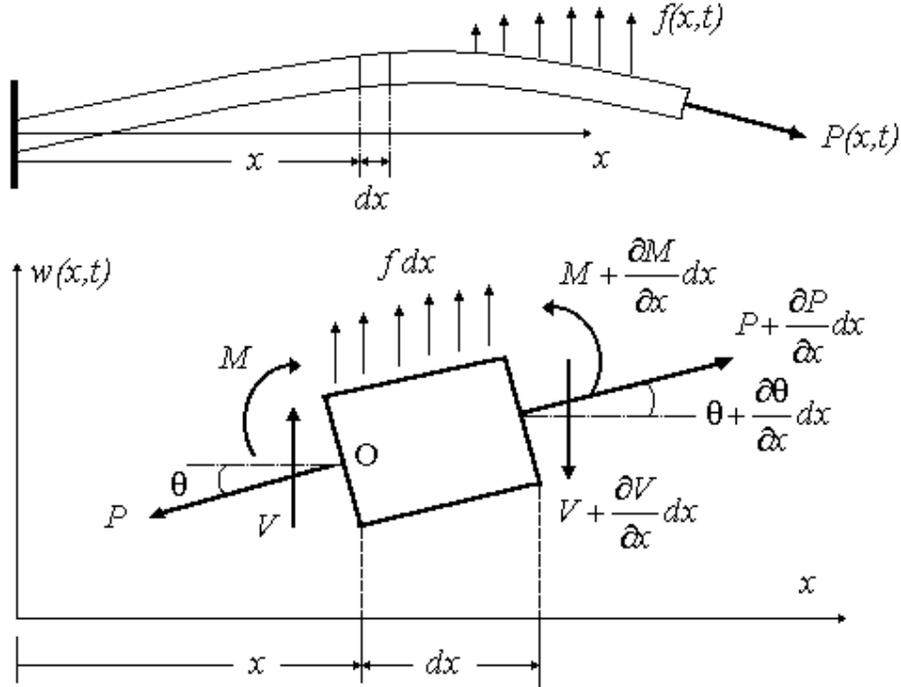
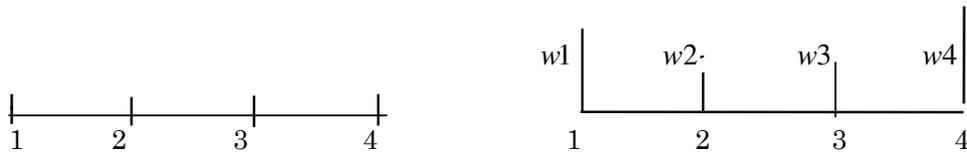


Figura (3.3.3) - Elemento de viga submetido a um esforço axial.

A equação diferencial que representa o movimento do cabo é dada por:

$$EI \frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = f(x,t) \quad (3.3.1)$$

Para resolução numérica utiliza-se o método dos elementos finitos. O elemento finito utilizado é o lagrangeano cúbico.



Onde 1, 2, 3 e 4 representam os pontos nodais do elemento e w_1 , w_2 , w_3 e w_4 representam os deslocamentos nodais do cabo. Os deslocamentos nodais podem ser encontrados, aproximando-se:

$$w(x, t) \cong \tilde{w}(x, t) = \phi_i(x) w_i \quad (3.3.2)$$

onde w_i representa os deslocamentos nodais e $\phi_i(x)$ representa as funções de interpolação de elementos finitos. Substituindo (3.3.2) em (3.3.1) e fazendo a excitação externa $f(x, t)$ nula, obtêm-se:

$$EI \frac{\partial^4 \tilde{w}(x, t)}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 \tilde{w}(x, t)}{\partial t^2} - P \frac{\partial^2 \tilde{w}(x, t)}{\partial x^2} = \varepsilon(x, t) \quad (3.3.3)$$

onde $\varepsilon(x, t)$ é um erro cometido devido à aproximação dada em (3.3.2). Usando-se o método Galerkin-FEM (Zienkiewicz, 1987), tem-se:

$$\int_{t=0}^{t=I} \int_{x=0}^L \varepsilon(x, t) \phi_j(x) dx dt = 0 \quad (3.3.4)$$

onde I é o comprimento físico do elemento do cabo. Usando (3.3.4) em (3.3.3), encontra-se a equação do movimento, ou seja:

$$[M_{ji}] \dot{w}_i + [K_{ji}] w_i = f_j(x, t) \quad (3.3.5)$$

Onde:

$$\left[EI \frac{\partial^3 \tilde{w}(x, t)}{\partial x^3} \phi_j(x) - EI \frac{\partial^2 \tilde{w}(x, t)}{\partial x^2} \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} \right]_0^l + P \frac{\partial^2 \tilde{w}(x, t)}{\partial x^2} \phi_j(x) = -f_j(x, t) \quad (3.3.6)$$

$$\int_0^l \left(EI \frac{\partial^2 \phi_i(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_j(x)}{\partial x^2} + P \frac{\partial \phi_i(x)}{\partial x} \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x} \right) dx = K_{ji} \quad (3.3.7)$$

$$\int_0^l \rho A \phi_i(x) \phi_j(x) dx = M_{ij} \quad (3.3.8)$$

Para resolução matemática usa-se o elemento lagrangeano cúbico:

$$\phi_1(\xi) = (-9\xi^3 + 9\xi^2 + \xi - 1)/16 \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (3.3.9)$$

$$\phi_2(\xi) = (27\xi^3 - 9\xi^2 - 27\xi + 9)/16 \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (3.3.10)$$

$$\phi_3(\xi) = (-27\xi^3 - 9\xi^2 + 27\xi + 9)/16 \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (3.3.11)$$

$$\phi_4(\xi) = (9\xi^3 + 9\xi^2 - \xi - 1)/16 \quad -1 \leq \xi \leq 1 \quad (3.3.12)$$

Capítulo 4

Resultados e Discussões

4.1 Exemplo numérico utilizando dados analíticos

As equações (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) mostram que as matrizes de massa, rigidez e amortecimento de um determinado sistema são respectivamente:

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (4.1.1)$$

$$K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.1.2)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.02 & -0.01 & 0 & 0 \\ -0.01 & 0.02 & -0.01 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0.02 & -0.01 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

A equação (4.1.4) mostra a matriz de amortecimento identificada a partir do método de amortecimento proporcional generalizado, descrito no item (2.2.1). A função de forma obtida pode ser vista na equação (4.1.5), trata-se de uma função do terceiro grau. A figura (4.1.1) é o gráfico da equação (4.1.5).

$$C = \begin{bmatrix} 0.02 & -0.01 & 0 & 0 \\ -0.01 & 0.02 & -0.01 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0.02 & -0.01 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

$$\xi(\omega) = 2.2500 \times 10^{-13} + 0.031415 \cdot \omega - 4.29804 \times 10^{-10} \cdot \omega^2 + 3.10095 \times 10^{-5} \cdot \omega^3 \quad (4.1.5)$$

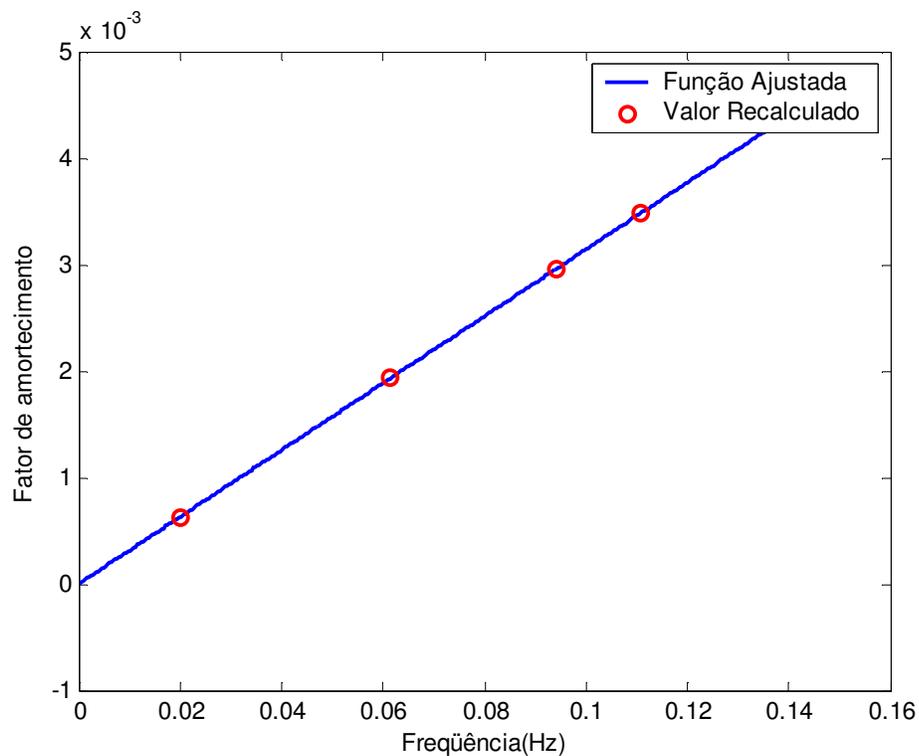


Figura (4.1.1) - Curva do fator de amortecimento do exemplo.

Tabela (4.1.1) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento proporcional generalizado.

<i>RFP</i>		<i>Método de Amortecimento Proporcional Generalizado</i>		<i>Erro* (%) na Frequência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
0.0200	0.0006	0.0200	0.0006	0.00%	0.00%
0.0615	0.0019	0.0615	0.0019	0.00%	0.00%
0.0943	0.0030	0.0943	0.0030	0.00%	0.00%
0.1107	0.0035	0.1107	0.0035	0.00%	0.00%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

A equação (4.1.6) mostra a matriz de amortecimento identificada através do método de amortecimento não proporcional.

$$C = \begin{bmatrix} 0.0213 & -0.0086 & 0.0010 & 0.0004 \\ -0.0086 & 0.0171 & -0.0110 & 0.0009 \\ 0.0010 & -0.0110 & 0.0164 & -0.0096 \\ 0.0004 & 0.0009 & -0.0096 & 0.0119 \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

Tabela (4.1.2) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento não proporcional.

<i>RFP</i>		<i>Método de Amortecimento Não Proporcional</i>		<i>Erro* (%) na Frequência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
0.0200	0.0006	0.0200	0.0006	0.00%	0.00%
0.0615	0.0019	0.0615	0.0019	0.00%	0.00%
0.0943	0.0030	0.0943	0.0030	0.00%	0.00%
0.1107	0.0035	0.1107	0.0035	0.00%	0.00%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

A equação (4.1.7) mostra a matriz de amortecimento identificada através do método iterativo.

$$C = \begin{bmatrix} 0.02 & -0.01 & 0 & 0 \\ -0.01 & 0.02 & -0.01 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0.02 & -0.01 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (4.1.7)$$

Tabela (4.1.3) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método iterativo.

<i>RFP</i>		<i>Método Iterativo</i>		<i>Erro* (%) na Frequência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
0.0200	0.0006	0.0200	0.0006	0.00%	0.00%
0.0615	0.0019	0.0615	0.0019	0.00%	0.00%
0.0943	0.0030	0.0943	0.0030	0.00%	0.00%
0.1107	0.0035	0.1107	0.0035	0.00%	0.00%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

A equação (4.1.8) mostra a matriz de amortecimento identificada através do método direto.

$$C = \begin{bmatrix} 0.02 & -0.01 & 0 & 0 \\ -0.01 & 0.02 & -0.01 & 0 \\ 0 & -0.01 & 0.02 & -0.01 \\ 0 & 0 & -0.01 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (4.1.8)$$

Tabela (4.1.4) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método direto.

<i>RFP</i>		<i>Método Direto</i>		<i>Erro* (%) na Frequência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
0.0200	0.0006	0.0200	0.0006	0.00%	0.00%
0.0615	0.0019	0.0615	0.0019	0.00%	0.00%
0.0943	0.0030	0.0943	0.0030	0.00%	0.00%
0.1107	0.0035	0.1107	0.0035	0.00%	0.00%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

Para o exemplo numérico os métodos foram bem precisos como mostram as tabelas de (4.1.1) a (4.1.4) pois considera-se um sistema livre de ruído.

4.2 Caso 1: Sistema com dois graus de Liberdade.

A faixa de frequência para este caso foi baseada no número de modos de vibrar a ser considerado na análise. Como foi trabalhado com os dois primeiros modos de vibrar, a faixa de frequência utilizada foi de $0 - 12,5 \text{ Hz}$.

Primeiro modo de vibrar

Para a excitação do primeiro modo de vibrar, o sinal medido tem uma resolução de frequência igual a $0,03125 \text{ Hz}$, foram coletados 400 pontos numa faixa de $0-12,5 \text{ Hz}$.

Tabela (4.2.1) - Estimação dos parâmetros modais do primeiro modo de vibrar através de diferentes métodos.

	<i>Frequência Natural(Hz) (Numérico)</i>	<i>Frequência Natural(Hz)</i>	<i>Erro** (%)</i>	<i>Razão de Amortecimento</i>	<i>Autovetores</i>
CEM	2.3473	2.4082	2.596%	0.0224	(-0.000071 - 0.000374i)
ITD	2.3473	2.4030	2.374%	0.0291	(-0.000051 - 0.000401i)
RFP	2.3473	2.3907	1.851%	0.0264	(0.000006 - 0.000609i)
HEM*	2.3473	2.3473	—	0.0290	(0.000039 - 0.000410i)

(*) A Frequência natural é um dado de entrada para esse método.

$$(**) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Freq.Natural(Numérico)} - \text{Freq.Natural(Experimental)}}{\text{Freq.Natural(Numérico)}} \right| \times 100$$

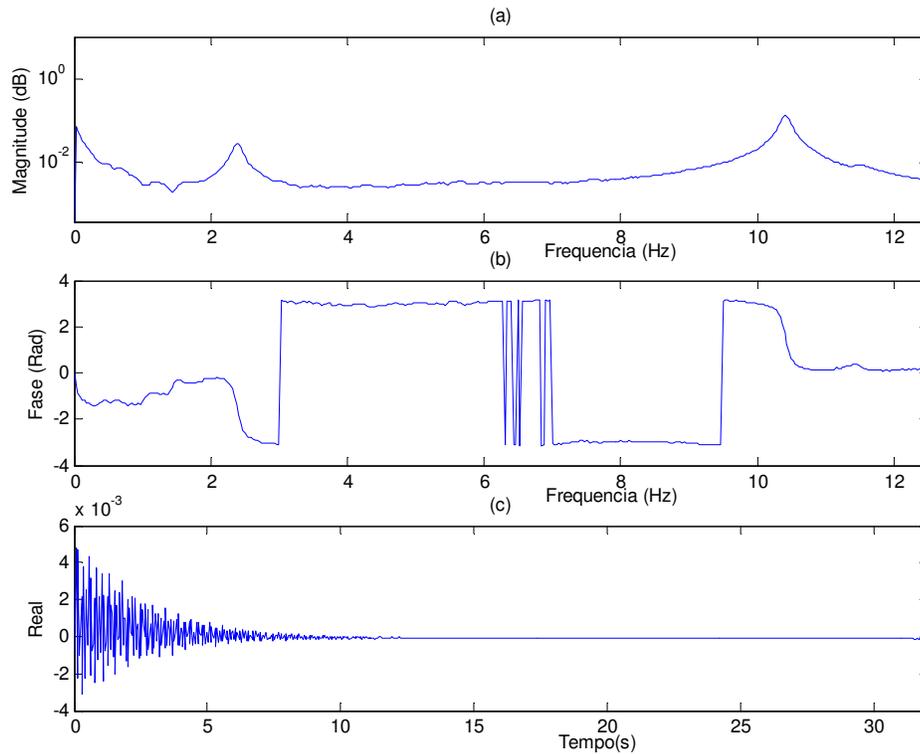


Figura (4.2.1) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.

Tabela (4.2.2) - Estimação dos parâmetros modais do primeiro modo de vibrar através de diferentes métodos.

	<i>Freqüência Natural(Hz) (Numérico)</i>	<i>Freqüência Natural(Hz)</i>	<i>Erro** (%)</i>	<i>Razão de Amortecimento</i>	<i>Autovetores</i>
CEM	2.3473	2.4003	2.258%	0.0283	(-0.000309 - 0.004505i)
ITD	2.3473	2.3996	2.227%	0.0246	(-0.0003375 - 0.0044378i)
RFP	2.3473	2.3930	1.947%	0.0263	(-0.000607 - 0.007167i)
HEM*	2.3473	2.3473	—	0.0256	(0.000603 - 0.004588i)

(*) A *Freqüência natural* é um dado de entrada para esse método.

$$(**) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Freq.Natural(Numérico)} - \text{Freq.Natural(Experimental)}}{\text{Freq.Natural(Numérico)}} \right| \times 100$$

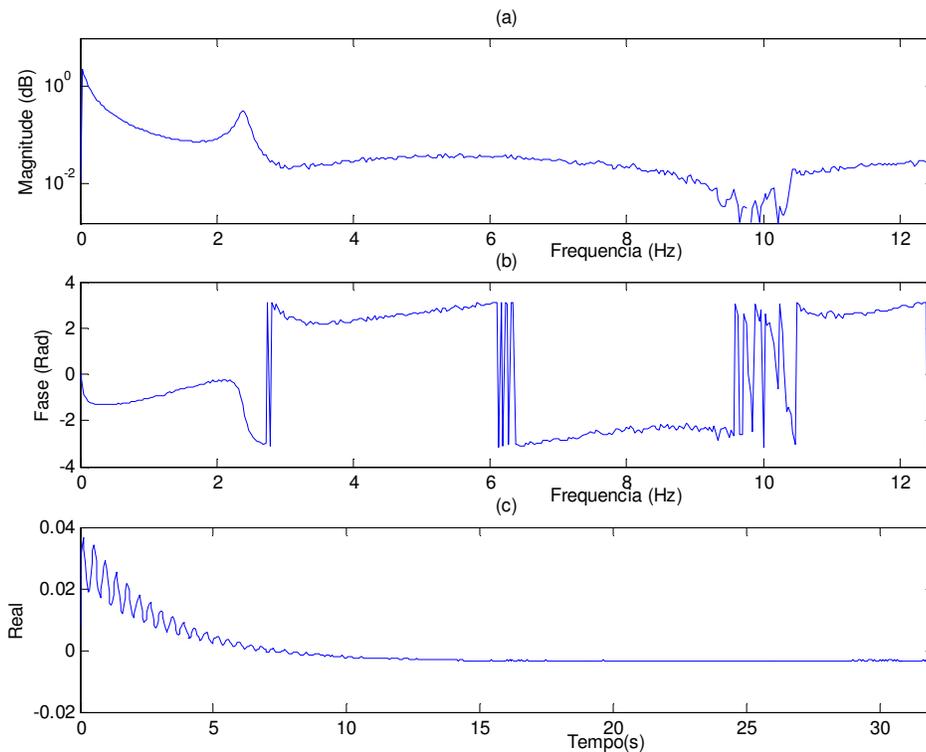


Figura (4.2.2) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.

Tabela (4.2.3) - Comparação da relação dos autovetores A_2 e A_1 teóricos, com os obtidos através das técnicas de identificação de parâmetros, referente ao primeiro modo de vibração.

	Autovetores (A2/A1)* (Numérico)	Autovetores (A2/A1)*	Erro** (%)
CEM	20.8689	21.4439	2.756%
ITD	20.8689	19.9107	4.591%
RFP	20.8689	21.3911	2.503%
HEM	20.8689	20.3434	2.518%

$$(*) \frac{A_2}{A_1} = \frac{abs(autovetor2)}{abs(autovetor1)} \cdot \frac{d_{acelerometro2}}{d_{acelerometro1}}$$

$$(**) Erro = \left| \frac{Autovetores(Numérico) - Autovetores(Experimental)}{Autovetores(Numérico)} \right| \times 100$$

Segundo modo de vibrar

Para a excitação do segundo modo de vibrar, o sinal medido tem uma resolução de frequência igual a 0,0625 Hz, foram coletados 200 pontos numa faixa de 0 -12.5 Hz.

Tabela (4.2.4) - Estimação dos parâmetros modais do segundo modo de vibrar através de diferentes métodos.

	Frequência Natural(Hz) (Numérico)	Frequência Natural(Hz)	Erro** (%)	Razão de Amortecimento	Autovetores
CEM	10.4169	10.3794	0.360%	0.0057	(0.002431 - 0.016447i)
ITD	10.4169	10.3853	0.304%	0.0056	(0.001571 - 0.016358i)
RFP	10.4169	10.4150	0.018%	0.0052	(0.000229 - 0.005712i)
HEM*	10.4169	10.4169	—	0.0053	(-0.005111 - 0.013402i)

(*) A Frequência natural é um dado de entrada para esse método.

$$(**) Erro = \left| \frac{Freq.Natural(Numérico) - Freq.Natural(Experimental)}{Freq.Natural(Numérico)} \right| \times 100$$

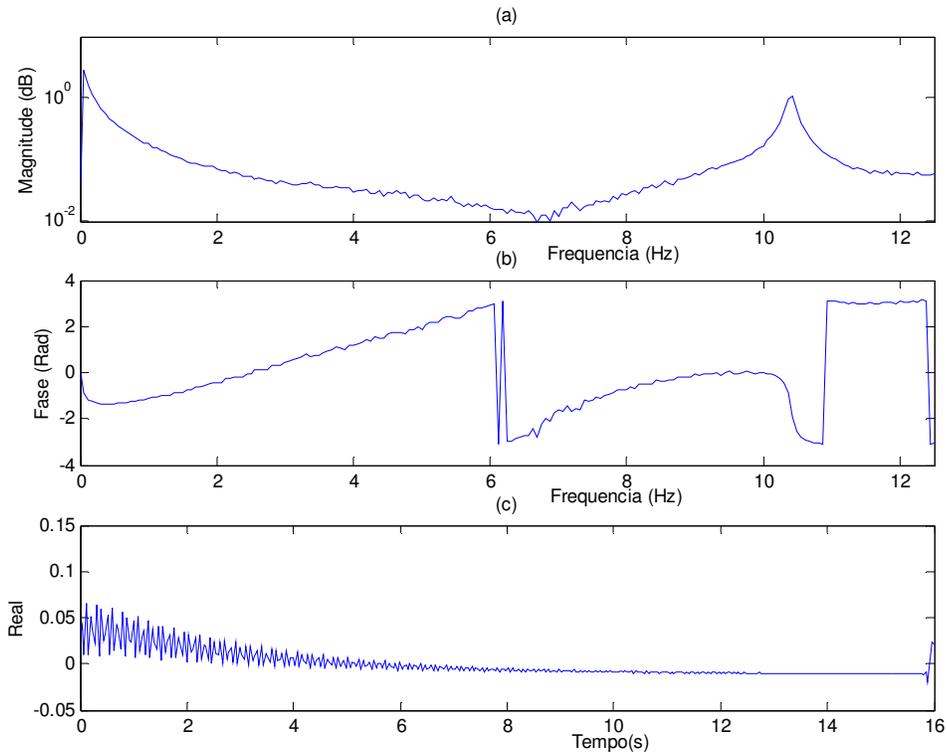


Figura (4.2.3) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.

Tabela (4.2.5) - Estimação dos parâmetros modais do segundo modo de vibrar através de diferentes métodos.

	<i>Frequência Natural(Hz) (Numérico)</i>	<i>Frequência Natural(Hz)</i>	<i>Erro** (%)</i>	<i>Razão de Amortecimento</i>	<i>Autovetores</i>
CEM	10.4169	10.3883	0.274%	0.0055	$(-0.000144 + 0.002450i)$
ITD	10.4169	10.3841	0.315%	0.0056	$(-0.000237 + 0.002474i)$
RFP	10.4169	10.4145	0.024%	0.0053	$(-0.000039 + 0.000873i)$
HEM*	10.4169	10.4169	—	0.0053	$(0.000783 + 0.002045i)$

(*) A Frequência natural é um dado de entrada para esse método.

$$(**) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Freq.Natural(Numérico)} - \text{Freq.Natural(Experimental)}}{\text{Freq.Natural(Numérico)}} \right| \times 100$$

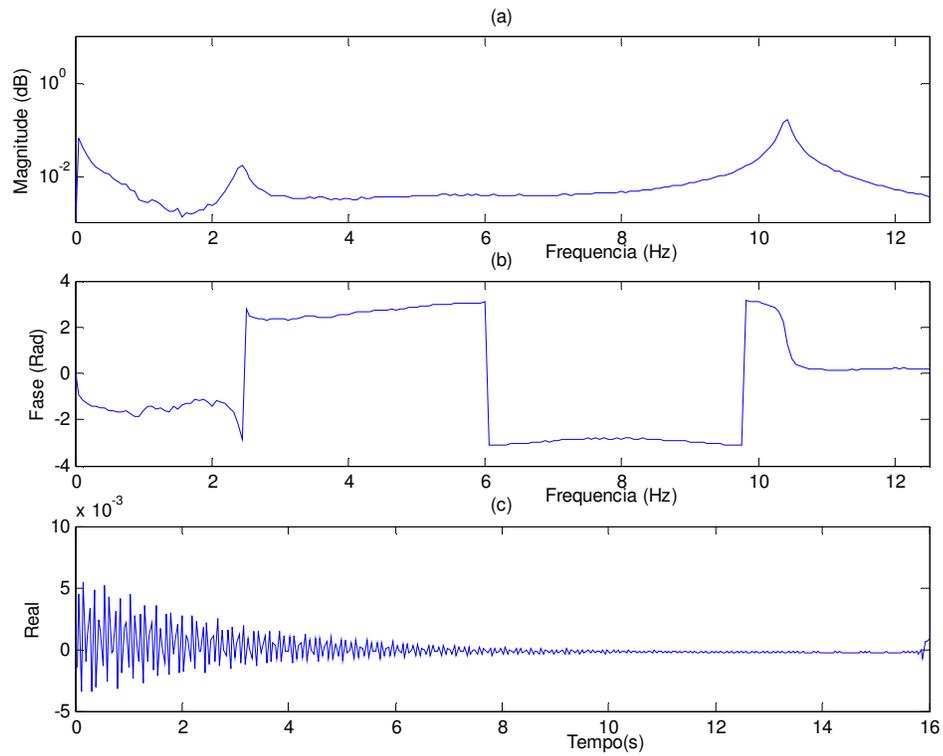


Figura (4.2.4) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.

Tabela (4.2.6) - Comparação da relação dos autovetores A_2 e A_1 teóricos, com os obtidos através das técnicas de identificação de parâmetros, referente ao segundo modo de vibração.

	<i>Autovetores (A2/A1)* (Numérico)</i>	<i>Autovetores (A2/A1)*</i>	<i>Erro** (%)</i>
<i>CEM</i>	-0.2787	-0.2675	3.983%
<i>ITD</i>	-0.2787	-0.2741	1.611%
<i>RFP</i>	-0.2787	-0.2770	0.590%
<i>HEM</i>	-0.2787	-0.2768	0.673%

$$(*) \frac{A_2}{A_1} = \frac{\text{abs}(\text{autovetor2})}{\text{abs}(\text{autovetor1})} \cdot \frac{d_{\text{acelerometro2}}}{d_{\text{acelerometro1}}}$$

$$(**) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Autovetores}(\text{Numérico}) - \text{Autovetores}(\text{Experimental})}{\text{Autovetores}(\text{Numérico})} \right| \times 100$$

A função de transferência medida foi ajustada utilizando os métodos de identificação dos parâmetros modais vistas na seção 2.1.1 a 2.1.4, aplicando para cada modo individual. As tabelas de 4.2.1 a 4.2.2 e de 4.2.4 a 4.2.5 mostram os valores ajustados da função transferência pelos métodos estudados, bem como a comparação das frequências naturais numéricas e estimadas. Através dessas tabelas, fica claro que as frequências naturais obtidas através do método fração racional polinomial (RFP) obtiveram melhores resultados. As tabelas 4.2.2 e 4.2.6 comparam os modos de vibrar estimados com os modos de vibrar numérico, e nota-se novamente que o melhor resultado obtido é pelo método RFP. Isso mostra que o melhor método de identificação de parâmetros, entre os estudados, é RFP como já havia concluído Iglesias (2000). Pode-se verificar que o modelo teórico está muito próximo do modelo experimental, e que o sistema é levemente amortecido, o que permite a aplicação das técnicas de identificação de amortecimento estrutural mostradas na seção 2.2.

A equação abaixo mostra as matrizes de massa e rigidez do sistema, determinadas a partir da equação (3.1.10).

$$M = \begin{bmatrix} 0.4943 & 0 \\ 0 & 0.0850 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 2090.9 & -95 \\ -95 & 23 \end{bmatrix} \quad (4.2.1)$$

A equação (4.2.2), obtida através da equação (2.2.1.8) mostra a matriz de amortecimento identificada a partir do método de amortecimento proporcional generalizado, descrito no item (2.2.1). A função de forma obtida através da equação (2.2.1.6), pode ser vista na equação (4.2.3), trata-se de uma função de primeiro grau. A figura (4.2.5) é o gráfico da equação (4.2.3).

$$C = \begin{bmatrix} 0.3384 & 0.0023 \\ 0.0023 & 0.0662 \end{bmatrix} \quad (4.2.2)$$

$$\xi(\omega) = 0.032612 - 0.002629 \cdot \omega \quad (4.2.3)$$

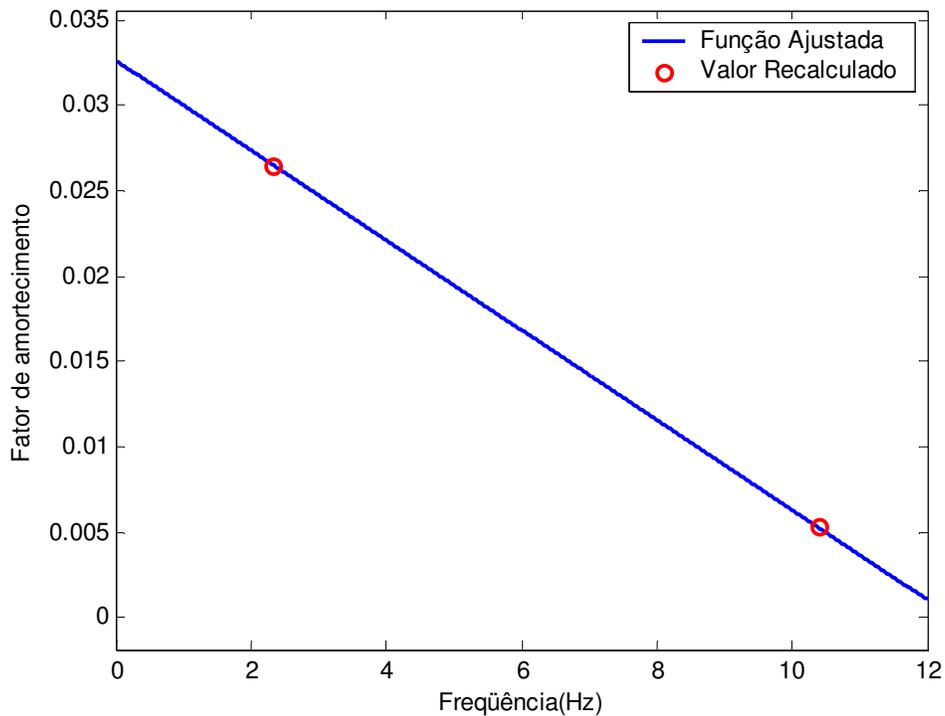


Figura (4.2.5)- Curva do fator de amortecimento para o sistema de dois graus de liberdade.

Tabela (4.2.7) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento proporcional generalizado.

<i>RFP</i>		<i>Amortecimento Proporcional Generalizado</i>		<i>Erro* (%) na Freqüência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
<i>Freqüência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Freqüência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
2.3473	0.0264	2.3464	0.0264	0.035%	0.035%
10.4169	0.0052	10.4167	0.0052	0.001%	0.002%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

As equações de (4.2.4) a (4.2.6) mostram a matriz de amortecimento identificada através do método amortecimento não proporcional, para três tipos de configurações.

1) Resultados obtidos com os autovetores do modelo numérico

$$C = \begin{bmatrix} 0.3383 & 0.0022 \\ 0.0022 & 0.0662 \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

2) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP).

$$C = \begin{bmatrix} 0.3217 & -0.0526 \\ -0.0526 & 0.0762 \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

3) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP) desconsiderando a parte imaginária.

$$C = \begin{bmatrix} 0.3320 & -0.0178 \\ -0.0178 & 0.0697 \end{bmatrix} \quad (4.2.6)$$

Tabela (4.2.8)-Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento não proporcional.

	<i>RFP</i>		<i>Método de Amortecimento Não Proporcional</i>		<i>Erro* (%) na Frequência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
<i>Modelo Numérico</i>	2.3473	0.0264	2.3465	0.0264	0.034%	0.151%
<i>Análise Experimental</i>	10.4169	0.0052	10.4167	0.0052	0.001%	0.383%
<i>Análise Experimental</i>	2.3473	0.0264	2.3464	0.0283	0.038%	7.034%
<i>s/ parte imaginária</i>	10.4169	0.0052	10.4166	0.0054	0.002%	3.448%
<i>Análise Experimental</i>	2.3473	0.0264	2.3464	0.0271	0.038%	2.496%
<i>s/ parte imaginária</i>	10.4169	0.0052	10.4167	0.0053	0.001%	1.532%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

As equações de (4.2.7) a (4.2.9) mostram a matriz de amortecimento identificada através do método iterativo, para três tipos de configurações.

1) Resultados obtidos com os autovetores do modelo numérico

$$C = \begin{bmatrix} 0.3383 & 0.0023 \\ 0.0023 & 0.0662 \end{bmatrix} \quad (4.2.7)$$

2) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP).

$$C = \begin{bmatrix} 0.2713 & -0.0231 \\ -0.0231 & 0.0741 \end{bmatrix} \quad (4.2.8)$$

3) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP) desconsiderando a parte imaginária.

$$C = \begin{bmatrix} 0.3596 & 0.0230 \\ 0.0230 & 0.0649 \end{bmatrix} \quad (4.2.9)$$

Tabela (4.2.9) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método iterativo.

	<i>RFP</i>		<i>Método Iterativo</i>		<i>Erro* (%) na Frequência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
<i>Modelo</i>	2.3473	0.0264	2.3465	0.0264	0.034%	0.151%
<i>Numérico</i>	10.4169	0.0052	10.4167	0.0052	0.001%	0.383%
<i>Análise</i>	2.3473	0.0264	2.3463	0.0286	0.042%	8.169%
<i>Experimental</i>	10.4169	0.0052	10.4168	0.0044	0.001%	15.708%
<i>Análise</i>	2.3473	0.0264	2.3464	0.0268	0.038%	1.361%
<i>Experimental s/ parte imaginária</i>	10.4169	0.0052	10.4167	0.0054	0.001%	3.448%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

As equações de (4.2.10) a (4.2.12) mostram a matriz de amortecimento identificada através do método direto, para três tipos de configurações.

1) Resultados obtidos com os autovetores do modelo numérico

$$C = \begin{bmatrix} 0.3383 & 0.0023 \\ 0.0023 & 0.0662 \end{bmatrix} \quad (4.2.10)$$

2) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP).

$$C = \begin{bmatrix} 0.3112 & -0.0071 \\ -0.0071 & 0.1014 \end{bmatrix} \quad (4.2.11)$$

3) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP) desconsiderando a parte imaginária.

$$C = \begin{bmatrix} 0.3515 & 0.0215 \\ 0.0215 & 0.0616 \end{bmatrix} \quad (4.2.12)$$

Tabela (4.2.10) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método direto.

	<i>RFP</i>		<i>Método Direto</i>		<i>Erro* (%) na Frequência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
Modelo	2.3473	0.0264	2.3465	0.0265	0.034%	0.226%
Numérico	10.4169	0.0052	10.4167	0.0052	0.001%	0.383%
Análise	2.3473	0.0264	2.3454	0.0400	0.080%	51.285%
Experimental	10.4169	0.0052	10.4167	0.0049	0.001%	6.130%
Análise	2.3473	0.0264	2.3465	0.0254	0.034%	3.933%
Experimental s/ parte imaginária	10.4169	0.0052	10.4167	0.0053	0.001%	1.532%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

4.3 Caso 2: Placa Engastada

A faixa de frequência para este caso foi baseado no número de modos de vibrar a ser considerado na análise. Considerando apenas os três primeiros modos de vibrar, foram coletados 1600 pontos numa a faixa de frequência de 0-200 Hz, o que fornece uma resolução de 0,125 Hz.

As figuras a seguir mostram os três primeiros modos de vibrar da placa engastada que foram simulados num software comercial ALGOR.

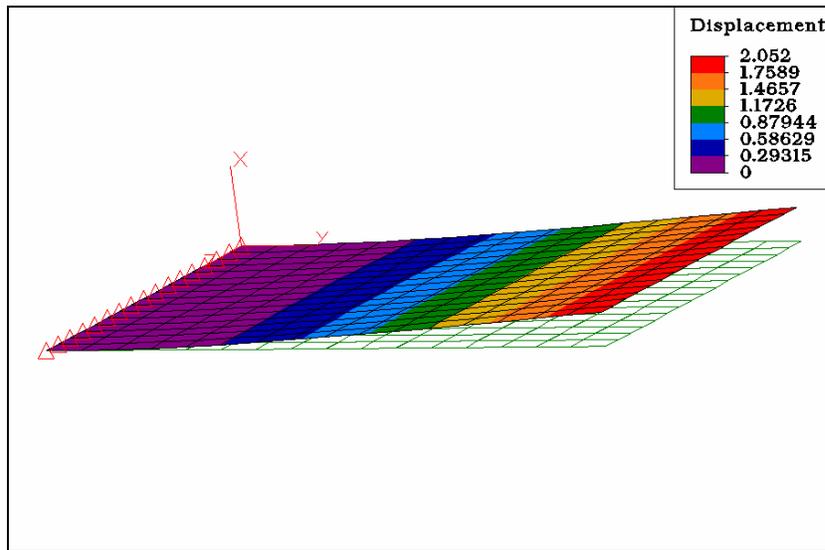


Figura (4.3.1) - Primeiro modo de vibrar ($\omega_1 = 17.5785 \text{ Hz}$).

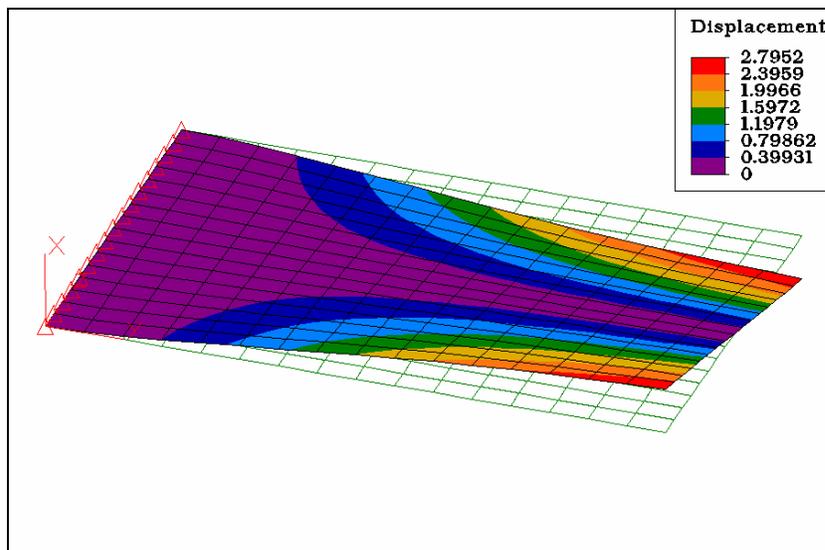


Figura (4.3.2) - Segundo modo de vibrar ($\omega_2 = 63.6524 \text{ Hz}$).

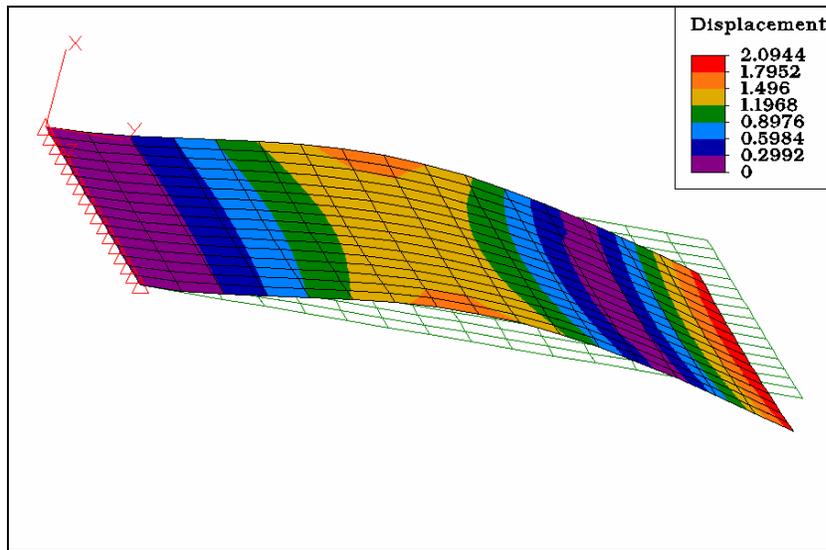


Figura (4.3.3) - Terceiro modo de vibrar($\omega_3 = 109.0570 \text{ Hz}$).

Primeiro ponto (S₁)

Tabela (4.3.1) - Estimação dos parâmetros modais através de diferentes métodos.

	<i>Frequência Natural (H z)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Autovetores</i>
ITD	16.8658	0.0031	-0.0007372 + 0.0204843i
	61.9017	0.0010	0.003106 + 0.0139855i
	105.4555	0.0029	-0.0006643 - 0.0184234i
CEM	16.8713	0.0043	0.0006525 + 0.0245658i
	61.8916	0.0012	0.0021940 + 0.0154764i
	105.5047	0.0023	-0.0020917 - 0.0164570i
RFP	16.8969	0.0044	0.0025454 + 0.0138358i
	61.9032	0.0011	0.0009564 + 0.0081571i
	105.521	0.0025	-0.0009259 - 0.0095307i
HEM	16.875	0.0045	0.0013731 + 0.0253569i
	61.875	0.0010	0.0002991 + 0.0140261i
	105.5	0.0028	-0.0020572 - 0.0181269i

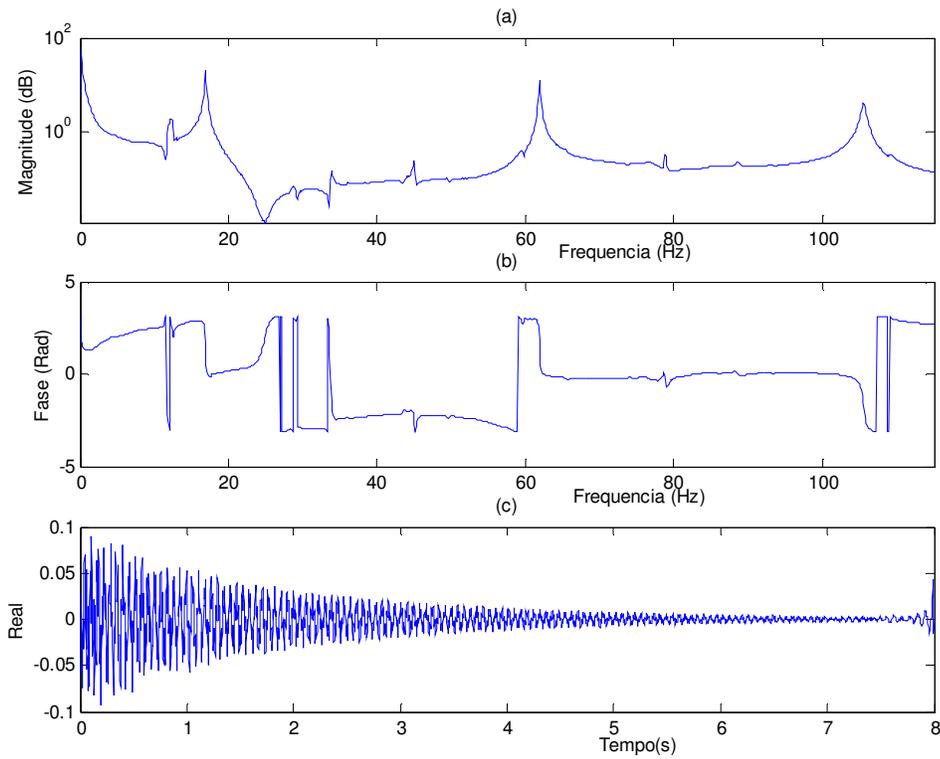


Figura (4.3.4) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.

Segundo Ponto (S₂)

Tabela (4.3.2) - Estimação dos parâmetros modais através de diferentes métodos.

	<i>Freqüência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Autovetores</i>
ITD	16.8820	0.0032	0.0018579 + 0.0214512i
	105.4744	0.0021	-0.0010728 - 0.016934i
CEM	16.8685	0.0041	0.000003 + 0.0239738i
	105.4864	0.0023	-0.0015628 - 0.017867i
RFP	16.8964	0.0044	0.0024648 + 0.0138787i
	105.5201	0.0025	-0.0008994 - 0.0103232i
HEM	16.875	0.0047	0.0013327 + 0.0258380i
	105.5	0.0024	-0.0020786 - 0.0181766i

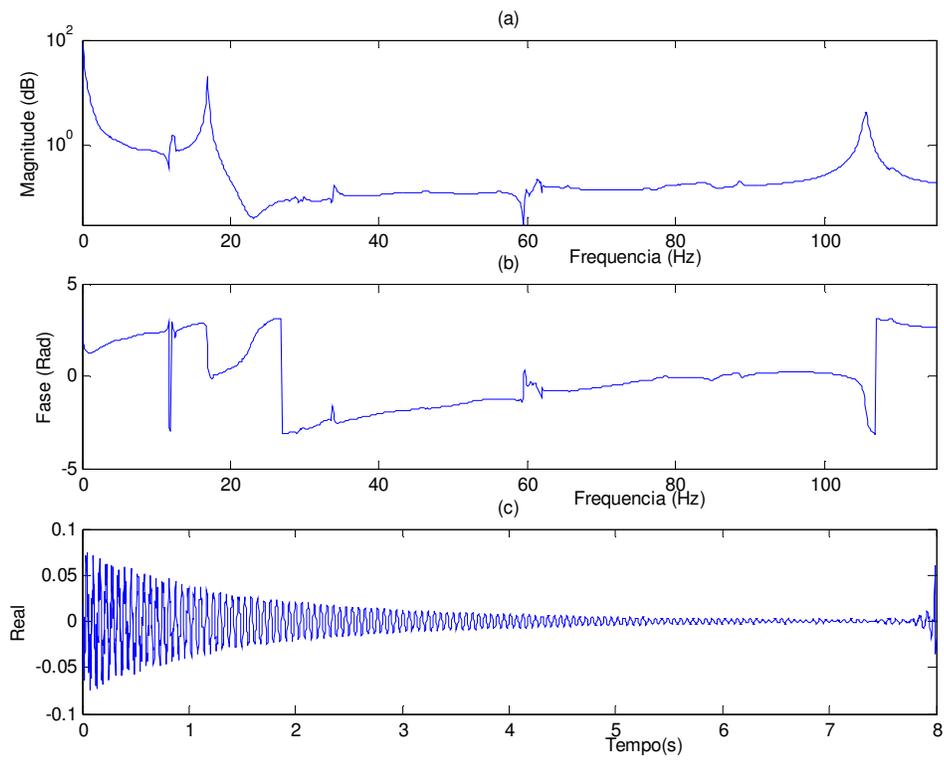


Figura (4.3.5) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.

Terceiro Ponto (S₃)

Tabela (4.3.3) - Estimação dos parâmetros modais através de diferentes métodos.

	<i>Frequência Natural(Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Autovetores</i>
<i>ITD</i>	16.9263	0.0046	0.00309914 + 0.0082007i
	61.9041	0.0011	-0.00195653 - 0.0081919i
	105.5074	0.0026	0.0020332 + 0.0148649i
<i>CEM</i>	16.9149	0.0081	0.0026164 + 0.01096329i
	61.9061	0.0011	-0.0020790 - 0.00825454i
	105.4940	0.0027	0.0016896 + 0.01500466i
<i>RFP</i>	16.8934	0.0044	0.0006668 + 0.00489828i
	61.9017	0.0010	-0.0004837 - 0.00456622i
	105.5322	0.0026	0.0011179 + 0.00815533i
<i>HEM</i>	16.875	0.0049	0.0002594 + 0.00929818i
	61.875	0.0010	-0.00020544 - 0.00834278i
	105.5	0.0024	0.00175560 + 0.01404044i

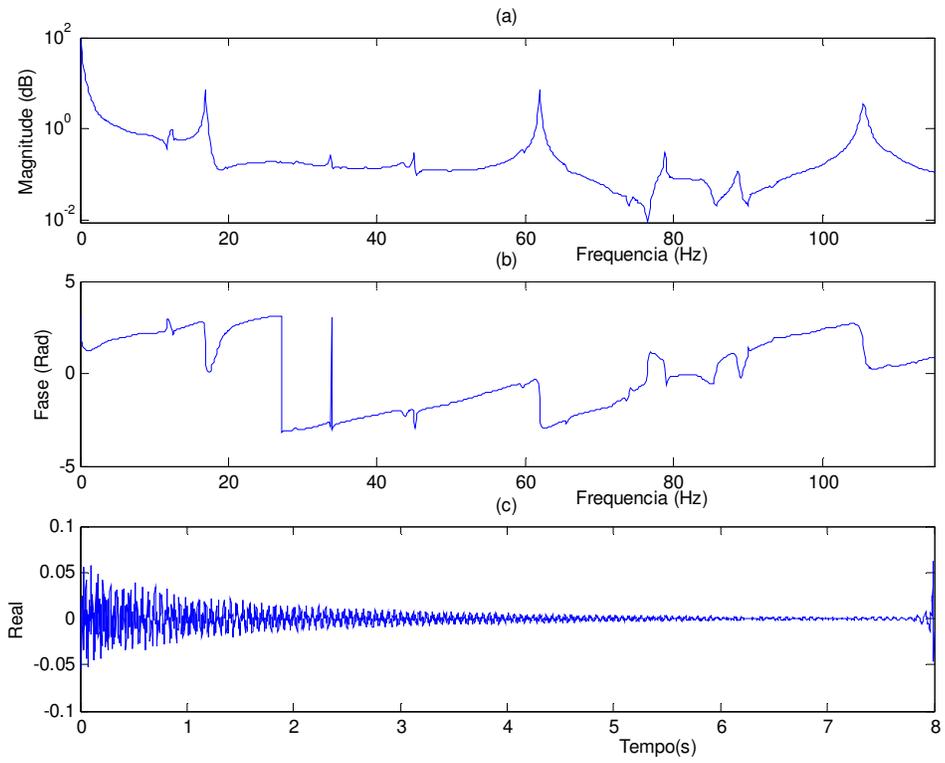


Figura (4.3.6) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.

Tabela (4.3.4) - Comparação dos resultados via FEM com os encontrados através do método de Ibrahim (ITD).

<i>FEM</i>		<i>ITD</i>			
<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Autovetores (Absoluto)</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Erro(%)</i>	<i>Autovetores (Absoluto)</i>	<i>Erro(%)</i>
17.592	2.0466	16.8913	3.98%	1.8878	7.76%
	2.0557			1.983	3.54%
	0.6743			0.8074	19.72%
63.814	2.8052	61.9029	2.99%	2.8022	0.11%
	0			0	0.00%
	-1.6167			-1.6474	1.89%
110.84	-1.9700	105.4791	4.84%	-2.2562	14.52%
	-2.1477			-2.0767	3.31%
	1.6354			1.8361	12.27%

Tabela (4.3.5) - Comparação dos resultados via FEM com os encontrados através do método exponencial complexo (CEM).

<i>FEM</i>		<i>CEM</i>			
<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Autovetores (Absoluto)</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Erro(%)</i>	<i>Autovetores (Absoluto)</i>	<i>Erro(%)</i>
17.592	2.0466	16.8849	4.02%	1.8392	10.14%
	2.0557			1.7943	12.72%
	0.6743			0.8436	25.09%
63.814	2.8052	61.8989	3.00%	2.7944	0.39%
	0			0	0.00%
	-1.6167			-1.5218	5.87%
110.84	-1.9700	105.4951	4.82%	-1.857	5.74%
	-2.1477			-2.0077	6.52%
	1.6354			1.6902	3.35%

Tabela (4.3.6) - Comparação dos resultados via FEM com os encontrados através do método fração racional polinomial (RFP).

FEM		RFP			
Frequência Natural (Hz)	Autovetores (Absoluto)	Frequência Natural (Hz)	Erro(%)	Autovetores (Absoluto)	Erro(%)
17.592	2.0466	16.8955	3.96%	2.009	1.84%
	2.0557			2.013	2.08%
	0.6743			0.706	4.69%
63.814	2.8052	61.9024	3.00%	2.8073	0.07%
	0			0	0.00%
	-1.6167			-1.5695	2.92%
110.84	-1.9700	105.5246	4.80%	-1.9344	1.81%
	-2.1477			-2.0933	2.54%
	1.6354			1.6629	1.68%

Tabela (4.3.7) - Comparação dos resultados via FEM com os encontrados através do método de envelope de Hilbert (HEM).

FEM		HEM			
Frequência Natural (Hz)	Autovetores (Absoluto)	Frequência Natural (Hz)	Erro(%)	Autovetores (Absoluto)	Erro(%)
17.592	2.0466	16.875	4.08%	1.9766	3.42%
	2.0557			2.0139	2.03%
	0.6743			0.724	7.36%
63.814	2.8052	61.875	3.04%	2.8003	0.18%
	0			0	0.00%
	-1.6167			-1.6658	3.03%
110.84	-1.9700	105.5	4.82%	-2.2027	11.81%
	-2.1477			-2.209	2.85%
	1.6354			1.7085	4.47%

A função de transferência medida foi ajustada utilizando os métodos de identificação dos parâmetros modais vistas nas seções 2.1.1 a 2.1.4, aplicando para todos modos juntos. As tabelas de 4.3.1 a 4.3.3 mostram os valores estimados da função transferência pelos métodos estudados. As tabelas 4.3.4 a 4.3.7 mostram a comparação dos modos de vibrar e frequências naturais estimados através dos métodos vistos com os obtidos através do método de elementos finitos (Fortran). Através dessas tabelas, fica claro que as frequências naturais e os modos de vibrar obtidos através do método fração racional polinomial (RFP) obtiveram melhores resultados. As figuras de 4.3.4 a 4.3.6 mostram a amplitude, a fase e a função transferência no domínio do tempo medido em cada ponto. Pode-se verificar que os resultados obtidos via métodos de elementos finitos (Fortran) estão muito próximos dos obtidos experimental, e que o sistema é levemente amortecido, o que permite a aplicação das técnicas de identificação de amortecimento estrutural mostradas na seção 2.2.

As equações (4.3.1) e (4.3.2) mostram as matrizes de massa e rigidez reduzidas, obtidas através do método IRS iterativo (Anexo A.3), reproduzindo o conjunto modal do sistema completo.

$$M_r = \begin{bmatrix} 0.3528 & -0.1009 & 0.1945 \\ -0.1009 & 0.2576 & -0.1767 \\ 0.1945 & -0.1767 & 0.2341 \end{bmatrix} \quad (4.3.1)$$

$$K_r = \begin{bmatrix} 84008.77 & -71813.24 & 47007.66 \\ -71813.24 & 84343.85 & -60456.87 \\ 47007.66 & -60456.87 & 46709.08 \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

A equação (4.3.3) obtido através da equação (2.2.1.8), mostra a matriz de amortecimento identificada a partir do método de amortecimento proporcional generalizado, descrito no item (2.2.1). A função de forma obtida através da equação

(2.2.1.6) pode ser vista na equação (4.3.4), trata-se de uma função do segundo grau.

A figura (4.3.7) é o gráfico da equação (4.3.4).

$$C = \begin{bmatrix} 0.7821 & -0.4916 & 0.4429 \\ -0.49169 & 0.5965 & -0.3889 \\ 0.4429 & -0.3889 & 0.3639 \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

$$\xi(\omega) = 0.0069889 - 0.0001628 \cdot \omega + 0.00000110 \cdot \omega^2 \quad (4.3.4)$$

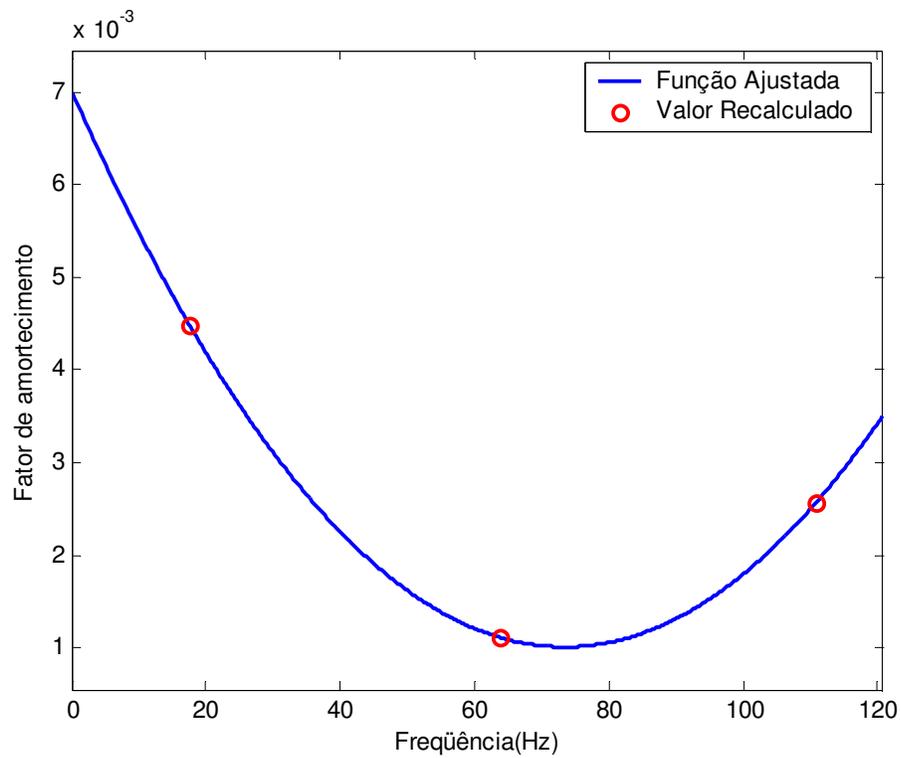


Figura (4.3.7) - Curva do fator de amortecimento para a placa engastada.

Tabela (4.3.8) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento proporcional generalizado.

<i>RFP</i>		<i>Método de Amortecimento Proporcional Generalizado</i>		<i>Erro* (%) na Freqüência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
<i>Freqüência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Freqüência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
17.5920	0.0044	17.5922	0.0044	0.001%	0.00%
63.8140	0.0011	63.8137	0.0011	0.000%	0.00%
110.840	0.0025	110.8417	0.0025	0.001%	0.00%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

As equações de (4.3.5) a (4.3.7) mostram a matriz de amortecimento identificada através do método amortecimento não proporcional, para três tipos de configurações.

1) Resultados obtidos com os autovetores do modelo numérico

$$C = \begin{bmatrix} 0.7821 & -0.4916 & 0.4429 \\ -0.4916 & 0.5964 & -0.3889 \\ 0.4429 & -0.3889 & 0.3639 \end{bmatrix} \quad (4.3.5)$$

2) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP)

$$C = \begin{bmatrix} 6.8598 & -1.8092 & 3.3693 \\ -1.8092 & 3.8442 & -3.6450 \\ 3.3693 & -3.6450 & 1.7371 \end{bmatrix} \quad (4.3.6)$$

3) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP)

desconsiderando a parte imaginária.

$$C = \begin{bmatrix} 0.7507 & -0.4704 & 0.4132 \\ -0.4704 & 0.5908 & -0.3695 \\ 0.4132 & -0.3695 & 0.3403 \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

Tabela (4.3.9) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento não proporcional.

	<i>RFP</i>		<i>Método de Amortecimento Não Proporcional</i>		<i>Erro* (%) na Frequência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
<i>Modelo Numérico</i>	17.5920	0.0045	17.5922	0.0045	0.001%	0.761%
	63.8140	0.0011	63.8138	0.0011	0.000%	0.900%
	110.8400	0.0026	110.8417	0.0026	0.001%	1.602%
<i>Análise Experimental</i>	17.5920	0.0045	17.6160	0.0012	0.136%	73.130%
	63.8140	0.0011	63.7691	0.0013	0.070%	17.117%
	110.8400	0.0026	110.7709	0.0022	0.062%	14.028%
<i>Análise Experimental s/ parte imaginária</i>	17.5920	0.0045	17.5922	0.0045	0.001%	0.761%
	63.8140	0.0011	63.8138	0.0011	0.000%	0.900%
	110.8400	0.0026	110.8417	0.0026	0.001%	1.602%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

As equações de (4.3.8) a (4.3.10) mostram a matriz de amortecimento identificada através do método iterativo, para três tipos de configurações.

- 1) Resultados obtidos com os autovetores do modelo numérico

$$C = \begin{bmatrix} 0.7821 & -0.4917 & 0.4430 \\ -0.4917 & 0.5965 & -0.3890 \\ 0.4430 & -0.3890 & 0.3640 \end{bmatrix} \quad (4.3.8)$$

- 2) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP)

$$C = \begin{bmatrix} -6.5648 & 1.6231 & -3.8587 \\ 1.6231 & 3.1434 & 0.2908 \\ -3.8587 & 0.2908 & -2.1174 \end{bmatrix} \quad (4.3.9)$$

- 3) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP) desconsiderando a parte imaginária.

$$C = \begin{bmatrix} 1.1581 & -0.5269 & 0.6371 \\ -0.5269 & 0.4586 & -0.3857 \\ 0.6371 & -0.3857 & 0.4663 \end{bmatrix} \quad (4.3.10)$$

Tabela (4.3.10) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método iterativo.

	<i>RFP</i>		<i>Método Iterativo</i>		<i>Erro* (%) na Frequência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
<i>Modelo Numérico</i>	17.5920	0.0045	17.5922	0.0045	0.001%	0.761%
	63.8140	0.0011	63.8138	0.0011	0.000%	0.900%
	110.8400	0.0026	110.8417	0.0026	0.001%	1.602%
<i>Análise Experimental</i>	17.5920	0.0045	17.5993	0.0103	0.041%	130.631%
	63.8140	0.0011	63.8124	0.0015	0.002%	35.135%
	110.8400	0.0026	110.7944	0.0033	0.041%	28.956%
<i>Análise Experimental s/ parte imaginária</i>	17.5920	0.0045	17.5920	0.0067	0.000%	50.022%
	63.8140	0.0011	63.8138	0.0011	0.000%	0.900%
	110.8400	0.0026	110.8416	0.0024	0.001%	6.213%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTUDO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

As equações de (4.3.11) a (4.3.13) mostram a matriz de amortecimento identificada através do método direto, para três tipos de configurações.

- 1) Resultados obtidos com os autovetores do modelo numérico

$$C = \begin{bmatrix} 0.7821 & -0.4916 & 0.4429 \\ -0.4916 & 0.5965 & -0.3889 \\ 0.4429 & -0.3889 & 0.3639 \end{bmatrix} \quad (4.3.11)$$

2) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP)

$$C = \begin{bmatrix} -6.4220 & 1.7625 & -3.7741 \\ 1.7625 & 3.0750 & 0.3787 \\ -3.7741 & 0.3787 & -2.0763 \end{bmatrix} \quad (4.3.12)$$

3) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP) desconsiderando a parte imaginária.

$$C = \begin{bmatrix} 1.1186 & -0.5359 & 0.6131 \\ -0.5359 & 0.4538 & -0.3888 \\ 0.6131 & -0.3888 & 0.4493 \end{bmatrix} \quad (4.3.13)$$

Tabela (4.3.11) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método direto.

	<i>RFP</i>		<i>Método Direto</i>		<i>Erro* (%) na Frequência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
Modelo Numérico	17.5920	0.0045	17.5922	0.0045	0.001%	0.761%
	63.8140	0.0011	63.8138	0.0011	0.000%	0.900%
	110.8400	0.0026	110.8417	0.0026	0.001%	1.602%
Análise Experimental	17.5920	0.0045	17.6001	0.0044	0.046%	1.477%
	63.8140	0.0011	63.8124	0.0014	0.002%	26.126%
	110.8400	0.0026	110.8417	0.0029	0.001%	13.325%
Análise Experimental s/ parte imaginária	17.5920	0.0045	17.5921	0.0056	0.000%	25.391%
	63.8140	0.0011	63.8138	0.0011	0.000%	0.900%
	110.8400	0.0026	110.8416	0.0024	0.001%	6.213%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

4.4 Caso 3: Sistema de cabos de linhas de transmissão

Considerou-se os três primeiros modos de vibrar, sendo coletados 800 pontos numa a faixa de frequência de 0-25 Hz, o que fornece uma resolução de 0,03125 Hz. Neste caso foi utilizado somente o método fração racional polinomial (RFP) para a identificação dos parâmetros modais.

Primeiro Ponto

Tabela (4.4.1) - Estimação dos parâmetros modais através do método RFP para o primeiro ponto medido.

	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Autovetores</i>
RFP	2.1568	0.0031	0.0004 - 0.0049i
	6.4114	0.0015	0.0055 +0.0214i

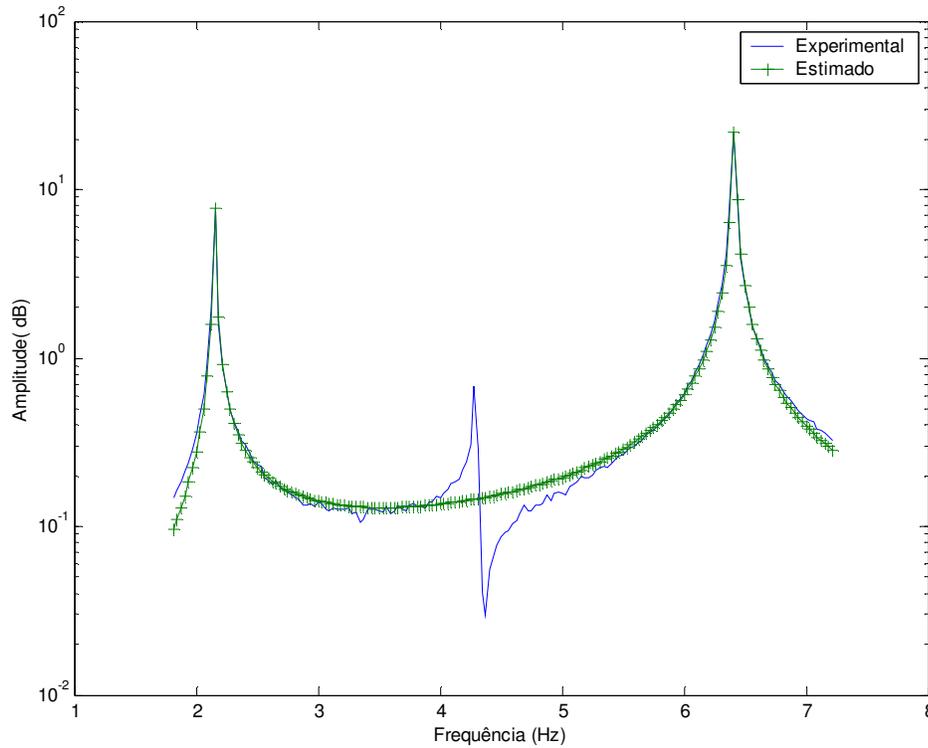


Figura (4.4.1) - Gráfico da FRF experimental e ajustado pelo RFP .

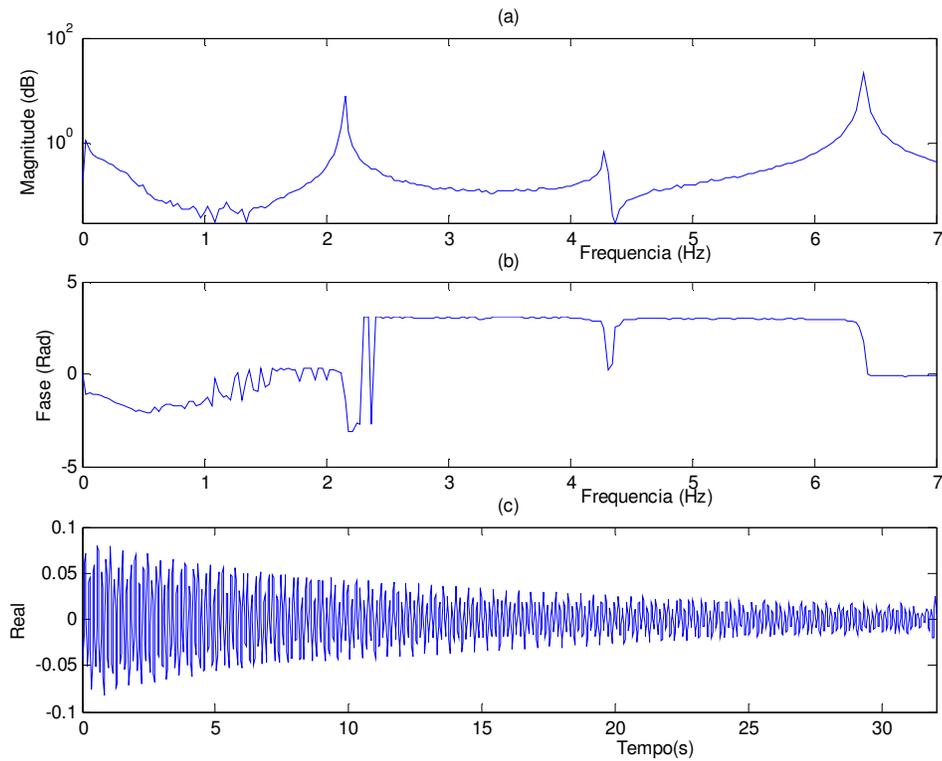


Figura (4.4.2) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF

Segundo Ponto

Tabela (4.4.2) - Estimação dos parâmetros modais através do método RFP para o segundo ponto medido.

	<i>Freqüência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Autovetores</i>
RFP	2.1568	0.0031	0.0004 - 0.0045i
	4.2931	0.0017	-0.0030 - 0.0146i
	6.4116	0.0015	0.0024 + 0.0084i

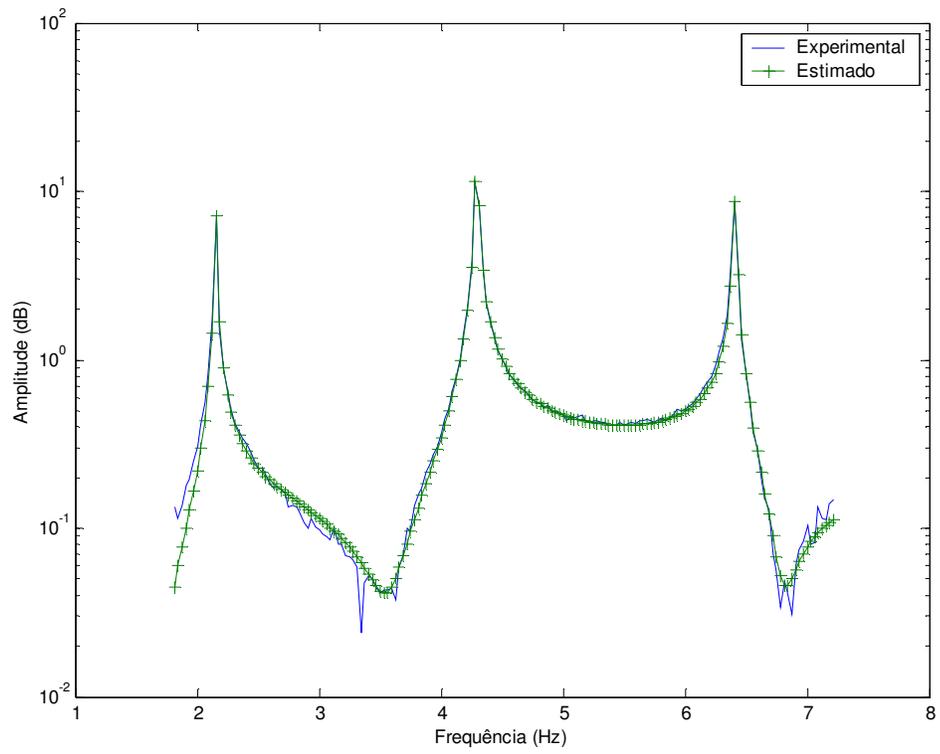


Figura (4.4.3) - Gráfico da FRF experimental e ajustado pelo RFP.

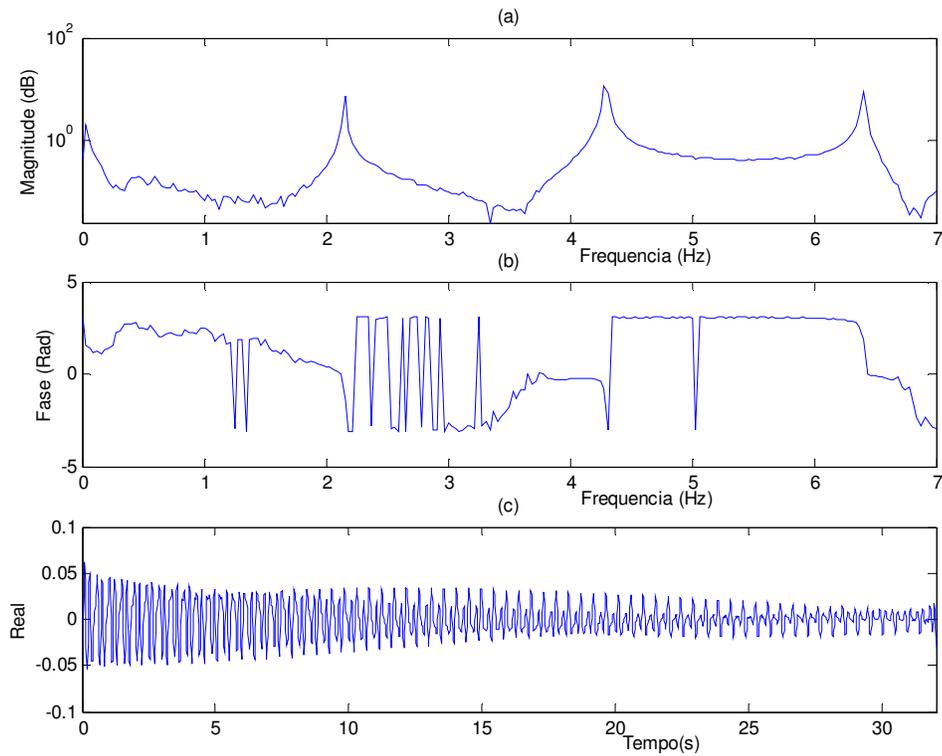


Figura (4.4.4) - (a) FRF, (b) Ângulo de fase e (c) IRF calculado a partir de FRF.

Terceiro Ponto

Tabela (4.4.3) - Estimação dos parâmetros modais através do método RFP para o terceiro ponto medido.

	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Autovetores</i>
RFP	2.1534	0.0030	0.0004 - 0.0036i
	4.2932	0.0017	-0.0046 - 0.0214i
	6.4115	0.0015	-0.0042 - 0.0150i

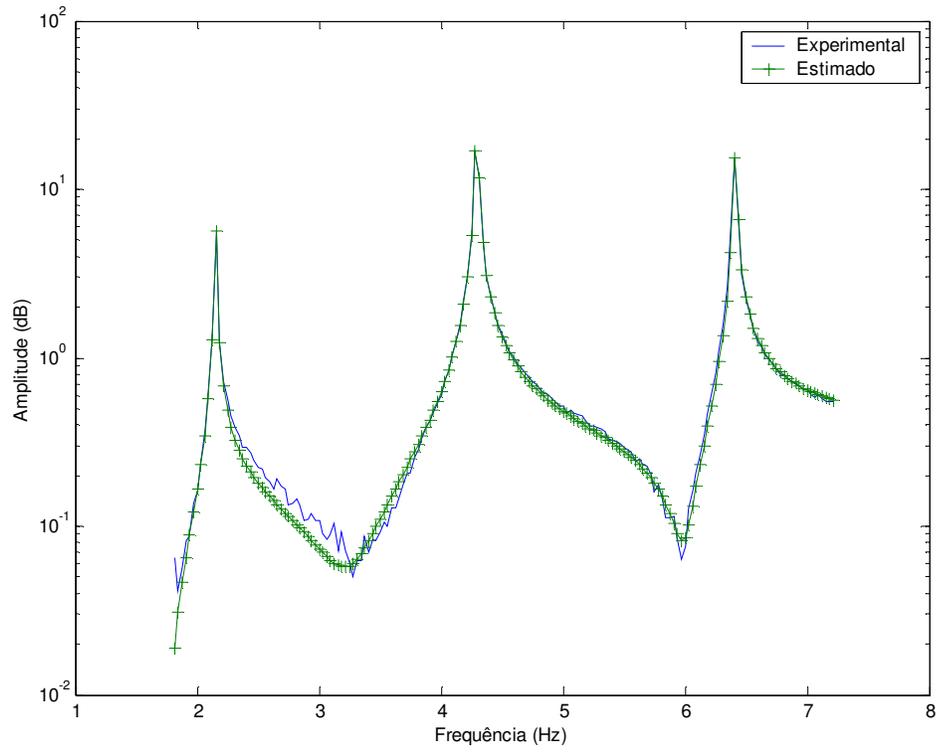


Figura (4.4.5) - Gráfico da FRF experimental e ajustado pelo RFP .

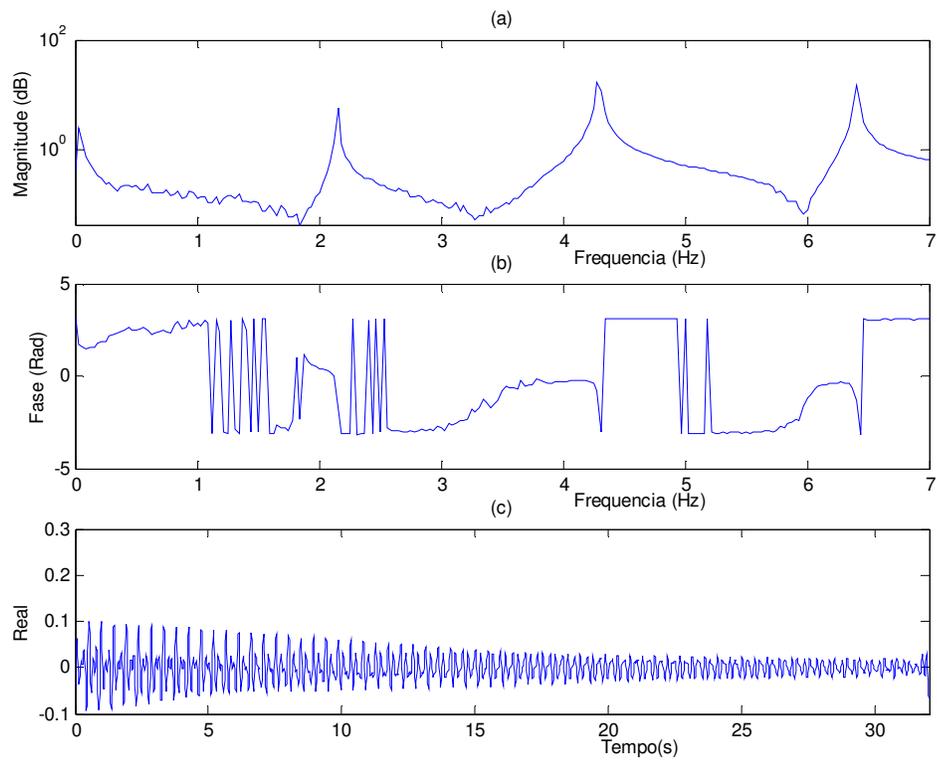


Figura (4.4.6) - (a) FRF, (b) $\hat{\text{Ângulo de fase}}$ e (c) IRF calculado a partir de FRF.

Tabela (4.4.4) - Comparação dos resultados via FEM com os encontrados experimentalmente através do método fração polinomial (RFP).

<i>FEM</i>		<i>RFP</i>			
<i>Freqüência Natural (Hz)</i>	<i>Autovetores (Absoluto)</i>	<i>Freqüência Natural (Hz)</i>	<i>Erro(%)</i>	<i>Autovetores (Absoluto)</i>	<i>Erro(%)</i>
2.1609	0.1951	2.1558	0.24%	0.1917	1.72%
	0.2549			0.2368	7.11%
	0.2759			0.2576	6.64%
4.3219	0.2760	4.2933	0.66%	0.2988	8.26%
	0.1951			0.2035	0.00%
	0.0000			0.0000	0.00%
6.4830	-0.1952	6.4117	1.10%	-0.1897	2.80%
	0.1057			0.1063	0.62%
	0.2761			0.2695	2.38%

Os três primeiros modos de vibrar da amostra de cabo estão representados nas figuras de (4.4.7) a (4.4.9).

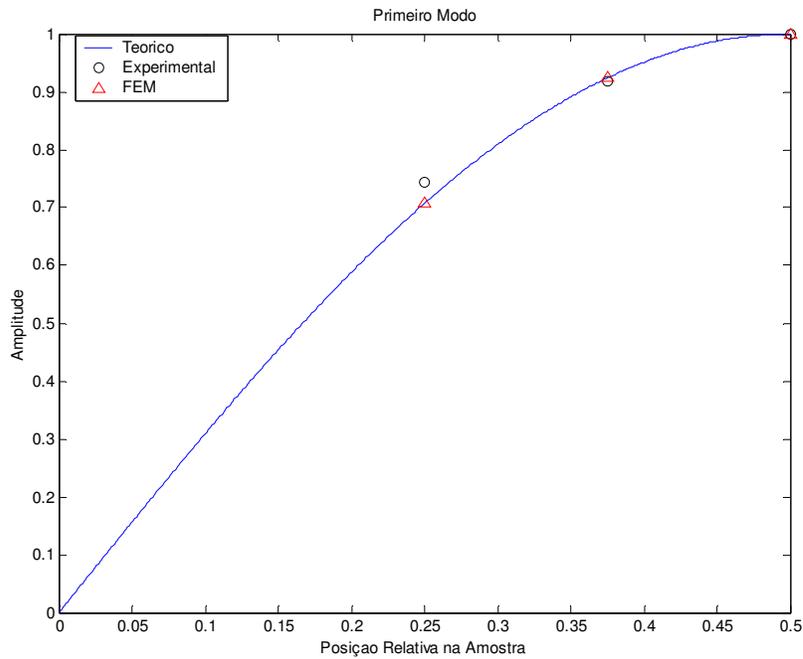


Figura (4.4.7) - Primeiro modo de vibrar do cabo

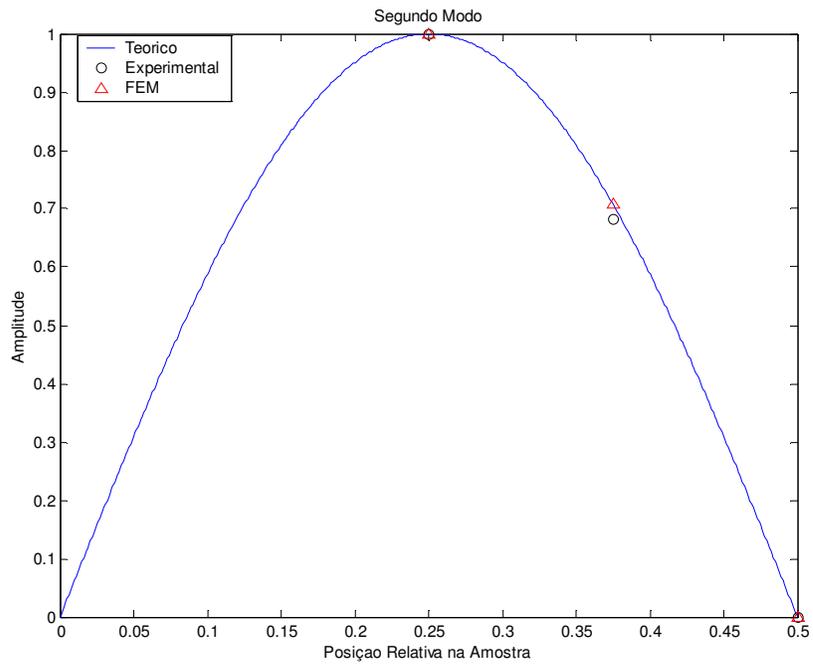


Figura (4.4.8) - Segundo modo de vibrar do cabo

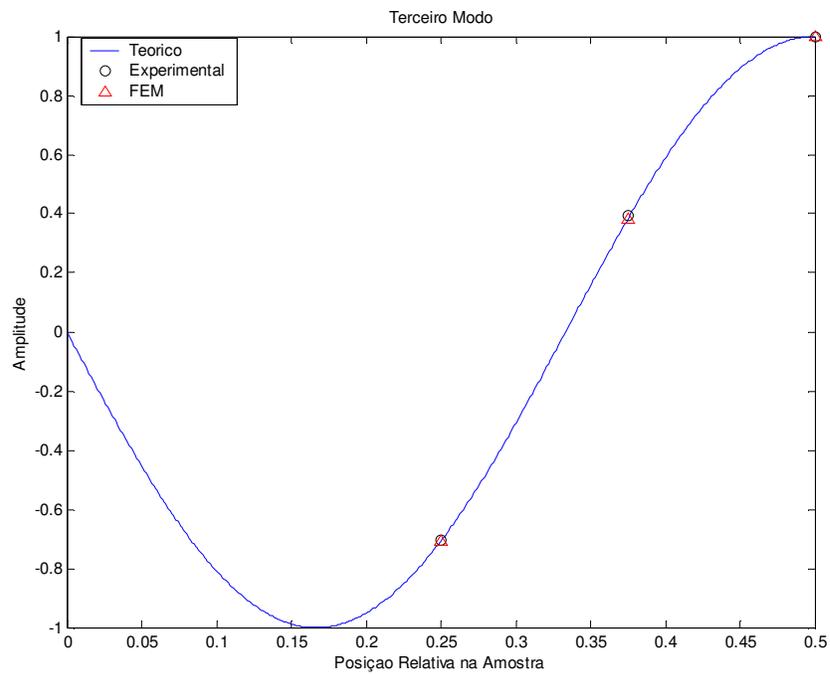


Figura (4.4.9) - Terceiro modo de vibrar do cabo

A função de transferência medida foi ajustada utilizando o método de identificação dos parâmetros modais que utiliza dados no domínio da frequência chamado método fração racional polinomial (RFP), o qual foi aplicado para todos modos juntos. As tabelas de 4.4.1 a 4.4.3 mostram os valores ajustados da função transferência pelo método RFP e as figuras 4.4.1, 4.4.3 e 4.4.5 mostram as amplitudes das funções transferências medidas e ajustadas para cada ponto. A tabela 4.4.4 mostra a comparação dos modos de vibrar e frequências naturais estimados através do método RFP com os obtidos através do modelo numérico. As figuras (4.4.7) a (4.4.9) apresentam os três primeiros modos de vibrar do cabo. Nota-se que há uma grande concordância entre os resultados obtidos experimentalmente, teóricos e via elementos finitos (FEM). As figuras de 4.4.2, 4.4.4 e 4.4.6 mostram a amplitude, a fase e a função transferência no domínio do tempo medido em cada ponto. Pode-se verificar que os resultados obtidos numericamente estão muito próximos dos obtidos experimentalmente, e que o sistema é levemente amortecido, o que possibilita a aplicação das técnicas de identificação de amortecimento estrutural mostradas na seção 2.2.

As equações (4.4.1) e (4.4.2) mostram as matrizes de massa e rigidez reduzidas, obtidas através do método IRS iterativo (Anexo A.3), reproduzindo o conjunto modal do sistema completo.

$$M_r = \begin{bmatrix} 80.5582 & -135.8137 & 88.7432 \\ -135.8137 & 249.2906 & -162.8904 \\ 88.7432 & -162.8904 & 113.0025 \end{bmatrix} \quad (4.4.1)$$

$$K_r = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0.7089 & -1.1640 & 0.6114 \\ -1.1640 & 2.0681 & -1.1403 \\ 0.6114 & -1.1403 & 0.6678 \end{bmatrix} \quad (4.4.2)$$

A equação (4.4.3) mostra a matriz de amortecimento identificada a partir do método de amortecimento proporcional generalizado. A função de forma obtida pode ser vista na equação (4.4.4), trata-se de uma função do segundo grau. A figura (4.4.10) é o gráfico da equação (4.4.4).

$$C = \begin{bmatrix} 8.7283 & -14.4401 & 9.1571 \\ -14.4401 & 25.9016 & -16.5308 \\ 9.1571 & -16.5308 & 11.2800 \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

$$\xi(\omega) = 0.00710 - 0.0019 \cdot \omega + 0.000175 \cdot \omega^2 \quad (4.4.4)$$

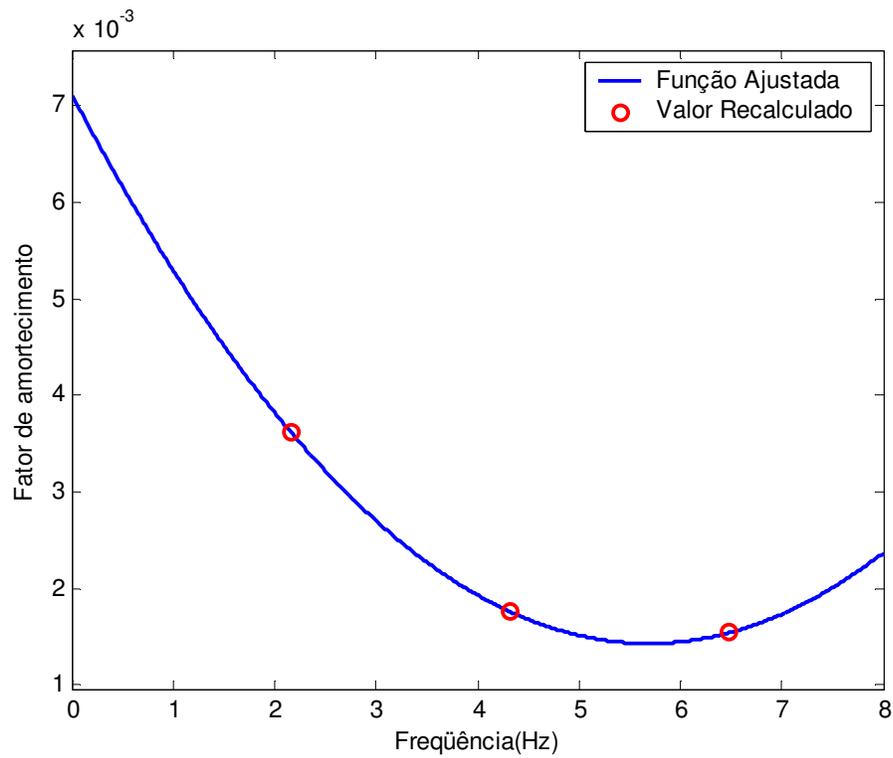


Figura (4.4.10) - Curva do fator de amortecimento para o sistema de cabo.

Tabela (4.4.5) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento proporcional generalizado.

<i>RFP</i>		<i>Método de Amortecimento Proporcional Generalizado</i>		<i>Erro* (%) na Freqüência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
<i>Freqüência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Freqüência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
2.1609	0.0036	2.1645	0.0036	0.165%	0.487%
4.3219	0.0018	4.3209	0.0018	0.023%	2.092%
6.4830	0.0015	6.4830	0.0015	0.000%	2.844%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

As equações de (4.4.5) a (4.4.7) mostram a matriz de amortecimento identificada através do método amortecimento não proporcional, para três tipos de configurações.

1) Resultados obtidos com os autovetores do modelo numérico

$$C = \begin{bmatrix} 8.7320 & -14.4464 & 9.1604 \\ -14.4464 & 25.9119 & -16.5358 \\ 9.1604 & -16.5358 & 11.2816 \end{bmatrix} \quad (4.4.5)$$

2) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP)

$$C = 1000 \times \begin{bmatrix} 0.5711 & -0.9710 & 0.6305 \\ -0.9710 & 1.6219 & -1.0602 \\ 0.6305 & -1.0602 & 0.6540 \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

3) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP) desconsiderando a parte imaginária.

$$C = \begin{bmatrix} 8.4634 & -14.2311 & 8.9913 \\ -14.2311 & 25.8552 & -16.4127 \\ 8.9913 & -16.4127 & 11.2071 \end{bmatrix} \quad (4.4.7)$$

Tabela (4.4.6) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método de amortecimento não proporcional.

	<i>RFP</i>		<i>Método de Amortecimento Não Proporcional</i>		<i>Erro* (%) na Frequência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
<i>Modelo Numérico</i>	2.1609	0.0036	2.1645	0.0036	0.165%	0.487%
	4.3219	0.0018	4.3209	0.0018	0.023%	2.092%
	6.4830	0.0015	6.4830	0.0015	0.000%	2.844%
<i>Análise Experimental</i>	2.1609	0.0036	2.2029	0.0351	1.942%	870.252%
	4.3219	0.0018	4.2983	0.0151	0.546%	756.443%
	6.4830	0.0015	6.3990	0.0014	1.296%	9.321%
<i>Análise Experimental s/ parte imaginária</i>	2.1609	0.0036	2.1645	0.0036	0.165%	0.487%
	4.3219	0.0018	4.3209	0.0018	0.023%	2.092%
	6.4830	0.0015	6.4830	0.0015	0.000%	2.844%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

As equações de (4.4.8) a (4.4.10) mostram a matriz de amortecimento identificada através do método iterativo, para três tipos de configurações.

1) Resultados obtidos com os autovetores do modelo numérico

$$C = \begin{bmatrix} 8.7199 & -14.4255 & 9.1480 \\ -14.4255 & 25.8769 & -16.5162 \\ 9.1480 & -16.5162 & 11.2716 \end{bmatrix} \quad (4.4.8)$$

2) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP)

$$C = \begin{bmatrix} -173.6554 & 284.3900 & -178.5707 \\ 284.3900 & -453.0179 & 268.6563 \\ -178.5707 & 268.6563 & -146.8172 \end{bmatrix} \quad (4.4.9)$$

- 3) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP) desconsiderando a parte imaginária.

$$C = \begin{bmatrix} 9.0835 & -14.8468 & 9.4339 \\ -14.8468 & 26.3387 & -16.8580 \\ 9.4339 & -16.8580 & 11.4774 \end{bmatrix} \quad (4.4.10)$$

Tabela (4.4.7) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método iterativo.

	<i>RFP</i>		<i>Método Iterativo</i>		<i>Erro* (%) na Frequência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
<i>Modelo Numérico</i>	2.1609	0.0036	2.1645	0.0036	0.165%	0.487%
	4.3219	0.0018	4.3209	0.0018	0.023%	2.092%
	6.4830	0.0015	6.4830	0.0015	0.000%	2.844%
<i>Análise Experimental</i>	2.1609	0.0036	2.1665	0.0137	0.257%	278.702%
	4.3219	0.0018	4.3272	0.0029	0.122%	64.482%
	6.4830	0.0015	6.4671	0.0039	0.245%	152.603%
<i>Análise Experimental s/ parte imaginária</i>	2.1609	0.0036	2.1645	0.0036	0.165%	0.487%
	4.3219	0.0018	4.3209	0.0018	0.023%	2.092%
	6.4830	0.0015	6.4830	0.0016	0.000%	3.632%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

As equações de (4.4.11) a (4.4.13) mostram a matriz de amortecimento identificada através do método direto, para três tipos de configurações.

- 1) Resultados obtidos com os autovetores do modelo numérico

$$C = \begin{bmatrix} 8.7175 & -14.4224 & 9.1451 \\ -14.4224 & 25.8733 & -16.5126 \\ 9.1451 & -16.5126 & 11.2683 \end{bmatrix} \quad (4.4.11)$$

2) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP)

$$C = \begin{bmatrix} -168.6580 & 279.0105 & -171.5325 \\ 279.0105 & -450.4612 & 261.8025 \\ -171.5325 & 261.8025 & -138.3978 \end{bmatrix} \quad (4.4.12)$$

3) Resultados obtidos com os autovetores da análise experimental (RFP) desconsiderando a parte imaginária.

$$C = \begin{bmatrix} 8.9961 & -14.7154 & 9.3373 \\ -14.7154 & 26.1350 & -16.7091 \\ 9.3373 & -16.7091 & 11.3628 \end{bmatrix} \quad (4.4.13)$$

Tabela (4.4.8) - Comparação dos parâmetros modais obtidos antes e depois do método direto.

	<i>RFP</i>		<i>Método Direto</i>		<i>Erro* (%) na Frequência Natural</i>	<i>Erro* (%) no Fator de amortecimento</i>
	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>	<i>Frequência Natural (Hz)</i>	<i>Fator de amortecimento</i>		
Modelo Numérico	2.1609	0.0036	2.1645	0.0036	0.165%	0.487%
	4.3219	0.0018	4.3209	0.0018	0.023%	2.092%
	6.4830	0.0015	6.4830	0.0015	0.000%	2.844%
Análise Experimental	2.1609	0.0036	2.1667	0.0043	0.267%	18.862%
	4.3219	0.0018	4.3272	0.0010	0.122%	43.281%
	6.4830	0.0015	6.4671	0.0030	0.245%	94.310%
Análise Experimental s/ parte imaginária	2.1609	0.0036	2.1645	0.0036	0.165%	0.487%
	4.3219	0.0018	4.3209	0.0018	0.023%	2.092%
	6.4830	0.0015	6.4830	0.0016	0.000%	3.632%

$$(*) \text{ Erro} = \left| \frac{\text{Valor}(RFP) - \text{Valor}(MÉTODO)}{\text{Valor}(RFP)} \right| \times 100$$

Capítulo 5

Conclusões e sugestões

Neste trabalho foram apresentados os estudos de algumas técnicas de identificação de amortecimento estrutural aplicados em sistemas mecânicos. Para o estudo foram abordadas algumas técnicas de identificação de parâmetros modais: o método exponencial complexo (CEM), o método de identificação de Ibrahim (ITD), o método frações racionais polinomiais (RFP) e o método do envelope de Hilbert (HEM). O método das frações racionais polinomiais (RFP) apresentou melhores resultados tal como havia sido concluído por Iglesias (2000).

A técnica de amortecimento proporcional generalizado apresentou ótimos resultados, convergindo bem em todos os casos pois a entrada de dados é feita a partir do modelo teórico, o que elimina qualquer tipo de erros e ruídos.

Os demais métodos apresentaram bons resultados trabalhando-se com dados teóricos, o mesmo não aconteceu com a utilização de dados experimentais cujos valores foram ruins. Ressalta-se que neste caso estão presentes nos autovetores as partes imaginárias que são muito sensíveis a erros. Nos métodos considera-se que as partes reais do autovetores são proporcionais às partes imaginárias, o que na prática não ocorre devido à presença de ruídos.

Nota-se que desconsiderando a parte imaginária dos autovetores medidos experimentalmente as técnicas apresentaram resultados relativamente bons e convergindo para os resultados esperados. Isto ocorre devido ao fato de que as partes reais dos autovetores experimentais estão próximos dos valores das partes reais dos

autovetores numéricos.

Notou-se em todos os casos que ,considerando-se valores teóricos (conhecidos) dos parâmetros do sistema, todos os métodos convergem rapidamente para a solução desejada.

Contudo, todos os métodos são extremamente sensíveis a pequenas modificações (diferenças) entre os autovalores e autovetores numéricos e experimentais. Estas diferenças podem conduzir a resultados incorretos.

Ressalta-se que em todos os casos analisados, o amortecimento estrutural possui valores baixos, o que pode acarretar dificuldades inerentes na obtenção dos autovetores (principalmente partes imaginárias).

A grande limitação na aplicação dos métodos está justamente na obtenção dos valores modais experimentais.

Recomendações para futuros trabalhos:

- Análise de sensibilidade de parâmetros para escolha e modificações de parâmetros de massa, rigidez e amortecimento através do ajuste de FRFs.
- Aplicação da técnica para modelos bem comportados (todos os parâmetros conhecidos)
- Inclusão de métodos levando-se em consideração sistemas com maior nível de amortecimento.
- Estudos de sistemas superamortecidos
- Estudo de sistemas com outros tipos de amortecimento.

Referências Bibliográficas

- Adhikari, S., 2000 “Damping models for structural vibration”. Phd Thesis. Cambridge University.
- Adhikari, S., Woodhouse, J., 2001 “Identification of damping: part 1, viscous damping”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 243, n. 1, pp. 43-61.
- Adhikari, S., Woodhouse, J., 2001, “Identification of damping: part 2, non-viscous damping”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 243, n. 1, pp. 63-88.
- Adhikari, S., Woodhouse, J., 2001, “Identification of damping: part 3, symmetry-preserving methods”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 251, n. 3, pp. 477-490.
- Barbieri, N., Souza Jr., O. H.; Barbieri, R., 2003a. “Dynamical analysis of transmission line cables. Parte 1- Linear Theory”. *Mechanical Systems and Signal Processing*. (aceito para publicação)
- Barbieri, N., Souza Jr., O. H.; Barbieri, R., 2003b. “Dynamical analysis of transmission line cables. Parte 2- Damping estimation”. *Mechanical Systems and Signal Processing*. (aceito para publicação)
- Baruch, M., 1998, “Damage detection based on reduced measurements”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol 12, n. 1, pp. 23-46.
- Borges, A. S., 2001, “Geração de Modelos de Predição e Diagnóstico Interagindo Resultados de Elementos Finitos e Testes Experimentais de Análise Modal”,

Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual de São Paulo.

Bosse, A., Tasker, F., Fisher, S., 1998, "Real-time modal parameter estimation using subspace methods: applications", vol. 12, n. 6, pp. 809-823.

Cha, P. D., Gu, W., 2000, "Model updating using an incomplete set of experimental modes", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 233, n. 4, pp. 587-600.

Dalenbring, M., 1999, "Damping function estimation based on measured vibration frequency responses and finite-element displacement modes", *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 13, n. 4, pp. 547-569.

Ewins, D. J., *Modal Testing: Theory and Practice*, Research Studies Press Ltd., England 1984.

Friswell, M. I., Garvey, S. D., Penny, J. E. T., 1995, "Model reduction using dynamic and iterated IRS techniques", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 186, n. 2, pp. 311-323.

Friswell, M. I., Garvey, S. D., Penny, J. E. T., 1998, "The convergence of the iterated IRS method", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 211, n. 1, pp. 123-132.

Friswell, M. I., Penny, J. E. T., Garvey, S. D., 1996, "The Application of the IRS and Balanced Realization Methods to Obtain Reduced Models of Structures with Local Non-Linearities", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 196, n. 4, pp. 453-468.

Friswell, M.I., Inman, D.J., and Pilkey, D.F., 1998, "Direct Updating of Damping and Stiffness Matrices", *AIAA Journal*, Vol. 36, No. 3, pp. 491-493.

Grafe, H., 1998, "Model updating of large structural dynamics models using measured response functions". PhD. Thesis. University of London.

Hanselman, D. e Littlefield, B., 1999, "MATLAB 5 Versão do Estudante- Guia do Usuário", Makron books do Brasil Editora Ltda, São Paulo.

- Iglesias, A.M.2000, “Investigating various modal analysis extraction techniques to estimate damping ratio”. Dissertação de mestrado. Virginia Polytechnic Institute and State University.
- John H. Mathews and Kurtis D. Fink, 1999, “Numerical Methods Using MatLab”, third edition, Prentice Hall, Inc., NJ.
- Lamarque, C.H. , Pernot, S., and Cuer, A., 2000, “Damping Identification in Multi-Degree-of-Freedom Systems Via a Wavelet-Logarithmic Decrement – Part 1: Theory”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 233, n. 3, pp. 361-374.
- Lee, J. H., Kim, J., 2001, “Identification of Damping Matrices from measured Frequency Response Functions”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, n. 3, pp. 545-565.
- Lee, J. K., Park, Y.S. 1994, “The complex envelope signal and an application to structural modal parameter estimation”. *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol.8, n.2, pp.129-144.
- Liu, K., 1996, “Modal Parameter Estimation Using the State Space Method”, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 197, n. 4, pp. 387-402.
- Maia, N. M. M., 1988, “Extraction of Valid Modal Properties from Measured Data in Structural Vibrations”, PhD Thesis, University of London.
- Mottershead, J. E., Friswell, M. I., 1993, “ Model updating in structural dynamics: a survey”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 167, n. 2, pp. 347-375.
- Pena,J. L. O.,1996, “Uma metodologia para a Análise Modal no Domínio da Frequência”. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Uberlândia.
- Pilkey, D. F.,1998, “Computation of a Damping Matrix for Finite Element Model Updating”, PhD Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Prells, U., Friswell, M. I., 2000, “A measure of non-proportional damping”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 14, n. 2, pp. 125-137.

- Rad, S. Z.1997."Methods for updating numerical models in structural dynamics".
PhD Thesis. University of London.
- Reynier, M., Abou-Kandil, H., 1999, "Sensors location for updating problems",
Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 13, n. 2, pp. 297-314.
- Richardson M., Formenti D.L., 1982 ,“Parameter Estimation from Frequency
Response Measurements using RFP”, Proceeding of the International
Modal Analysis Conference, pp.167-182.
- Ruotolo, R., Storer, D.M., 2001, “A global Smoothing Technique for FRF Data
Fitting”, Journal of Sound and Vibration, Vol. 239, n. 1, pp. 41-56.
- Zienkiewicz, O. C., 1987, “The Finite Element Method” , McGraw-Hill , London.

Anexo A

Técnicas de redução de modelos

É importante na investigação de sistemas mecânicos comparar os resultados do modelo de elementos finitos com os resultados obtidos experimentalmente. A comparação entre os dados numéricos e experimentais é difícil devido às diferenças no tamanho dos dois tipos de modelos. Um modelo de elementos finitos pode ter milhares de graus de liberdade, já os modelos experimentais são limitados devido aos efeitos físicos da análise modal. A seguir serão mostradas algumas técnicas de redução de modelo utilizadas na comparação de modelos numéricos/experimentais.

A redução ou expansão de modelo envolve primeiramente um particionamento das equações do movimento conforme graus de liberdades medidos e não medidos. Assumindo que as forças são aplicadas somente nos graus de liberdade medidos e o amortecimento do sistema é desprezível, têm-se:

$$\begin{bmatrix} M_{mm} & M_{ms} \\ M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_m \\ \ddot{x}_s \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{mm} & K_{ms} \\ K_{sm} & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

O subscrito m indica os graus de liberdade medidos, e s os graus de liberdade não medidos tal que $n = m + s$.

A divisão mostrada na equação (A.1), é usada como a base para todos os métodos de redução de modelo e expansão descritos abaixo.

Um desenvolvimento mais detalhado desses métodos podem ser obtido em Friswell et. al. (1995, 1998) e Pilkey (1998).

A.1 Redução Estática e Expansão

A redução estática é usada com maior freqüência em simulações numéricas de modelos de elementos finitos (softwares comerciais) devido a sua relativa simplicidade. Redução estática é nomeada assim porque o termo de inércia é desprezado na equação de movimento. Desprezando o termo de inércia na equação (A.1), tem-se:

$$K_{sm}x_m + K_{ss}x_s = 0 \quad (\text{A.1.1})$$

e

$$\begin{Bmatrix} x_m \\ x_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -K_{ss}^{-1}K_{sm} \end{bmatrix} \{x_m\} = T_s x_m \quad (\text{A.1.2})$$

onde T_s é a matriz transformação da redução estática definida por:

$$T_s = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ -K_{ss}^{-1}K_{sm} \end{bmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

A equação (A.1.3) é usada para encontrar as matrizes reduzidas de massa (M_r) e rigidez (K_r) como mostram as equações (A.1.4) e (A.1.5):

$$M_r = T_s^T M T_s \quad (\text{A.1.4})$$

$$K_r = T_s^T K T_s \quad (\text{A.1.5})$$

Estas duas expressões são usadas na redução de modelo.

A.2 Sistema Reduzido Melhorado

O método sistema reduzido melhorado (IRS) é modelado a partir da equação (A.1) como no método de redução estática, a diferença é que nesse, os efeitos inerciais são considerados. Assim tem-se:

$$[K_{ss} - \omega^2 M_{ss}]x_s = -[K_{sm} - \omega^2 M_{sm}]x_m \quad (\text{A.2.1})$$

Manipulando as equações tem-se

$$\begin{aligned} x_s &= -[K_{ss} - \omega^2 M_{ss}]^{-1} [K_{sm} - \omega^2 M_{sm}]x_m \\ &= -K_{ss}^{-1} [\mathbf{I} - \omega^2 M_{ss} K_{ss}^{-1}]^{-1} [K_{sm} - \omega^2 M_{sm}]x_m \\ &= -K_{ss}^{-1} [\mathbf{I} + \omega^2 M_{ss} K_{ss}^{-1} + o(\omega^4)] [K_{sm} - \omega^2 M_{sm}]x_m \\ &= -K_{ss}^{-1} [K_{sm} + \omega^2 (M_{ss} K_{ss}^{-1} K_{sm} - M_{sm}) + o(\omega^4)]x_m \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

onde $o(\omega^4)$ denota um erro de ordem ω^4 . Objetivo é melhorar as frequências naturais e os modos de vibrar do modelo reduzido. O modelo reduzido baseado na redução estática satisfaz,

$$\omega^2 M_r x_m = K_r x_m \quad (\text{A.2.3})$$

ou

$$\omega^2 x_m = M_r^{-1} K_r x_m \quad (\text{A.2.4})$$

onde M_r e K_r são as matrizes de massa e rigidez reduzidas obtidas da redução estática e ω e x_m são as frequências naturais do modelo reduzido e os autovetores associados aos pontos medidos.

Substituindo a equação (A.2.4) na equação (A.2.2), e desprezando ω^4 , tem-se:

$$x_s = \left[-K_{ss}^{-1}K_{sm} + K_{ss}^{-1}(M_{sm} - M_{ss}K_{ss}^{-1}K_{sm})M_r^{-1}K_r \right] x_m \quad (\text{A.2.5})$$

ou

$$x_s = T_{IRS} x_m \quad (\text{A.2.6})$$

A matriz transformação para o método IRS é:

$$T_{IRS} = T_s + SMT_s M_r^{-1} K_r \quad (\text{A.2.7})$$

Onde a matriz S é dada por:

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{ss}^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.2.8})$$

As matrizes de massa e rigidez reduzidas obtidas a partir do método IRS são:

$$M_{IRS} = T_{IRS}^T M T_{IRS} \quad (\text{A.2.9})$$

$$K_{IRS} = T_{IRS}^T K T_{IRS} \quad (\text{A.2.10})$$

A.3 Sistema Reduzido Melhorado Iterativo

Recentemente o aperfeiçoamento do método IRS através de um esquema iterativo deu origem ao método IRS iterativo. A transformação para o método IRS iterativo é obtida de:

$$T_{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ t_{i+1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.1})$$

Onde,

$$t_{i+1} = t_s + K_{ss}^{-1} \begin{bmatrix} M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} T_i M_{ri}^{-1} K_{ri} \quad (\text{A.3.2})$$

$$\text{com } t_0 = t_s = -K_{ss}^{-1} K_{sm} \quad (\text{A.3.3})$$

As matrizes de massa e rigidez reduzidas para a i -ésima iteração são definidas como:

$$M_{ri} = T_i^T M T_i \quad (\text{A.3.4})$$

$$K_{ri} = T_i^T K T_i \quad (\text{A.3.5})$$

O processo de iteração termina quando a matriz transformação não muda de uma iteração para outra ou seja $T_i = T_{i+1} = T$. Assim a solução é:

$$t = t_s + K_{ss}^{-1} \begin{bmatrix} M_{sm} & M_{ss} \end{bmatrix} T M_r^{-1} K_r \quad (\text{A.3.6})$$

onde

$$T = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ t \end{bmatrix} \quad (\text{A.3.7})$$

e

$$M_r = T^T M T \quad (\text{A.3.8})$$

$$K_r = T^T K T$$

Anexo B

Teoria de placa - modelo matemático

B.1 Teoria de Placa

Considere a placa de espessura constante t , cuja superfície média coincide com o plano XY , definido pelo sistema de referencia XYZ (figura B.1). As forças externas são aplicadas na superfície média da placa. Estas forças são dadas por unidades de área e denominadas de P , M_{xx} e M_{yy} (força distribuída na direção z e momentos fletores).

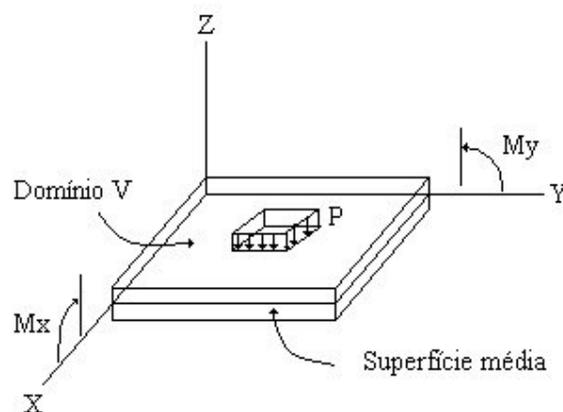


Figura (B.1.1) – Sistema de referência para placa.

A teoria para flexão de placa adotada é a teoria de Mindlin que prevê:

- As deflexões da placa são pequenas quando comparadas com sua espessura.
- A normal à superfície média, mesmo após a deformação, permanece reta mas não necessariamente normal à superfície original
- Tensões normais à superfície média são desprezíveis quando comparadas com as tensões de flexão.

Com a convenção de sinais e as hipóteses da teoria de Mindlin, os momentos e forças por unidade de comprimento valem (Timoshenko e Goodier):

$$M_{ij} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{ij} z \cdot dz \quad Q_i = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{iz} z \cdot dz \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{B.1.1})$$

onde σ_{ij} , M_{ij} e Q_i são os componentes dos tensores de tensão, momentos e força constante.

Para as tensões de cisalhamento na direção Z , assume-se:

$$\sigma_{iz} = 3 \left[1 - (2z/t)^2 \right] Q_i / 2t \quad i = 1, 2 \quad (\text{B.1.2})$$

Assumindo distribuição linear das tensões no plano XY ao longo da espessura da placa, da equação (B.1.1) mostra-se que:

$$\sigma_{ij} = 12 M_{ij} z / t^3 \quad i, j = 1, 2 \quad (\text{B.1.3})$$

Da teoria da elasticidade linear, tem-se:

$$\varepsilon_{ij} = (u_{ij} - u_{ji}) / 2 \quad (\text{B.1.4})$$

onde ε_{ij} são as componentes do tensor de deformação, $u_{i,j}$ é a derivada $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ e u_i é a componente do vetor deslocamento de um ponto genérico da placa. Assim, para determinar ε_{ij} é necessário o conhecimento do campo de deslocamento (u_1, u_2, u_3) .

Com as hipóteses adotadas, u_1 e u_2 valem (Timoshenko e Goodier):

$$u_1(x, y) = -z \cdot v_x(x, y) \quad (\text{B.1.5})$$

$$u_2(x, y) = -z \cdot v_y(x, y) \quad (\text{B.1.6})$$

e $u_3 = u_3(x, y)$ independe de v_x e v_y .

Usando as equações de (B.1.1) a (B.1.6), pode-se escrever as relações tensões x deformação da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_f & 0 \\ 0 & D_q \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_f \\ \varepsilon_q \end{Bmatrix} \quad (\text{B.1.7})$$

onde o índice f indica flexão e q esforço cortante, sendo:

$$\{\sigma_f\} = \{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\}^t \quad (\text{B.1.8})$$

$$\{\sigma_q\} = \{Q_x, Q_y\}^t \quad (\text{B.1.9})$$

$$\{\varepsilon_f\} = \left\{ -\frac{\partial v_x}{\partial x}, -\frac{\partial v_y}{\partial y}, -\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right\}^t \quad (\text{B.1.10})$$

$$\{\varepsilon_q\} = \left\{ \frac{\partial u_3}{\partial x} - v_x, \frac{\partial u_3}{\partial y} - v_y \right\}^t \quad (\text{B.1.11})$$

$$D_q = \frac{IGt}{\alpha} \quad (\text{B.1.12})$$

$$D_f = \frac{Ef^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1.13})$$

com $\alpha = 1.20$, E módulo de elasticidade longitudinal, G o módulo de cisalhamento, ν é o coeficiente de Poisson, e I é a matriz de identidade de ordem 3.

B.2 Desenvolvimento do Elemento

Qualquer quantidade $V(x, y)$ é interpolada em cada elemento por:

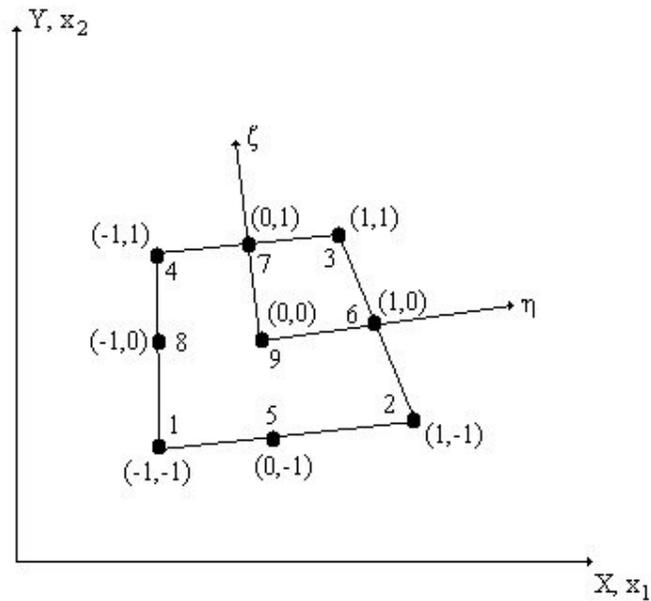
$$V(x, y) \cong \phi_i(\eta, \xi)v_i \quad j=1,9 \quad (\text{B.2.1})$$

onde $\phi_i(\eta, \xi)$ são as funções de interpolação locais (Figura B.2.1) e v_i é o valor de quantidade $V(x, y)$ avaliada no nó i . Assim, tanto $X(x_1)$ como $Y(x_2)$ podem ser escritos como a equação (B.2.1), que desenvolvendo resulta:

$$X_j = a_j + b_j\eta + c_j\xi + d_j\eta\xi + e_j\eta^2\xi + f_j\xi^2\eta^2 + g_j\eta\xi^2 + h_j\xi^2 + p_j\eta^2 \quad j=1,2 \quad (\text{B.2.2})$$

onde a_j, b_j, \dots, p_j são constantes para cada elemento e só dependem das coordenadas dos nós locais, o que torna extremamente simples a obtenção das derivadas $\frac{\partial X_j}{\partial \eta}$ e

$$\frac{\partial X_j}{\partial \xi}, \quad j=1,2.$$



$$\phi_i(\eta, \xi) = (1 + \eta_i \eta)(1 + \xi_i \xi)(\eta_i \eta + \xi_i \xi - 1) \quad \text{nós } 1, 2, 3 \text{ e } 4$$

$$\phi_i(\eta, \xi) = (1 - \eta^2)(1 + \xi_i \xi) \quad \text{nós } 5 \text{ e } 7$$

$$\phi_i(\eta, \xi) = (1 - \xi^2)(1 + \eta_i \eta) \quad \text{nós } 6 \text{ e } 8$$

$$\phi_9(\eta, \xi) = (1 - \eta^2)(1 - \xi^2) \quad \text{nó } 9$$

Figura (B.2.1) – Elemento lagrangeano quadrático e funções de interpolações locais.

Para escrever as equações do movimento na sua forma convencional

$$[M]\{\ddot{X}\} + [K]\{X\} = \{F\} \tag{B.2.3}$$

utiliza-se o princípio de Hamilton, aplicado para cada elemento:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + w) dt = 0 \tag{B.2.4}$$

onde T é a energia cinética total, U é a energia de deformação e W o trabalho realizado pelas forças externas.

Usando a equação (B.2.1), u_3, v_x e v_y podem ser aproximados como:

$$\begin{Bmatrix} u_3 \\ v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & 0 & \dots & \phi_9 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & 0 & \dots & 0 & \phi_9 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_1 & 0 & 0 & \phi_2 & \dots & 0 & 0 & \phi_9 \end{bmatrix}_{3 \times 27} \{q\}_{27 \times 1} \quad (\text{B.2.5})$$

ou

$$\{u_3, v_x, v_y\}^T = [\phi] \{q\} \quad (\text{B.2.6})$$

onde $[\phi]$ é a matriz apresentada na equação (B.2.5) e $\{q\}$ é obtido dos valores nodais de u_3, v_x e v_y , isto é:

$$\{q\} = \left\{ \underbrace{u_3, v_x, v_y}_{\text{nó 1}} \mid \underbrace{u_3, v_x, v_y}_{\text{nó 2}} \mid \dots \mid \underbrace{u_3, v_x, v_y}_{\text{nó 9}} \right\} \quad (\text{B.2.7})$$

Com esta denominação e desprezando os efeitos rotacionais na energia cinética, resulta:

$$T = \frac{\rho t}{2} \int_A \{\dot{q}\}^T [\phi_1]^T [\phi_1] \{\dot{q}\} dA \quad (\text{B.2.8})$$

onde ρ é a densidade do material, dA é o elemento de área, $\{\dot{q}\} = \frac{\partial \{q\}}{\partial t}$ e $[\phi_1]$ é a primeira linha de $[\phi]$.

Novamente, da teoria da elasticidade linear, obtém-se a expressão para cálculo da energia de deformação u , isto é:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} \cdot dV \quad (\text{B.2.9})$$

e, com o uso da equação (B.1.7), resulta:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \left[\{\boldsymbol{\varepsilon}_f\}^T [D_f] \{\boldsymbol{\varepsilon}_f\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}_q\}^T [D_q] \{\boldsymbol{\varepsilon}_q\} \right] \cdot dA \quad (\text{B.2.10})$$

Como $\{u_3, v_x, v_y\}$ é função de $\eta\xi$ em cada elemento da equação (B.2.5), usando (B.1.10) e (B.1.11), $\{\boldsymbol{\varepsilon}_f\}$ e $\{\boldsymbol{\varepsilon}_q\}$ podem ser reescritos da seguinte maneira:

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_f\} = [A] \{f\} \quad \{\boldsymbol{\varepsilon}_q\} = [B] \{q\} \quad (\text{B.2.11})$$

onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -\phi_1^* & 0 & | & 0 & -\phi_2^* & 0 & | & \dots \\ 0 & 0 & -\phi_1^* & | & 0 & 0 & -\phi_2^* & | & \dots \\ 0 & -\phi_1^* & -\phi_1^* & | & 0 & -\phi_2^* & -\phi_2^* & | & \dots \end{bmatrix}_{3 \times 27} \quad (\text{B.2.12})$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \phi_1^* & -J\phi_1 & 0 & | & \phi_2^* & -J\phi_2 & 0 & | & \dots \\ \phi_1^{**} & 0 & -J\phi_1 & | & \phi_2^{**} & 0 & -J\phi_2 & | & \dots \end{bmatrix}_{2 \times 27} \quad (\text{B.2.13})$$

$$\phi_i^* = \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} \right)}{J} \quad (\text{B.2.14})$$

$$\phi_i^* = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \phi_i}{\partial \eta} \right)}{J} \quad (\text{B.2.15})$$

$$J = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \quad (\text{B.2.16})$$

Assim a energia de deformação em cada elemento é:

$$U = \frac{1}{2} \int_A \{q\}^T \left[[A]^T [D_f] [A] + [B]^T [D_q] [B] \right] \cdot dA \quad (\text{B.2.17})$$

Já o trabalho realizado pelas forças externas é simplesmente o produto da força generalizada pelo deslocamento generalizado, isto é:

$$W = \int_A \left[u_3(x, y) \cdot P(x, y) + v_x(x, y) \cdot M_{xx}(x, y) + v_y(x, y) \cdot M_{yy}(x, y) \right] \cdot dA \quad (\text{B.2.18})$$

ou, considerando apenas as forças na direção z, e considerando a equação (B.2.5), resulta:

$$W = \int_A \{q\}^T [\phi_1] P(x, y) \cdot dA \quad (\text{B.2.19})$$

Dessa forma, usando as equações (B.2.8), (B.2.17) e (B.2.19), o princípio de Hamilton pode ser reescrito como sendo:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \{q\}^T \left[[M] \{\ddot{q}\} + [K] \{q\} - \{F\} \right] \cdot dt = 0 \quad (\text{B.2.20})$$

onde

$$[M] = \int_A \rho t [\phi_1]^T [\phi_1] \cdot dA \quad (\text{B.2.21})$$

$$[K] = \int_A \left([A]^T [D_f] [A] + [B]^T [D_q] [B] \right) \cdot dA \quad (\text{B.2.22})$$

$$\{F\} = \int_A [\phi_1]^T P(x, y) \cdot dA \quad (\text{B.2.23})$$

Como a variação $\delta\{q\}^T$ é arbitrária, a equação (B.2.20) será sempre válida se:

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{F\} \quad (\text{B.2.24})$$

que é a equação de equilíbrio procurada. As integrações que aparecem nas equações (B.2.21) a (B.2.23) são efetuadas com o método de Gauss, isto é:

$$[M] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \rho t [\phi_1]^T [\phi_1] J \alpha_i \alpha_j \quad (\text{B.2.25})$$

$$[K] = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \left([A]^T [D_f] [A] + [B]^T [D_q] [B] \right) J \alpha_i \alpha_j \quad (\text{B.2.26})$$

$$\{F\} = \sum \sum [\phi_1]^T P(\bar{\eta}_i, \bar{\xi}_j) J \alpha_i \alpha_j \quad (\text{B.2.27})$$

onde m é o número de pontos de integração utilizado, (α_i, α_j) são os pesos de integração e $(\bar{\eta}_i, \bar{\xi}_j)$ são as coordenadas dos pontos de integração.

Anexo C

Equipamentos



Figura (C.1) - Hewlett Packard (HP) Dynamic Signal Analyzer 3566/67



Figura (C.2) – Martelo de impacto



Figura (C.3) – Acelerômetro



Figura (C.4) – Sensor de proximidade.