

MICHELE SCHÜNEMANN PEREIRA

UM MODELO DE PLACA PARA ANÁLISE DE  
COMPÓSITOS LAMINADOS UTILIZANDO A  
NOTAÇÃO *STRAIN GRADIENT*

Curitiba

Dezembro 2004

MICHELE SCHÜNEMANN PEREIRA

UM MODELO DE PLACA PARA ANÁLISE DE  
COMPÓSITOS LAMINADOS UTILIZANDO A NOTAÇÃO  
*STRAIN GRADIENT*

Dissertação apresentada como parte dos requisitos à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Orientador: Prof. João Elias Abdalla Filho, PhD

Curitiba

Dezembro 2004

*Àqueles que amo,  
em especial ao Gustavo e Danilo.*

# Agradecimentos

Ao Professor João Elias Abdalla pela orientação, paciência e por me conceder a possibilidade de desenvolver este trabalho.

Ao meu marido Gustavo pelo carinho, apoio e paciência.

Ao amigo José Augusto Borgert pelas contribuições na realização deste trabalho, pela amizade e disponibilidade em sempre ajudar.

Ao Renato Machnievscz pela amizade e disponibilidade em ajudar.

Aos meus pais e irmãs que ao cuidarem do Danilo permitiram mais tranquilidade e disponibilidade de tempo para execução deste trabalho.

À Jane pela atenção, carinho e bom humor.

Aos colegas de turma e da sala de estudos, em especial a Mariana, Ivan e Celso.

A CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela bolsa concedida.

# Resumo

Neste trabalho, apresenta-se o desenvolvimento de um elemento finito de placa para a análise de compósitos laminados usando a notação *strain gradient*. O elemento possui quatro nós com cinco graus de liberdade por nó, a saber: dois deslocamentos  $u$  e  $v$  no plano (nas direções de  $x$  e  $y$ ), um deslocamento transversal  $w$  e duas rotações  $p$  e  $q$  nas direções de  $y$  e  $x$ , respectivamente. O elemento é baseado na teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem da hipótese de lâmina equivalente. Esta hipótese trata o laminado como estaticamente equivalente a uma única lâmina com propriedades constitutivas iguais à média das propriedades do laminado. O modelo calcula deslocamentos, deformações e tensões globais. Nas soluções numéricas, as tensões são calculadas no topo, no centro e na base de cada lâmina em posições pré-estabelecidas. Esses resultados são apenas valores médios devido ao emprego da hipótese da lâmina equivalente. A utilização da teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem e a natureza das funções aproximadoras utilizadas gera o aparecimento de termos espúrios nas deformações de cisalhamento do elemento finito, fazendo com que o modelo do laminado apresente rigidez artificial. A notação *strain gradient*, por ser fisicamente interpretável, permite a identificação e remoção dos termos espúrios antes da análise. Para tanto, as expansões polinomiais para as deformações são verificadas, identificando-se assim os termos responsáveis pelos erros de modelagem nos polinômios que representam a distorção angular. A correção é feita pela simples remoção desses termos espúrios daquelas expressões. A rotina para o cálculo de tensões foi desenvolvida em Fortran e implementada no aplicativo LAMFEM em duas versões, com e sem cisalhamento parasítico. Para avaliar o desempenho do modelo, resultados numéricos obtidos com as duas versões do elemento são comparados com soluções analíticas da teoria clássica de placas laminadas (CLPT). Para a análise numérica, utilizou-se malhas uniformes  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$  e  $16 \times 16$ . As análises numéricas apresentam resultados que convergem para as soluções analíticas com erro aproximado de 2% quando utiliza-se o elemento corrigido para os termos espúrios, mostrando a eficiência do processo de remoção de erros empregado. Além disso, esses resultados indicam que a notação *strain gradient* é uma alternativa interessante para a formulação de elementos finitos, pois, entre outras características, remove a necessidade da utilização de técnicas de integração numérica de ordem reduzida para remoção de erros de modelamento.

# Abstract

In this work is shown the development of a plate finite element for the analysis of a laminate composite using the strain gradient notation. The element is based in the first order shear deformation theory from the equivalent single layer hypothesis. This considers that the laminate is statically equivalent to a single laminae with constitutive properties equals to the average of the laminate properties. The model solves displacement, strain and global stress. The stresses are taken in three positions in each laminae through the thickness and these results are only average values due to the equivalent single layer hypothesis. The first order shear deformation theory causes the model to have spurious terms in the shear deformation causing artificial stiffness in the laminate. The strain gradient notation allows the removal of these terms before the analysis since these terms have a physical meaning. To do so the polynomial expansions are verified and the spurious terms are identified and removed in the angular distortion expressions. A stress analysis for a 4-node quadrilateral element was implemented in the code LAMFEM developed in Fortran. Numerically the stress can be evaluated with and without the spurious terms. The model performance can be measured comparing the numerical results with analytical model results.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b> .....	<b>vii</b>
<b>Lista de Tabelas</b> .....	<b>ix</b>
<b>Lista de Símbolos</b> .....	<b>x</b>
<b>1 Introdução</b> .....	<b>1</b>
1.1 Considerações iniciais .....	1
1.2 Objetivo .....	2
1.3 Metodologia .....	2
1.4 Conteúdo do trabalho .....	3
<b>2 Revisão Bibliográfica</b> .....	<b>4</b>
2.1 Considerações iniciais .....	4
2.2 Teorias e modelos aplicados à análise de placas de materiais compósitos .....	4
<b>3 Compósitos Laminados</b> .....	<b>12</b>
3.1 Considerações iniciais .....	12
3.2 Introdução aos materiais compósitos .....	12
3.3 Comportamento mecânico da lâmina .....	14
3.4 Comportamento mecânico do laminado .....	19
3.5 Configurações de um laminado .....	24
<b>4 Modelo de Placa para Compósitos Laminados</b> .....	<b>26</b>

---

4.1	Considerações iniciais .....	26
4.2	A notação <i>strain gradient</i> .....	26
4.3	Formulação do elemento .....	33
<b>5</b>	<b>Análises Numéricas .....</b>	<b>40</b>
5.1	Cálculo das tensões .....	40
5.2	Solução analítica .....	42
5.3	Análises numéricas .....	44
5.3.1	Casos modelados .....	46
5.3.1.1	Casos I e II .....	46
5.3.1.2	Caso III .....	54
5.3.1.3	Caso IV .....	59
<b>6</b>	<b>Considerações Finais .....</b>	<b>62</b>
6.1	Resumo e Conclusões .....	62
6.2	Sugestões para trabalhos futuros .....	63
	<b>Referências .....</b>	<b>64</b>
	<b>Apêndice A – Tabela dos coeficientes .....</b>	<b>66</b>
	<b>Apêndice B – Matriz Energia de Deformação .....</b>	<b>68</b>



# Lista de Figuras

Figura 1	Elemento de placa para compósito laminado adotado. ....	20
Figura 2	Forças e momentos resultantes. ....	20
Figura 3	Espessura do laminado. ....	21
Figura 4	Geometria da placa. ....	45
Figura 5	Carregamento e condições de contorno. ....	45
Figura 6	Tensão Normal ( $\sigma_x$ ) – a/h = 150 – Malha 2 × 2. ....	47
Figura 7	Tensão Normal ( $\sigma_x$ ) – a/h = 150 – Malha 4 × 4. ....	47
Figura 8	Tensão Normal ( $\sigma_x$ ) – a/h = 150 – Malha 8 × 8. ....	48
Figura 9	Tensão Normal ( $\sigma_x$ ) – a/h = 150 – Malha 16 × 16. ....	48
Figura 10	Tensão Normal ( $\sigma_y$ ) – a/h = 150 – Malha 2 × 2. ....	49
Figura 11	Tensão Normal ( $\sigma_y$ ) – a/h = 150 – Malha 4 × 4. ....	49
Figura 12	Tensão Normal ( $\sigma_y$ ) – a/h = 150 – Malha 8 × 8. ....	50
Figura 13	Tensão Normal ( $\sigma_y$ ) – a/h = 150 – Malha 16 × 16. ....	50
Figura 14	Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xy}$ ) – a/h = 150 – Malha 2 × 2. ....	51
Figura 15	Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xy}$ ) – a/h = 150 – Malha 4 × 4. ....	51
Figura 16	Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xy}$ ) – a/h = 150 – Malha 8 × 8. ....	52
Figura 17	Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xy}$ ) – a/h = 150 – Malha 16 × 16. ....	52
Figura 18	Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{yz}$ ) – a/h = 150 – Malha 2 × 2. ....	53
Figura 19	Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{yz}$ ) – a/h = 150 – Malha 4 × 4. ....	53
Figura 20	Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{yz}$ ) – a/h = 150 – Malha 8 × 8. ....	54
Figura 21	Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{yz}$ ) – a/h = 150 – Malha 16 × 16. ....	54
Figura 22	Tensão Normal ( $\sigma_x$ ) – a/h = 50. ....	55
Figura 23	Convergência – ( $\sigma_x$ ). ....	56

Figura 24	Tensão Normal ( $\sigma_y$ ) – $a/h = 50$ . . . . .	56
Figura 25	Convergência – ( $\sigma_y$ ). . . . .	57
Figura 26	Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xy}$ ) – $a/h = 50$ . . . . .	57
Figura 27	Convergência – ( $\tau_{xy}$ ). . . . .	58
Figura 28	Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{yz}$ ) – $a/h = 50$ . . . . .	58
Figura 29	Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xz}$ ) – $a/h = 50$ . . . . .	59
Figura 30	Tensões Normais ( $\sigma_x$ e $\sigma_y$ ) – $a/h = 10$ . . . . .	60
Figura 31	Tensões de Cisalhamento ( $\tau_{xy}$ , $\tau_{yz}$ e $\tau_{xz}$ ) – $a/h = 10$ . . . . .	61

# Lista de Tabelas

Tabela 1	Propriedades mecânicas: fibra de vidro em matriz de epóxi .....	45
Tabela 2	Coefficientes para um elemento tridimensional de quarta ordem .....	67
Tabela 3	Elementos da matriz energia de deformação .....	69

# Lista de Símbolos

$z$	Eixo $z$ do sistema de coordenadas da lâmina (coordenada da espessura)
$\{\sigma\}$	Vetor de tensões
$[Q]$	Matriz de propriedades constitutivas do material
$\{\epsilon\}$	Vetor de deformações
$Q_{ij}$	Coefficientes da matriz constitutiva do material
$E_{ii}$	Módulo de elasticidade longitudinal na direção $ii$
$G_{ij}$	Modulo de elasticidade transversal na direção $ij$
$\nu_{ij}$	Coefficiente de Poisson na direção $ij$
$x$	Eixo $x$ do sistema de coordenadas da lâmina
$y$	Eixo $y$ do sistema de coordenadas da lâmina
$\bar{Q}_{ij}$	Matriz de propriedades constitutivas na direção da lâmina
$k$	Número da lâmina
$u$	Componente do deslocamento no plano na direção do eixo $x$
$v$	Componente do deslocamento no plano na direção do eixo $y$
$w$	Componente do deslocamento na direção do eixo $z$
$q$	Rotação normal na direção de $x$
$p$	Rotação normal na direção de $y$
$\{N\}$	Vetor resultantes de força normal
$\{M\}$	Vetor resultantes de momento
$\epsilon_x^o$	Deformação linear na superfície média - direção $x$
$\epsilon_y^o$	Deformação linear na superfície média - direção $y$
$\gamma_{xy}^o$	Deformação de cisalhamento na superfície média
$A$	Matriz de rigidez de alongamento

$B$	Matriz de rigidez de acoplamento dos modos de deformação
$D$	Matriz de rigidez à flexão
$h$	Espessura do laminado
$n$	Número de lâminas
$\{d_k\}$	Vetor de deslocamentos nodais da $k$ -ésima lâmina
$\{\epsilon_{sgk}\}$	Vetor dos modos de deformação da $k$ -ésima lâmina
$[\phi_k]$	Matriz transformação de coordenadas nodais para grandezas gradiente de deformação
$\{\epsilon_k\}$	Vetor de deformações elásticas da $k$ -ésima lâmina
$[T_{sgk}]$	Matriz de transformação que relaciona deformações elásticas e os modos de deformação do elemento
$\Omega_k$	Volume da da $k$ -ésima lâmina
$K$	Matriz de rigidez do elemento
$U_M$	Matriz energia de deformação
$a$	Dimensão de maior comprimento da placa
$b$	Dimensão de menor comprimento da placa

# 1 Introdução

## 1.1 Considerações iniciais

Materiais compósitos foram colocados em uso na década de 50 como uma alternativa viável e disponível para a eliminação de corrosão e formação de trincas em estruturas aeroespaciais <sup>[1]</sup>. O termo *Material Compósito* refere-se ao tipo de material que é obtido pela combinação de dois ou mais materiais em escala macroscópica. Não são encontrados na natureza, mas sim criados pelo homem de forma que os materiais constituintes são combinados para gerar um material com propriedades especiais.

Compósitos foram desenvolvidos porque muitas das tecnologias modernas exigem materiais com combinação de propriedades mecânicas que não podem ser atendidas pelos materiais convencionais. Atualmente esses materiais têm sido aplicados nos mais diferentes setores produtivos tais como, aeronáutico, aeroespacial, naval, automobilístico, construção civil, materiais esportivos, biomédicos, entre outros. Em grande parte das aplicações essas estruturas aparecem como planas ou curvas.

Os materiais compósitos podem ser classificados como:

- compósitos fibrosos – consiste de fibras de um material dispostas em uma matriz de outro material;
- compósitos particulados – são compostos de partículas de um material dispersas em uma matriz de outro material;
- compósitos laminados – são feitos de lâminas de diferentes materiais que são coladas juntas, formando um único elemento estrutural.

O grande interesse na utilização destes materiais, em especial os compósitos laminados, se dá principalmente por causa das vantagens que eles podem oferecer, tais como:

- alta resistência à exposição ao meio ambiente;
- baixo peso associado com alta rigidez e resistência mecânica, o que torna o componente estruturalmente eficiente;
- alta resistência à corrosão.

Entretanto, a combinação de fatores como custo de produção elevado e complexidade da análise de estruturas laminadas anisotrópicas, que podem ser exemplificadas por: acoplamento dos modos de deformação e descontinuidade intrínseca das propriedades mecânicas na interface de cada lâmina (região esta associada a grandes deformações por cisalhamento transversal); dificultam a ampla utilização desses materiais, diferente dos materiais utilizados convencionalmente como as ligas de aço e de alumínio.

O método dos elementos finitos tem sido amplamente utilizado na análise estrutural de materiais compósitos. Pesquisas têm sido feitas para o desenvolvimento de elementos que melhor representem o comportamento mecânico dos compósitos laminados. Neste trabalho, o método dos elementos finitos é empregado na análise de tensões em placas de compósitos laminados.

## 1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é validar um modelo de elementos finitos [Abdalla Filho<sup>[2]</sup>], formulado usando-se a notação *strain gradient*, para a análise de placas de compósitos laminados reforçados com fibras através do cálculo dos deslocamentos e tensões. Também é o objetivo do trabalho mostrar a presença de termos espúrios e seus efeitos deletérios na solução numérica, assim como a eficiência do procedimento de simples remoção desses termos espúrios dos polinômios de deformação.

## 1.3 Metodologia

Um elemento de placa de Mindlin será formulado através da notação *strain gradient*, que possibilita a identificação e remoção de termos espúrios *a priori* da análise numérico computacional. A eficiência da formulação será avaliada através do confronto entre os resultados de tensões obtidos pelo modelo (com os termos espúrios e sem os termos espúrios) e os resultados de tensão obtidos analiticamente. A implementação do cálculo das tensões é feita em um aplicativo de elementos finitos em linguagem Fortran.

O procedimento de formulação do elemento limita-se ao regime elástico-linear, considerando carregamento mecânico estático, ou seja, desconsidera efeitos higrotérmicos e qualquer tipo de influência dinâmica. A teoria de placa utilizada permite a obtenção de respostas globais de deslocamentos, deformações e tensões, o que impossibilita qualquer tipo de análise sobre fratura e delaminação.

## 1.4 Conteúdo do trabalho

Depois deste capítulo introdutório, há mais cinco capítulos organizados da seguinte maneira:

Capítulo 2 apresenta uma breve revisão bibliográfica dos tipos de modelos, teorias para análise de compósitos laminados e modelos de elementos finitos.

Capítulo 3 descreve os fundamentos teóricos sobre compósitos laminados necessários ao desenvolvimento deste trabalho.

O Capítulo 4 é destinado ao desenvolvimento do elemento finito de placas de compósitos laminados utilizando a notação *strain gradient*. A notação e a formulação do elemento finito a ser adotado são apresentados.

No Capítulo 5 são realizadas análises numéricas e os resultados são interpretados através de comparações com soluções analíticas, buscando validar o elemento proposto.

Capítulo 6 contém o resumo do trabalho, as conclusões obtidas e recomendações para trabalho futuros.



## 2 Revisão Bibliográfica

### 2.1 Considerações iniciais

A busca por uma representação precisa e viável do comportamento de elementos estruturais feitos de compósitos laminados fez surgir a necessidade de realizar estudos e pesquisas sobre modelamento numérico e analítico dessas estruturas. Assim diferentes modelos para a análise de compósitos laminados têm sido propostos.

O objetivo deste capítulo é apresentar um resumo em linhas gerais das principais teorias estruturais e modelos de elementos finitos desenvolvidos nas últimas décadas. Uma revisão detalhada do assunto pode ser encontrada em Reddy e Robbins<sup>[3]</sup>, Noor e Burton<sup>[4]</sup>, Reddy e Garvin<sup>[5]</sup>, Ghugal e Shimpi<sup>[6]</sup> e Reddy<sup>[7]</sup>, referências estas utilizadas neste trabalho.

### 2.2 Teorias e modelos aplicados à análise de placas de materiais compósitos

Em Reddy<sup>[7]</sup>, as teorias estruturais aplicadas à análise de placas de material compósito são classificadas em:

1. Teoria da lâmina equivalente
  - teoria clássica de placas laminadas
  - teorias de deformação de cisalhamento
2. Teoria da elasticidade tridimensional
3. Modelos múltiplos

A teoria da lâmina equivalente (abreviado por ESL do inglês *Equivalent Single Layer Theories*), na qual a placa laminada é tratada como estaticamente equivalente à uma única lâmina com propriedades constitutivas que são a média das propriedades de todo o laminado, define o campo de deslocamentos é definido como a combinação linear de funções de posição e coordenadas da espessura na superfície de referência. Assume que o deslocamento transversal  $w$  não depende da coordenada da espessura  $z$ , de modo que a deflexão do laminado é descrita somente pela deformação da superfície de referência. Em todas as teorias ESL, os deslocamentos e as deformações são contínuas através da espessura do laminado, o que leva a uma descontinuidade interlaminar das componentes de tensão, quando as equações constitutivas são utilizadas para calcular tensões, devido à possibilidade de diferentes coeficientes elásticos nas interfaces das lâminas. As teorias baseadas na hipótese da lâmina equivalente, em especial as que levam em consideração a deformação de cisalhamento transversal, fornecem respostas globais precisas para os componentes estruturais em análise, como por exemplo, deflexões, carregamento crítico de flambagem, frequências fundamentais e modos de vibrações. Essas teorias são:

- Teoria clássica de placas laminadas (abreviada por CLPT do inglês *Classical Laminated Plate Theory*);
- Teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem (abreviada por FSDT do inglês *First Order Shear Deformation Theory*);
- Teorias de ordem elevada (abreviada por HSDT do inglês *Higher Order Shear Deformation Theory*).

A teoria clássica de placas laminadas (CLPT) é a extensão para compósitos laminados da teoria de placa de Kirchhoff. A CLPT utiliza a hipótese na qual linhas retas normais à superfície média antes da deformação permanecem retas e normais à superfície média depois da deformação e são inextensíveis na direção da espessura. Isto significa que as deformações se dão devido à flexão e aos deslocamentos de translação no plano, ou seja, desconsidera a existência das deformações transversais normal e de cisalhamento. Apesar de produzir elementos finitos com poucos graus de liberdade, a CLPT tem a desvantagem de exigir grau de continuidade  $C^1$  dos deslocamentos transversais e de se restringir ao modelamento de placas finas e de placas cuja razão entre os módulos de elasticidade longitudinal e elasticidade transversal não seja muito grande.<sup>[7]</sup>

A teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem (FSDT), que é uma extensão da teoria de Reissner e Mindlin para placas isotrópicas, inclui deformações de

cisalhamento transversal nas relações cinemáticas, pois ela existe e pode ser responsável por falhas. Essas deformações são consideradas constantes dentro de cada lâmina na direção da espessura.<sup>[4][6]</sup>

Na FSDT deve-se introduzir fatores de correção que atenuem a disparidade da distribuição das forças de cisalhamento transversal que são constantes dentro de cada lâmina quando deveriam ser parabólicas. Os elementos finitos produzidos por esta teoria requerem grau de continuidade  $C^0$  dos deslocamentos (todas as variáveis primárias), porém podem exibir rigidez artificial de cisalhamento transversal. O efeito de rigidez artificial causado por termos espúrios nas deformações de cisalhamento pode ser aliviado através de integração reduzida seletiva (para certos termos da matriz de rigidez).<sup>[4]</sup>

Rolfes e Rohwer<sup>[8]</sup> desenvolveram um método para obter resultados mais precisos no cálculo das tensões e da rigidez de cisalhamento transversal em placas de materiais compósitos para um modelo de elementos finitos que se baseia na teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem. A idéia básica é calcular as tensões de cisalhamento transversal diretamente das forças de cisalhamento transversal. Para isso, admitem dois modos de flexão cilíndrica para descrever o campo dos deslocamentos, consideram o equilíbrio das forças, as propriedades constitutivas e desconsideram a influência das forças de membrana, uma vez que essa influência é muito pequena nas tensões de cisalhamento transversal. Os resultados numéricos obtidos por Rolfes e Rohwer são melhores que os resultados obtidos através da FSDT usual, com a vantagem de que o método proposto dispensa o uso de fatores de correção, pois o cálculo da rigidez é também melhorado.

Rolfes, Rohwer e Ballerstaedt<sup>[9]</sup> apresentam um método para inserir o cálculo da tensão transversal normal no modelo de elementos finitos baseados na FSDT com o objetivo de melhorar o modelo proposto em <sup>[8]</sup>, considerando assim o tensor de tensões completo. O procedimento é realizado em partes, primeiro calculam-se as tensões de cisalhamento transversal conforme descrito anteriormente, e utilizando esses resultados pode-se calcular a tensão transversal normal através das condições de equilíbrio. Apesar de que a FSDT, em sua forma original, desconsidera a tensão transversal normal, os resultados para essas tensões obtidos através do modelo proposto proporcionam precisão razoável.

Teorias de ordem elevada utilizam polinômios de ordem quadrática ou cúbica na definição das componentes dos deslocamentos. A mais utilizada é a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem. A razão em expandir os deslocamentos sob termos cúbicos em  $z$  (coordenada da espessura) é conseguir uma variação quadrática das tensões

e deformações de cisalhamento transversal através da espessura, o que torna desnecessário o uso de fator de correção, tais quais os usados na teoria de deformação de primeira ordem.

Lo, Christensen e Wu<sup>[10]</sup> adaptou a teoria de ordem elevada proposta primeiramente para placas de material homogêneo<sup>[11]</sup> para a modelagem do comportamento de laminados com o objetivo de avaliar os efeitos não atendidos pela CLPT. Para isso, as componentes do deslocamento no plano são definidas em termos cúbicos da coordenada da espessura e a componente do deslocamento transversal é definida em termos quadráticos da coordenada da espessura, de modo que problemas de natureza essencialmente tridimensional podem ser avaliados. A precisão do modelo é avaliada através de problemas utilizando laminados simétricos (bidirecionais cruzados e em ângulo) sujeitos a carregamento senoidal e com lâminas de mesmo material. Lo e seus colegas afirmam que utilizando o campo dos deslocamentos proposto é possível avaliar precisamente tanto laminados simétricos como não simétricos.

Das várias teorias de deformação de cisalhamento de ordem elevada (HSDT - Higher Order Shear Deformation Theory), a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem de Reddy<sup>[12]</sup> (abreviada por TSDT do inglês *Third Order Shear Deformation Theory*) é muito utilizada para estudo de placas laminadas, por causa da eliminação do uso de fatores de correção de cisalhamento. Para proporcionar uma variação mais realística das tensões e deformações de cisalhamento através da espessura da placa, Reddy impõe a condição de tensões transversais de cisalhamento nula nas superfícies de topo e base do laminado ( $\sigma_4(x, y, \pm h/2) = 0$  e  $\sigma_5(x, y, \pm h/2) = 0$ ).

As restrições impostas por Reddy<sup>[12]</sup> não permitem que a análise de problemas em que uma placa encontra-se sujeita a esforço de cisalhamento paralelo a região da superfície seja realizada. Para considerar este tipo de problema, Leung et al.<sup>[13]</sup> propõe uma teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem sem restrições, primeiramente feita para análise de placas e vigas de materiais isotrópicos e depois estendida para placas de compósitos laminados. Em seu artigo, Leung et al.<sup>[13]</sup> apresenta a solução de Navier para a análise de tensão e compara os resultados de deflexão, tensões de cisalhamento transversal e tensões normais e de cisalhamento no plano obtidos através do modelo proposto com os resultados obtidos de outras teorias de placas tais como CLPT, FSDT, TSDT de Reddy e com a solução analítica apresentada, confirmando assim a eficiência do modelo.

A teoria de terceira ordem baseada na hipótese da lâmina equivalente fornece um pequeno aumento da precisão em relação à teoria de primeira ordem, porém o aumento do esforço computacional torna a sua aplicação restrita. Deste modo, os modelos

ESL baseados na FSDT fornecem a melhor relação entre precisão e economia de solução, simplicidade de modelagem e compatibilidade com outros modelos de elementos finitos.<sup>[3]</sup>

A análise de compósitos laminados espessos ( $a/h \leq 10$ ) e de regiões potenciais de falha, onde a determinação dos campos de tensão e deformação tridimensionais no nível da lâmina é de fundamental importância, exigem o uso de modelos baseados na formulação da elasticidade tridimensional ou uso de modelos baseados na teoria da lâmina discreta, pois os modelos ESL são incapazes de modelar precisamente esses aspectos.<sup>[7]</sup>

Nas teorias da lâmina discreta, o campo do deslocamento é definido como a combinação linear de funções de posição e coordenadas da espessura dentro de cada lâmina. Apenas os deslocamentos são contínuos através da espessura. As deformações transversais são descontínuas na interface da lâmina, o que possibilita tensões transversais (interlaminares) contínuas. As tensões no plano são descontínuas devido à diferença das propriedades constitutivas das lâminas que compõem o laminado. A teoria da lâmina discreta pode ser dividida em duas classes:

- Teoria parcial da lâmina discreta - esta teoria apresenta uma variação incremental linear das componentes dos deslocamentos no plano e o deslocamento transversal é constante através da espessura do laminado. Deste modo, as deformações de cisalhamento transversal são constantes, enquanto a deformação normal transversal é zero (inextensibilidade transversal é assumida) ao longo da espessura. O termo parcial no nome da teoria refere-se à ausência de uma representação discreta na lâmina da tensão normal transversal. A desvantagem deste modelo é a incapacidade de determinar precisamente tensões interlaminares próximas a descontinuidades geométricas e fontes de delaminação devido ao fato de que a teoria não inclui extensibilidade transversal em sua formulação. <sup>[3][7]</sup>
- Teoria completa da lâmina discreta – dá um passo à frente em relação à teoria parcial da lâmina discreta ao descrever o campo do deslocamento de forma discreta para as três componentes do deslocamento, incluindo assim uma representação discreta na lâmina para o efeito transversal normal e de cisalhamento. <sup>[3][7]</sup>

As teorias da lâmina discreta são capazes de descrever a distribuição ziguezague dos deslocamentos no plano, o qual ocorre com mais frequência em estruturas espessas. Os resultados obtidos por tais métodos são de excelente precisão para deslocamentos e tensões transversais, no entanto, os modelos baseados nas teorias da lâmina discreta são

computacionalmente caros, desencorajando o seu uso no modelamento do laminado como um todo. <sup>[3][7]</sup>

Tratando-se de estruturas de compósitos laminados, um único fenômeno pode ser analisado em diferentes escalas, isto é, no nível global (do laminado), no nível da lâmina ou ainda no nível matriz - fibra. Para tanto, se deve utilizar a teoria apropriada para o tipo de resposta esperada. Como nenhum deles quando utilizados isoladamente, é capaz de produzir uma análise completa do laminado, ou seja, em suas diferentes escalas, uma excelente alternativa é combinar os tipos de modelos anteriormente descritos, fazendo uso das vantagens de cada modelo. <sup>[3]</sup>

Em resposta à necessidade de minimizar o custo computacional e maximizar a precisão da solução, surge o método dos modelos múltiplos. O método consiste em utilizar modelos matemáticos diferentes ou diferentes níveis de discretização para diferentes sub-regiões. A grande dificuldade desta técnica é unir os contornos que separam as diferentes sub-regiões, ou seja, manter a continuidade dos deslocamentos e o equilíbrio das forças ao longo do contorno que separa sub-regiões incompatíveis. Porém a descrição precisa do comportamento mecânico dos compósitos laminados incentiva os pesquisadores ao desenvolvimento dos modelos múltiplos. Este método pode ser dividido em duas categorias: <sup>[7]</sup>

- Método múltiplo seqüencial - o mais comumente apresentado é o método de análise global-local que utiliza um modelo econômico (modelos ESL, por exemplo) para a região global (todo o domínio) e ainda satisfatório em determinar as condições de contorno para a análise posterior da região local (pequena região do domínio onde um fenômeno deseja ser avaliado). O principal motivo de crítica em relação ao método seqüencial é que este não considera o efeito da região local sobre a global, isto é, a continuidade do deslocamento é imposta enquanto não se mantém o equilíbrio das forças ao longo do contorno global-local. <sup>[3][7]</sup>
- Método múltiplo simultâneo - é caracterizado pela análise simultânea de todo o domínio, onde diferentes sub-regiões são modeladas utilizando diferentes níveis de discretização da malha de elementos finitos e diferentes modelos matemáticos. <sup>[3][7]</sup>

A grande parte dos artigos publicados são casos especiais ou aplicações das teorias, modelos e métodos descritos anteriormente na formulação de elementos finitos. Apesar dos avanços teóricos e numéricos na análise de compósitos laminados, o presente trabalho tem

como objetivo apresentar um modelo com base na teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem e no método dos elementos finitos. A notação *strain gradient* é empregada na formulação do elemento visando identificar e eliminar erros de modelamento.

O método dos elementos finitos consiste em discretizar o domínio do meio contínuo em um número finito de sub-regiões interconectadas, gerando assim um modelo que represente o contínuo através de um número finito de graus de liberdade.

Por ser um método que produz resultados aproximados em relação à solução exata, há uma grande necessidade em se avaliar a precisão do modelo de elementos finitos. Para que a estimativa da eficiência do modelo seja realizada, geralmente problemas simples, para os quais uma solução analítica é possível, são modelados e os resultados obtidos pelo modelo proposto e pela solução analítica são comparados. Com esse procedimento, ganha-se confiança no modelo e a possibilidade de quantificar o erro, e assim analisar se a precisão da solução é ou não satisfatória.

Percebe-se que um grande esforço tem sido feito para alcançar a acuracidade dos modelos de elementos finitos. Esse esforço se dá através da eliminação ou redução dos erros de modelagem. Tais erros são inerentes à formulação e estão relacionados ao tipo de elemento e graus de liberdade usados para o modelo, o que pode levar a polinômios incompletos e de ordem incompatíveis com o problema a ser modelado.

Como mencionado anteriormente, a FSDT e a natureza das funções aproximadoras utilizadas gera o aparecimento de termos espúrios nas deformações de cisalhamento do elemento finito, fazendo com que o modelo do laminado apresente rigidez artificial, especialmente quando o laminado é fino. Isto ocorre devido ao aparecimento de termos espúrios nas expressões de deformação de cisalhamento. Muitas tentativas em aliviar os problemas de rigidez artificial em elementos de placa têm sido propostas ao longo dos anos como por exemplo formulações mistas e técnica de integração reduzida como a proposta por Zienkiewicz, Taylor e Too<sup>[14]</sup>. Embora a técnica de integração reduzida seja uma boa solução para o problema, a técnica pode gerar modos espúrios de deformação nula em alguns elementos.<sup>[3]</sup>

Dow, Ho e Cabiness<sup>[15]</sup> apresenta o uso da notação *strain gradient* como um procedimento para analisar o comportamento de elementos finitos bidimensionais e tridimensionais. O procedimento compara a quantidade de energia de deformação do modelo de elementos finitos formulado em notação *strain gradient* com a quantidade de energia de deformação do contínuo modelado via elementos finitos isoparamétricos. Expansão em

série de Taylor é utilizada para definir as expressões de deslocamentos, deformações e rotações em termos de variáveis de deformação e gradiente de deformação, o que estabelece uma conexão física entre o modelo e o contínuo. A notação *strain gradient* permite ao analista identificar as capacidades e deficiências de modelamento de um elemento finito a-priori.

Como mencionado anteriormente, o presente trabalho tem por objetivo apresentar um modelo com base na teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem e no método dos elementos finitos. A notação *strain gradient* é empregada na formulação do elemento visando identificar e eliminar erros de modelamento. O elemento finito utilizado neste trabalho foi originalmente formulado por Abdalla Filho<sup>[2]</sup>, com o intuito de realizar análise de erros em compósitos laminados, não tendo havido a preocupação de avaliar o modelo quanto à sua capacidade em calcular tensões. Este trabalho ocupa-se de realizar os cálculos de tensões normais e de cisalhamento ao longo da espessura de laminados, buscando validar o elemento finito através de comparações dos resultados numéricos com resultados de soluções analíticas.



# 3 Compósitos Laminados

## 3.1 Considerações iniciais

Este capítulo tem por objetivo descrever os fundamentos teóricos sobre compósitos laminados necessários ao desenvolvimento deste trabalho. As referências bibliográficas utilizadas são: Jones<sup>[16]</sup>, Reddy<sup>[7]</sup>, Vinson e Sierakowski<sup>[17]</sup>, Reinhart e Clemente<sup>[1]</sup> e Callister Jr<sup>[18]</sup>.

## 3.2 Introdução aos materiais compósitos

Materiais compósitos podem ser definidos como uma combinação de dois ou mais materiais em escala macroscópica, que possuem fases quimicamente diferentes e estão separados por uma interface distinta.<sup>[18]</sup>

Ao combinar diferentes materiais os engenheiros e cientistas têm por objetivo criar novos materiais com combinações de propriedades mecânicas que não são encontradas nas ligas metálicas convencionais, cerâmicas e materiais poliméricos isoladamente. Dentre tais propriedades, pode-se citar: elevada resistência mecânica, elevada resistência à corrosão, isolamento térmico e acústico, durabilidade, peso reduzido, entre outras.

Os compósitos apresentam características dos seus materiais constituintes e também características que nenhum deles possui. As propriedades dos compósitos são funções das fases constituintes e de suas quantidades relativas, geometria, distribuição e orientação das partículas que compõem a fase dispersa, e são geralmente divididos em três classes:

- compósitos particulados - os quais são compostos de micropartículas de um ou mais materiais suspensos em uma matriz de outro material. Tanto as partículas quanto a matriz podem ser metálicas ou não metálicas, tornando possível quatro combinações partícula-matriz: não metálica com metálica, não metálica com não

metálica, metálica com não metálica e metálica com metálica;

- compósitos fibrosos - esta é com certeza, a classe mais importante dos materiais compósitos, pois proporcionam altas relações resistência–peso e rigidez–peso. Consistem de fibras de um material dispostas em uma matriz de outro material que pode ser metálica, não metálica ou polimérica. As fibras podem ser contínuas ou descontínuas, unidirecionais ou bidirecionais, trançadas ou com distribuição randômica. A orientação, a concentração e a distribuição das fibras na matriz é o que exerce grande influência na resistência final nos compósitos reforçados com fibras;
- compósitos estruturais - compósitos laminados ou painéis sanduíches são os compósitos estruturais mais comuns. Estes últimos consistem de duas placas de um material resistente e rígido separadas por uma lâmina de material de baixa densidade e menor resistência e rigidez. Já os compósitos laminados são constituídos de lâminas de diferentes materiais (incluindo os das classes de materiais compósitos descritas anteriormente), em que duas das suas direções são muito maiores do que a terceira. As lâminas são coladas juntas formando um único elemento estrutural, por meio de empilhamento.

Este trabalho tratará somente dos compósitos laminados reforçados com fibras, que é uma classe híbrida dos materiais compósitos envolvendo compósitos fibrosos e técnicas de laminação<sup>[16]</sup>. Estes materiais serão referenciados aqui apenas como compósitos laminados.

Segundo Vinson e Sierakowski<sup>[17]</sup>:

*O laminado consiste de um conjunto de lâminas empilhadas constituídas de materiais reforçados com fibras para alcançar a rigidez e resistência desejada em pequenas espessuras. As fibras de cada lâmina devem ser orientadas em diversas direções e a seqüência de empilhamento (esquema de laminação) dessas lâminas (com diferentes orientações das fibras) é o que dá aos compósitos laminados a capacidade de otimizar as propriedades do material para uma dada estrutura e um conjunto de carregamentos, tornando-se esta a maior vantagem que os compósitos têm sobre os materiais metálicos e estruturas plásticas.*

Os compósitos laminados têm larga utilização na engenharia estrutural para aplicações em que o fator peso da estrutura é muito importante devido à alta relação resistência–peso e rigidez–peso.

### 3.3 Comportamento mecânico da lâmina

Materiais compósitos possuem características que os tornam bastantes diferentes dos demais materiais utilizados na engenharia. Para estudar o seu comportamento mecânico, deve-se considerar a sua estrutura heterogênea e seu comportamento anisotrópico. Materiais anisotrópicos são aqueles materiais em que as propriedades são diferentes em qualquer direção e em qualquer ponto do meio (corpo), variando em função da orientação e não possuindo planos de simetria, o que causa acoplamento entre os modos de deformação. Os compósitos laminados são freqüentemente caracterizados como materiais ortotrópicos, isto é, têm três planos mutuamente ortogonais de simetria material.

Os materiais heterogêneos possuem propriedades mecânicas que variam com a posição no corpo. Devido à heterogeneidade, os materiais compósitos são estudados sobre dois aspectos:

- micromecânica - que estuda o comportamento mecânico dos materiais constituintes e as suas interações;
- macromecânica - que estuda a consequência da união de duas ou mais lâminas, com o objetivo de estabelecer relações entre esforços solicitantes e deformações para laminados.

Para a formulação das equações constitutivas de uma lâmina, consideremos um caso isotérmico em que a lâmina obedece a um comportamento linear-elástico, isto é, a Lei de Hooke generalizada é válida:

$$\{\sigma\} = [Q]\{\epsilon\} \quad (3.1)$$

em que  $\{\sigma\}$  é o vetor de tensões,  $[Q]$  é a matriz constitutiva do material e  $\{\epsilon\}$  é o vetor de deformações.

Para materiais anisotrópicos, a matriz  $\{[Q]\}$  é simétrica, possui todos os termos, e tem 21 constantes de material independentes, ficando a equação assim:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & Q_{14} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & Q_{24} & Q_{25} & Q_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & Q_{34} & Q_{35} & Q_{36} \\ Q_{41} & Q_{42} & Q_{43} & Q_{44} & Q_{45} & Q_{46} \\ Q_{51} & Q_{52} & Q_{53} & Q_{54} & Q_{55} & Q_{56} \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{63} & Q_{64} & Q_{65} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

em que 1, 2 e 3 são as direções principais.

Como mencionado anteriormente, compósitos laminados classificam-se como materiais ortotrópicos e as relações constitutivas, devido aos três planos mutuamente ortogonais, reduzem-se a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

existindo apenas 9 constantes de material independentes.

Os coeficientes da matriz de rigidez  $Q_{ij}$  podem ser escritos em termos das propriedades mecânicas do material, que são o módulo de elasticidade longitudinal  $E_{ii}$  ( $E_{11}$ ,  $E_{22}$ ,  $E_{33}$ ), módulo de elasticidade transversal  $G_{ij}$  ( $G_{12}$ ,  $G_{13}$ ,  $G_{23}$ ) e o coeficiente de Poisson  $\nu_{ij}$  ( $\nu_{12}$ ,  $\nu_{13}$ ,  $\nu_{21}$ ,  $\nu_{23}$ ,  $\nu_{31}$  e  $\nu_{32}$ ). Essas constantes são determinadas em laboratório através de ensaios de tração uniaxial e de cisalhamento puro, e geram a matriz de flexibilidade do material. A matriz de rigidez é a inversa da matriz de flexibilidade, e assim pode-se obter os coeficientes  $Q_{ij}$  em termos das propriedades mecânicas do material:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_{11}(1 - \nu_{23}\nu_{32})}{\Delta} & Q_{22} &= \frac{E_{22}(1 - \nu_{31}\nu_{13})}{\Delta} & Q_{33} &= \frac{E_{33}(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{\Delta} \\
Q_{44} &= G_{23} & Q_{55} &= G_{13} & Q_{66} &= G_{12} \\
Q_{12} &= \frac{E_{22}(\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})}{\Delta} \\
Q_{13} &= \frac{E_{33}(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})}{\Delta} & (3.4) \\
Q_{23} &= \frac{E_{33}(\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})}{\Delta}
\end{aligned}$$

em que  $\Delta$  é dado por:

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \quad (3.5)$$

As relações constitutivas para um material ortotrópico, Eq. 3.3, estão submetidas a um sistema de coordenadas coincidentes com o sistema de coordenadas principais do material. Porém, as direções principais do material geralmente não coincidem com as coordenadas do problema, e ainda, compósitos laminados têm diversas lâminas e cada qual com uma orientação diferente com relação às coordenadas do laminado. Deste modo, torna-se necessária a transformação das tensões e deformações nas direções principais para as direções do laminado. Assim toma-se os eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$  para o sistema de coordenadas da lâmina, e as direções principais são definidas pelos eixos 1, 2 e 3. Considerando que o eixo 3 do sistema de coordenadas principais seja coincidente com o eixo  $z$  do sistema de coordenadas da lâmina e que a direção 1 tenha a mesma orientação das fibras e que forma um ângulo com o eixo  $x$ , pode-se escrever o vetor de tensões e deformações no sistema  $(xyz)$  da lâmina em função do sistema de coordenadas principais (123) através de uma matriz transformação.

As equações de transformação de tensões e deformações é:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = [R] \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [R]^T \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T]^T \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

sendo que  $T$  e  $R$  são as matrizes de transformação de um sistema de coordenadas local para um sistema global:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -n & m & 0 \\ mn & -mn & 0 & 0 & 0 & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

em que  $m = \cos \theta$  e  $n = \sin \theta$ .

Substituindo as equações 3.6 e 3.7 na Eq. 3.3, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.10)$$

em que  $[\bar{Q}] = [T][Q][T]^T$  e os coeficientes  $\bar{Q}_{ij}$  são dados por:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= m^4 Q_{11} + m^2 n^2 (2Q_{12} + 4Q_{66}) + n^4 Q_{22} \\ \bar{Q}_{12} &= m^2 n^2 (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) + (m^4 + n^4) Q_{12} \\ \bar{Q}_{13} &= m^2 Q_{13} + n^2 Q_{23} \\ \bar{Q}_{16} &= m^3 n (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) + mn^3 (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{22} &= m^4 Q_{22} + m^2 n^2 (2Q_{12} + 4Q_{66}) + n^4 Q_{11} \\ \bar{Q}_{23} &= n^2 Q_{13} + m^2 Q_{23} \\ \bar{Q}_{26} &= m^3 n (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) + mn^3 (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{33} &= Q_{33} \\ \bar{Q}_{36} &= mn(Q_{13} - Q_{23}) \\ \bar{Q}_{44} &= m^2 Q_{44} + n^2 Q_{55} \\ \bar{Q}_{45} &= mn(Q_{55} - Q_{44}) \\ \bar{Q}_{55} &= n^2 Q_{44} + m^2 Q_{55} \\ \bar{Q}_{66} &= m^4 Q_{66} + m^2 n^2 (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) + n^4 Q_{66} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Com o aparecimento dos termos  $\bar{Q}_{16}$ ,  $\bar{Q}_{26}$ ,  $\bar{Q}_{36}$  e  $\bar{Q}_{45}$  nota-se pela equação (3.10) que existe acoplamento entre tensões normais e deformações de cisalhamento, entre tensões de cisalhamento e deformações normais, e que também há interação entre tensões e deformações de cisalhamento. Este acoplamento só ocorre se a lâmina for solicitada em uma direção diferente das direções principais.

### 3.4 Comportamento mecânico do laminado

Na seção anterior foram formuladas as relações constitutivas para uma lâmina de material compósito, porém um laminado é composto pela união de duas ou mais lâminas que se comportam como um único elemento estrutural. Devido à busca das propriedades mecânicas melhoradas, as lâminas têm diferentes orientações, o que torna impossível definir uma única matriz constitutiva, fazendo-se necessário aplicar a Lei de Hooke generalizada para cada lâmina.

Considerando um laminado composto de  $n$  lâminas, a relação tensão–deformação para a  $k$ -ésima lâmina é:

$$\{\sigma\}_k = [Q]_k \{\epsilon\}_k \quad (3.12)$$

A teoria para placas de material compósito adotada para a análise de um laminado neste trabalho é a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem e está baseada nas seguintes hipóteses:

- (i) seções planas normais à superfície média do laminado antes da flexão permanecem planas, mas não necessariamente normais à superfície média depois da flexão. Desta forma a seção é livre para rotacionar, o que significa que o laminado sofre distorção angular através da espessura;
- (ii) o laminado deforma-se como um todo, não havendo movimento relativo entre as lâminas nos planos paralelos a superfície média. Isto significa que o comportamento da superfície média representa o comportamento do laminado;
- (iii) a tensão  $\sigma_{zz}$  e a deformação  $\epsilon_{zz}$  normais ao plano da superfície média variam de lâmina para lâmina, porém não se considerará os seus efeitos neste trabalho;
- (iv) a superfície média pode sofrer extensão, o que permite deslocamentos no plano  $xy$ .

As relações cinemáticas que representam as relações deformações–deslocamentos em um corpo são descritas pela equação:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{ij} + u_{ji}) \quad (3.13)$$

em que  $i$  e  $j = x, y$  e  $z$



Os deslocamentos da placa laminada são representados por:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_o(x, y) + zq(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_o(x, y) - zp(x, y) \\ w(x, y) &= w_o(x, y) \end{aligned} \quad (3.14)$$

em que  $u$  e  $v$  são os deslocamentos no plano,  $w$  é o deslocamento transversal e  $u_o$ ,  $v_o$  e  $w_o$  são os deslocamentos da superfície média ao longo dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, e  $q$  e  $p$  são as rotações normais em relação a  $x$  e  $y$ , respectivamente como mostra a Fig. 1.

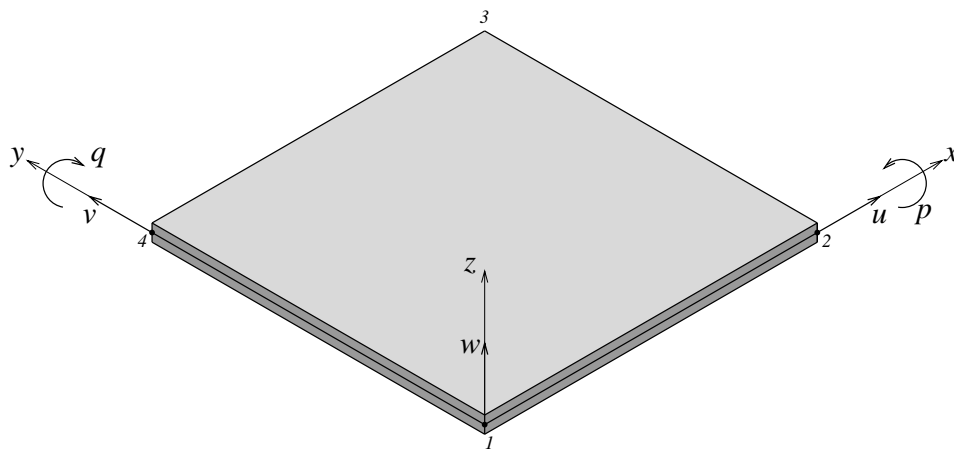


Figura 1: Elemento de placa para compósito laminado adotado.

As resultantes das forças no plano e transversal ao plano, e as resultantes de momentos (Fig. 2) podem ser utilizadas para laminados assim como na teoria clássica de placas, sendo obtidas pela integração das tensões em cada lâmina através da espessura do laminado, isto é:

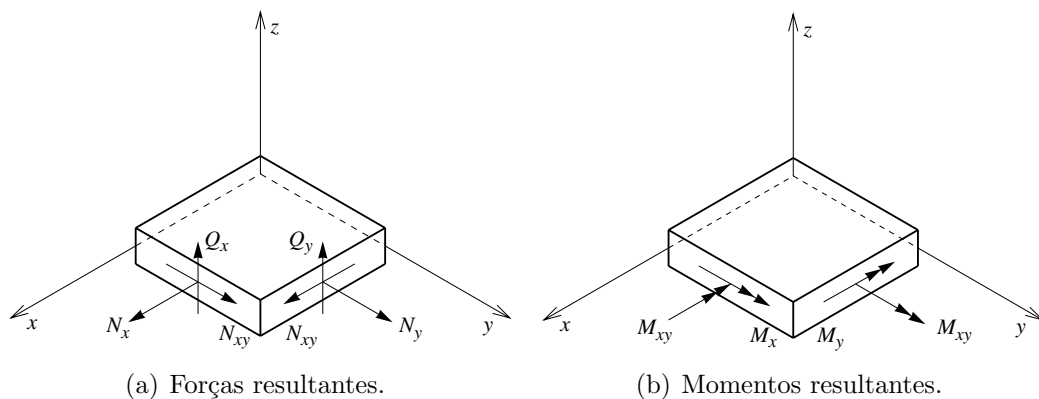


Figura 2: Forças e momentos resultantes.

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz \\
\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k z dz \\
\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k dz
\end{aligned} \tag{3.15}$$

em que  $z_k$  e  $z_{k-1}$  são as coordenadas do topo e da base da lâmina  $k$ , conforme mostra a figura 3.

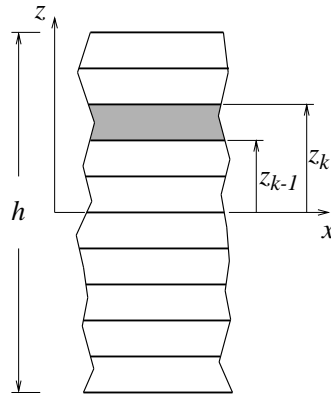


Figura 3: Espessura do laminado.

Utilizando a lei de Hooke para cada lâmina e sabendo que a matriz  $[\bar{Q}]$  é constante dentro de cada lâmina, as resultantes de tensão  $\{N\}$  e  $\{M\}$  podem ser escritas por:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z dz \right\} \quad (3.16)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left\{ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} z^2 dz \right\}$$

em que  $\epsilon_x^o$ ,  $\epsilon_y^o$  e  $\gamma_{xy}^o$  são deformações lineares e de cisalhamento da superfície média, e  $\kappa_x^o$ ,  $\kappa_y^o$  e  $\kappa_{xy}^o$  são curvaturas da superfície média. Como esses vetores são independentes de  $z$ , valores referentes à superfície média, são removidos de dentro da integral. Os resultados das operações acima são representados simbolicamente por:

$$\begin{aligned} \{N\} &= [A] \{\epsilon_o\} + [B] \{\kappa\} \\ \{M\} &= [B] \{\epsilon_o\} + [D] \{\kappa\} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Explicitamente, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^o \\ \epsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

em que os coeficientes da matriz  $A$ ,  $B$  e  $D$  são obtidos através das seguintes equações:

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\
B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)
\end{aligned} \tag{3.19}$$

A matriz  $A$  é chamada de matriz de rigidez de alongamento e representa a parcela da força resultante normal causada pela deformação normal do laminado. A matriz  $B$  é chamada de rigidez de acoplamento e representa o acoplamento entre modos de deformação, ou seja, representa a parcela da força resultante normal causada pela flexão e a parcela do momento resultante causada pela deformação normal do laminado. Se existirem termos não nulos na matriz  $B$ , existirá acoplamento entre os modos de deformação. Só não haverá acoplamento entre modos de deformação se o laminado for simétrico em relação ao plano médio. A matriz  $D$  é chamada de rigidez de flexão e representa a parcela do momento resultante causada pela flexão do laminado. Dessa forma, a matriz de rigidez depende da rigidez do material, da espessura da lâmina e esquema de laminação, como se pode observar através da Eq. 3.19.

Para determinar a resultante da força de cisalhamento, admite-se a hipótese que as tensões de cisalhamento transversal distribuem-se parabolicamente através da espessura do laminado. Para modelar esta distribuição parabólica, utiliza-se a seguinte função<sup>[17]</sup>:

$$f(z) = \frac{5}{4} \left[ 1 - \left( \frac{z}{h/2} \right)^2 \right] \tag{3.20}$$

em que o coeficiente 5/4 na Eq. 3.20 é o fator de correção adotado<sup>[17]</sup>.

As relações constitutivas para a  $k$ -ésima lâmina envolvendo as tensões de cisalhamento transversal(Eq.3.10) são:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

Integrando essas tensões ao longo da espessura do laminado, considerando a função  $f(z)$ :

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

em que  $A_{ij}$  pode ser escrita em termos de  $f(z)$  da seguinte maneira:

$$A_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij}) \left[ z_k - z_{k-1} - \frac{1}{3} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \frac{1}{h^2} \right] \quad (3.23)$$

para  $i = 4, 5$  e  $j = 4, 5$ .

### 3.5 Configurações de um laminado

Apenas casos gerais de seqüências de empilhamento serão descritos. Primeiramente a notação e terminologia associada ao esquema de laminação para laminados constituídos de lâminas de mesmo material e espessura é apresentada. O esquema de laminação pode ser simétrico ou não simétrico ou anti-simétrico em relação à superfície média.

O esquema de laminação pode ser representado por  $[\alpha/ \beta/\beta/ \alpha]$ , em que  $\alpha$  é a orientação da primeira lâmina,  $\beta$  é a orientação da segunda lâmina e assim por diante; e pode também ser representado pela metade superior do laminado, da seguinte maneira:  $[\alpha, \beta]_s$ , em que o subscrito  $s$  indica simetria da metade inferior. As lâminas são contadas a partir do topo do laminado que se encontra no sentido positivo do eixo  $z$ . Quando as lâminas do laminado possuem espessuras diferentes, deve-se representar a seqüência de empilhamento adicionando a espessura ao lado do ângulo como por exemplo:  $[\alpha t/ \beta 2t/ \beta 3t/ \alpha t]$ .<sup>[7]</sup>

O laminado freqüentemente é composto por lâminas com orientações distintas e o ângulo de orientação  $\theta$  deve ser  $-90^\circ \leq \theta \leq +90^\circ$ . Em relação à sua orientação, os laminados podem ser classificados em laminados em ângulo (*angle ply*) ou laminados cruzados (*cross ply*), sendo que este último, tem obrigatoriamente suas lâminas orientadas a  $0^\circ$  ou  $90^\circ$ , o que anula os termos  $\bar{Q}_{16}$ ,  $\bar{Q}_{26}$  e  $\bar{Q}_{45}$  da matriz constitutiva e, conseqüentemente faz com que os termos  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $A_{45}$ ,  $D_{16}$  e  $D_{26}$  da matriz de rigidez sejam iguais a zero, evitando acoplamento entre os modos de deformações normais e de cisalhamento.

Chama-se laminado simétrico aqueles laminados que têm simetria em relação à superfície média tanto do ponto de vista geométrico quanto das propriedades materiais. Ao arranjar as lâminas de um laminado de forma simétrica, obtém-se uma estrutura que

não exibe acoplamento entre flexão e extensão. Isto quer dizer que todos os termos  $B_{ij}$  da matriz de rigidez são nulos, o que facilita a análise de tais laminados.

Exemplos de laminados simétricos em ângulo e cruzados podem ser descritos por  $[30/-30/45/-30/30]$  e  $[0/90/0/90/90/0/90/0] = [0/90/0/90]_s$ , respectivamente. Os laminados em ângulo apresentam os termos  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $A_{45}$ ,  $D_{16}$  e  $D_{26}$  e oferecem mais rigidez ao cisalhamento do que os laminados cruzados.<sup>[16]</sup>

Apesar de que a simetria é muitas vezes desejada, pois ela evita o acoplamento entre modos de deformação, simplificando assim o processo de análise, necessidades de projeto podem requerer laminados não simétricos.

Anti-simétrico é o tipo de laminado que tem lâminas de mesma espessura, mesmas propriedades materiais e um número par de lâminas em que a orientação das lâminas adjacentes têm sempre sinais alternados, como por exemplo:  $[30/-30/30/-30]$ . Devido à simetria da espessura e anti-simetria da seqüência de empilhamento para cada par de lâminas, os termos  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $D_{16}$  e  $D_{26}$  são iguais a zero e os termos de  $B_{ij}$  não são todos nulos. Como mencionado anteriormente, a rigidez de um laminado depende das propriedades do material, da espessura da lâmina e do esquema de laminação. Assim, a rigidez  $A_{ij}$  depende somente da espessura e rigidez da lâmina e seus termos são sempre positivos;  $D_{ij}$  depende da espessura e rigidez e seus elementos também são positivos, e  $B_{ij}$  pode ser tanto positiva quanto negativa dependendo do número de lâminas e esquema de laminação.<sup>[7]</sup>

O próximo capítulo será dedicado a descrever a notação *strain gradient* e apresentar a formulação do elemento de placa de compósito laminado adotado.

# 4 Modelo de Placa para Compósitos Laminados

## 4.1 Considerações iniciais

Este capítulo é destinado ao desenvolvimento do elemento finito de placas de compósitos laminados utilizando a notação *strain gradient*. A notação e a formulação do elemento finito a ser adotado são apresentados. As referências bibliográficas utilizadas são: Abdalla Filho<sup>[2]</sup> e Byrd<sup>[19]</sup>.

## 4.2 A notação *strain gradient*

Na formulação por elementos finitos, os deslocamentos são representados por expansões polinomiais cujos coeficientes são desconhecidos. A notação *strain gradient* consiste em escrever as expansões polinomiais para os deslocamentos em termos de grandezas fisicamente interpretáveis, o que permite relacionar os deslocamentos que ocorrem no meio contínuo às suas fontes. Com isso, a notação é capaz de evidenciar a relação entre o modelo matemático e o problema físico.

A base operacional para definir fisicamente os coeficientes polinomiais consiste em escrever os coeficientes da expansão em séries de Taylor em termos de grandezas cinemáticas, ou seja, relações deformação–deslocamento. Desta maneira, a utilização da notação *strain gradient* na formulação de elementos finitos permite determinar a habilidade de um elemento em modelar um tipo qualquer de problema, *a-priori*, ou seja, antes do processo de análise numérica.

O procedimento para a determinação dos coeficientes em termos de grandezas fisicamente interpretáveis será agora ilustrado através de um caso bidimensional, representado por polinômios completos de segunda ordem. O procedimento descrito em maior

nível de detalhe pode ser encontrado em Byrd<sup>[19]</sup>.

As expansões polinomiais para as componentes dos deslocamentos  $u$  e  $v$  são:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= A_1 + A_2x + A_3y + A_4x^2 + A_5xy + A_6y^2 \\ v(x, y) &= B_1 + B_2x + B_3y + B_4x^2 + B_5xy + B_6y^2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

As expansões polinomiais dos deslocamentos são expansões em séries de Taylor avaliadas em uma determinada origem, sendo os coeficientes desconhecidos necessariamente grandezas cinemáticas, tais quais movimentos de corpo rígido, deformações e gradientes de deformações. Avaliando as Eq. 4.1 na origem do elemento produz-se:

$$\begin{aligned} u(0, 0) &= A_1 = [u]_o \\ v(0, 0) &= B_1 = [v]_o \end{aligned} \quad (4.2)$$

em que  $[u]_o$  e  $[v]_o$  são as componentes horizontal e vertical dos movimentos de translação de corpo rígido.

Pela avaliação da primeira derivada dos deslocamentos  $u$  e  $v$  para deformações normais na origem, tem-se:

$$\begin{aligned} \epsilon_x(x, y) &= \frac{\partial u}{\partial x} = A_2 + 2A_4x + A_5y \\ \epsilon_x(0, 0) &= A_2 = [\epsilon_x]_o \\ \epsilon_y(x, y) &= \frac{\partial v}{\partial y} = B_3 + B_5x + 2B_6y \\ \epsilon_y(0, 0) &= B_3 = [\epsilon_y]_o \end{aligned} \quad (4.3)$$

Utilizando as definições de rotação no plano e distorção angular, essas grandezas estimadas na origem são definidas como:

$$\begin{aligned} r(x, y) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} [(B_2 - A_3) + (2B_4 - A_5)x + (B_5 - 2A_6)y] \\ r(0, 0) &= \frac{1}{2} (B_2 - A_3) = [r]_o \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}(x, y) &= \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = [(A_3 + B_2) + (A_5 + 2B_4)x + (2A_6 + B_5)y] \\ \gamma_{xy}(0, 0) &= (A_3 + B_2) = [\gamma_{xy}]_o \end{aligned} \quad (4.5)$$



Resolvendo as Eq. 4.4 e 4.5 tem-se:

$$\begin{aligned} A_3 &= \left[ \frac{\gamma_{xy}}{2} - r \right]_o \\ B_2 &= \left[ \frac{\gamma_{xy}}{2} + r \right]_o \end{aligned} \quad (4.6)$$

As derivadas de primeira ordem das deformações normais e de cisalhamento para a obtenção dos coeficientes polinomiais, determinadas na origem, estão descritas abaixo:

$$\begin{aligned} \epsilon_{x,x}(0,0) &= \frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} = 2A_4 \\ \epsilon_{x,y}(0,0) &= \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} = A_5 \\ \epsilon_{y,x}(0,0) &= \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} = B_5 \\ \epsilon_{y,y}(0,0) &= \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} = 2B_6 \\ \gamma_{xy,x}(0,0) &= \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = A_5 + 2B_4 \\ \gamma_{xy,y}(0,0) &= \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} = 2A_6 + B_5 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Logo, rearranjando a Eq. 4.7, obtém-se:

$$\begin{aligned} A_4 &= \left[ \frac{\epsilon_{x,x}}{2} \right]_o \\ A_5 &= [\epsilon_{x,y}]_o \\ A_6 &= \left[ \frac{(\gamma_{xy,y} - \epsilon_{y,x})}{2} \right]_o \\ B_4 &= \left[ \frac{(\gamma_{xy,x} - \epsilon_{x,y})}{2} \right]_o \\ B_5 &= [\epsilon_{y,x}]_o \\ B_6 &= \left[ \frac{\epsilon_{y,y}}{2} \right]_o \end{aligned} \quad (4.8)$$

Agora que todos os coeficientes arbitrários foram definidos, pode-se substituí-los na Eq. 4.1 obtendo-se as expressões para os deslocamentos em termos de grandezas físicas como segue:

$$\begin{aligned}
u(x, y) &= [u]_o + [\epsilon_x]_o x + \left[ \frac{\gamma_{xy}}{2} - r \right]_o y + \left[ \frac{\epsilon_{x,x}}{2} \right]_o x^2 + [\epsilon_{x,y}]_o xy + \left[ \frac{\gamma_{xy,y} - \epsilon_{y,x}}{2} \right]_o y^2 \\
v(x, y) &= [v]_o + \left[ \frac{\gamma_{xy}}{2} + r \right]_o x + [\epsilon_y]_o y + \left[ \frac{\gamma_{xy,x} - \epsilon_{x,y}}{2} \right]_o x^2 + [\epsilon_{y,x}]_o xy + \left[ \frac{\epsilon_{y,y}}{2} \right]_o y^2
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Os coeficientes contidos na Eq. 4.1 aparentemente não possuem significado físico. O objetivo da notação *strain gradient* é revelar a relação entre esses coeficientes e as grandezas físicas que produzem movimento no meio contínuo. Ao analisar a Eq. 4.9, pode-se notar que as componentes do deslocamento são compostas por coeficientes que representam movimento de corpo rígido, estado de deformações constantes e derivadas das deformações, sendo essas grandezas os estados de deformações que o elemento é capaz de representar.

O procedimento para a determinação dos coeficientes anteriormente descrito foi aplicado a um polinômio tridimensional completo de quarta ordem e os coeficientes resultantes foram tabeladas por Byrd<sup>[19]</sup>(ver tabela no apêndice A). Portanto, não há necessidade de se aplicar o procedimento de determinação dos coeficientes a cada vez que se quiser formular um elemento, bastando apenas consultar na tabela os coeficientes compatíveis com o tipo do elemento e teoria adotados.

A formulação apresentada a seguir considera um compósito laminado de espessura qualquer  $h$  e formada por  $n$  lâminas. Como cada componente do deslocamento pode ser estimada nos pontos nodais do elemento finito, a representação matricial dos deslocamentos é convenientemente dada por:

$$\{d_k\} = [\phi_k] \{\epsilon_{sg_k}\} \tag{4.10}$$

em que:

- $\{d_k\}$  é o vetor de graus de liberdade nodais da  $k$ -ésima lâmina e é definido por:

$$\{d_k\}^T = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4 \ u_5 \ v_5 \ u_6 \ v_6\}$$

- $\{\epsilon_{sg_k}\}$  é vetor dos modos de deformação para a lâmina  $k$  e é expresso por:

$$\{\epsilon_{sg_k}\}^T = \{u_0 \ v_0 \ r_0 \ \epsilon_x \ \epsilon_{x,x} \ \epsilon_{x,y} \ \epsilon_y \ \epsilon_{y,y} \ \epsilon_{y,x} \ \gamma_{xy} \ \gamma_{xy,x} \ \gamma_{xy,y}\}$$

- $[\phi_k]$  é composta de vetores de deslocamento linearmente independentes que contém as coordenadas nodais do elemento e que relaciona os deslocamentos aos possíveis modos de deformações e é expressa por:

$$[\phi_k] = \begin{bmatrix} \vdots & u_o & v_o & r_o & \epsilon_x & \epsilon_{x,x} & \epsilon_{x,y} & \epsilon_y & \epsilon_{y,y} & \epsilon_{y,x} & \gamma_{xy} & \gamma_{xy,x} & \gamma_{xy,y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_1 & \vdots & 1 & 0 & -y_1 & x_1 & \frac{x_1^2}{2} & x_1 y_1 & 0 & 0 & \frac{-y_1^2}{2} & \frac{y_1}{2} & 0 & \frac{y_1^2}{2} \\ v_1 & \vdots & 0 & 1 & x_1 & 0 & 0 & \frac{-x_1^2}{2} & y_1 & \frac{y_1^2}{2} & x_1 y_1 & \frac{x_1}{2} & \frac{x_1^2}{2} & 0 \\ u_2 & \vdots & 1 & 0 & -y_2 & x_2 & \frac{x_2^2}{2} & x_2 y_2 & 0 & 0 & \frac{-y_2^2}{2} & \frac{y_2}{2} & 0 & \frac{y_2^2}{2} \\ v_2 & \vdots & 0 & 1 & x_2 & 0 & 0 & \frac{-x_2^2}{2} & y_2 & \frac{y_2^2}{2} & x_2 y_2 & \frac{x_2}{2} & \frac{x_2^2}{2} & 0 \\ u_3 & \vdots & 1 & 0 & -y_3 & x_3 & \frac{x_3^2}{2} & x_3 y_3 & 0 & 0 & \frac{-y_3^2}{2} & \frac{y_3}{2} & 0 & \frac{y_3^2}{2} \\ v_3 & \vdots & 0 & 1 & x_3 & 0 & 0 & \frac{-x_3^2}{2} & y_3 & \frac{y_3^2}{2} & x_3 y_3 & \frac{x_3}{2} & \frac{x_3^2}{2} & 0 \\ u_4 & \vdots & 1 & 0 & -y_4 & x_4 & \frac{x_4^2}{2} & x_4 y_4 & 0 & 0 & \frac{-y_4^2}{2} & \frac{y_4}{2} & 0 & \frac{y_4^2}{2} \\ v_4 & \vdots & 0 & 1 & x_4 & 0 & 0 & \frac{-x_4^2}{2} & y_4 & \frac{y_4^2}{2} & x_4 y_4 & \frac{x_4}{2} & \frac{x_4^2}{2} & 0 \\ u_5 & \vdots & 1 & 0 & -y_5 & x_5 & \frac{x_5^2}{2} & x_5 y_5 & 0 & 0 & \frac{-y_5^2}{2} & \frac{y_5}{2} & 0 & \frac{y_5^2}{2} \\ v_5 & \vdots & 0 & 1 & x_5 & 0 & 0 & \frac{-x_5^2}{2} & y_5 & \frac{y_5^2}{2} & x_5 y_5 & \frac{x_5}{2} & \frac{x_5^2}{2} & 0 \\ u_6 & \vdots & 1 & 0 & -y_6 & x_6 & \frac{x_6^2}{2} & x_6 y_6 & 0 & 0 & \frac{-y_6^2}{2} & \frac{y_6}{2} & 0 & \frac{y_6^2}{2} \\ v_6 & \vdots & 0 & 1 & x_6 & 0 & 0 & \frac{-x_6^2}{2} & y_6 & \frac{y_6^2}{2} & x_6 y_6 & \frac{x_6}{2} & \frac{x_6^2}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Deve-se notar que  $\{d_k\}$  e  $[\phi_k]$  são iguais para todo o laminado, por isso daqui em diante omitir-se-á o subscrito  $k$ . Isto é uma consequência da hipótese de que o laminado se deforma como um todo e que não há escorregamento entre lâminas. Desta forma, os graus de liberdade variam no plano  $XY$ , porém são constantes ao longo da espessura, fazendo com que a matriz  $\phi$  seja função apenas das coordenadas  $x$  e  $y$ , isto é, a matriz  $\phi$  é calculada na superfície média, onde  $z = 0$ .

As deformações elásticas são determinadas utilizando-se as definições da teoria da elasticidade. Na forma matricial, as deformações são dadas por:

$$\{\epsilon_k\} = [T_{sgk}] \{\epsilon_{sgk}\} \quad (4.11)$$

sendo que:

- $\{\epsilon_k\}$  é o vetor de deformações elásticas, e é definido por:

$$\{\epsilon_k\}^T = \{\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \gamma_{xy}\}$$

- $[T_{sgk}]$  é a matriz de transformação que relaciona deformações elásticas e os modos de deformação do elemento, e é definida por:

$$T_{sgk} = \begin{bmatrix} \vdots & u_o & v_o & r_o & \epsilon_x & \epsilon_{x,x} & \epsilon_{x,y} & \epsilon_y & \epsilon_{y,y} & \epsilon_{y,x} & \gamma_{xy} & \gamma_{xy,x} & \gamma_{xy,y} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \epsilon_x & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon_y & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & y & x & 0 & 0 \\ \gamma_{xy} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix}$$

Tendo determinado os deslocamentos e deformações em cada lâmina em termos de grandezas *strain gradient*, pode-se obter a matriz de rigidez do elemento utilizando a definição de energia de deformação. Sabendo-se que a energia de deformação do laminado é o somatório das energias de deformação de cada lâmina que compõem o laminado, tem-se a seguinte expressão:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \epsilon_k^T \bar{Q}_k \epsilon_k d\Omega_k \quad (4.12)$$

em que  $\Omega_k$  é o volume da lâmina.

Substituindo as equações 4.10 e 4.11 em 4.12 a expressão da energia de deformação em notação *strain gradient* é:

$$U = \frac{1}{2} d^T \phi^{-T} \left( \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} T_{sgk}^T \bar{Q}_k T_{sgk} d\Omega_k \right) \phi^{-1} d \quad (4.13)$$

A partir da equação de energia de deformação 4.13, determina-se a matriz de rigidez  $K$ :

$$K = \phi^{-T} \int_{\Omega_k} T_{sgk}^T \bar{Q}_k T_{sgk} d\Omega_k \phi^{-1} \quad (4.14)$$

A Eq. 4.14 pode ser escrita de forma compacta, como segue:

$$K = \phi^{-T} U_M \phi^{-1} \quad (4.15)$$

em que

$$U_M = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} T_{sgk}^T \bar{Q}_k T_{sgk} d\Omega_k \quad (4.16)$$

Através da notação *strain gradient*, fica dispensado o uso de integração numérica no cálculo da matriz de rigidez, bastando apenas aplicar a Eq. 4.14.

$U_M$  é chamada de matriz energia de deformação e seus elementos são integrais de volume que contém a energia de deformação associada aos vários modos de deformação que o elemento pode representar. A integral de volume da matriz  $U_M$  pode ser separada em uma integral sobre a área e uma integral sobre a espessura  $h$ , como descrito abaixo:

$$U_M = \int_A \left( \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} T_{sgk}^T \bar{Q}_k T_{sgk} dz_k \right) dA \quad (4.17)$$

A integral sobre a espessura é obtida através do somatório das integrais sobre a espessura de cada lâmina que compõe o laminado. Os limites de integração  $z_{k-1}$  e  $z_k$  são as coordenadas na direção da espessura, de topo e base de cada lâmina, como mostrado na Fig. 3 da seção 3.2.

Da integração sobre a espessura do laminado, resultam os coeficientes da matriz energia de deformação para compósitos laminados. Esses coeficientes podem ser devidos aos efeitos de membrana, efeitos de acoplamento entre flexão e membrana e efeitos de flexão, sendo expressos por:

$$\begin{aligned} U_{M_{pq}}^A &= A_{ij} \int_A f_1(x, y) dA \\ U_{M_{pq}}^B &= B_{ij} \int_A f_2(x, y) dA \\ U_{M_{pq}}^D &= D_{ij} \int_A f_3(x, y) dA \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde os termos  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$  e  $D_{ij}$  são definidos pela Eq. 3.19 da seção 3.2 e são rigidez de alongamento, rigidez de acoplamento entre modos de deformação e rigidez à flexão, res-

pectivamente. Os índices  $p$  e  $q$  representam o número de graus de liberdade no elemento,  $i$  e  $j$  variam de 1 a 5, pois representam a ordem da matriz constitutiva, e os termos  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  e  $f_3(x, y)$  são funções das coordenadas  $x$  e  $y$ , sendo portanto constantes através da espessura. A matriz energia de deformação resultante do elemento utilizado neste trabalho está detalhada no Apêndice–B.

A utilização da notação *strain gradient* para escrever as expansões polinomiais de um elemento finito revela precisamente a capacidade de modelamento do elemento. Da mesma forma, a notação *strain gradient* proporciona a fácil identificação de termos espúrios presentes, responsáveis por erros de modelamento.

Uma das fontes de erro no modelamento por elementos finitos é conhecido como cisalhamento parasítico e provoca o fenômeno de rigidez artificial. Este tipo de erro se dá através da presença de termos de deformação linear nas expansões de distorção angular. Esses termos de deformação normal não pertencem às expansões em séries de Taylor das distorções angulares, sendo, portanto, termos ilegítimos ou espúrios. Esses modos de deformação, quando ativados, causam um aumento indevido na energia de deformação associada ao cisalhamento, e, conseqüentemente, na rigidez do elemento finito. Este fenômeno ocorre, por exemplo, em um problema de flexão pura sendo modelado por um elemento quadrangular da elasticidade plana. A grande vantagem em se utilizar a notação *strain gradient* é que o procedimento de formulação permite a identificação e remoção dos termos espúrios durante o processo de formulação.<sup>[2][20]</sup>

Na próxima seção, será apresentada a formulação do elemento de placa adotado para modelar compósitos laminados neste trabalho. Será dada ênfase à identificação dos termos espúrios e suas eliminações para correção do modelo.

### 4.3 Formulação do elemento

Nesta seção será apresentada a formulação de um elemento finito de placa com quatro nós, associado a teoria de placa de Mindlin, ou seja, teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem. Este elemento tem cinco graus de liberdade por nó, sendo: dois deslocamentos no plano  $u$  e  $v$ , um deslocamento transversal  $w$  e duas rotações normais ao plano  $p$  e  $q$  em relação aos eixos  $y$  e  $x$ , respectivamente, como mostra a Fig. 1 da Seção 3.4.

Em um elemento de placa de Mindlin, as rotações  $p$  e  $q$  são independentes do

deslocamento transversal, o que resulta em:

$$q(x, y) = \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \quad \text{e} \quad p(x, y) = -\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} \quad (4.19)$$

A hipótese de que seções planas normais a superfície média do laminado antes da deformação permanecem planas, mas não necessariamente normais a superfície média depois da deformação, geram deslocamentos no plano que são funções lineares da espessura. Isto permite a existência de distorção angular através da espessura no elemento. Desta forma, os deslocamentos no plano são descritos por:

$$u(x, y, z) = zq(x, y) \quad \text{e} \quad v(x, y, z) = -zp(x, y) \quad (4.20)$$

O que diferencia um compósito constituído de uma única lâmina de um compósito laminado é que este último combina efeitos de membrana e de flexão de placa. Esse acoplamento dos modos de deformação surge devido a interação entre as lâminas. Assim, as variáveis de campo que definem o elemento são  $u$ ,  $v$  e  $w$  e podem ser representadas por:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_o(x, y) + zq(x, y) \\ v(x, y, z) &= v_o(x, y) - zp(x, y) \\ w(x, y) &= w_o(x, y) \end{aligned} \quad (4.21)$$

em que os deslocamentos no plano são descritos pela soma dos deslocamentos no plano da superfície média ( $u_o$  e  $v_o$ ) e das rotações com termos lineares em  $z$ , e o deslocamento transversal é independente da espessura.

Os termos  $u_o$ ,  $v_o$  e  $w_o$  são função de  $x$  e  $y$ , e por isso, suas expansões polinomiais são:  $1$ ,  $x$ ,  $y$  e  $xy$ . As rotações  $p$  e  $q$  são função de  $z$  sendo suas expansões polinomiais:  $z$ ,  $xz$ ,  $yz$  e  $xyz$ . Portanto, os polinômios que descrevem os deslocamentos são:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5z + a_6xz + a_7yz + a_8xyz \\
v(x, y, z) &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy + b_5z + b_6xz + b_7yz + b_8xyz \\
w(x, y) &= c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \\
q(x, y) &= \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \\
p(x, y) &= -\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = -(b_5 + b_6x + b_7y + b_8xy)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Utilizando a Tab. 2 do apêndice A, obtém-se os coeficientes polinomiais em termos das grandezas cinemáticas como segue:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z) &= [u]_o + [\epsilon_x]_o x + \left[ \frac{\gamma_{xy}}{2} - r \right]_o y + [\epsilon_{x,y}]_o xy + \left[ \frac{\gamma_{xz}}{2} + q \right]_o z + [\epsilon_{x,z}]_o xz \\
&\quad + \left[ \frac{\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2} \right]_o yz + [\epsilon_{x,yz}]_o xyz \\
v(x, y, z) &= [v]_o + \left[ \frac{\gamma_{xy}}{2} + r \right]_o x + [\epsilon_y]_o y + [\epsilon_{y,x}]_o xy + \left[ \frac{\gamma_{yz}}{2} - p \right]_o z \\
&\quad + \left[ \frac{\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} - \gamma_{xz,y}}{2} \right]_o xz + [\epsilon_{y,z}]_o yz + [\epsilon_{y,xz}]_o xyz \\
w(x, y, z) &= [w]_o + \left[ \frac{\gamma_{xz}}{2} - q \right]_o x + \left[ \frac{\gamma_{yz}}{2} + p \right]_o y + \left[ \frac{-\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2} \right]_o xy \\
q(x, y) &= \left[ \frac{\gamma_{xz}}{2} + q \right]_o + [\epsilon_{x,z}]_o x + \left[ \frac{\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2} \right]_o y + [\epsilon_{x,yz}]_o xy \\
p(x, y) &= \left[ p - \frac{\gamma_{yz}}{2} \right]_o + \left[ \frac{-\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2} \right]_o x - [\epsilon_{y,z}]_o y - [\epsilon_{y,xz}]_o xy
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Através da Eq. 4.23, pode-se identificar os modos de deformação que o elemento é capaz de representar, e esses modos são:

- Movimentos de corpo rígido:  $[u]_o$   $[v]_o$   $[w]_o$   $[p]_o$   $[q]_o$   $[r]_o$
- Deformações constantes:  $[\epsilon_x]_o$   $[\epsilon_y]_o$   $[\gamma_{xy}]_o$   $[\gamma_{xz}]_o$   $[\gamma_{yz}]_o$
- Deformações por flexão:  $[\epsilon_{x,y}]_o$   $[\epsilon_{x,z}]_o$   $[\epsilon_{y,x}]_o$   $[\epsilon_{y,z}]_o$   $[\epsilon_{x,yz}]_o$   $[\epsilon_{y,xz}]_o$



- Deformações por cisalhamento:  $[\gamma_{xy,z}]_o$   $[\gamma_{xz,y}]_o$   $[\gamma_{yz,x}]_o$

Entre movimento de corpo rígido e modo de deformação, o elemento é capaz de representar um total de vinte elementos (que é igual ao número de graus de liberdade do elemento), sendo seis modos de movimento de corpo rígido e quatorze modos de deformações independentes. Esses elementos formam os componentes do vetor gradiente de deformação  $\{\epsilon_{sg}\}$ .

O elemento é capaz de representar seis modos de movimento de corpo rígido (que chamaremos de modos de deformação nula) e quatorze modos de deformações independentes, totalizando vinte modos de deformações, que é igual ao número de graus de liberdade do elemento. Esses modos de deformação formam os componentes do vetor gradiente de deformação  $\{\epsilon_{sg}\}$ .

$$\begin{aligned} \{\epsilon_{sg}\}^T = \{ & [u]_o [v]_o [w]_o [r]_o [p]_o [q]_o [\epsilon_x]_o [\epsilon_{x,y}]_o [\epsilon_{x,z}]_o [\epsilon_{x,yz}]_o [\epsilon_y]_o \\ & [\epsilon_{y,x}]_o [\epsilon_{y,z}]_o [\epsilon_{y,xz}]_o [\gamma_{xy}]_o [\gamma_{xy,z}]_o [\gamma_{xz}]_o [\gamma_{xz,y}]_o [\gamma_{yz}]_o [\gamma_{yz,x}]_o \} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Agora, pode-se obter a relação entre deslocamentos nodais e a base gradiente de deformações:

$$\{d\} = [\phi] \{\epsilon_{sg}\} \quad (4.25)$$

em que  $\{d\}$  é:

$$\{d\} = \{u_1 v_1 w_1 p_1 q_1 \quad u_2 v_2 w_2 p_2 q_2 \quad u_3 v_3 w_3 p_3 q_3 \quad u_4 v_4 w_4 p_4 q_4 \quad u_5 v_5 w_5 p_5 q_5\} \quad (4.26)$$

Como mencionado anteriormente, a matriz  $\phi$  é a matriz transformação que relaciona os deslocamentos no elemento e os possíveis modos de deformação. Esta matriz é tomada na superfície média, portanto todos os termos em  $z$  são iguais a zero, e conseqüentemente, ela é única para todo o laminado.

O vetor de deformações é composto por três deformações no plano e duas deformações de cisalhamento transversal. Esse vetor pode ser descrito como a soma de dois outros vetores, sendo que o primeiro vetor do lado esquerdo da Eq. 4.27 representa as deformações de membrana e o segundo vetor do lado direito da mesma equação corresponde às deformações de flexão, como segue:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{o,x} \\ v_{o,y} \\ 0 \\ 0 \\ u_{o,y} + v_{o,x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} zq_{,x} \\ -zp_{,y} \\ w_{,y} - p \\ w_{,x} + q \\ z(q_{,y} - p_{,x}) \end{Bmatrix} \quad (4.27)$$

A partir da Eq. 4.27, pode-se obter as deformações elásticas, conforme a teoria da elasticidade:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = [\epsilon_x]_o + [\epsilon_{x,y}]_o y + [\epsilon_{x,z}]_o z + [\epsilon_{x,yz}]_o yz \quad (4.28a)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = [\epsilon_y]_o + [\epsilon_{y,x}]_o x + [\epsilon_{y,z}]_o z + [\epsilon_{y,xz}]_o xz \quad (4.28b)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = [\gamma_{yz}]_o + [\gamma_{yz,x}]_o x + [\epsilon_{y,z}]_o y + [\epsilon_{y,xz}]_o xy \quad (4.28c)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = [\gamma_{xz}]_o + [\gamma_{xz,y}]_o y + [\epsilon_{x,z}]_o x + [\epsilon_{x,yz}]_o xy \quad (4.28d)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = & [\gamma_{xy}]_o + [\epsilon_{x,y}]_o x + [\epsilon_{y,x}]_o y + [\gamma_{xy,z}]_o z + \\ & + [\epsilon_{y,xz}]_o yz + [\epsilon_{x,yz}]_o xz \end{aligned} \quad (4.28e)$$

Com as expressões para deformações definidas, pode-se agora iniciar o processo de identificação dos termos espúrios. Ao observar as equações de deformações normais (4.28a e 4.28b) percebe-se que todos os coeficientes em gradiente de deformações pertencem às respectivas expansões em séries de Taylor. Entretanto, nas expressões de deformação por cisalhamento (4.28c, 4.28d e 4.28e), surgem termos de deformação normal que não pertencem à série de Taylor aplicada às equações de distorção angular. Esses termos são termos espúrios e são introduzidos nos polinômios para deformações devido ao uso de polinômios incompatíveis na representação do campo dos deslocamentos. Na representação dos deslocamentos de membrana, incompatibilidade significa que os polinômios são incompletos, gerando o surgimento dos termos ilegítimos na expressão da distorção angular no plano ( $\gamma_{xy}$ ).

A incompatibilidade na representação do deslocamento transversal e das rotações está nos graus dos polinômios empregados. Diz-se que esses polinômios são inconsistentes. Como as distorções angulares transversais ( $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{xz}$ ) são definidas pela soma de uma rotação e a primeira derivada do deslocamento transversal, para haver consistência, ambos

os termos deveriam ser polinômios de mesmo grau. No presente caso, os polinômios para deslocamento transversal e rotações são de mesma ordem, gerando inconsistência ao se derivar o primeiro. Portanto, para se evitar o surgimento dos termos espúrios nos polinômios de  $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{xz}$ , dever-se-ia empregar um polinômio de um grau mais elevado para o deslocamento transversal.

A capacidade da notação *strain gradient* em promover a possibilidade de identificação e remoção dos termos que causam deficiências no processo de modelagem antes da análise ser processada é a grande vantagem da aplicação da notação no procedimento de formulação.

Os termos espúrios são causadores do erro de modelagem conhecido por cisalhamento parasítico e causam rigidez artificial no elemento, sendo necessário eliminá-los. O critério para a eliminação de termos espúrios, consiste em remover os termos de deformações normais que não pertencem às séries de Taylor das deformações por cisalhamento. O processo de remoção deve ser cuidadoso de forma que não se elimine termos de deformação normal que podem ser substituídos por termos de distorção angular através das equações de compatibilidade da teoria da elasticidade. <sup>[2][19]</sup>

Os termos espúrios encontrados são:

- para  $\gamma_{yz}$ :  $[\epsilon_{y,z}]_o$   $[\epsilon_{y,xz}]_o$
- para  $\gamma_{xz}$ :  $[\epsilon_{x,z}]_o$   $[\epsilon_{x,yz}]_o$
- para  $\gamma_{xy}$ :  $[\epsilon_{x,y}]_o$   $[\epsilon_{y,x}]_o$   $[\epsilon_{y,xz}]_o$   $[\epsilon_{x,yz}]_o$

Para um elemento quadrangular de quatro nós, nenhuma equação de compatibilidade é identificada, portanto, com a simples remoção dos termos espúrios das expressões de deformação por cisalhamento, tem-se:

$$\gamma_{yz} = [\gamma_{yz}]_o + [\gamma_{yz,x}]_o x \quad (4.29a)$$

$$\gamma_{xz} = [\gamma_{xz}]_o + [\gamma_{xz,y}]_o y \quad (4.29b)$$

$$\gamma_{xy} = [\gamma_{xy}]_o + [\gamma_{xy,z}]_o z \quad (4.29c)$$

As Eq. 4.29a, 4.29b e 4.29c têm apenas termos pertencentes às séries de Taylor das deformações por cisalhamento, ou seja, termos legítimos.

---

Este simples procedimento de formulação de elementos finitos, via notação *strain gradient*, permite eliminação de termos espúrios, dispensando o uso de técnicas de integração reduzida.

O próximo capítulo tem por objetivo validar o elemento aqui formulado através de soluções numéricas e suas comparações, quando possível, com soluções analíticas.

## 5 Análises Numéricas

Este capítulo apresenta as análises numéricas obtidas através do emprego do modelo de placa para compósitos laminados adotado no intuito de validar o elemento formulado usando a notação *strain gradient*. Para isso, soluções numéricas serão comparadas com soluções analíticas. Além disso, demonstra a eficiência da notação em identificar e remover termos espúrio causadores de erros de modelamento.

Antes da realização das análises numéricas, descreve-se a implementação do cálculo de tensões e a solução analítica adotada.

### 5.1 Cálculo das tensões

A partir do aplicativo LAMFEM, desenvolvido em Fortran, foi implementado o cálculo das tensões para um elemento quadrilátero de 4 nós, utilizando a notação *strain gradient* como descrito abaixo:

$$\begin{aligned}\{\epsilon_{sg}\} &= [\phi]^{-1} \{d\} \\ \{\epsilon\} &= [T_{sg}] \{\epsilon_{sg}\} \\ \{\epsilon\} &= [T_{sg}] [\phi]^{-1} \{d\} \\ \{\sigma\} &= [\overline{Q}] \{\epsilon\} \\ \{\sigma\} &= [\overline{Q}] [T_{sg}] [\phi]^{-1} \{d\}\end{aligned}\tag{5.1}$$

em que  $\{d\}$  é o vetor de deslocamentos,  $[\phi]$  é a matriz transformação,  $\{\epsilon_{sg}\}$  é o vetor dos modos de deformação,  $\epsilon$  é o vetor de deformações elásticas,  $[T_{sg}]$  é a matriz de transformação,  $[\overline{Q}]$  é a matriz de propriedades constitutivas e  $\sigma$  é o vetor de tensões.

Computacionalmente as tensões podem ser calculadas com ou sem os termos espúrios. A presença ou ausência destes termos é identificada na matriz  $[T_{sg}]$ , e estes afetam as componentes da matriz de rigidez como mostra a Eq. 4.14. A matriz  $[T_{sg}]_1^T$

com os termos espúrios está descrita na Eq. 5.2 à esquerda. Com a finalidade de facilitar a compreensão do significado físico, a primeira linha contém as deformações elásticas do elemento e a primeira coluna contém os modos de deformação que o elemento é capaz de representar. De maneira similar, à direita tem-se a matriz  $[T_{sg}]_2^T$  após a remoção dos termos espúrios de deformação normal na expressão da distorção angular.

$$\begin{aligned}
 [T_{sg}]_1^T = & \begin{bmatrix}
 & \vdots & \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{xy} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 u_o & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 v_o & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 r_o & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 w_o & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p_o & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 q_o & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \epsilon_x & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \epsilon_{xy} & \vdots & y & 0 & 0 & 0 & x \\
 \epsilon_{xz} & \vdots & z & 0 & 0 & x & 0 \\
 \epsilon_{x,yz} & \vdots & yz & 0 & 0 & xy & xz \\
 \epsilon_y & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \epsilon_{yx} & \vdots & 0 & x & 0 & 0 & y \\
 \epsilon_{yz} & \vdots & 0 & z & y & 0 & 0 \\
 \epsilon_{y,zx} & \vdots & 0 & xz & xy & 0 & yz \\
 \gamma_{xy} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \gamma_{xy,z} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & z \\
 \gamma_{xz} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \gamma_{xz,y} & \vdots & 0 & 0 & 0 & y & 0 \\
 \gamma_{yz} & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \gamma_{yz,x} & \vdots & 0 & 0 & x & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 [T_{sg}]_2^T = & \begin{bmatrix}
 & \vdots & \epsilon_{xx} & \epsilon_{yy} & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{xy} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 u_o & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 v_o & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 r_o & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 w_o & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 p_o & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 q_o & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \epsilon_x & \vdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \epsilon_{xy} & \vdots & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \epsilon_{xz} & \vdots & z & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \epsilon_{x,yz} & \vdots & yz & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \epsilon_y & \vdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 \epsilon_{yx} & \vdots & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\
 \epsilon_{yz} & \vdots & 0 & z & 0 & 0 & 0 \\
 \epsilon_{y,zx} & \vdots & 0 & xz & 0 & 0 & 0 \\
 \gamma_{xy} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \gamma_{xy,z} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & z \\
 \gamma_{xz} & \vdots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 \gamma_{xz,y} & \vdots & 0 & 0 & 0 & y & 0 \\
 \gamma_{yz} & \vdots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 \gamma_{yz,x} & \vdots & 0 & 0 & x & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{5.2}$$

## 5.2 Solução analítica

A solução analítica aqui apresentada, como pode ser visto em Reddy<sup>[7]</sup> e Vinson e Sierakowski<sup>[17]</sup>, é aplicada a laminados simétricos e não considera o acoplamento dos modos de deformação. Isto significa que os termos  $B_{ij}$  (da matriz de rigidez de acoplamento dos modos de deformação) e os termos  $D_{16}$  e  $D_{26}$  (da matriz de rigidez de flexão) são nulos.

A solução de Navier foi escolhida, pois pode ser aplicada para laminados retangulares com os quatro lados simplesmente apoiados. A equação que governa a flexão de placas é:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w_o}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_o}{\partial y^4} = q(x, y) \quad (5.3)$$

As condições de contorno para placas simplesmente apoiadas nas quatro bordas são:

$$\begin{aligned} w_o(x, 0) = 0; \quad w_o(x, b) = 0; \quad M_{xx}(0, y) = 0; \quad M_{yy}(x, 0) = 0 \\ w_o(0, y) = 0; \quad w_o(a, y) = 0; \quad M_{xx}(a, y) = 0; \quad M_{yy}(x, b) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

em que  $M_{xx}$  e  $M_{yy}$  são os momentos fletores,  $w_o$  é o deslocamento transversal e  $a$  e  $b$  são as dimensões da placa em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

Os momentos fletores estão relacionados com o deslocamento transversal por:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_o}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_o}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_o}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

O método de Navier para solução de flexão de placas expande em uma série de Fourier a deflexão lateral e o carregamento. As séries para deslocamento transversal e carregamento que satisfazem as condições de contorno da Eq. 5.4 são<sup>[17]</sup>:

$$w_o(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (5.6)$$

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (5.7)$$

em que  $\alpha = (m\pi)/a$  e  $\beta = (n\pi)/b$ ;  $A_{mn}$  são coeficientes a serem determinados, tal que satisfaçam a Eq. 5.3 em qualquer ponto da placa; e  $B_{mn}$  é dado por <sup>[7]</sup>:

$$B_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y \, dx dy \quad (5.8)$$

Sabendo-se que a solução analítica será aplicada para um carregamento uniformemente distribuído  $q(x, y) = -p_o$ , obtém-se:

$$B_{mn} = -\frac{16p_o}{\pi^2 mn}, \quad \forall m, n = 1, 3, 5 \dots \quad (5.9)$$

Para determinar o coeficiente  $A_{mn}$ , deve-se substituir as Eq. 5.6 e 5.9 na Eq. 5.3, o que resulta em:

$$A_{mn} = \frac{16p_o}{\pi^6 mn D} \quad (5.10)$$

em que  $D$  é:

$$D = D_{11} \left(\frac{m}{a}\right)^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \left(\frac{mn}{ab}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n}{b}\right)^4 \quad (5.11)$$

Então, através da manipulação das equações descritas anteriormente, pode-se calcular as tensões normais e de cisalhamento no plano por:<sup>[7]</sup>

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = -\frac{16p_o}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mnD} \begin{bmatrix} (\bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha^2 + \bar{Q}_{12}^{(k)} \beta^2) \sin \alpha x \sin \beta y \\ (\bar{Q}_{12}^{(k)} \alpha^2 + \bar{Q}_{22}^{(k)} \beta^2) \sin \alpha x \sin \beta y \\ -2\bar{Q}_{66}^{(k)} \alpha \beta \cos \alpha x \cos \beta y \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Como a solução analítica adotada é obtida por meio da teoria clássica de placas laminadas, as tensões transversais normais são iguais a zero quando calculadas por meio das equações constitutivas. No entanto, elas existem e podem ser responsáveis por falhas em compósitos laminados. Essas tensões podem ser determinadas usando as condições de equilíbrio da teoria da elasticidade e são expressas por<sup>[7]</sup>:



$$\begin{cases} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{cases}^{(k)} = -\chi \frac{16p_o}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{mnD} \begin{bmatrix} [\beta^3 \bar{Q}_{22}^{(k)} + \alpha^2 \beta (2\bar{Q}_{66}^{(k)} + \bar{Q}_{12}^{(k)})] \sin \alpha x \cos \beta y \\ [\beta^3 \bar{Q}_{11}^{(k)} + \alpha \beta^2 (2\bar{Q}_{66}^{(k)} + \bar{Q}_{12}^{(k)})] \cos \alpha x \sin \beta y \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

onde  $\chi = \left( \frac{z^2 - z_k^2}{2} \right)$

### 5.3 Análises numéricas

Com o intuito de avaliar o desempenho do modelo, a solução de problemas de flexão de placa é realizada numérica e analiticamente. A solução numérica é determinada utilizando-se quatro malhas uniformes:  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$  e  $16 \times 16$ . Os problemas são avaliados com a matriz  $T_{sg}^1$  que contém os termos espúrios e com a matriz  $T_{sg}^2$  corrigida, isto é, sem os termos espúrios. Os resultados numéricos obtidos são comparados com a solução de Navier (tomada como solução exata), para a teoria clássica de placas laminadas (CLPT), como descrito na seção anterior.

Os dados gerais do problema são:

#### 1. Geometria da placa

- A placa considerada é quadrada, com lados  $a = b = 304,8$  mm (o sistema de referência e as dimensões da placa estão estabelecidas na Fig. 4);
- As relações  $a/h$  modeladas foram: 150, 50 e 10 ( $a/h$  é a relação entre a maior dimensão da placa e a espessura do laminado);

#### 2. Configuração do laminado

Exemplos de laminados simétricos em relação a superfície média, com as fibras de cada lâmina alternando-se entre  $0^\circ$  e  $90^\circ$  com relação ao eixo  $x$  serão considerados.

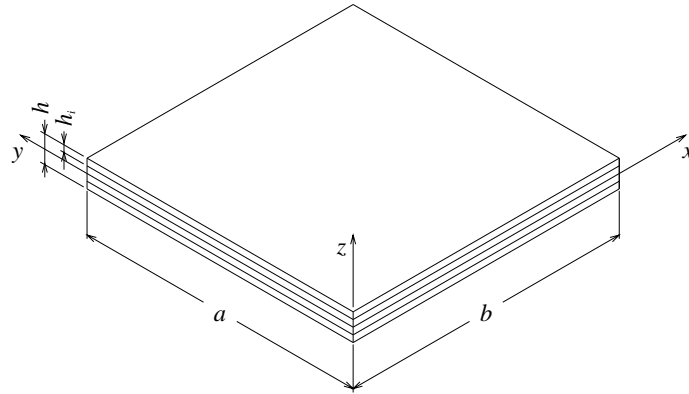


Figura 4: Geometria da placa.

### 3. Propriedades mecânicas

Tabela 1: Propriedades mecânicas: fibra de vidro em matriz de epóxi

Módulo de elasticidade longitudinal (GPa)	Módulo de elasticidade transversal (GPa)	Coefficiente de Poisson
$E_{xx} = 60,70$	$G_{yz} = 4,40$	$\nu_{yz} = 0,23$
$E_{yy} = 24,80$	$G_{xz} = 12,00$	$\nu_{yz} = 0,23$
$E_{zz} = 24,80$	$G_{xy} = 12,00$	$\nu_{yz} = 0,23$

Fonte: REDDY, J. N. *Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis*.

### 4. Carregamento aplicado

O carregamento aplicado é uma pressão unitária e a placa está simplesmente apoiada nas quatro bordas.

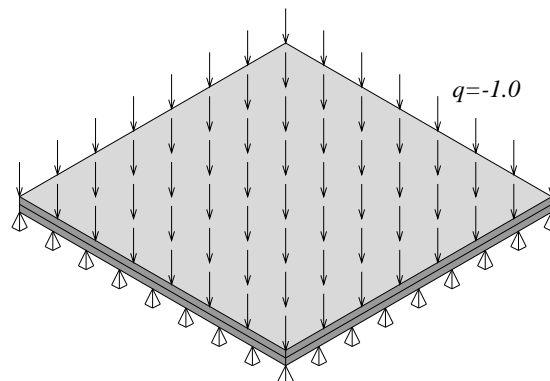


Figura 5: Carregamento e condições de contorno.

### 5.3.1 Casos modelados

Nesta seção quatro casos serão apresentados:  $a/h = 150$  (para laminados com 4 e 8 lâminas), 50 (para laminado com 4 lâminas), 10 (para laminado com 8 lâminas).

#### 5.3.1.1 Casos I e II

Os dois primeiros casos agora apresentados, tem por objetivo analisar uma placa fina, cuja relação  $a/h$  é 150. Para estes exemplos, serão considerados as seguintes configurações de laminados:

- Laminado tipo I
  - seqüência de empilhamento –  $[0^\circ/90^\circ]_s$
  - espessura do laminado  $h = 2,00$  mm
  - espessura da lâmina  $h_i = 0,51$  mm, sendo  $i = 1, \dots, 4$
- Laminado tipo II
  - seqüência de empilhamento –  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$
  - espessura do laminado  $h = 2,00$  mm
  - espessura da lâmina  $h_i = 0,25$  mm, sendo  $i = 1, \dots, 8$ ;

O problema é resolvido utilizando-se quatro malhas uniformes:  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$  e  $16 \times 16$  para o cálculo das tensões normais e de cisalhamento. As tensões ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$ ) são determinadas em diferentes posições da placa ao longo da espessura do laminado.

Dessa maneira, as Fig. 6 a 9 apresentam os valores de  $\sigma_x$  para as malhas  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$  e  $16 \times 16$ , respectivamente. A tensão normal na direção de  $x$  é avaliada no centro da placa ao longo da espessura, isto é,  $\sigma_x(a/2, b/2, z)$ . Além disso, é feita a comparação entre os resultados numéricos obtidos com cisalhamento parasítico (abreviado na legenda dos gráficos por c/CP) e sem cisalhamento parasítico (abreviado na legenda dos gráficos por s/CP) com os resultados obtidos via solução analítica (abreviado na legenda dos gráficos por CLPT).

Observando-se a Fig. 6, percebe-se que os valores numéricos das tensões com os termos espúrios (c/CP) são bem menores que os valores das tensões sem os termos espúrios. Isto significa que a presença desses termos enrijece o modelo. As tensões normais

com os termos ilegítimos, tanto para o laminado com quatro lâminas (Fig. 6(a)) quanto para o laminado com oito lâminas (Fig. 6(b)) apresentam erros relativos de 98% em relação à solução analítica para a malha  $2 \times 2$ . A mesma comparação feita para as tensões normais sem os termos espúrios apresentam erros relativos de 31% para esta mesma malha.

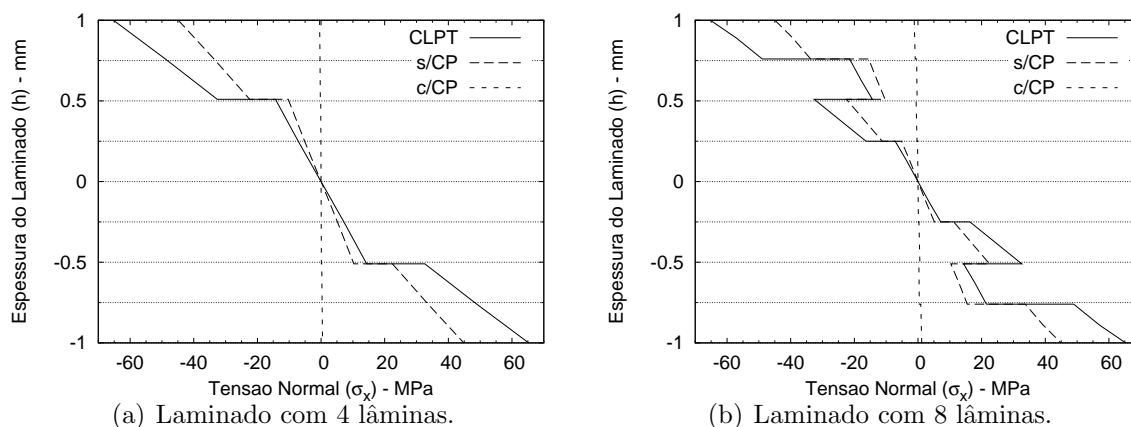


Figura 6: Tensão Normal ( $\sigma_x$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $2 \times 2$ .

As Fig. 7(a) e 7(b) mostram que para a malha  $4 \times 4$  ainda não ocorre convergência em  $\sigma_x$  avaliadas com os termos espúrios. Os erros em relação à solução exata continuam elevados, na ordem de 89% para o laminado com quatro lâminas e 80% para o laminado com oito lâminas. O mesmo não ocorre para as tensões normais calculadas sem os termos espúrios, que apresentam erros relativos em relação à solução analítica de 2% para os laminados com quatro e oito lâminas.

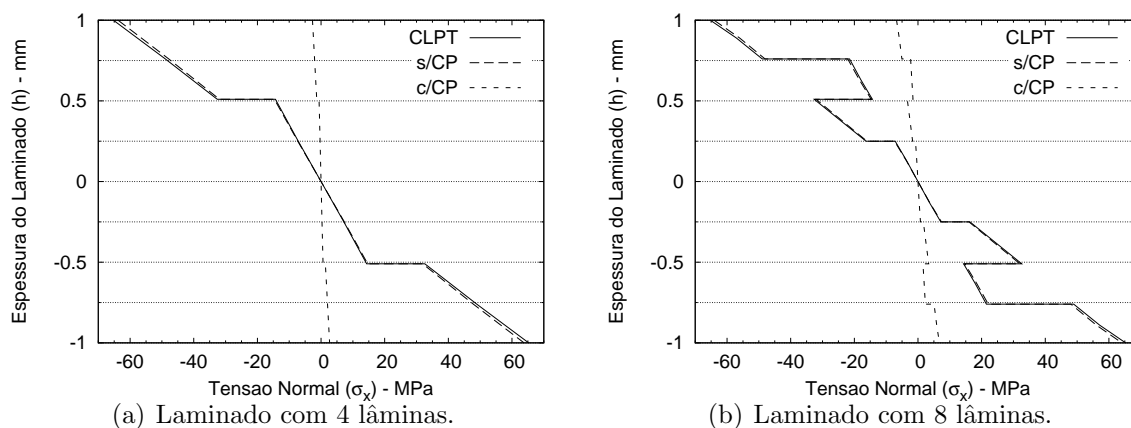


Figura 7: Tensão Normal ( $\sigma_x$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $4 \times 4$ .

A Fig. 8 mostra que o resultado numérico obtido para  $\sigma_x$  sem os termos espúrios convergem para a solução exata para a malha  $8 \times 8$ , enquanto que para essa mesma malha, a tensão normal na direção de  $x$  com os termos espúrios ainda apresenta um erro elevado, em relação à solução de Navier, de aproximadamente 84%.

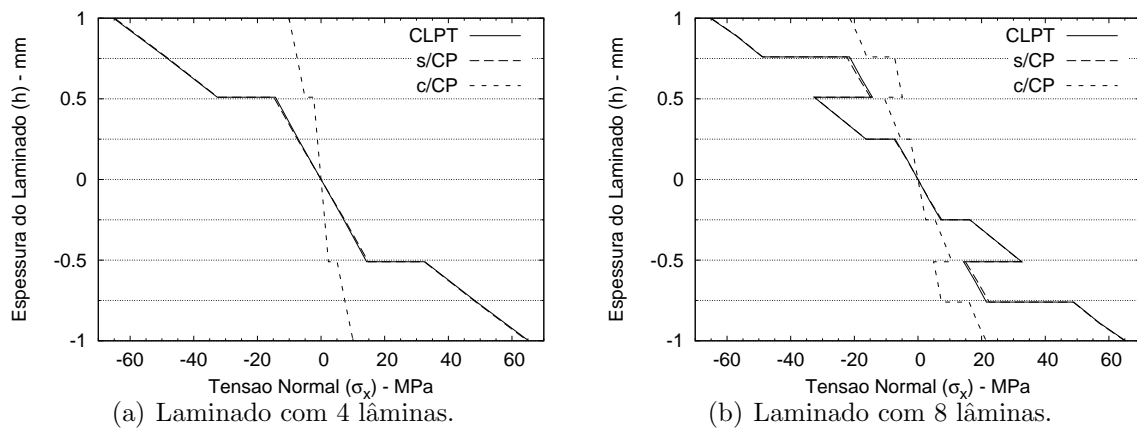


Figura 8: Tensão Normal ( $\sigma_x$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $8 \times 8$ .

Na Fig. 9(a), o erro apresentado na solução numérica com os termos espúrios é de 57% enquanto que na Fig. 9(b) este erro é de 33%. Isto indica que o refino da malha e o aumento do número de lâminas diminuem o efeito causado pelos termos espúrios. Com a remoção desses termos, o erro no modelo é de aproximadamente 1,5% para as duas configurações de laminados em análise.

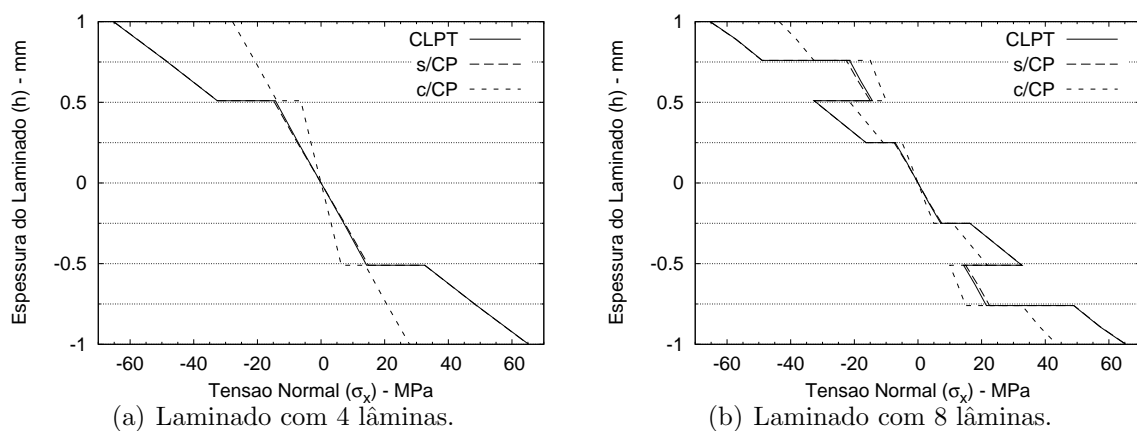


Figura 9: Tensão Normal ( $\sigma_x$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $16 \times 16$ .

As Fig. 10 a 13 apresentam os resultados numéricos das tensões normais na direção de  $y$ . Estas são avaliadas no centro da placa ao longo da espessura do laminado, isto é,  $\sigma_y(a/2, b/2, z)$ , posição esta em que  $\sigma_y$  tem seu máximo valor. Nota-se que o comportamento de convergência de  $\sigma_y$  é semelhante ao comportamento da tensão normal na direção de  $x$ .

Observando-se a Fig. 10, as tensões normais com termos ilegítimos, tanto para o laminado de quatro lâminas (Fig. 6(a)) quanto para o de oito lâminas (Fig. 6(b)) apresentam erros relativos de 98% em relação a solução analítica. A mesma comparação feita

para as tensões normais sem os termos espúrios, apresentam erros relativos de 31% na malha de  $2 \times 2$ .

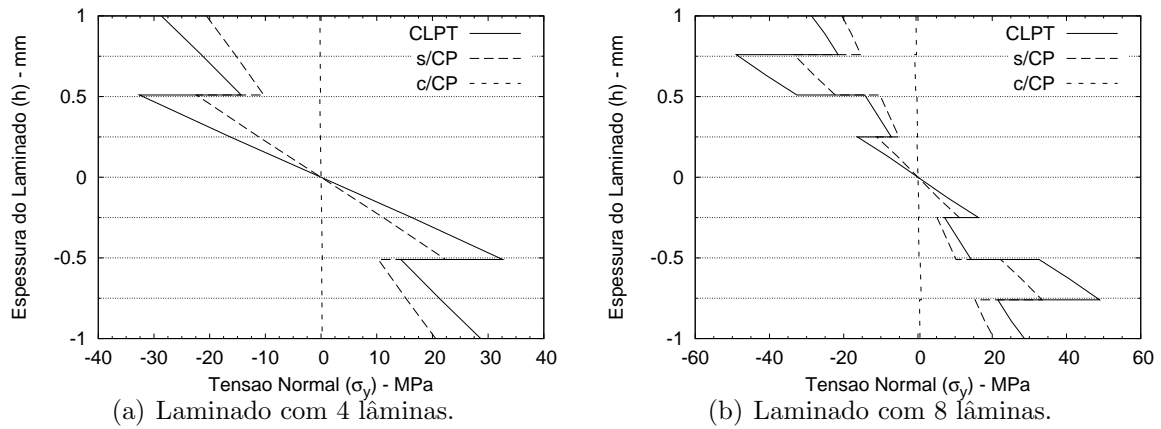


Figura 10: Tensão Normal ( $\sigma_y$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $2 \times 2$ .

As Fig. 11(a) e 11(b) mostram que para a malha  $4 \times 4$  ainda não ocorre convergência em  $\sigma_y$  avaliadas com os termos espúrios. Os erros em relação a solução exata são de 89% para o laminado com quatro lâminas e 80% para o laminado com oito lâminas. O mesmo não ocorre para as tensões normais calculadas sem os termos espúrios, que apresentam erros relativos em relação a solução analítica de apenas 2% para os laminados com quatro e oito laminas.

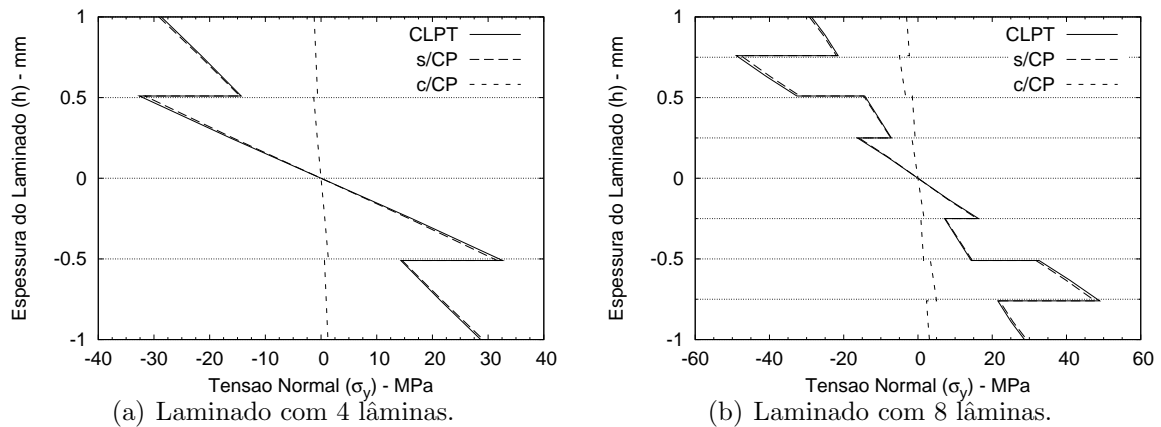


Figura 11: Tensão Normal ( $\sigma_y$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $4 \times 4$ .

Na Fig. 12 o resultado numérico obtido para  $\sigma_y$  com os termos espúrios ainda apresenta erro elevado, na ordem de 84% em relação à solução de Navier. Contudo, a malha  $8 \times 8$  sem os termos espúrios converge para a solução exata, apresentando um erro de 2%.

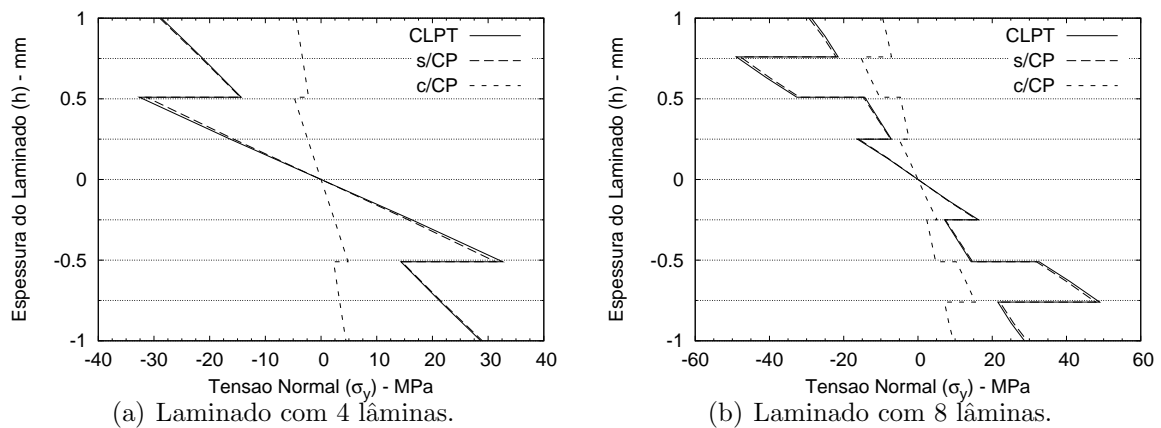


Figura 12: Tensão Normal ( $\sigma_y$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $8 \times 8$ .

Na Fig. 13(a), o erro apresentado na solução numérica com os termos espúrios é de 57% enquanto que na Fig. 13(b) este erro é de 33%. Mais uma vez, o laminado com os termos espúrios e com o maior número de lâminas apresenta convergência mais rápida em relação ao laminado com menor número de lâminas, porém, com a remoção dos termos ilegítimos, o erro no modelo é de apenas 2% para as duas configurações de laminados em análise.

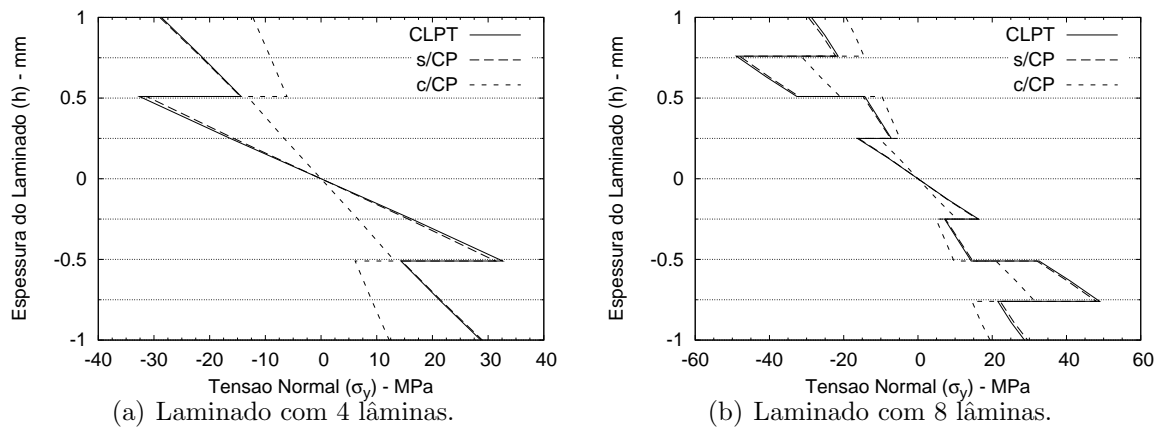


Figura 13: Tensão Normal ( $\sigma_y$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $16 \times 16$ .

Os resultados de tensão de cisalhamento no plano  $xy$  são apresentados nas Fig. 14 a 17. A tensão de cisalhamento no plano é tomada na superfície superior da placa, isto é,  $\tau_{xy}(a, b, z)$ . Novamente a comparação entre solução analítica e solução numérica com e sem os termos espúrios é realizada.

Os resultados obtidos numericamente para  $\tau_{xy}$  utilizando a malha  $2 \times 2$  com e sem a correção do elemento produzem erros elevados quando comparados com a solução exata, de 99% e 72%, respectivamente. Esses erros são de igual grandeza tanto para o

laminado de quatro e oito lâminas. Isto pode ser observado na Fig. 14.

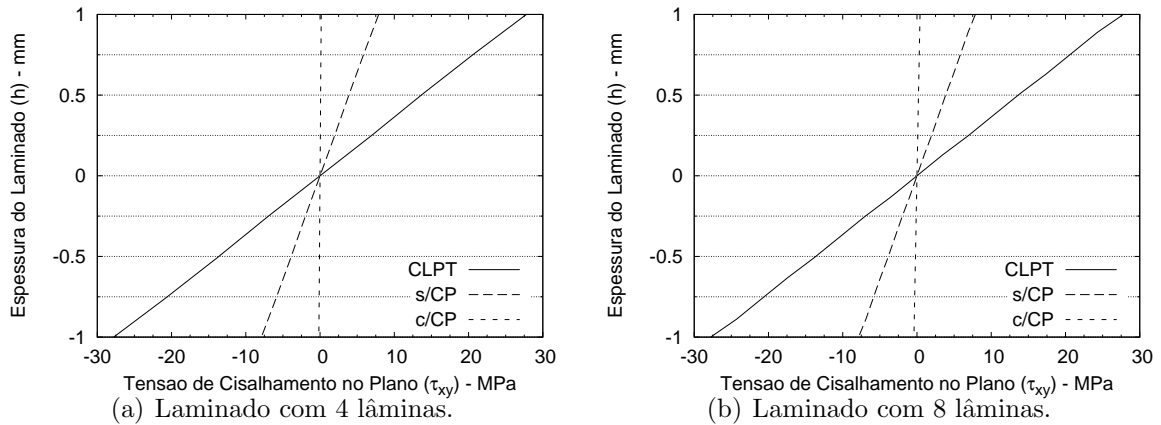


Figura 14: Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xy}$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $2 \times 2$ .

Os resultados numéricos obtidos com os termos espúrios comportam-se da mesma maneira para a malha  $4 \times 4$ , porém sem esses termos o erro diminui para 30%. Os resultados para a malha  $4 \times 4$  estão representados na Fig. 15.

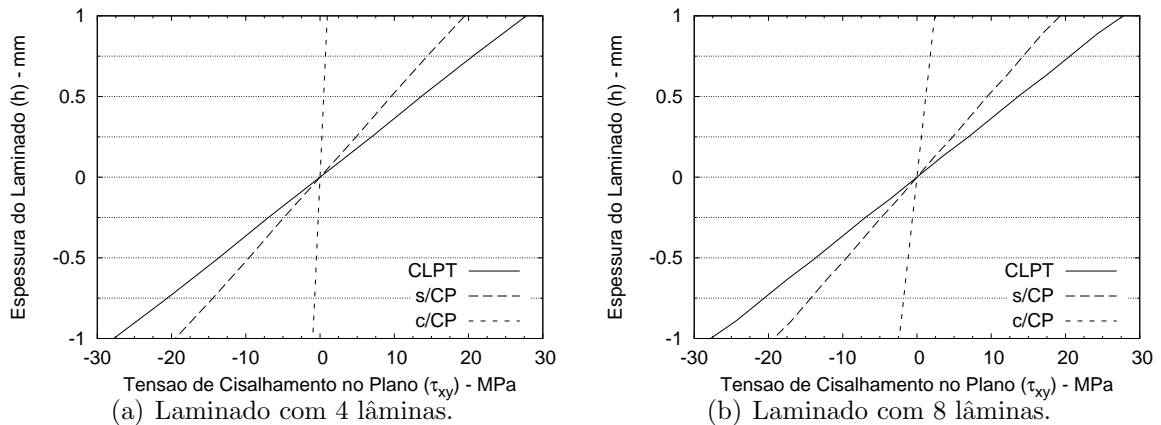


Figura 15: Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xy}$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $4 \times 4$ .

As Fig. 16 e 17 mostram, enfim, que a convergência é rápida para o modelo corrigido. O erro em relação a solução de Navier é de 12% para o laminado tipo I (4 lâminas) e de 15,5% para o laminado tipo II (8 lâminas). O modelo com os termos espúrios apresenta erro relativo de 86% e 72% para os laminados tipo I e II, respectivamente, para a malha  $8 \times 8$ .

Novamente pode-se ver na Fig. 17(a) que o erro continua decrescendo e, para a malha  $16 \times 16$ , atinge o valor de 11% para o modelo corrigido com 4 lâminas. Nota-se no entanto, que para o laminado com oito lâminas (Fig. 17(b)), o erro relativo entre os



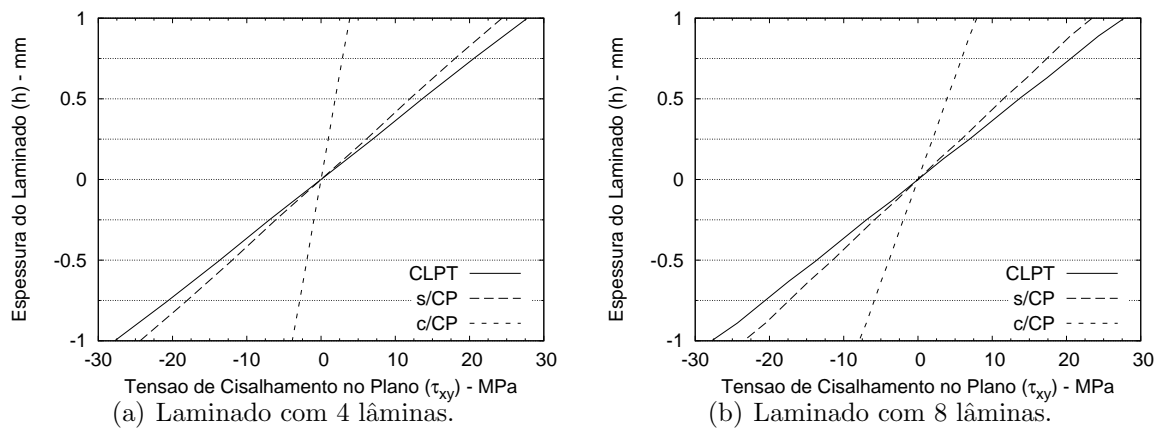


Figura 16: Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xy}$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $8 \times 8$ .

resultados do modelo corrigido e a solução analítica aumenta, enquanto que os resultados sem a remoção dos termos espúrios diminuí para 47%.

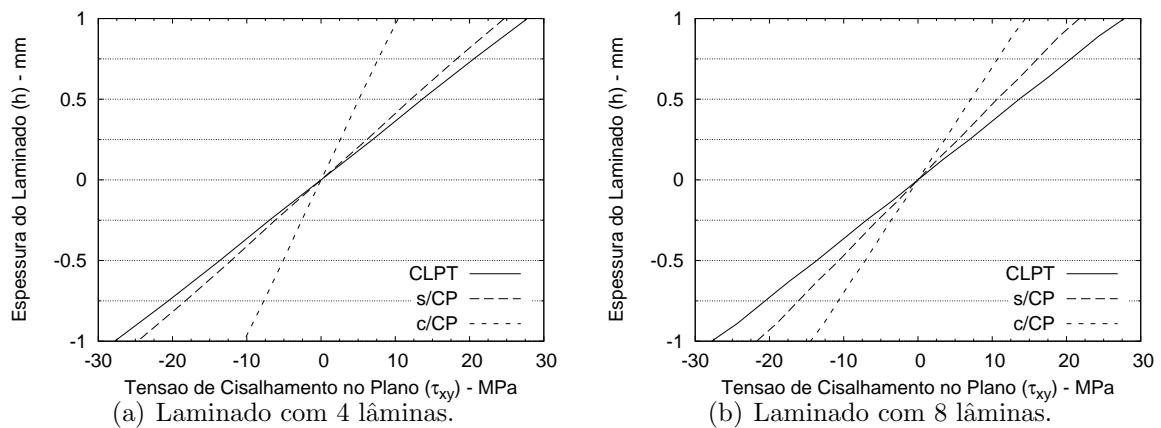


Figura 17: Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xy}$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $16 \times 16$ .

Percebe-se que os resultados de tensões normais nas direções  $x$  e  $y$  são mais precisos (com erros em torno de 2%) do que os resultados de tensões de cisalhamento no plano que produzem erros em média de (15%).

Os resultados de tensões de cisalhamento transversal  $\tau_{yz}$  são apresentados nas figuras de 18 à 21. As tensões são avaliadas em  $\tau_{yz}(a/2, 0, z)$ , posição esta onde as tensões de cisalhamento transversal  $\tau_{yz}$  é máxima.

O comportamento das tensões transversais  $\tau_{yz}$  tanto para o laminado tipo I quanto para o laminado tipo II são muito semelhantes, as Fig. 18, 19, 20 e 21 mostram que os resultados numéricos não convergem para a solução analítica baseada na teoria clássica de placas.

Esse mesmo comportamento foi também observado em Leung et al.<sup>[13]</sup>, que na validação do seu modelo, apresenta uma comparação entre as soluções numéricas e analíticas baseadas em diversas teorias de placa. Ou seja, a comparação entre os resultados obtidos pela solução analítica via teoria clássica de placas e os resultados numéricos obtidos da teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem apresentam erro elevado.

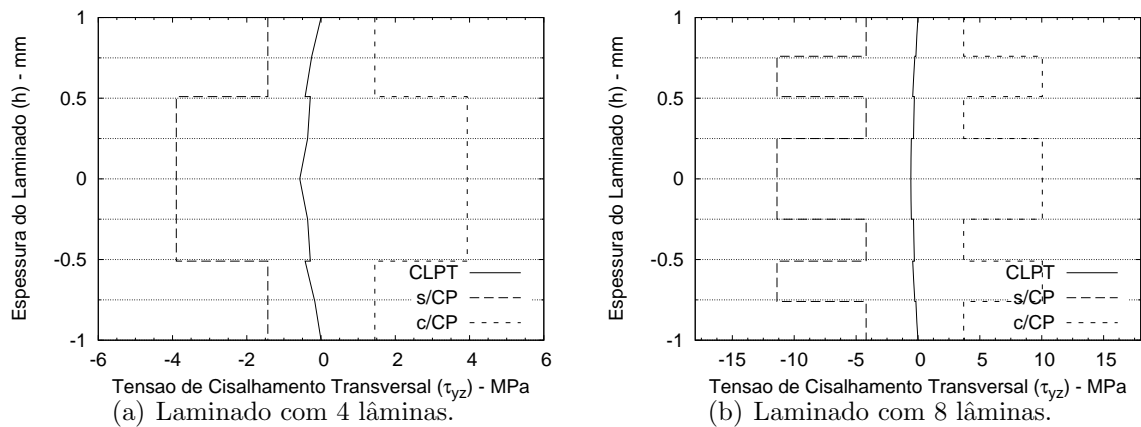


Figura 18: Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{yz}$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $2 \times 2$ .

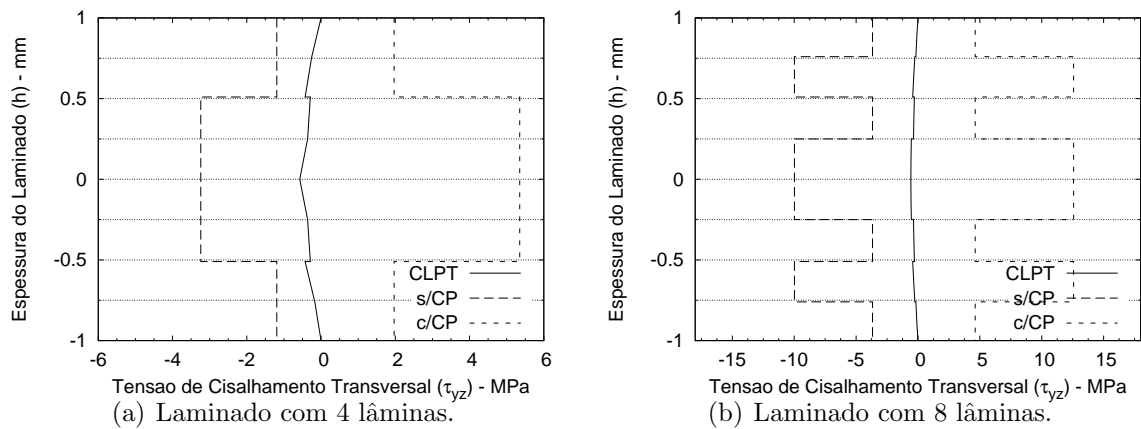


Figura 19: Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{yz}$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $4 \times 4$ .

Os resultados numéricos obtidos pelo modelo com e sem os termos espúrios convergem, mesmo que muito lentamente, isto pode ser melhor observado através das Fig. 20 e 21.

As Fig. 21(a) e 21(b) devem ser cuidadosamente observadas, pois elas dão a falsa impressão que os resultados obtidos com o modelo de termos espúrios aproximam-se mais da solução exata do que o modelo corrigido, quando na verdade o processo de convergência ainda está em evolução.

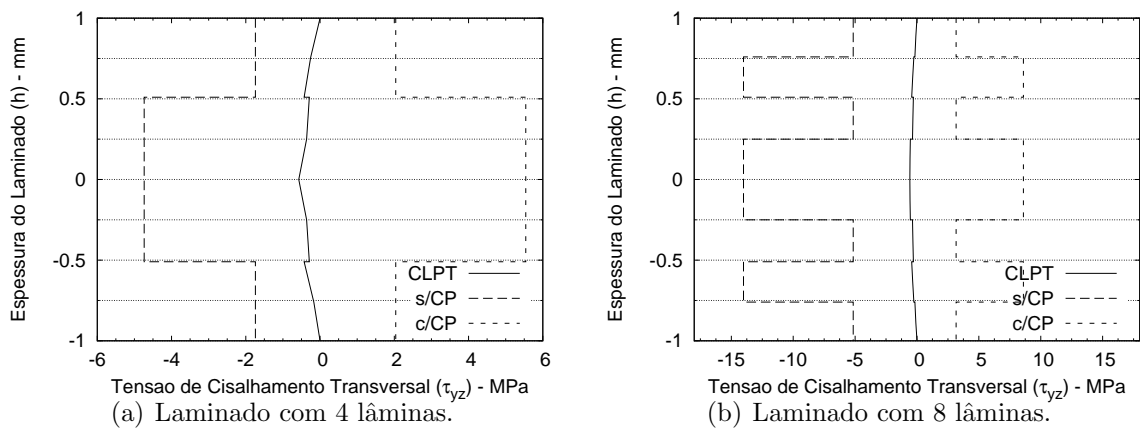


Figura 20: Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{yz}$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $8 \times 8$ .

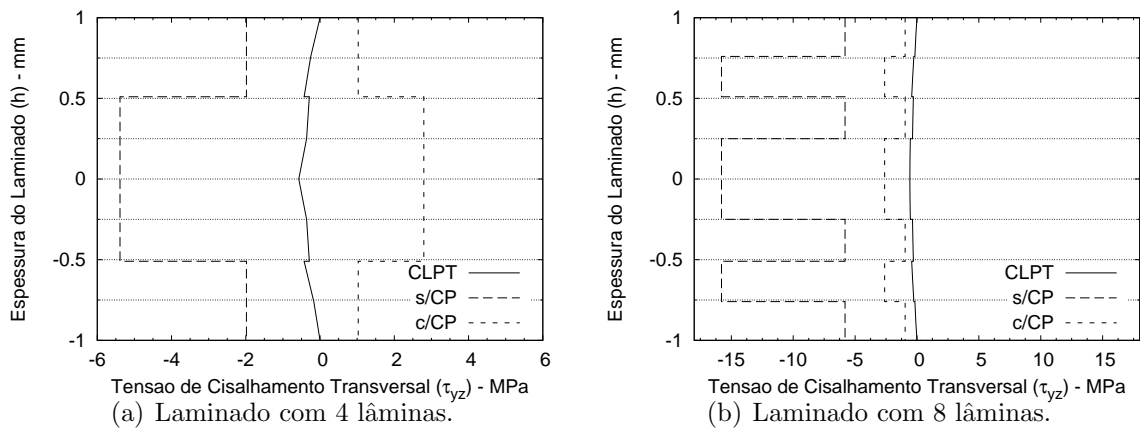


Figura 21: Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{yz}$ ) –  $a/h = 150$  – Malha  $16 \times 16$ .

### 5.3.1.2 Caso III

Através do caso anteriormente descrito, pode-se observar o processo de convergência das tensões. A relação  $a/h$  do caso a ser analisado é igual a 50 e o laminado tem a seguinte configuração:

Laminado tipo III

- seqüência de empilhamento –  $[0^\circ/90^\circ]_s$
- espessura do laminado  $h = 6,10mm$
- espessura da lâmina  $h_i = 0,76mm$ , sendo  $i = 1, \dots, 8$

O problema é resolvido utilizando-se quatro malhas uniformes:  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$  e  $16 \times 16$  para o cálculo das tensões normais e de cisalhamento. As tensões ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$ ) são determinadas em diferentes posições da placa ao longo da espessura do laminado.

A tensão normal na direção de  $x$  é avaliada no centro da placa ao longo da espessura, isto é,  $\sigma_x(a/2, b/2, z)$ . É feita também a comparação entre os resultados numéricos obtidos com cisalhamento parasítico (abreviado na legenda dos gráficos por c/CP) e sem cisalhamento parasítico (abreviado na legenda dos gráficos por s/CP) com os resultados obtidos via solução analítica (abreviado na legenda dos gráficos por CLPT).

As Fig. 22(a) e Fig. 22(b) apresentam os resultados numéricos para tensão normal  $\sigma_x$  para a malha  $4 \times 4$  e  $16 \times 16$ , respectivamente. Observa-se que, para esta última malha, considerando uma placa moderadamente espessa, o modelo com termos espúrios produz erros relativos em relação a solução analítica de aproximadamente 9% e o modelo sem os termos espúrios apresenta erro de 2,5%.

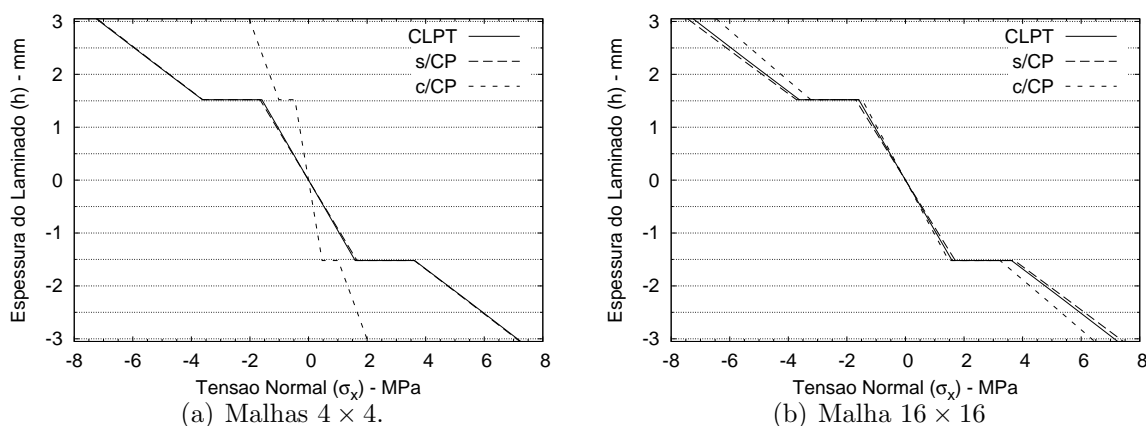


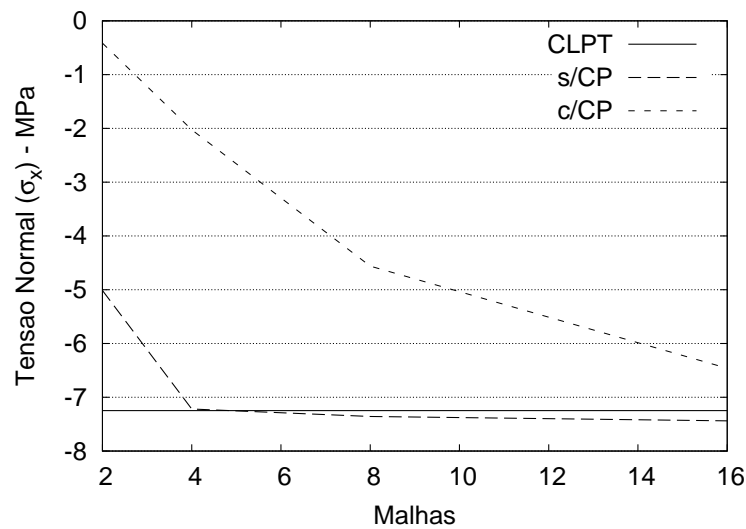
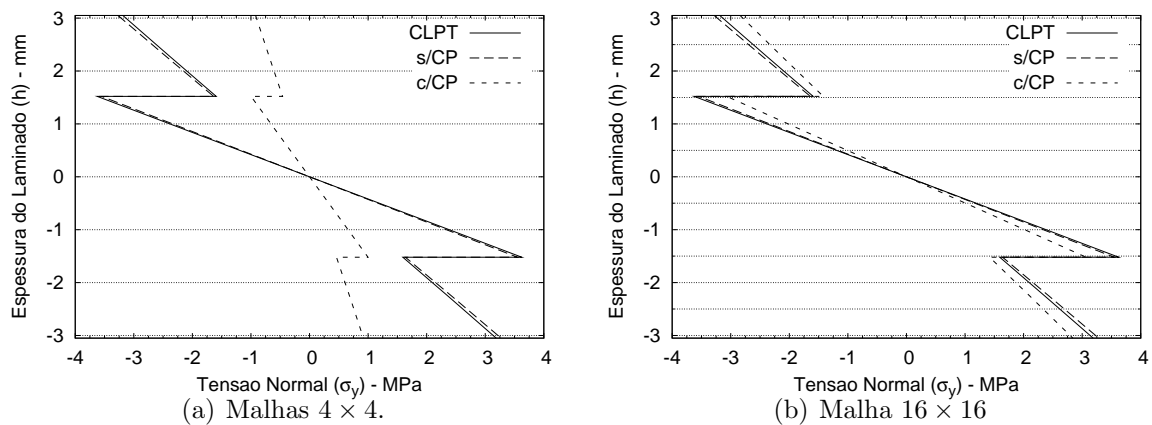
Figura 22: Tensão Normal ( $\sigma_x$ ) –  $a/h = 50$ .

A Fig. 23 mostra a convergência das tensões normais na direção de  $x$ . Nota-se que o modelo sem os termos espúrios converge rapidamente para a solução analítica, enquanto que o modelo com os termos espúrios tem convergência lenta e a malha  $16 \times 16$  precisaria ser novamente refinada.

Na Fig. 24 tem-se as tensões  $\sigma_y$  ao longo da espessura para as malhas  $4 \times 4$  e  $16 \times 16$ . O erro do modelo corrigido para a malha mais refinada é de 2,2% em relação a solução de Navier, enquanto que para o modelo com os termos espúrios este erro é de 11%.

A Fig. 25 mostra a convergência das tensões normais na direção de  $y$ . O mesmo comportamento de convergência das tensões normais  $\sigma_x$  é aqui observado, o modelo com os termos espúrios converge lentamente para a solução analítica, enquanto que o modelo sem os termos espúrios a convergência é rápida.

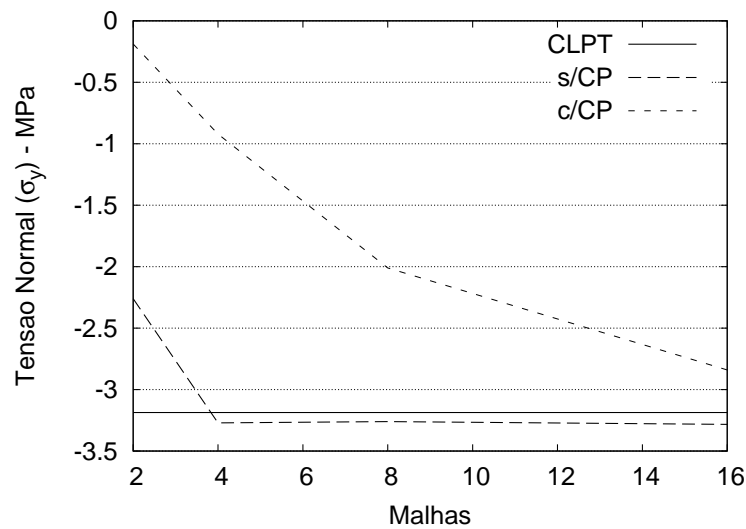
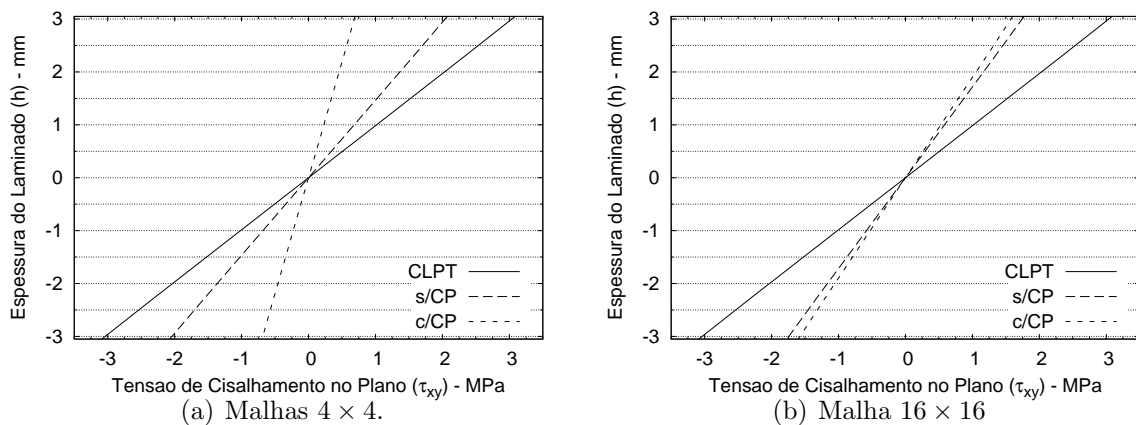
Verifica-se o comportamento das tensões de cisalhamento no plano nas Fig. 26(a)

Figura 23: Convergência – ( $\sigma_x$ ).Figura 24: Tensão Normal ( $\sigma_y$ ) –  $a/h = 50$ .

e 26(b) para as malhas  $4 \times 4$  e  $16 \times 16$  respectivamente. Os dados de tensão de cisalhamento  $\tau_{xy}$  são tomados no canto superior direito da placa, isto é,  $\tau_{xy}(a,b,z)$ . Os erros em relação a solução exata são elevados tanto para o modelo corrigido e quanto para o modelo com os termos espúrios e são da ordem de 27% e 32% respectivamente.

A Fig. 27 apresenta a convergência das tensões de cisalhamento no plano  $xy$ . Nota-se que comportamento verificado nos Casos I e II se repete. Ou seja, o modelo sem os termos espúrios inicialmente apresenta convergência em relação a solução analítica para as malhas  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$  e  $8 \times 8$  e para a malha de  $16 \times 16$  os valores de tensão tendem a se aproximar dos valores fornecidos para o modelo com os termos espúrios.

Para placa com relação  $a/h$  igual a 50, o comportamento das tensões de cisalhamento transversal é melhor representado. A Fig. 28(a) apresenta os resultados para a

Figura 25: Convergência – ( $\sigma_y$ ).Figura 26: Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xy}$ ) –  $a/h = 50$ .

malha  $4 \times 4$  e observa-se que as tensões  $\tau_{yz}$  tem sinais opostos e na Fig. 28(b) os valores de tensão do modelo com e sem os termos espúrios tendem a convergir. Novamente deve-se observar, que o modelo com os termos espúrios tem um processo lento de convergência e para a malha  $16 \times 16$  não tornou-se ainda estacionário. Apesar do grande erro entre os resultados do modelo e os resultados via solução analítica, o perfil das tensões de cisalhamento ao longo da espessura é o mesmo.

A Fig. 29(a) apresenta os resultados para a malha  $4 \times 4$  e observa-se que as tensões  $\tau_{xz}$  também tem sinais opostos. Na Fig. 29(b) os valores de tensão do modelo com e sem os termos espúrios tendem a convergir assim como em  $\tau_{yz}$ . A ausência de resultados de tensão de cisalhamento para uma malha  $32 \times 32$  dão a falsa impressão de que os resultados obtidos através do modelo com os termos espúrios aproximam-se mais da solução exata,

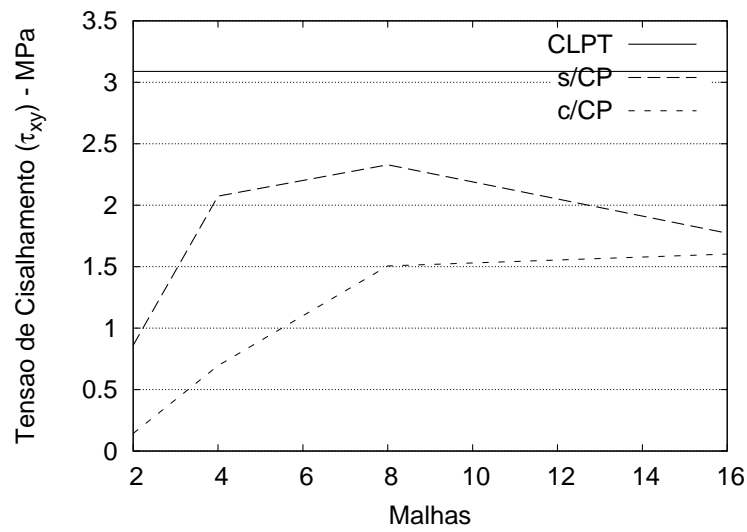


Figura 27: Convergência –  $(\tau_{xy})$ .

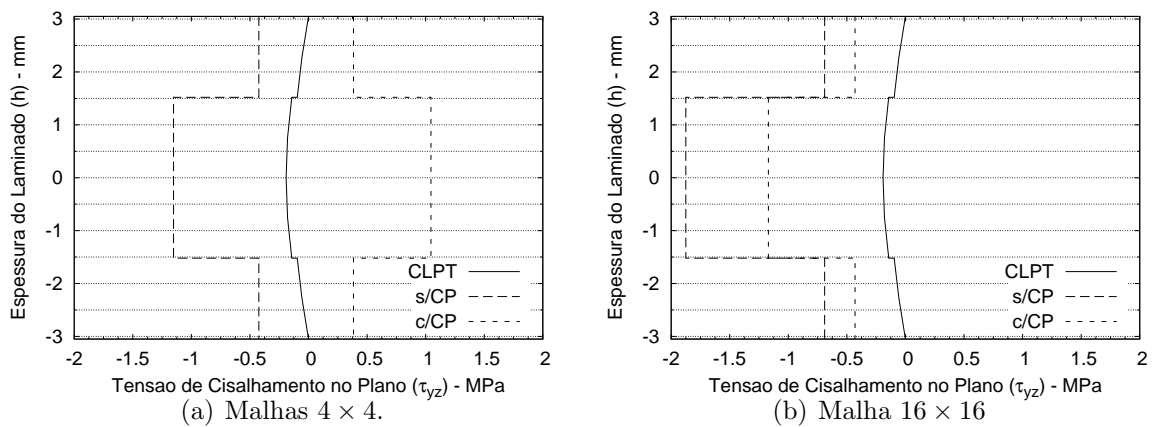


Figura 28: Tensão de Cisalhamento  $(\tau_{yz})$  –  $a/h = 50$ .

o que não é verdadeiro, pois o processo de convergência para este modelo é lento, não tendo ainda havido convergência para a malha  $16 \times 16$ .

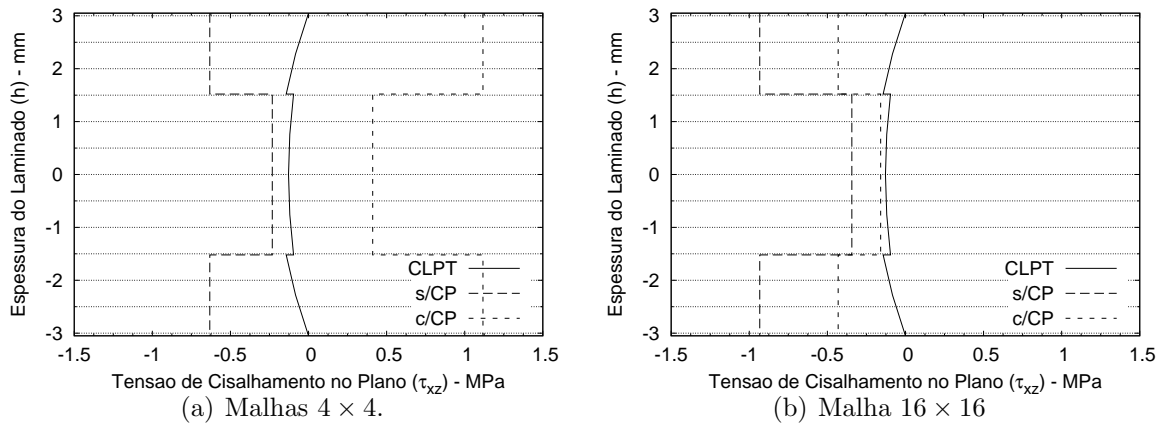


Figura 29: Tensão de Cisalhamento ( $\tau_{xz}$ ) –  $a/h = 50$ .

### 5.3.1.3 Caso IV

A relação  $a/h$  para caso IV é igual a 10 e o laminado tem a seguinte configuração:

Laminado tipo IV

- seqüência de empilhamento –  $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]_s$
- espessura do laminado  $h = 30,50mm$
- espessura da lâmina  $h_i = 3,81mm \quad i = 1, \dots, 8$

Os resultados de tensões ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$ ) para os modelos com os termos espúrios e sem os termos espúrios para o Caso IV são apresentados.

A Fig. 30 apresenta o comportamento das tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$  para as malhas  $4 \times 4$  e  $16 \times 16$ . Nota-se que para placas com relação  $a/h$  igual a 10, os termos espúrios não influenciam o resultado do modelo para tensões normais.

As Fig. 31(a) e 31(b) apresentam as tensões de cisalhamentos  $\tau_{xy}$  para as malhas  $4 \times 4$  e  $16 \times 16$  nota-se que há convergência entre os resultados dos modelos com e sem os termos ilegítimos para a malha  $4 \times 4$ , o que evidencia o fato que os termos espúrios não exercem influência sobre placas espessas.

As Fig. 31 apresentam as tensões de cisalhamento  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$  novamente para as malhas  $4 \times 4$  e  $16 \times 16$ . Fica evidenciado que o comportamento de convergência observado entre resultados do modelo corrigido e do modelo com os termos espúrios para as outras tensões ocorre também para as tensões de cisalhamento transversal.



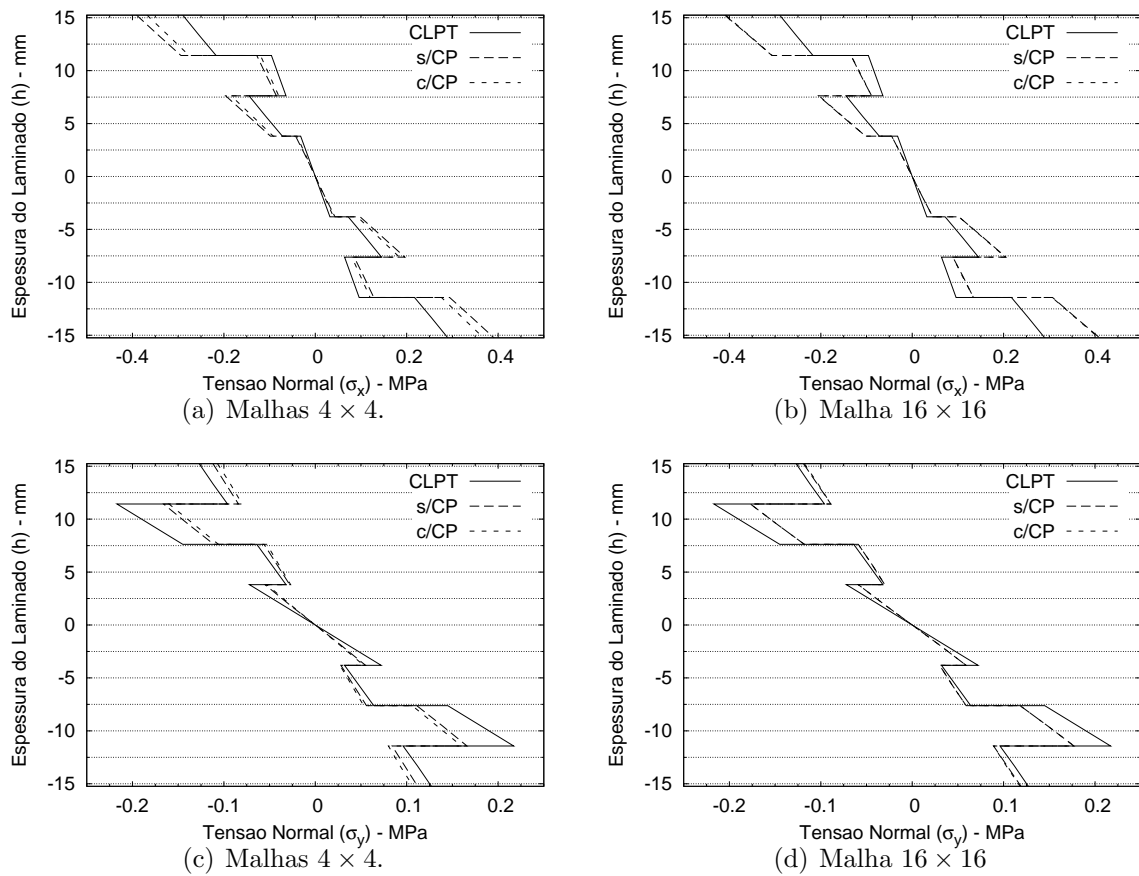


Figura 30: Tensões Normais ( $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ ) –  $a/h = 10$ .

Observa-se de modo geral que o modelo proposto após sua correção para os termos espúrios é capaz de produzir resultados precisos para tensões normais e de cisalhamento no plano para problemas de placa delgada. Para a validação das tensões de cisalhamento transversal, seria necessário comparar os resultados numéricos com uma solução analítica de primeira ordem para placas.

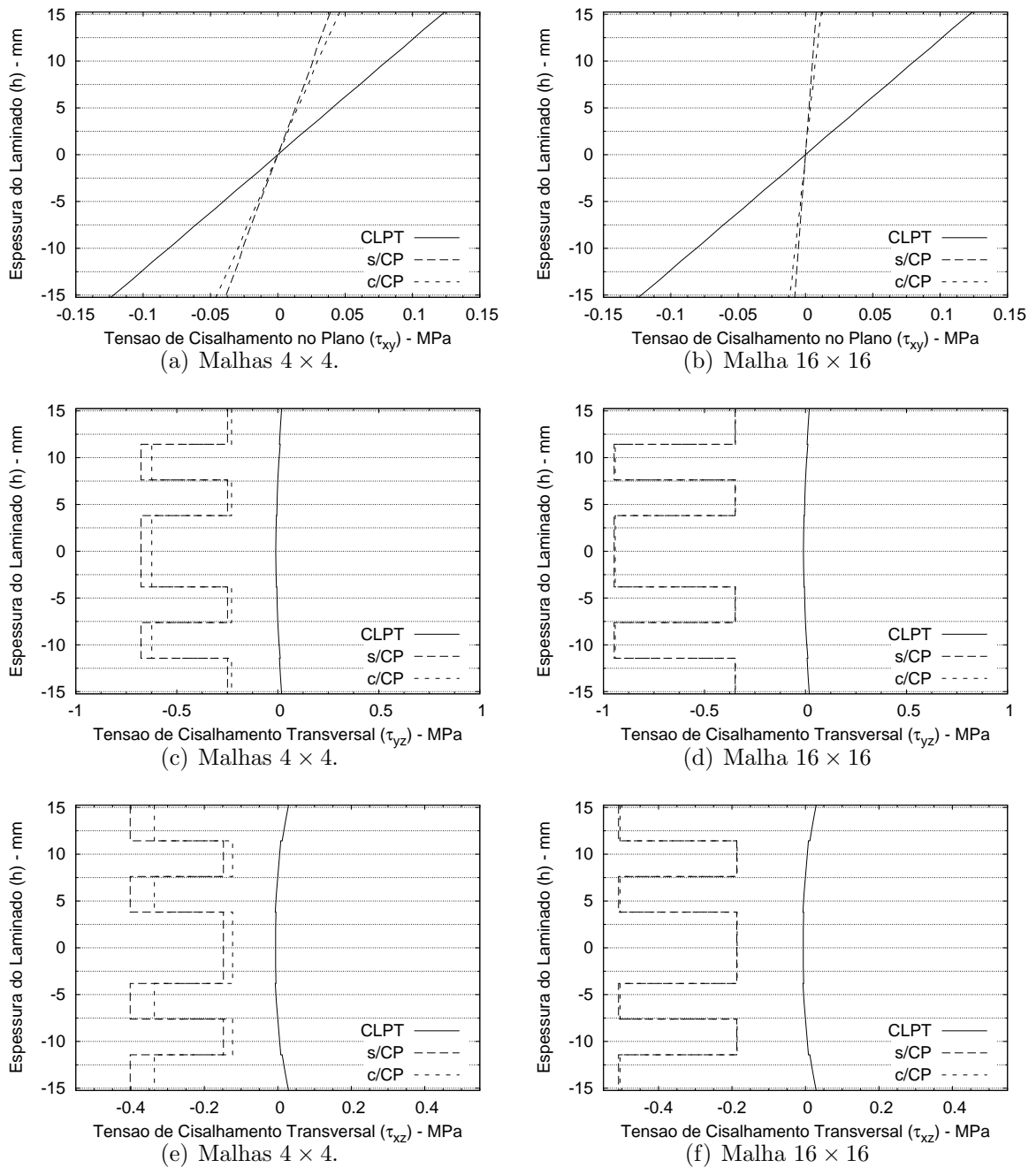


Figura 31: Tensões de Cisalhamento ( $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{xz}$ ) –  $a/h = 10$ .

# 6 Considerações Finais

## 6.1 Resumo e Conclusões

Este trabalho ocupa-se do modelamento de compósitos laminados reforçado com fibras via elementos finitos.

Um elemento de placa (quadrilátero de quatro nós) foi formulado com base na teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem utilizando a notação *strain gradient*. Esta notação, por ser fisicamente interpretável, permite a determinação *a-priori* das capacidades e deficiências de modelamento do elemento.

Durante a formulação do elemento, a inspeção das expansões polinomiais para deformações de cisalhamento mostraram a existência de termos espúrios, isto é, termos que não pertencem às expansões em séries de Taylor dessas grandezas cinemáticas.

Análises numéricas realizadas no aplicativo LAMFEM implementado em Fortran, mostraram através do cálculo das tensões que os termos espúrios causam rigidez artificial no modelo e são responsáveis pelo atraso na convergência dos resultados. A transparência da notação *strain gradient* permitiu que o elemento fosse corrigido através da simples remoção desses termos espúrios das expressões de deformações por cisalhamento.

Os resultados numéricos de tensões obtidos do modelo com os termos espúrios e sem os termos espúrios (corrigido) foram comparados com resultados obtidos da solução analítica baseada na teoria clássica de placas laminadas. De modo geral, o modelo com os termos espúrios apresenta-se mais rígido e com convergência demorada, enquanto que para o modelo corrigido, a convergência ocorre para uma malha  $4 \times 4$ . Este comportamento foi observado para todas as tensões normais e de cisalhamento.

Para as tensões normais  $\sigma_x$  e  $\sigma_y$ , o procedimento de remoção dos termos espúrios mostra-se eficiente para placas cuja relação  $a/h$  encontra-se entre 150 e 50. Os resultados obtidos pelo modelo corrigido apresentam erros de apenas 2% em relação a solução

analítica adotada.

As tensões de cisalhamento apresentam erros elevados em relação à solução analítica. Para que se possa avaliar a precisão dos resultados obtidos, deve-se procurar validar o elemento através de outra solução analítica que seja baseada na teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem.

Pode-se concluir que o uso da notação *strain gradient* é vantajosa, pois ela permite identificar precisamente os termos espúrios e eliminá-los do elemento, o que é uma alternativa ao emprego de técnicas de integração reduzida para eliminar rigidez artificial em modelos.

Os resultados de tensão ao longo da espessura do laminado fornecidos pelo modelo demonstram que o processo de refino da malha não é capaz de reduzir ou eliminar significativamente os efeitos de termos espúrios do modelo. Isto comprova a necessidade de aplicar técnicas de remoção destes termos em elementos finitos.

## 6.2 Sugestões para trabalhos futuros

Esta seção tem por objetivo sugerir caminhos para melhorar e ampliar este trabalho:

1. Modelar outras configurações de compósitos laminados, como por exemplo, laminados anti-simétricos, sujeitos a outras condições de carregamento e apoio;
2. Validar o elemento utilizando uma solução analítica para teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem;
3. Utilizar elementos de ordem superior, tais como, quadriláteros de 8 e 9 nós, capazes de calcular tensões usando a notação *strain gradient*.

# Referências

- 1 REINHART, T. J.; CLEMENTE, L. L. Introduction to composites. In: ASM (Ed.). *Engineered Materials Handbook*. Metals Park: ASM International, 1987. v. 1, n. 1.
- 2 ABDALLA FILHO, J. E. *Qualitative and discretization error analysis of laminated composite plate models*. Tese (Doutorado) — University of Colorado, Boulder, 1992.
- 3 REDDY, J. N.; ROBBINS, D. H. Theories and computational models for composite laminates. *Applied Mechanics Review*, n. 47, p. 147 – 169, 1994.
- 4 NOOR, A. K.; BURTON, W. S. Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates. *Applied Mechanics Review*, n. 42, p. 1 – 7, 1989.
- 5 REDDY, J. N.; GARVIN, C. C. Advanced in the modelling of laminated plates. *First International Conference on computational structures technology*, 1991.
- 6 GHUGAL, Y. M.; SHIMPI, R. P. A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates. *Journal of reinforced plastics and composites*, v. 21, n. 9, p. 775 – 813, 2002.
- 7 REDDY, J. N. *Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis*. Boca Raton: CRC Press, 1997.
- 8 ROLFES, R.; ROHWER, K. Improved transverse shear stresses in composite finite elements based on first order shear deformation theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, n. 40, p. 51 – 60, 1977.
- 9 ROLFES, R.; ROHWER, K.; BALLERSTAEDT, M. Efficient linear transverse normal stress analysis of layered composite plates. *Computers and Structures*, n. 68, p. 643 – 652, 1998.
- 10 LO, K. H.; CHRISTENSEN, R. M.; WU, M. E. A high - order theory of plate deformation. part 2: Laminated plates. *Journal of Applied Mechanics*, v. 44, p. 669 – 676, 1977.
- 11 LO, K. H.; CHRISTENSEN, R. M.; WU, M. E. A high -order theory of plate deformation. part 1: Homogeneous plates. *Journal of Applied Mechanics*, v. 44, p. 663 – 668, 1977.
- 12 REDDY, J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. *Journal of Applied Mechanics*, n. 51, p. 745 – 752, 1984.
- 13 LEUNG, A. et al. A new unconstrained third-order plate theory for navier solutions of symmetrically laminated plates. *Computers and Structures 2003; 81: 2539-2548*, v. 81, p. 2539 – 2548, 2003.

- 14 ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; TOO, J. M. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for methods in engineering*, v. 3, p. 275 – 290, 1971.
- 15 DOW, J. O.; HO, T. H.; CABINESS, H. D. Generalized finite element evaluation procedure. *Journal of structural engineering*, v. 111, n. 2, p. 435 – 452, 1985.
- 16 JONES, R. M. *Mechanics of composite materials*. New York: Hemisphere publishing corporation, 1975.
- 17 VINSON, J. R.; SIERAKOWSKI, R. L. *The behavior of structures composed of composite materials*. Boston: Martinus Nijhoff publishers, 1986.
- 18 CALLISTER JR, W. D. *Materials science and engineering: an introduction*. 5. ed. New York: John Wiley, 2000.
- 19 BYRD, D. *Identification and elimination of errors in finite element analysis*. Tese (Doutorado) — University of Colorado, Boulder, 1988.
- 20 DOW, J. O.; ABDALLA FILHO, J. E. Qualitative errors in laminated composite plate models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, n. 37, p. 1215 – 1230, 1994.

## APÊNDICE A – Tabela dos coeficientes

Tabela 2: Coeficientes para um elemento tridimensional de quarta ordem

$i$	termo	$u(x, y, z)$	$v(x, y, z)$	$w(x, y, z)$
01	1	$u$	$v$	$w$
02	$x$	$\epsilon_x$	$(\gamma_{xy})/2 + r$	$(\gamma_{xz})/2 - q$
03	$y$	$(\gamma_{xy})/2 - r$	$(\epsilon_y)$	$(\gamma_{yz})/2 + p$
04	$z$	$(\gamma_{xz})/2 + q$	$(\gamma_{yz})/2 - p$	$(\epsilon_z)$
05	$x^2$	$(\epsilon_{x,x})/2$	$(\gamma_{xy,x} - \epsilon_{x,y})/2$	$(\gamma_{xz,x} - \epsilon_{x,z})/2$
06	$xy$	$(\epsilon_{x,y})$	$(\epsilon_{y,x})$	$(-\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y})/2$
07	$xz$	$(\epsilon_{x,z})$	$(\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} - \gamma_{xz,y})/2$	$9\epsilon_{z,x}$
08	$y^2$	$(\gamma_{xy,y} - \epsilon_{y,x})/2$	$(\epsilon_{y,y})/2$	$(\gamma_{yz,x} - \epsilon_{y,z})/2$
09	$yz$	$(\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y})/2$	$(\epsilon_{y,z})$	$(\epsilon_{z,y})$
10	$z^2$	$(\gamma_{xz,z} - \epsilon_{z,x})/2$	$(\gamma_{yz,z} - \epsilon_{z,y})/2$	$(\epsilon_{z,z})/2$
11	$x^3$	$(\epsilon_{x,xx})/6$	$(\gamma_{xy,xx} - \epsilon_{x,xy})/6$	$(\gamma_{xz,xx} - \epsilon_{x,xz})/6$
12	$x^2y$	$(\epsilon_{x,xy})/2$	$(\epsilon_{y,xx})/2$	$(\gamma_{xz,xy} - \epsilon_{x,yz})/2$
13	$x^2z$	$(\epsilon_{x,xz})/2$	$(\gamma_{xy,xz} - \epsilon_{x,yz})/2$	$(\epsilon_{z,xx})/2$
14	$y^3$	$(\gamma_{xy,yy} - \epsilon_{y,xy})/6$	$(\epsilon_{y,yy})/6$	$(\gamma_{yz,yy} - \epsilon_{y,yz})/6$
15	$y^2x$	$(\epsilon_{x,yy})/2$	$(\epsilon_{y,xy})/2$	$(\gamma_{yz,xy} - \epsilon_{y,xz})/2$
16	$y^2z$	$(\gamma_{xy,yz} - \epsilon_{y,xz})/2$	$(\epsilon_{y,yz})/2$	$(\epsilon_{z,yy})/2$
17	$z^3$	$(\gamma_{xz,zz} - \epsilon_{z,xz})/6$	$(\gamma_{yz,zz} - \epsilon_{z,yz})/6$	$\epsilon_{z,zz}/6$
18	$z^2x$	$(\epsilon_{x,zz})/2$	$(\gamma_{yz,xz} - \epsilon_{z,xy})/2$	$(\epsilon_{z,xz})/2$
19	$z^2y$	$(\gamma_{xz,yz} - \epsilon_{z,xy})/2$	$(\epsilon_{y,zz})/2$	$(\epsilon_{z,yz})/2$
20	$xyz$	$(\epsilon_{x,yz})$	$(\epsilon_{y,xz})$	$(\epsilon_{z,xy})$
21	$x^4$	$(\epsilon_{x,xxx})/24$	$(\gamma_{xy,xxx} - \epsilon_{x,xxxy})/24$	$(\gamma_{xz,xxx} - \epsilon_{x,xxxz})/24$
22	$x^3y$	$(\epsilon_{x,xxxy})/6$	$(\epsilon_{y,xxx})/6$	$(\gamma_{xz,xxxy} - \epsilon_{x,xxyz})/6$
23	$x^3z$	$(\epsilon_{x,xxz})/6$	$(\gamma_{xy,xxz} - \epsilon_{x,xyz})/6$	$(\epsilon_{z,xxx})/6$
24	$x^2y^2$	$(\epsilon_{x,xyyy})/4$	$(\epsilon_{y,xxxy})/4$	$(\gamma_{xz,xyyy} - \epsilon_{x,yyyz})/4$
25	$x^2z^2$	$(\epsilon_{x,xzz})/4$	$(\gamma_{yz,xxz} - \epsilon_{z,xxxy})/4$	$(\epsilon_{z,xxz})/4$
26	$x^2yz$	$(\epsilon_{x,xyz})/2$	$(\epsilon_{y,xxz})/2$	$(\epsilon_{z,xxxy})/4$
27	$xy^3$	$(\epsilon_{x,yyyy})/6$	$(\epsilon_{y,xyyy})/6$	$(\gamma_{yz,xyyy} - \epsilon_{y,xyyz})/6$
28	$xz^3$	$(\epsilon_{x,zzz})/6$	$(\gamma_{yz,xzz} - \epsilon_{z,xyyz})/6$	$(\epsilon_{z,xzz})/6$
29	$xy^2z$	$(\epsilon_{x,yyyz})/2$	$(\epsilon_{y,xyyz})/2$	$(\epsilon_{z,xyyy})/2$
30	$xyz^2$	$(\epsilon_{x,yzz})/2$	$(\epsilon_{y,xzz})/2$	$(\epsilon_{z,xyyz})/2$
31	$y^4$	$(\gamma_{xy,yyy} - \epsilon_{y,xyyy})/24$	$(\epsilon_{y,yyy})/24$	$(\gamma_{yz,yyy} - \epsilon_{y,yyyz})/24$
32	$y^3z$	$(\gamma_{xy,yyz} - \epsilon_{y,xyyz})/6$	$(\epsilon_{y,yyy})/6$	$(\epsilon_{z,yyy})/6$
33	$y^2z^2$	$(\gamma_{xy,yzz} - \epsilon_{y,xzz})/4$	$(\epsilon_{y,yzz})/4$	$(\epsilon_{z,yyyz})/4$
34	$yz^3$	$(\gamma_{xz,yzz} - \epsilon_{z,xyyz})/6$	$(\epsilon_{y,zzz})/6$	$(\epsilon_{z,yzz})/6$
35	$z^4$	$(\gamma_{xz,zzz} - \epsilon_{z,xzz})/24$	$(\gamma_{yz,zzz} - \epsilon_{z,yzz})/24$	$(\epsilon_{z,zzz})/24$

Fonte: ABDALLA FILHO, J. E. *Qualitative and discretization error analysis of laminated composite plate models.*



## APÊNDICE B – Matriz Energia de Deformação

$$U_M = \begin{bmatrix} U_{1,1} & U_{1,2} & \dots & U_{20,1} \\ U_{2,1} & U_{2,2} & \dots & U_{20,2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ U_{20,1} & U_{20,2} & \dots & U_{20,20} \end{bmatrix}$$

A energia de deformação do laminado, é a soma das energias de deformação da lâmina individual:

$$U_M = \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} T_{sgk}^T \bar{Q}_k T_{sgk} d\Omega_k$$

Os elementos da matriz  $U_M$  são integrais de volume que podem ser separadas em uma integral sobre a área (que é constante ao longo da espessura do laminado) e uma integral sobre a espessura  $h$ , conforme descrito:

$$U_M = \int_A \left( \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} T_{sgk}^T \bar{Q}_k T_{sgk} dz_k \right) dA$$

A integral sobre a espessura é obtida através do somatório das integrais sobre a espessura de cada lâmina que compõe o laminado. Os limites de integração  $z_{k-1}$  e  $z_k$  são as coordenadas na direção da espessura, de topo e base de cada lâmina.

Da integração sobre a espessura do laminado, resultam os coeficientes da matriz energia de deformação para compósitos laminados. A tabela a seguir, contém os coeficientes da matriz  $U_M$  para o elemento formulado com termos espúrios e sem termos espúrios.

A tabela abaixo contém os elementos não nulos da matriz  $U_M$  ( $20 \times 20$ ).

Tabela 3: Elementos da matriz energia de deformação

Com termos espúrios		Sem termos espúrios	
$U_{7,7}$	$A_{11}J_1$	$U_{7,7}$	$A_{11}J_1$
$U_{7,8}$	$A_{11}J_3 + A_{16}J_2$	$U_{7,8}$	$A_{11}J_3$
$U_{7,9}$	$B_{11}J_1$	$U_{7,9}$	$B_{11}J_1$
$U_{7,10}$	$B_{11}J_3 + B_{16}J_2$	$U_{7,10}$	$B_{11}J_3$
$U_{7,11}$	$A_{12}J_1$	$U_{7,11}$	$A_{12}J_1$
$U_{7,12}$	$A_{12}J_2 + A_{16}J_3$	$U_{7,12}$	$A_{12}J_2$
$U_{7,13}$	$B_{12}J_1$	$U_{7,13}$	$B_{12}J_1$
$U_{7,14}$	$B_{12}J_2 + B_{16}J_3$	$U_{7,14}$	$B_{12}J_2$
$U_{7,15}$	$A_{16}J_1$	$U_{7,15}$	$A_{16}J_1$
$U_{7,16}$	$B_{16}J_1$	$U_{7,16}$	$B_{16}J_1$
$U_{8,7}$	$A_{11}J_3 + A_{16}J_2$	$U_{8,7}$	$A_{11}J_3$
$U_{8,8}$	$A_{11}J_6 + A_{16}J_4 + A_{16}J_4 + A_{66}J_5$	$U_{8,8}$	$A_{11}J_6$
$U_{8,9}$	$B_{11}J_3 + B_{16}J_2$	$U_{8,9}$	$B_{11}J_3$
$U_{8,10}$	$B_{11}J_6 + B_{16}J_4 + B_{16}J_4 + B_{66}J_5$	$U_{8,10}$	$B_{11}J_6$
$U_{8,11}$	$A_{12}J_3 + A_{26}J_2$	$U_{8,11}$	$A_{12}J_3$
$U_{8,12}$	$A_{12}J_4 + A_{26}J_5 + A_{16}J_6 + A_{66}J_4$	$U_{8,12}$	$A_{12}J_4$
$U_{8,13}$	$B_{12}J_3 + B_{26}J_2$	$U_{8,13}$	$B_{12}J_3$
$U_{8,14}$	$B_{12}J_4 + B_{26}J_5 + B_{16}J_6 + B_{66}J_4$	$U_{8,14}$	$B_{12}J_4$
$U_{8,15}$	$A_{16}J_3 + A_{66}J_2$	$U_{8,15}$	$A_{16}J_3$
$U_{8,16}$	$B_{16}J_3 + B_{66}J_2$	$U_{8,16}$	$B_{16}J_3$
$U_{9,7}$	$B_{11}J_1$	$U_{9,7}$	$B_{11}J_1$
$U_{9,8}$	$B_{11}J_3 + B_{16}J_2$	$U_{9,8}$	$B_{11}J_3$
$U_{9,9}$	$D_{11}J_1 + A_{55}J_5$	$U_{9,9}$	$D_{11}J_1$
$U_{9,10}$	$D_{11}J_3 + A_{55}J_7 + D_{16}J_2$	$U_{9,10}$	$D_{11}J_3$
$U_{9,11}$	$B_{12}J_1$	$U_{9,11}$	$B_{12}J_1$
$U_{9,12}$	$B_{12}J_2 + B_{16}J_3$	$U_{9,12}$	$B_{12}J_2$

continua na próxima página...

Tabela 3: Elementos da matriz energia de deformação  
(...continuação)

Com termos espúrios		Sem termos espúrios	
$U_{9,13}$	$D_{12}J_1 + A_{45}J_4$	$U_{9,13}$	$D_{12}J_1$
$U_{9,14}$	$D_{12}J_2 + A_{45}J_7 + D_{16}J_3$	$U_{9,14}$	$D_{12}J_2$
$U_{9,15}$	$B_{16}J_1$	$U_{9,15}$	$B_{16}J_1$
$U_{9,16}$	$D_{16}J_1$	$U_{9,16}$	$D_{16}J_1$
$U_{9,17}$	$A_{55}J_2$	$U_{9,17}$	0
$U_{9,18}$	$A_{55}J_4$	$U_{9,18}$	0
$U_{9,19}$	$A_{45}J_2$	$U_{9,19}$	0
$U_{9,20}$	$A_{45}J_5$	$U_{9,20}$	0
$U_{10,7}$	$B_{11}J_3 + B_{16}J_2$	$U_{10,7}$	$B_{11}J_3$
$U_{10,8}$	$B_{11}J_6 + B_{16}J_4 + B_{66}J_5$	$U_{10,8}$	$B_{11}J_6$
$U_{10,9}$	$D_{11}J_3 + D_{16}J_2 + A_{55}J_7$	$U_{10,9}$	$D_{11}J_3$
$U_{10,10}$	$D_{11}J_6 + D_{16}J_4 + D_{16}J_4 + A_{55}J_9 + D_{66}J_5$	$U_{10,10}$	$D_{11}J_6$
$U_{10,11}$	$B_{12}J_3 + B_{26}J_2$	$U_{10,11}$	$B_{12}J_3$
$U_{10,12}$	$B_{12}J_4 + B_{26}J_5 + B_{16}J_6 + B_{66}J_4$	$U_{10,12}$	$B_{12}J_4$
$U_{10,13}$	$D_{12}J_3 + D_{26}J_2 + A_{45}J_8$	$U_{10,13}$	$D_{12}J_3$
$U_{10,14}$	$D_{12}J_4 + D_{26}J_5 + A_{45}J_9 + D_{16}J_6 + D_{66}J_4$	$U_{10,14}$	$D_{12}J_4$
$U_{10,15}$	$B_{16}J_3 + B_{66}J_2$	$U_{10,15}$	$B_{16}J_3$
$U_{10,16}$	$D_{16}J_3 + D_{66}J_2$	$U_{10,16}$	$D_{16}J_3$
$U_{10,17}$	$A_{55}J_4$	$U_{10,17}$	0
$U_{10,18}$	$A_{55}J_8$	$U_{10,18}$	0
$U_{10,19}$	$A_{45}J_4$	$U_{10,19}$	0
$U_{10,20}$	$A_{45}J_7$	$U_{10,20}$	0
$U_{11,7}$	$A_{12}J_1$	$U_{11,7}$	$A_{12}J_1$
$U_{11,8}$	$A_{12}J_3 + A_{26}J_2$	$U_{11,8}$	$A_{12}J_3$
$U_{11,9}$	$B_{12}J_1$	$U_{11,9}$	$B_{12}J_1$
$U_{11,10}$	$B_{12}J_3 + B_{26}J_2$	$U_{11,10}$	$B_{12}J_3$
$U_{11,11}$	$A_{22}J_1$	$U_{11,11}$	$A_{22}J_1$
$U_{11,12}$	$A_{22}J_2 + A_{26}J_3$	$U_{11,12}$	$A_{22}J_2$
$U_{11,13}$	$B_{22}J_1$	$U_{11,13}$	$B_{22}J_1$
$U_{11,14}$	$B_{22}J_2 + B_{26}J_3$	$U_{11,14}$	$B_{22}J_2$

continua na próxima página...

Tabela 3: Elementos da matriz energia de deformação  
 (...continuação)

Com termos espúrios		Sem termos espúrios	
$U_{11,15}$	$A_{26}J_1$	$U_{11,15}$	$A_{26}J_1$
$U_{11,16}$	$B_{26}J_1$	$U_{11,16}$	$B_{26}J_1$
$U_{12,7}$	$A_{12}J_2 + A_{16}J_3$	$U_{12,7}$	$A_{12}J_2$
$U_{12,8}$	$A_{12}J_4 + A_{16}J_6 + A_{26}J_5 + A_{66}J_4$	$U_{12,8}$	$A_{12}J_4$
$U_{12,9}$	$B_{12}J_2 + B_{16}J_3$	$U_{12,9}$	$B_{12}J_2$
$U_{12,10}$	$B_{12}J_4 + B_{16}J_6 + B_{26}J_5 + B_{66}J_4$	$U_{12,10}$	$B_{12}J_4$
$U_{12,11}$	$A_{22}J_2 + A_{26}J_3$	$U_{12,11}$	$A_{22}J_2$
$U_{12,12}$	$A_{22}J_5 + A_{26}J_4 + A_{26}J_4 + A_{66}J_6$	$U_{12,12}$	$A_{22}J_5$
$U_{12,13}$	$B_{22}J_2 + B_{26}J_3$	$U_{12,13}$	$B_{22}J_2$
$U_{12,14}$	$B_{22}J_5 + B_{26}J_4 + B_{26}J_4 + B_{66}J_6$	$U_{12,14}$	$B_{22}J_5$
$U_{12,15}$	$A_{26}J_2 + A_{66}J_3$	$U_{12,15}$	$A_{26}J_2$
$U_{12,16}$	$B_{26}J_2 + B_{66}J_3$	$U_{12,16}$	$B_{26}J_2$
$U_{13,7}$	$B_{12}J_1$	$U_{13,7}$	$B_{12}J_1$
$U_{13,8}$	$B_{12}J_3 + B_{26}J_2$	$U_{13,8}$	$B_{12}J_3$
$U_{13,9}$	$D_{12}J_1 + A_{45}J_4$	$U_{13,9}$	$D_{12}J_1$
$U_{13,10}$	$D_{12}J_3 + A_{45}J_8 + D_{26}J_2$	$U_{13,10}$	$D_{12}J_3$
$U_{13,11}$	$B_{22}J_1$	$U_{13,11}$	$B_{22}J_1$
$U_{13,12}$	$B_{22}J_2 + B_{26}J_3$	$U_{13,12}$	$B_{22}J_2$
$U_{13,13}$	$D_{22}J_1 + A_{44}J_6$	$U_{13,13}$	$D_{22}J_1$
$U_{13,14}$	$D_{22}J_2 + A_{44}J_8 + D_{26}J_3$	$U_{13,14}$	$D_{22}J_2$
$U_{13,15}$	$B_{26}J_1$	$U_{13,15}$	$B_{26}J_1$
$U_{13,16}$	$D_{26}J_1$	$U_{13,16}$	$D_{26}J_1$
$U_{13,17}$	$A_{45}J_3$	$U_{13,17}$	0
$U_{13,18}$	$A_{45}J_6$	$U_{13,18}$	0
$U_{13,19}$	$A_{44}J_3$	$U_{13,19}$	0
$U_{13,20}$	$A_{44}J_4$	$U_{13,20}$	0
$U_{14,7}$	$B_{12}J_2 + B_{16}J_3$	$U_{14,7}$	$B_{12}J_2$
$U_{14,8}$	$B_{12}J_4 + B_{16}J_6 + B_{26}J_5 + B_{66}J_4$	$U_{14,8}$	$B_{12}J_4$
$U_{14,9}$	$D_{12}J_2 + D_{16}J_3 + A_{45}J_7$	$U_{14,9}$	$D_{12}J_2$
$U_{14,10}$	$D_{12}J_4 + D_{16}J_6 + A_{45}J_9 + D_{26}J_5 + D_{66}J_4$	$U_{14,10}$	$D_{12}J_4$

continua na próxima página...

Tabela 3: Elementos da matriz energia de deformação  
 (...continuação)

Com termos espúrios		Sem termos espúrios	
$U_{14,11}$	$B_{22}J_2 + B_{26}J_3$	$U_{14,11}$	$B_{22}J_2$
$U_{14,12}$	$B_{22}J_5 + B_{26}J_4 + B_{26}J_4 + B_{66}J_6$	$U_{14,12}$	$B_{22}J_5$
$U_{14,13}$	$D_{22}J_2 + D_{26}J_3 + A_{44}J_8$	$U_{14,13}$	$D_{22}J_2$
$U_{14,14}$	$D_{22}J_5 + D_{26}J_4 + A_{44}J_9 + D_{26}J_4 + D_{66}J_6$	$U_{14,14}$	$D_{22}J_5$
$U_{14,15}$	$B_{26}J_2 + B_{66}J_3$	$U_{14,15}$	$B_{26}J_2$
$U_{14,16}$	$D_{26}J_2 + D_{66}J_3$	$U_{14,16}$	$D_{26}J_2$
$U_{14,17}$	$A_{45}J_4$	$U_{14,17}$	0
$U_{14,18}$	$A_{45}J_8$	$U_{14,18}$	0
$U_{14,19}$	$A_{44}J_4$	$U_{14,19}$	0
$U_{14,20}$	$A_{44}J_7$	$U_{14,20}$	0
$U_{15,7}$	$A_{16}J_1$	$U_{15,7}$	$A_{16}J_1$
$U_{15,8}$	$A_{16}J_3 + A_{66}J_2$	$U_{15,8}$	$A_{16}J_3$
$U_{15,9}$	$B_{16}J_1$	$U_{15,9}$	$B_{16}J_1$
$U_{15,10}$	$B_{16}J_3 + B_{66}J_2$	$U_{15,10}$	$B_{16}J_3$
$U_{15,11}$	$A_{26}J_1$	$U_{15,11}$	$A_{26}J_1$
$U_{15,12}$	$A_{26}J_2 + A_{66}J_3$	$U_{15,12}$	$A_{26}J_2$
$U_{15,13}$	$B_{26}J_1$	$U_{15,13}$	$B_{26}J_1$
$U_{15,14}$	$B_{26}J_2 + B_{66}J_3$	$U_{15,14}$	$B_{26}J_2$
$U_{15,15}$	$A_{66}J_1$	$U_{15,15}$	$A_{66}J_1$
$U_{15,16}$	$B_{66}J_1$	$U_{15,16}$	$B_{66}J_1$
$U_{16,7}$	$B_{16}J_1$	$U_{16,7}$	$B_{16}J_1$
$U_{16,8}$	$B_{16}J_3 + B_{66}J_2$	$U_{16,8}$	$B_{16}J_3$
$U_{16,9}$	$D_{16}J_1$	$U_{16,9}$	$D_{16}J_1$
$U_{16,10}$	$D_{16}J_3 + D_{66}J_2$	$U_{16,10}$	$D_{16}J_3$
$U_{16,11}$	$B_{26}J_1$	$U_{16,11}$	$B_{26}J_1$
$U_{16,12}$	$B_{26}J_2 + B_{66}J_3$	$U_{16,12}$	$B_{26}J_2$
$U_{16,13}$	$D_{26}J_1$	$U_{16,13}$	$D_{26}J_1$
$U_{16,14}$	$D_{26}J_2 + D_{66}J_3$	$U_{16,14}$	$D_{26}J_2$
$U_{16,15}$	$B_{66}J_1$	$U_{16,15}$	$B_{66}J_1$
$U_{16,16}$	$D_{66}J_1$	$U_{16,16}$	$D_{66}J_1$

continua na próxima página...

Tabela 3: Elementos da matriz energia de deformação  
(...continuação)

Com termos espúrios		Sem termos espúrios	
$U_{17,9}$	$A_{55}J_2$	$U_{17,9}$	0
$U_{17,10}$	$A_{55}J_4$	$U_{17,10}$	0
$U_{17,13}$	$A_{45}J_3$	$U_{17,13}$	0
$U_{17,14}$	$A_{45}J_4$	$U_{17,14}$	0
$U_{17,17}$	$A_{55}J_1$	$U_{17,17}$	$A_{55}J_1$
$U_{17,18}$	$A_{55}J_3$	$U_{17,18}$	$A_{55}J_3$
$U_{17,19}$	$A_{45}J_1$	$U_{17,19}$	$A_{45}J_1$
$U_{17,20}$	$A_{45}J_2$	$U_{17,20}$	$A_{45}J_2$
$U_{18,9}$	$A_{55}J_4$	$U_{18,9}$	0
$U_{18,10}$	$A_{55}J_8$	$U_{18,10}$	0
$U_{18,13}$	$A_{45}J_6$	$U_{18,13}$	0
$U_{18,14}$	$A_{45}J_8$	$U_{18,14}$	0
$U_{18,17}$	$A_{55}J_3$	$U_{18,17}$	$A_{55}J_3$
$U_{18,18}$	$A_{55}J_6$	$U_{18,18}$	$A_{55}J_6$
$U_{18,19}$	$A_{45}J_3$	$U_{18,19}$	$A_{45}J_3$
$U_{18,20}$	$A_{45}J_4$	$U_{18,20}$	$A_{45}J_4$
$U_{19,9}$	$A_{45}J_2$	$U_{19,9}$	0
$U_{19,10}$	$A_{45}J_4$	$U_{19,10}$	0
$U_{19,13}$	$A_{44}J_3$	$U_{19,13}$	0
$U_{19,14}$	$A_{44}J_4$	$U_{19,14}$	0
$U_{19,17}$	$A_{45}J_1$	$U_{19,17}$	$A_{45}J_1$
$U_{19,18}$	$A_{45}J_3$	$U_{19,18}$	$A_{45}J_3$
$U_{19,19}$	$A_{44}J_1$	$U_{19,19}$	$A_{44}J_1$
$U_{19,20}$	$A_{44}J_2$	$U_{19,20}$	$A_{44}J_2$
$U_{20,9}$	$A_{45}J_5$	$U_{20,9}$	0
$U_{20,10}$	$A_{45}J_7$	$U_{20,10}$	0
$U_{20,13}$	$A_{44}J_4$	$U_{20,13}$	0
$U_{20,14}$	$A_{44}J_7$	$U_{20,14}$	0
$U_{20,17}$	$A_{45}J_2$	$U_{20,17}$	$A_{45}J_2$
$U_{20,18}$	$A_{45}J_4$	$U_{20,18}$	$A_{45}J_4$

continua na próxima página...

Tabela 3: Elementos da matriz energia de deformação  
(...continuação)

Com termos espúrios		Sem termos espúrios	
$U_{20,19}$	$A_{44}J_2$	$U_{20,19}$	$A_{44}J_2$
$U_{20,20}$	$A_{44}J_5$	$U_{20,20}$	$A_{44}J_5$

Em que:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_A dA & J_2 &= \int_A x dA & J_3 &= \int_A y dA \\ J_4 &= \int_A xy dA & J_5 &= \int_A x^2 dA & J_6 &= \int_A y^2 dA \\ J_7 &= \int_A x^2 y dA & J_8 &= \int_A xy^2 dA & J_9 &= \int_A x^2 y^2 dA \end{aligned}$$

Para que fique claro o procedimento de obtenção dos elementos da matriz energia de deformação, um exemplo utilizando o coeficiente  $U_{9,10}$  da matriz sem os termos espúrios, está descrito abaixo:

Fazendo:

$$V = [T_{sg}]_k^T [\bar{Q}]_k [T_{sg}]_k$$

tem-se:

$$\begin{aligned}
 (V_{9,10}) &= y z_k^2 (\bar{Q}_{11})_k \\
 U_{9,10} &= \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} V_{9,10} d\Omega \\
 U_{9,10} &= \int_A \left( \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} y z_k^2 (\bar{Q}_{11})_k dz \right) dA \\
 U_{9,10} &= \int_A \left( \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{11})_k \int_{z_{k-1}}^{z_k} z_k^2 dz \right) y dA \\
 U_{9,10} &= \frac{1}{3} \left[ \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{11})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \right] \int_A y dA
 \end{aligned}$$

Usando a forma compacta:

$$U_{9,10} = D_{11} J_3$$