PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DE TECNOLOGIA
MESTRADO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E SISTEMAS

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES UTILIZANDO MODELO POLINOMIAL NARMAX E NEBULOSO TAKAGI-SUGENO-KANG

CURITIBA
2010

MARCELO WICTHOFF PESSOA

IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES UTILIZANDO MODELO POLINOMIAL NARMAX E NEBULOSO TAKAGI-SUGENO-KANG

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas, PPGEPS, da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, PUCPR, como requisito para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção e Sistemas.

Orientador: Prof. Leandro dos Santos Coelho

CURITIBA
2010

RESUMO

Esta dissertação está vinculada a pretensão de responder à seguinte questão: Com qual qualidade é possível prever o funcionamento ou a tendência de uma variável de um sistema utilizando apenas seus dados. Para isto, foram utilizados dois métodos de identificação não linear, um com o modelo polinomial NARMAX (não-linear, auto-regressivo com média móvel e entrada exógena, do inglês *Nonlinear AutoRegressive with Moving Average and eXogenous inputs*) e outro com o modelo nebuloso do tipo Takagi-Sugeno-Kang (TSK). O modelo polinomial NARMAX utiliza o estimador dos Mínimos Quadrados Ortogonais com a decomposição Golub-Householder, junto com o cálculo da taxa de redução de erro, para seleção dos termos mais significativos ao modelo. O modelo nebuloso TSK, utiliza o modelo ARX (auto-regressivo com entrada exógena, do inglês, *AutoRegressive and eXogenous inputs*) no consequente, a técnica de agrupamentos de dados C-Médias nebuloso para obtenção dos centros das funções de pertinência e a técnica de otimização denominada evolução diferencial para determinar a largura das funções de pertinência do tipo gaussiana. Neste contexto foi validada a identificação de sistemas de ambos modelos em um sistema eletromecânico. O sistema eletromecânico é conhecido como *twin rotor*, o qual possui uma movimentação semelhante a rotação e a inclinação de um helicóptero. Para a identificação foram realizados dois testes, um utilizando o sinal de excitação do tipo senoidal para cada eixo (inclinação e rotação) e outro com o sinal de excitação PRBS (sinal binário pseudo-aleatório, do inglês, *Pseudo Random Binary Signal*) com ruído de ±10% para cada eixo. Os resultados da previsão de 1 e *N* passo à frente para as duas técnicas foram satisfatórios.

Palavras chaves: Identificação não linear, modelo polinomial NARMAX, mínimos quadrados ortogonais, modelo nebuloso Takagi-Sugeno-Kang, processo *twin rotor*.

ABSTRACT

This dissertation proposal to answer the following question: Which quality is possible to predict the functioning or the tendency of a variable of any system using only their data. For this, were used two methods to identify nonlinear, one with a polynomial NARMAX (Nonlinear AutoRegressive with Moving Average and eXogenous inputs) and another with the method of fuzzy Takagi-Sugeno-Kang (TSK). The polynomial NARMAX model uses the Orthogonal Least Squares (OLS) estimator with the Golub-Householder decomposition and with the calculation of ERR (Error Ratio Reduction), only to insert the terms most significant to the model. The TSK fuzzy model, using the ARX model (AutoRegressive with eXogenous inputs) in the consequent, technique of clustering Fuzzy C-Means to find the centers of membership functions and the differential evolution optimization technique to find the width of the membership functions of Gaussian type. So it was tested the applicability of mathematical modeling of both models in an electromechanical system. The electromechanical system is known as twin rotor, which has movements like the pitch and yaw of a helicopter. For identification were carried out two tests, one using the excitation signal of sine wave type for each axis (pitch and yaw) and another with the excitation signal PRBS (Pseudo Random Binary Signal) with noise ± 10% for each axis. Results of prediction 1 and *N* step ahead for both techniques were satisfactory.

Key words: Nonlinear identification, polynomial NARMAX model, orthogonal least squares, fuzzy Takagi-Sugeno-Kang model, twin rotor process.

“A palavra chave de hoje é amanhã.”

Autor: Desconhecido.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer aos meus pais João e Denise, a minha vó Olga, a minha namorada Renata, aos meus familiares e amigos pelo apoio durante a realização deste trabalho e pela compreensão devido à minha ausência.

Gostaria de agradecer ao professor Leandro dos Santos Coelho pela orientação acadêmica, pela compreensão e apoio nas horas difíceis e pela amizade durante a convivência.

Gostaria de agradecer ao incentivo e apoio financeiro da CAPES e do CNPQ.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AE: Algoritmos evolutivos

AIC: Critério de informação de Akaike (*Akaike Information Criterion*)

ARX: modelo auto-regressivo com entrada exógena (*AutoRegressive with eXogenous input*)

CI: Circuito integrado

ED: Evolução diferencial

ERR: Taxa de redução de erro (*Error Ratio Reduction*)

FCM: Nebuloso C-Médias (*Fuzzy C-Means*)

GH: Golub-Householder

CGS: Clássico de Gram-Schmidt

ITSE: Integral do tempo multiplicado pelo quadrado do erro (*Integral of Time multiplied by Squared Error)*

MGS: Modificado de Gram-Schmidt

MF: Função de pertinência (*Membership Function*)

MIMO: Múltiplas entradas múltiplas saída (*Multi Inputs Multi Outputs*)

MISO: Múltiplas entradas uma saída (*Multi Inputs Single Output*)

MSE: Erro quadrático médio (*Mean Square Error*)

MQ: Mínimos quadrados (*Least Squares*, LS)

MQO: Mínimos quadrados ortogonais (*Orthogonal Least Squares*, OLS)

NARMAX: Modelo não-linear, autoregressivo com média móvel e com entrada exógena (*Nonlinear AutoRegressive, Moving Average with eXogenous input*)

PRBS: Sinal binário pseudo-aleatório (*Pseudo Random Binary Signal*)

PUCPR: Pontifícia Universidade Católica do Paraná

PWM: Modulação por largura de pulso (*Pulse Width Modulation*)

R^2: Coeficiente de relação múltipla

SISO: Entrada única saída única (*Single Input Single Output*)

TSK: Takagi-Sugeno-Kang

1. INTRODUÇÃO

Um dos desafios na história da Ciência tem sido obter sistemas análogos aos processos e fenômenos observados no Universo. Por sistema análogo entende-se um sistema capaz de reproduzir algumas características do fenômeno observado, assim como uma maquete reproduz as escalas, proporções, cores, entre outros de uma construção real. Quando o análogo é um sistema matemático, ele constitui um modelo matemático do fenômeno observado (Aguirre *et al*., 1998).

A utilização de um modelo para representar um determinado sistema pode estar relacionada com os mais diversos objetivos, tais como: (i) compreender certas dinâmicas do sistema dinâmico (processo) estudado, (ii) predizer o comportamento do sistema sob diversas condições de operação, (iii) analisar e projetar controladores, (iv) estimar variáveis do processo que não podem ser medidas diretamente, (v) otimizar o comportamento do sistema, (vi) permitir detecção eficiente de falhas no sistema e (vii) permitir o estudo do sistema em regiões de operação dispendiosas ou problemáticas no sistema real, permitindo um treinamento de operação seguro e eficiente (Matko *et al*., 1992).

Os sistemas dinâmicos em uma análise detalhada são não-lineares, mas há casos em que aproximações lineares são suficientes para propósito de utilização prática. Entretanto, na maioria dos casos os sistemas lineares não conseguem reproduzir satisfatoriamente certas dinâmicas, com isso é necessária à utilização de representações não-lineares, as quais possuem algoritmos complexos.

As técnicas de modelagem de sistemas são agrupadas em três conjuntos, denominadas: (i) modelagem caixa branca, (ii) modelagem caixa preta e (iii) modelagem caixa cinza. A modelagem caixa branca é utilizada quando há um bom conhecimento do processo a ser modelado, pois nela são utilizadas as leis da Física para obter as equações do modelo. Quando não há nenhum conhecimento da física do processo e se tem em mãos apenas dados de entrada e saída, ou apenas saída, utiliza-se a abordagem da identificação caixa preta, que é uma alternativa a caixa branca (Aguirre, 2007), pois nela agrupa-se o ferramental matemático para se obter o modelo aproximado do processo. A terceira abordagem, a identificação caixa cinza, utiliza-se do conhecimento prévio da física do processo aliado à identificação caixa preta. Esta utiliza os conhecimentos do processo que não se encontram nos dados do sistema sob análise, por exemplo, dados de calibração.

1.1. Motivação

Identificação de sistema consiste em obter um modelo matemático que seja capaz de reproduzir as dinâmicas do sistema identificado, assim podendo prever valores futuros deste sistema. Esta previsão de valores é importante em todas as áreas, por exemplo: na área de economia prevendo as cotas da bolsa de valores, na área de planejamento prevendo o índice pluviométrico e na área de manutenção prevendo a manutenção ou mesmo a troca de uma turbina antes de ocorrer um defeito.

As técnicas de identificação não lineares têm sido utilizadas na identificação de diversos tipos de sistemas, devido à qualidade do modelo nas dinâmicas complexas. As técnicas abordadas nesta dissertação foram Takagi-Sugeno-Kang e polinomial NARMAX.

1.2. Objetivo

Esta dissertação tem a pretensão de responder à seguinte questão: Com qual qualidade é possível prever o funcionamento ou a tendência de uma variável de um sistema utilizando apenas seus dados, através do modelo polinomial NARMAX (não-linear auto-regressivo, com média móvel e entrada exógena) e o modelo nebuloso do tipo TSK (Takagi-Sugeno-Kang)?

Para isto é utilizado o *software* Matlab da Mathworks, onde é implementada uma ferramenta numérica para modelagem matemática de sistemas, utilizando o modelo polinomial NARMAX com o estimador dos Mínimos Quadrados Ortogonais (MQO) e o modelo nebuloso do tipo Takagi-Sugeno-Kang com concepção ARX (auto-regressiva com entrada exógena) no consequente e estimador dos Mínimos Quadrados (MQ), onde, ambas as técnicas realizam previsão de 1 e *N* passos à frente.

.

1.3. Justificativa

Muitas vezes, para as empresas, principalmente da área de engenharia, tornarem seus produtos ou processos mais eficientes, há uma necessidade de modelar o comportamento dos mesmos, para isto, é necessária a utilização de ferramentas que possibilitem analisar, compreender e prever as dinâmicas do produto ou processo. Assim são testados os modelos NARMAX e nebuloso na identificação de um sistema eletro-mecânico. A qualidade da modelagem do sistema eletro-mecânico é avaliada por meio de um índice de desempenho denominado coeficiente de relação múltipla, R^2.

1.4. Revisão Bibliográfica

Muitos casos bem sucedidos de utilização de identificação polinomial NARMAX, método de estimação de parâmetros por Mínimos Quadrados Ortogonais, nebuloso TSK e agrupamento de dados nebuloso C-Médias (*Fuzzy C-Means*, FCM), são mencionados a seguir.

SALAHSHOOR e HAMZEHNEJAD (2010) propuseram uma nova abordagem *online* multivariável, para identificação de modelos, baseado em uma rede adaptativa neuro-nebulosa. E testaram esta nova abordagem em dois clássicos *benchmark* com alta não linearidade e variante no tempo, um tanque reator de mistura contínua e uma coluna binária de destilação.

WANG, CHIEN, LEU e LEE (2010) desenvolveram uma nova abordagem para controle adaptativo Takagi-Sugeno nebuloso neural *online*. E provaram que o controle em malha fechada da nova abordagem proposta é estável e robusta.

TAO, TAUR e CHEN (2010) controlaram um *twin rotor* com estrutura MIMO (múltiplas entradas e múltiplas saídas) desacoplado. Para isto, foi simplificado o projeto do controlador nebuloso Takagi-Sugeno através da troca das complexas funções não-lineares em termos de variáveis de estado com um alto grau por equivalentes representações com a combinação linear de funções proporcionais.

SUPENI *et al.* (2009) modelaram um motor de corrente contínua utilizando uma técnica variante de otimização por colônia de formigas para treinar uma rede neural multicamadas baseada no modelo NARMAX.

SALAHSHOOR e GHARIBSHAIYAN (2008) propuseram duas mudanças para melhorar o desempenho da evolução da estrutura da base de regras. Uma para suavizar a geração de regras no período inicial da identificação e outra para simplificar a base de regras excluindo as inativas, onde isto é verificado através do grau de ativação das gerações anteriores. E esta hipótese foi testada em um benchmark de uma coluna de destilação não linear.

HAN, ZHOU e WANG (2006) propuseram um método de estrutura de seleção para modelos polinomiais NARMAX que utiliza a técnica de programação genética juntamente com a estimação de parâmetros utilizando MQO.

MEDEIROS (2006) aplicou a técnica de algoritmo genético para otimização das funções de pertinência do modelo nebuloso TSK, para modelar um levitador magnético.

ZITO e LANDAU (2005) apresentaram a identificação NARMAX de um motor *turbocharged* a diesel para comparar a relação entre a variável geométrica do comando da turbina e a pressão do ar.

KUKREJA, GALIANA, e KEARNEY (2003) apresentaram uma concepção de identificação NARMAX da dinâmica de um tornozelo humano, utilizando o método dos mínimos quadrados.

RAHIM, TAIB, e YUSOF (2003) propuseram a identificação de um motor de corrente contínua, utilizando o modelo polinomial NARMAX e a aproximação por redes neurais artificiais.

CORRÊA, AGUIRRE, e SALDANHA (2002) investigaram a identificação pelo modelo NARMAX polinomial, utilizando mínimos quadrados ortogonais, de um conversor de corrente contínua do tipo Buck, utilizando um conhecimento prévio do sistema (modelagem caixa cinza).

MACIAS, ANGELOV e XIAOWEI (2006) utilizaram o modelo nebuloso TSK na análise *on-line* da qualidade da torre de destilação de petróleo bruto; PUCCIARELLI (2005) Modelou a aceleração de um braço robótico utilizando o modelo nebuloso Takagi-Sugeno. ZHANG e CHEN (2004) aplicaram o algoritmo de agrupamentos FCM (nebuloso c-médias, do inglês, *Fuzzy C-Means*) na segmentação de imagens para Medicina. YEN e WANG (1999) propuseram a seleção de regras nebulosas utilizando mínimos quadrados ortogonais.

1.5. Organização da Dissertação

O restante deste documento está organizado da seguinte forma. No capítulo 2 é apresentada uma abordagem básica sobre o procedimento de identificação de sistemas.

O capítulo 3 demonstra o modelo polinomial NARMAX, a técnica de MQO (com uma visão intuitiva e não apenas uma expressão matemática) e a detecção de estrutura através da “taxa de redução de erro” (*Error Reduction Ratio*, ERR). Dentro da técnica de MQO é apresentado alternativas interessantes, baseadas em MQO, para evitar o cálculo da inversa da matriz na equação de mínimos quadrados, entre as alternativas estão os métodos: clássico Gram-Schmidt (CGS), modificado Gram-Schmidt (MGS) e Golub-Householder (GH).

O capítulo 4 apresenta uma introdução à teoria dos sistemas nebulosos, definições sobre variáveis linguísticas e regras nebulosas. Também é demonstrado o modelo de inferência nebulosa TSK e agrupamentos de dados utilizando a técnica nebulosa C-médias. O capítulo 5 apresenta uma análise de resultados do sistema eletro-mecânico modelado. O capítulo 6 conclui a dissertação.

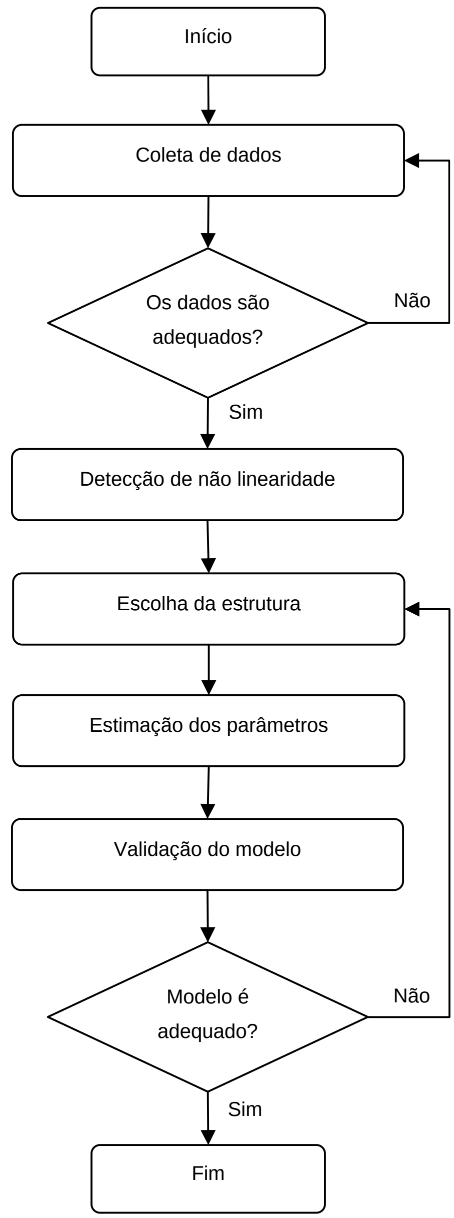
2. PROCEDIMENTO DE IDENTIFICAÇÃO

Em geral, a identificação de sistemas pode ser dividida em cinco etapas principais (Ljung, 1987):

i. Obtenção de dados de experimentação do sistema;
ii. Aplicação de testes aos dados obtidos para detecção de não-linearidades;
iii. Escolha da estrutura que será utilizada para representar o modelo matemático;
iv. Estimação dos parâmetros do modelo;
v. Validação do modelo obtido.

Os procedimentos anteriores são utilizados tanto para a identificação de sistemas lineares quanto não-lineares. A diferença está no modo como cada etapa é implementada.

Figura 2.1 - Fluxograma do procedimento de identificação



2.1. Coleta de Dados

A coleta de dados é um passo importante para a modelagem de sistemas, pois estes dados são utilizados na detecção de não-linearidades e na estimação dos parâmetros do modelo selecionado. Para isto na experimentação do sistema o sinal de entrada necessita de um espectro de frequência adequado para excitar às dinâmicas desejadas do sistema (Leontaritis e Billings, 1987). No caso de sistemas não-lineares, isto requer que os efeitos não-lineares sejam excitados por tal sinal e assim estejam presentes nos dados, ou seja, se os dados não representarem bem o sistema, a modelagem consequentemente não representará bem o sistema.

Os tipos de sinais mais utilizados para excitar sistemas são ondas quadradas, sinal binário pseudo-aleatório (*Pseudo-Random Binary Signal,* PRBS) e ruído branco, os quais possuem um espectro de frequência relativamente largo.

Geralmente, o procedimento de identificação é realizado por meio de dados amostrados. Assim é necessário determinar um período de amostragem que seja adequado para não haver perdas de informações e nem redundância, no caso de taxas inferiores e superiores do que a necessária, respectivamente.

2.2. Detecção de Não-Linearidades

A presença de certos parâmetros, tais como atrito, inércia e tempo morto, fazem com que os sistemas sejam não lineares. Apesar de alguns sistemas apresentarem uma não linearidade suave, então é possível a utilização de modelos lineares, que em torno de um ponto de operação, gerem resultados satisfatórios. Quando a modelagem linear não é suficiente para se obter um bom modelo, é necessário empregar representações não lineares que obtém uma melhor descrição do comportamento dinâmico do processo, porém estes são mais complexos.

Um modo fácil de verificar se o sistema é linear, é utilizar o Principio da Superposição onde um sistema é excitado por $u_1(t)$ produz a saída $y_1(t)$ e quando excitado por $u_2(t)$ produz a saída $y_2(t)$. Se tal sistema é excitado por $a \cdot u_1(t) + b \cdot u_2(t)$, sua saída terá que ser $a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$. Formalmente pode se dizer que um sistema linear tem o mesmo tipo de comportamento, independente do ponto de operação (Aguirre, 2007).

2.3. Escolha da Estrutura

Uma importante etapa na identificação de sistemas é a escolha do modelo a ser utilizado para representar a dinâmica do sistema. Esta escolha se torna mais importante no caso de sistemas não-lineares, onde há, muitas vezes, uma acentuada quantidade de elementos não-lineares, e com isso é necessário escolher um modelo complexo que consiga representar a diversas não-linearidades.

A dissertação aborda as estruturas de modelo NARMAX na forma polinomial e nebulosa do tipo TSK.

O modelo NARMAX polinomial apresenta algumas vantagens em relação a outros tipos de representações não-lineares, entre elas: Se transforma em uma representação linear quando o ponto de operação do sistema é mantido aproximadamente fixo, o modelo possui termos de ruído do processo que evitam a polarização dos parâmetros, as informações analíticas do modelo podem ser facilmente obtidas e pode utilizar algoritmos de estimação de parâmetros de sistemas lineares que são fáceis de implementar e convergem rapidamente, pois funções não-lineares polinomiais são lineares nos parâmetros. O modelo NARMAX consegue uma representação adequada do processo, desde que os dados não apresentem variações abruptas.

O modelo nebuloso TSK possui como característica a facilidade de incorporação do conhecimento humano do processo na modelagem através das variáveis linguísticas e das regras, sendo de simples interpretação, natural e dedutiva. A saída do sistema nebuloso é geralmente contínua e suave com o tempo e as informações analíticas do modelo podem ser facilmente obtidas.

2.4. Estimação dos Parâmetros

Após ter escolhido o modelo que representará o sistema, deve-se estimar os parâmetros, para que o modelo identificado consiga gerar uma dinâmica semelhante à do sistema. Normalmente utiliza-se algoritmo baseado em MQ aos dados de entrada e saída, o qual é de fácil implementação e robusto a ruídos.

2.5. Validação do Modelo

Esta é a última etapa do procedimento de identificação. Nela se verifica se o modelo obtido consegue representar o processo original, com um erro aceitável. Nesta dissertação, a validação da modelagem do sistema eletro-mecânico será verificada por meio do índice de desempenho determinado coeficiente de correlação múltipla, R^2.

3. MODELAGEM POLINOMIAL NARMAX

Nesta dissertação é utilizada a estrutura NARMAX na forma polinomial. Para a representação polinomial são consideradas *a priori* as seguintes condições: o sistema possui um tempo morto (τ_d) e nenhum termo cujo parâmetro tenha que ser estimado pode depender do ruído aditivo no mesmo instante, e é representado pelo termo $e(k)$, logo o modelo NARMAX será representado pela equação (3.1) (Aguirre, 2007), tal que

$$\begin{gathered} y(k) = F^l[y(k-1), \cdots y\big(k-n_y\big), u(k-\tau_d), \cdots, u(k-\tau_d-n_u+1), \\ e(k-1), \cdots, e(k-n_e)] + e(k) \end{gathered} \tag{3.1}$$

onde $k = 1, \cdots, N$ (N é o número de amostras dos dados) e o $e(k)$ são as dinâmicas que não são bem representados por $F^l[\cdot]$, que é uma função polinomial não linear de $y(k)$, $u(k)$ e $e(k)$, que são a saída, a entrada e o ruído aditivo respectivamente. $F^l[\cdot]$ possui um grau de não-linearidade l. A equação (3.1) é composta por uma parte estocástica e uma parte determinística, $e(k)$ e $F^l[\cdot]$, respectivamente.

Como antecipadamente não se conhece a função $F^l[\cdot]$, então ela deve ser escrita utilizando alguma aproximação (Chen e Billings, 1989). A aproximação utilizada apresenta a seguinte estrutura:

$$\begin{gathered} y(k) = \theta_0 + \sum_{i_1=1}^{n} \theta_{i_1} \cdot x_{i_1}(k) + \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=i_1}^{n} \theta_{i_1 i_2} \cdot x_{i_1}(k) \cdot x_{i_2}(k) + \cdots \\ + \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_l=i_l-1}^{n} \theta_{i_1 \cdots i_l} x_{i_1}(k) \cdots x_{i_l}(k) + e(k), \end{gathered} \tag{3.2}$$

onde

$$\begin{aligned} & n = n_y + n_u + n_e \\ & x_1(k) = y(k-1), x_2(k) = y(k-2), \cdots, x_{n_y+1}(k) = u(k-\tau_d), \cdots, x_{n_y+n_u+1}(k) \\ & \qquad = e(k-1), x_n(k) = e(k-n_e). \end{aligned} \tag{3.3}$$

As constantes θ_i são os parâmetros a serem estimados. Neste caso, pode-se utilizar um agrupamento de termos e coeficientes, onde a parte determinística pode ser expandida em um somatório de termos com graus de não linearidade variando de $1 \leq m \leq l$. Deste modo cada termo de grau m pode conter um fator de grau p do tipo $y(k-i)$ e um fator de grau $(m-p)$ do tipo $u=(k-i)$ sendo multiplicado por um parâmetro representado por $c_{p,m-p}(n_1,\cdots,n_m)$, onde se chega em (3.4) (Aguirre, 2007):

$$y(k) = \sum_{m=0}^{l} \sum_{p=0}^{m} \sum_{n_1,n_m}^{n_y,n_u} c_{p,m-p}(n_1,\cdots,n_m) \prod_{i=1}^{p} y(k-n_i) \prod_{i=p+1}^{m} u(k-n_i) \tag{3.4}$$

sendo que,

$$\sum_{n_1,n_m}^{n_y,n_u} = \sum_{n_1=1}^{n_y} \cdots \sum_{n_m=1}^{n_u} . \tag{3.5}$$

O n_y é o limite superior para os somatórios que possuem fatores $y(k-n_i)$ e n_u para os fatores $u(k-n_i)$.

Nota-se que pequenas alterações no valor do grau de não-linearidade l e nas ordens dos máximos atrasos n_y, n_u e n_e (máximo atraso entre os regressores de saída, de entrada e de ruído, respectivamente) acarretam alterações significativas na quantidade de termos do modelo polinomial (3.1).

O número de termos pode ser determinado através da equação (3.6) (Korenberg *et al.*, 1988):

$$n_\theta = M + 1, \tag{3.6}$$

onde *M* é calculado usando

$$M = \sum_{i=1}^{l} n_i, \tag{3.7}$$

e n_i é obtido através da expressão (3.8):

$$n_i = \frac{n_{i-1} \cdot \left(n_y + n_u + n_e + i - 1\right)}{i}, n_0 = 1. \tag{3.8}$$

onde n_θ é o número de termos (de processo e de ruído) no modelo e o seu valor pode se tornar grande para modelos polinomiais.

A união de todos os termos passíveis de serem incluídos em um modelo polinomial denomina-se conjunto de termos candidatos. E muitos casos não são necessários a utilização de todos os termos candidatos para representar bem um sistema, basta apenas uma quantidade pequena, assim, é utilizado algoritmos de detecção de estrutura para incluir os termos mais significativos ao modelo. Neste trabalho para a modelagem NARMAX será utilizado o ERR, o qual indica o quanto cada termo inserido no modelo pode melhorar a representação do sistema. O ERR geralmente é utilizado em modelos polinomiais NARMAX junto a um algoritmo de ortogonalização.

Uma grande quantidade de termos pode gerar redundância, Em sistemas lineares há o cancelamento de pólos e zeros não gerando problemas, porém, em sistemas não lineares, quando ocorre uma sobre-parametrização o modelo tende a gerar regimes dinâmicos não apresentados pelo sistema real, comprometendo a modelagem.

3.1. Estimador dos Mínimos Quadrados Ortogonais

Após determinar à estrutura NARMAX, a próxima etapa é determinar os parâmetros do modelo. Isto é normalmente realizado, nos modelos polinomiais, utilizando técnica de Mínimo Quadrado Ortogonal (MQO).

O modelo NARMAX pode ser representado da seguinte forma:

$$y(k) = \psi(k)\hat{\theta} + \xi(k) \tag{3.9}$$

onde $y(k)$ é a saída real, $\psi(k)$ corresponde aos regressores, $\hat{\theta}$ são os parâmetros estimados (o “chapéu”, acento circunflexo, indica que o valor é estimado), ξ é o resíduo do erro cometido (diferença entre o valor real e o estimado), equação (3.10), tal que

$$\xi(k,\theta) = y(k) - \hat{y}(k,\theta) \tag{3.10}$$

ou na sua notação matricial

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\psi}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\xi}\,, \tag{3.11}$$

onde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathrm{y}(1) \\ \mathrm{y}(2) \\ \vdots \\ \mathrm{y}(\mathrm{N}) \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi_1 & \cdots & \psi_{\mathrm{n}_\theta} \end{bmatrix}; \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = \begin{bmatrix} \hat{\theta}_1 \\ \hat{\theta}_2 \\ \vdots \\ \hat{\theta}_{\mathrm{n}_\theta} \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{\mathrm{n}_\theta} \end{bmatrix}; \quad \psi_{\mathrm{i}} = \begin{bmatrix} \psi_{\mathrm{i}}(1) \\ \psi_{\mathrm{i}}(2) \\ \vdots \\ \psi_{\mathrm{i}}(\mathrm{N}) \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

e N é o número de amostras dos dados.

Como os regressores $\boldsymbol{\psi}$ são conhecidos, é de interesse que os parâmetros estimados $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, sejam tal que os resíduos $\boldsymbol{\xi}$ fossem os menores possíveis, assim aproximando o modelo estimado do real. Com isto, é possível montar uma função custo (função objetivo) onde o objetivo é reduzir o erro (minimizar J_{MQ}), definindo-se a somatória do quadrado do erro para *N* dados:

$$J_{MQ} = \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} \xi(k)^2 = \boldsymbol{\xi}^T \boldsymbol{\xi}, \tag{3.13}$$

onde *N* é o número de termos. Para minimizar a função objetivo ou custo (3.13), basta isolar o $\boldsymbol{\xi}$ na fórmula (3.11) e substituir na equação (3.13), obtendo a equação (3.14), tal que

$$J_{MQ} = \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\psi}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right)^T \left(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\psi}\hat{\boldsymbol{\theta}}\right). \tag{3.14}$$

Para minimizar a função custo em função de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, é necessário calcular a derivada primeira igual a zero, equação (3.15), onde

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{\theta}} = 0. \tag{3.15}$$

Assim obtêm-se a equação de Mínimos Quadrados, dada por:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi})^{-1} \boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{y}. \tag{3.16}$$

As utilizações de métodos baseados em MQO apresentam maior robustez. Pois os sistemas não-lineares possuem muitas colunas na matriz de regressores $\boldsymbol{\psi}$, que gerariam um mau condicionamento numérico no cálculo da inversa na equação (3.16) devido a propagação dos erros, então utiliza-se a propriedade de ortogonalidade pelo fato de $\boldsymbol{\psi}^T \boldsymbol{\psi}$ é simétrica por construção. Assim realiza-se a fatoração QR e obtêm-se duas matrizes uma com colunas ortonormais e outra triangular superior. Devido à inversa de uma matriz ortogonal ser igual a sua transposta há um melhoramento no condicionamento numérico. Existem vários métodos para calcular a fatoração QR entre eles: clássico de Gram-Schmidt ou modificado de Gram-Schmidt ou Golub-Householder (Aguirre, 2007).

3.1.1. Método Clássico de Gram-Schmidt (CGS)

Este método tem como objetivo fatorar a matriz de regressores ψ, que é posto pleno[1], na seguinte forma $\psi = QA$, tal que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_{1,2} & \alpha_{1,3} & \cdots & \alpha_{1,n_\theta} \\ 0 & 1 & \alpha_{2,3} & \cdots & \alpha_{2,n_\theta} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_{n_\theta - 1, n_\theta} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.17}$$

[1] A matriz tem posto pleno se os seus vetores colunas ou linhas forem linearmente independentes, ou seja, seu determinante diferente de zero.

onde A é uma matriz triangular superior de dimensão $n_\theta \times n_\theta$ e Q é uma matriz de dimensão $N \times n_\theta$ com colunas ortogonais tal que $Q^T Q = D$, sendo D é uma matriz diagonal e definida positiva.

O algoritmo clássico de Gram-Schmidt calcula A, coluna por coluna, e ortogonaliza ψ da seguinte forma: na *i*-ésima iteração, determina-se a *i*-ésima coluna de forma a ser ortogonal às $i-1$ colunas previamente calculadas. Tal procedimento é executado para $i = 2, 3, \cdots, n_\theta$, e pode ser representado conforme segue:

$$\begin{gathered} q_1 = \psi_1 \\ \alpha_{j,i} = \frac{\langle q_j, \psi_i \rangle}{\langle q_j, q_j \rangle}, 1 \leq j < i \\ q_j = \psi_1 - \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{j,i} q_j \,. \end{gathered} \tag{3.18}$$

Sendo que as duas últimas equações devem ser resolvidas para $i = 2, \cdots, n_\theta$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica o produto interno. Portanto, a partir da equação normal, tem-se:

$$\begin{gathered} \psi^T \psi \hat{\theta} = \psi^T y \\ A^T Q^T Q A \hat{\theta} = A^T Q^T y \\ A^T D A \hat{\theta} = A^T Q^T y \\ D A \hat{\theta} = Q^T y \\ A \hat{\theta} = D^{-1} Q^T y. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Em (3.19) é fornecido os parâmetros $\hat{g} = A\hat{\theta}$ em um espaço ortogonal. Logo os parâmetros podem ser determinados utilizando (3.19) ou

$$\hat{g}_i = \frac{\langle q_i, y \rangle}{\langle q_i, q_i \rangle}, i = 1, 2, \cdots, n_\theta, \tag{3.20}$$

e com isso os parâmetros estimados podem ser determinados no espaço de regressores originais (podendo ser não ortogonal) através de $\hat{\theta} = A^{-1}\hat{g}$, como A é uma matriz triangular superior e $\hat{\theta}$ é determinado por meio de substituições das variáveis.

3.1.2. Método Modificado de Gram-Schimidt (MGS)

O método modificado é útil para resolução de problemas de sensibilidade e mau condicionamento numérico do método clássico de Gram-Schmidt. Para conseguir este objetivo, o algoritmo modificado gera a matriz A uma linha por vez e ortogonaliza ψ de tal forma que na *i*-ésima iteração as colunas $i+1,\cdots,n_\theta$ são ortogonais à *i*-ésima coluna. Esta operação é repetida para $i=1,2,\cdots,n_\theta-1$. E a iteração é indicada entre parênteses, desta forma $\psi_j^{(0)}=\psi_j, j=1,\cdots,n_\theta$ e

$$\begin{gathered} q_i=\psi_i^{(i-1)} \\ \alpha_{i,j}=\frac{\langle q_i,\psi_j^{(i-1)}\rangle}{\langle q_i,q_i\rangle}, j=i+1,\cdots,n_\theta \\ \psi_j^{(i)}=\psi_j^{(i-1)}-\alpha_{i,j}q_i, j=i+1,\cdots,n_\theta. \end{gathered} \tag{3.21}$$

Sendo que as equações (3.21) são resolvidas para $i=1,2,\cdots,n_\theta-1$. Finalmente na n_θ-ésima iteração tem-se $q_{n_\theta}=\psi_{n_\theta}^{(n_\theta-1)}$. Os parâmetros do modelo ortogonalizado, $\hat{g}$, são determinados fazendo $y^{(0)}=y$ e

$$\begin{gathered} \hat{g}_i=\frac{\langle q_i,y^{(i-1)}\rangle}{\langle q_i,q_i\rangle} \\ y^{(i)}=y^{(i-1)}-\hat{g}_iq_k, \end{gathered} \tag{3.22}$$

para $i=1,2,\cdots,n_\theta$. A determinação dos parâmetros correspondentes aos regressores do modelo pode ser efetuada de forma similar no método CGS, ou seja, calculando-se $\hat{\theta}=A^{-1}\hat{g}$.

3.1.3. Método de Golub-Householder (GH)

Este método é útil para o problema de estimação por mínimos quadrados do parâmetro do seguinte modelo, $\hat{y}(k)=\psi\hat{\theta}+\xi(k)$. Este algoritmo é aplicado a equação de regressão de forma a alterar matrizes e vetores, mas, no entanto, mantém $\hat{\theta}$ inalterado.

Primeiro se multiplica o modelo de regressão por uma matriz $Q \in R^{n_\theta \times n_\theta}$ e obtém-se

$$
\begin{gathered}
Qy(k) = Q \cdot \psi^T \hat{\theta} + Q\xi(k) \\
y^*(k) = \psi^{*T} \hat{\theta} + \xi^*(k).
\end{gathered}
\tag{3.23}
$$

A função objetivo ou custo J^* dos mínimos quadrados, neste caso, é:

$$
J^* = \sum_{i=1}^{N} \xi(i)^{*2} = \xi^{*T} \cdot \xi^*.
\tag{3.24}
$$

Substituindo a equação (3.23) na (3.24), tem-se:

$$
\begin{gathered}
J_{MQ}^* = \left(y^* - \psi^* \hat{\theta}\right)^T \left(y^* - \psi^* \hat{\theta}\right) \\
J_{MQ}^* = \left(y - \psi \hat{\theta}\right)^T Q^T Q \left(y - \psi \hat{\theta}\right).
\end{gathered}
\tag{3.25}
$$

Para que $J_{MQ}^* = J_{MQ} = \left(y - \psi \hat{\theta}\right)^T \left(y - \psi \hat{\theta}\right)$, necessariamente $Q^T Q = I$, que é a condição que a matriz Q seja ortonormal. Além disso, impõe-se que:

$$
\psi^* = Q\psi = \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix},
\tag{3.26}
$$

sendo que V é triangular superior e $V \in R^{n_\theta X n_\theta}$. Então,

$$
\begin{gathered}
\psi^{*T} \psi^* = [V^T \; 0^T] \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix} \\
\psi^{*T} \psi^* = V^T V \\
\psi^{*T} \psi^* = \psi^T Q^T Q \psi \\
\psi^{*T} \psi^* = \psi^T \psi.
\end{gathered}
\tag{3.27}
$$

Reescrevendo J_{MQ}^*, tem-se:

$$J_{MQ}^* = \left(\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}\hat{\theta}\right)^T \left(\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}\hat{\theta}\right)$$
$$J_{MQ}^* = \left(y_1^* - V\hat{\theta}\right)^T\left(y_1^* - \mathrm{V}\hat{\theta}\right) + y_2^{*T}y_2^*. \tag{3.28}$$

Logo para J_{MQ}^* é minimizado quando $y_1^* = V\hat{\theta}$, e tem-se $\hat{\theta}_{MQ} = V^{-1}y_1^*$ e consequentemente $J_{MQ}^* = y_2^{*T}y_2^*$. Como V é triangular superior, a estimativa,

$$\hat{\theta}_{MQ} = V^{-1}y_1^* \tag{3.29}$$

é de simples obtenção.

3.2. Detecção da Estrutura Utilizando o ERR

Juntamente com a estimação dos parâmetros é possível aplicar o ERR para quantificar, quanto cada termo do modelo NARMAX acrescenta na melhoria da representação do sistema, eliminando os que acrescentam pouco. Consequentemente, diminuindo a quantidade de termos do modelo NARMAX.

Analisando o resíduo do modelo identificado, e considerando $E\{\xi(k)\} = 0$, define-se a variância do erro, $\xi(k)$, como

$$Var\{\xi(k)\} = \lim_{N\to} \frac{1}{N}\left[Y^TY - \sum_{i=1}^{n_0} g_i^2 w_i^T w_i\right], \tag{3.30}$$

onde g_i indica os elementos do vetor de parâmetros e w_i indica os regressores ortogonais (Rodrigues, 1996).

Se nenhum termo fosse incluído no modelo, a variância de $\xi(k)$ seria igual ao erro quadrático médio da saída $y(k)$. A cada inclusão de termo, a variância de $\xi(k)$ é decrescida de um fator ${}^1\!/_N\, g_i^2 w_i^T w_i$, onde w_i indica o termo incluído e g_i o seu respectivo parâmetro. Para reduzir a variância deve-se normalizar o erro quadrático médio do sinal de saída. Deste modo, o ERR para cada termo é definido como (Rodrigues, 1996):

$$[ERR]_i = \frac{g_i^2 w_i^t w_i}{Y^T Y}, 1 \leq i \leq n_\theta. \tag{3.31}$$

O ERR indica a porção da variância na saída, quando se insere um novo termo no modelo, ou seja, os termos que possuírem maior ERR, constituirão o modelo final.

4. MODELAGEM NEBULOSA TAKAGI-SUGENO-KANG

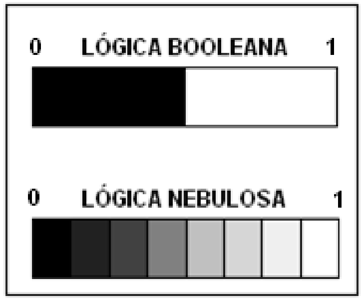
4.1. Introdução a Teoria de Sistemas Nebulosos

Aristóteles, filósofo grego (384 - 322 a.C.), foi o fundador da Lógica, e estabeleceu um conjunto de regras rígidas para que conclusões pudessem ser aceitas logicamente válidas. O emprego da lógica de Aristóteles levava a uma linha de raciocínio lógico baseado em premissas e conclusões. Como por exemplo: se é observado que *"todo ser vivo é mortal" (premissa 1)*, a seguir é constatado que *"Sara é um ser vivo" (premissa 2)*, como conclusão tem-se que *"Sara é mortal"*. Desde então, a lógica Ocidental, assim denominada, tem sido binária, isto é, uma declaração é falsa ou verdadeira, não podendo ser ao mesmo tempo parcialmente verdadeira e parcialmente falsa. Esta suposição e a lei da não contradição, que coloca que *"U e não U"* cobrem todas as possibilidades, formam a base do pensamento lógico Ocidental (Takemura, 2009).

Baseada na lógica de Múltiplos-valores (Multivalência) desenvolvida por Jan Lukasiewicz (1878-1956), Lofti Zadeh na década de 1960, desenvolveu a lógica nebulosa (fuzzy logic), onde o conceito de dualidade, estabelecendo que algo pode e deve coexistir com o seu oposto, ou seja, podendo ser parcialmente verdadeiro e parcialmente falso (grau de pertinência), fazendo a lógica nebulosa parecer natural, até mesmo inevitável. A lógica de Aristóteles trata com valores "verdade" das afirmações, classificando-as como verdadeiras ou falsas, mas muitas das experiências humanas não podem ser classificadas simplesmente como verdadeiras ou falsas, sim ou não, branco ou preto. Na verdade, entre a certeza de ser e a certeza de não ser, existem infinitos graus de incerteza (Takemura, 2009).

Por exemplo, é aquele homem alto ou baixo? Se na lógica clássica define-se que para uma pessoa ser considerada alta tem que ter mais de 1,80 m então uma pessoa com 1,79 m seria considerada baixa, não sendo natural aos conceitos humanos. No entanto a lógica nebulosa é gradual e não um valor fixo. E esta transição é caracterizada pelas funções de pertinência que geram uma flexibilidade ao conjunto nebuloso, onde geralmente são modeladas através de expressões linguísticas tais como “pessoa é alta”, “pessoa é meio alta” e “pessoa é mediana”, tornando a modelagem simples e natural. Outro exemplo seria julgar a cor de um objeto. Onde, a lógica clássica define-se que o objeto é preto ou branco, a lógica nebulosa define-se que o objeto pode possuir tons de cores entre as cores preta e branca, que seriam cores intermediárias (cinzas), conforme apresentado na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Exemplo de lógica booleana x lógica nebulosa



4.1.1. Fundamentos

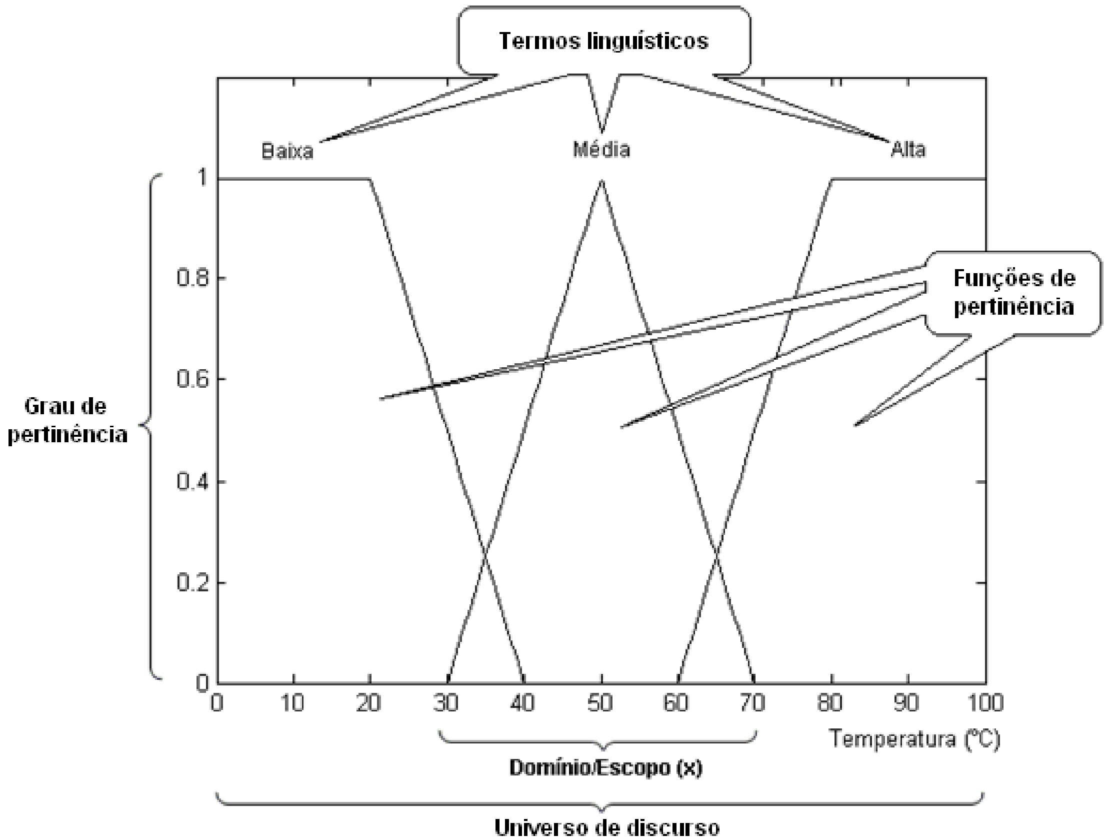
Na teoria clássica, um conjunto S é definido pela função f_s, que mapeia os elementos de S para 1 (pertence) ou para 0 (não pertence), ou seja, se o elemento x pertence ao conjunto S ou não pertence,

$$f_s(x): S \rightarrow \{0, 1\}$$
$$f_s(x) = \begin{cases} 1, \text{se } \in S \\ 0, \text{se } \notin S \,. \end{cases} \tag{4.1}$$

A teoria de conjuntos nebulosos é definida por μ_s (função de pertinência de S), que mapeia os elementos de S entre valores de 0 e 1. Em qual grau que o elemento x pertence ao conjunto S, tal que

$$\mu_s: S \rightarrow [0, 1]$$
$$0 \leq \mu_s \leq 1 \,. \tag{4.2}$$

Figura 4.2 – Ilustração dos conceitos básicos de um sistema nebuloso



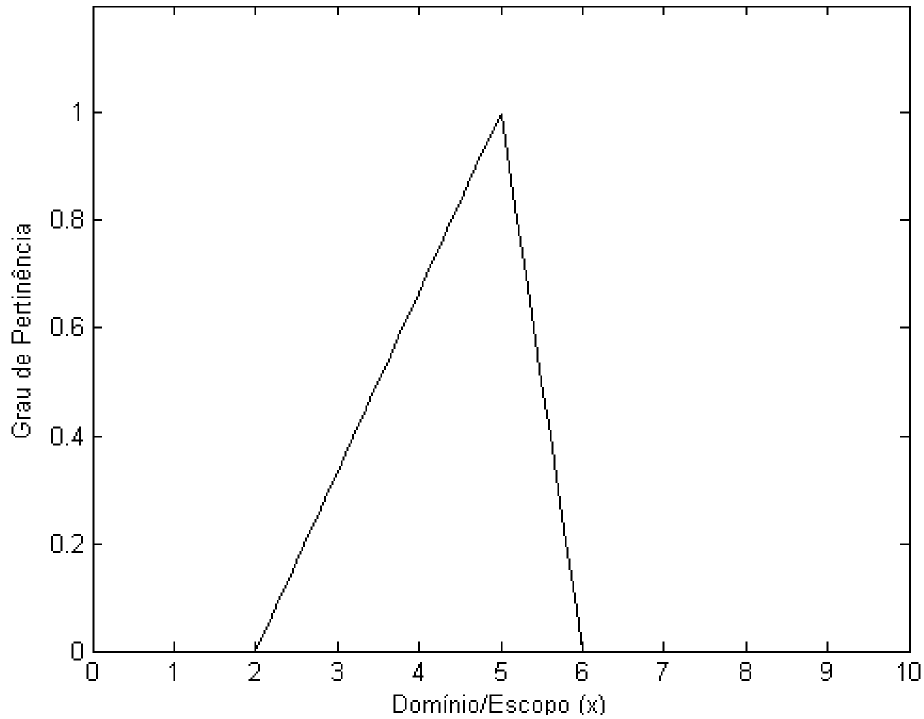
4.1.2. Tipos de Funções de Pertinência

Existem várias funções de pertinência (*Membership Functions*, MFs) e o que difere uma da outra é o seu formato e a quantidade de parâmetros. As principais funções de uma dimensão segundo Jang *et al.* (1997) são:

<u>Triangular</u> - A função de pertinência triangular é definida por três parâmetros, os quais correspondem aos vértices do triângulo formado, onde $a < b < c$, conforme apresentado na Figura 4.3, tal que

$$triangular(x,a,b,c) = \begin{cases} 0, x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b \\ \dfrac{c-x}{c-b}, b \leq x \leq c \\ 0, c \leq x \,. \end{cases} \tag{4.3}$$

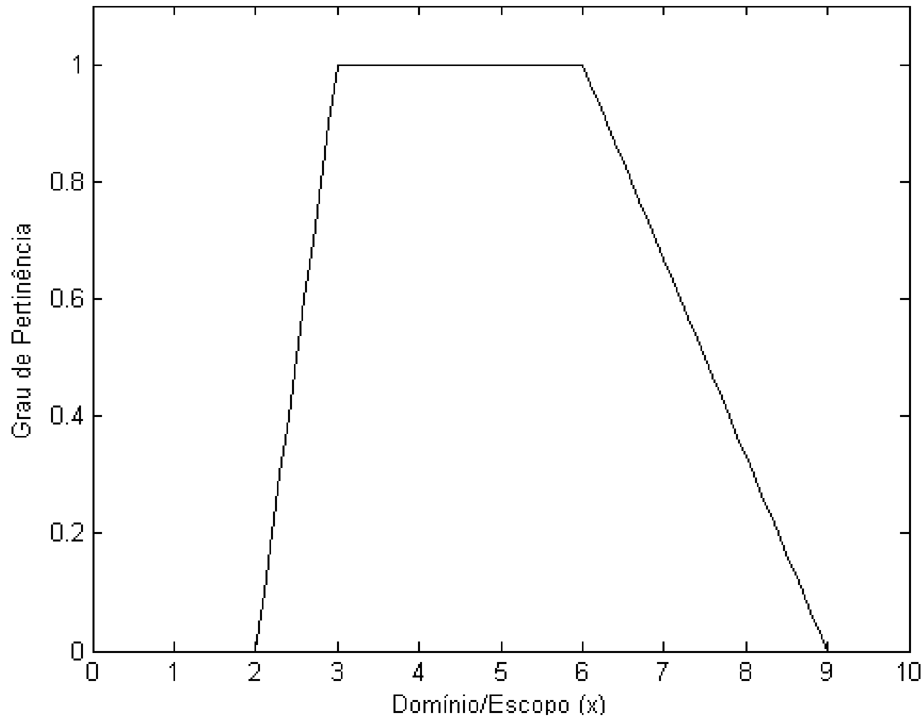
Figura 4.3 – Exemplo de função de pertinência do tipo Triangular (x,2,5,6)



Trapezoidal - A função de pertinência trapezoidal é definida por quatro parâmetros, os quais correspondem aos vértices do trapézio formado. Nesta função $a < b \leq c < d$ (a MF trapezoidal pode ser reduzida a uma triangular se o parâmetro $b = c$), conforme apresentado na Figura 4.4. Neste caso tem-se

$$trapezoidal(x, a, b, c, d) = \begin{cases} 0, x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, a \leq x \leq b \\ 1, b \leq x \leq c \\ \dfrac{d-x}{d-c}, c \leq x \leq d \\ 0, d \leq x. \end{cases} \quad (4.4)$$

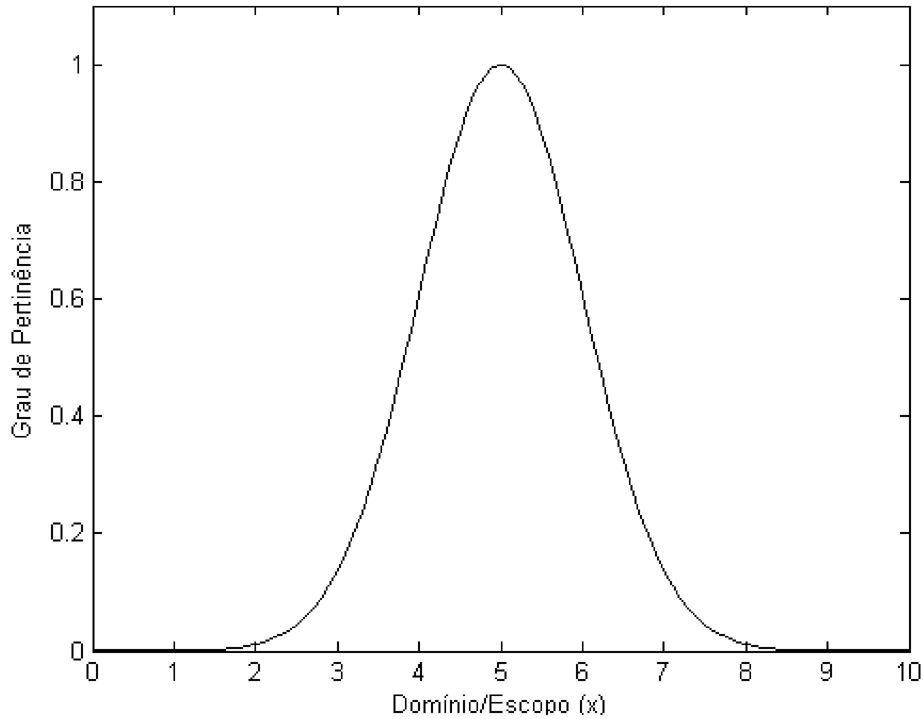
Figura 4.4 – Exemplo de função de pertinência do tipo Trapezoidal (x,2,3,6,9)



Gaussiana - A função de pertinência gaussiana é definida por dois parâmetros, sendo um referente ao centro c e o outro referente à largura σ, conforme mostrado na Figura 4.5. A função é dada pela equação

$$gauss(x,\sigma,c) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}. \tag{4.5}$$

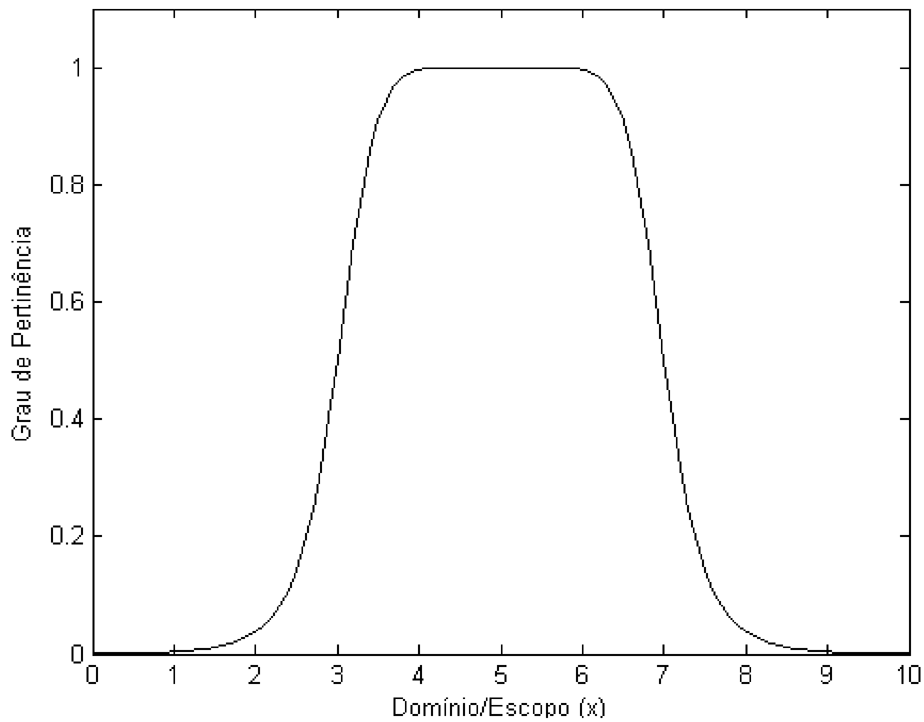
Figura 4.5 – Exemplo de função de pertinência Gaussiana (x,1,5)



Sino (Bell) - A função de pertinência em forma de sino é definida por três parâmetros, sendo um referente ao centro c e os outros dois referentes à largura a e b, conforme apresentado no exemplo da Figura 4.6, a função sino é dada por.

$$sino(x,a,b,c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}} \ . \tag{4.6}$$

Figura 4.6 – Exemplo de função de pertinência em forma de sino (x,2,4,5)



4.1.3. Operações com Conjuntos Nebulosos

As operações com conjuntos nebulosos são similares as dos conjuntos clássicos.

<u>Complemento Nebuloso</u> - O complemento de um conjunto nebuloso A é especificado em geral pela função $C: [0,1] \rightarrow [0,1]$, o qual agrega duas funções de pertinência, ou seja:

$$C[\mu_A(x)] = \mu_{\overline{A}}(x). \tag{4.7}$$

Neste caso, o operador de complemento deve satisfazer as seguintes propriedades:

- $C(0) = 1, \; C(1) = 0;$
- $C(a) \geq C(b)$ se $a \leq b.$

Alguns exemplos de complementos são:

- Complemento de 1 (um exemplo é apresentado na Figura 4.7 a linha tracejada é uma função triangular e a contínua é o seu complemento)

$$C(\mu_A(x)) = 1 - \mu_A(x)\,. \qquad (4.8)$$

- Sugeno (um exemplo é apresentado na Figura 4.8 a linha tracejada é uma função triangular e a contínua é o seu complemento)

$$C\big(\mu_A(x)\big) = \frac{1 - \mu_A(x)}{1 + \lambda\mu_A(x)}. \qquad \text{onde } \lambda > -1 \qquad (4.9)$$

- Yager (um exemplo é apresentado na Figura 4.9 a linha tracejada é uma função triangular e a contínua é o seu complemento)

$$C\big(\mu_A(x)\big) = (1 - \mu_A(x)^w)^{\frac{1}{w}}. \qquad \text{onde } w > 0 \qquad (4.10)$$

Figura 4.7 – Complemento de 1

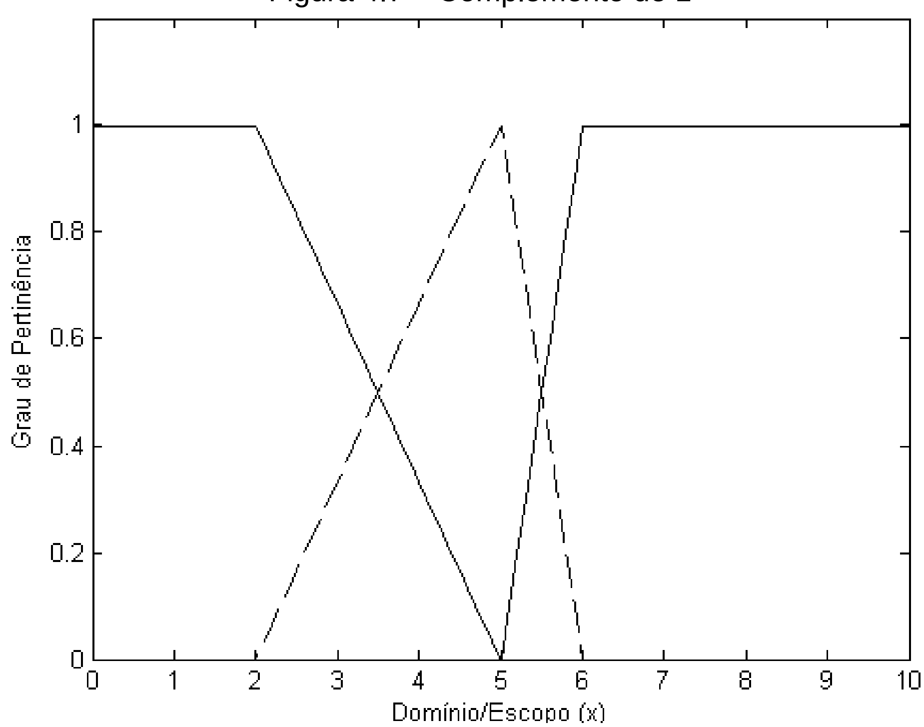


Figura 4.8 – Complemento Sugeno

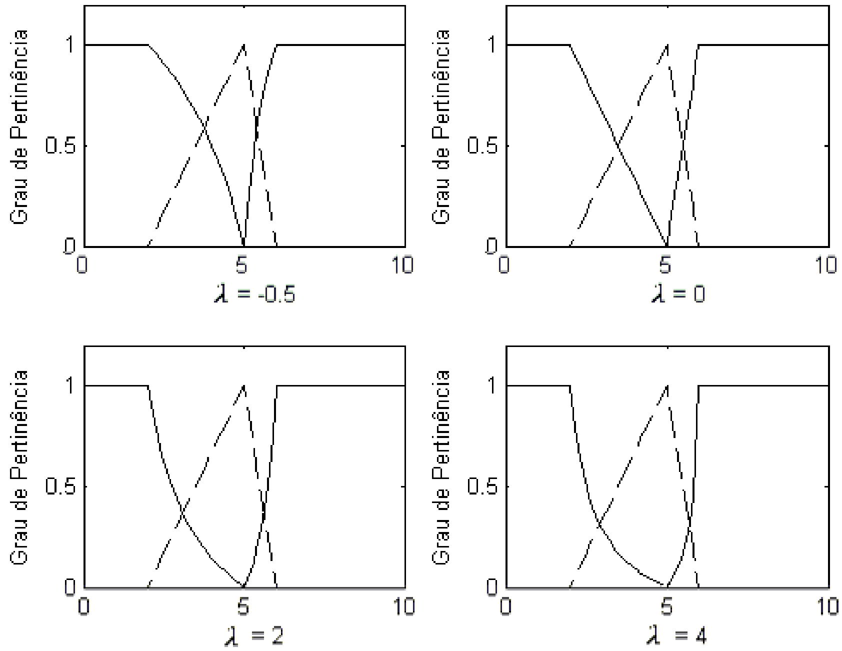
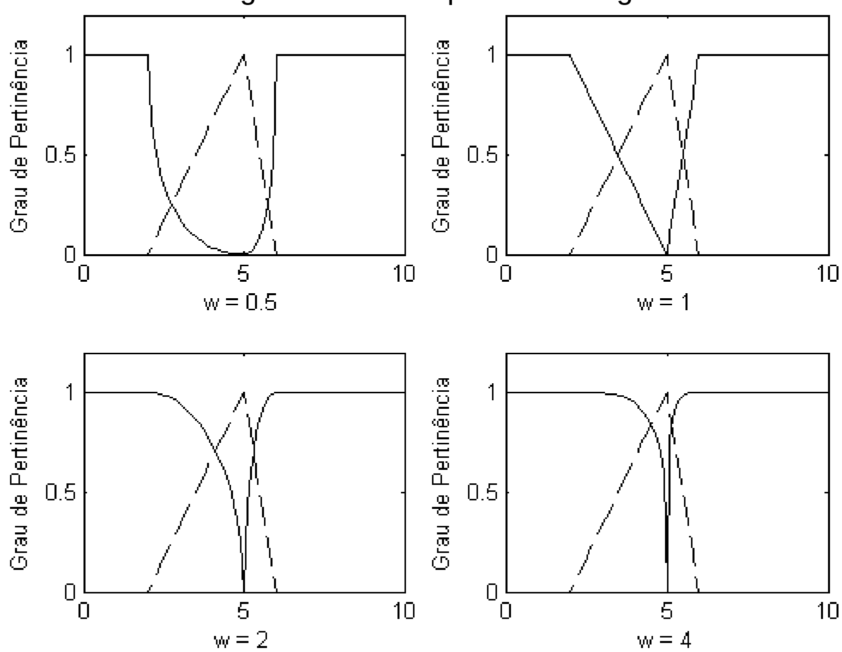


Figura 4.9 – Complemento Yager



4.1.4. União Nebulosa: Norma-S (ou Conorma-T)

A união de dois conjuntos nebulosos A e B é especificada em geral pela função $S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, o qual agrega duas funções de pertinência, ou seja:

$$S[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A \cup B}(x). \tag{4.11}$$

Neste caso, o operador Norma-S deve satisfazer as seguintes propriedades:

- $S(1,1) = 1, \;\; S\big(0, \mu_A(x)\big) = S(\mu_A(x), 0) = \mu_A(x);$
- $S\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) \leq S\big(\mu_C(x), \mu_D(x)\big)$ se $\mu_A(x) \leq \mu_C(x)$ e $\mu_B(x) \leq \mu_D(x);$
- $S\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = S\big(\mu_B(x), \mu_A(x)\big);$
- $S\Big(\mu_A(x), S\big(\mu_B(x), \mu_C(x)\big)\Big) = S\Big(S\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big), \mu_C(x)\Big).$

Alguns exemplos de Norma-S são:

- Máximo (um exemplo é apresentado na Figura 4.10 as linhas tracejadas são duas funções triangulares e a contínua é a soma)

$$S\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \max\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x). \tag{4.12}$$

- Soma algébrica (um exemplo é apresentado na Figura 4.11 as linhas tracejadas são duas funções triangulares e a contínua é a soma)

$$S\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x)\mu_B(x). \tag{4.13}$$

- Soma *bounded* (um exemplo é apresentado na Figura 4.12 as linhas tracejadas são duas funções triangulares e a contínua é a soma)

$$S\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \min\,(1, \big(\mu_A(x) + \mu_B(x)\big)) = 1 \wedge \big(\mu_A(x) + \mu_B(x)\big). \tag{4.14}$$

- Soma drástica (um exemplo é apresentado na Figura 4.13 as linhas tracejadas são duas funções triangulares e a contínua é a soma)

$$S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \begin{cases} \mu_A(x), if\ \mu_B(x) = 0 \\ \mu_B(x), if\ \mu_A(x) = 0 \\ 1, \mu_A(x) + \mu_B(x) > 0 \end{cases} . \tag{4.15}$$

Figura 4.10 – Soma máxima

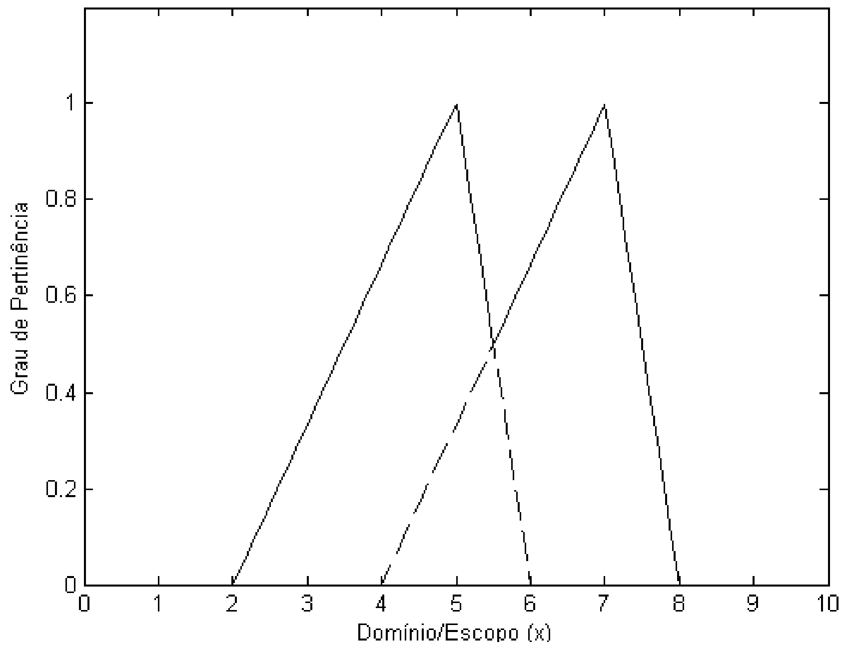


Figura 4.11 – Soma algébrica

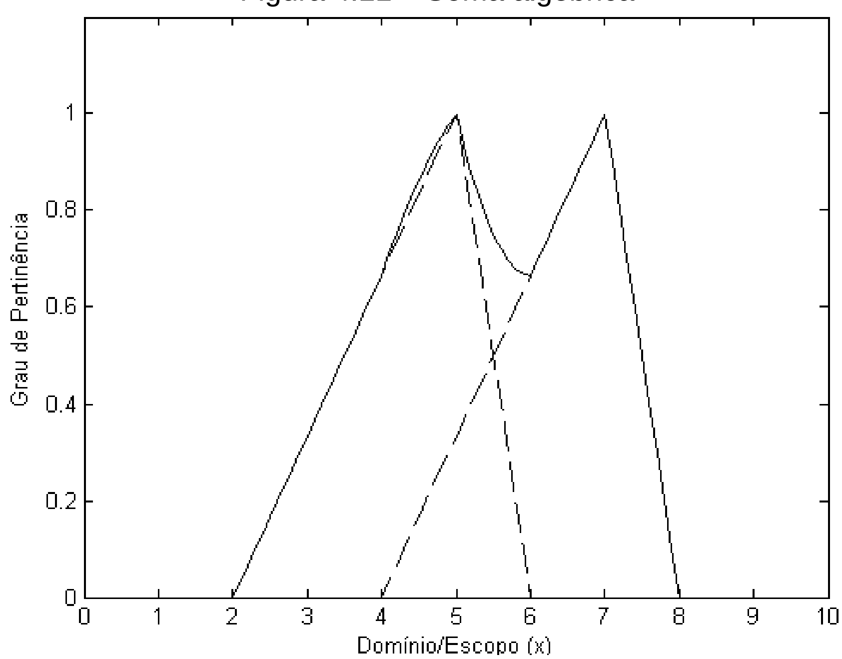


Figura 4.12 – Soma *bounded*

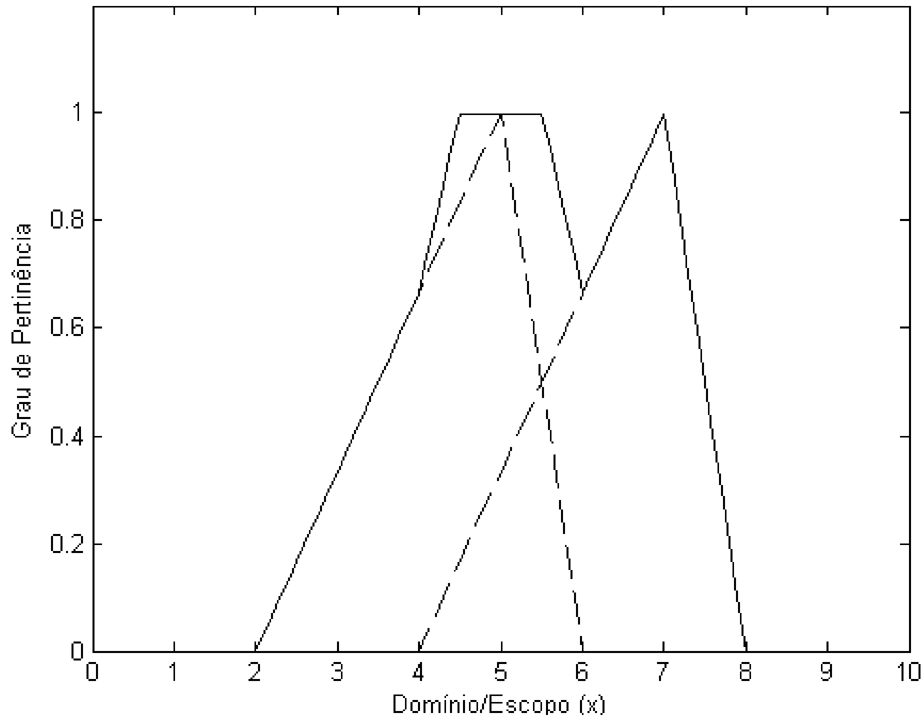
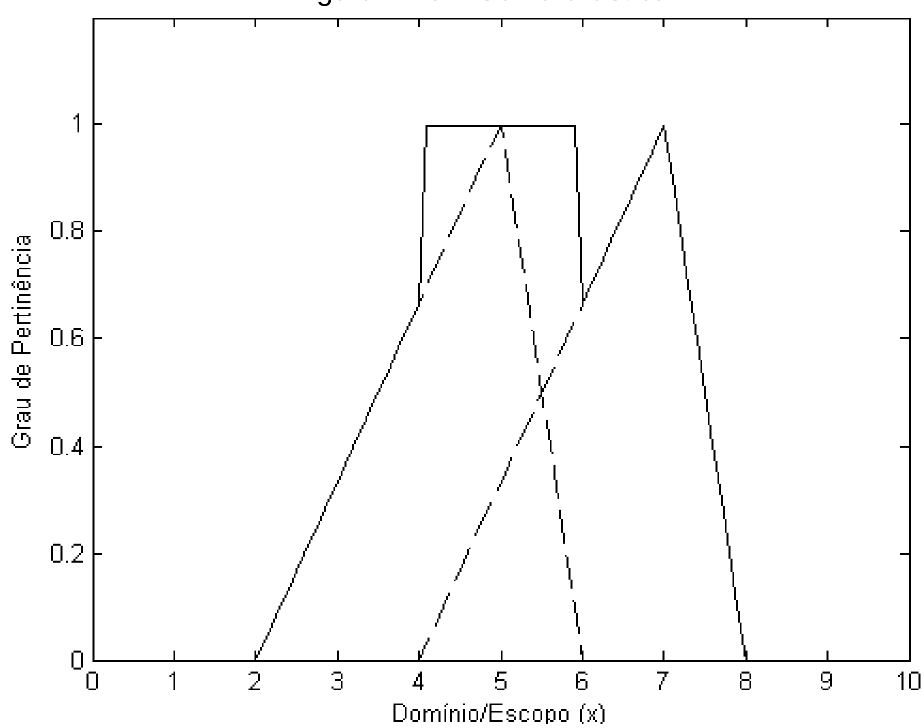


Figura 4.13 – Soma drástica



4.1.5. Intersecção Nebulosa: Norma-T

A intersecção de dois conjuntos nebulosos A e B é especificada em geral pela função $T: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, o qual agrega duas funções de pertinência, ou seja:

$$T[\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_{A \cap B}(x) \, . \tag{4.16}$$

Neste caso, o operador Norma-T deve satisfazer as seguintes propriedades:

- $T(0,0) = 0, \;\; T(\mu_A(x), 1) = T\big(1, \mu_A(x)\big) = \mu_A(x);$
- $T\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) \leq T\big(\mu_C(x), \mu_D(x)\big)$ se $\mu_A(x) \leq \mu_C(x)$ e $\mu_B(x) \leq \mu_D(x);$
- $T\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = T\big(\mu_B(x), \mu_A(x)\big);$
- $T\Big(\mu_A(x), T\big(\mu_B(x), \mu_C(x)\big)\Big) = T\Big(T\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big), \mu_C(x)\Big).$

Alguns exemplos de Norma-T são:

- Mínimo (um exemplo é apresentado na Figura 4.14 as linhas tracejadas são duas funções triangulares e a contínua é a intersecção)

$$T\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \min\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) \tag{4.17}$$

- Produto algébrico (um exemplo é apresentado na Figura 4.15 as linhas tracejadas são duas funções triangulares e a contínua é a intersecção)

$$T\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = \mu_A(x)\mu_B(x) \tag{4.18}$$

- Produto *bounded* (um exemplo é apresentado na Figura 4.16 as linhas tracejadas são duas funções triangulares e a contínua é a intersecção)

$$S\big(\mu_A(x), \mu_B(x)\big) = 0 \vee (\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) \tag{4.19}$$

- Soma drástica (um exemplo é apresentado na Figura 4.17 as linhas tracejadas são duas funções triangulares e a contínua é a intersecção)

$$S(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \begin{cases} \mu_A(x), if\ \mu_B(x) = 1 \\ \mu_B(x), if\ \mu_A(x) = 1 \\ 0, if\ \mu_A(x) + \mu_B(x) < 1 \end{cases} \tag{4.20}$$

Figura 4.14 – Produto mínimo

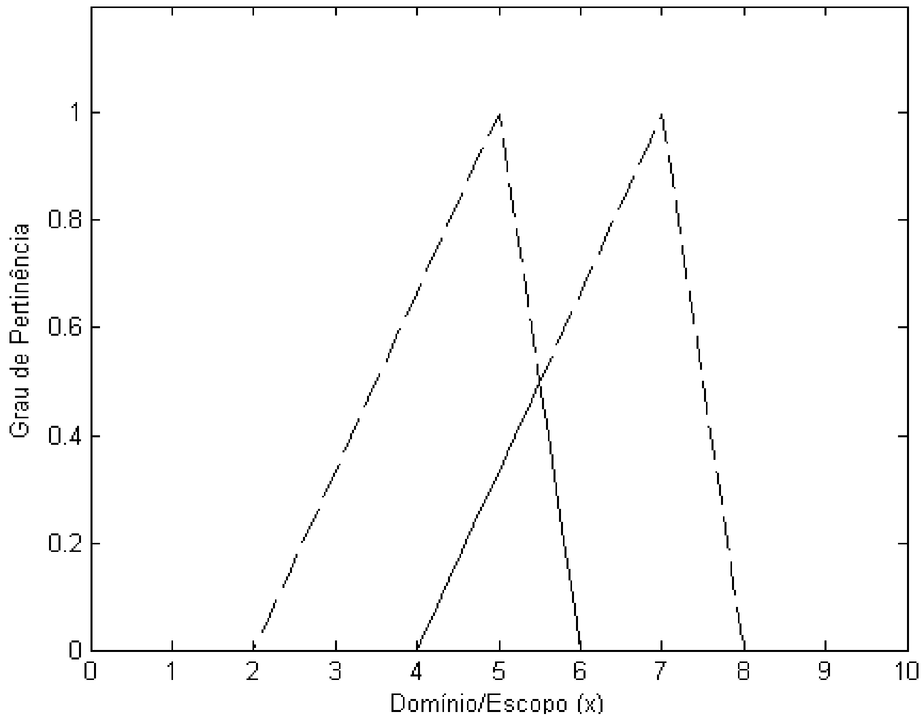


Figura 4.15 – Produto algébrico

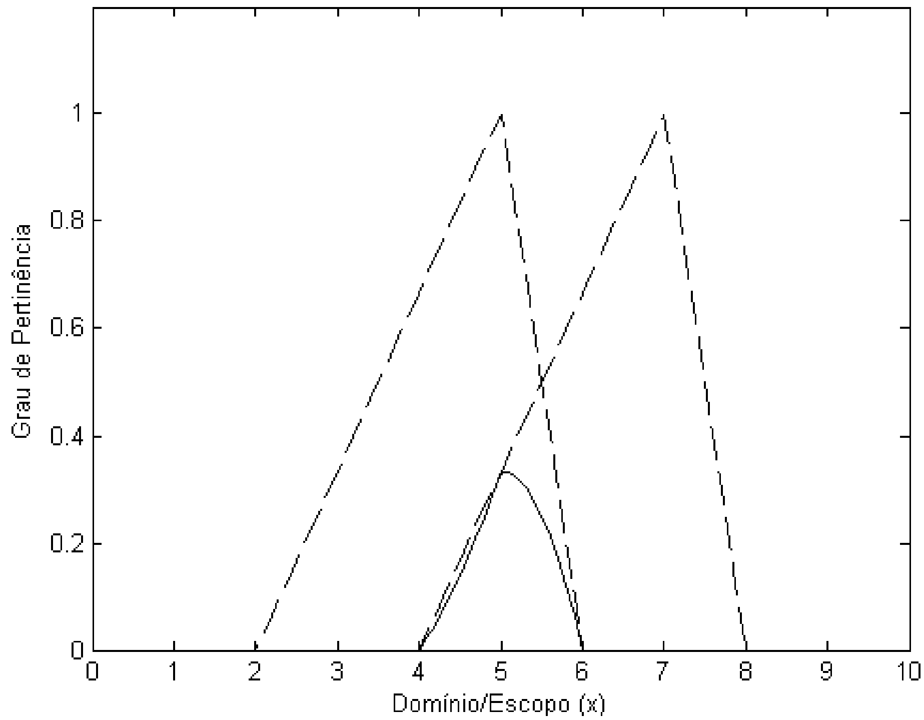


Figura 4.16 – Produto *bounded*

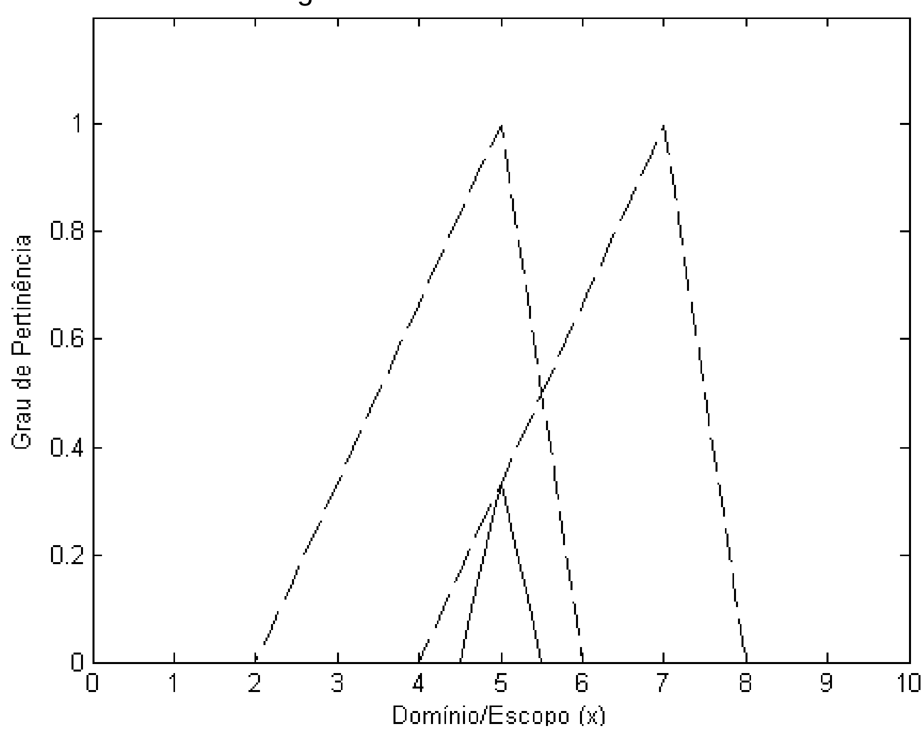
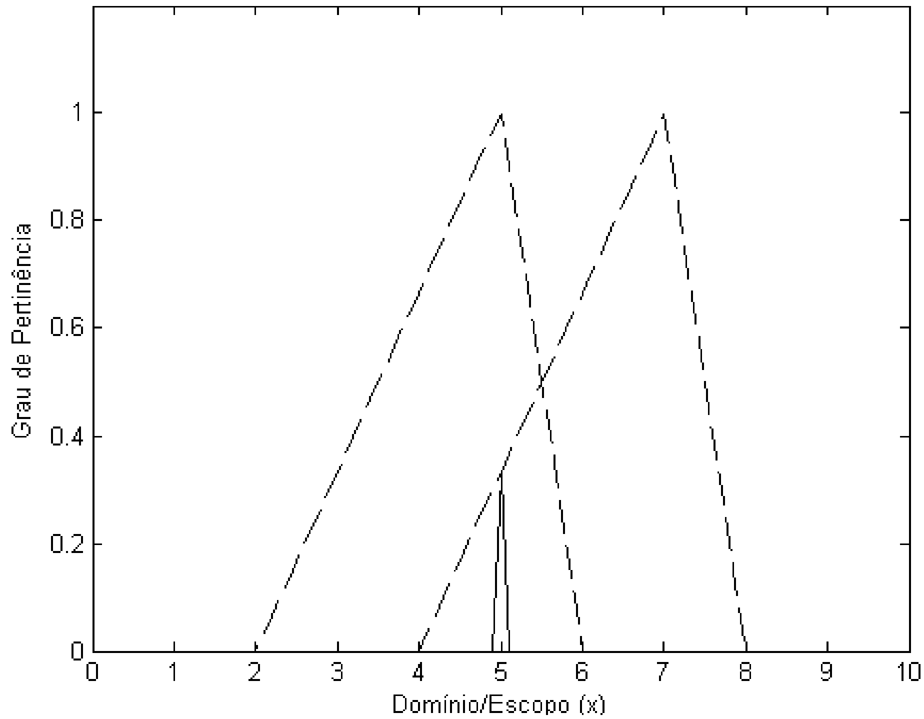


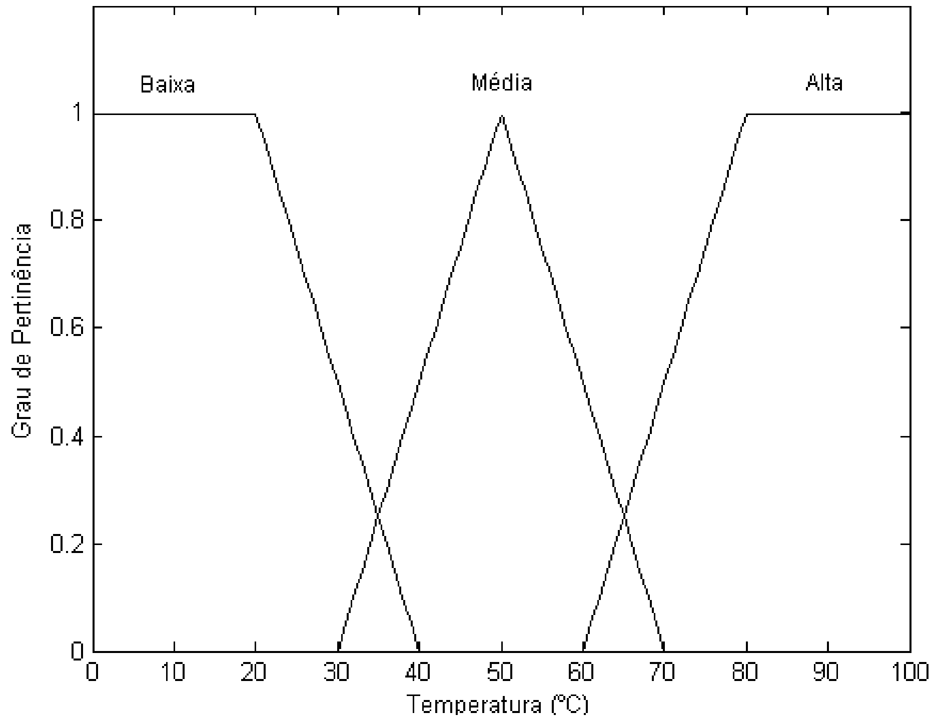
Figura 4.17 – Soma drástica



4.2. Variáveis Linguísticas

Muitas vezes as pessoas utilizam palavras para descrever valores. E as variáveis onde se utilizam palavras ou sentenças ao invés de valores numéricos são conhecidas como variáveis linguísticas. Por exemplo, a variável linguística temperatura pode assumir valores como baixa, média e alta. E estes valores são descritos pelas funções de pertinência, conforme apresentado na Figura 4.18.

Figura 4.18 – Exemplo de variáveis linguísticas



As variáveis linguísticas são caracterizadas por cinco termos: *x, T(x), X, G* e *M*, onde:

- *x* é o nome da variável linguística. Exemplo: temperatura;
- *T(x)* é o conjunto de valores linguísticos que x pode assumir. Exemplo: *T(x)*=(Baixa, Média, Alta);
- *X* é o universo de discurso da variável linguística, *x*. Exemplo: *X*=[0, 100];
- *G* é a regra sintática que gera os termos em *T(x)*. Através dos termos primários (“baixa”, “média” e “alta”) associados com os conectivos lógicos (“e”, “ou” e etc.), modificadores (“não”) e delimitadores (“muito”, “pouco”, “levemente”, “extremamente”, etc.). Exemplo: “Temperatura muito alta” e “Temperatura não alta”.
- *M* é a regra semântica que associa cada valor linguístico gerado por *G* em um conjunto nebuloso em *X*, ou seja, associa o valor linguístico obtido em *G* a uma função de pertinência que exprime o seu significado.

A quantidade de valores linguísticos (funções de pertinência) de uma variável linguística é indeterminada, porém a utilização de muitos valores linguísticos na composição de uma variável linguística não é satisfatória, pois gera informações similares e aumenta o tempo de execução do *software*.

4.3. Regras nebulosas: SE-ENTÃO

As regras nebulosas são conhecidas como implicações nebulosas ou declarações condicionais nebulosas, através da quais é realizada a modelagem linguística na forma $SE < antecedente > ENT\tilde{A}O < consequente >$, conforme a expressão

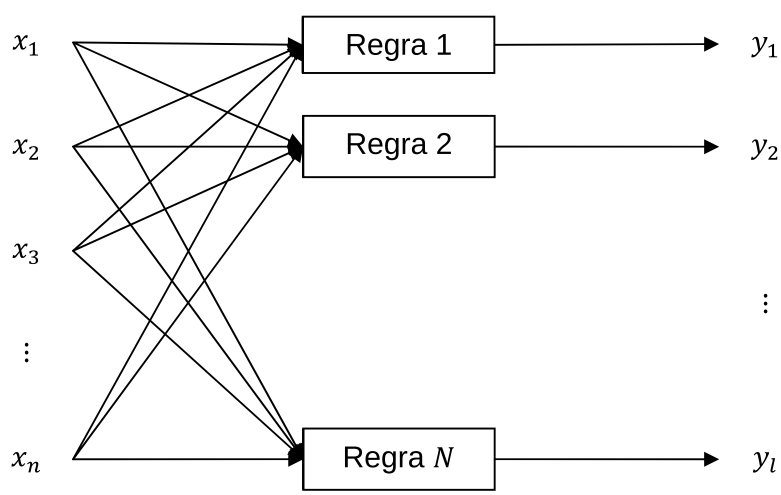
$$SE\ x \text{ é } A\ ENT\tilde{A}O\ y \text{ é } B, \tag{4.21}$$

onde x e y são as variáveis linguísticas de entrada e saída, respectivamente. A e B são valores linguísticos definidos pelo conjunto nebuloso no universo de discurso x e y, respectivamente. Assim, "x é A" é denominado antecedente ou premissa, enquanto "y é B" é denominado consequente ou conclusão. Exemplo de regra $SE - ENT\tilde{A}O$.

$$SE\ a\ temperatura \text{ é } alta\ ENT\tilde{A}O \text{ é } alta\ a\ irriga\text{ção} \tag{4.22}$$

Normalmente são utilizadas mais de uma regra para modelagem e podem ser utilizadas mais de uma entrada, conforme apresentado na Figura 4.19.

Figura 4.19 – Sistema nebuloso com n entradas e l regras



E o modelo para a montagem das regras segue o seguinte padrão:

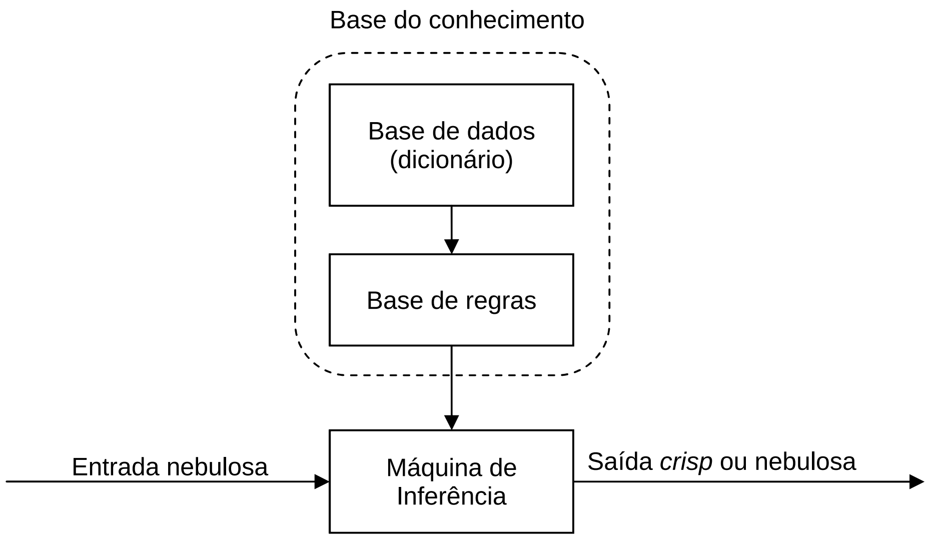
$$R^l\text{: } SE\ x_1 \text{ é } A_1^l\ e\ x_2 \text{ é } A_2^l\ e\ \cdots\ e\ x_n \text{ é } A_n^l\ ENT\tilde{A}O\ y^l \text{ é } B^l, l = 1, \cdots, N \tag{4.23}$$

onde N é o número de regras e n é o número de entradas nebulosas.

4.3.1. Máquina de Inferência Nebulosa

A estrutura básica de um modelo nebuloso consiste de três componentes conceituais: i) a base de regras, que contém um conjunto de regras nebulosas; ii) a base de dados (ou dicionário), que define as funções de pertinência vinculadas às regras nebulosas; iii) o mecanismo de inferência, que executa o procedimento de inferência de uma entrada nebulosa sobre as regras, para derivar uma saída razoável ou conclusão. Ou seja, a máquina de inferência é a responsável pela combinação do dado de entrada - já no formato de número nebuloso – com as regras nebulosas existentes, as quais, trabalhando em cima de regras de produção, descrevem o processo de tal forma que se obtenha, através de inferência, o desejado valor de saída (Klir e Yuan, 1995).

Figura 4.20 – Diagrama em blocos do sistema de inferência nebuloso

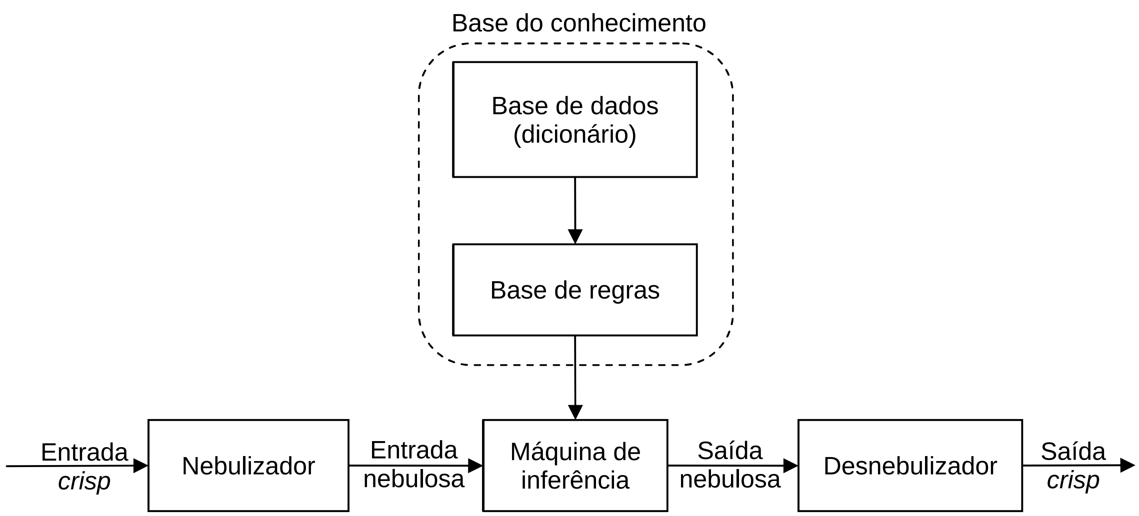


4.3.2. Modelos de Sistemas de Inferência Nebulosa

Existem vários modelos de sistemas de inferência nebulosas e entre os principais pode se destacar dois:

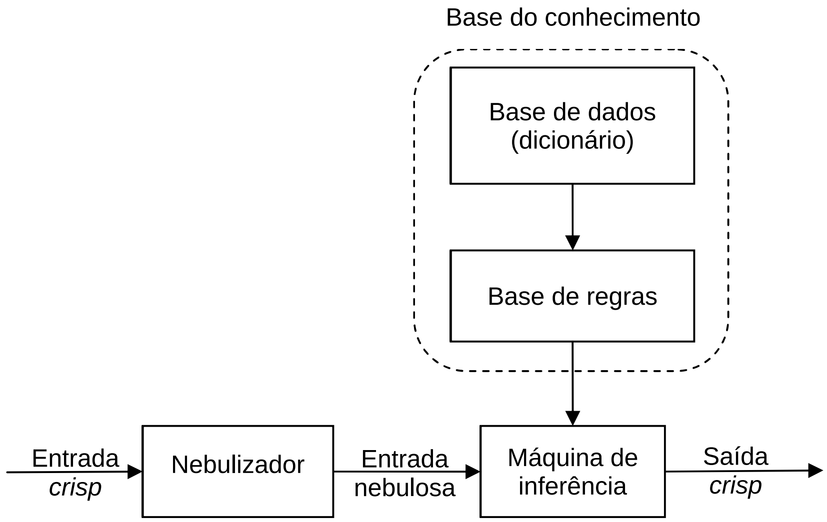
- Modelo Mamdani: é caracterizado por utilizar conjuntos nebulosos no antecedente e no consequente. A saída final é representada por um conjunto nebuloso resultante da agregação da saída inferida de cada regra, onde para obter o valor não nebuloso (*crisp*), é necessário adotar um método de desnebulização, ou seja, a transformação da saída nebulosa em não nebulosa. Os principais métodos de desnebulização são: centro de área, bissetor de área, média dos máximos, menor do máximo e maior do máximo.

Figura 4.21 – Diagrama em blocos do modelo linguístico de Mamdani



- Modelo TSK: é caracterizado por utilizar conjuntos nebulosos apenas no antecedente e o consequente é uma expressão funcional das variáveis linguísticas definidas no antecedente. A saída final é obtida pela média ponderada das saídas inferida de cada regra.

Figura 4.22 – Diagrama em blocos do modelo nebuloso TSK



4.4. Modelo Nebuloso TSK

O modelo TSK foi proposto como resultado de um esforço para se desenvolver de forma sistemática, uma abordagem para geração de regras nebulosas a partir de dados de entrada-saída (Takagi e Sugeno, 1985).

O modelo nebuloso TSK é composto de uma base de regras nebulosas que divide o espaço de entrada, denominado de universo de discurso, em regiões nebulosas descritas pelos antecedentes da regra nas quais as funções do consequente são válidas (Almeida, 2005). O consequente de primeira ordem de cada regra l é uma expressão funcional $y^l = f^l(x)$. A *i*-ésima regra do modelo TSK apresenta a seguinte forma,

$$R^l\!: SE\ x_1 \text{ é } A_1^l\ e\ x_2 \text{ é } A_2^l\ e\ \cdots\ e\ x_n \text{ é } A_n^l\ ENTÃO\ y^l = f^l(x_1, x_2, \cdots x_n), l = 1, \cdots, N, \quad (4.24)$$

onde N é o tamanho da base de regras, A é o valor linguístico definido pelo conjunto nebuloso no universo de discurso x e o número de variáveis linguísticas (variáveis de entrada) é n. Enquanto $y = f(x)$ é uma função linear polinomial, tal que

$$f^l(x_1, x_2, \cdots x_n) = c_0^l + c_1^l . x_1^l + c_2^l . x_2^l + c_n^l . x_n^l . \quad (4.25)$$

cujos regressores são representados pela letra c.

O grau de ativação da *i*-ésima regra é a intersecção de suas funções de pertinência,

$$\mu_l(x) = \mu_1^l(x_1) \wedge \mu_2^l(x_2) \wedge \mu_3^l(x_3) = \prod_{i=1}^{n} \mu_i^l\,(x). \tag{4.26}$$

O grau de ativação normalizado é:

$$v_l(x) = \frac{\mu_l(x)}{\sum_{i=1}^{N} \mu_i(x)}, \tag{4.27}$$

e esta normalização implica que:

$$\sum_{l=1}^{N} v_l(x) = 1. \tag{4.28}$$

Portanto a resposta do modelo é a média ponderada dos consequentes das regras:

$$y = \sum_{l=1}^{N} v_l(x) y_l(c^l, x^l). \tag{4.29}$$

Assim,

$$y = \sum_{l=1}^{N} v_l\left(c_0^l + c_1^l x_1^l + c_2^l x_2^l + c_n^l x_n^l\right) \tag{4.30}$$

ou

$$y = \sum_{l=1}^{N} \left(c_0^l v_l + c_1^l x_1^l v_l + c_2^l x_2^l v_l + c_n^l x_n^l v_l\right)$$

ou

$$y = c \cdot X.$$

Com o conjunto de dados de entrada e saída $x_{1j}, x_{2j}, \cdots, x_{nj} \rightarrow y_j, j = 1, \cdots, m$, podemos obter os parâmetros do consequente através MQ. Onde tem-se uma matriz X com o número de colunas igual à $(n+1) \cdot N$ e o número de linhas é igual à m, tal que

$$X = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{N1} & x_{11}v_{11} & \cdots & x_{11}v_{N1} & \cdots & x_{n1}v_{11} & \cdots & x_{n1}v_{N1} \\ \vdots & & & & \ddots & & & & & \vdots \\ v_{1m} & \cdots & v_{Nm} & x_{1m}v_{1m} & \cdots & x_{1m}v_{Nm} & \cdots & x_{nm}v_{1m} & \cdots & x_{nm}v_{Nm} \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

E os regressores formam o seguinte vetor:

$$c = [c_0^1 \quad \cdots \quad c_n^N \quad x_1c_0^1 \quad \cdots \quad x_1c_n^N \quad x_2c_0^1 \quad \cdots \quad x_2c_n^N \quad x_nc_0^1 \quad \cdots \quad x_nc_n^N]^T. \quad (4.32)$$

Então o modelo é:

$$y = \sum_{l=1}^{N} v_l(x) y_l(c^l, x^l). \quad (4.33)$$

4.5. Agrupamentos de Dados

O agrupamento de dados classifica os dados de acordo com a sua similaridade, separando-os em grupos, chamados *clusters* (grupos). O agrupamento de dados é utilizado para tarefas de classificação de dados, reconhecimento de padrões, redução de modelos e otimização. No projeto em questão o agrupamento de dados é utilizado para obtenção dos centros das funções de pertinência, onde a análise dos dados é quantitativa (numérica).

4.5.1. Dados

Os dados são tipicamente observados, onde a observação consiste de *n* variáveis observadas, agrupado em um vetor com *n*-dimensões $x_k = [x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{kn}]^T, x_k \in R^n$. Um conjunto de *N* observações é descrito por $X = \{x_k | k = 1, 2, \cdots, N\}$ e é representado por uma matriz $N \times n$, tal que

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{Nn} \end{bmatrix}. \tag{4.34}$$

Então X é a matrix de dados, onde as linhas de X são a amostragem de tempo e as colunas são as variáveis do processo (posição, velocidade, temperatura, etc.), (adaptado de Balakso *et al.*, 2005).

4.5.2. Agrupamento Nebuloso

Os *clusters* são subconjuntos que pode ser definidos como um grupo de objetos que são mais similares para uns que para outros. Onde a similaridade pode ser definida como a distância normalizada, entre os vetores ou algum ponto do *cluster*. E estes subconjuntos podem ser classificados como nebuloso ou *crisp*. Os conjuntos *crisp* são baseados na teoria clássica de conjuntos, onde um objeto faz parte ou não de um cluster. Porém o nebuloso permite que os objetos pertençam a vários grupos simultaneamente, mas com diferentes graus de pertinência entre 0 e 1. O número de subconjuntos é indicado pela letra *c*.

A estrutura da matriz de agrupamento nebuloso $U = [\mu_{ik}]$:

$$U = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{1c} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2c} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{N1} & \mu_{N2} & \cdots & \mu_{Nc} \end{bmatrix}, \tag{4.35}$$

As condições para uma matriz $U = [\mu_{ik}]$, $N \times c$ representar um agrupamento nebuloso são dadas por:

$$\begin{gathered} \mu_{ik} \in [0,1], 1 \leq i \leq N, 1 \leq k \leq c \\ \sum_{k=1}^{c} \mu_{ik} = 1, 1 \leq i \leq N \\ 0 < \sum_{i=1}^{N} \mu_{ik} < N, 1 \leq k \leq c. \end{gathered} \tag{4.36}$$

4.5.3. Algoritmo C-Médias Nebuloso (FCM)

Os algoritmos de agrupamento nebulosos permitem um grau de associação para cada elemento em cada grupo. Um elemento pertence a diferentes grupos, com diferentes graus de associação, fornecendo informações detalhadas sobre a estrutura de dados.

O primeiro algoritmo de agrupamento nebuloso, desenvolvido em 1969 por Ruspini, é uma extensão do algoritmo *C-Means Rígido* (HCM), chamado de ISODATA, proposto por Ball e Hall (1965). O HCM é um dos mais populares métodos de agrupamentos. Ruspini (1969) introduziu a partição nebulosa para descrever estruturas de grupos de um conjunto de dados e sugeriu um algoritmo computacional que determina uma partição nebulosa. Dunn (1973), generalizou o procedimento de agrupamentos de variância mínima para a técnica de agrupamentos nebuloso do HCM. Bezdek (1981) generalizou a aproximação de Dunn criando assim o algoritmo *Fuzzy C-Means* (FCM) (Almeida, 2005).

O algoritmo FCM procura agrupar os dados criando uma partição em conjunto de dados, de modo que se minimize a seguinte função objetivo:

$$J(X,U,V) = \sum_{i=1}^{c} \sum_{K=1}^{N} (\mu_{ik})^m {d_{ik}}^2, \tag{4.37}$$

onde X é o conjunto de dados, U é a matriz de pertinência e c é o número de grupos; $d_{ik} = \|x_k - v_i\|$ onde v_i é o centro da *i*-ésima classe de grupos; μ_{ik} denota o grau de pertinência de x_k na classe i; e m é um valor que modula o quão nebulosa é a partição obtida.

Este algoritmo adota a distância Euclidiana como medida de similaridade entre o dado e o centro do grupo. O desempenho do FCM é favorecido quando os conjuntos de dados são separáveis ou quando os grupos têm aproximadamente os mesmos tamanhos e formas, porém ele não correlaciona os valores dos atributos entre os dados. O algoritmo FCM nebuloso pode ser sintetizado pelas seguintes etapas:

1. Escolher o número de grupos $c, 2 \leq c \leq n$, o parâmetro $m > 1$, o critério de parada $\varepsilon > 0$, o número máximo de interações l_{max}. Iniciar U^0 com uma distribuição uniforme e o contador $l = 1$;

2. Calcular os c centros das classes v_i^l $i = 1, \cdots, c$ com U^{l}:

$$v_i^l = \frac{\sum_{K=1}^{n} \left[u_{Ki}^{l-1}\right]^m x_K}{\sum_{K=1}^{n} [u_{Ki}^{l-1}]^m}, 1 \leq i \leq c \tag{4.38}$$

3. Atualizar a matriz de pertinência para $1 \leq i \leq c$, $1 \leq k \leq n$. Se $d_{ik} > 0$ então

$$u_{iK}^l = \left[\sum_{J=1}^{c} \left(\frac{d_{Ki}}{d_{KJ}}\right)^{\frac{1}{m-1}}\right]^{-1} \tag{4.39}$$

Senão $d_{ik} = 0$ para $i \in I \leq \mathrm{c}$, então

- Definir u_{ik}^l para $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ com um número real positivo que satisfaça a condição: $\sum u_{ik}^l = 1$ deste modo: $u_{ik}^l = 1 - \sum u_{ik}^l$;
- Definir $u_{ik}^l = 0$ para $i \in c - I$;

4. Calcular $\Delta = \|U^l - U^{l-1}\| = max_{ji}\left|u_{ji}^l - u_{ji}^{l-1}\right|, j = 1, \cdots, n, i = 1, \cdots c$;

5. Se $\Delta > \varepsilon$ e $l < l_{max}$, $l = l + 1$ e retornar para etapa 2 senão termina.

4.6. Algoritmo de Otimização

Os algoritmos evolutivos (AEs), metodologias da área computação evolucionária ou evolutiva, não são algoritmos computacionais em seu significado usual, mas formam uma classe de métodos regidos por princípios similares. Estes princípios oriundos do “mundo biológico” são baseados na teoria da evolução Darwiniana. Nesta teoria que a sobrevivência do organismo mais apto em um ambiente sob mudanças é proposta. Assim, os algoritmos evolutivos tentam abstrair e imitar alguns dos mecanismos evolutivos à resolução de problemas que requerem adaptação, busca e otimização. A evolução diferencial (ED) é um AE eficiente e simples para otimização de funções multi-modais, proposto por Storn e Price (1995). Os parâmetros da função a ser otimizada são codificados com variáveis representadas em ponto flutuante na população (representação fenotípica) e são realizadas mutações simples com uma operação aritmética simples. Storn (1997) relatou resultados impressionantes que mostram que a ED supera outros AEs em diversos problemas de otimização não-lineares. No projeto em questão o agrupamento de dados é utilizado para obtenção da largura das funções de pertinência gaussianas, parâmetro σ, este presente na equação (4.5).

4.6.1. Evolução Diferencial

Baseado na teoria de Darwin, a evolução diferencial gera novas populações (os indivíduos são vetores e eles são compostos pelo mesmo número de parâmetros da função custo, Tabela 4.1) através da mutação e do cruzamento e faz a seleção do melhor indivíduo, o qual otimiza uma função custo. Assim ela é divida em três procedimentos principais: mutação, cruzamento e seleção.

Tabela 4.1 – População na evolução diferencial

Indivíduo	P_1	P_2	$\cdots$	P_n
X_1	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
X_2	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
X_k	x_1	x_2	$\cdots$	x_n

onde X_i é o *i*-ésimo indivíduo da população de tamanho k.

4.6.2. Mutação

A mutação e o cruzamento são responsáveis, pela diversificação da população. Na mutação são escolhidos três indivíduos, sendo um destes o indivíduo principal, o qual será modificado através da mutação. Para que isso ocorra é realizada a diferença entre os outros dois, essa diferença é multiplicada por um peso de mutação e adicionada ao genitor principal. Matematicamente,

$$U = X_1 + F(X_2 - X_3), \tag{4.40}$$

$$U = X_{melhor} + F(X_2 - X_3), \tag{4.41}$$

onde o indivíduo principal pode ser o melhor indivíduo X_{melhor} ou ser um escolhido aleatoriamente X_1, dependendo da estratégia utilizada. Os outros dois indivíduos são X_2 e X_3. O F é a taxa de mutação que é um valor real recomendado no intervalo entre $[0, 2]$. E U é o indivíduo principal modificado pela mutação.

Se o número de indivíduos da população é grande, a diversidade da população pode ser melhorada utilizando duas diferenças ponderadas, em vez de uma, para modificar o vetor principal:

$$U = X_1 + F(X_2 - X_3 + X_4 - X_5) \tag{4.42}$$

e

$$U = X_{melhor} + F(X_2 - X_3 + X_4 - X_5). \tag{4.43}$$

4.6.3. Cruzamento

O cruzamento é constituído por dois indivíduos sendo um o indivíduo que sofreu a mutação, o U, e outro escolhido com distribuição uniforme (vetor alvo).
A probabilidade do novo indivíduo, que será gerado a partir do cruzamento (o cruzamento pode ser binomial ou exponencial), herdar os valores dos genitores (pais) é representada por CR que é um valor entre $[0, 1]$.

4.6.4. Seleção

No caso do novo vetor gerado, após o cruzamento, for mais apto (apresentar uma aptidão melhor) que o vetor alvo, o novo vetor o substitui.

4.6.5. Estratégias

Há dez estratégias clássicas que podem ser utilizadas na ED cada um delas alcança um melhor resultado dependendo do tipo do problema a que são aplicadas. Elas são representadas pela seguinte nomenclatura: $ED/a/b/c$.

ED – abreviatura de Evolução Diferencial.

a – indica a forma que é selecionada os indivíduos para sofrer mutação, pode ser "*rand*", aleatório (*random*), ou "melhor", o mais apto (*best*).

b – indica o número de diferenças ponderas para a perturbação, que pode ser uma ou duas diferenças.

c – indica o tipo de cruzamento, que pode ser binomial ou exponencial.

Tabela 4.2 – Estratégias clássicas de ED

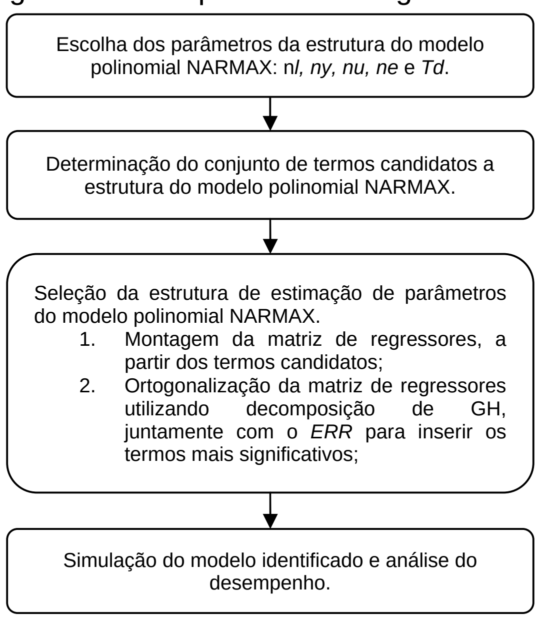
Estratégia	Mutação	Nomenclatura
1	$U = X_1 + F(X_2 - X_3)$	$ED/rand/1/bin$
2	$U = X_{melhor} + F(X_2 - X_3)$	$ED/melhor/1/bin$
3	$U = X_1 + F(X_2 - X_3 + X_4 - X_5)$	$ED/rand/2/bin$
4	$U = X_{melhor} + F(X_2 - X_3 + X_4 - X_5)$	$ED/melhor/2/bin$
5	$U = X_{antigo} + F\left(X_{melhor} - X_{antigo} + X_1 - X_2\right)$	$ED/rand - melhor/2/bin$
6	$U = X_1 + F(X_2 - X_3)$	$ED/rand/1/exp$
7	$U = X_{melhor} + F(X_2 - X_3)$	$ED/melhor/1/exp$
8	$U = X_1 + F(X_2 - X_3 + X_4 - X_5)$	$ED/rand/2/exp$
9	$U = X_{melhor} + F(X_2 - X_3 + X_4 - X_5)$	$ED/melhor/2/exp$
10	$U = X_{antigo} + F\left(X_{melhor} - X_{antigo} + X_1 - X_2\right)$	$ED/rand - melhor/2/exp$

5. DESCRIÇÃO DO ESTUDO DE CASO E ANÁLISE DE RESULTADOS

Esta dissertação tem pretensão de responder à seguinte questão: Com qual qualidade é possível prever o funcionamento ou a tendência de uma variável de um sistema utilizando apenas seus dados, através do método polinomial NARMAX e nebuloso do tipo TSK? Assim será testada a aplicabilidade do método NARMAX e nebuloso na modelagem matemática de um sistema eletro-mecânico denominado *twin rotor*, para predição de 1 e *N* passos à frente.

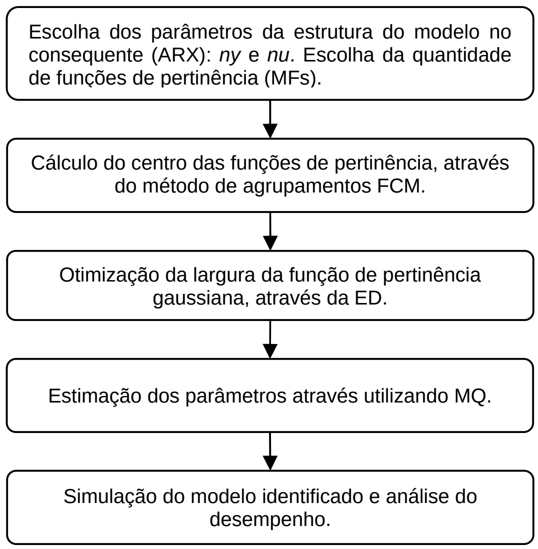
Na modelagem com o método polinomial NARMAX será utilizado o estimador MQO com a decomposição GH e será calculado o *ERR*, para somente inserir os termos mais significativos ao modelo. A utilização da técnica de MQO em vez de MQ diminui o número de caso de mau condicionamento numérico na estimação dos parâmetros dos regressores e a técnica do *ERR* diminuiu o tamanho do modelo matemático obtido.

Figura 5.1 – Etapas da modelagem NARMAX



A modelagem com o método nebuloso TSK utiliza o modelo ARX no consequente de 1ª ordem com estimador de MQ, a técnica de agrupamento FCM para encontrar os centros das funções de pertinência e a técnica de otimização ED para determinar a largura das funções de pertinência do tipo gaussiana. A inclusão das técnicas de agrupamento e a de otimização melhoram o desempenho da modelagem, pois os valores dos centros e das larguras das funções de pertinência do tipo gaussiana teriam que ser escolhidos empiricamente e com estas técnicas são selecionados valores com melhor desempenho. Porém o tempo de ciclo do algoritmo de modelagem aumentou principalmente pela técnica de otimização ED.

Figura 5.2 – Etapas da modelagem nebulosa do tipo TSK



A modelagem do *twin rotor* é apropriada se um critério de erro definido previamente pelo projetista está entre valores admissíveis às necessidades do projeto. Neste estudo foram escolhidos dois critérios: o coeficiente de correlação múltipla (R^2) e o erro quadrático médio (*Mean Squared Error,* MSE). Os critérios são regidos pelas respectivas equações

$$R^2 = \frac{\sum_{k=1}^{N}[y(k) - \hat{y}(k)]^2}{\sum_{k=1}^{N}[y(k) - \bar{y}]^2} \qquad (5.44)$$

e

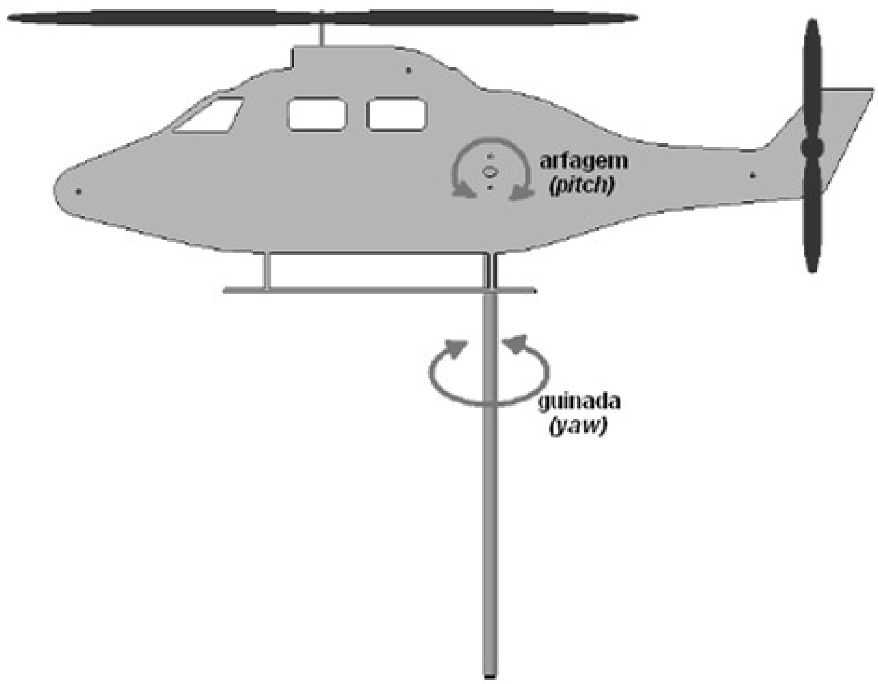
$$MSE = \frac{\sum_{k=1}^{N}[y(k) - \hat{y}(k)]^2}{N}, \qquad (5.45)$$

onde *N* é o número de amostras, $y(k)$ é saída real do processo, $\hat{y}(k)$ é a saída estimada pelo modelo e $\bar{y}$ é a média das medidas do sistema. O R^2 pode assumir valores no intervalo [0, 1], onde 1 indica que o modelo é exatamente igual ao processo real (100%) e 0 indica que o modelo é completamente diferente ao processo real (0%), sendo um índice de fácil interpretação representando a porcentagem de aproximação entre o modelo estimado e o real, assim ele será o índice utilizado para verificação do melhor modelo. No MSE quanto menor o valor, maior é a aproximação com o sistema real, ou seja, quanto menor o valor do MSE menor será o erro e vice versa, este índice será utilizado para a modelagem devido a sua maior robustez em comparação ao R^2, o R^2 apresenta mau condicionamento numérico se o erro for grande. Assim, foi considerado um bom resultado para previsão de 1 passo à frente é com $R^2 > 0{,}97$ e para *N* passos à frente é com $R^2 > 0{,}9$.

5.1. Processo twin rotor

O sistema eletromecânico que será modelado é conhecido como *twin rotor. O twin rotor* possui uma dinâmica semelhante aos movimentos de rotação e inclinação de um helicóptero. Ele é constituído por um *cockpit* no formato de um helicóptero, duas hélices para movimentações (horizontal e vertical), um motor para rotacionar cada hélice e uma haste vertical para suporte. Por estar fixado em uma haste ele possui dois graus de liberdade, conforme apresentado na Figura 5.3, o que também gera uma dinâmica diferente em relação a um helicóptero tradicional. Em um helicóptero tradicional o eixo de rotação coincide com o eixo da hélice principal, no *twin rotor* o eixo de rotação coincide com o eixo da haste de suporte, assim, para o *twin rotor* girar para os dois lados é necessária a inversão do sentido de rotação do rotor (hélice responsável pela rotação).

Figura 5.3 – *Twin rotor* com dois graus de liberdade



O processo possui duas variáveis de entradas e duas de saídas. As variáveis de saídas são as posições angulares de rotação (guinada, do inglês *yaw*) y_1 e de inclinação (arfagem, do inglês *pitch*) y_2. E estas posições são medidas através de sensores de posição angular (potenciômetros). As variáveis de entradas correspondem às tensões aplicadas sobre os motores (u_1 e u_2), que variam as rotações dos mesmos e assim influenciam na posição do *twin rotor*, conforme apresentado na Figura 5.4.

Figura 5.4 – As variáveis de entrada e saída do *twin rotor*

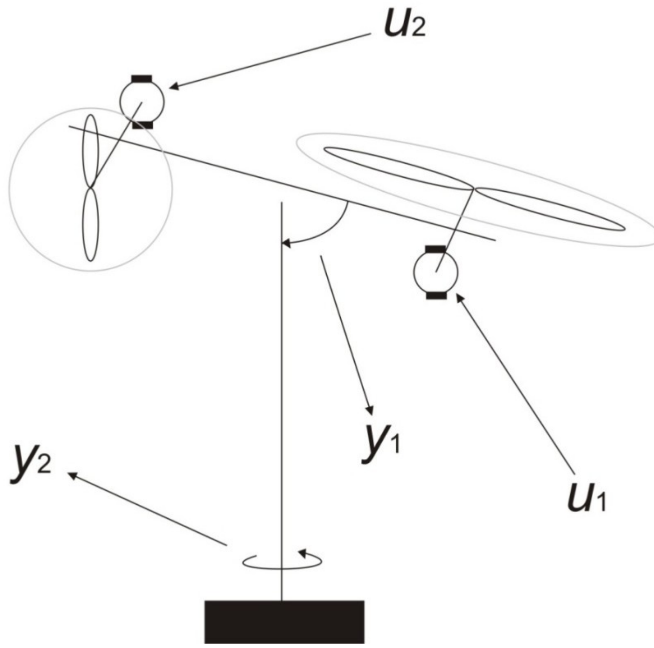
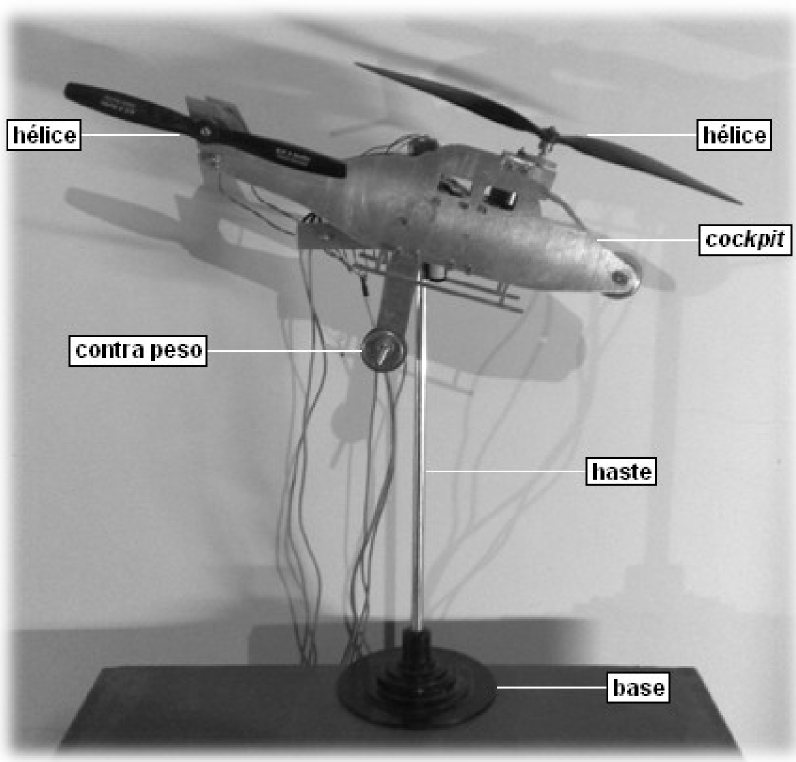


Figura 5.5 – Foto do *twin rotor*

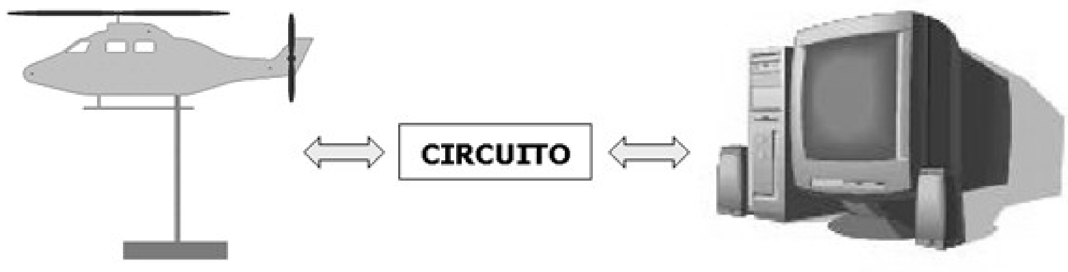


O *twin rotor* apresenta não linearidades de alta ordem e uma significativa influência entre os movimentos do eixo de inclinação e de rotação (acoplamento)

(Feedback, 2010), mas para a identificação será considerado que um movimento não influencia no outro, são desacoplados, será utilizada uma identificação SISO (*Single Input Single Output*).

O processo é integrado ao computador através de um circuito eletrônico, o qual tem como base três componentes principais o microcontrolador PIC16F877, o MAX232 e o L298.

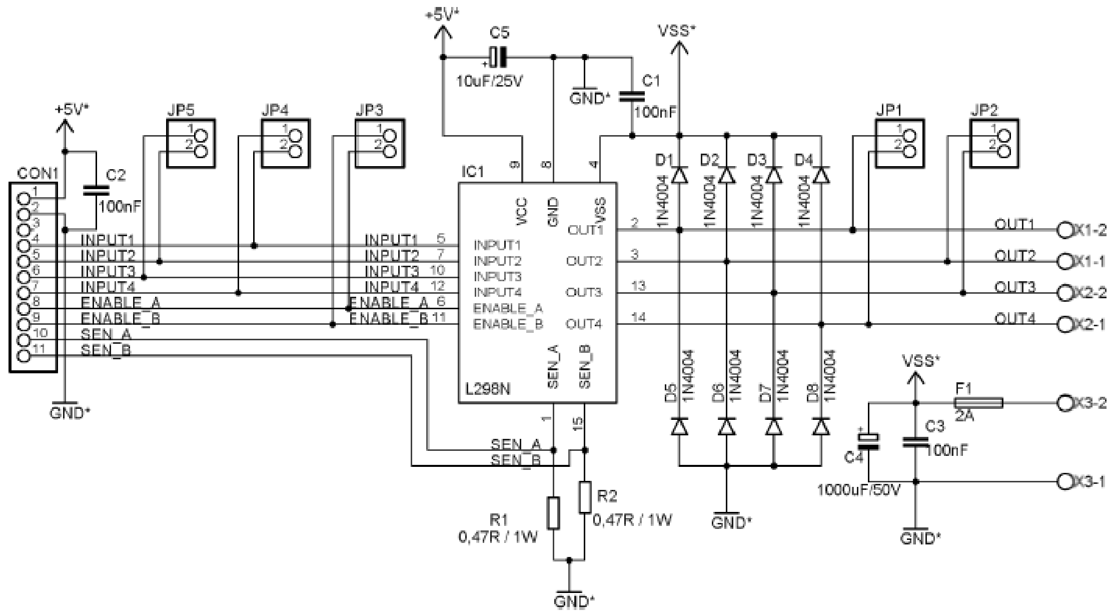
Figura 5.6 – Integração *twin rotor* e um microcomputador



O L298 é um circuito integrado (CI) que possui duas “pontes H”[2] com corrente máxima de 2A cada uma. Como os motores do Twin Rotor possuem um consumo de corrente superior a 2A foram utilizadas as duas pontes H do mesmo CI para um único motor, consequentemente foram utilizados dois CI’s, um para cada hélice. Para isto, foi utilizada a placa HEXKit L298 da empresa HEXBits, conforme mostrado na Figura 5.7.

[2] Ponte H é um circuito clássico utilizado para o controle do sentido de rotação de um motor e para ganho de potência.

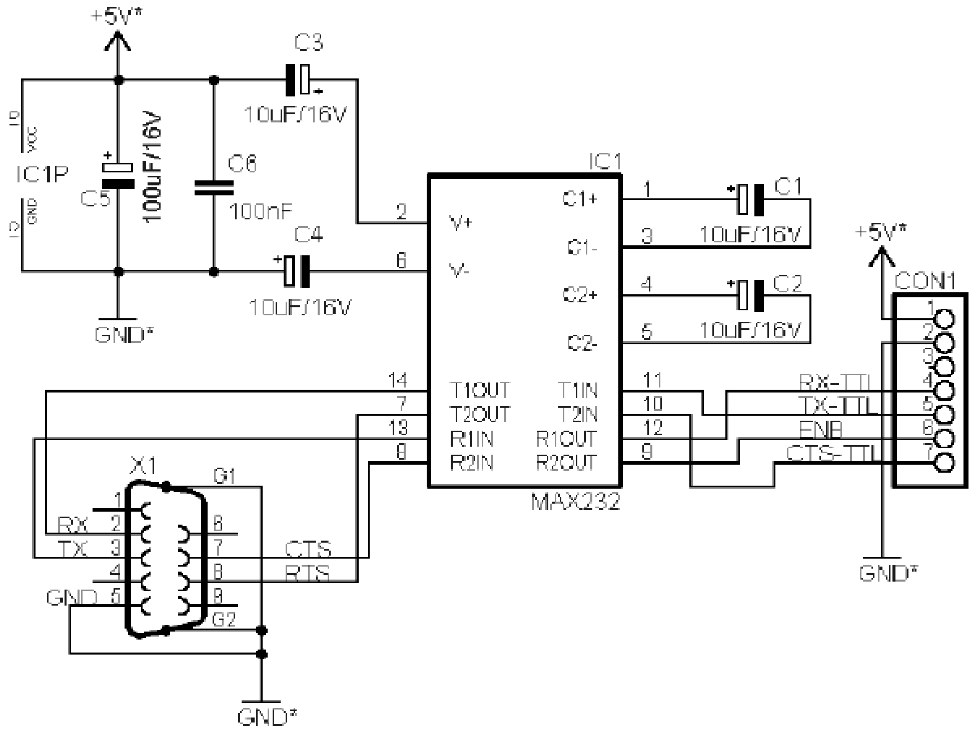
Figura 5.7 – Circuito do CI L298



FONTE: Hexbits, 2010.

O MAX232 é um CI que é responsável por converter o sinal TTL padrão microcontrolador para RS232 padrão microcomputadores. Para isto, foi utilizada a placa HEXKit 232 da empresa HEXBits, conforme mostra a Figura 5.8.

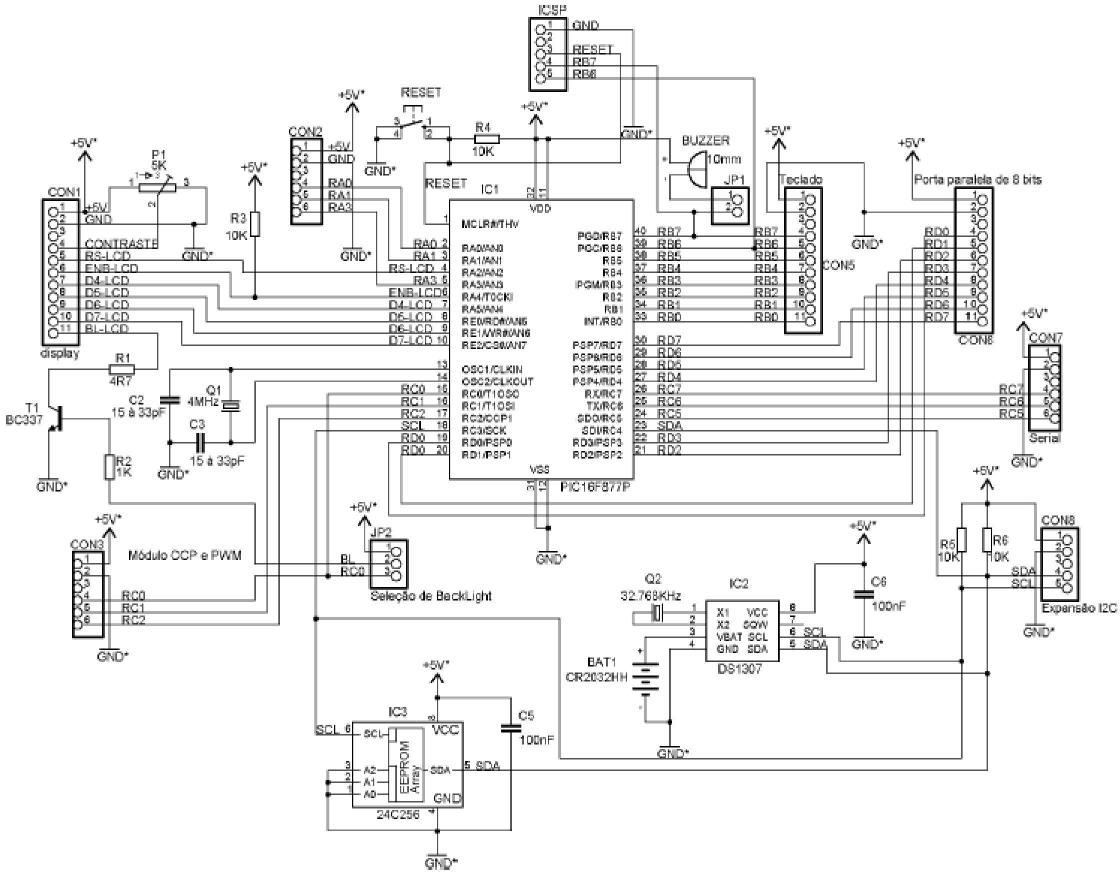
Figura 5.8 – Circuito do CI MAX232



FONTE: Hexbits, 2010.

O microcontrolador PIC16F877 é o principal componente da integração entre o processo e o microcomputador, nele é realizado uma programação que será responsável pelo processamento dos dados recebidos do microcomputador, aquisição dos sinais analógicos de posição do processo e conversão dos mesmos para digitais, geração dos sinais digitais e os sinais modulados pela largura dos pulsos (PWMs, do inglês *Pulse Width Modulation*) para controle dos motores e envio destas informações para o microcomputador. Para isto, foi utilizada a placa HEXKit F877Plus da empresa HEXBits, conforme apresentado na Figura 5.9.

Figura 5.9 – Circuito do PICF877



FONTE: Hexbits, 2010.

Para gerar o *clock* do microcontrolador foi utilizado um cristal de 4 MHz e o conversor analógico digital (A/D) do PIC foi configurado com o *clock* interno. O A/D foi configurado para 10 bits. Com isso tem-se que cada bit da conversão poderá ter uma resolução aproximadamente de 4,88 mV, cálculo este feito dividindo o valor máximo de tensão do conversor A/D que é de 5 V pela sua precisão que é de 2^{10} menos 1, $\frac{5}{2^{10}-1}$, (Pereira, 2005). O PWM foi configurado para uma frequência de 1,004KHz.

O *software* utilizado para gerenciamento do processo e armazenamento dos dados é o Matlab da MathWorks e o microcontrolador foi programado em linguagem C utilizando o programa PCW C Compiler.

O *twin rotor* foi confeccionado pelo autor para o seu projeto de final do curso de Engenharia de Controle e Automação, porém sofreu algumas melhorias de hardware e de software para o estudo de caso deste mestrado em questão.

5.2. Sinal de Excitação Senoidal

Foi aplicado no *twin totor* um sinal de excitação do tipo senoidal tanto para a inclinação quanto para a rotação. A faixa de tensão enviada para o motor responsável pela inclinação foi de 7,3 a 10 V e para o de rotação foi -4 a -9 V e +4 a +9 V (valores definidos através de testes), o motor de rotação possui duas faixas de trabalho, pois ele é responsável pela rotação para os dois lados, ambos os sinais podem ser observados na Figura 5.10 e na Figura 5.11, respectivamente.

Figura 5.10 – Tensão aplicado ao eixo de inclinação usando o sinal senoidal

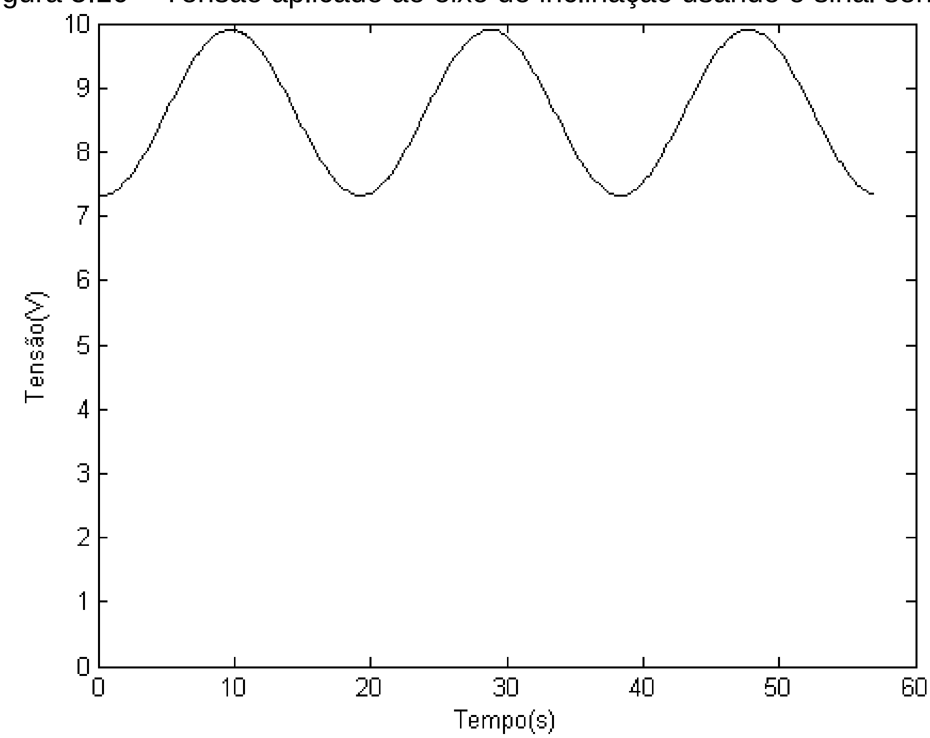
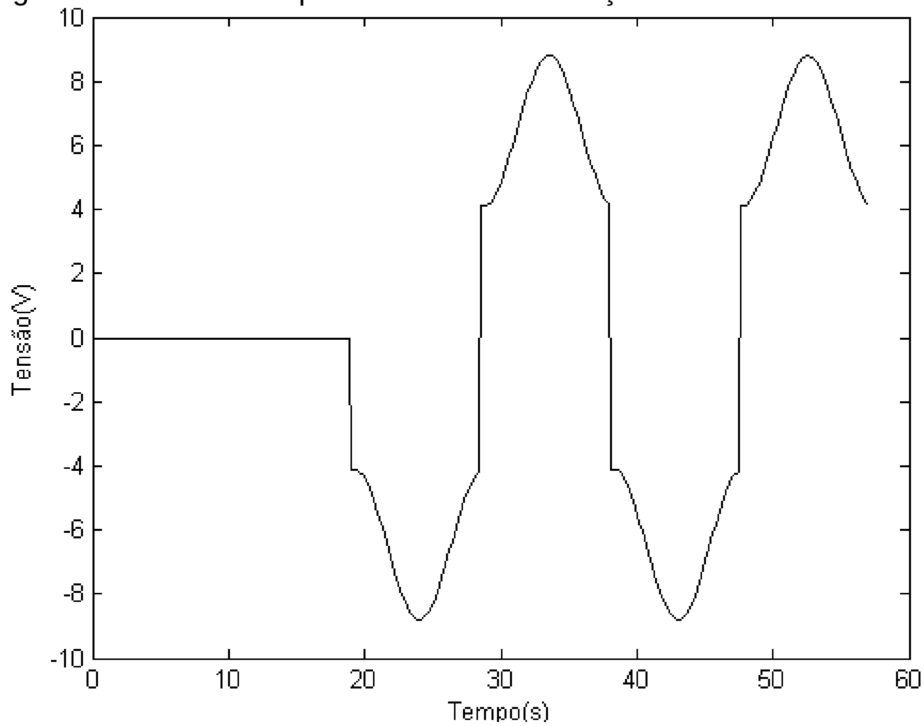


Figura 5.11 – Tensão aplicado ao eixo de rotação usando o sinal senoidal



Estes sinais senoidais foram aplicados por aproximadamente 57 segundos, onde foram coletadas 377 amostras das posições angulares do *Twin Rotor*, o período de amostragem utilizado é de 0,15 segundos (devido a limitações da comunicação), conforme apresentados na Figura 5.12 e na Figura 5.13.

Figura 5.12 – Posição do eixo de inclinação do sinal de excitação senoidal

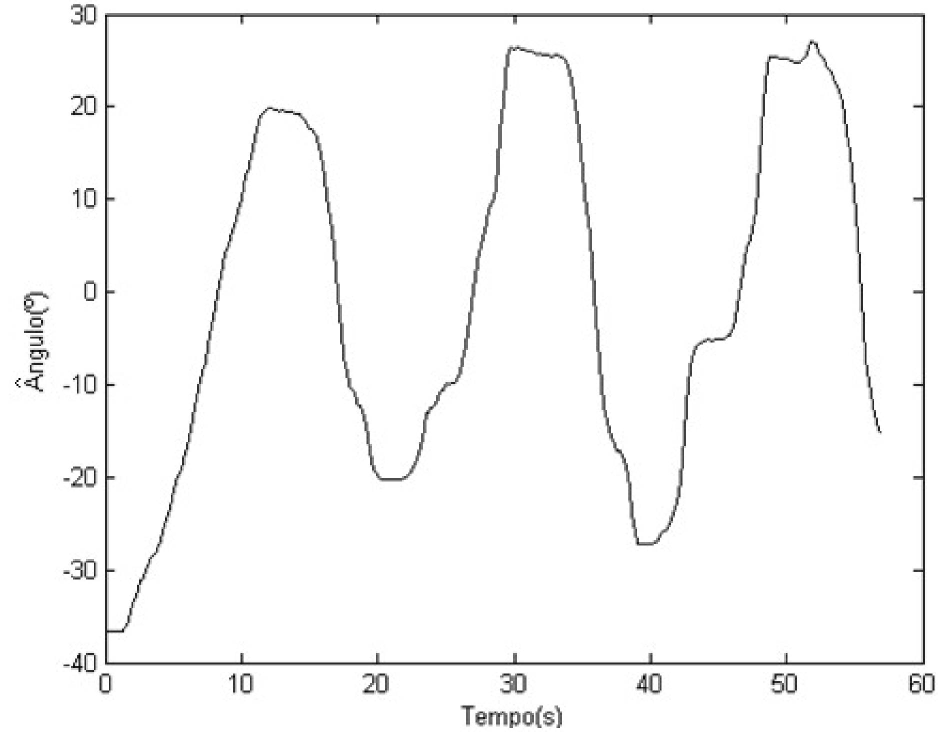
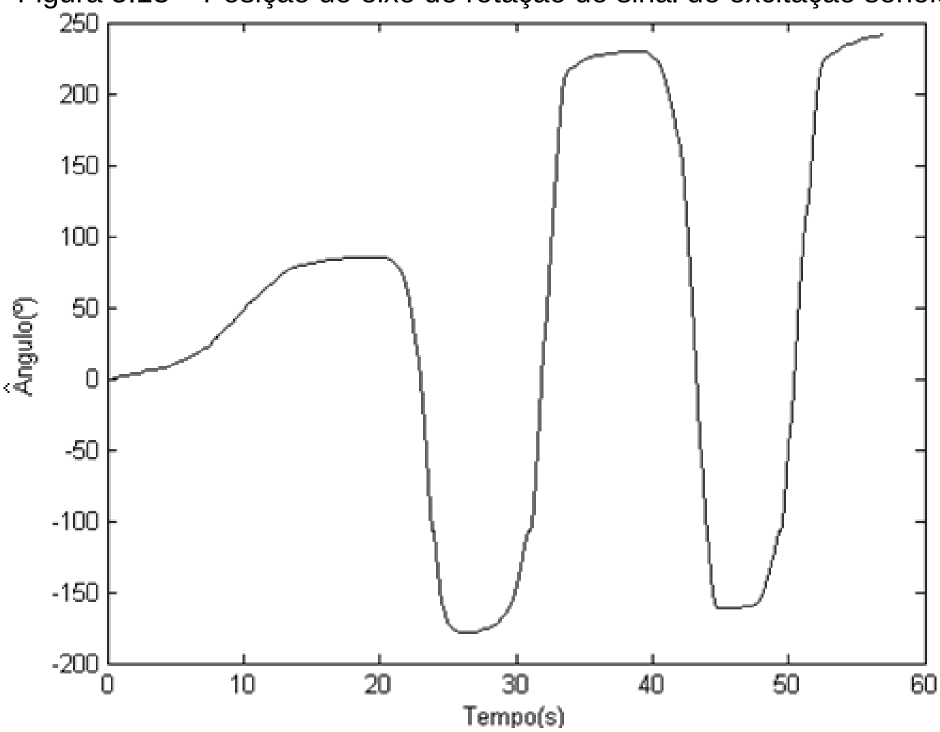


Figura 5.13 – Posição do eixo de rotação do sinal de excitação senoidal



É possível verificar, nas últimas 4 figuras, que o sistema apresenta um alto grau de não linearidade e um acoplamento entre o eixo de inclinação e o de rotação. O sinal de excitação aplicado ao eixo de inclinação é constituído por três ondas iguais no formato senoidal (ver Figura 5.10) e a resposta deste sinal foram três ondas não lineares, com algumas irregularidades (ver Figura 5.12). Já no sinal aplicado ao eixo de rotação foram duas meias ondas no formato senoidal, intercaladas uma para cada lado (ver Figura 5.11) e na resposta deste sinal percebe-se o acoplamento entre os eixos, pois não foi aplicado sinal de excitação no eixo de rotação nos 19 segundos iniciais e mesmo assim houve um deslocamento do *twin rotor* neste eixo.

É possível comparar o instante de tempo, o sinal de excitação e o valor lido de posição com a imagem da posição real, na Figura 5.14 e na Figura 5.15, respectivamente.

Figura 5.14 - Comparativo entre o instante de tempo, o sinal de excitação senoidal e o valor de posição lido

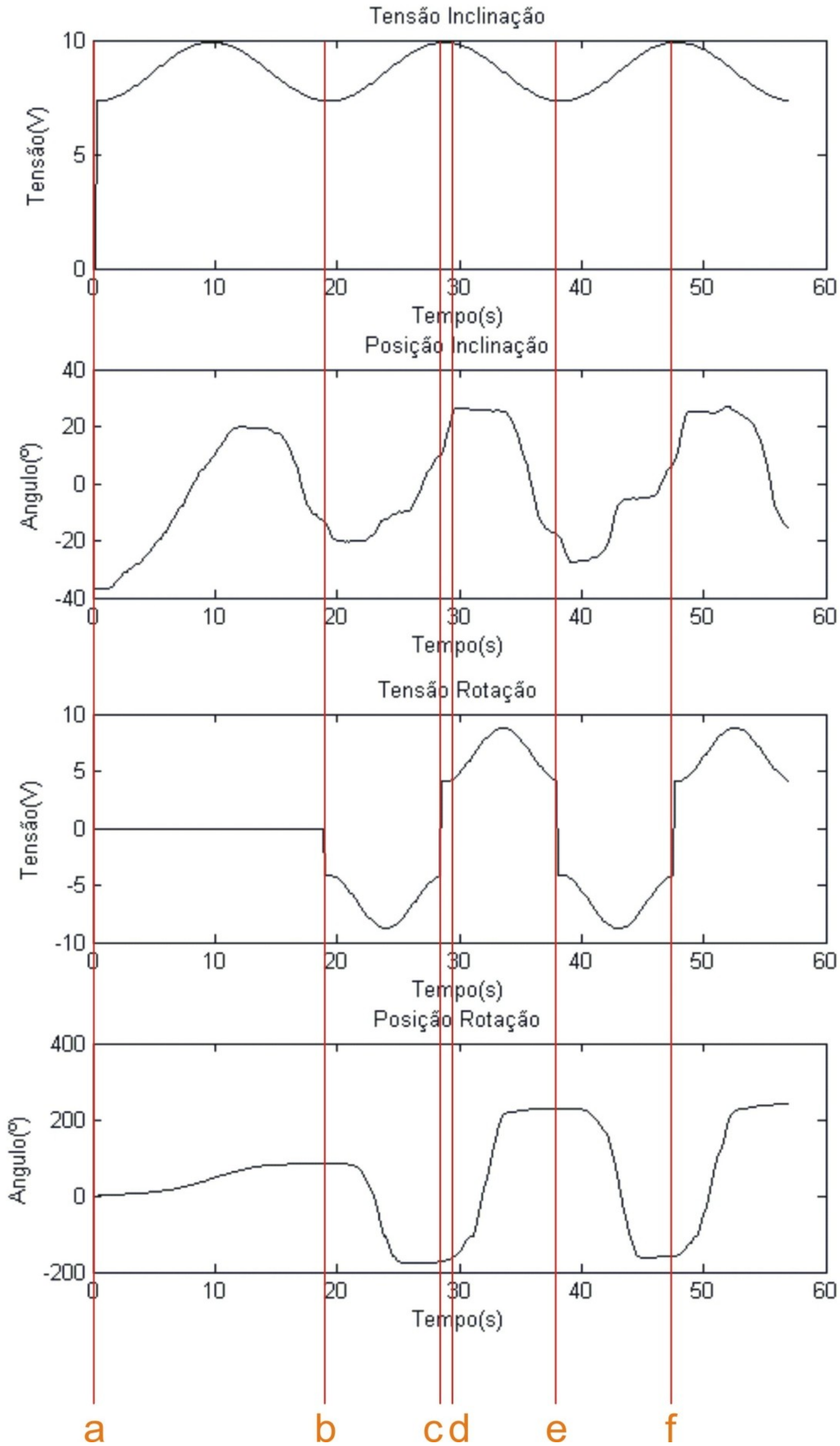
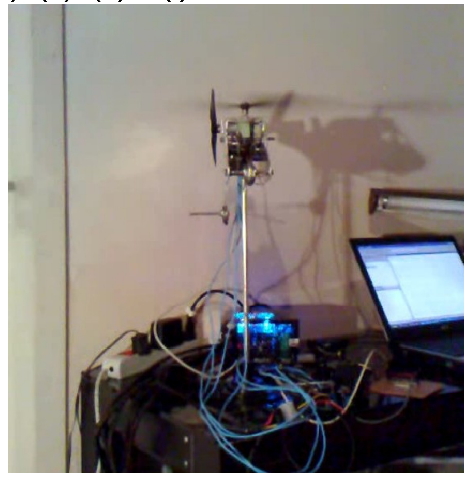


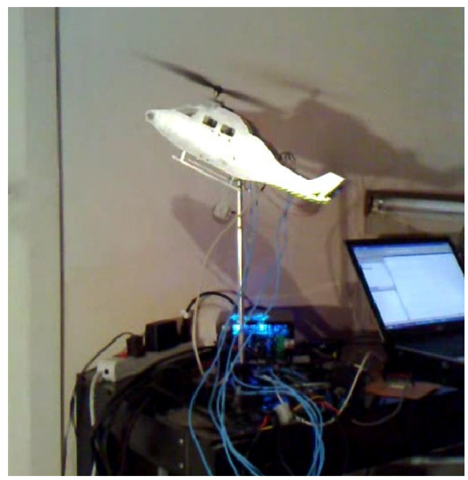
Figura 5.15 – Imagens da posição do *twin rotor,* referentes ao sinal de excitação senoidal, (a), (b), (c), (d), (e) e (f)

(a)

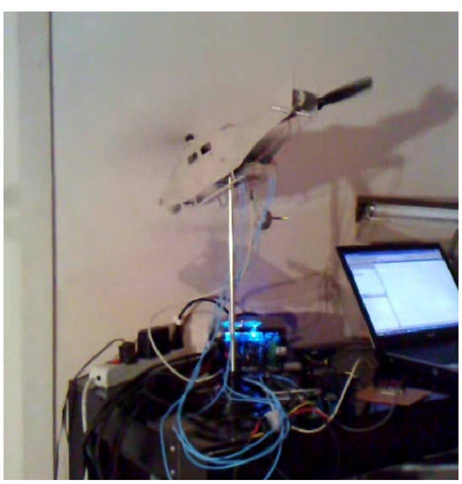


(b)

(c)



(d)



(e)

(f)

Para estimação dos modelos foram utilizados 350 dados e para validação foram utilizados os mesmos 350 mais 27.

5.2.1. Modelagem NARMAX com Previsão de 1 Passo à Frente

Para a modelagem NARMAX previsão de 1 passo à frente para o sinal senoidal aplicado ao eixo de inclinação foi fixado o grau de não linearidade $n_l = 2$, o número de termos do ruído igual a 5, o número de interações para o cálculo do ruído igual a 5 e o número de termos do processo igual a 5. E foram variados os máximos atrasos de n_y, n_u e n_e de 2 a 3. Estes valores foram pré-selecionados através de testes.

Tabela 5.1 – Modelagem NARMAX para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente)

Regressores			R^2	MSE	Erro			
n_y	n_u	n_e			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
2	2	2	0,9991	0,3198	7,8061	-1,4544	0,0134	0,5661
2	2	3	0,9995	0,1576	1,3982	-1,3523	-0,0042	0,3975
2	3	2	0,9987	0,4587	10,5630	-1,2462	0,0189	0,6779
2	3	3	0,9995	0,1576	1,3982	-1,3523	-0,0042	0,3975
3	2	2	0,9995	0,1582	1,5134	-1,4229	0,0002	0,3983
3	2	3	0,9995	0,1594	1,4789	-1,4236	-1,4236	0,3995
3	3	2	0,9995	0,1640	1,5616	-1,3084	-0,0088	0,4054
3	3	3	0,9995	0,1594	1,4796	-1,4229	0,0168	0,3995

Todos os resultados foram promissores, ficando com $0{,}9987 \leq R^2 \leq 0{,}9995$, bem próximo de 1. Dos 8 testes 5 apresentaram $R^2 = 0{,}9995$, melhor resultado encontrado, então foi optado pelo teste mais simples dos realizados, por coincidência apresentou o menor MSE, com os máximos atrasos $n_y = 2, n_u = 2\ e\ n_e = 3$.

Figura 5.16 – Modelo NARMAX para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente com $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 3$)

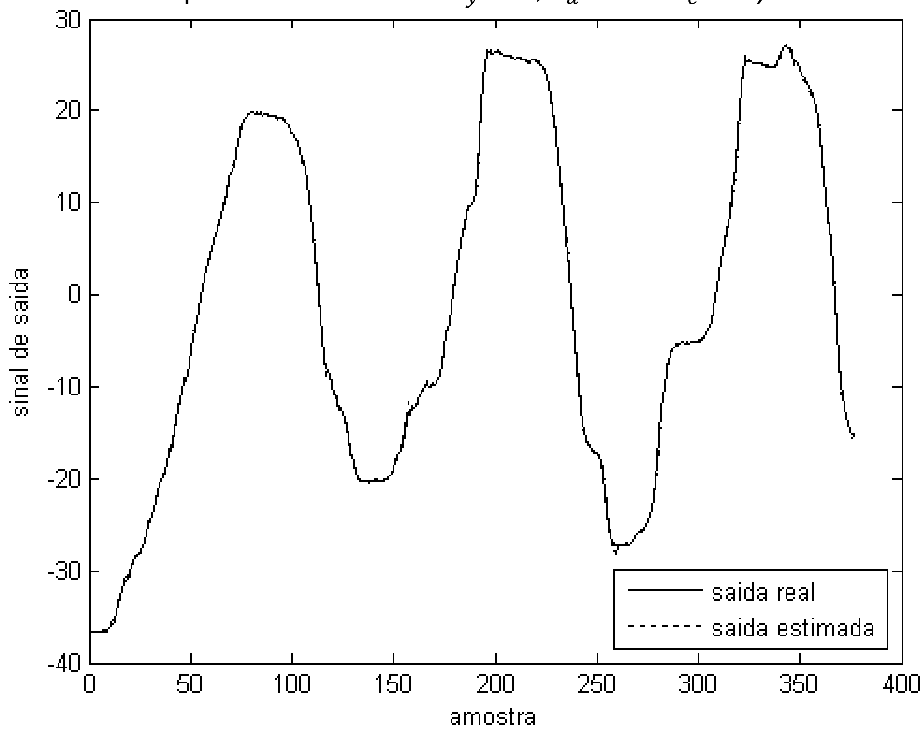
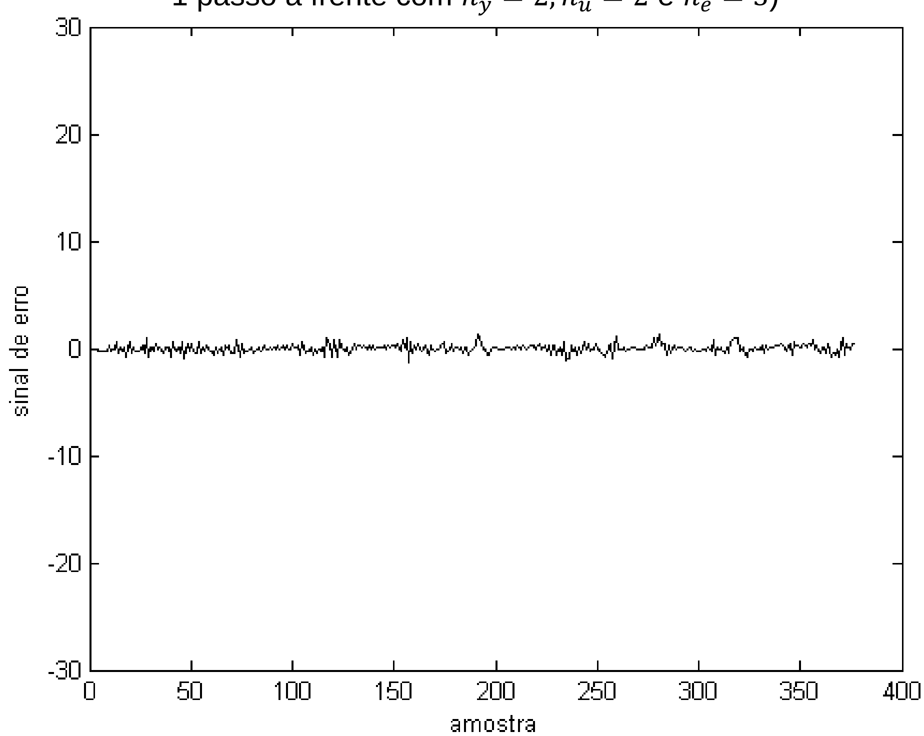


Figura 5.17 – Erro do modelo NARMAX para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente com $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 3$)



O modelo matemático obtido para $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 3$ foi:

$$
\begin{aligned}
y(k) = {} & 0{,}1796 \cdot 10^1 \cdot y(k-1) - 0{,}8162 \cdot y(k-2) - 0{,}1909 \cdot u(k-1)u(k-1) \\
& - 0{,}1535 \cdot 10^1 + 0{,}2105 \cdot u(k-2) \cdot u(k-2) - 0{,}3047 \cdot 10^{-1} \\
& \cdot e(k-3) + 0{,}1550 \cdot 10^{-1} \cdot e(k-3) \cdot u(k-2) - 0{,}1406 \cdot 10^{-2} \\
& \cdot e(k-2) + 0{,}2915 \cdot 10^{-1} \cdot e(k-1) - 0{,}2362 \cdot 10^{-1} \cdot e(k-1) \\
& \cdot y(k-1).
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

Para a modelagem NARMAX previsão de 1 passo à frente para o sinal senoidal aplicado ao eixo de rotação foram utilizados os mesmos parâmetros do caso anterior do eixo de inclinação.

Tabela 5.2 – Modelagem NARMAX para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente)

Regressores			R^2	MSE	Erro			
n_y	n_u	n_e			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
2	2	2	0,9997	4,2149	17,2151	-13,4908	-0,0079	2,0557
2	2	3	0,9997	4,2377	17,1505	-13,2919	0,0822	2,0596
2	3	2	0,9997	4,2507	17,0301	-13,2541	0,0214	2,0643
2	3	3	0,9997	4,2405	17,5592	-13,1586	0,0981	2,0596
3	2	2	0,9997	4,2049	17,0587	-14,3984	0,0216	2,0532
3	2	3	0,9997	4,1980	17,2607	-14,7058	0,0282	2,0514
3	3	2	0,9997	4,2056	17,1027	-14,2904	0,0276	2,0533
3	3	3	0,9997	4,2317	17,1471	-15,9288	-0,0008	2,0598

Todos os resultados apresentando $R^2 = 0{,}9997$, valor bem próximo a 1. Assim, foi utilizado o bom senso e optado pelo modelo mais simples, então foi escolhido o modelo com os atrasos $n_y = 2, n_u = 2\ e\ n_e = 2$.

Figura 5.18 – Modelo NARMAX para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 2$)

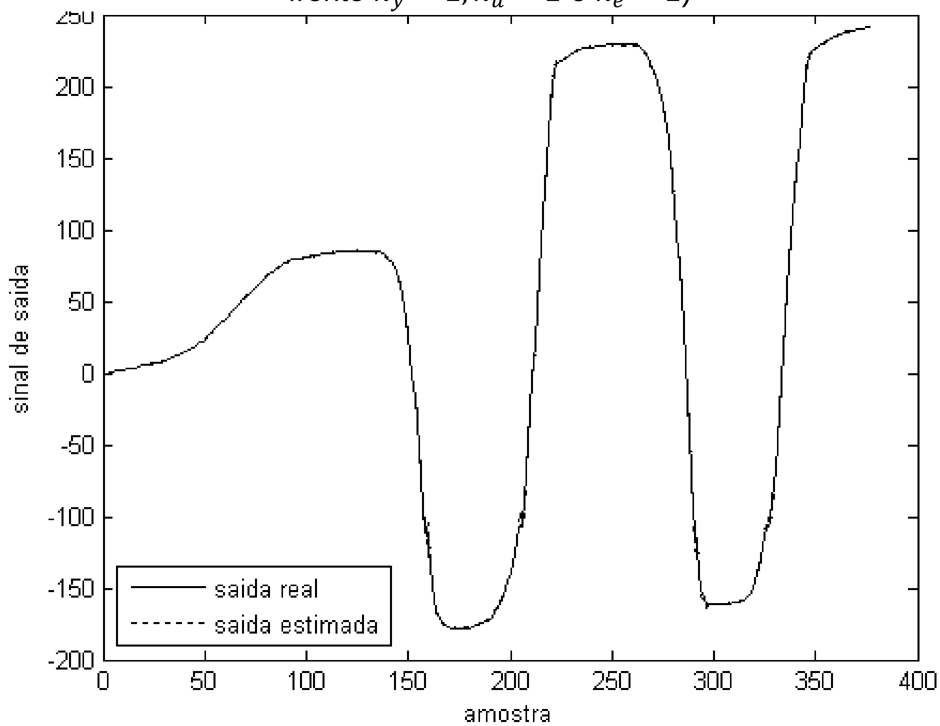
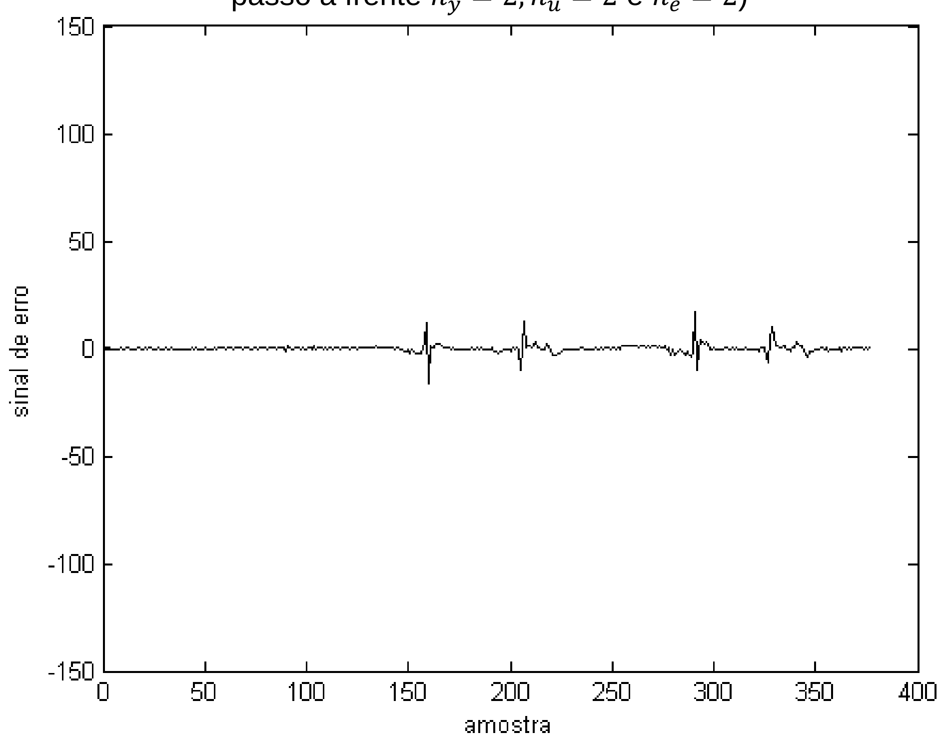


Figura 5.19 – Erro do modelo NARMAX para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 2$)



O modelo matemático obtido para $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 2$ foi:

$$y(k) = 0{,}1898 \cdot 10^{1} \cdot y(k-1) - 0{,}9044 \cdot y(k-2) + 0{,}1540 \cdot u(k-2) + 0{,}3881 - 0{,}2649 \cdot 10^{-3} \cdot u(k-1) \cdot y(k-2) - 0{,}2752 \cdot 10^{13} \cdot e(k-1) \cdot u(k-1) + 0{,}2752 \cdot 10^{13} \cdot e(k-1) \cdot u(k-2) - 0{,}3548 \cdot 10^{-4} \cdot e(k-2) \cdot y(k-1) + 0{,}7382 \cdot 10^{-3} \cdot e(k-2) - 0{,}2413 \cdot 10^{-4} \cdot e(k-1) \cdot u(k-1). \quad (5.2)$$

5.2.2. Modelagem Nebulosa TSK com Previsão de 1 Passo à Frente

Para a modelagem nebulosa TSK previsão de 1 passo à frente para o sinal senoidal aplicado ao eixo de rotação foi utilizado o agrupamento FCM para obtenção dos centros das funções de pertinência e a ED para otimização da largura das funções de pertinência. Na modelagem TSK foi utilizado o número de funções de pertinência igual a 5. No FCM foi utilizado o número de grupos igual ao número de funções de pertinência, o grau de nebulosidade igual a 2 e critério de parada 10^{-3}. Na ED foi utilizada a quantidade de parâmetros para otimização igual ao número de funções de pertinência vezes a quantidade de variáveis linguísticas, a quantidade de variáveis linguísticas igual à soma dos máximos atrasos referente à n_u e n_y, a quantidade de membros da população foi definido com 6 vezes a quantidade de parâmetros a serem otimizados, a taxa de mutação utilizada foi 0,8, a taxa de cruzamento 0,5, foram realizadas dez interações, a estratégia utilizada foi *DE/rand/1/Bin* e a espessura das funções de pertinência a serem otimizadas foram limitadas entre 0,1 e o módulo da diferença entre o valor máximo e mínimo da variável linguística em questão (universo de discurso). Estes valores foram pré-selecionados através de testes.

Tabela 5.3 – Modelagem nebulosa TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente)

Regressores		R^2	MSE	Erro			
n_y	n_u			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
1	1	0,9991	0,2627	1,8395	-1,4808	0,0095	0,5131
1	2	0,9992	0,2516	1,7386	-1,6638	-0,0174	0,5020
1	3	0,9992	0,2300	1,8918	-1,2964	0,0088	0,4802
2	1	0,9996	0,1278	1,2308	-1,5149	0,0083	0,3580
2	2	0,9996	0,1248	1,1560	-1,1862	0,0043	0,3537
2	3	0,9996	0,1225	1,3379	-1,0866	0,0050	0,3505
3	1	0,9996	0,1206	1,2513	-1,1195	0,0005	0,3478
3	2	0,9996	0,1117	1,0579	-1,0628	0,0088	0,3346
3	3	0,9996	0,1116	1,1693	-1,0286	0,0152	0,3342

O melhor resultado para o sinal senoidal do eixo de inclinação é $R^2 = 0{,}9996$. Dos 9 testes 6 apresentaram este valor, então foi optado pelo modelo mais simples, $n_y = 2$ e $n_u = 1$.

Figura 5.20 – Modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 2$ e $n_u = 1$)

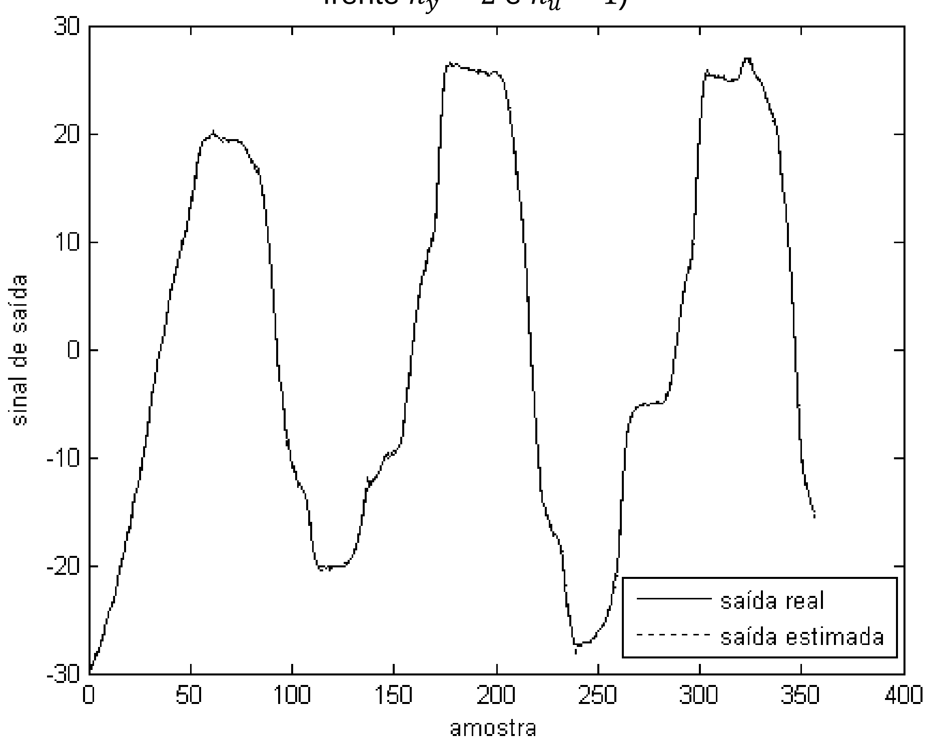


Figura 5.21 – Erro do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 2$ e $n_u = 1$)

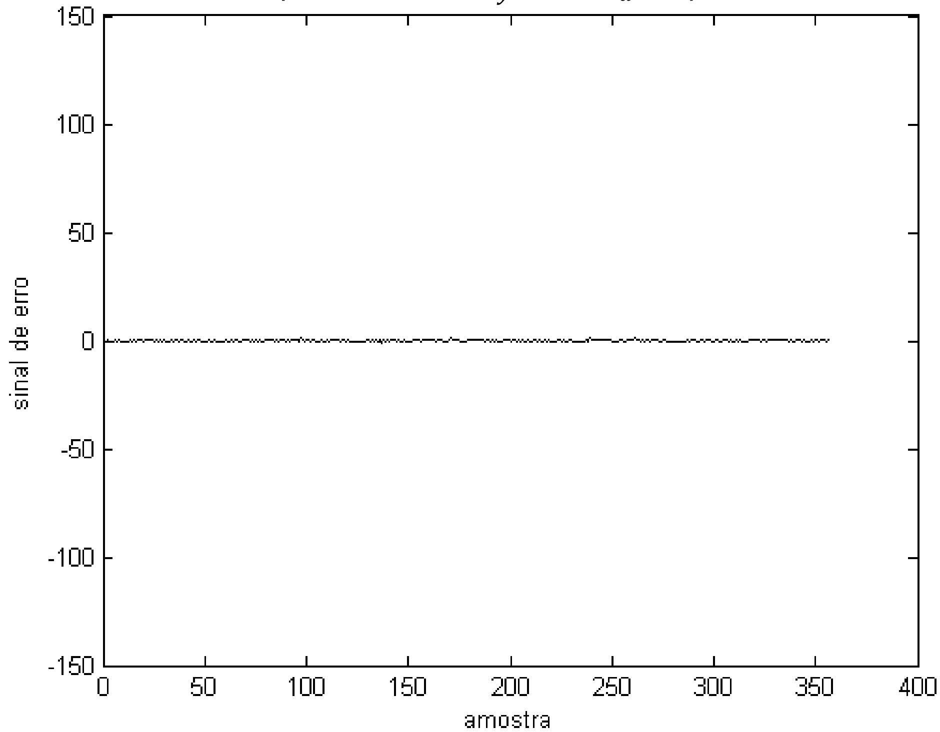


Figura 5.22 – Funções de pertinência de $y(k-1)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 2$ e $n_u = 1$)

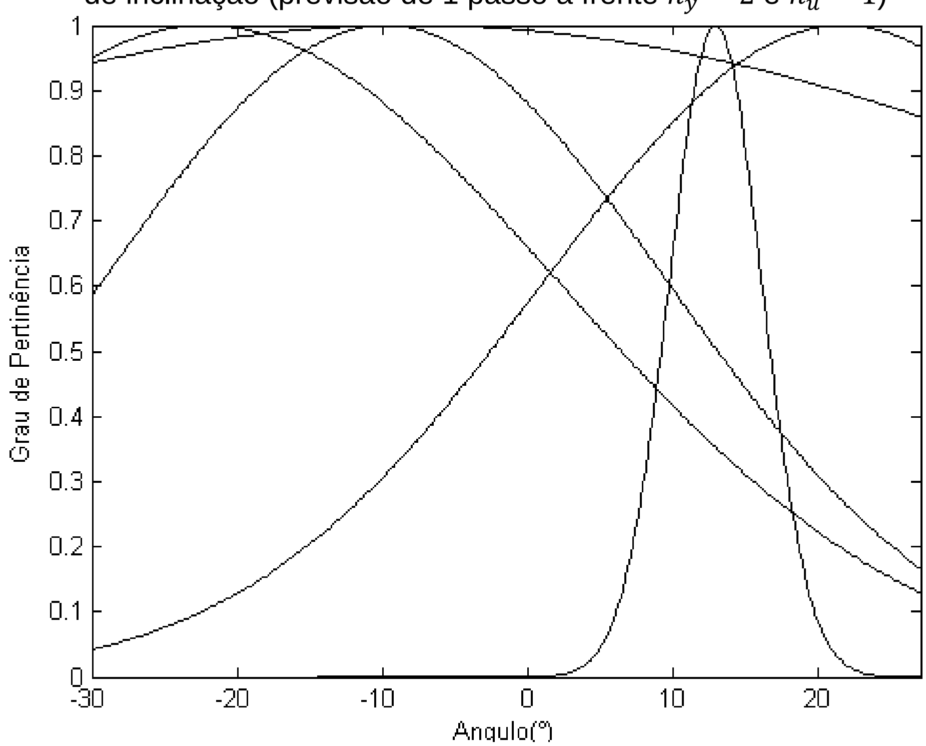


Figura 5.23 – Funções de pertinência de $y(k-2)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 2$ e $n_u = 1$)

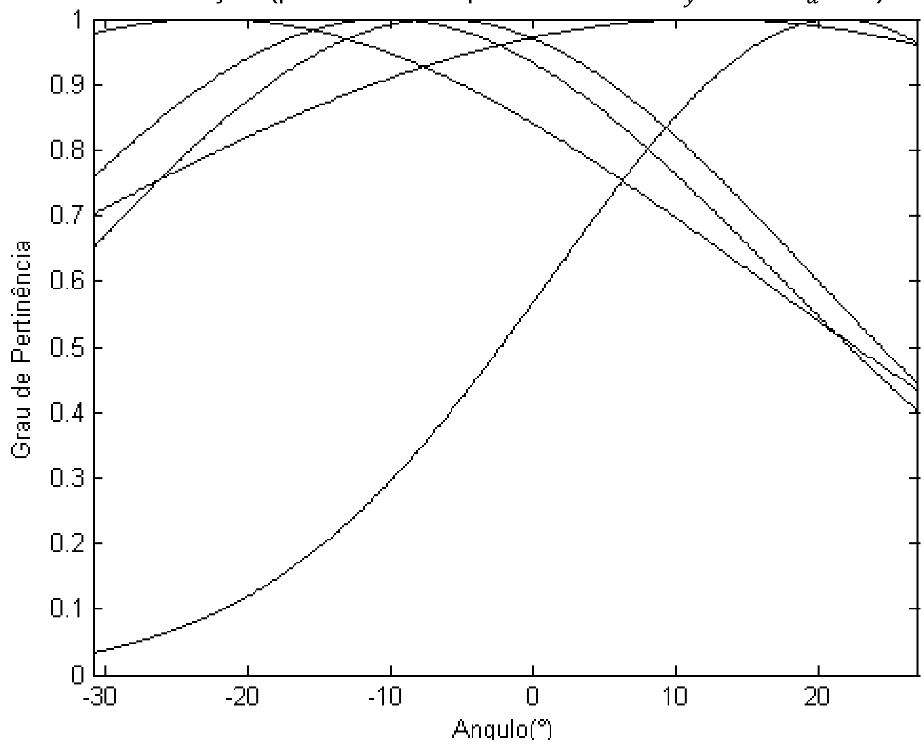
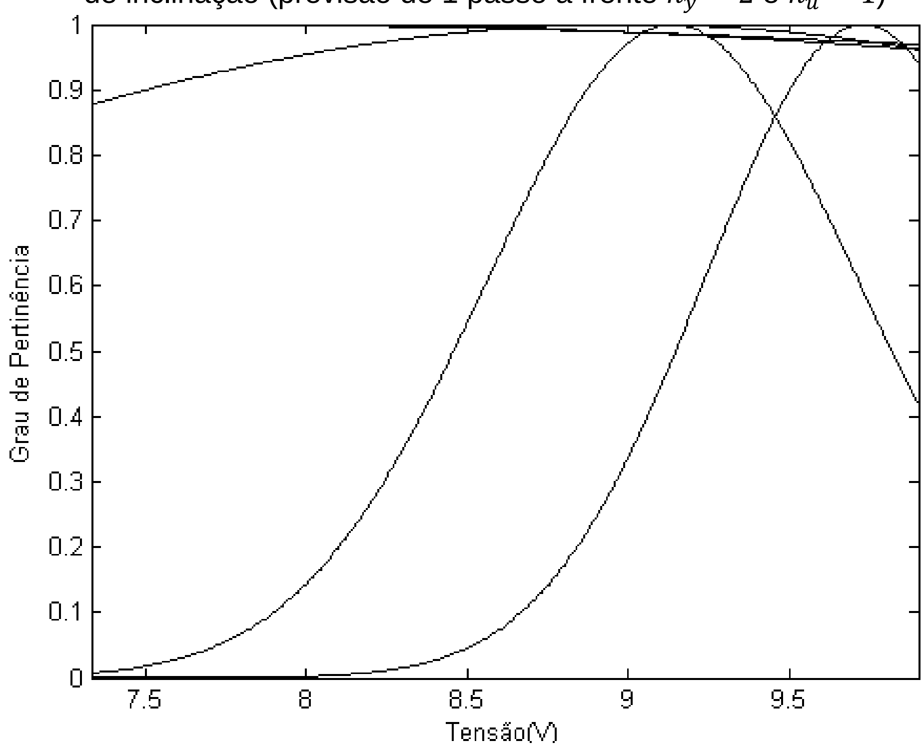


Figura 5.24 – Funções de pertinência de $u(k-1)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 2$ e $n_u = 1$)



As regras nebulosas obtidas para $n_y = 2$ e $n_u = 1$ foram:

$$R^1: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-12{,}91}{3{,}18}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-12{,}27}{51{,}30}\right)^2}\ E$$
$$u(k-1)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-9{,}72}{0{,}49}\right)^2}$$
$$ENTÃO\ y^1 = -165{,}54 + 3{,}51y(k-1) - 2{,}58y(k-2) + 16{,}78u(k-1),$$

$$R^2: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-21{,}62}{20{,}55}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-21{,}36}{20{,}09}\right)^2}\ E$$
$$u(k-1)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-8{,}99}{3{,}25}\right)^2} \qquad (5.3)$$
$$ENTÃO\ y^2 = 23{,}08 + 3{,}36y(k-1) - 2{,}27y(k-2) - 0{,}41u(k-1),$$

$$R^3: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+8{,}00}{63{,}70}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+6{,}53}{26{,}24}\right)^2}\ E$$
$$u(k-1)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-7{,}53}{9{,}42}\right)^2}$$
$$ENTÃO\ y^3 = 41{,}20 - 4{,}45y(k-1) + 1{,}98y(k-2) + 1{,}45u(k-1),$$

$$R^4: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+22{,}21}{24{,}32}\right)^2}\ E\ y(k-2)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+22{,}68}{38{,}39}\right)^2}\ E$$
$$u(k-1)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-7{,}88}{7{,}18}\right)^2}$$
$$ENTÃO\ y^4 = -114{,}99 + 6{,}21y(k-1) - 5{,}20y(k-2) + 1{,}22u(k-1),$$

$$R^5: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+9{,}84}{19{,}46}\right)^2}\ E\ y(k-2)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+10{,}32}{27{,}57}\right)^2}\ E$$
$$u(k-1)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-9.13}{0{,}57}\right)^2}$$
$$ENTÃO\ y^5 = 11{,}81 + 1{,}60y(k-1) - 0{,}54y(k-2) - 1{,}56u(k-1),$$

Neste contexto, o modelo final é a somatória ponderada dos consequentes:

$$y(k) = \sum_{l=1}^{N} v_l \cdot y^l. \qquad (5.4)$$

Para a modelagem nebulosa TSK previsão de 1 passo à frente para o sinal senoidal aplicado ao eixo de rotação foram utilizados os mesmos parâmetros do teste anterior (Tabela 5.3) do eixo de inclinação.

Tabela 5.4 – Modelagem nebulosa TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente)

Regressores		R^2	MSE	Erro			
n_y	n_u			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
1	1	0,9997	4,1850	15,9290	-11,5713	0,1125	2,0454
1	2	0,9998	3,7973	14,5646	-11,4060	0,0284	1,9512
1	3	0,9998	3,2757	12,7303	-11,1858	-0,0160	1,8123
2	1	0,9998	2,2611	10,3448	-10,8323	0,0681	1,5042
2	2	0,9998	2,0012	8,6933	-8,1646	0,0506	1,4157
2	3	0,9998	2,0488	9,9918	-10,8295	0,0153	1,4332
3	1	0,9999	1,4698	9,2345	-7,4810	-0,0066	1,2140
3	2	0,9999	1,1253	9,0774	-7,0770	-0,0167	1,0621
3	3	0.9999	1.2275	5.4766	-6.4041	-0.0062	1.1094

Na Tabela 5.4 três casos apresentaram os melhores desempenhos, $R^2 = 0{,}9999$, para o sinal senoidal do eixo de rotação com o modelo nebuloso TSK previsão de 1 passo à frente. Assim, foi utilizado o bom senso e optado pelo modelo mais simples, então foi escolhido o modelo com os atrasos $n_y = 3$ e $n_u = 1$.

Figura 5.25 – Modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 1$)

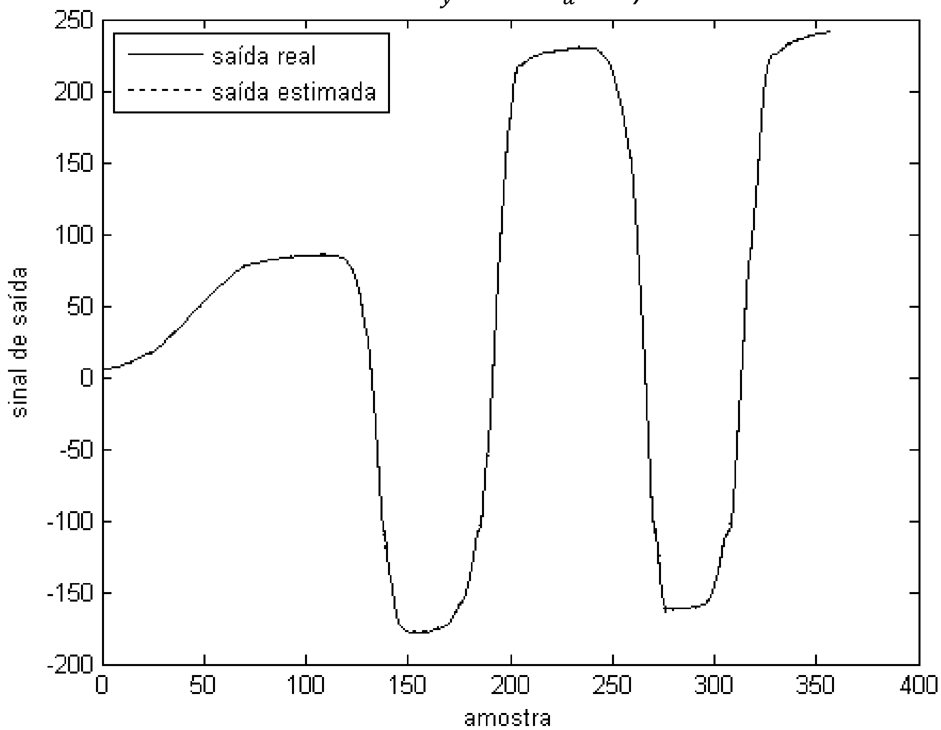


Figura 5.26 – Erro do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 1$)

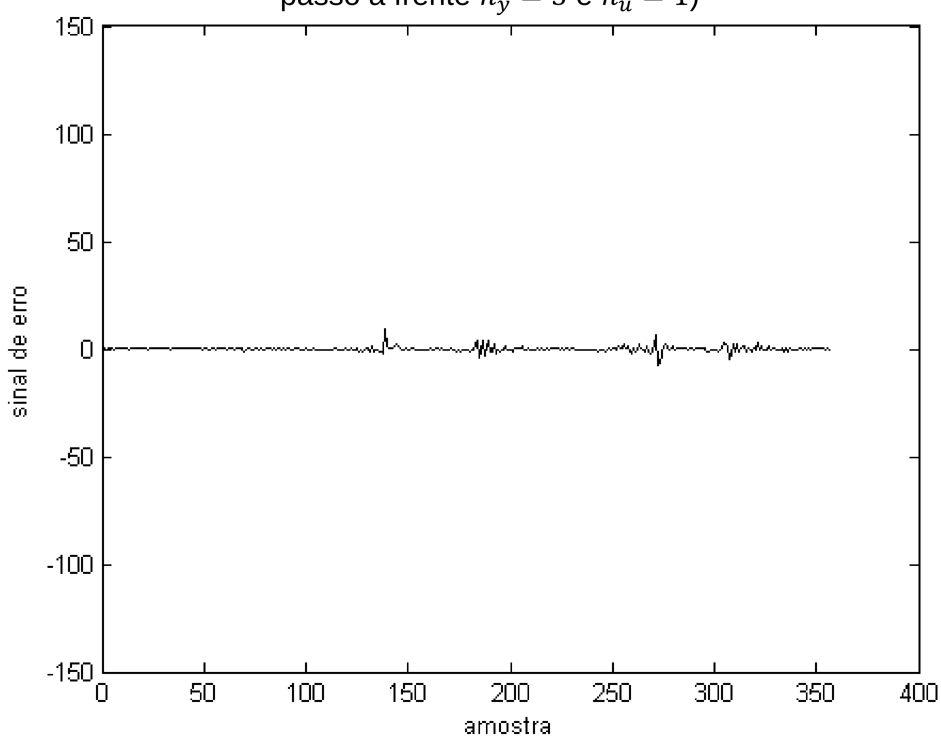


Figura 5.27 – Funções de pertinência de $y(k-1)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 1$)

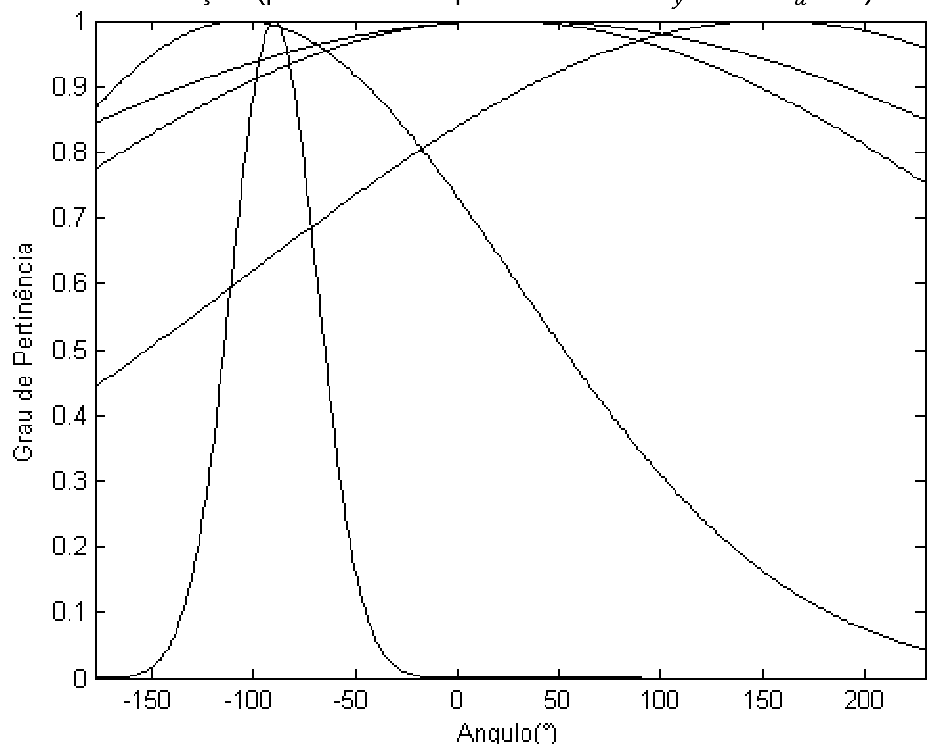


Figura 5.28 – Funções de pertinência de $y(k-2)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 1$)

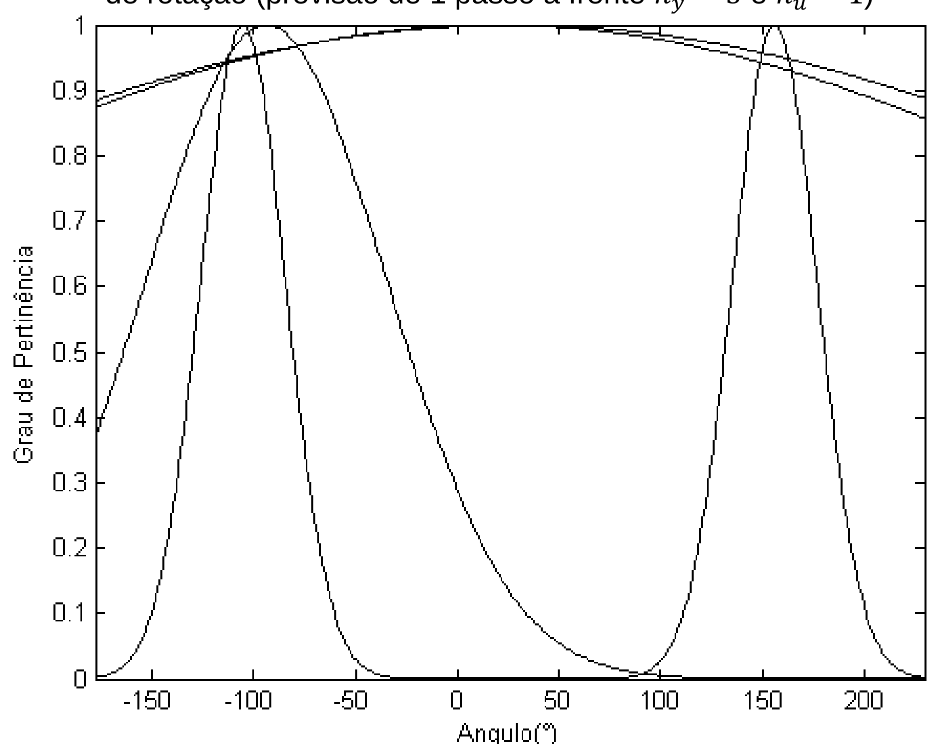


Figura 5.29 – Funções de pertinência de $y(k-3)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente ($n_y = 3$ e $n_u = 1$)

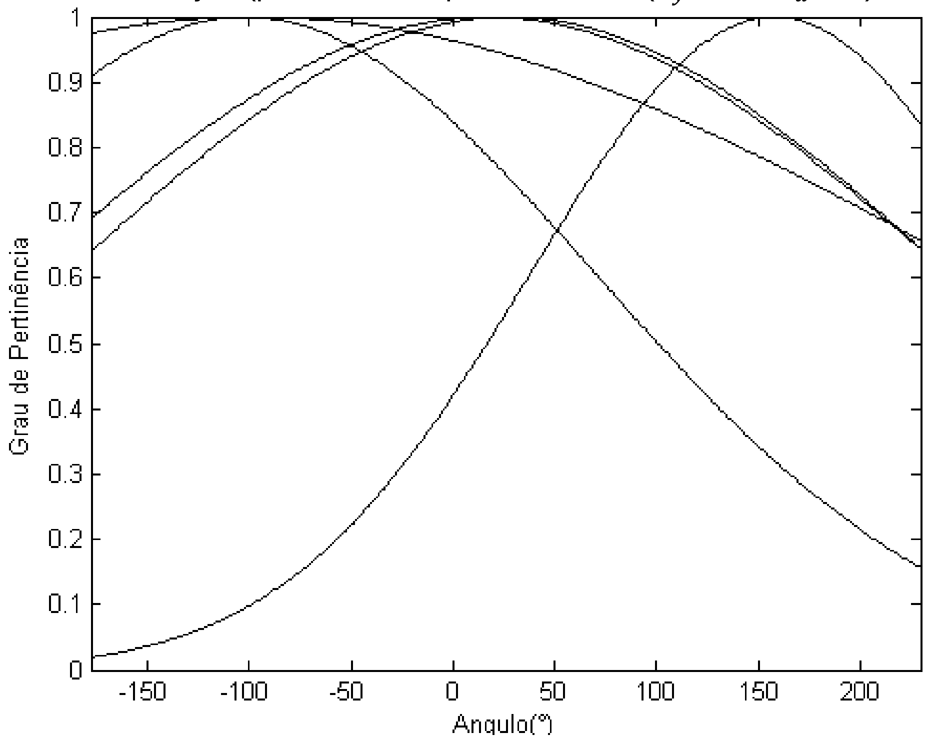
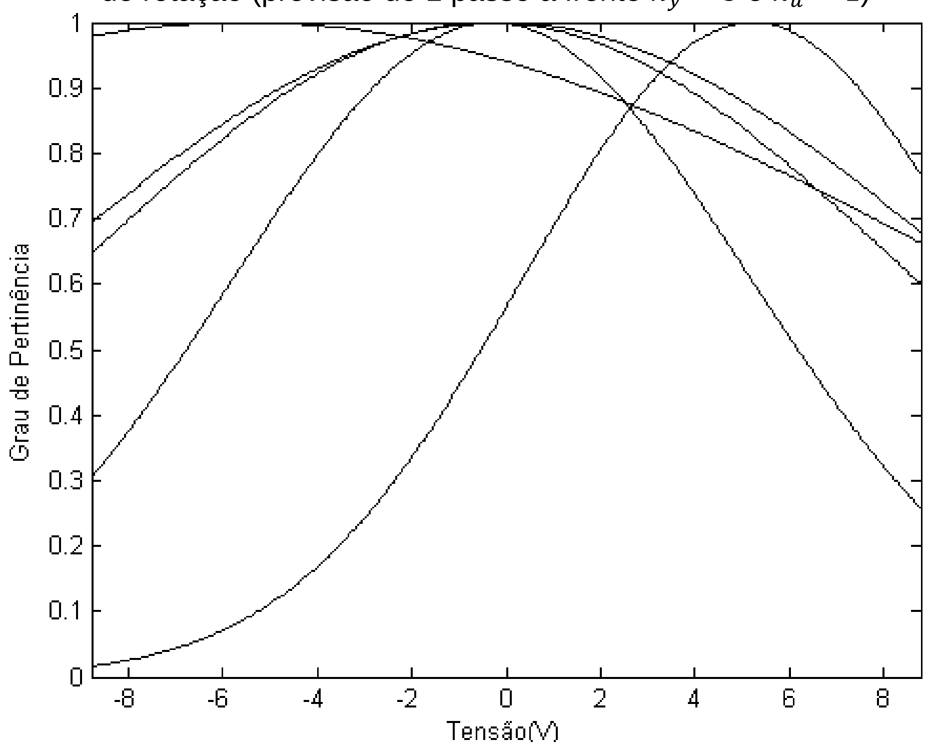


Figura 5.30 – Funções de pertinência de $u(k-1)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 1$)



As regras nebulosas obtidas para $n_y = 3$ e $n_u = 1$ foram:

$$
\begin{aligned}
&R^1: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-154{,}16}{260{,}05}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-156{,}15}{20{,}95}\right)^2}\ E\\
&\quad y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)-157{,}82}{119{,}70}\right)^2}\ E\ u(k-1)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)+5{,}54}{15{,}79}\right)^2}\\
&ENTÃO\ y^1 = 14{,}82 + 1{,}74y(k-1) + 0{,}11y(k-2) - 0{,}98y(k-3)\\
&\quad -1{,}35u(k-1),\\
&R^2: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-20{,}62}{277{,}33}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-19{,}09}{378{,}44}\right)^2}\ E\\
&\quad y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)-17{,}18}{226{,}50}\right)^2}\ E\ u(k-1)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)+0{,}34}{9{,}02}\right)^2}\\
&ENTÃO\ y^2 = 1{,}62 + 4{,}74y(k-1) - 6{,}38y(k-2) + 2{,}61y(k-3)\\
&\quad +0{,}75u(k-1),\\
&R^3: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+105{,}71}{134{,}29}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+105{,}18}{20{,}95}\right)^2}\ E\\
&\quad y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+101{,}95}{172{,}19}\right)^2}\ E\ u(k-1)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-0{,}12}{10{,}11}\right)^2}\\
&ENTÃO\ y^3 = 32{,}81 - 1{,}54y(k-1) + 3{,}13y(k-2) - 0{,}50y(k-3)\\
&\quad +7{,}20u(k-1),\\
&R^4: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+89{,}76}{20{,}95}\right)^2}\ E\ y(k-2)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+93{,}64}{59{,}59}\right)^2}\ E\\
&\quad y(k-3)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+97{,}32}{357{,}01}\right)^2}\ E\ u(k-1)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-5{,}22}{4{,}88}\right)^2}\\
&ENTÃO\ y^4 = 182{,}34 + 4{,}63y(k-1) - 5{,}54y(k-2) + 3{,}54y(k-3)\\
&\quad -7{,}76u(k-1),\\
&R^5: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-28{,}04}{353{,}63}\right)^2}\ E\ y(k-2)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-27{,}48}{414{,}36}\right)^2}\ E\\
&\quad y(k-3)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)-26{,}94}{216{,}65}\right)^2}\ E\ u(k-1)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)+0{,}29}{5{,}50}\right)^2}\\
&ENTÃO\ y^5 = -1{,}59 - 1{,}45y(k-1) + 5{,}38y(k-2) - 2{,}90y(k-3)\\
&\quad -0{,}84u(k-1),
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Neste contexto, o modelo final é a somatória ponderada dos consequentes:

$$y(k) = \sum_{l=1}^{N} v_l \cdot y^l. \tag{5.6}$$

5.2.3. Modelagem NARMAX com Previsão de *N* Passos à Frente

Para a modelagem do sinal senoidal do eixo de inclinação através do modelo NARMAX com previsão de *N* passos à frente foi fixado o grau de não linearidade $n_l = 2$, o número de atrasos do ruído linerar igual a 5, o número de interações para o cálculo do ruído igual a 5 e o número de termos do processo igual a 9. E os máximos atrasos de n_y, n_u e n_e foram variados de 2 a 3. Assim, foram utilizados os mesmos parâmetros da modelagem da seção 5.2.1, com exceção do número de termos de processos que foi aumentado de 5 para 9 para melhorar o modelo, valor obtido através de testes.

Tabela 5.5 – Modelagem NARMAX para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente)

Regressores			R^2	MSE	Erro			
n_y	n_u	n_e			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
2	2	2	-	-	-	-	-	-
2	2	3	0,9555	16,4102	11,7714	-7,7090	0,9219	3,9498
2	3	2	0	1594,2334	26,6317	-298,0724	-4,0682	39,7728
2	3	3	0,9532	17,2595	11,7747	-8,3911	-0,3520	4,1450
3	2	2	0,9517	17,8167	10,6619	-8,2302	0,0167	4,2265
3	2	3	0,9525	17,5032	10,6365	-8,3953	-0,3269	4,1764
3	3	2	0,9552	16,4995	11,1759	-7,8512	0,4167	4,0459
3	3	3	0,9551	16,5696	10,7918	-8,2160	0,1501	4,0732

O resultado que apresenta o símbolo “-” significa que teve mau condicionamento numérico, na Tabela 5.5. O melhor resultado foi $R^2 = 0{,}9555$ com os atrasos $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 3$, o resultado é razoável considerando que a previsão é de *N* passos à frente.

Figura 5.31 – Modelo NARMAX para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 3$)

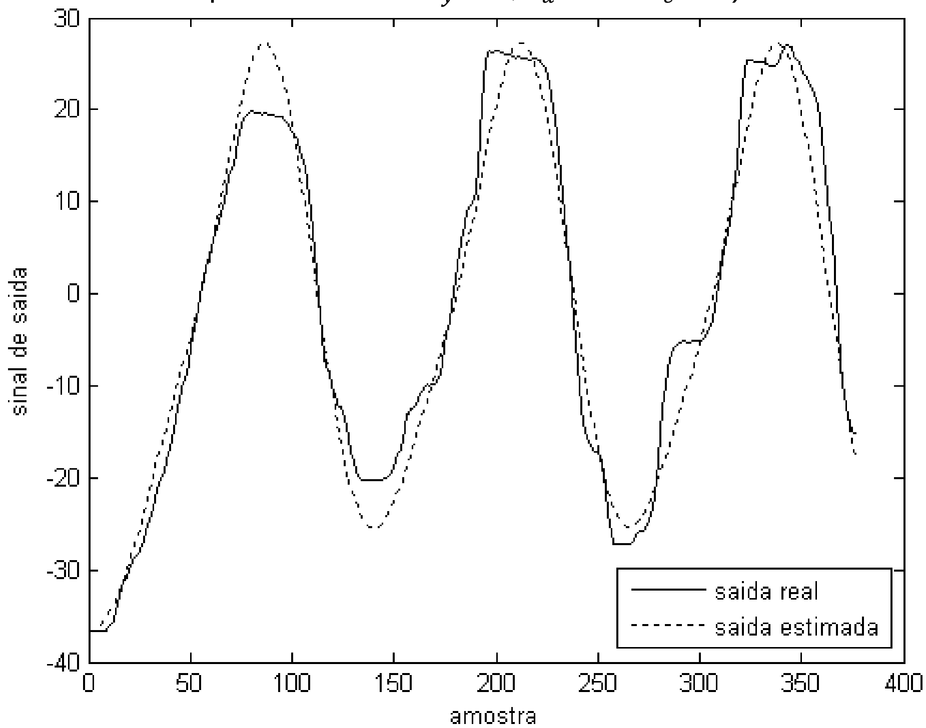
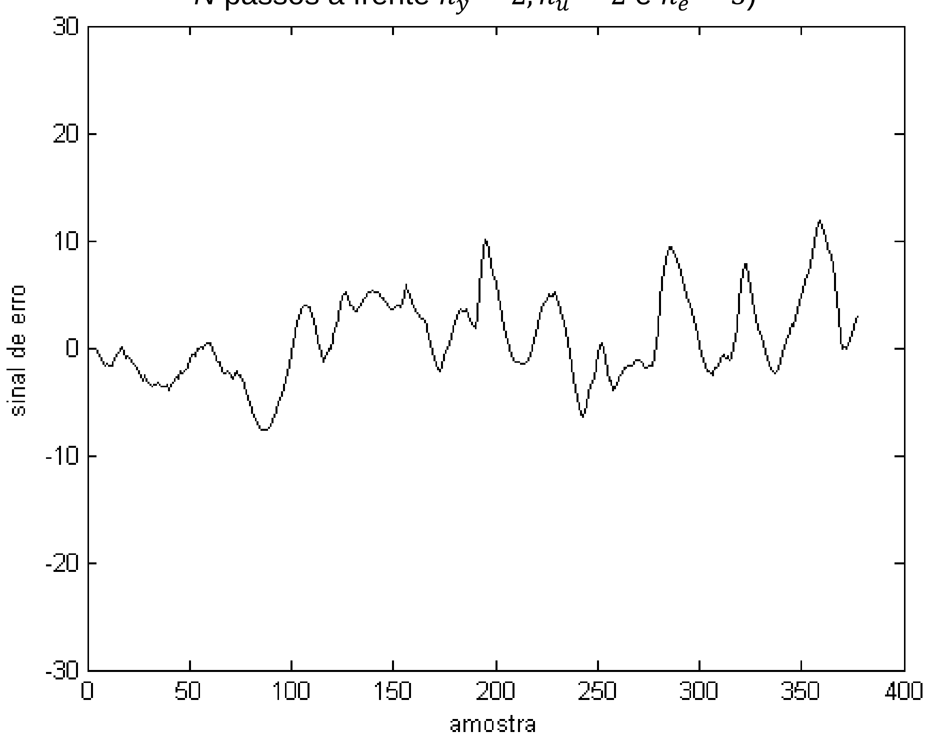


Figura 5.32 – Erro do modelo NARMAX para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 3$)



O modelo matemático obtido para $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 3$ foi:

$$y(k) = 0{,}1655 \cdot 10^1 \cdot y(k-1) - 0{,}6862 \cdot y(k-2) - 0{,}2302 \cdot u(k-1) \cdot u(k-1) - 0{,}1223 \cdot 10^2 + 0{,}2203 \cdot 10^1 \cdot u(k-2) \cdot u(k-2) + 0{,}3518 \cdot 10^2 \cdot u(k-1) - 0{,}329 \cdot 10^2 \cdot u(k-2) - 0{,}1040 \cdot 10^{-2} \cdot y(k-2) \cdot y(k-2) + 0{,}9047 \cdot 10^{-3} \cdot y(k-1) \cdot y(k-1) + 0{,}3030 \cdot 10^{-1} \cdot e(k-3) \cdot y(k-1) + 0{,}1121 \cdot 10^1 \cdot e(k-3) \cdot u(k-2) + 0{,}2175 \cdot e(k-2) \cdot u(k-1) + 0{,}7910 \cdot 10^{-2} \cdot e(k-3) - 0{,}1084 \cdot e(k-1)y(k-2). \quad (5.7)$$

Para a modelagem NARMAX com previsão de *N* passos à frente para o sinal senoidal aplicado ao eixo de rotação foram utilizados os mesmos parâmetros da seção 5.2.1. Porém, o resultado do R^2 ficou abaixo de 90% então foi aumentado o grau de não linearidade (n_l) de 2 para 3 para melhorar o desempenho, valor obtido através de testes.

Tabela 5.6 – Modelagem NARMAX para o sinal senoidal de rotação (previsão de *N* passos à frente)

Regressores				R^2	MSE	Erro			
n_l	n_y	n_u	n_e			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
2	2	2	2	0,8741	2325,0166	162,3597	-127,5713	1,2357	48,2666
2	2	2	3	0,8404	2947,3136	189,7477	-121,2835	16,3798	51,8279
2	2	3	2	0,8692	2415,2769	160,6126	-129,9047	6,9101	48,7218
2	2	3	3	0,8638	2514,7471	155,1727	-75,5307	22,2470	45,0021
2	3	2	2	0,9057	1740,4404	135,8543	-81,3580	6,1091	41,3237
2	3	2	3	0,8755	2297,9327	165,5816	-109,0874	4,6907	47,7701
2	3	3	2	0,9066	1723,9965	132,3198	-72,5377	7,3608	40,9176
2	3	3	3	0,8977	1888,9812	146,7848	-96,5799	0,6676	43,5150
3	2	2	2	0,8648	2496,7428	93,7108	-64,0412	15,0417	47,7129
3	2	2	3	0,9346	1206,4493	102,2375	-51,8489	7,2637	34,0111
3	2	3	2	0,9320	1254,7209	101,1023	-40,8557	10,8431	33,7664
3	2	3	3	0,9344	1210,5766	102,3379	-51,5279	7,4561	34,0302
3	3	2	2	0,9312	1269,7524	100,6647	-44,5555	9,8208	34,2990
3	3	2	3	0,9349	1201,4684	102,8440	-57,1334	5,5916	34,2536
3	3	3	2	0,9220	1439,2631	94,9502	-40,2821	12,8035	35,7592
3	3	3	3	0,9352	1195,7617	102,3427	-54,8442	6,1359	34,0762

Nota-se, na Tabela 5.6, que a variação do coeficiente de correlação múltipla foi de $0{,}8404 \leq R^2 \leq 0{,}9352$ e com o aumento do grau de não linearidade melhorou a maioria dos testes. O melhor resultado é $R^2 = 0{,}9352$ para o sinal senoidal de rotação é com os atrasos $n_l = 3, n_y = 3, n_u = 3$ e $n_e = 3$. Mesmo no experimento com o melhor resultado percebe-se que o erro máximo apresentado é grande de 102,34, este valor corresponde a 24,41% do universo de discurso da posição de rotação.

Figura 5.33 – Modelo NARMAX para o sinal senoidal de rotação (previsão de *N* passos à frente $n_l = 3, n_y = 3, n_u = 3$ e $n_e = 3$)

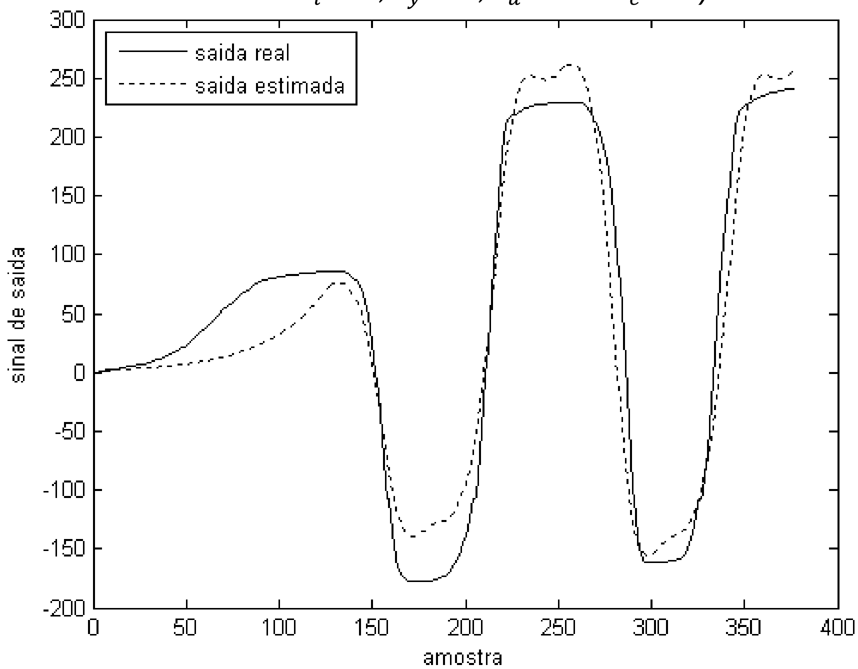
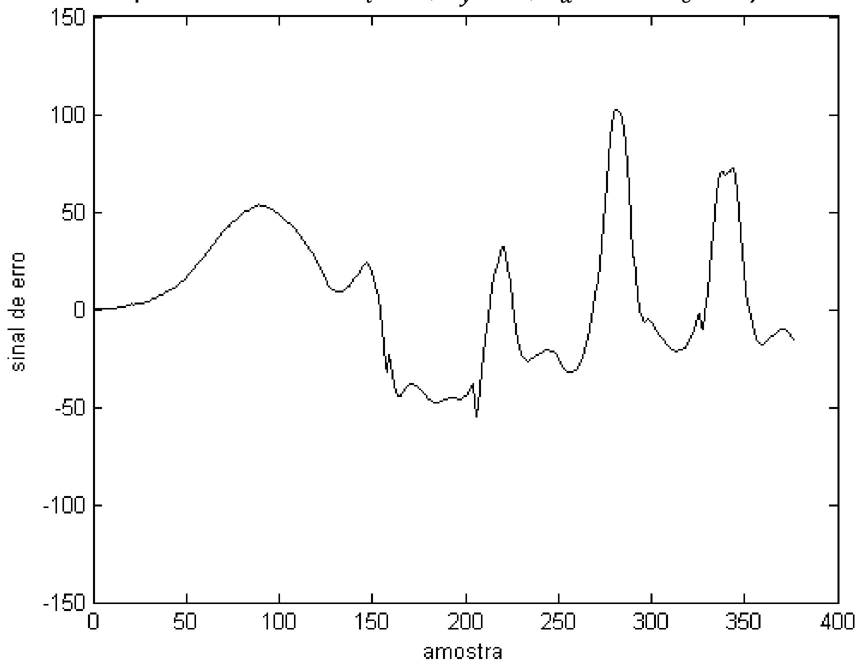


Figura 5.34 – Erro do modelo NARMAX para o sinal senoidal de rotação (previsão de *N* passos à frente $n_l = 3, n_y = 3, n_u = 3$ e $n_e = 3$)



O modelo matemático encontrado é:

$$
\begin{aligned}
y(k) = {} & 0{,}1853 \cdot 10^{1} \cdot y(k-1) - 0{,}8479 \cdot y(k-2) - 0{,}3380 \cdot 10^{-3} \cdot u(k-1) \\
& \cdot u(k-1) \cdot y(k-1) + 0{,}5348 \cdot 10^{-2} \cdot u(k-1) \cdot u(k-1) \\
& \cdot u(k-1) + 0{,}1344 \cdot 10^{-1} \cdot u(k-1) \cdot u(k-1) + 0{,}2800 \cdot 10^{-8} \\
& \cdot e(k-2) \cdot u(k-3) \cdot u(k-1) - 0{,}7248 \cdot 10^{-9} \cdot e(k-2) \\
& \cdot e(k-2) \cdot u(k-3) - 0{,}8495 \cdot 10^{-4} \cdot e(k-3) \cdot e(k-3) \\
& \cdot e(k-2) - 0{,}5548 \cdot 10^{-4} \cdot e(k-3) \cdot e(k-3) \cdot e(k-3) \\
& + 0{,}2521 \cdot 10^{-8} \cdot e(k-2) \cdot e(k-1)
\end{aligned}
\qquad (5.8)
$$

5.2.4. Modelagem Nebulosa TSK com Previsão de *N* Passos à Frente

Para a modelagem nebulosa TSK previsão de *N* passos à frente para o sinal senoidal aplicado ao eixo de rotação foram utilizados os mesmos parâmetros da modelagem apresentado na seção 5.2.2.

Tabela 5.7 – Modelagem nebulosa TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente)

Regressores		R^2	MSE	Erro			
n_y	n_u			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
1	1	0,9743	8,2398	8,8056	-6,6608	-0,0471	2,8741
1	2	0,9784	6,9359	7,1577	-6,0517	0,1132	2,6348
1	3	0,9798	6,4797	7,1903	-6,1061	0,0205	2,5490
2	1	0,9699	9,6561	6,3841	-6,4613	-0,1239	3,1093
2	2	0,9704	9,5127	9,1823	-8,2239	0,1670	3,0840
2	3	0,9712	9,2429	7,7969	-6,9183	0,0737	3,0435
3	1	0,9701	9,5916	6,4668	-8,3262	-0,4045	3,0748
3	2	0,9701	9,5811	8,2034	-7,7969	0,1900	3,0938
3	3	0.9692	9.8698	10.2631	-6.8563	-0.1172	3.1438

Na Tabela 5.7 o melhor resultado obtido foi de $R^2 = 0{,}9798$, com os atrasos $n_y = 1\ e\ n_u = 3$, porém todos os resultados ficaram próximos, pois $0{,}9699 \leq R^2 \leq 0{,}9798$.

Figura 5.35 – Modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 1$ e $n_u = 3$)

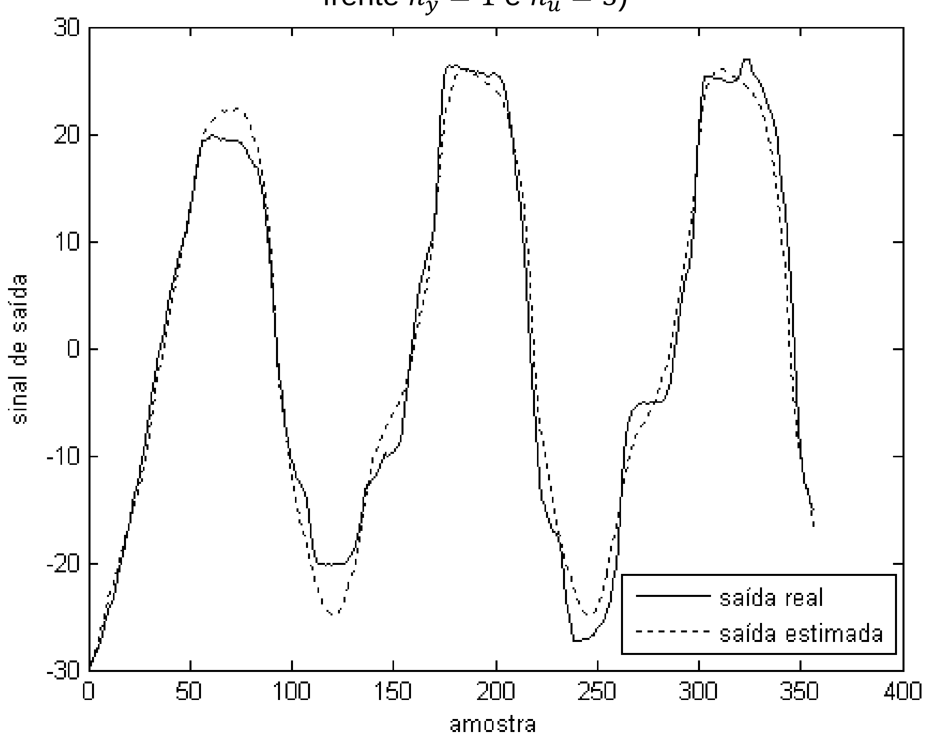


Figura 5.36 – Erro do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 1$ e $n_u = 3$)

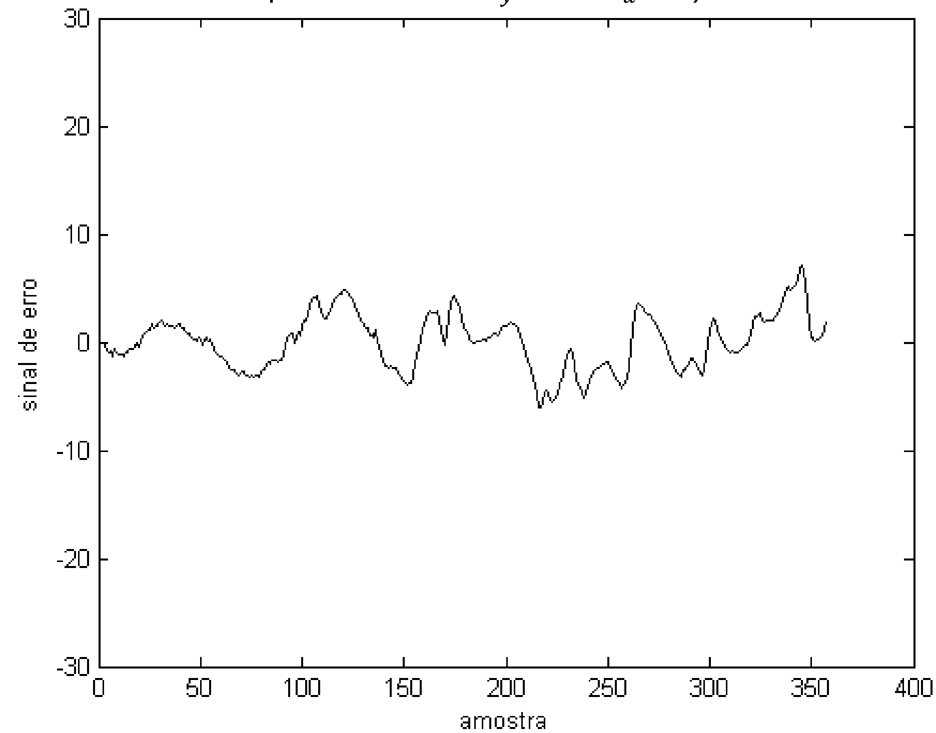


Figura 5.37 – Funções de pertinência de $y(k-1)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 1$ e $n_u = 3$)

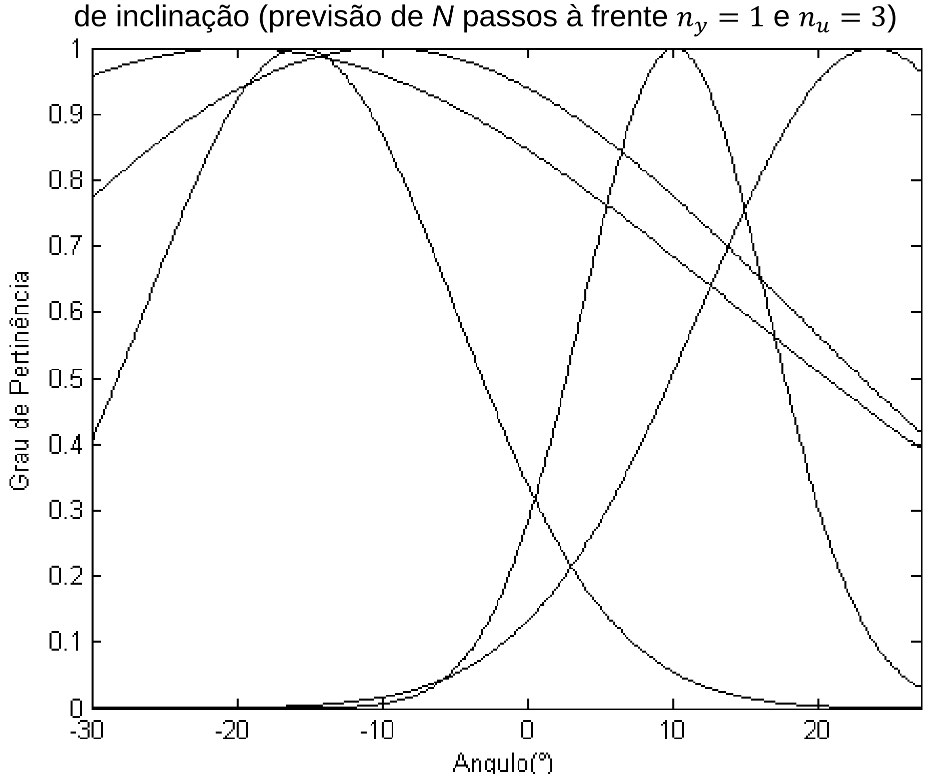


Figura 5.38 – Funções de pertinência de $\mathrm{u(k-1)}$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $\mathrm{n_y} = 1$ e $\mathrm{n_u} = 3$)

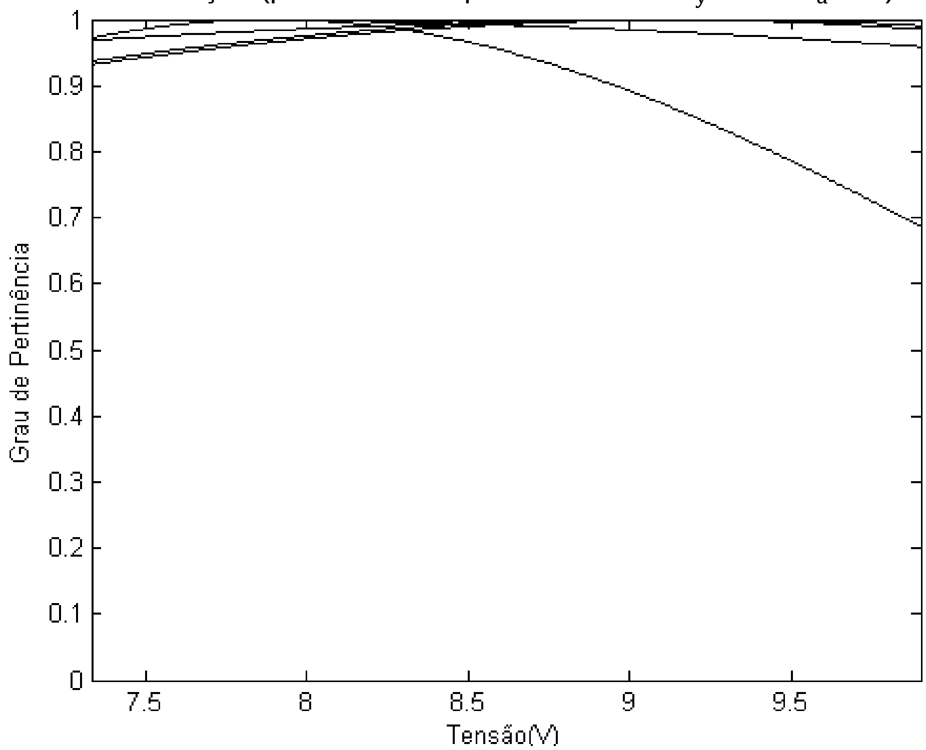


Figura 5.39 – Funções de pertinência de $u(k-2)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 1$ e $n_u = 3$)

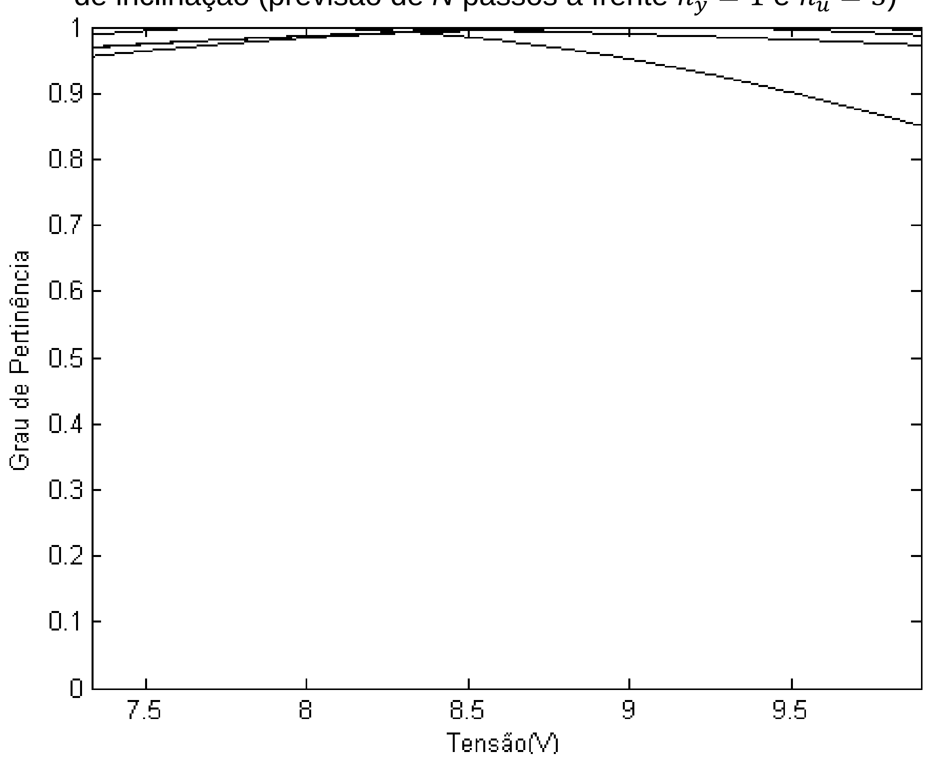
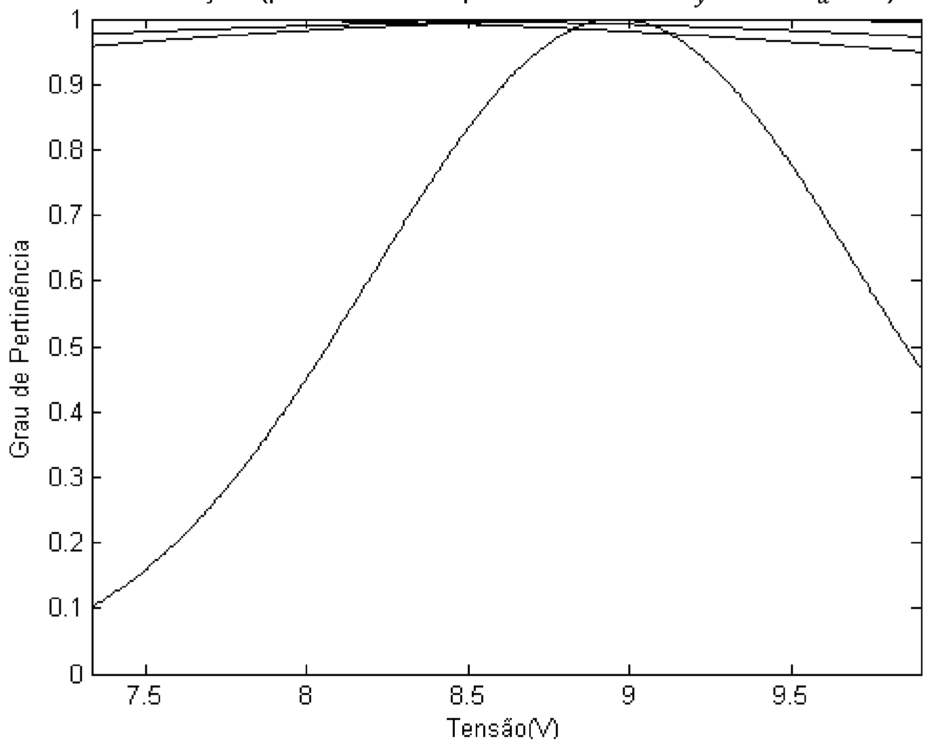


Figura 5.40 – Funções de pertinência de $u(k-3)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 1$ e $n_u = 3$)



As regras nebulosas obtidas para $n_y = 1$ e $n_u = 3$ foram:

$$
\begin{aligned}
&R^1{:}\, SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-23{,}75}{11{,}82}\right)^2}\ E\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-9{,}31}{7{,}86}\right)^2}\ E\\
&u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-9{,}36}{8{,}20}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)+9{,}40}{9{,}59}\right)^2}\\
&ENTÃO\ y^1 = 5{,}17 + 1{,}07y(k-1) + 45{,}61u(k-1) - 13{,}71u(k-2)\\
&-32{,}35u(k-3),\\
&R^2{:}\, SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+9{,}92}{27{,}93}\right)^2}\ E\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-9{,}07}{4{,}82}\right)^2}\ E\\
&u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-9{,}16}{5{,}57}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-8{,}95}{0{,}76}\right)^2}\\
&ENTÃO\ y^2 = 28{,}60 + 1{,}23y(k-1) - 27{,}14u(k-1) + 2{,}83u(k-2)\\
&+21{,}25u(k-3),\\
&R^3{:}\, SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+19{,}88}{34{,}29}\right)^2}\ E\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-7{,}58}{7{,}96}\right)^2}\ E
\end{aligned}
\tag{5.9}
$$

$$u(k-2)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)7,56}{9,90}\right)^2}\ E\ u(k-3)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-7,55}{7,29}\right)^2}$$

$$ENTÃO\ y^3 = -59,63 + 0,61y(k-1) - 38,68u(k-1) + 35,42u(k-2)$$
$$+9,77u(k-3),$$

$$R^4: SE\ y(k-1)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+15,68}{10,64}\right)^2}\ E\ u(k-1)\text{é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-7,88}{2,32}\right)^2}\ E$$
$$u(k-2)\text{é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-7,87}{3,55}\right)^2}\ E\ u(k-3)\text{é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-7,86}{8,60}\right)^2}$$
$$ENTÃO\ y^4 = 19,79 + 1,26y(k-1) + 55,81u(k-1) - 31,51u(k-2)$$
$$-25,89u(k-3),$$

$$R^5: SE\ y(k-1)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-10,12}{6,37}\right)^2}\ E\ u(k-1)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-9,21}{5,01}\right)^2}\ E$$
$$u(k-2)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-9,23}{7,57}\right)^2}\ E\ u(k-3)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-9,24}{6,57}\right)^2}$$
$$ENTÃO\ y^5 = 16,52 + 1,65y(k-1) + 88,76u(k-1) - 40,33u(k-2)$$
$$-50,63u(k-3).$$

O modelo final é a somatória ponderada dos consequentes:

$$y(k) = \sum_{l=1}^{N} v_l \cdot y^l \tag{5.10}$$

Para a modelagem nebulosa TSK, a previsão de *N* passos à frente para o sinal senoidal aplicado ao eixo de rotação foram utilizados os mesmos parâmetros do teste anterior do eixo de inclinação (Tabela 5.7).

Tabela 5.8 – Modelagem nebulosa TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de *N* passos à frente)

Regressores		R^2	MSE	Erro			
n_y	n_u			Max	Min	Média	Desvio
1	1	0,9965	66,2515	25,4022	-26,4412	-1,0809	8,0787
1	2	0,9977	43,3160	14,9734	-20,1989	-1,3288	6,4549
1	3	0,9977	43,5307	16,5541	-20,8309	-0,4862	6,5890
2	1	0,9956	84,1107	37,4795	-31,4975	0,0712	9,1837
2	2	0,9961	74,7331	31,7383	-31,2798	-0,1262	8,6560
2	3	0,9977	44,4034	19,6869	-23,6170	-0,1853	6,6703
3	1	0,9954	87,5471	20,8745	-28,0141	-0,5783	9,3518
3	2	0,9971	56,0820	36,8352	-26,4538	1,5260	7,3419
3	3	0,9979	40,6818	14,9248	-21,6220	-0,5446	6,3638

Na Tabela 5.8. O melhor resultado foi de $R^2 = 0{,}9979$ e atrasos $n_y = 3$ e $n_u = 3$. A variação do coeficiente de correlação múltipla foi pequena entre $0{,}9954 < R^2 < 0{,}9979$.

Figura 5.41 – Modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

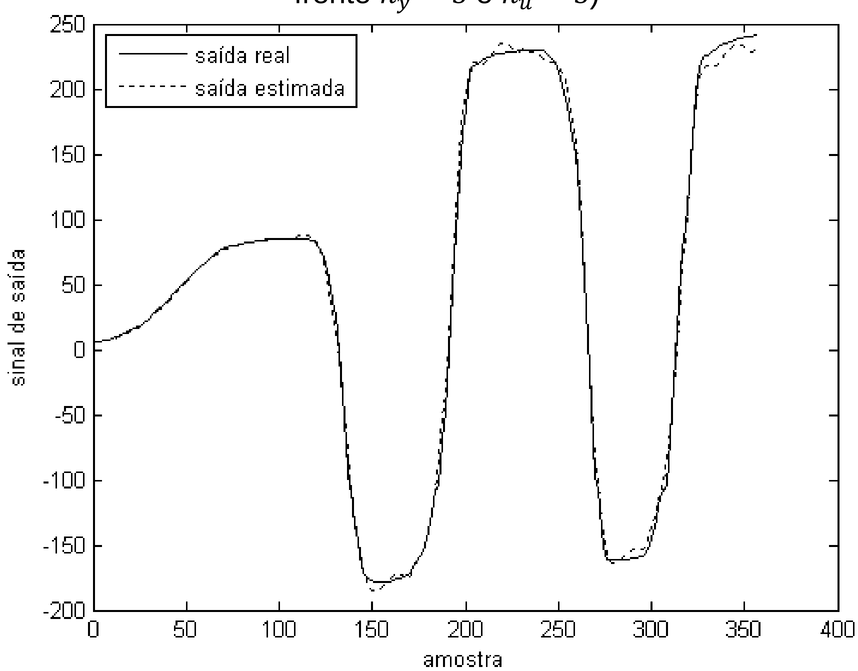


Figura 5.42 – Erro do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

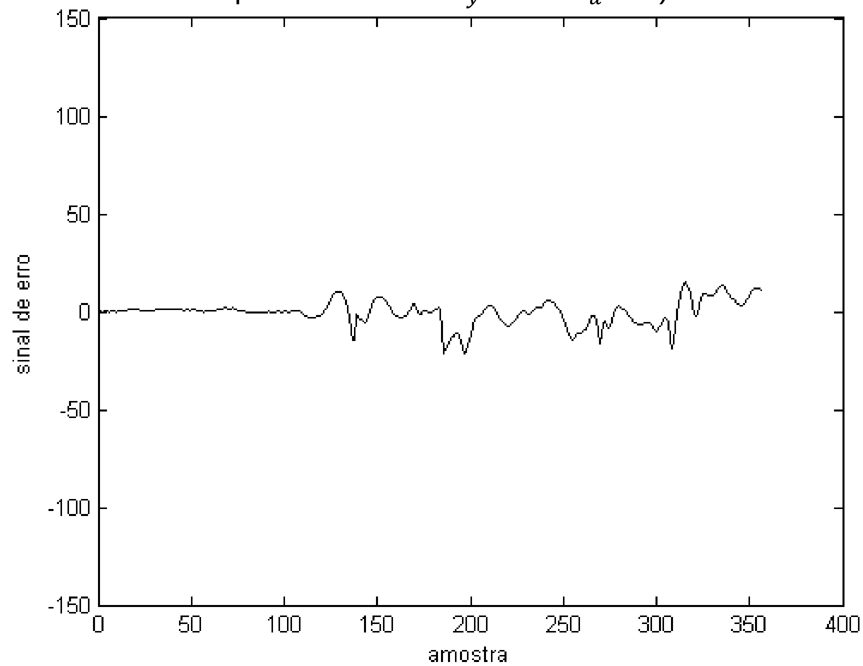


Figura 5.43 – Funções de pertinência de $y(k-1)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

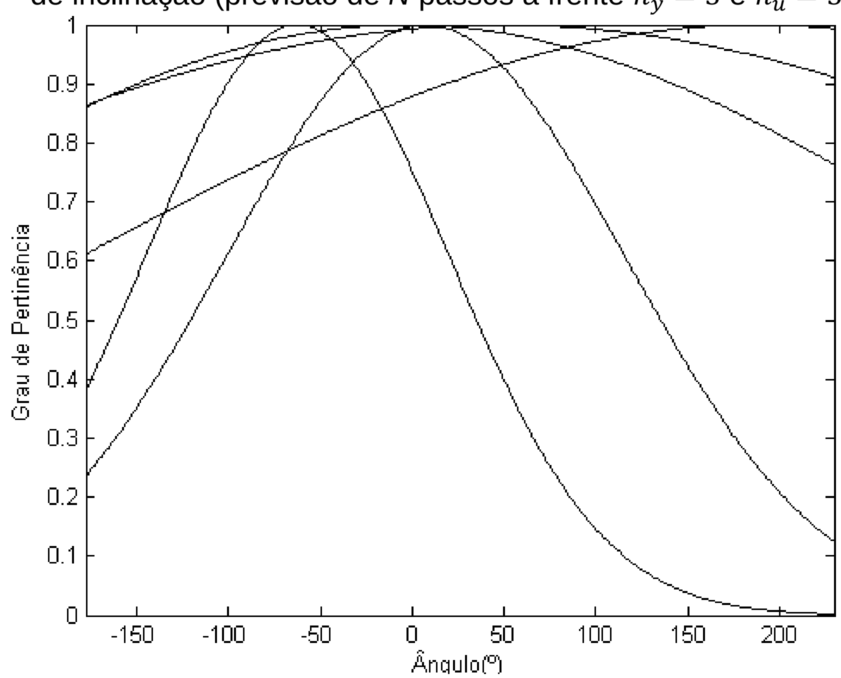


Figura 5.44 – Funções de pertinência de $y(k-2)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

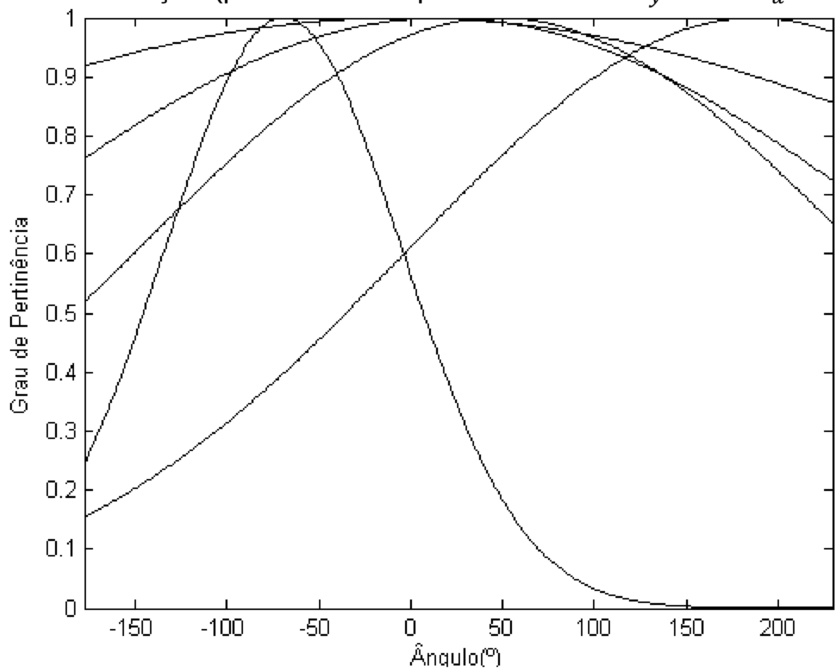


Figura 5.45 – Funções de pertinência de $y(k-3)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

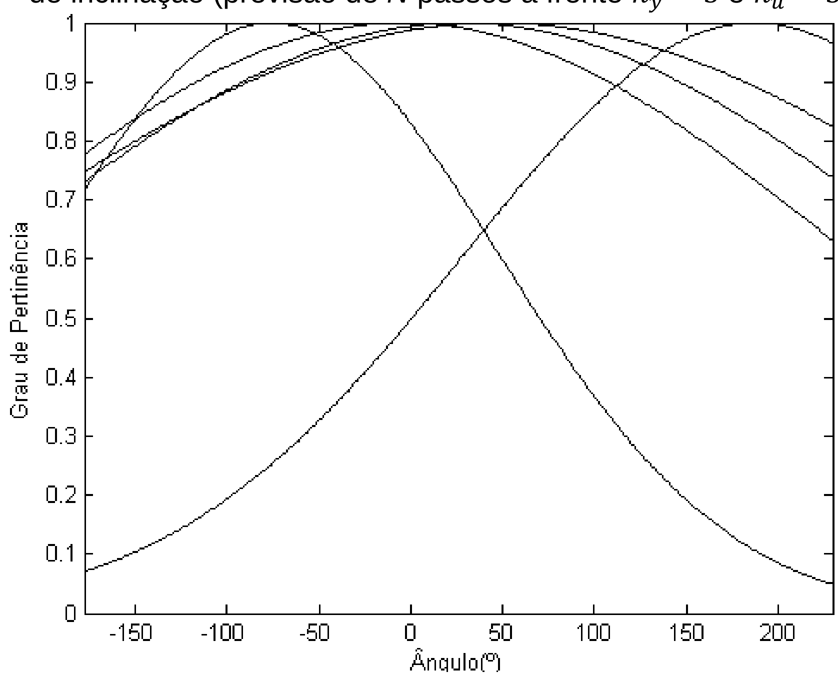


Figura 5.46 – Funções de pertinência de $u(k-1)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

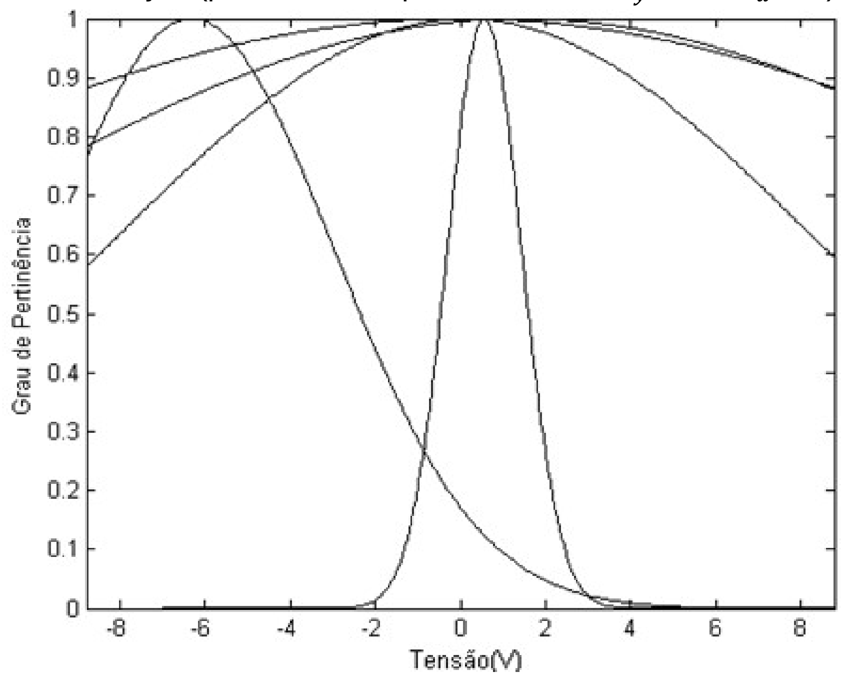


Figura 5.47 – Funções de pertinência de $u(k-2)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

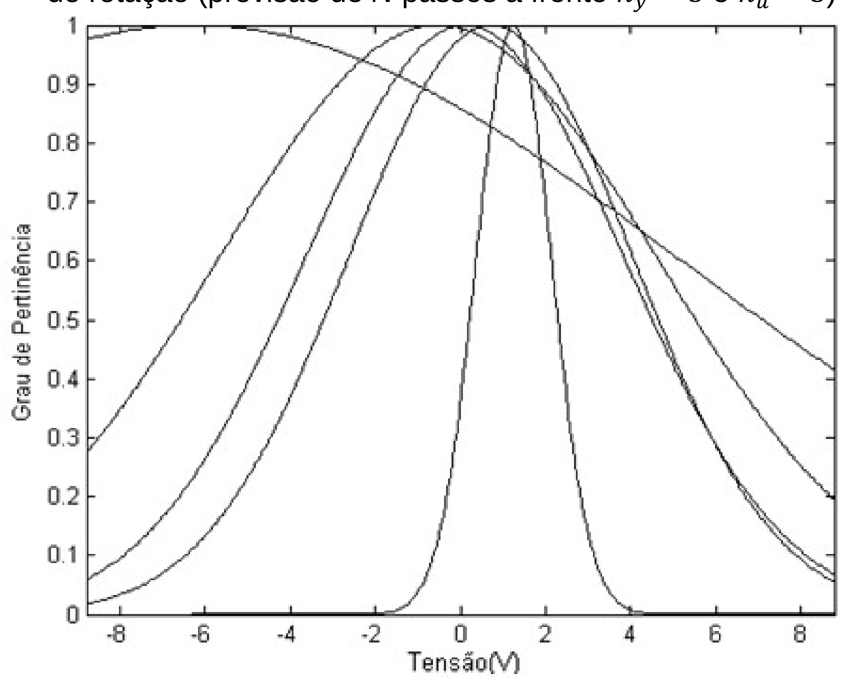
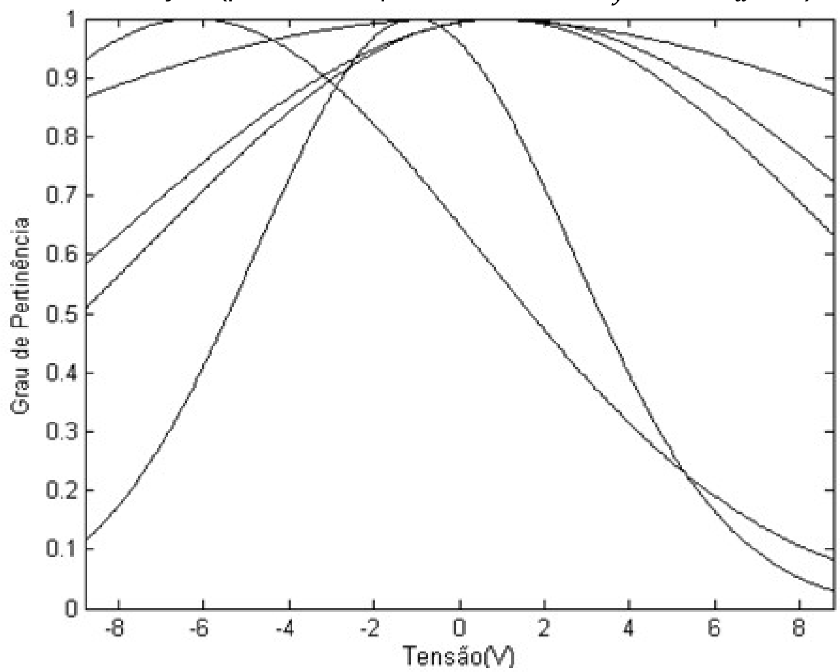


Figura 5.48 – Funções de pertinência de $u(k-3)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)



As regras nebulosas obtidas para $n_y = 3$ e $n_u = 3$ foram:

$$R^1: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-48,89}{419,12}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-47,78}{196,65}\right)^2}\ E$$

$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)-46,69}{293,85}\right)^2}\ E\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-0.10}{8,50}\right)^2}\ E$$

$$u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-0.10}{3,73}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-0.10}{16,56}\right)^2}$$

$$ENTÃO\ y^1 = 60,16 + 18,29y(k-1) - 56,19y(k-1) + 0,73y(k-1)$$

$$-59,84u(k-1) + 1,97u(k-2) - 2,57u(k-3),$$

$$R^2: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-187,50}{368,35}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-187,53}{189,00}\right)^2}\ E \qquad (5.11)$$

$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)-187,50}{158,59}\right)^2}\ E\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-0,56}{0,87}\right)^2}\ E$$

$$u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-0,71}{3,34}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-0,86}{8,27}\right)^2}$$

$$ENTÃO\ y^2 = 1,75 + 1,35y(k-1) - 0,57y(k-1) - 1,16y(k-1)$$

$$+6,26u(k-1) - 2,32u(k-2) - 0,24u(k-3),$$

$$R^3: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+3{,}78}{317{,}36}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+4{,}17}{419{,}12}\right)^2}\ E$$

$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+4{,}48}{244{,}01}\right)^2}\ E\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-0{,}00}{17{,}57}\right)^2}\ E$$

$$u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)+0{,}52}{5{,}13}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)+1{,}04}{3{,}71}\right)^2}$$

$$ENTÃO\ y^3 = 17{,}61 + 0{,}10y(k-1) - 2{,}95y(k-1) + 1{,}55y(k-1)$$

$$-0{,}14u(k-1) - 17{,}80u(k-2) - 0{,}48u(k-3),$$

$$R^4: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-7{,}42}{108{,}75}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-17{,}41}{263{,}99}\right)^2}\ E$$

$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)-27{,}49}{259{,}03}\right)^2}\ E\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)+6{,}31}{3{,}36}\right)^2}\ E$$

$$u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)+6{,}27}{11{,}34}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)+6{,}21}{6{,}70}\right)^2}$$

$$ENTÃO\ y^4 = -53643 + 0{,}63y(k-1) - 0{,}95y(k-1) + 309{,}92y(k-1)$$

$$-0{,}09u(k-1) - 93203u(k-2) - 0{,}33u(k-3),$$

$$R^5: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+62{,}50}{82{,}92}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+69{,}16}{64{,}74}\right)^2}\ E$$

$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+75{,}85}{124{,}33}\right)^2}\ E\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-1{,}40}{14{,}54}\right)^2}\ E$$

$$u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-1{,}25}{0{,}87}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-1{,}10}{9{,}52}\right)^2}$$

$$ENTÃO\ y^5 = -5{,}17 - 487{,}63y(k-1) - 3{,}13y(k-1) + 143910y(k-1)$$

$$-2{,}20u(k-1) + 10{,}92u(k-2) + 73{,}95u(k-3).$$

O modelo final é a somatória ponderada dos consequentes:

$$y(k) = \sum_{l=1}^{N} v_l \cdot y^l. \tag{5.12}$$

5.3. Sinal de excitação PRBS com ruído

Foi aplicado no *twin rotor* um sinal de excitação do tipo binário pseudo aleatório (*pseudo random binary signal,* PRBS) tanto para a inclinação quanto para a rotação, juntamente com um ruído de 10% do valor do sinal binário atual. A faixa de tensão enviada para o motor responsável pela inclinação foi de 6,6 a 10,7 V e para o de rotação foi -5,5 a -10 V e +5,5 a +10 V (valores selecionados através de testes), o motor de rotação possui duas faixas de trabalho, pois ele é responsável pela rotação para os dois lados.

Figura 5.49 – Tensão de inclinação usando o sinal PRBS

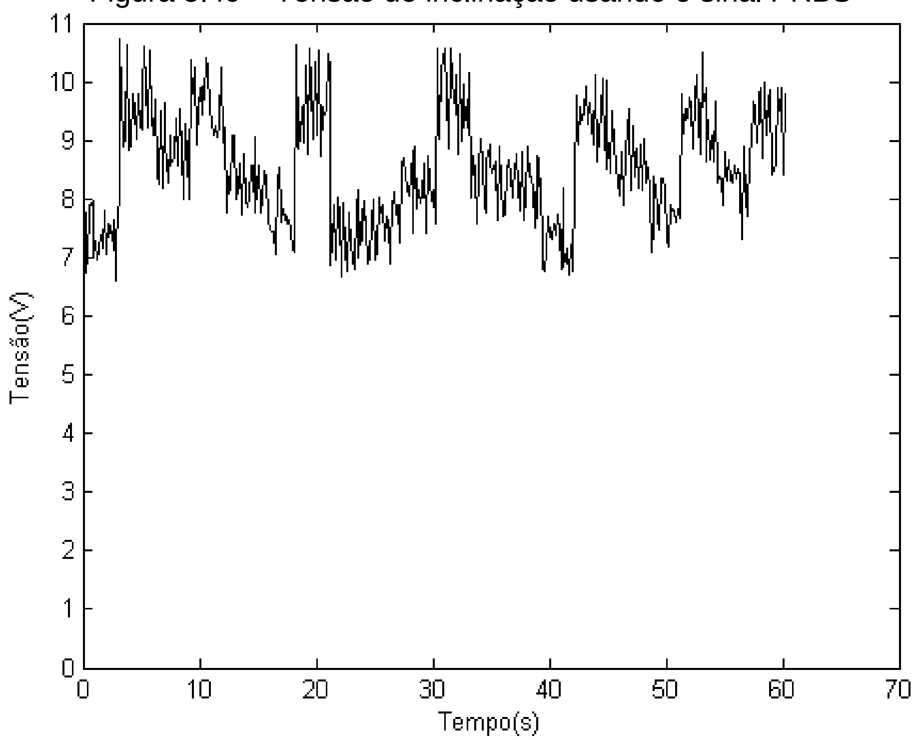
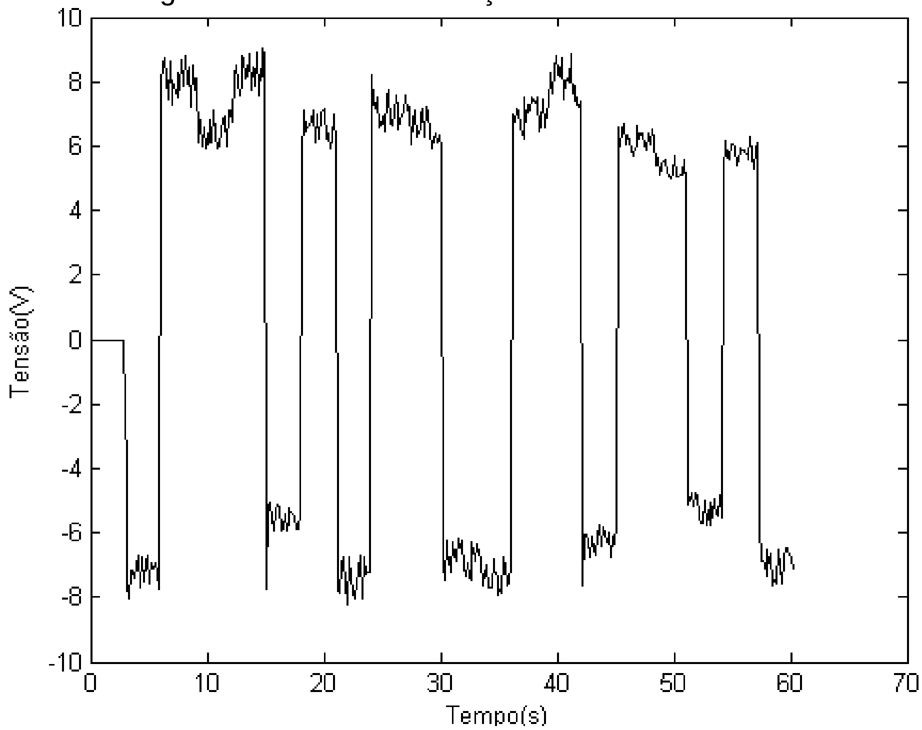


Figura 5.50 – Tensão rotação usando o sinal PRBS



Estes sinais PRBS foram aplicados por aproximadamente 61 segundos, onde foram coletadas 400 amostras das posições angulares do *twin rotor*, conforme mostram a Figura 5.51 e a Figura 5.52.

Figura 5.51 – Posição do eixo de inclinação do sinal de excitação PRBS

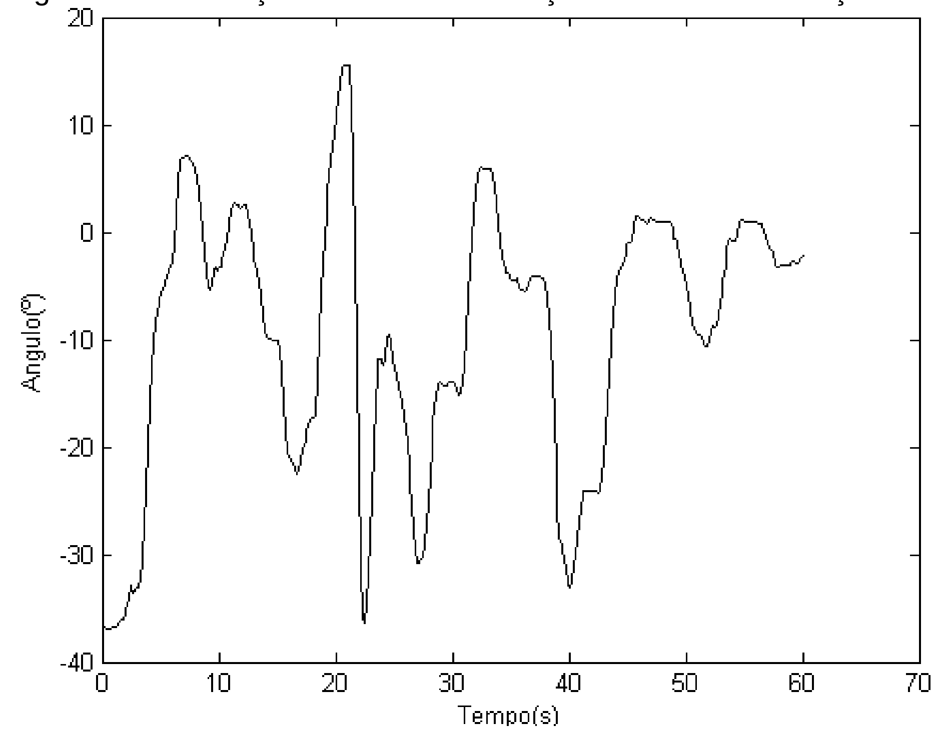
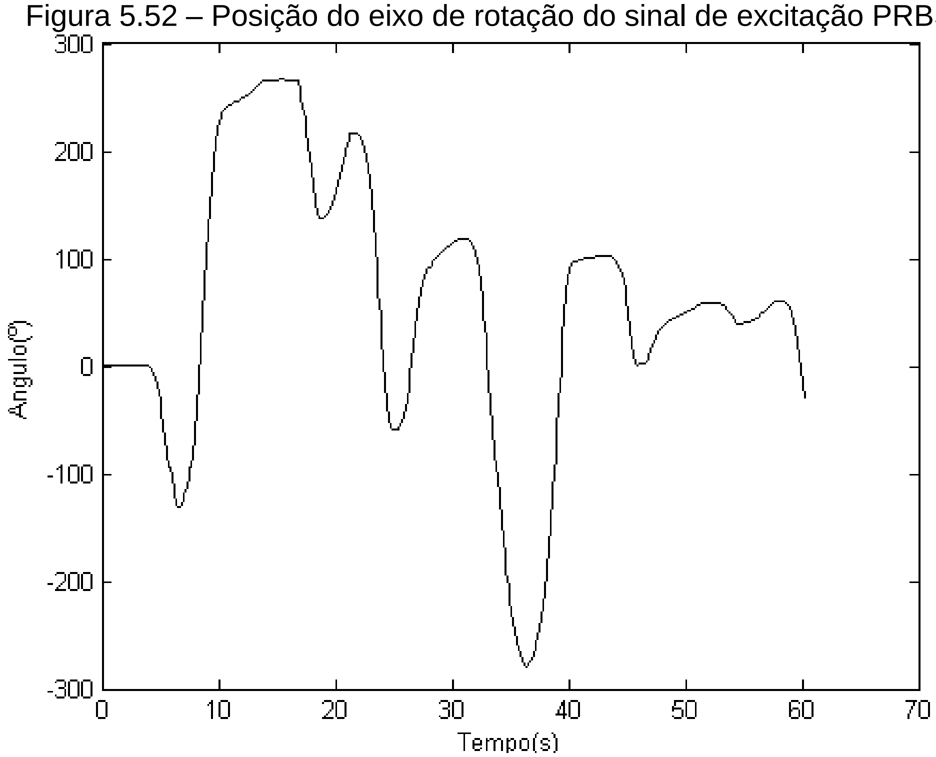


Figura 5.52 – Posição do eixo de rotação do sinal de excitação PRBS



As posições angulares de resposta do sinal PRBS com ruído, diferente do sinal senoidal, são de difícil análise em relação a linearidade e ao acoplamento, mas como já foi verificado no teste com o sinal senoidal que o sistema é não linear e possui acoplamento entre os eixos, a mesma regra se aplica para o sinal PRBS com ruído, pois o sistema é o mesmo. O sinal PRBS por ser aleatório tende a excitar todas as freqüências, diferente do senoidal que excita apenas uma e com a adição de um ruído de ±10% tende a dificultar ainda mais a modelagem.

É possível comparar o instante de tempo, o sinal de excitação e o valor lido de posição com a imagem da posição real, conforme a Figura 5.53 e a Figura 5.54, respectivamente.

Figura 5.53 - Comparativo entre o instante de tempo, o sinal de excitação PRBS e o valor de posição lido

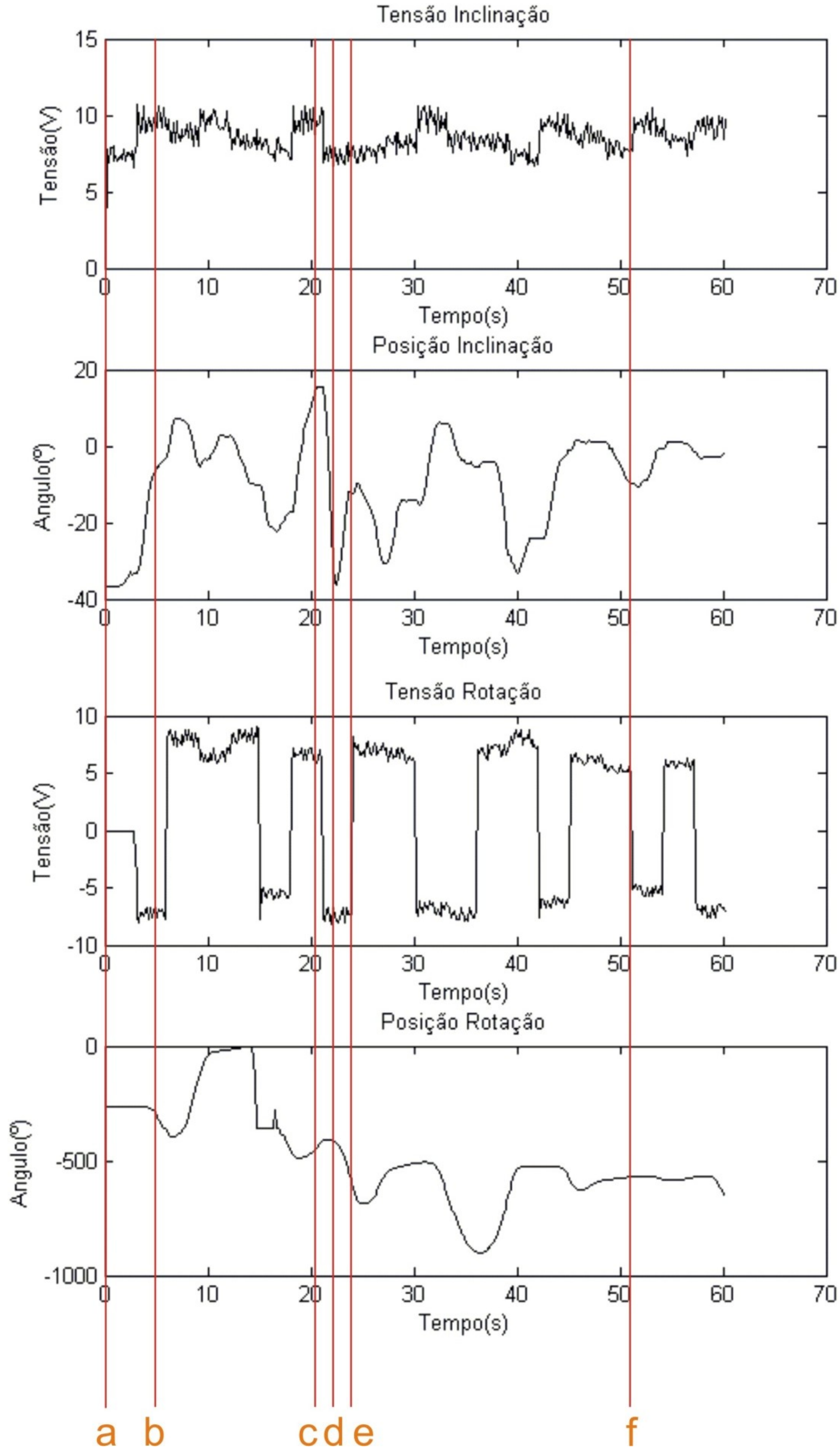
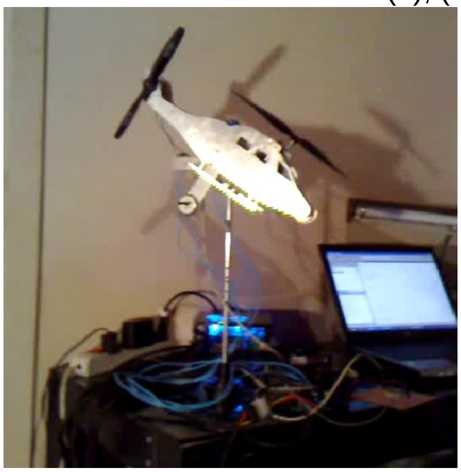
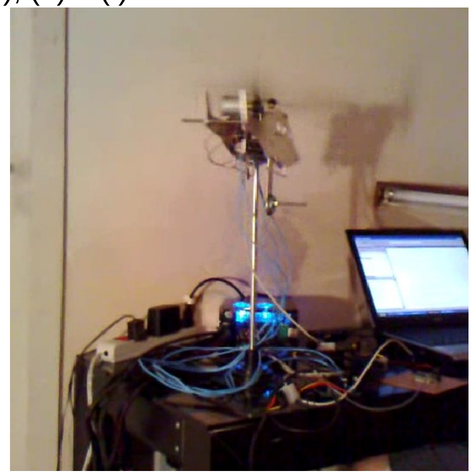


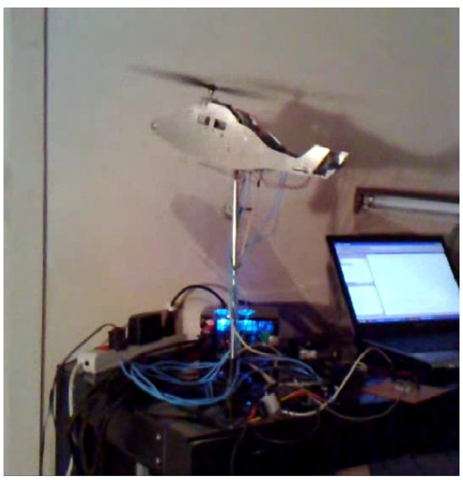
Figura 5.54 – Imagens da posição do *twin rotor,* referentes ao sinal de excitação PRBS, (a), (b), (c), (d), (e) e (f)



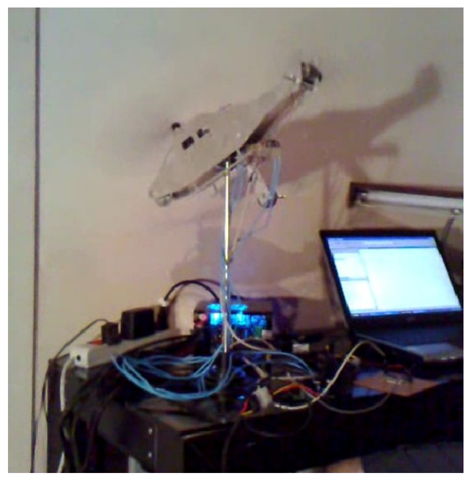
(a)



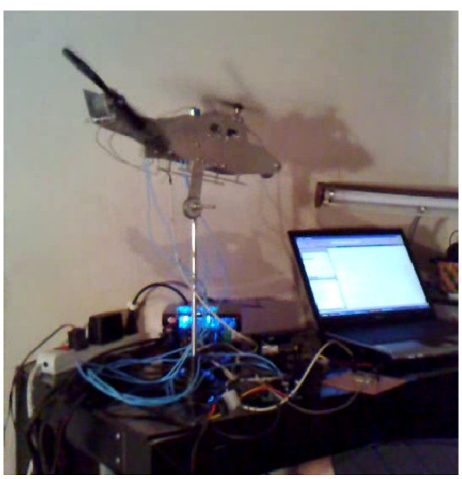
(b)



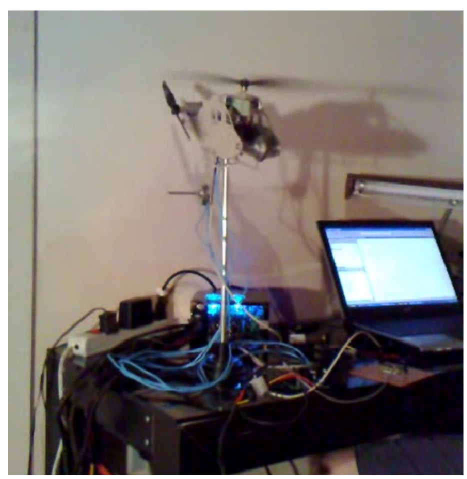
(c)



(d)



(e)



(f)

Para modelagem foram utilizados 373 dados e para estimação foram utilizados os 373 mais 27 para validação.

5.3.1. Modelagem NARMAX com Previsão de 1 Passo à Frente

Para a modelagem NARMAX previsão de 1 passo a frente para o sinal PRBS com ruído aplicado ao eixo de inclinação foi fixado o grau de não linearidade $n_l = 2$, o número de atraso do ruído linerar igual a 5, o número de interações para o cálculo do ruído 5 e o número de termos de processo igual a 5. E foram variados os máximos atrasos de n_y, n_u e n_e de 2 à 3, valores selecionados através de testes.

Tabela 5.9 – Modelagem NARMAX para o sinal PRBS de inclinação (previsão de 1 passo à frente)

Regressores			R^2	MSE	Erro			
n_y	n_u	n_e			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
2	2	2	0,9975	0,3707	3,1461	-2,4322	0,0207	0,6092
2	2	3	0,9975	0,3680	3.0410	-2,5236	-0,0032	0,6074
2	3	2	0,9974	0,3827	2,6103	-2,9041	-0,0173	0,6192
2	3	3	0,9975	0,3713	3,1906	-2,5658	0,0369	0,6089
3	2	2	0,9976	0,3652	2,8116	-3,3649	0,0218	0,6046
3	2	3	0,9976	0,3632	2,8060	-3,3520	0,0101	0,6033
3	3	2	0,9976	0,3636	2,8401	-3,3298	0,0176	0,6035
3	3	3	0,9975	0,3692	2,7841	-3,3401	0,0031	0,6084

O melhor resultado para o sinal PRBS de inclinação é com $R^2 = 0{,}9976$, porém três dos oito testes apresentaram este valor, então foi escolhido o modelo mais simples, com os atrasos $n_y = 3, n_u = 2$ e $n_e = 2$. Por ser uma passo à frente a variação dos regressores quase não alterou o resultado ficando com $0{,}9974 \leq R^2 \leq 0{,}9976$.

Figura 5.55 – Modelo NARMAX para o sinal PRBS de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3, n_u = 2$ e $n_e = 2$)

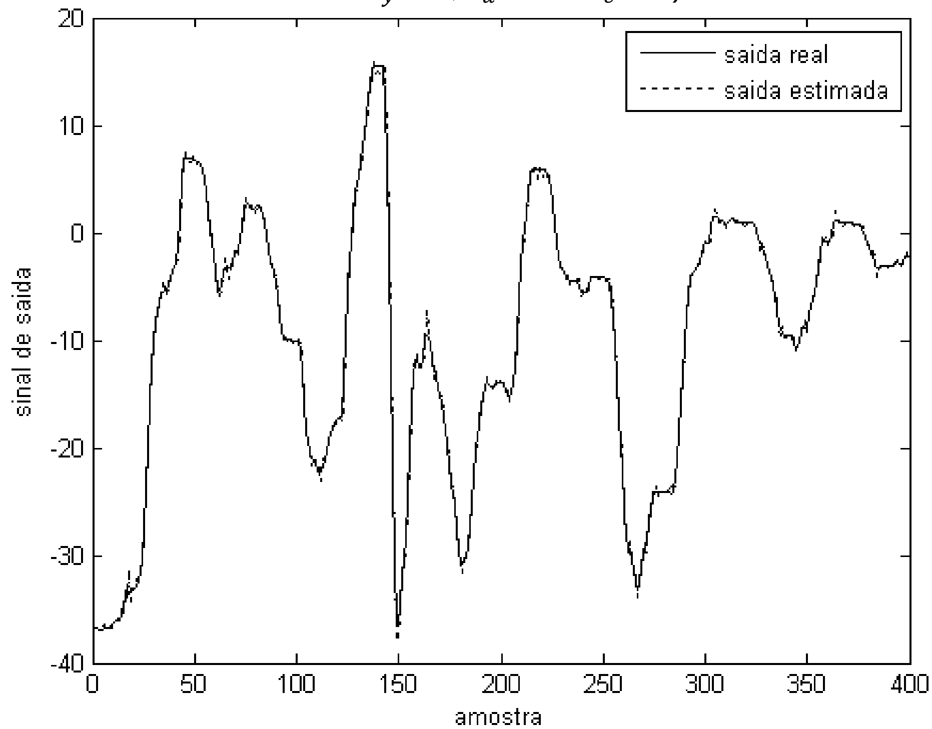
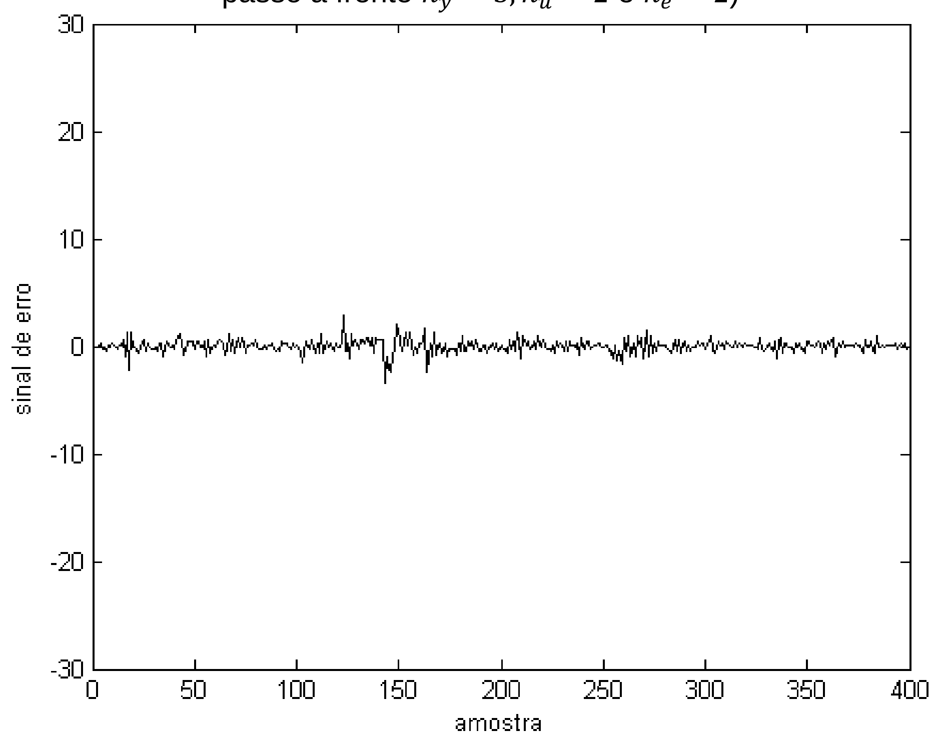


Figura 5.56 – Erro do modelo NARMAX para o sinal PRBS de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3, n_u = 2$ e $n_e = 2$)



O modelo matemático obtido para $n_y = 3, n_u = 2$ e $n_e = 2$ foi:

$$y(k) = 0{,}2268 \cdot 10^{1} \cdot y(k-1) - 0{,}1710 \cdot 10^{1} \cdot y(k-2) + 0{,}5043 \cdot y(k-3) - 0{,}9095 \cdot 10^{-2} \cdot u(k-1) \cdot y(k-3) - 0{,}1105 + 0{,}8335 \cdot e(k-3) + 0{,}5249 \cdot 10^{-1} \cdot e(k-2) + 0{,}8340 \cdot 10^{-1} \cdot e(k-2) \cdot y(k-3) - 0{,}3966 \cdot 10^{-1} \cdot e(k-1) \cdot e(k-1) - 0{,}8078 \cdot 10^{-1} \cdot e(k-1) \cdot y(k-3). \quad (5.13)$$

Para a modelagem NARMAX previsão de 1 passo à frente para o sinal PRBS com ruído aplicado ao eixo de rotação foi fixado o grau de não linearidade $n_l = 2$, o número de atraso do ruído linerar igual a 10 (foi aumentado de 5 para 10, em relação ao testes com o eixo de inclinação, devido ao mau condicionamento numérico que impossibilitaram os cálculos), o número de interações para o cálculo do ruído 5 e o número de termos de processo igual a 5. E foram variados os máximos atrasos de n_y, n_u e n_e de 2 até 3.

Tabela 5.10 – Modelagem NARMAX para o sinal PRBS de rotação (previsão de 1 passo à frente)

Regressores			R^2	MSE	Erro			
n_y	n_u	n_e			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
2	2	2	0,9995	6,4774	23,2495	-21,4430	0,1355	2,5446
2	2	3	0,9995	6,4722	23,1341	-21,9440	0,2059	2,5388
2	3	2	0,9995	6,4711	23,0985	-21,8641	0,1131	2,5445
2	3	3	0,9995	6,4942	23,3364	-21,2340	0,2197	2,5420
3	2	2	0,9995	6,4653	23,0987	-21,9412	0,1291	2,5426
3	2	3	0,9995	6,4718	23,3161	-21,6658	0,1617	2,5420
3	3	2	0,9995	6,4688	23,1147	-21,9493	0,1043	2,5444
3	3	3	0,9995	6,4976	23,3669	-21,2897	0,2128	2,5433

Todos os testes foram promissores, apresentando $R^2 = 0{,}9995$, então foi escolhido o modelo mais simples com os atrasos $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 2$.

Figura 5.57 – Modelo NARMAX para o sinal PRBS de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 2$)

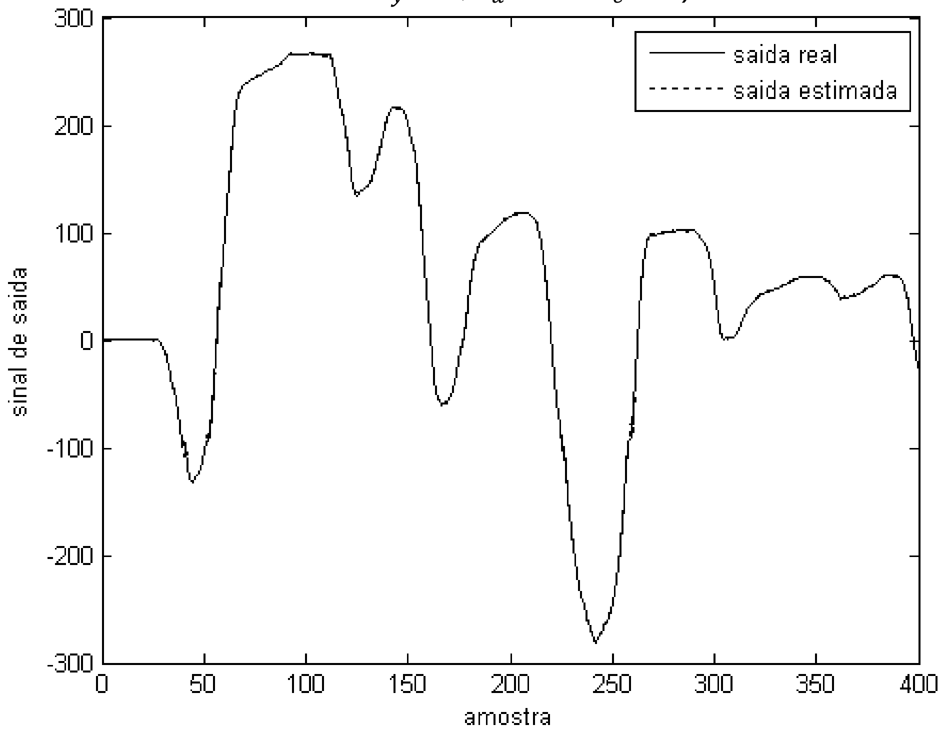
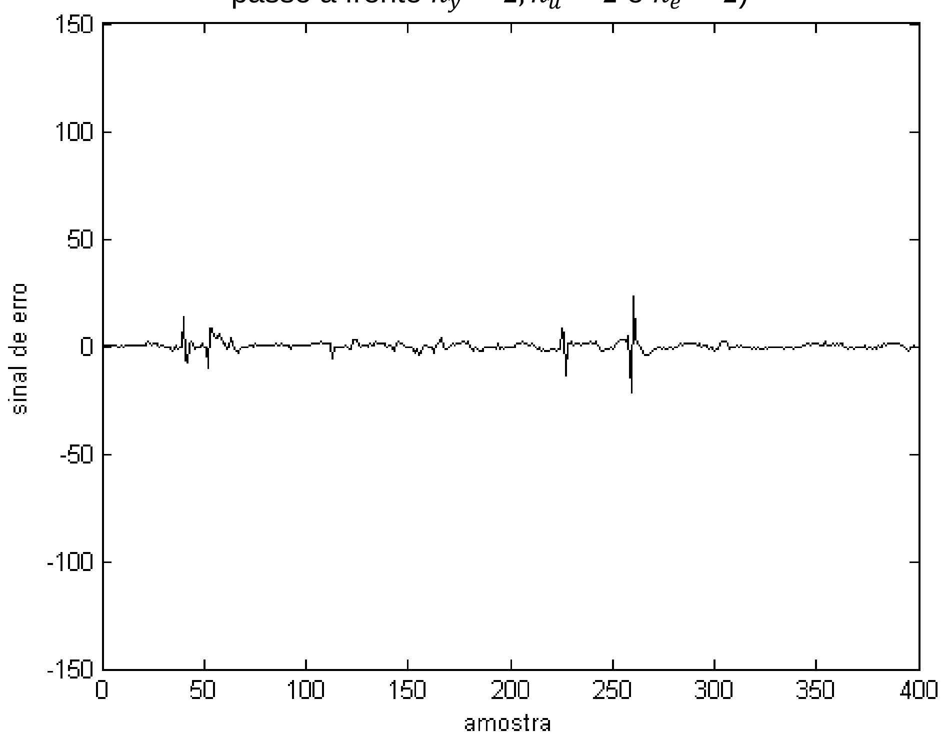


Figura 5.58 – Erro do modelo NARMAX para o sinal PRBS de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 2$)



O modelo matemático obtido para $n_y = 2, n_u = 2$ e $n_e = 2$ foi:

$$
\begin{aligned}
y(k) = {} & 0{,}1881 \cdot 10^{1} \cdot y(k-1) - 0{,}8850 \cdot y(k-2) + 0{,}1867 \cdot u(k-2) - \\
& 0{,}4595 \cdot 10^{-2} \cdot u(k-2) \cdot y(k-1) + 0{,}4283 \cdot 10^{-2} \cdot u(k-2) \cdot y(k-2) + \\
& 0{,}2713 \cdot 10^{-2} \cdot e(k-2) \cdot e(k-2) - 0{,}1812 \cdot 10^{-2} \cdot e(k-2) \cdot u(k-2) + \\
& 0{,}2035 \cdot 10^{-2} \cdot e(k-2) \cdot y(k-2) - 0{,}4436 \cdot 10^{-3} \cdot e(k-2) \cdot e(k-1) + \\
& 0{,}2137 \cdot 10^{-2} \cdot e(k-2) \cdot e(k-1) + 0{,}1643 \cdot 10^{-2} \cdot e(k-2) \cdot y(k-1) - \\
& 0{,}8156 \cdot 10^{-5} \cdot e(k-1) \cdot y(k-1) - 0{,}6304 \cdot 10^{-3} \cdot e(k-1) + 0{,}6180 \cdot 10^{-3} \cdot \\
& e(k-1) + 0{,}6180 \cdot 10^{-3} \cdot e(k-1) \cdot u(k-2) + 0{,}7703 \cdot 10^{-3} \cdot e(k-1) \cdot \\
& u(k-1)
\end{aligned}
\tag{5.14}
$$

5.3.2. Modelagem Nebulosa TSK com Previsão de 1 Passo à Frente

Para a modelagem nebulosa TSK previsão de 1 passo a frente para o sinal PRBS com ruído aplicado ao eixo de inclinação foi utilizado o agrupamentos FCM para obtenção dos centros das funções de pertinência e a evolução diferencial para otimização da largura das funções de pertinência. Na modelagem TSK foi utilizado o número de funções de pertinência igual a 5. No FCM foi utilizado o número de grupos igual ao número de funções de pertinência, o grau de nebulosidade igual a 2 e critério de parada 10^{-3}. Na evolução diferencial foi utilizada a quantidade de parâmetros a serem otimizados igual ao número de funções de pertinência vezes a quantidade de variáveis linguísticas, a quantidade de variáveis linguísticas é a soma dos máximos atrasos referente à n_u e n_y, a quantidade de membros da população foi definido com 6 vezes a quantidade de parâmetros a serem otimizados, a taxa de mutação utilizada foi 0,8, a taxa de cruzamento 0,5, foram realizadas dez interações, a estratégia utilizada foi ED/*rand*/1/*Bin* e a espessura das funções de pertinência a serem otimizadas foram limitadas entre 0,1 e o módulo da diferença entre o valor máximo e o mínimo da variável linguística em questão, universo de discurso, valores selecionado através de testes.

Tabela 5.11 – Modelagem Nebulosa TSK para o sinal PRBS de inclinação (previsão de 1 passo à frente)

Regressores		R^2	MSE	Erro			
n_y	n_u			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
1	1	0.9829	2.0791	4.3586	-9.3623	-0.0143	1.4437
1	2	0.9843	1.9081	4.3806	-8.4912	-0.0176	1.3830
1	3	0.9849	1.8421	4.8039	-9.1929	-0.0210	1.3589
2	1	0.9980	0.2362	2.1212	-1.4503	-0.0032	0.4866
2	2	0.9980	0.2367	2.0560	-1.5392	0.0008	0.4872
2	3	0.9980	0.2330	2.0311	-1.7970	-0.0071	0.4832
3	1	0.9981	0.2207	2.3024	-1.5584	-0.0057	0.4704
3	2	0.9982	0.2111	2.0493	-1.7106	-0.0018	0.4601
3	3	0.9983	0.2039	1.8373	-1.4862	-0.0031	0.4522

O melhor resultado da Tabela 5.11 para o sinal senoidal de rotação é com os atrasos $n_y = 3$ e $n_u = 3$ levando em consideração o teste com maior $R^2 = 0{,}9983$.

Figura 5.59 – Modelo TSK para o sinal PRBS de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

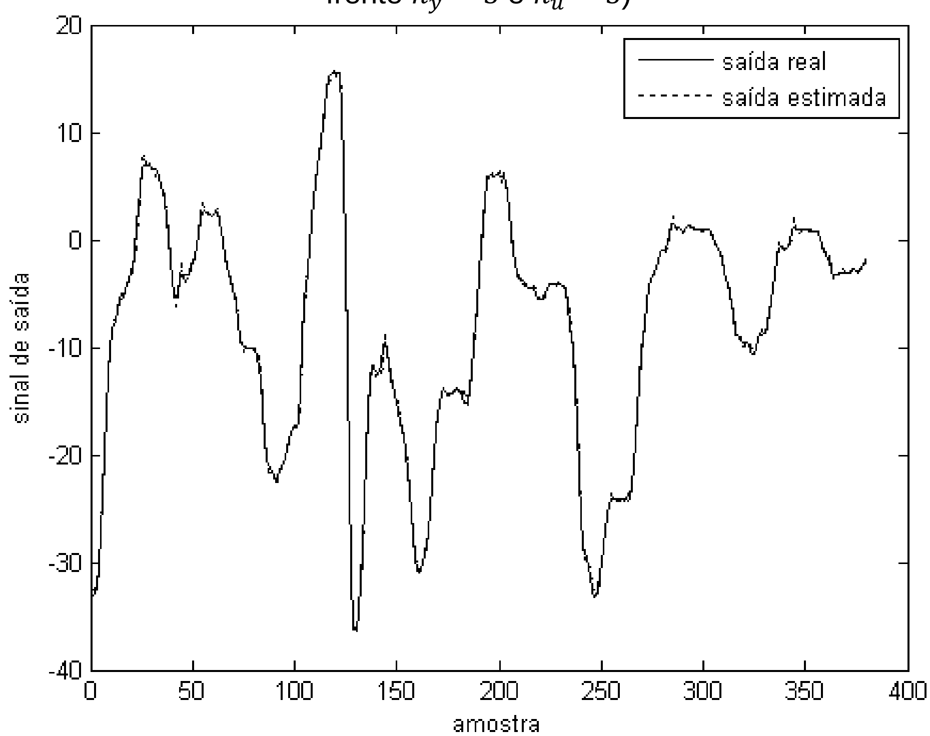


Figura 5.60 – Erro do modelo TSK para o sinal PRBS de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

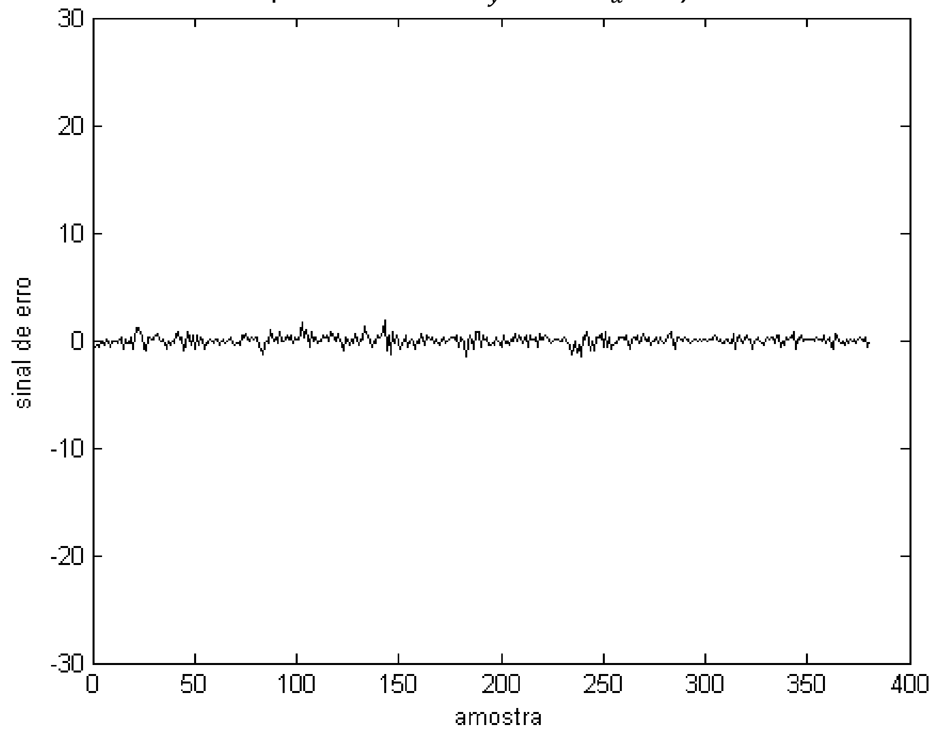


Figura 5.61 – Funções de pertinência de $y(k-1)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

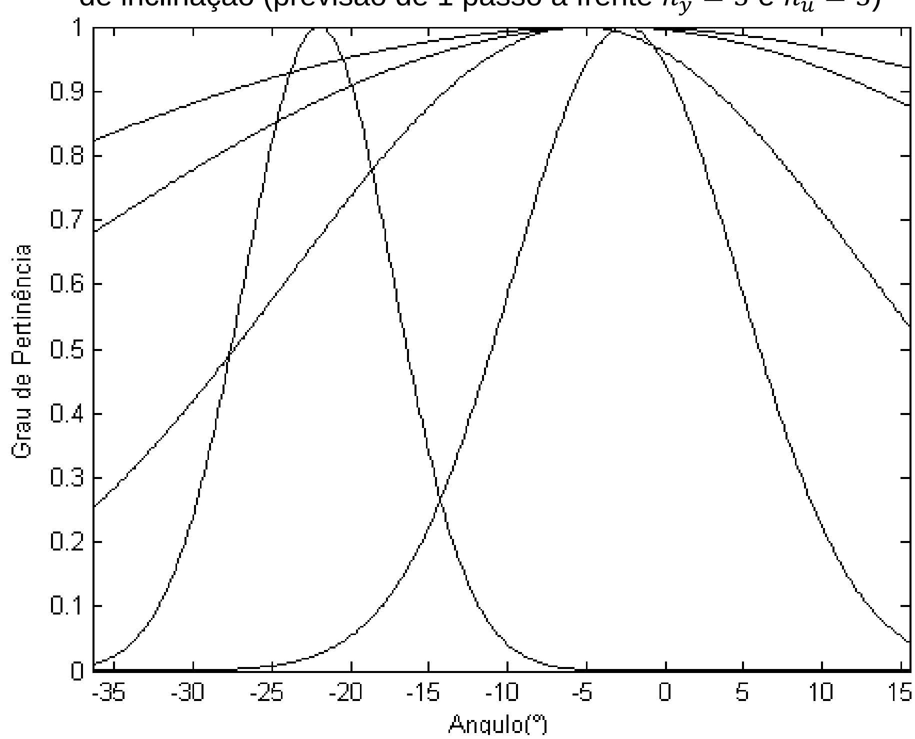


Figura 5.62 – Funções de pertinência de $y(k-2)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

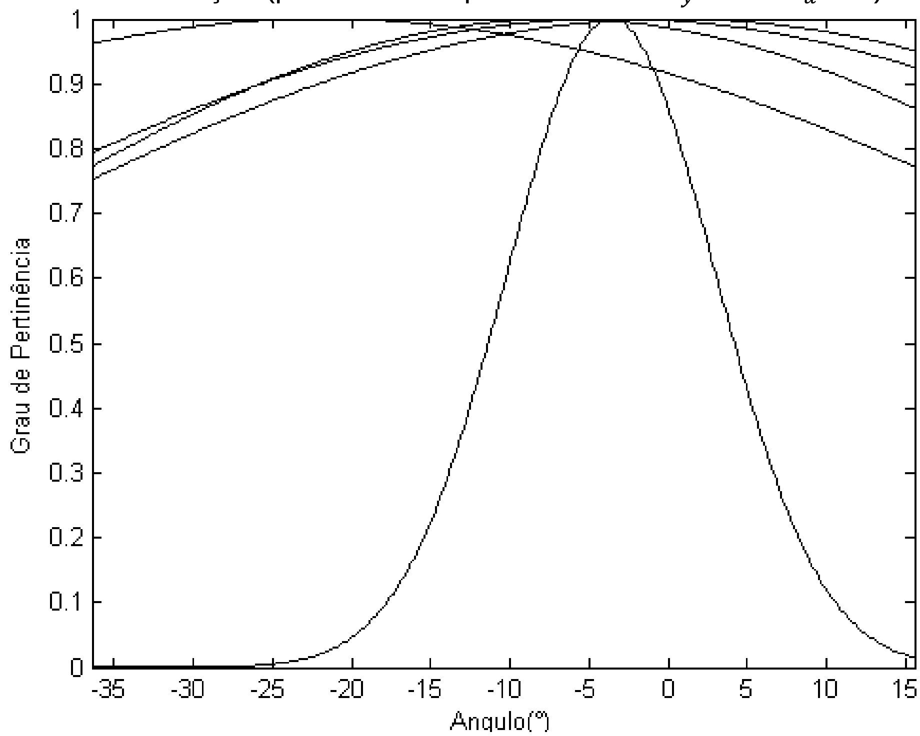


Figura 5.63 – Funções de pertinência de $y(k-3)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

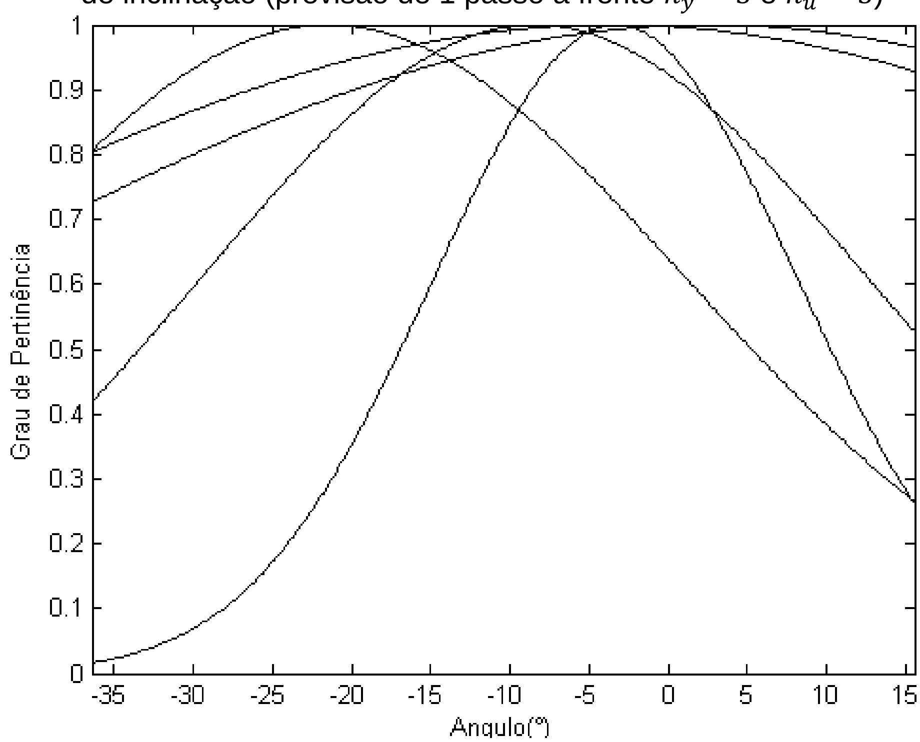


Figura 5.64 – Funções de pertinência de $u(k-1)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

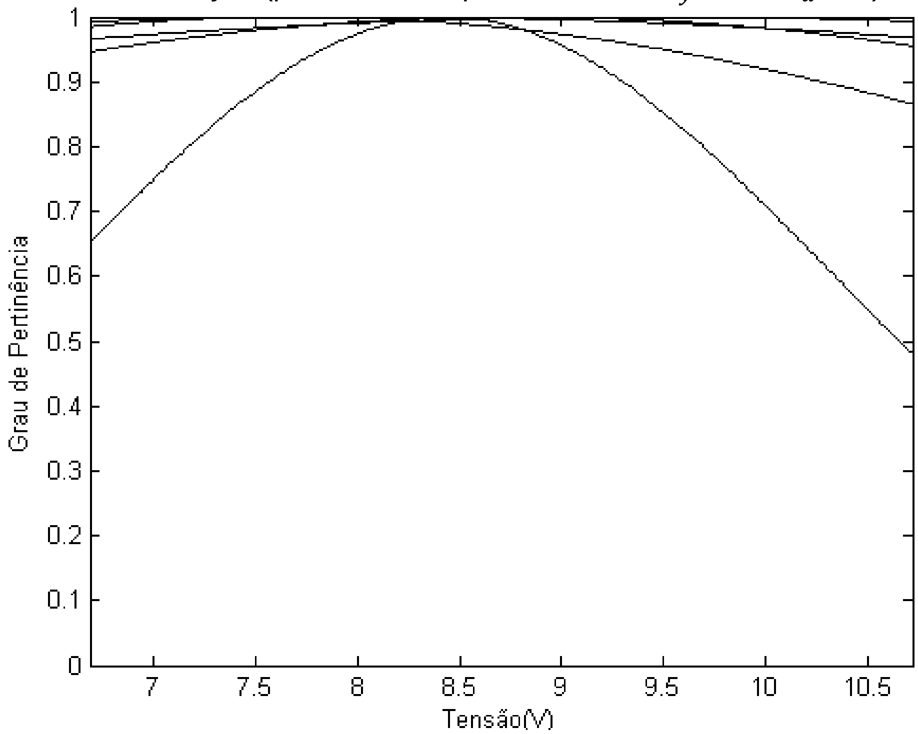


Figura 5.65 – Funções de pertinência de $u(k-2)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

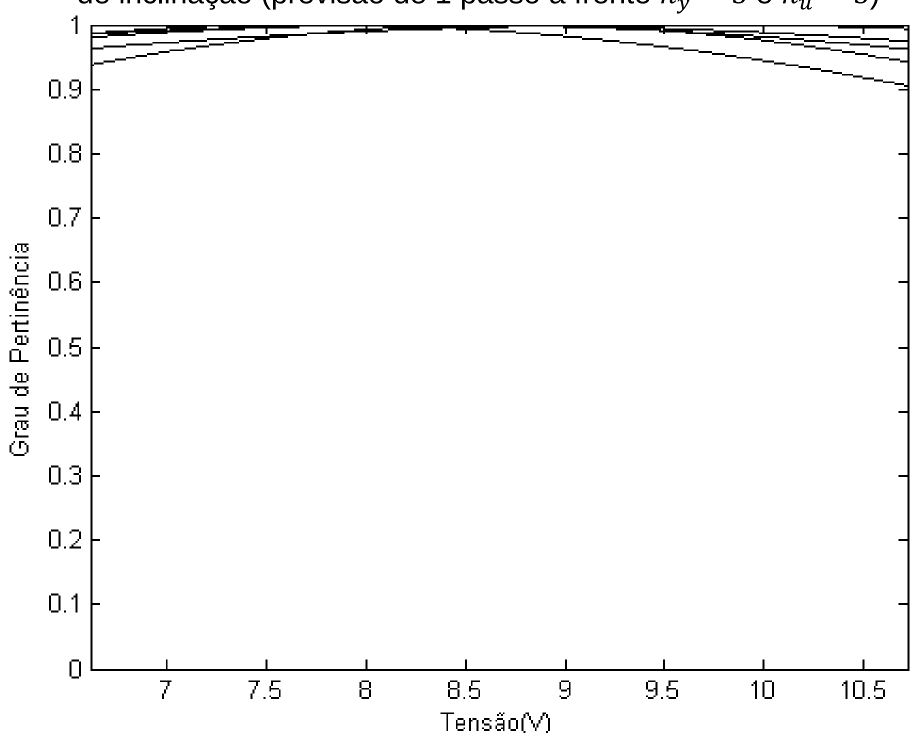
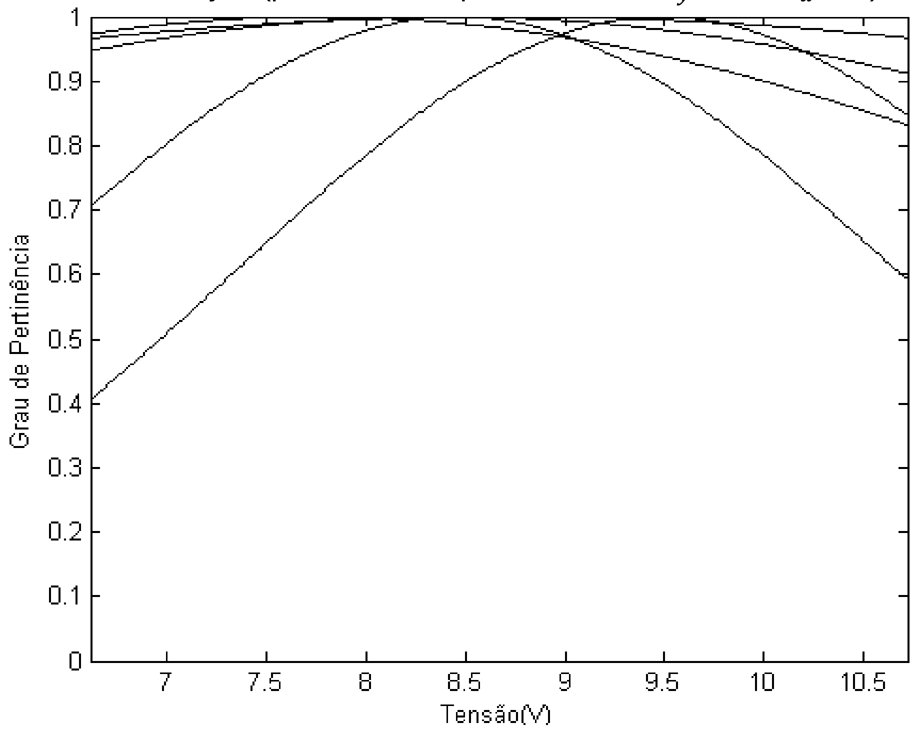


Figura 5.66 – Funções de pertinência de $u(k-3)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)



As regras nebulosas obtidas para $n_y = 3$ e $n_u = 3$ foram:

$$\begin{aligned}
&R^1{:}\, SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+2{,}52}{7{,}22}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-0{,}21}{48{,}50}\right)^2}\ E \\
&y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)-2{,}53}{48{,}70}\right)^2}\ E\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-7{,}99}{10{,}72}\right)^2}\ E \\
&u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-8{,}32}{8{,}60}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-8{,}45}{2{,}20}\right)^2} \\
&ENTÃO\ y^1 = -29{,}65 + 1{,}29y(k-1) - 0{,}38y(k-2) - 0{,}33y(k-3) \\
&+0{,}35u(k-1) - 0{,}85u(k-2) + 3{,}58u(k-3),
\end{aligned}$$

(5.15)

$$\begin{aligned}
&R^2{:}\, SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+2{,}38}{18{,}67}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+6{,}87}{41{,}05}\right)^2}\ E \\
&y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+8{,}45}{21{,}17}\right)^2}\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-9{,}46}{10{,}55}\right)^2}\ E \\
&u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-9{,}54}{10{,}72}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-9{,}48}{2{,}13}\right)^2} \\
&ENTÃO\ y^2 = -10{,}12 + 1{,}09y(k-1) - 0{,}12y(k-2) - 0{,}13y(k-3) \\
&-0{,}69u(k-1) + 0{,}59u(k-2) - 0{,}92u(k-3),
\end{aligned}$$

$$R^3: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+22,01}{4,74}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+21,82}{51,94}\right)^2}\ E$$

$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+21,49}{22,71}\right)^2}\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-7,67}{5,65}\right)^2}\ E$$

$$u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-7,71}{6,72}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-7,75}{4,88}\right)^2}$$

$$ENTÃO\ y^3 = 1,31 + 1,90y(k-1) - 0,54y(k-2) - 0,36y(k-3)$$

$$+0,26u(k-1) - 0,52u(k-2) + 0,42u(k-3),$$

$$R^4: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+3,67}{52,39}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+3,50}{40,34}\right)^2}\ E$$

$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+3,33}{11,53}\right)^2}\ u(k-1)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-8,80}{6,35}\right)^2}\ E$$

$$u(k-2)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-8,70}{5,82}\right)^2}\ E\ u(k-3)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-8,68}{7,89}\right)^2}$$

$$ENTÃO\ y^4 = -1,18 + 2,32y(k-1) - 2,14y(k-2) + 0,92y(k-3)$$

$$+2,42u(k-1) + 0,56u(k-2) - 2,52u(k-3),$$

$$R^5: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+3,64}{37,24}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+3,60}{6,60}\right)^2}\ E$$

$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+3,59}{49,60}\right)^2}\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-8,43}{1,88}\right)^2}\ E$$

$$u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-8,38}{10,30}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-8,39}{5,40}\right)^2}$$

$$ENTÃO\ y^5 = 33,39 + 3,56y(k-1) - 2,42y(k-2) + 0,37y(k-3)$$

$$-1,71u(k-1) - 0,32u(k-2) - 1,51u(k-3).$$

O modelo final é a somatória ponderada dos consequentes:

$$y(k) = \sum_{l=1}^{N} v_l \cdot y^l \tag{5.16}$$

Para a modelagem nebulosa TSK previsão de 1 passo à frente para o sinal PRBS com ruído aplicado ao eixo de rotação foram utilizados os mesmos parâmetros da modelagem do eixo de inclinação.

Tabela 5.12 – Modelagem nebulosa TSK para o sinal PRBS de rotação (previsão de 1 passo à frente)

Regressores		R^2	MSE	Erro			
n_y	n_u			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
1	1	0.9970	49.5833	24.4539	-32.6059	0.1348	7.0495
1	2	0.9973	43.3406	24.2227	-28.8327	0.1428	6.5904
1	3	0.9977	38.0420	23.1177	-23.4230	0.0933	6.1752
2	1	0.9996	5.6949	22.8963	-16.7789	-0.0076	2.3895
2	2	0.9997	4.5780	17.2871	-12.5355	0.0113	2.1424
2	3	0.9997	4.0505	12.8965	-14.6879	-0.0213	2.0151
3	1	0.9997	3.5951	11.2114	-14.5688	0.0024	1.8985
3	2	0.9998	3.2932	10.4078	-11.8315	-0.0018	1.8171
3	3	0.9998	2.4734	12.0474	-9.8880	-0.0100	1.5747

A variação do R^2 foi muito pequena, $0{,}9970 \leq R^2 \leq 0{,}9998$, sendo que 2 resultados apresentaram o maior valor do R^2, onde foi escolhido o mais simples deles que é o que possui os atrasos $n_y = 3$ e $n_u = 2$, os resultados obtidos foram excelentes.

Figura 5.67 – Modelo TSK para o sinal PRBS de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 2$)

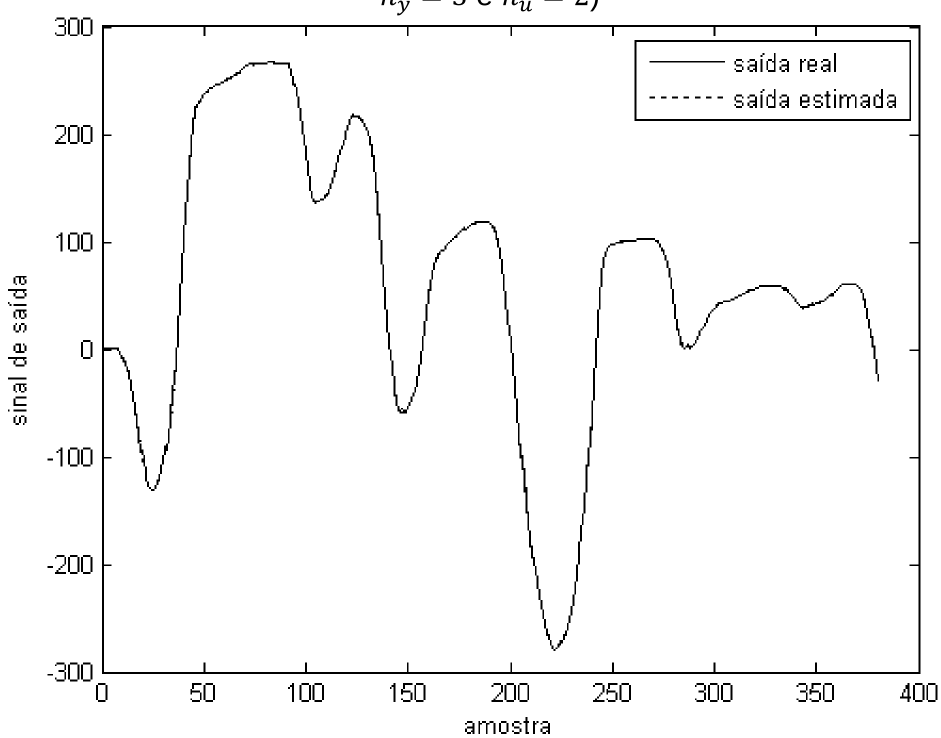


Figura 5.68 – Erro do modelo TSK para o sinal PRBS de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 2$)

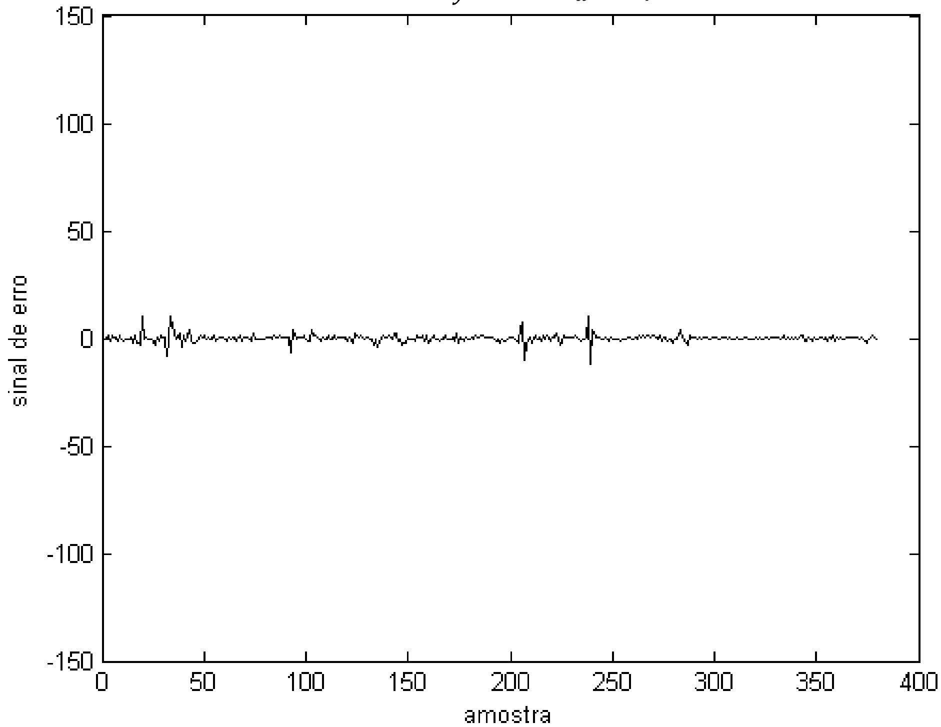


Figura 5.69 – Funções de pertinência de $y(k-1)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 2$)

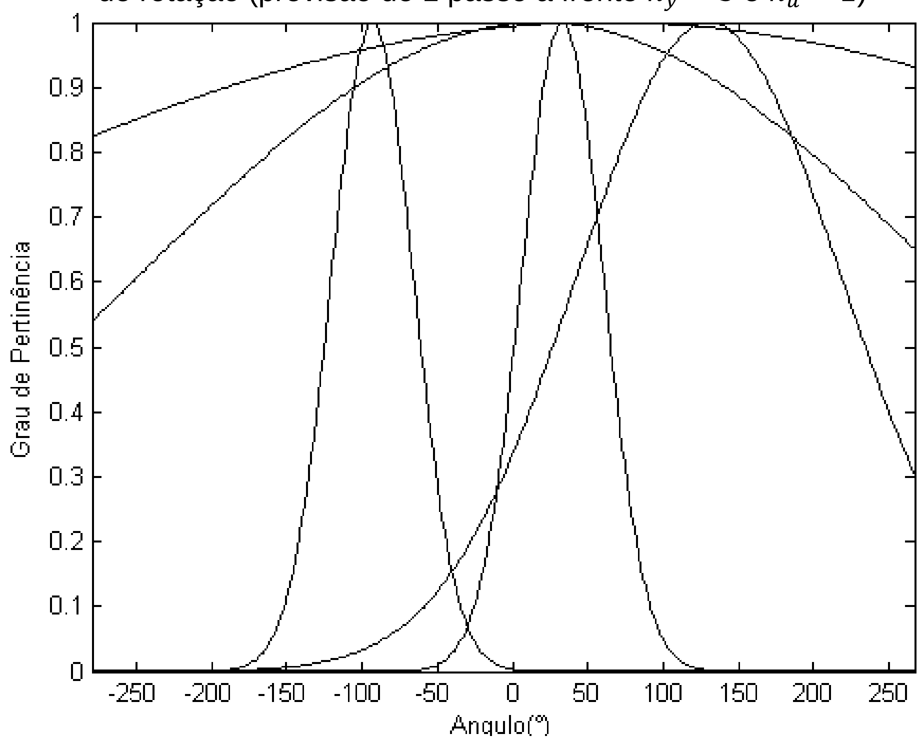


Figura 5.70 – Funções de pertinência de $y(k-2)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 2$)

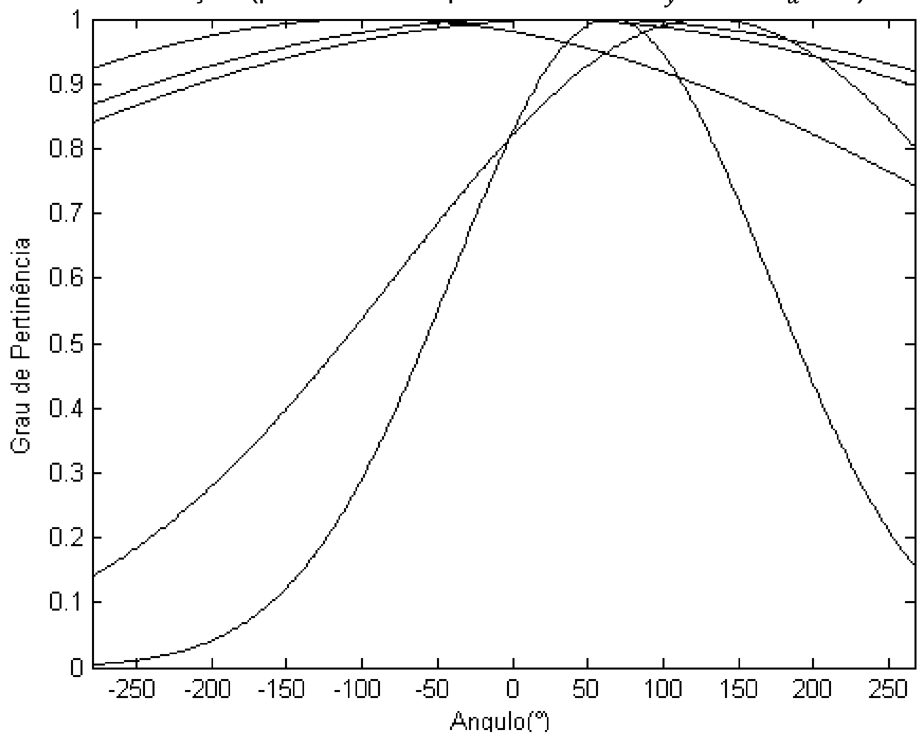


Figura 5.71 – Funções de pertinência de $y(k-3)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 2$)

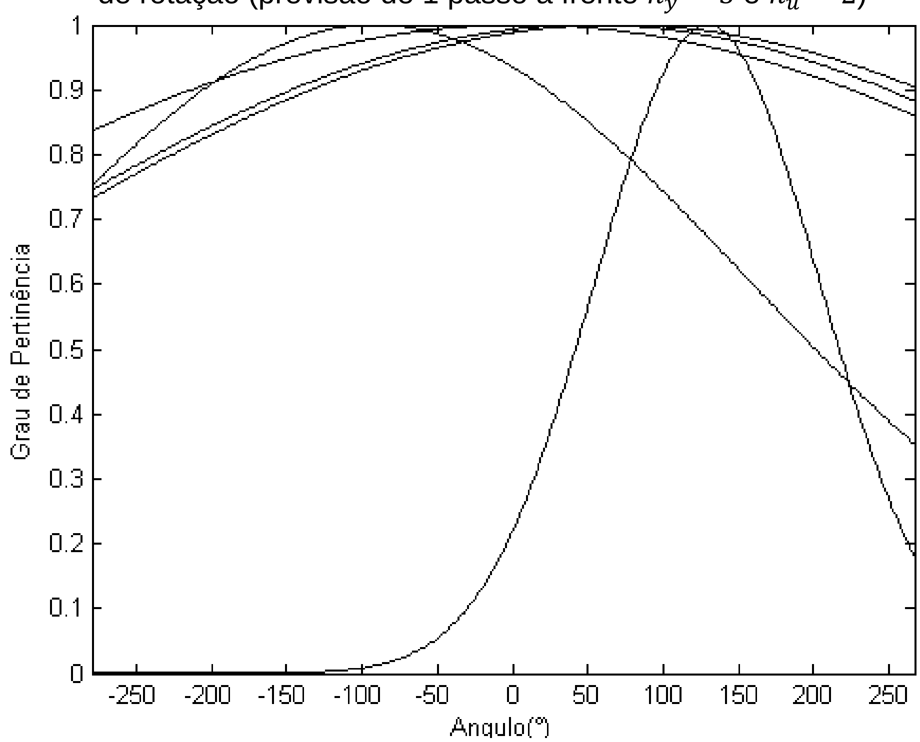


Figura 5.72 – Funções de pertinência de $u(k-1)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 2$)

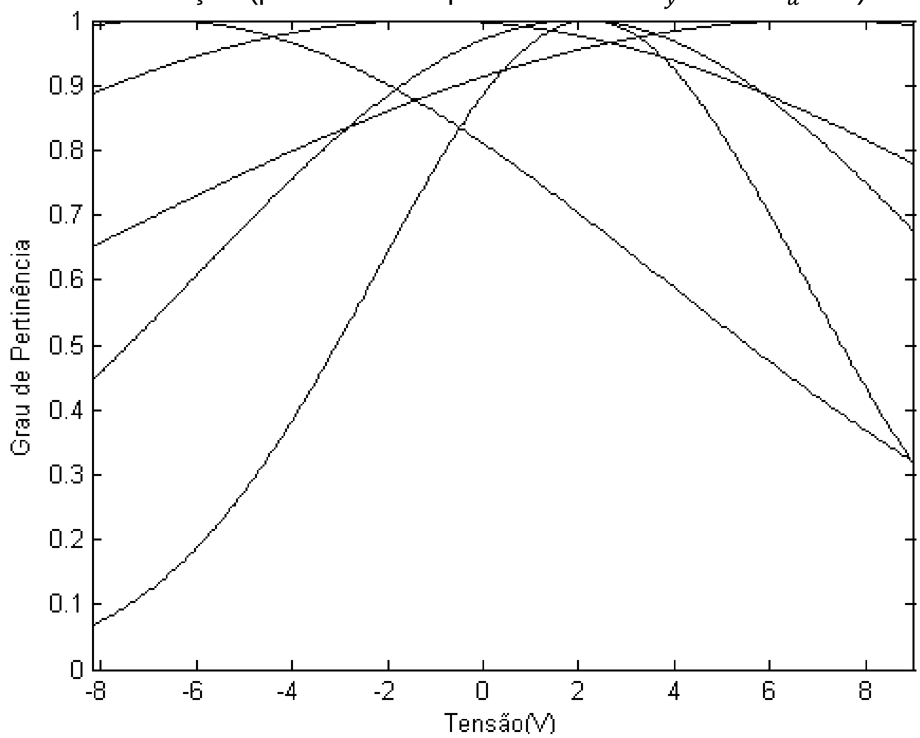
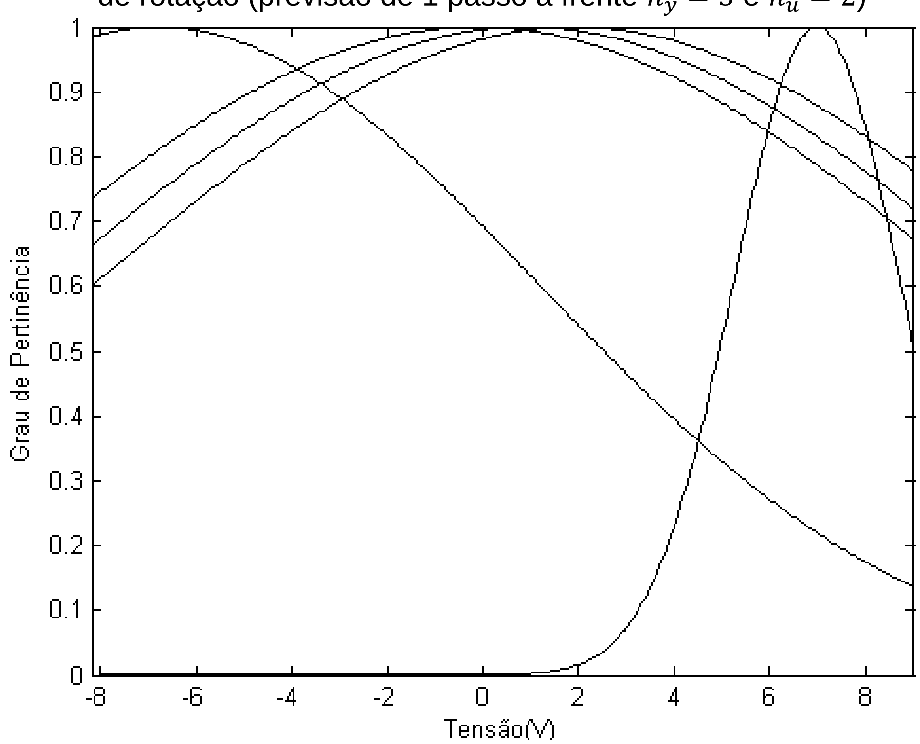


Figura 5.73 – Funções de pertinência de $u(k-2)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de rotação (previsão de 1 passo à frente $n_y = 3$ e $n_u = 2$)



As regras nebulosas obtidas para $n_y = 3$ e $n_u = 2$ foram:

$$
\begin{gathered}
R^1\text{: } SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-60{,}83}{546{,}15}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-64{,}79}{104{,}84}\right)^2}\ E \\
y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)-68{,}48}{440{,}74}\right)^2}\ E\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)+1{,}15}{14{,}34}\right)^2}\ E \\
u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)+0{,}12}{10{,}27}\right)^2} \\
ENTÃO\ y^1 = -1{,}43 + 2{,}99y(k-1) - 2{,}99y(k-2) + 1{,}00y(k-3) \\
+0{,}06u(k-1) - 0{,}26u(k-2), \\
\\
R^2\text{: } SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-33{,}05}{27{,}30}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-42{,}50}{546{,}15}\right)^2}\ E \\
y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)-51{,}09}{430{,}75}\right)^2}\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)+6{,}78}{10{,}45}\right)^2}\ E \\
u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)+6{,}78}{7{,}91}\right)^2} \\
ENTÃO\ y^2 = 3{,}98 + 1{,}92y(k-1) - 0{,}82y(k-2) - 0{,}11y(k-3) \\
-0{,}08u(k-1) + 0{,}77u(k-2), \\
\\
R^3\text{: } SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-130{,}41}{88{,}14}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-129{,}89}{206{,}44}\right)^2}\ E \\
y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)-129{,}33}{74{,}29}\right)^2}\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-1{,}95}{7{,}95}\right)^2}\ E \\
u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-1{,}91}{10{,}00}\right)^2} \\
ENTÃO\ y^3 = 1{,}98 + 0{,}56y(k-1) + 1{,}70y(k-2) - 1{,}28y(k-3) \\
+0{,}00u(k-1) + 0{,}44u(k-2), \\
\\
R^4\text{: } SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-18{,}28}{267{,}72}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-11{,}64}{546{,}15}\right)^2}\ E \\
y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)-5{,}58}{476{,}73}\right)^2}\ u(k-1)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-6{,}97}{16{,}34}\right)^2}\ E \\
u(k-2)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-6{,}99}{1{,}74}\right)^2} \\
ENTÃO\ y^4 = 0{,}50 + 3{,}48y(k-1) - 3{,}99y(k-2) + 1{,}51y(k-3) \\
-0{,}07u(k-1) + 0{,}01u(k-2),
\end{gathered}
\tag{5.17}
$$

$$R^5: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+93,05}{27,30}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+92,75}{466,66}\right)^2}\ E$$

$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+91,46}{248,32}\right)^2}\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-2,21}{4,48}\right)^2}\ E$$

$$u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-0,88}{10,00}\right)^2}$$

$$ENTÃO\ y^5 = 9,52 - 4,68y(k-1) + 10,87y(k-2) - 5,14y(k-3)$$

$$-3,19u(k-1) + 4,95u(k-2).$$

O modelo final é a somatória ponderada dos consequentes:

$$y(k) = \sum_{l=1}^{N} v_l \cdot y^l, \tag{5.18}$$

5.3.3. Modelagem NARMAX com Previsão de *N* Passos à Frente

Na previsão do modelo NARMAX com *N* passos à frente do eixo de inclinação foi fixado o número de atrasos do ruído linerar igual a 10, o número de interações para o cálculo do ruído 5 e o número de termos de processo igual a 9. E foram variados os máximos atrasos de n_y, n_u e n_e de 2 até 3. Porém os resultados não foram satisfatórios, onde os resultados do R^2 ficaram baixos, então foi aumentado o grau de não-linearidade (n_l) para 3 e foram variados os máximos atrasos de n_y, n_u e n_e de 2 até 4, valores selecionado através de testes.

Tabela 5.13 – Modelagem NARMAX para o sinal PRBS de inclinação (previsão de *N* passos à frente)

Regressores				R^2	MSE	Erro			
n_l	n_y	n_u	n_e			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
2	2	2	2	0,5097	75,0292	14,9000	-25,2542	-1,2695	8,5791
2	2	2	3	0	153,0112	27,0856	-30,0205	-1,4849	12,2956
2	2	3	2	0,6616	51,7858	16,1515	-23,0672	0,0206	7,2052
2	2	3	3	0,3327	102,1082	31,2437	-24,8110	1,7386	9,9666
2	3	2	2	0,6565	52,5662	15,1606	-23,3368	0,6309	7,2318
2	3	2	3	0,6361	55,6833	13,9792	-22,3875	-0,3497	7,4632
2	3	3	2	0,5554	68,0351	16,0087	-26,5074	-1,4112	8,1369
2	3	3	3	0,4938	77,4545	18,4391	-21,2667	0,4369	8,8009
3	2	2	2	0,6309	56,4833	20,9088	-18,8160	0,3305	7,5176
3	2	2	3	0,6008	61,0882	22,7777	-22,3054	0,7232	7,7921
3	2	3	2	0,6197	58,1916	21,7988	-19,5673	0,4565	7,6242
3	2	3	3	0,6059	60,3084	21,0679	-19,6390	-0,1925	7,7731
3	3	2	2	0,6742	49,8537	16,5644	-18,8683	-0,5439	7,0485
3	3	2	3	0,6754	49,6693	15,0667	-19,1919	-0,8760	7,0017
3	3	3	2	0,6803	48,9260	15,4168	-19,2044	-0,9300	6,9412
3	3	3	3	0,6957	46,5693	15,2971	-18,4074	-0,4034	6,8207
3	3	3	4	0,7035	45,3621	16,8097	-19,1486	0,0618	6,7432
3	3	4	3	0,6613	51,8222	13,7456	-19,3054	-1,4175	7,0666
3	3	4	4	0,6878	47,7703	16,7998	-19,5391	-0,2318	6,9163
3	4	3	3	0,7015	45,6677	14,8580	-28,5388	-0,4101	6,7537
3	4	3	4	0,7115	44,1392	14,7845	-29,5835	0,0707	6,6516
3	4	4	3	0,6628	51,5916	14,1692	-23,9813	-0,4782	7,1757
3	4	4	4	0,5989	61,3742	19,2960	-24,1958	0,6348	7,8181

O melhor resultado para a PRBS de inclinação é com os atrasos $n_l = 3, n_y = 4, n_u = 3$ e $n_e = 4$ levando em consideração o teste com maior $R^2 = 0{,}7115$. Observa-se que aumento do grau de não linearidade de 2 para 3 e o dos máximos atrasos $n_y,\ n_u\ e\ n_e$ para 4, melhorou um pouco a maioria dos resultados da Tabela 5.13. O modelo obtido para estes atrasos seguiu a trajetória do sistema real (ver Figura 5.74), o resultado final não foi satisfatório, porém não é um mau resultado levando em consideração que foi aplicado um ruído de ±10% do valor no sinal de excitação PRBS e a complexidade mecânica do protótipo de baixo custo.

Figura 5.74 – Modelo NARMAX para o sinal PRBS de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_l = 3, n_y = 4, n_u = 3$ e $n_e = 4$)

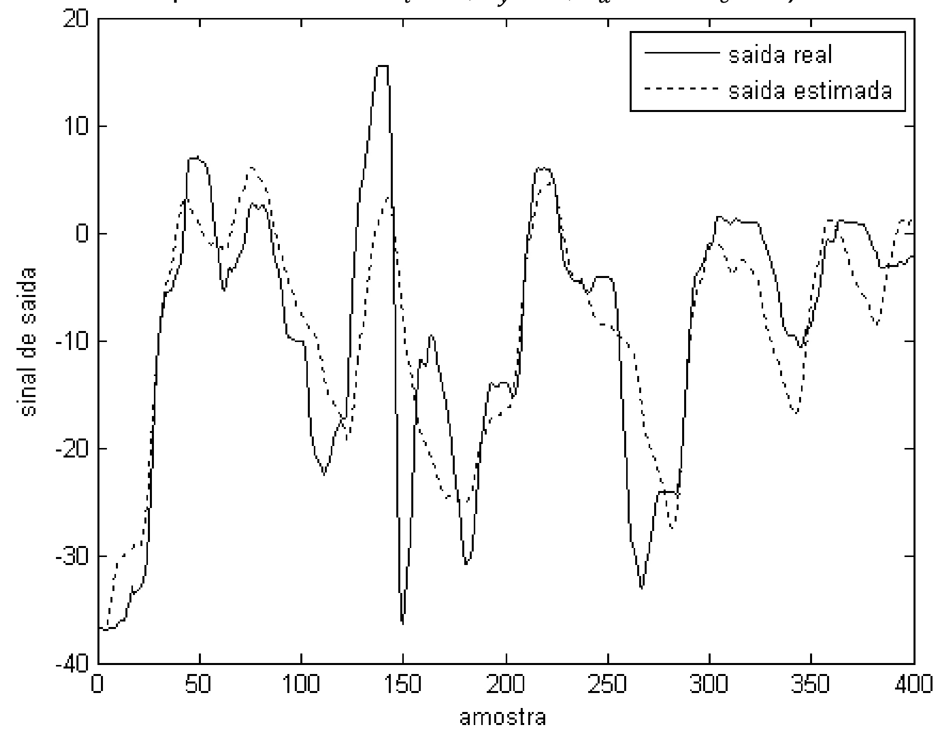
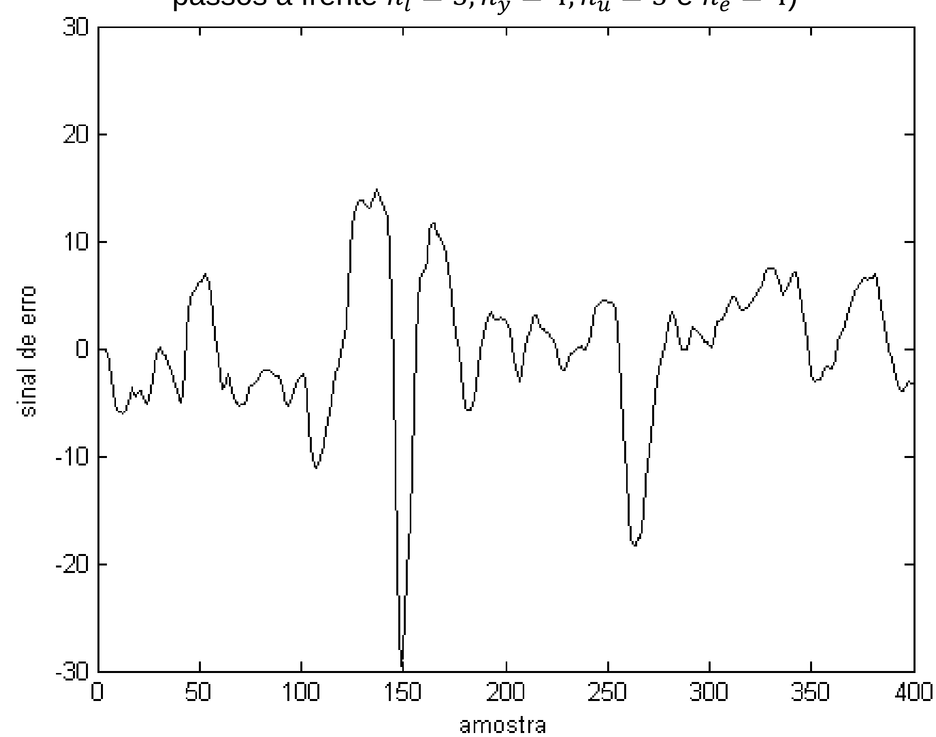


Figura 5.75 – Erro do modelo NARMAX para o sinal PRBS de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_l = 3, n_y = 4, n_u = 3$ e $n_e = 4$)



O modelo matemático obtido para $n_l = 3, n_y = 4, n_u = 3$ e $n_e = 4$ foi:

$$
\begin{aligned}
y(k) = {} & 0{,}2018 \cdot 10^1 \cdot y(k-1) - 0{,}1173 \cdot 10^1 \cdot y(k-2) + 0{,}1467 \cdot y(k-4) \\
& - 0{,}1419 \cdot 10^{-3} \cdot u(k-1) \cdot u(k-1) \cdot y(k-4) - 0{,}3012 \cdot 10^1 \\
& + 0{,}3759 \cdot u(k-1) - 0{,}5143 \cdot 10^{-3} \cdot u(k-3) \cdot u(k-1) \\
& \cdot u(k-1) - 0{,}3645 \cdot 10^{-3} \cdot y(k-4) \cdot y(k-4) - 0{,}1151 \cdot 10^{-4} \\
& \cdot y(k-4) \cdot y(k-4) \cdot y(k-4) - 0{,}1619 \cdot 10^{-1} \cdot e(k-3) \\
& \cdot e(k-3) \cdot u(k-2) + 0{,}4618 \cdot 10^{-2} \cdot e(k-2) \cdot e(k-1) \\
& \cdot u(k-1) + 0{,}7055 \cdot 10^{-2} \cdot e(k-1) \cdot y(k-1) + 0{,}4556 \\
& \cdot e(k-3) \cdot u(k-3) - 0{,}1110 \cdot 10^{-1} \cdot e(k-4) \cdot e(k-4) \\
& \cdot y(k-4) - 0{,}4971 \cdot 10^{-1} \cdot e(k-3) \cdot u(k-3) \cdot u(k-3) \\
& + 0{,}8060 \cdot 10^{-2} \cdot e(k-2) \cdot y(k-4) + 0{,}5381 \cdot 10^{-2} \cdot e(k-4) \\
& \cdot e(k-4) \cdot u(k-1) + 0{,}6766 \cdot 10^{-1} \cdot e(k-4) \cdot y(k-4) \\
& - 0{,}1281 \cdot 10^{-2} \cdot e(k-4) \cdot u(k-3) \cdot y(k-2)
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

Como na previsão do modelo NARMAX com previsão de *N* passos à frente do eixo de inclinação, o eixo de rotação não teve bons resultados do coeficiente de correlação múltipla (R^2), então os parâmetros foram aumentados como no teste anterior da Tabela 5.13.

Tabela 5.14 – Modelagem NARMAX para o sinal PRBS de rotação (previsão de *N* passos à frente)

Regressores				R^2	MSE	Erro			
n_l	n_y	n_u	n_e			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
2	2	2	2	0,7030	4730,8500	166,5634	-97,9981	3,4848	68,7788
2	2	2	3	0,7109	4606,1846	151,2293	-93,0484	2,9905	67,8878
2	2	3	2	0,6990	4795,6207	142,6164	-131,9698	-10,0664	68,6006
2	2	3	3	0,6128	6168,0120	178,6954	-82,1838	24,9558	74,5594
2	3	2	2	0,7601	3821,8185	143,6464	-89,9894	1,1992	61,8866
2	3	2	3	0,7530	3934,8388	147,5686	-94,3111	9,6513	62,0589
2	3	3	2	0,6558	5483,8177	133,6679	-155,1642	-25,6424	69,5584
2	3	3	3	0,7130	4572,6500	173,9799	-69,1395	17,7599	65,3292
3	2	2	2	0,7424	4103,8106	50,8635	-165,0645	-37,3614	52,1029
3	2	2	3	0,7907	3333,7307	122,5707	-146,3288	-19,4125	54,4453
3	2	3	2	0,6967	4831,6851	162,2292	-158,3086	13,5281	68,2665
3	2	3	3	0,7953	3261,7524	151,5530	-128,9760	-4,3117	57,0200
3	3	2	2	0,8247	2791,9852	131,0064	-116,2421	-9,3932	52,0627
3	3	2	3	0,8287	2728,5178	130,2088	-110,4993	-7,3383	51,7819
3	3	3	2	0,5906	6521,1987	159,0564	-194,2302	9,9450	80,2395
3	3	3	3	0,8316	2682,6744	129,2109	-112,4848	-7,9709	51,2416
3	3	3	4	0,8248	2790,4160	131,7575	-113,8201	-7,4653	52,3597
3	3	4	3	0,8125	2985,4936	134,8355	-120,4126	-8,4405	54,0514
3	3	4	4	0,8074	3068,0652	138,1153	-116,7307	-3,3438	55,3583
3	4	3	3	0,8329	2660,9496	129,1605	-106,4228	-6,7711	51,2021
3	4	3	4	0,7835	3448,4286	144,4922	-120,9138	0,8448	58,7907
3	4	4	3	0,8338	2646,1825	121,3257	-142,2773	-12,9865	49,8371
3	4	4	4	0,7946	3272,0354	142,1230	-125,4766	0,3211	57,2724

O melhor resultado para o sinal senoidal de rotação é com os atrasos $n_l = 3, n_y = 4, n_u = 3$ e $n_e = 3$ levando em consideração o teste com maior $R^2 = 0{,}8329$, valor considerado razoável, representa o modelo com uma precisão de 83,29%. Observa-se, como no teste anterior, que o aumento do grau de não linearidade de 2 para 3 e o dos máximos atrasos n_y, n_u e n_e para 4, melhorou um pouco a maioria dos resultados da Tabela 5.14. Os resultados desta tabela foram melhores, em relação ao teste da Tabela 5.13, porém também não foram satisfatórios.

Figura 5.76 – Modelo NARMAX para o sinal senoidal de rotação (previsão de *N* passos à frente $n_l = 3, n_y = 4, n_u = 3$ e $n_e = 3$)

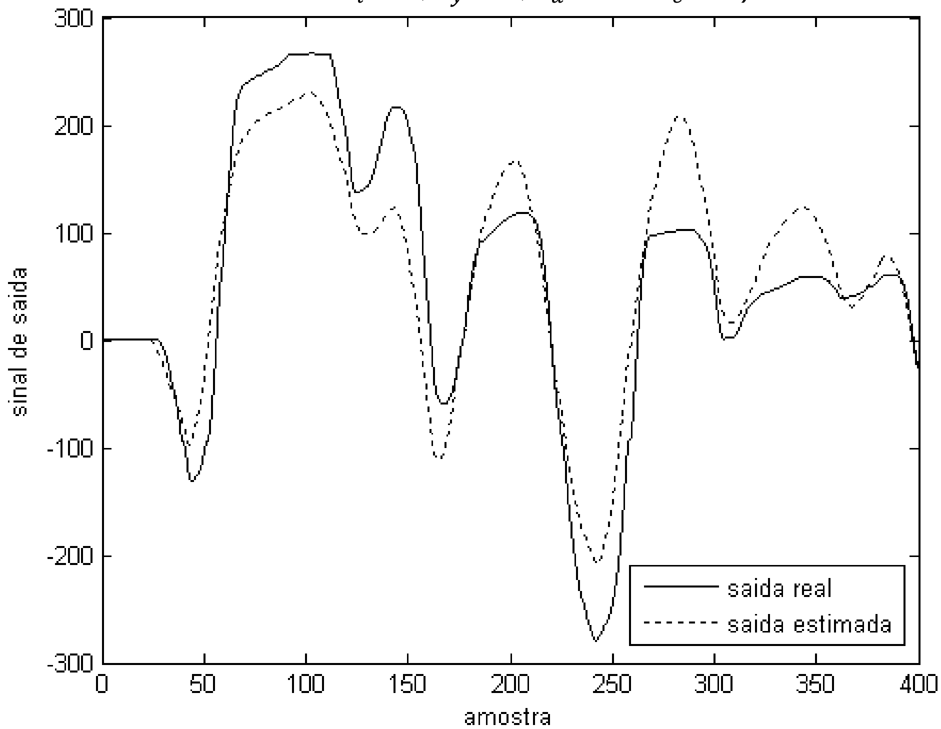
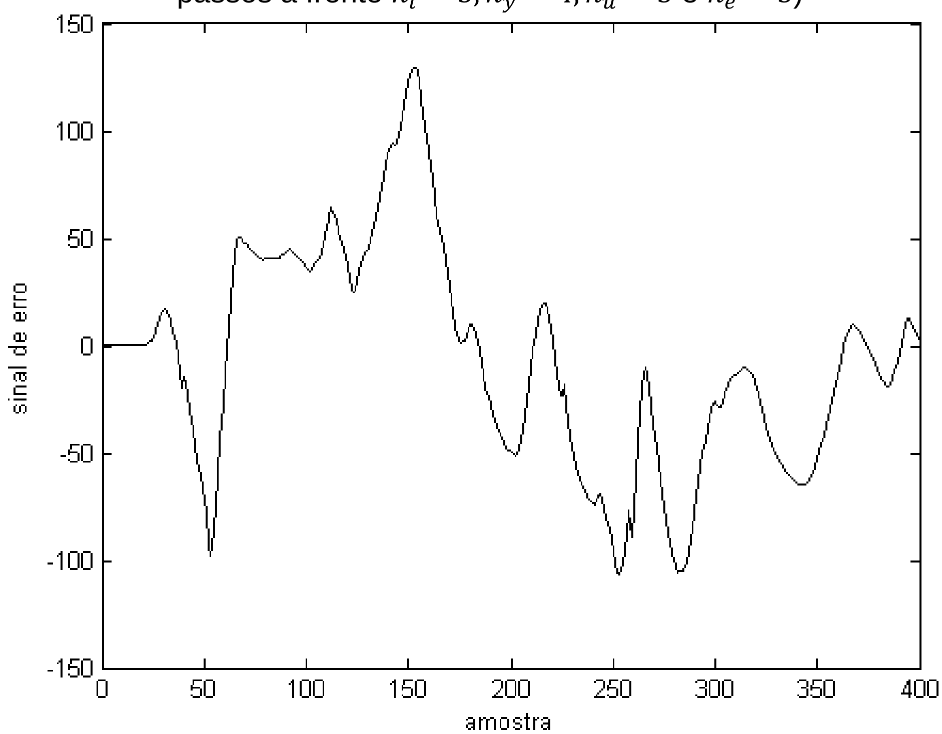


Figura 5.77 – Erro do modelo NARMAX para o sinal PRBS de rotação (previsão de *N* passos à frente $n_l = 3, n_y = 4, n_u = 3$ e $n_e = 3$)



O modelo matemático obtido para $n_l = 3, n_y = 4, n_u = 3$ e $n_e = 3$ é:

$$\begin{aligned} y(k) = {} & 0{,}1874 \cdot 10^{1} \cdot y(k-1) - 0{,}8741 \cdot y(k-2) + 0{,}5245 \cdot 10^{-2} \cdot u(k-2) \\ & \cdot u(k-2) \cdot u(k-2) - 0{,}1953 \cdot 10^{-3} \cdot u(k-2) \cdot u(k-2) \\ & \cdot y(k-4) + 0{,}6767 \cdot 10^{-7} \cdot y(k-3) \cdot y(k-1) \cdot y(k-1) \\ & - 0{,}1764 \cdot 10^{-2} \cdot u(k-2) \cdot u(k-2) \cdot u(k-1) - 0{,}2374 \cdot 10^{-2} \\ & \cdot u(k-2) \cdot y(k-1) + 0{,}2250 \cdot 10^{-2} \cdot u(k-2) \cdot y(k-4) \\ & + 0{,}9077 \cdot 10^{-2} \cdot u(k-2) \cdot u(k-1) + 0{,}1246 \cdot 10^{-18} \cdot e(k-1) \\ & \cdot u(k-1) \cdot u(k-1) + 0{,}2541 \cdot 10^{-9} \cdot e(k-1) \cdot y(k-4) \\ & - 0{,}2160 \cdot 10^{-9} \cdot e(k-2) \cdot e(k-2) \cdot e(k-1) - 0{,}2284 \cdot 10^{-9} \\ & \cdot e(k-3) \cdot e(k-2) \cdot e(k-1) - 0{,}1547 \cdot 10^{-9} \cdot e(k-3) \\ & \cdot e(k-3) \cdot e(k-3) - 0{,}1423 \cdot 10^{-9} \cdot e(k-3) \cdot e(k-2) \\ & \cdot e(k-2) - 0{,}1135 \cdot 10^{-9} \cdot e(k-3) \cdot e(k-3) \cdot e(k-2) \\ & - 0{,}7204 \cdot 10^{-11} \cdot e(k-1) \cdot u(k-2) \cdot y(k-2) - 0{,}9827 \cdot 10^{-10} \\ & \cdot e(k-3) \cdot e(k-3) \cdot e(k-1) - 0{,}8514 \cdot 10^{-10} \cdot e(k-2) \\ & \cdot e(k-2) \cdot e(k-2) \end{aligned} \tag{5.20}$$

5.3.4. Modelagem Nebulosa TSK com Previsão de *N* Passos à Frente

Para a modelagem nebulosa TSK *N* passos à frente para o sinal PRBS com ruído aplicado ao eixo de rotação foram utilizados os mesmos parâmetros da modelagem da seção 5.3.2.

Tabela 5.15 – Modelagem nebulosa TSK para o sinal PRBS de inclinação (previsão de *N* passos à frente)

Regressores		R^2	MSE	Erro			
n_y	n_u			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
1	1	0,6052	48,2503	16,5911	-25,9829	-0,4759	6,9390
1	2	0,6604	41,5022	12,6564	-25,0034	-0,0243	6,4506
1	3	0,6945	37,3265	10,9483	-25,9946	-0,0145	6,1175
2	1	0,6989	36,7992	17,3019	-16,9782	1,2206	5,9499
2	2	0,6957	37,1919	18,1809	-17,6424	1,0276	6,0192
2	3	0,7158	34,7299	17,4436	-13,0473	0,9305	5,8269
3	1	0,7218	33,9987	13,3121	-19,0454	0,3998	5,8247
3	2	0,7341	32,4961	16,9123	-20,5131	-0,0566	5,7077
3	3	0,7557	29,8498	17,0527	-10,0108	0,8653	5,4016

O melhor resultado para o sinal senoidal de rotação é com os atrasos $n_y = 3$ e $n_u = 3$ levando em consideração o teste com maior $R^2 = 0{,}7557$, que não foi um resultado satisfatório, mesmo assim note-se na Figura 5.78 que o modelo estimado seguiu a dinâmica do modelo real, sendo considerado um valor razoável.

Figura 5.78 – Modelo TSK para o sinal PRBS de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

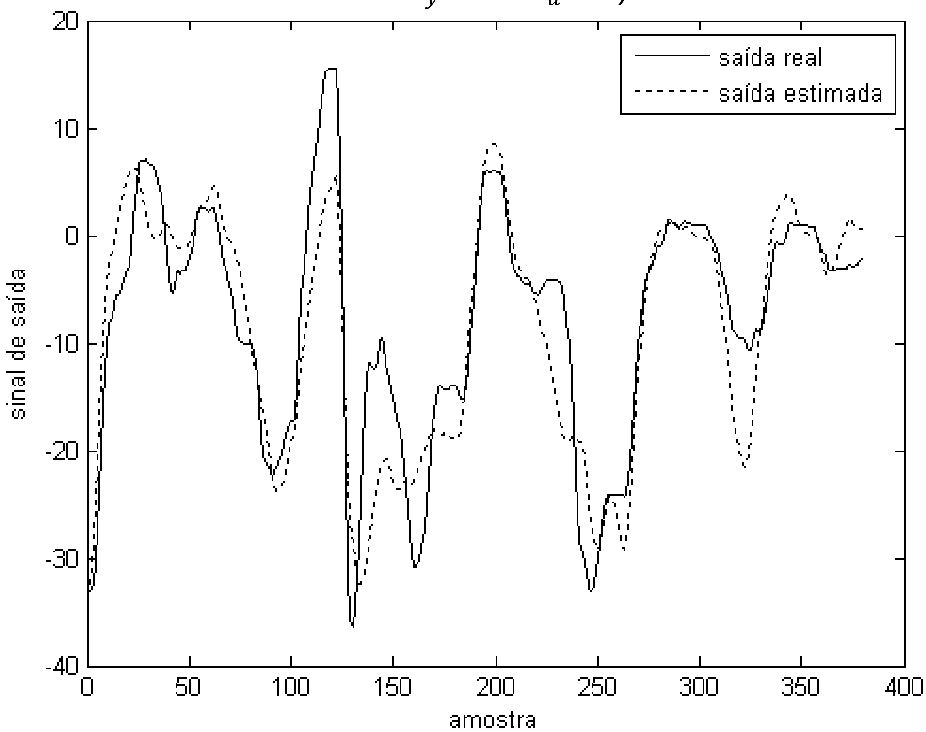


Figura 5.79 – Erro do modelo TSK para o sinal PRBS de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

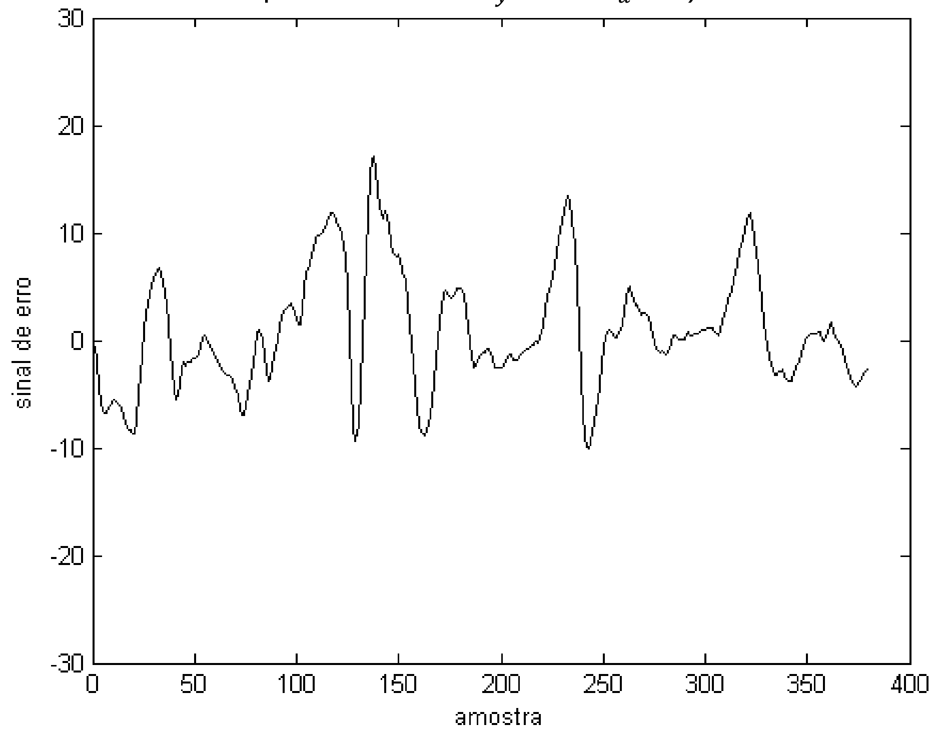


Figura 5.80 – Funções de pertinência de $y(k-1)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

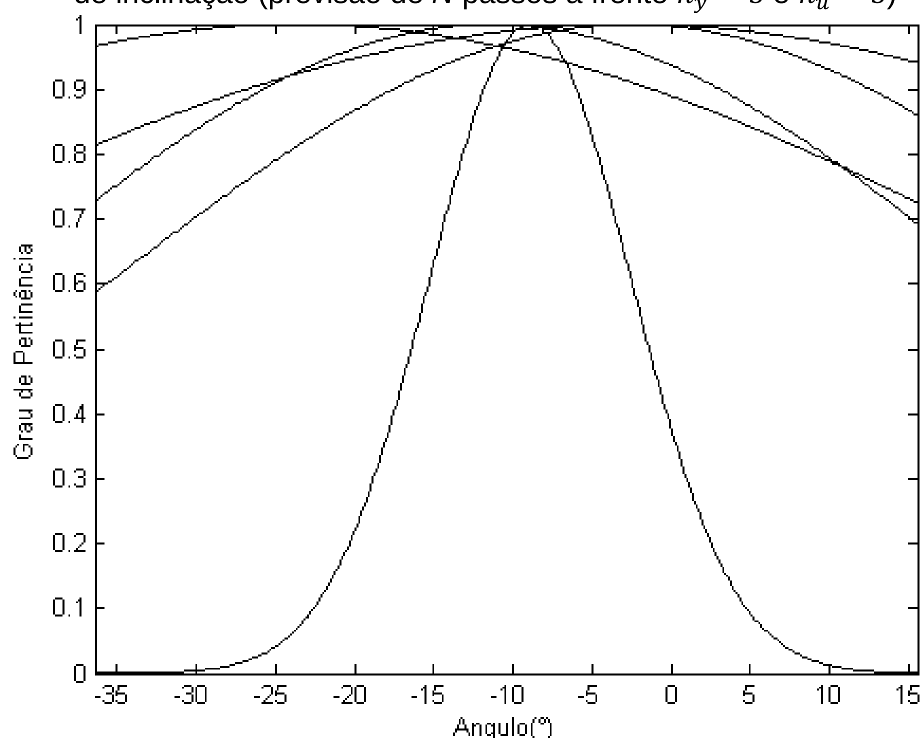


Figura 5.81 – Funções de pertinência de $y(k-2)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

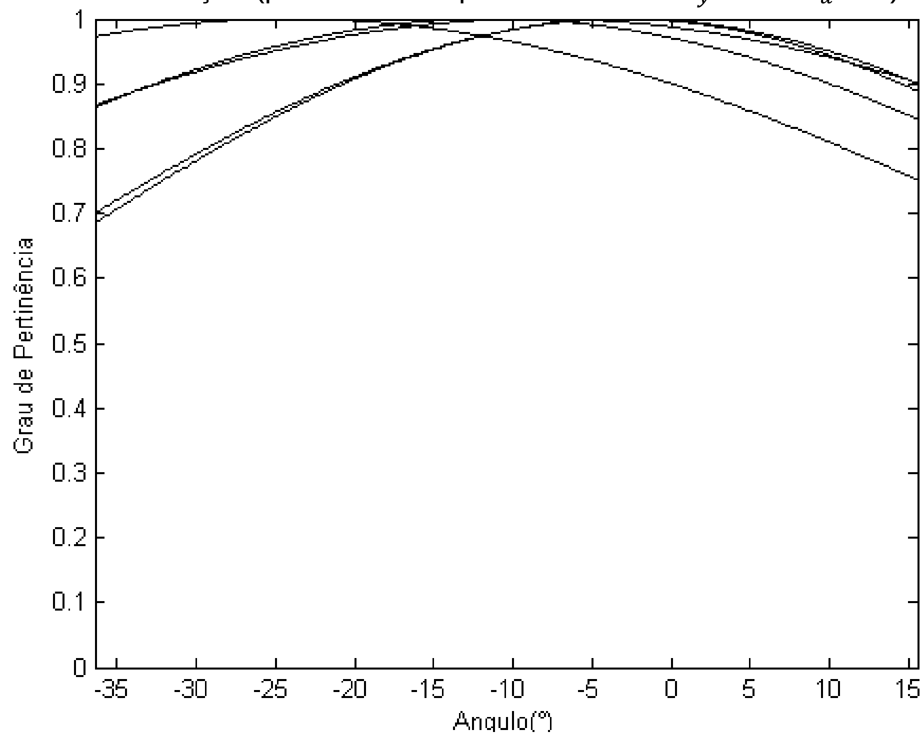


Figura 5.82 – Funções de pertinência de $y(k-3)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

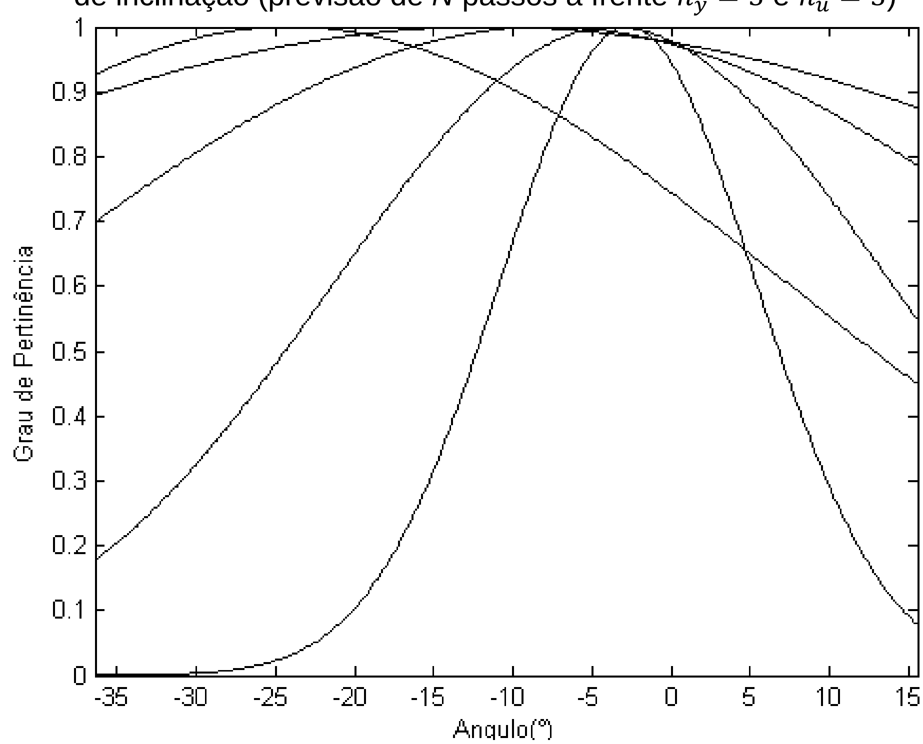


Figura 5.83 – Funções de pertinência de $u(k-1)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

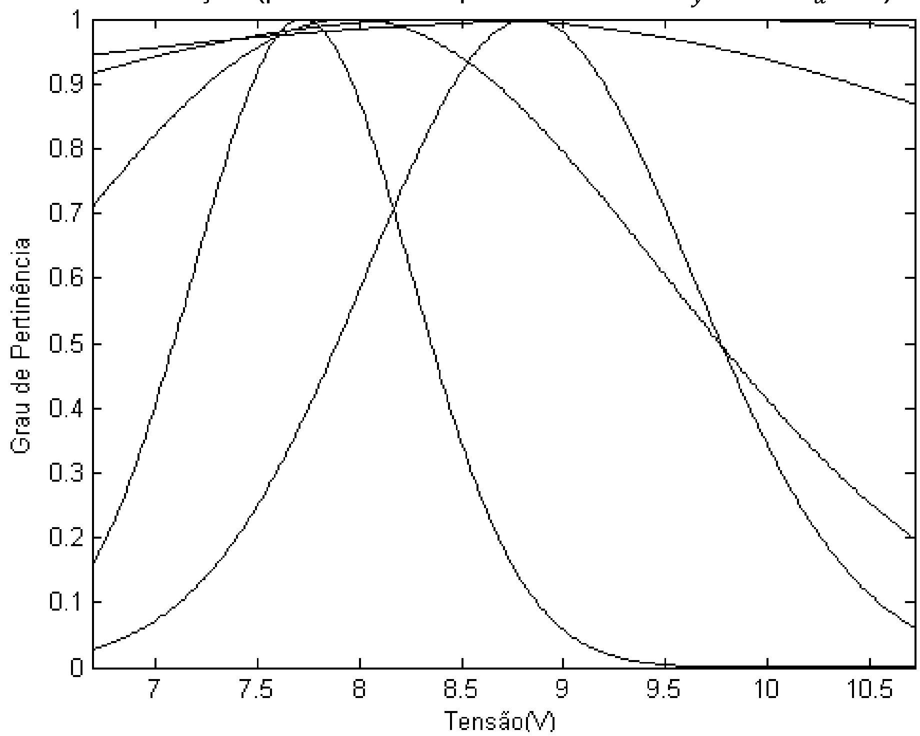


Figura 5.84 – Funções de pertinência de $u(k-2)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)

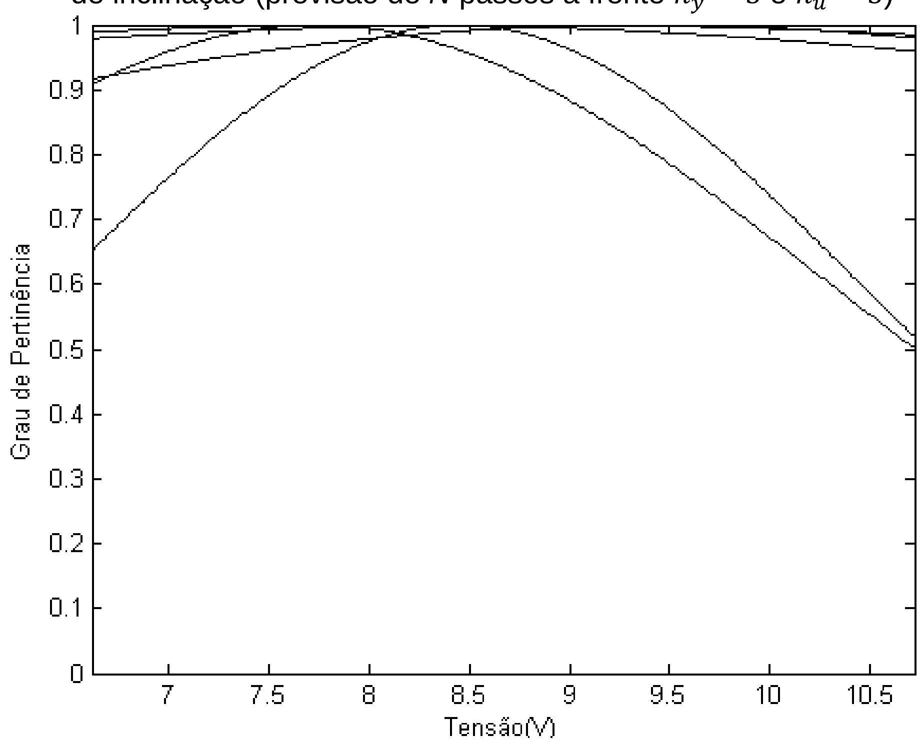
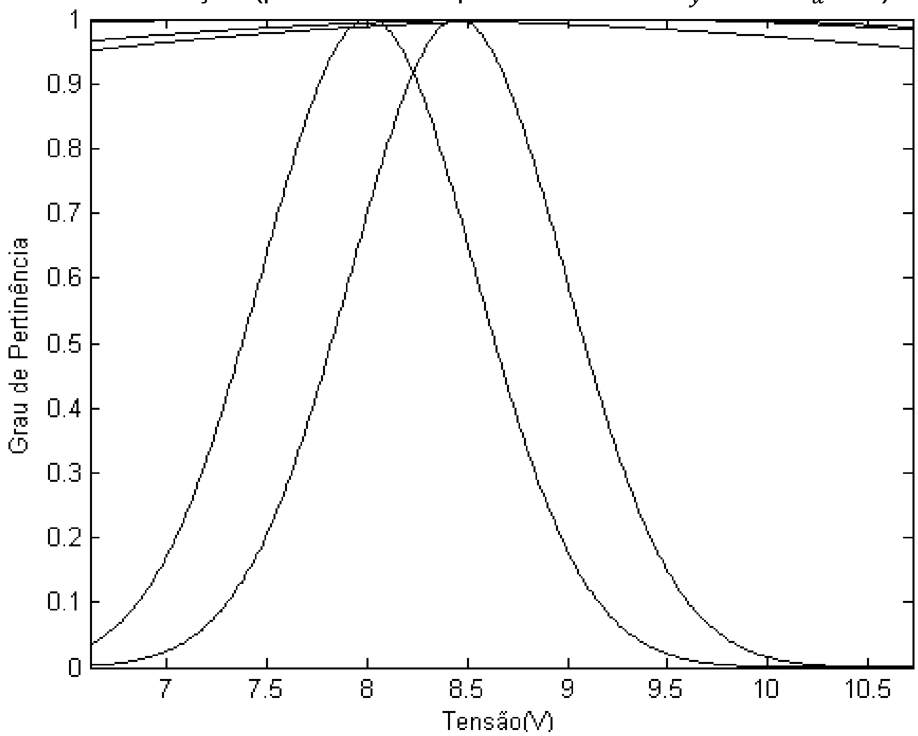


Figura 5.85 – Funções de pertinência de $u(k-3)$ do modelo TSK para o sinal senoidal de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 3$ e $n_u = 3$)



As regras nebulosas obtidas para $n_y = 3$ e $n_u = 3$ forão:

$$R^1: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+23,72}{48,94}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+24,07}{52,39}\right)^2}\ E$$
$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+24,11}{31,32}\right)^2}\ E\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-7,71}{0,53}\right)^2}\ E$$
$$u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-7,73}{2,54}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-7,68}{9,90}\right)^2}$$
$$ENTÃO\ y^1 = -7,63 + 2,21y(k-1) - 1,68y(k-2) - 0,40y(k-3)$$
$$+0,76u(k-1) - 0,25u(k-2) + 0,36u(k-3),$$

(5.21)

$$R^2: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+11,36}{31,38}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+11,32}{46,36}\right)^2}\ E$$
$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+11,56}{52,39}\right)^2}\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-8,83}{0,79}\right)^2}\ E$$
$$u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-8,83}{10,72}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-9,03}{9,15}\right)^2}$$
$$ENTÃO\ y^2 = -8,29 + 1,68y(k-1) - 0,83y(k-2) + 0,13y(k-3)$$
$$+0,09u(k-1) + 0,32u(k-2) + 0,54u(k-3),$$

$$R^3: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+2,50}{32,80}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+3,09}{38,30}\right)^2}\ E$$
$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+3,71}{17,55}\right)^2}\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-9,44}{8,13}\right)^2}\ E$$
$$u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-9,37}{6,60}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-9,33}{8,59}\right)^2}$$
$$ENTÃO\ y^3 = -2,80 + 2,20y(k-1) - 1,44y(k-2) + 0,20y(k-3)$$
$$+0,76u(k-1) - 0,09u(k-2) - 0,43u(k-3),$$

$$R^4: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+2,79}{52,39}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+2,76}{39,85}\right)^2}\ E$$
$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+2,74}{8,09}\right)^2}\ u(k-1)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-8,46}{4,24}\right)^2}\ E$$
$$u(k-2)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-8,45}{1,98}\right)^2}\ E\ u(k-3)\text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-8,45}{0,53}\right)^2}$$
$$ENTÃO\ y^4 = 3,45 + 2,43y(k-1) - 2,56y(k-2) + 1.07y(k-3)$$
$$-1,41u(k-1) + 0,26u(k-2) + 1,00u(k-3),$$

$$R^5: SE\ y(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)+8,91}{6,37}\right)^2}\ E\ y(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+8,38}{52,39}\right)^2}\ E$$
$$y(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-3)+7,88}{33,69}\right)^2}\ u(k-1)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-7,96}{1,53}\right)^2}\ E$$
$$u(k-2)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-8,03}{9,29}\right)^2}\ E\ u(k-3)\ \text{é}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-8,00}{0,53}\right)^2}$$
$$ENTÃO\ y^5 = 46,92 + 1,90y(k-1) - 0,44y(k-2) - 0,51y(k-3)$$
$$+1,03u(k-1) - 0,33u(k-2) - 6,82u(k-3).$$

O modelo final é a somatória ponderada dos consequentes:

$$y(k) = \sum_{l=1}^{N} v_l \cdot y^l \qquad (5.22)$$

Para a previsão do modelo nebuloso TSK com previsão de *N* passos à frente aplicado ao eixo de rotação foram utilizados os mesmos parâmetros do teste anterior do eixo de inclinação.

Tabela 5.16 – Modelagem nebulosa TSK para o sinal PRBS de rotação (previsão de *N* passos à frente)

Regressores		R^2	MSE	Erro			
n_y	n_u			Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
1	1	0,6525	5766,1213	188,2487	-139,2271	21,5081	72,9212
1	2	0,7195	4652,9424	188,2600	-93,8522	23,4726	64,1311
1	3	0,7709	3800,1006	143,8251	-127,2808	-13,9061	60,1351
2	1	0,8925	1783,5920	111,8483	-97,3977	-12,5060	40,3916
2	2	0,9471	877,0766	72,7281	-77,7934	6,1037	29,0178
2	3	0,9556	736,2566	56,1935	-105,8903	-3,5775	26,9326
3	1	0,9006	1649,1990	114,6189	-82,5146	3,7224	40,4926
3	2	0,9449	913,5816	70,6313	-97,5258	1,4178	30,2320
3	3	-	-	-	-	-	-

Com os regressores $n_y = 2$ e $n_u = 3$ foi obtido o resultado de $R^2 = 0{,}9556$, resultado bom levando em consideração que a previsão é de *N* passos à frente. É possível verificar que houve uma grande variação do coeficiente de correlação múltipla $0{,}6525 \leq R^2 \leq 0{,}9556$ e um dos casos apresentou mau condicionamento numérico, simbolizado por "-".

Figura 5.86 – Modelo TSK para o sinal PRBS de rotação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 2$ e $n_u = 3$)

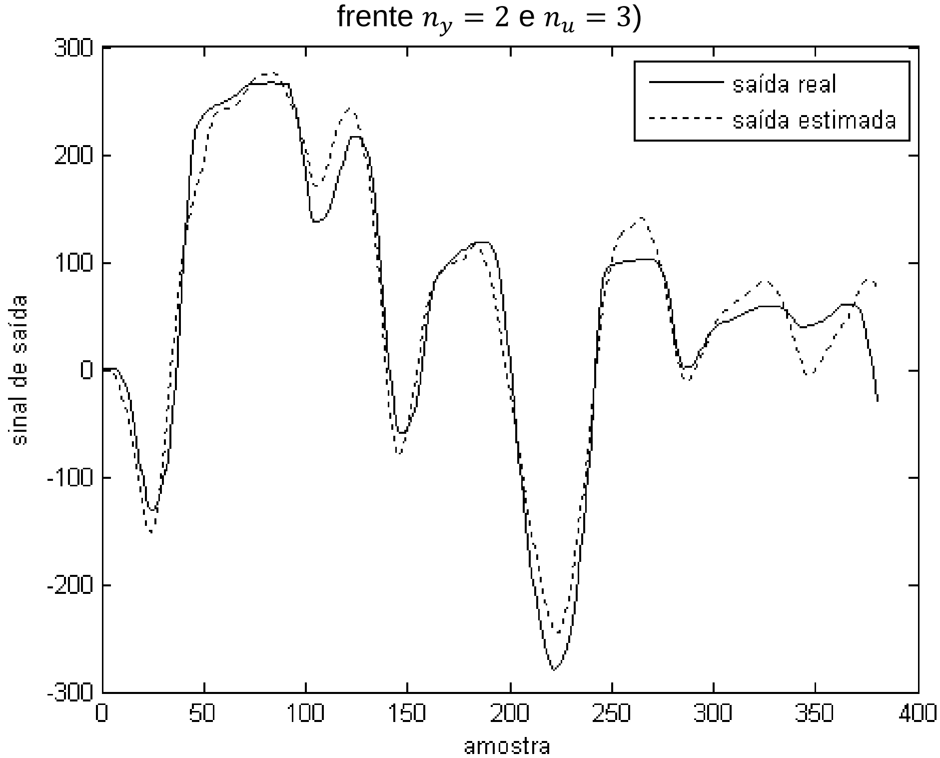


Figura 5.87 – Erro do modelo TSK para o sinal PRBS de rotação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 2$ e $n_u = 3$)

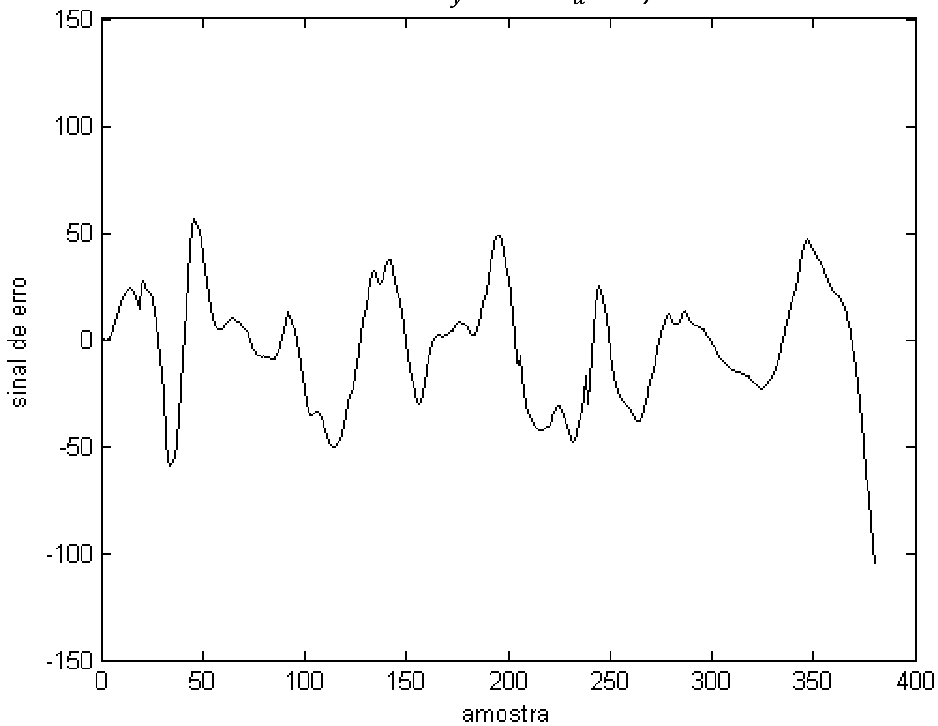


Figura 5.88 – Funções de pertinência de $y(k-1)$ do modelo TSK para o sinal PRBS de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 2$ e $n_u = 3$)

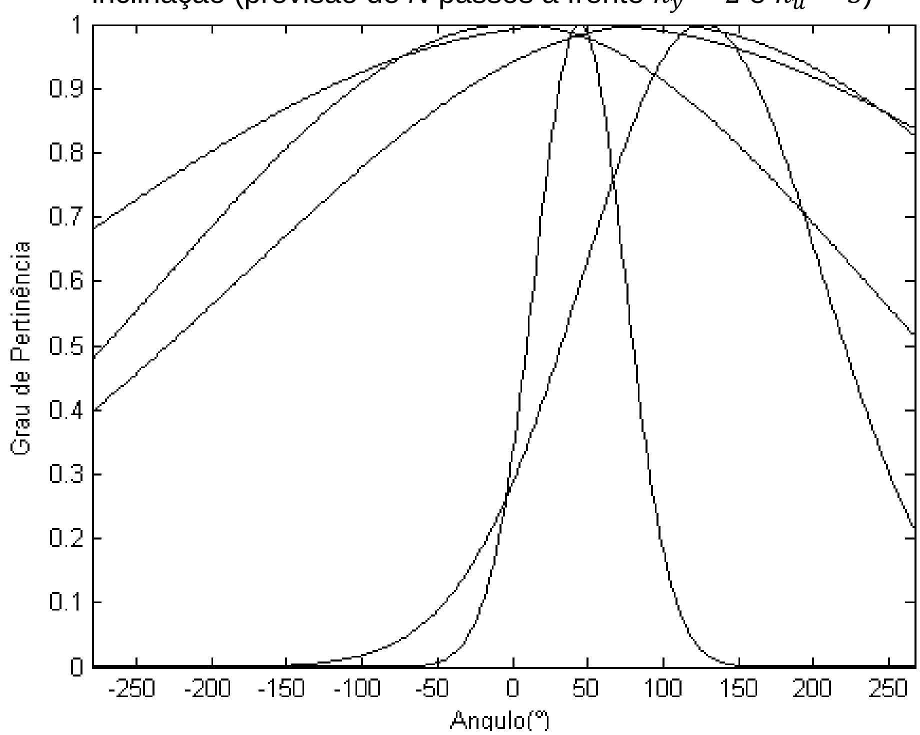


Figura 5.89 – Funções de pertinência de $y(k-2)$ do modelo TSK para o sinal PRBS de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 2$ e $n_u = 3$)

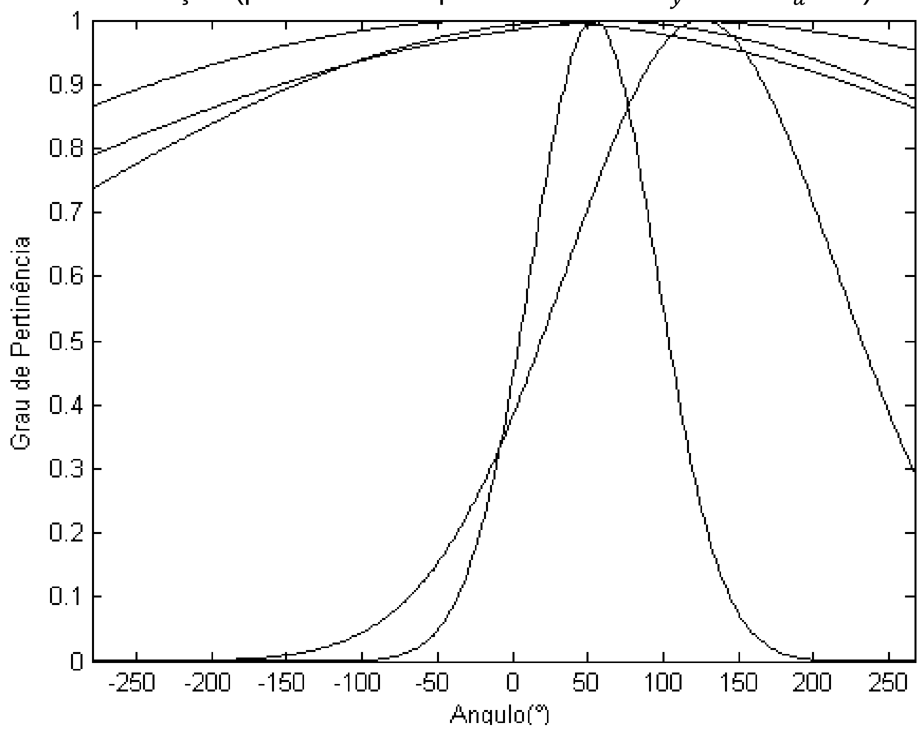


Figura 5.90 – Funções de pertinência de $u(k-1)$ do modelo TSK para o sinal PRBS de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 2$ e $n_u = 3$)

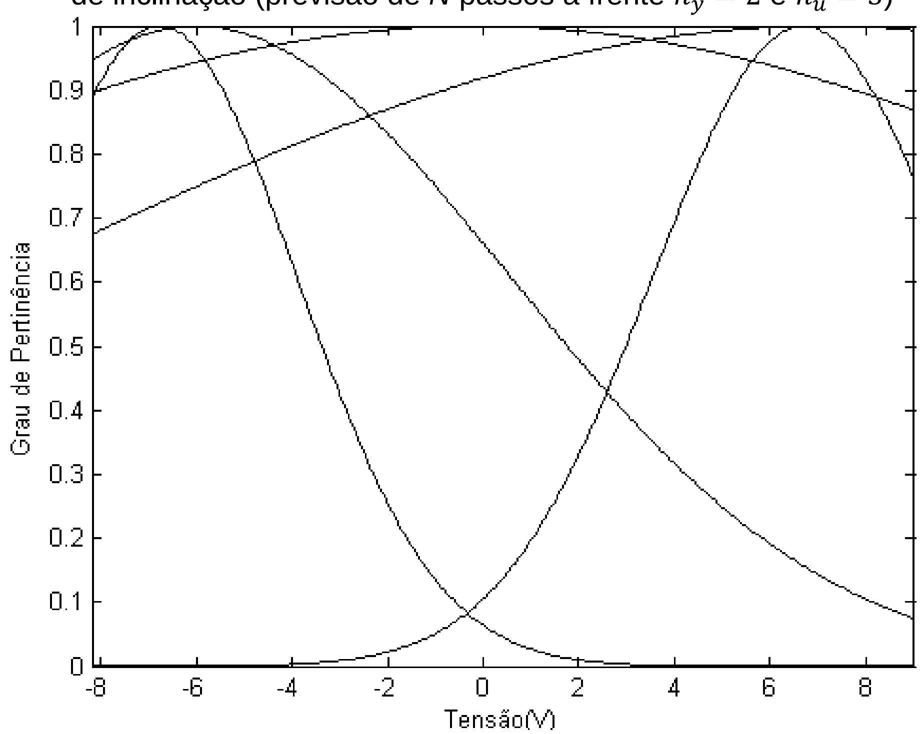


Figura 5.91 – Funções de pertinência de $u(k-2)$ do modelo TSK para o sinal PRBS de inclinação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 2$ e $n_u = 3$)

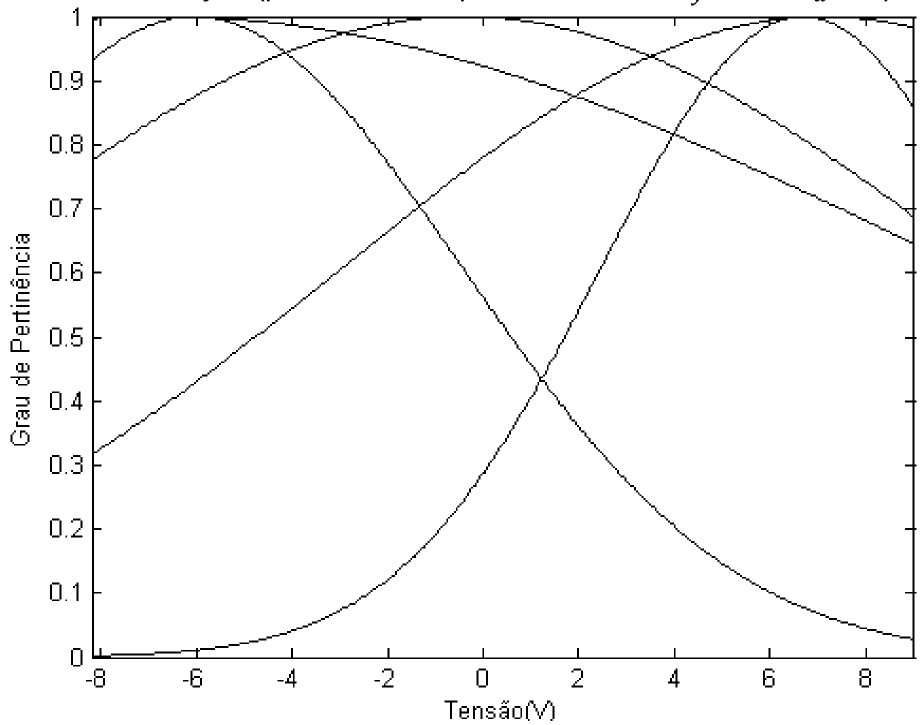
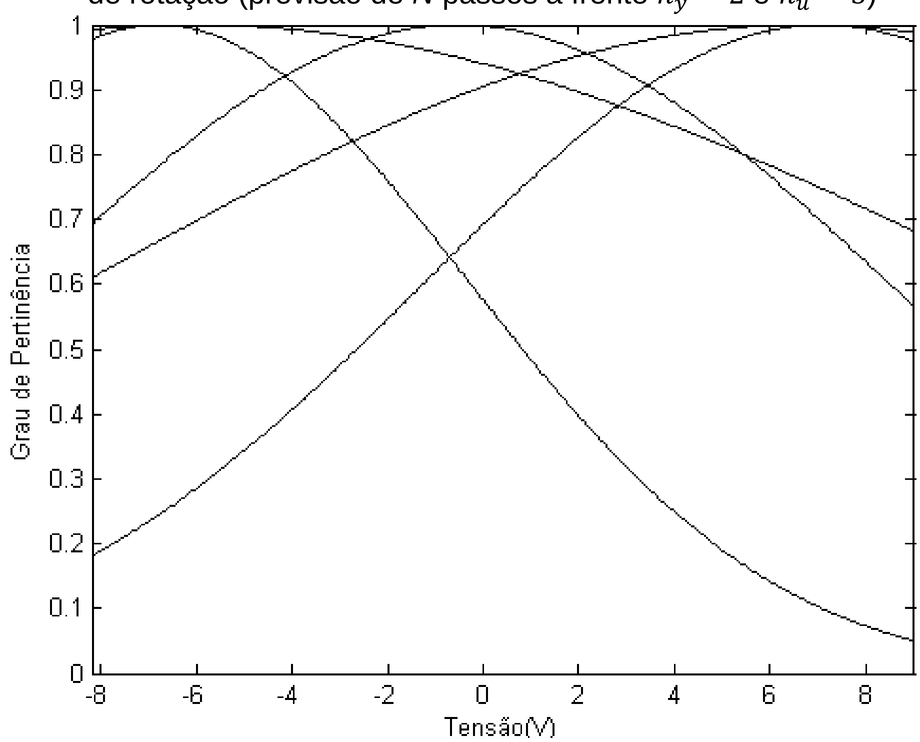


Figura 5.92 – Funções de pertinência de $u(k-3)$ do modelo TSK para o sinal PRBS de rotação (previsão de *N* passos à frente $n_y = 2$ e $n_u = 3$)



As regras nebulosas obtidas para $n_y = 2$ e $n_u = 3$ foram:

$$
\begin{gathered}
R^1\!: SE\ y(k-1)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-0{,}95}{230{,}74}\right)^2} E\ y(k-2)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)+7{,}71}{505{,}21}\right)^2} E \\
u(k-1)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-7{,}07}{17{,}20}\right)^2} E\ u(k-2)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-7{,}10}{10{,}08}\right)^2} E \\
u(k-3)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-7{,}10}{8{,}27}\right)^2} \\
ENTÃO\ y^1 = 5{,}09 + 2{,}05y(k-1) - 1{,}04y(k-2) + 0{,}77u(k-1) \\
+0{,}78u(k-2) - 0{,}48u(k-3), \\
\\
R^2\!: SE\ y(k-1)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-44{,}57}{30{,}01}\right)^2} E\ y(k-2)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-53{,}95}{42{,}14}\right)^2} E \\
u(k-1)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)+6{,}77}{2{,}88}\right)^2} E\ u(k-2)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)+6{,}75}{16{,}84}\right)^2} E \\
u(k-3)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)+6{,}79}{6{,}46}\right)^2} \\
ENTÃO\ y^2 = -6{,}81 + 2{,}29y(k-1) - 1{,}35y(k-2) - 0{,}96u(k-1) \\
-0{,}94u(k-2) + 0{,}12u(k-3), \\
\\
R^3\!: SE\ y(k-1)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-96{,}41}{276{,}40}\right)^2} E\ y(k-2)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-96{,}98}{546{,}15}\right)^2} E \\
u(k-1)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)+5{,}99}{6{,}59}\right)^2} E\ u(k-2)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)+6{,}04}{5{,}63}\right)^2} E \\
u(k-3)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)+6{,}05}{17{,}20}\right)^2} \\
ENTÃO\ y^3 = 8{,}77 + 2{,}27y(k-1) - 1{,}25y(k-2) + 1{,}65u(k-1) \\
+0{,}01u(k-2) + 0{,}36u(k-3), \\
\\
R^4\!: SE\ y(k-1)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-126{,}34}{79{,}92}\right)^2} E\ y(k-2)\text{ é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-125{,}39}{90{,}41}\right)^2} E \\
u(k-1)\text{é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)-6{,}68}{3{,}15}\right)^2} E\ u(k-2)\text{é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)-6{,}67}{4{,}22}\right)^2} E \\
u(k-3)\text{é } e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)-6{,}68}{14{,}95}\right)^2} \\
ENTÃO\ y^4 = 14{,}89 + 1{,}92y(k-1) - 0{,}83y(k-2) - 1{,}21u(k-1) \\
-1{,}90u(k-2) - 0{,}71u(k-3),
\end{gathered} \tag{5.23}
$$

$$R^5: SE\ y(k-1)\text{ é }e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-1)-45{,}97}{370{,}50}\right)^2}\ E\ y(k-2)\text{ é }e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y(k-2)-50{,}51}{421{,}42}\right)^2}\ E$$

$$u(k-1)\text{ é }e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-1)+0{,}13}{17{,}20}\right)^2}\ E\ u(k-2)\text{ é }e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-2)+0{,}41}{10{,}89}\right)^2}\ E$$

$$u(k-3)\text{ é }e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{u(k-3)+0{,}52}{8{,}93}\right)^2}$$

$$ENTÃO\ y^5 = -5{,}84 + 1{,}34y(k-1) - 0{,}38y(k-2) - 1{,}38u(k-1)$$

$$+0{,}12u(k-2) - 0{,}26u(k-3).$$

O modelo final é a somatória ponderada dos consequentes:

$$y(k) = \sum_{l=1}^{N} v_l \cdot y^l. \tag{5.24}$$

5.4. Análise dos Resultados

O resultado que obteve o melhor desempenho para cada um dos 16 experimentos e mencionado na Tabela 5.17, onde é possível comparar os valores de R^2, de máximo, de mínimo, da média e do desvio padrão do erro para cada experimento. Como citado anteriormente, na secção 5, foi considerado que um bom resultado para previsão de 1 passo à frente apresenta $R^2 > 0{,}97$ e para *N* passos à frente apresenta $R^2 > 0{,}9$, ou seja, $R^2 > 0{,}97$ superior a 97% e a 90%, respectivamente.

Tabela 5.17 – Análise dos resultados

Sinal	Previsão	Modelo	Eixo	R^2	Erro			
					Máximo	Mínimo	Média	Desvio padrão
Senoidal	1 passo	NARMAX	Inclinação	0,9995	1,3982	-1,3523	-0,0042	0,3975
			Rotação	0,9997	17,1505	-13,2919	0,0822	2,0596
		Nebuloso TSK	Inclinação	0,9996	1,2308	-1,5149	0,0083	0,3580
			Rotação	0,9999	9.2345	-7.4810	-0.0066	1.2140
	N passos	NARMAX	Inclinação	0,9555	11,7714	-7,7090	0,9219	3,9498
			Rotação	0,9352	102,3427	-54,8442	6,1359	34,0762
		Nebuloso TSK	Inclinação	0,9798	7,1903	-6,1061	0,0205	2,5490
			Rotação	0,9979	14,9248	-21,6220	-0,5446	6,3638
PRBS	1 passo	NARMAX	Inclinação	0,9976	2,8116	-3,3649	0,0218	0,6046
			Rotação	0,9995	23,2495	-21,4430	0,1355	2,5446
		Nebuloso TSK	Inclinação	0,9983	1,8373	-1,4862	-0,0031	0,4522
			Rotação	0,9998	12,0474	-9,8880	-0,0100	1,5747
	N passos	NARMAX	Inclinação	0,7115	14,7845	-29,5835	0,0707	6,6516
			Rotação	0,8338	121,3257	-142,2773	-12,9865	49,8371
		Nebuloso TSK	Inclinação	0,7557	17,0527	-10,0108	0,8653	5,4016
			Rotação	0,9556	56,1935	-105,8903	-3,5775	26,9326

Na Tabela 5.17, é possível verificar que as duas técnicas de modelagem na previsão de 1 passo à frente apresentaram resultados promissores, tanto com o sinal de excitação senoidal como o sinal PRBS com ruído, superando o critério de 97% de precisão. Na previsão de *N* passos à frente para o sinal senoidal as duas técnicas também apresentaram resultados promissores, onde o modelo nebuloso TSK obteve resultados melhores que o modelo NARMAX, onde ambas superaram o critério de 90%, no entanto para o sinal de excitação PRBS os modelos não obtiveram resultados satisfatórios, porém os resultados apresentados foram razoáveis conseguindo modelar com uma precisão a cima de 71% para o eixo de inclinação e a cima de 83% para o de rotação. Na seção 5.2 foi verificado que o *twin rotor* apresenta um acoplamento entre os eixos (inclinação e rotação), então é provável que com uma modelagem MISO (múltiplas entradas uma saída) seja possível melhorar os modelos de previsão de *N* passos à frente. Nesta mesma seção também foi verificado um alto grau de não linearidade, e isto pode ser gerado devido ao protótipo possuir uma grande complexidade mecânica e ser de baixo custo, onde os fios de sinais e alimentação atrapalham o desempenho do protótipo.

6. CONCLUSÃO E TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação foram apresentados os conceitos básicos de identificação e duas técnicas de modelagem de sistemas não lineares, do tipo caixa preta, o modelo polinomial NARMAX e o modelo nebuloso TSK.

Na modelagem polinomial NARMAX foi utilizado o estimador dos MQOs com a decomposição GH, junto com o cálculo da *ERR*, para somente inserir os termos mais significativos ao modelo. E na modelagem nebulosa TSK foi utilizado o modelo ARX no consequente, a técnica de agrupamentos de dados FCM para encontrar os centros das *MF*s e a técnica de otimização ED para determinar a largura das *MF*s do tipo gaussiana.

Ambas as técnicas foram testadas em um sistema eletromecânico denominado *twin rotor*, o qual possui uma movimentação semelhante à rotação e inclinação de um helicóptero. Foram realizados dois experimentos um utilizando o sinal de excitação do tipo senoidal para cada eixo (inclinação e rotação) e outro com o sinal de excitação PRBS com ruído de ±10% para cada eixo. Em cima dos dados obtidos nestes dois casos foram realizadas as modelagens polinomial NARMAX e nebulosa TSK com previsão de 1 e *N* passos à frente para cada eixo do *twin rotor*, ou seja, foram realizados 16 experimentos de modelagem. As duas técnicas de modelagem tanto com o sinal senoidal quanto com o PRBS apresentaram resultados promissores na previsão de 1 e *N* passos à frente, com um desempenho inferior na previsão de *N* passos à frente para o sinal PRBS. Os coeficiente de correlação múltipla de todos os casos, para previsão de 1 passo à frente, ficaram próximos de 1 (100%) provando que a utilização dos modelos NARMAX e nebuloso do tipo TSK, é possível obter modelos com ótima qualidade, ou seja, bem próximos ao modelo real. Como o *twin rotor* apresenta um forte acoplamento entre os eixos, de inclinação e de rotação, há uma grande possibilidade que com uma modelagem MISO melhore os modelos de previsão de *N* passos à frente.

Em todos os testes de modelagem do *twin rotor* a técnica nebulosa do tipo TSK obteve resultados melhores que o modelo NARMAX polinomial, porém o custo computacional da modelagem nebulosa é bem maior, devido a técnica de otimização ED utilizada para obter a largura das *MF*s.

Em trabalhos futuros pretende-se implementar a modelagem nebulosa TSK e a NARMAX com estrutura MISO (múltiplas entradas e uma saída) devido ao acoplamento entre os eixos de inclinação e rotação do *twin rotor*. E também serão testadas estas duas técnicas em outros estudos de casos SISO (entrada única e saída única).

7. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUIRRE, L. A., “Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não lineares aplicadas a sistemas reais”. Belo Horizonte, MG: Editora Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.

AGUIRRE, L. A.; RODRIGUES, G. G. e JÁCOME, C. R. F., “Identificação de sistemas não-lineares utilizando modelos NARMAX polinomiais - Uma revisão e novos resultados”. SBA Controle & Automação, v. 9, n. 2, p. 90-106, de 1998.

ALMEIDA, F. M., “Identificação multivariável de um processo de incineração de resíduos líquidos utilizando modelos nebulosos Takagi-Sugeno”. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação. Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP. Campinas, SP, 2005.

BALASKO, B.; ABONYI, J. e FEIL, B., “Fuzzy Clustering and Data Analysis Toolbox”. Disponível em: <http://www.fmt.vein.hu/softcomp/fclusttoolbox/>, 2005. Acesso em 6 de Junho de 2009.

BILLINGS, S.A; CHEN, S. e LUO, W., “Orthogonal least squares methods and their application to non-linear system identification”. Research Report. Department of Control Engineering. University of Sheffield, England, 1989.

BILLINGS, S. A., “Identification of nonlinear systems – A survey”. IEEE Proceedings, v. 127, n. 6, p. 272-285, 1980.

BILLINGS, S. A. e ZHU, Q. M., “Nonlinear model validation using correlation tests”. International Journal of Control, v. 60, p. 1107-1120, 1994.

FEEDBACK. “Feedback Group - The principles of engineering applied”. <http://www.feedback-group.com/product/twin-rotor-mimo-6056> Acesso em 29 de Junho 2010.

CHEN, S. e BILLINGS, S., “Representation of nonlinear systems: the NARMAX model”. International Journal of Control, v. 49, n. 3, p. 1012-1032, 1989.

CORRÊA, V. M.; AGUIRRE, L. A. e SALDANHA, R. R., “Using steady-state prior knowledge to constrain parameter estimates in nonlinear system identification”. IEEE Transactions on Circuits and Systems. Fundamental Theory And Applications, v. 49, n. 9, p. 1376- 1381, 2002.

HAN, P; ZHOU, S. e WANG, D., “A multi-objective genetic programming NARMAX approach to chaotic systems identification”. Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation, Dalian, China, 2006.

HEXBITS. <http://www.hexbits.com.br/>. Acesso em 29 de Junho 2010.

JANG, J. S.; SUN, C.T. e MIZUTANI, E., “Neuro-Fuzzy and Soft Computing”. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1997.

KLIR, G. e YUAN, B., “Fuzzy Sets and Fuzzy Logic, Theory and Applications”. New Jersey, USA: Prentice Hall, 1995.

KORENBERG, M.; BILLINGS, S. A.; LIU, Y. P. e MCILROY, P. J., “Orthogonal parameter estimation algorithm for non-linear sthocastic systems”. International Journal of Control, v. 48, n. 1, p. 193-210, 1988.

KUKREJA, S. L.; GALIANA, H. L. e KEARNEY, R. E., “NARMAX representation and identification of ankle dynamics”. IEEE Transactions on Biomedical Engineering, v. 50, n. 1, p. 70-81, 2003.

LEONTARITIS, I. J. e BILLINGS, S. A., “Experimental design and identifiability for nonlinear systems”. International Journal of Systems and Science, v. 18, n. 1, p. 189-202, 1987.

LJUNG, L., “System Identification: Theory for the User. Prentice Hall International”. New Jersey, USA. 1987.

MACIAS, J. J.; ANGELOV, P. e XIAOWEI, Z., “A method for predicting quality of the crude oil distillation”. Proceedings of IEEE Symposium on Evolving Fuzzy Systems, Ambleside, Lake District, England, p. 214-220, 2006.

MATKO, D; ZUPANCIC, B. e KARBA, R., “Simulation and Modelling of Continuous Systems: A Case Study Approach”. Prentice Hall, London, England, 1992.

MEDEIROS, A. V., “Modelagem de sistemas dinâmicos não lineares utilizando sistema fuzzy, algoritmos genéticos e funções de base ortonormal”. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação. Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP. Campinas, SP. 2006.

PEREIRA, F. “Microcontroladores PIC – Programação em C”. São Paulo, SP: Editora Érica, 2005.

PUCCIARELLI, A. J., “Modelagem de Séries Temporais Discretas Utilizando Modelo Nebuloso Takagi-Sugeno”. Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação. Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP. Campinas, SP. 2005.

RAHIM, N. A.; TAIB, M. N. e YUSOF, M. I., “Nonlinear system identification for a DC motor using NARMAX approach”. Proceeding of Asia Conference on Sensor, AsiaSense, p. 305 – 311, 2003.

RODRIGUES, G. G., “Identificação de sistemas dinâmicos não lineares utilizando modelos NARMAX polinomiais - aplicação a sistemas reais”; Dissertação de Mestrado do PPGEE, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, 1996.

SALAHSHOOR, K. e GHARIBSHAIYAN, S., “Online multivariable identification of a nonlinear distillation column using an adaptive Takagi-Sugeno fuzzy model". IEEE Cybernetics and Intelligent Systems, p. 527-532, 2018.

SALAHSHOOR, K. e HAMZEHNEJAD, M., “A novel online affine model identification of multivariable processes using adaptive neuro-fuzzy networks”. Chemical Engineering Research and Design, v. 88, n. 2 , p. 155-169, 2010.

SOUZA, R., “Modelos Estruturais para Previsão de Séries Temporais: Abordagens Clássica e Bayesiana”. 17° Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro, RJ, 1989.

SUGENO, M., “Fuzzy modeling and control: selected works of M. Sugeno”. Boca Raton: CRC Press, c1999. 429 p.

SUPENI, E.; YASSIN, I. M.; AHMAD, A. e RAHMAN, F. Y. A., “NARMAX Identification of DC Motor Model Using Repulsive Particle Swarm Optimization”. 5th International Colloquium on Signal Processing & Its Applications, 2009.

TAKAGI, T. e SUGENO M., “Fuzzy identification of system and its application to modelling and control”. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, v. 15, n. 1, p. 116-132, 1985.

TAKEMURA, R. Y., “Controle Inteligente”. Departamento de Informática da Universidade Estadual de Maringá. <http://www.din.uem.br/ia/controle/fuz_prin.htm>. Acesso em 02 de Junho 2009.

TAO, C. W.; TAUR, J. S. e CHEN, Y. C. “Design of a parallel distributed fuzzy LQR controller for the twin rotor multi-input multi-output system”. Fuzzy Sets and Systems v. 161, p. 2081-2103, 2010.

YEN, J. e WANG, L., “Simplifying Fuzzy rule-based models using orthogonal transformation methods”. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, v. 29, n. 1, p. 13-24, 1999.

WANG, W.; CHIEN, Y.; LEU, Y, e LEE, T., “Adaptive T-S fuzzy-neural modeling and control for general MIMO unknown nonaffine nonlinear systems using projection update laws”. Fuzzy Sets and Systems v.46, p. 852-863, 2010.

ZHANG, D. e CHEN, S., “A novel Kernelized fuzzy c-means algorithm with application in medical image segmentation”. Artificial Intelligence in Medicine, v. 32, n. 1, p. 37-50, 2004.

ZITO, G. e LANDAU I. D., “NARMAX model identification of a variable geometry turbocharged diesel engine”. American Control Conference. Portland, OR, USA, p. 8-10, 2005.