

Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Marcelo Pinto da Silva

Análise do Dano em Laminados  
Compostos pelo MMFGL

MESTRADO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA  
PUCPR

Curitiba  
2004

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar e aplicar uma teoria para solução de placas laminadas compostas com trincas transversais em sua matriz. Considerações sobre a relação tensão-deformação de um laminado sem trincas são investigadas para posteriormente incluir-se o defeito na estrutura. O dano é embutido nas equações constitutivas que são derivadas dos princípios da Mecânica do Dano, baseadas nas restrições termodinâmicas. A inclusão do dano é feita através de um tensor de segunda ordem contendo as variáveis internas de estado, que carregam consigo as características geométricas e cinemáticas das trincas. A determinação destas variáveis é feita para modo I de carregamento e modo I e III de carregamento acoplado através de um modelo numérico. Utilizou-se o Método Modificado da Função de Green Local para a obtenção da solução aproximada. Essa técnica decorre da associação dos métodos dos elementos finitos e dos elementos de contorno, sendo o sistema final de equações associado aos graus de liberdade de contorno. O procedimento implementado é semelhante ao que se faria num programa convencional de elementos finitos, porém a solução final é determinada no contorno. São apresentados diversos resultados, variando-se o número de lâminas, a orientação das fibras e o grau de danificação. Os resultados obtidos são comparados com os encontrados na literatura.

# Abstract

The aim of this work is present and applies a theory for approximate solution of the symmetrical laminated composite plates with transverse cracks in matrix. Strain-displacements relations are investigated for structures without cracks (undamaged) and further including the cracks. Damage is embedded within the constitutive equations derived based on the principles of Continuum Damage Mechanics and thermodynamics constraints. The damage enclosure is done by a second order tensor containing the internal state variables (that represent the transverse crack geometry and kinematics). Numerical analysis is used to evaluate the internal state variables under mode I and coupled mode I and III loads. The Modified Local Green's Function Method is used to get the approximate solution. This technique adds the Finite Element Method and Boundary Finite Method but the final equations system are associated with boundary degrees of freedom. The methodology is similar to Finite Element but Boundary Element establishes the final solution. Several results are showed varying stacking sequences, plies number, plies orientation and damage extension. The results are compared with other researches.

*Ao meu pai, Edvaldo.  
A minha mãe, Conceição.*

# Agradecimentos

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus pelo dom da vida. E a Ele por sempre me dar forças. Como diria o grande Apóstolo São Paulo: “Tudo posso naquele que me fortalece!”

A minha amada Telma, por sempre me compreender, me confortar e entender as horas despendidas neste trabalho. Sua força e determinação me incendiaram a ir mais além e seu amor me deu paz!

Ao Professor Roberto Dalledone Machado, sempre iluminando meus caminhos. Um guia por caminhos tortuosos, um amigo sempre com palavras confortadoras. Seus ensinamentos ficarão presentes em mim até os últimos dias da minha vida.

Aos Professores do Departamento de Mecânica da PUC-PR, pelos ensinamentos durante estes anos, especificamente, ao Professor João Elias Abdalla Filho, com a ajuda da CAPES, incentivando os meus estudos.

A Electrolux do Brasil S.A., especialmente na pessoa de Paulo R. Ross, sempre me apoiando e liberando algumas horas para que me dedicasse a este trabalho. Ao Kleber Legnani, grande ajuda nas análises em ANSYS.

Ao meu pai, Edvaldo, e a minha mãe, Conceição, por me ensinarem o que há de mais precioso na vida: o amor! As minhas irmãs, Larissa e Karina, pelo incentivo e força, mesmo à distância. A minha tia Maria e aos meus primos daqui de Curitiba. Obrigado pelas orações.

A todos os meus amigos, tesouros nesta vida, especialmente, ao André Spolti, grande companheiro, amigo, irmão.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Sumário</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xvi</b>

## Capítulo 1

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações Gerais .....	1
1.1.1 Materiais Compostos .....	1
1.1.2 Danificação em Estruturas Compostas.....	5
1.2 Objetivo .....	8
1.3 Organização do trabalho .....	8

## Capítulo 2

<b>Revisão Bibliográfica</b>	<b>10</b>
2.1 Revisão das Teorias sobre o Dano.....	10
2.2 Outros Enfoques e Direcionamentos sobre o Dano .....	21

## Capítulo 3

<b>Materiais Compostos</b>	<b>24</b>
3.1 Introdução .....	24
3.2 Relação Tensão-Deformação de uma Lâmina .....	28
3.2.1 Lâminas Especialmente Ortotrópicas.....	35
3.2.2 Relações Constitutivas da Lâmina num Sistema de Referências Qualquer. .....	37
3.3 Relações Tensão-Deformação de um Laminado .....	39
3.3.1 Definição e caracterização de um Laminado.....	39
3.3.2 Teoria de Placas Laminadas com Acoplamento.....	42
3.3.3 Conceitos e Convenções Adotadas.....	45

## Capítulo 4

<b>Teoria do Dano</b>	<b>53</b>
4.1 Introdução .....	53
4.2 Mecânica do Dano em Meios Contínuos .....	53
4.2.1 Definição do Elemento de Volume Representativo.....	55
4.2.2 Definição da Tensão Efetiva.....	56
4.2.3 Representação das Variáveis Internas de Estado de um Dano Interno.....	58
4.2.4 Significado Físico das Variáveis Internas de Estado.....	59
4.2.5 Hipóteses da Teoria do Dano Aplicada a Laminados Compostos com Trincas Transversais .....	61

4.2.6	Termodinâmica dos Sólidos.....	62
4.2.7	Equação Constitutiva Termomecânica dos Sólidos com Dano Interno .....	65
4.2.8	Relações Constitutivas para Lâmina Ortotrópica com Trincas Transversais.....	69
4.2.9	Relações Constitutivas para Laminados Compostos com Trincas Transversais.....	74

## Capítulo 5

<b>Determinação das Variáveis Internas de Estado</b>	<b>78</b>	
5.1	Introdução.....	78
5.1.1	Variáveis Internas de Estado para Carregamento Puro Modo I.....	79
5.1.2	Variáveis Internas de Estado para Carregamentos Acoplados Modos I e III .....	81
5.1.3	Cálculo das Variáveis Internas de Estado por Elementos Finitos .....	84
5.2	Verificação das Formulações $\rho$ e $\theta$ .....	90

## Capítulo 6

<b>Implementação do Dano ao Método Modificado da Função de Green Local</b>	<b>95</b>	
6.1	Introdução.....	95
6.2	Considerações sobre o Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL) .....	96
6.3	Desenvolvimento do Modelo de Dano por Elementos Finitos .....	98

## Capítulo 7

<b>Resultados</b>	<b>108</b>	
7.1	Introdução.....	108
7.2	Aplicações.....	111

7.2.1 Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ]_s$ .....	111
7.2.2 Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ .....	120
7.2.3 Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ .....	125
7.2.4 Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$ .....	134

## Capítulo 8

<b>Conclusões</b>	<b>137</b>
-------------------	------------

<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>140</b>
-----------------------------------	------------

## Apêndice A

	<b>149</b>
A.1 Aplicação das Restrições de Simetria .....	149
A.2 Restrições de Simetria no Tensor de Rigidez Danificado .....	151
A.3 Determinação da Matriz $F_{ij}$ .....	157

## Apêndice B

	<b>160</b>
B.1 Rotina Utilizada para Análises das Formulações $\rho$ e $\theta$ .....	160

## Apêndice C

	<b>165</b>
C.1 Fluxograma da Rotina Utilizada para Cálculo do Dano (Perda de Rigidez)....	165

# Lista de Figuras

Figura 1.1 - Importância relativa dos materiais ao longo da História [Gibson (1994)].....	3
Figura 1.2 – Avião comercial (a), helicóptero (b) (www.saint-gobainvetrotex.com.br, 24/02/2004) e militar (c) (www.fiberset.com-html-work.htm, 24/02/2004).....	4
Figura 1.3 – Carros (a), caminhões (b), exemplos de sistema de pedais (c) e tampa do comando de válvulas com poliamida reforçada (d) (www.saint-gobainvetrotex.com.br, 24/02/2004) e eixos de direção (e) (www.strongweel.com, 24/02/2004).....	5
Figura 1.4 - Exemplos de laminados compostos com trincas transversais na matriz [Lim (1999)]: a) Laminado $[0/90/0/90]_s$ ; b) Laminado $[0/90_4/0/90_2]_s$ ; c) Laminado $[0/90_2/0/90_2]_s$ e d) Laminado $[0/90_2/0/90_4/0/90_3/0/90_2/0]$ .....	6
Figura 1.5 – Trincas transversais e delaminações em laminados compostos com fibras em direções quaisquer [Lim (1999)] .....	7
Figura 2.1 – Modos I, II e III de carregamento em trincas.....	12
Figura 2.2 – Modos de carregamento em trincas transversais para laminados com fibras cruzadas e laminados com fibras em direção genérica [Lim (1999)].....	13
Figura 3.1 – Gráfico comparativo qualitativo sobre a resistência específica de alguns materiais [Machado (2001)] .....	26
Figura 3.2 – Tipos de compostos reforçados por fibras [Gibson (1994)].....	28
Figura 3.3 – Conceito de módulo efetivo de um material homogêneo equivalente [Gibson (1994)] .....	29

Figura 3.4	– Componentes de tensão num ponto .....	30
Figura 3.5	– Lâmina de material composto reforçado por fibras [Gibson (1994)] ...	32
Figura 3.6	– Placa laminada com fibras em direções quaisquer [Reddy (1997)] .....	40
Figura 3.7	– Exemplos de empilhamento em laminados .....	42
Figura 3.8	– Modelo de camada simples equivalente para placa laminada [Machado (1992)] .....	45
Figura 3.9	– Convenção de sinais [Machado (2001)] .....	47
Figura 3.10	– Variáveis relativas a um laminado com N lâminas [Reddy (1997)] ...	49
Figura 4.1	· Elemento de volume representativo de um sólido com dano [Proença (2000)] .....	56
Figura 4.2	Elemento de volume representativo retangular contendo dano interno sob carregamento de tração .....	61
Figura 5.1	– Modelo para elementos finitos esquemático de um laminado [0°/90°] – [Lim e Tay (1996)] .....	80
Figura 5.2	– Notação geométrica de uma lâmina com fibras em uma direção genérica [Lim e Tay (1996)] .....	82
Figura 5.3	– Exemplo de malha de elementos finitos deformada para um laminado [0°/90°] <sub>s</sub> .....	85
Figura 5.4	– $\zeta$ versus $\psi$ ( $\theta=0.333$ , $\rho=1.0$ ) – [Lim e Tay (1996)] .....	88
Figura 5.5	– Exemplo de malha de elementos finitos utilizada para as análises, com 450 elementos .....	91
Figura 5.6	– Máximo deslocamento de abertura da trinca normalizado, $\delta$ versus a densidade de trinca normalizado, $\rho$ .....	92
Figura 6.1	· Etapas de solução do problema de uma placa laminada pelo MMFGL [Machado (2001)] .....	97
Figura 7.1	– Exemplo de discretização de uma placa, aproveitando-se as condições de simetria e utilizando-se malha 2x2 (4 elementos finitos e 8 elementos de contorno) .....	109
Figura 7.2	– Dimensões e condições de carregamento para o problema proposto de placas laminadas com trincas transversais na matriz .....	111
Figura 7.3	– Perda de rigidez $E/E_0$ versus densidade de trinca $\zeta$ , laminado Gr/Ep [0°/90°] <sub>s</sub> – formulação por $\rho$ .....	114

Figura 7.4 – Perda de rigidez $E/E_0$ versus densidade de trinca $\zeta$ , laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ]_s$ – formulação por $\theta$ .....	114
Figura 7.5 – Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ]_s$ – formulação por $\rho$ : verificação da convergência com $u_x$ em milímetros.....	115
Figura 7.6 – Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ]_s$ – formulação por $\theta$ : verificação da convergência com $u_x$ em milímetros.....	115
Figura 7.7 – Perda de rigidez $E/E_0$ versus densidade de trinca $\zeta$ , laminado Gl/Ep $[0^\circ/90^\circ]_s$ – formulação por $\rho$ .....	118
Figura 7.8 – Perda de rigidez $E/E_0$ versus densidade de trinca $\zeta$ , laminado Gl/Ep $[0^\circ/90^\circ]_s$ – formulação por $\theta$ .....	118
Figura 7.9 – Laminado Gl/Ep $[0^\circ/90^\circ]_s$ – formulação por $\rho$ : verificação da convergência com $u_x$ em milímetros.....	119
Figura 7.10 – Laminado Gl/Ep $[0^\circ/90^\circ]_s$ – formulação por $\theta$ : verificação da convergência com $u_x$ em milímetros.....	119
Figura 7.11 – Perda de rigidez $E/E_0$ versus densidade de trinca $\zeta$ , laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ – formulação por $\rho$ .....	123
Figura 7.12 – Perda de rigidez $E/E_0$ versus densidade de trinca $\zeta$ , laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ – formulação por $\theta$ .....	123
Figura 7.13 – Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ – formulação por $\rho$ : verificação da convergência com $u_x$ em milímetros.....	124
Figura 7.14 – Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ – formulação por $\theta$ : verificação da convergência com $u_x$ em milímetros.....	124
Figura 7.15 – Perda de rigidez $E/E_0$ versus densidade de trinca $\zeta$ , laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ – formulação por $\rho$ .....	127
Figura 7.16 – Perda de rigidez $E/E_0$ versus densidade de trinca $\zeta$ , laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ – formulação por $\theta$ .....	128
Figura 7.17 – Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ – formulação por $\rho$ : verificação da convergência com $u_x$ em milímetros.....	129
Figura 7.18 – Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ – formulação por $\theta$ : verificação da convergência com $u_x$ em milímetros.....	129
Figura 7.19 – Perda de rigidez $E/E_0$ versus densidade de trinca $\zeta$ , laminado Gl/Ep $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ – formulação por $\rho$ .....	132

Figura 7.20 – Perda de rigidez $E/E_0$ versus densidade de trinca $\zeta$ , laminado G1/Ep $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ – formulação por $\theta$ .....	132
Figura 7.21 – Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ – formulação por $\rho$ : verificação da convergência com $u_x$ em milímetros.....	133
Figura 7.22 – Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ – formulação por $\theta$ : verificação da convergência com $u_x$ em milímetros.....	133
Figura 7.23 – Perda de rigidez $E/E_0$ versus densidade de trinca $\zeta$ , laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$ .....	136
Figura C.1 - Fluxograma da Rotina para Dano .....	165

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1	– Constantes para o deslocamento de abertura da trinca, $\delta$ versus a função da densidade de trincas normalizado $\rho$ [Lim e Tay (1996)] .....	87
Tabela 5.2	– Constantes para o deslocamento de abertura da trinca, $\delta$ verso a razão de restrição $\theta$ [Lim e Tay (1996)] .....	87
Tabela 5.3	– Constantes para o perfil de abertura da trinca, $\psi$ versus a distância normalizada na direção da espessura $\xi$ [Lim e Tay (1996)] ...	89
Tabela 5.4	– Constantes de Engenharia utilizadas para as análises .....	91
Tabela 5.5	– Valores de comprimento, representados pela metade das distâncias entre trincas $l/2$ , e da densidade de trinca normalizada $\rho$ para as análises em ANSYS 5.6.....	93
Tabela 5.6	– Valores de comprimento, representados pela metade da distâncias entre trincas $l/2$ , espessuras $t_1$ , $t_2$ e $t$ , parâmetro de restrição $\theta$ para as análises em ANSYS 5.6, com $\rho = 1,0$ para Gr/Ep e Gl/Ep.....	94
Tabela 7.1	– Relação dos materiais utilizados - Highsmith e Reifsnider (1982) ...	110
Tabela 7.2	– Propriedades Geométricas para o laminado $[0^\circ/90^\circ]_s$ .....	111
Tabela 7.3	– Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação $\rho$ .....	112
Tabela 7.4	– Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação $\theta$ .....	113
Tabela 7.5	– Laminado Gl/Ep $[0^\circ/90^\circ]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação $\rho$ .....	116
Tabela 7.6	– Laminado Gl/Ep $[0^\circ/90^\circ]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação $\theta$ .....	117
Tabela 7.7	– Propriedades Geométricas para o laminado $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ .....	120

Tabela 7.8 – Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação $\rho$ .....	121
Tabela 7.9 – Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação $\theta$ .....	122
Tabela 7.10 – Propriedades Geométricas para o laminado $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ .....	125
Tabela 7.11 – Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação $\rho$ .....	125
Tabela 7.12 – Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação $\theta$ .....	126
Tabela 7.13 – Laminado Gl/Ep $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação $\rho$ .....	130
Tabela 7.14 – Laminado Gl/Ep $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação $\theta$ .....	131
Tabela 7.15 – Propriedades Geométricas para o laminado $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ .....	134
Tabela 7.16 – Valores dos deslocamentos encontrados na análises da malha 6x6 para os laminados $[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$ e $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ .....	134
Tabela 7.17 – Laminado Gr/Ep $[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação $\rho$ .....	135

# Lista de Símbolos

V	Volume do elemento representativo
$\{\sigma\}$	Vetor tensão
$\sigma_{ij}$	Componentes de tensão num ponto
$\bar{\sigma}_i$	Tensões médias
$\tilde{\sigma}$	Tensão efetiva
$\sigma_{ij}^e$	Tensor tensão efetiva
$\sigma_{ij}^R$	Tensor tensão residual
$\{\mathcal{E}\}$	Vetor deformação
$\mathcal{E}_{ij}$	Componentes de deformação num ponto
$\bar{\mathcal{E}}_i$	Deformações médias
[C]	Matriz Constitutiva
$C_{ij}$	Componentes da matriz das constantes elásticas
[S]	Matriz de flexibilidade
E	Módulo de elasticidade
G	Módulo de elasticidade transversal
$\nu$	Coefficiente de Poisson
[Q]	Matriz de rigidez de uma lâmina
$Q_{ij}$	Componentes da matriz rigidez de uma lâmina
$\theta$	Parâmetro de restrição
[T]	Matriz transformação (rotação)

$[\bar{Q}]$	Matriz de rigidez transformada de uma lâmina
$\bar{Q}_{ij}$	Componentes da matriz de rigidez transformada de uma lâmina
$h_{eq}$	Espessura equivalente de um laminado
$n$	Número de lâminas de um laminado
$h$	Espessura de um laminado real
$X_1, X_2$ e $X_3$	Direções dos eixos de referência
$u_1, u$	Deslocamento na direção “x” ou $X_1$
$u_2, v$	Deslocamento na direção “y” ou $X_2$
$u_3, w$	Deslocamento na direção “z” ou $X_3$
$z$	Coordenada medida ao longo da espessura da placa
$\{N\}$	Vetor das resultantes de tensões normais
$\{M\}$	Vetor das resultantes de tensões de flexão
$\{K\}$	Vetor das deformações de curvatura
$\gamma$	Componente de deformações transversais
$\theta^0$	Rotações da superfície média
$[A]$	Matriz dos efeitos de membrana
$[B]$	Matriz dos efeitos acoplados membrana-flexão
$[D]$	Matriz dos efeitos de flexão
$\varphi$	Continuidade
$n$	Vetor normal à superfície
$n_j$	Vetor normal à superfície da trinca
$S$	Área total de uma seção
$\tilde{S}$	Parcela íntegra da área total $S$ de uma seção
$S_0$	Área dos defeitos medidos de uma seção
$D_n$	Variável de dano escalar
$F$	Força
$\alpha_{ij}$	Variáveis internas de estado
$u_i$	Deslocamento de abertura da trinca
$S_c$	Superfície de uma nova trinca
$\Delta l_2$	Incremento de deslocamento na direção local “1”
$h$	Energia específica livre de Helmholtz

$s$	Entropia por unidade de massa
$s^e$	Entropia efetiva
$S_T$	Entropia total
$t_1$	Espessura da lâmina 0°
$t_2$	Metade da espessura da lâmina 90°
$t$	Metade da espessura de um laminado
$t_t$	Espessura de um laminado
$t_l$	Espessura de uma lâmina
$F_j$	Forças de corpo
$T_0$	Temperatura de referência
$\Delta T$	Varição da temperatura
$-Ts$	Energia específica de calor irreversível
$u$	Energia específica interna
$\dot{u}$	Taxa de variação da densidade de energia interna por unidade de massa
$\dot{v}$	Aceleração
$z_1$	Eixo local na direção “z” da lâmina 90°
$z_2$	Eixo local na direção “z” da lâmina 0°
$\dot{\alpha}_{ij}$	Taxa de variação das variáveis internas de estado
$\alpha_2$	Variável interna de estado para carregamento modo I
$\alpha_6$	Variável interna de estado para carregamento modo III
$\delta$	Máximo deslocamento de abertura da trinca normalizado
$\dot{\epsilon}_{ij}$	Taxa de variação do tensor deformação
$\phi$	Ângulo qualquer
$\rho$	Densidade de massa de um sólido
$\rho$	Densidade de trinca normalizada
$\psi$	Função do perfil de abertura da trinca normalizada
$\zeta$	Distância normalizada do plano médio
$\zeta$	Densidade de trinca
$\zeta_l$	Densidade de trinca local
$\Omega$	Domínio de um sólido

$\Gamma$	Superfície (contorno) de um sólido
$\{D^N\}$	Vetor dano de força
$\{D^M\}$	Vetor dano de flexão
$\psi_j, \phi_j$	Funções de interpolação
$\{F^b\}$	Vetor força aplicada
$\{F^d\}$	Vetor força de dano
$p_i^a$	Componentes do vetor força aplicada
$p_i^d$	Componentes do vetor dano
$u_x$	nó de maior deslocamento na direção “x”
$u_{0x}$	nó de maior deslocamento da placa não-danificada na direção “x”

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações Gerais

Atualmente, existe um grande esforço na pesquisa de materiais avançados que apresentem características mais favoráveis às aplicações para as quais se destinam, tais como, os materiais laminados compostos sobre efeito de tração. Os mais recentes avanços na área industrial, principalmente na aeronáutica e médica, revelam o quão estratégicas são as pesquisas sobre os novos materiais visando sua aplicação e comportamento estrutural mais eficiente. Materiais compostos são exemplos que confirmam esta observação. Entretanto, em ordem de se otimizar o projeto e a fabricação de tais estruturas, é importante compreender-se os modos de falha e de fratura destes materiais sujeitos a diferentes condições de carregamento. Este trabalho versará sobre materiais laminados compostos contendo dano interno em sua estrutura e serão tratados nos itens que se seguem.

#### 1.1.1 Materiais Compostos

Os materiais empregados pelo homem ao longo de toda a sua história podem ser agrupados em quatro categorias básicas: metais, polímeros, cerâmicos e compostos. A importância relativa entre eles variou durante os séculos. Por exemplo, nos primórdios da civilização (10.000 a.C.), predominava o uso e o interesse por

polímeros, tais como madeira, tecidos e fibras, e por cerâmicos, tais como pedras, argilas e argamassas e, mais tarde, o vidro. Os metais que despertavam maior interesse eram o ouro, o cobre e o bronze. As primeiras aplicações de compostos foram em tijolos misturados com palha.

Ao longo dos séculos, novas descobertas foram realizadas e a importância relativa entre os materiais foi se modificando, observando-se um imenso predomínio dos metais sobre os de outras espécies. O Século XVIII foi marcado pelo uso intensivo dos aços como materiais estruturais. Em meados do Século XX, as aplicações mais avançadas para a época faziam uso de peças de ligas metálicas (de aço, de alumínio, superligas de titânio, de zircônio, etc...).

O Século XX foi também marcado pela expansão da indústria química, notadamente a associada à exploração do petróleo, o que permitiu um grande impulso na descoberta e desenvolvimento de novos polímeros tais como nylon, poliestireno, acrílicos, epóxi, e outros polímeros de alta resistência. Hoje em dia, peças com finalidades estruturais importantes utilizam polímeros, substituindo muitas vezes as convencionais peças metálicas.

A partir dos anos 60, começaram a surgir fios e fibras de alta resistência, tais como fibras de carbono, que permitiram a fabricação de peças de materiais compostos avançados associando tais fibras a uma resina ou matriz poliméricas. O resultado disso foi o grande desenvolvimento no projeto de estruturas de materiais compostos, sendo a indústria aeronáutica a maior beneficiária.

Com estes extraordinários avanços tecnológicos, a importância relativa dos materiais sofreu um re-arranjo. Hoje os materiais metálicos vêm perdendo espaço, sendo cada vez mais substituídos por polímeros, cerâmicos e compostos, principalmente naquelas aplicações que exigem alta resistência, elevada rigidez e baixo peso. A Figura 1.1 ilustra a importância relativa dos materiais ao longo da História da Civilização onde se pode observar a evolução da importância relativa destes tipos de materiais. Projeta-se, para as próximas décadas, uma utilização cada vez maior de polímeros, compostos e cerâmicos, com a redução do uso de materiais metálicos.

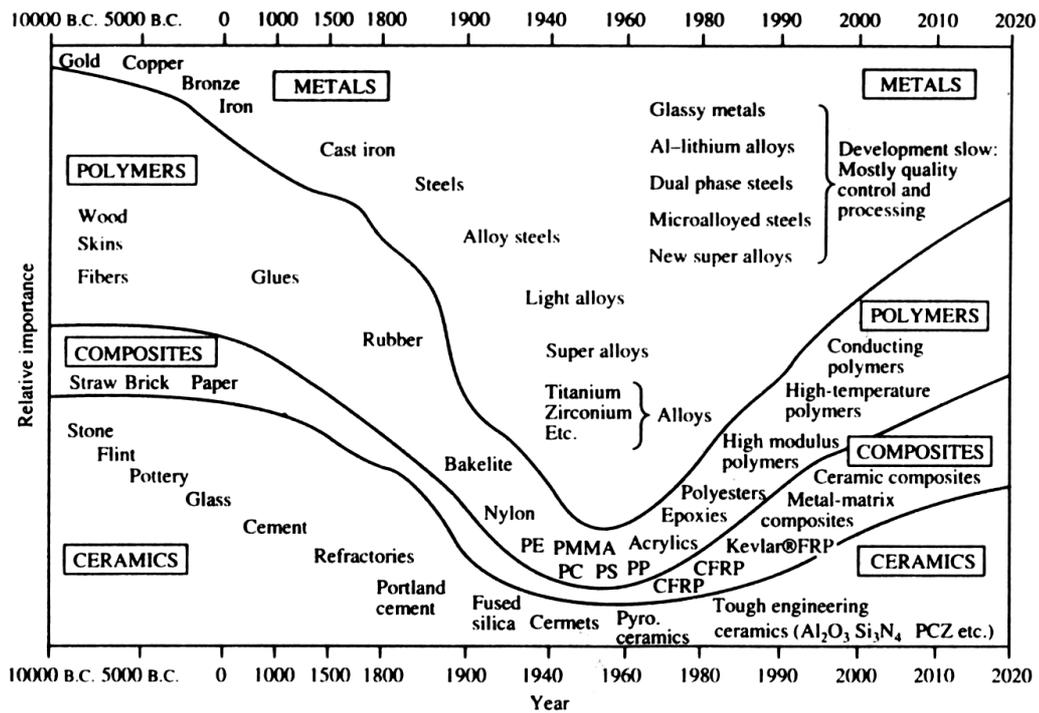


Figura 1.1 - Importância relativa dos materiais ao longo da História [Gibson (1994)]

Hoje em dia, o campo de aplicação dos materiais compostos é muito amplo, sendo os mesmos empregados nas mais diversas situações, especialmente naquelas que requerem maior tecnologia. Assim, vale mencionar:

A. Aplicações na indústria aeronáutica.

A utilização de materiais mais leves e reforçados na estrutura de aviões, helicópteros (Figura 1.2) e satélites permite que, pela diminuição de seu próprio peso, aumente-se o volume do tanque de combustíveis ampliando a autonomia do vôo; em aeronaves de passageiros a redução do peso próprio pode ser compensado pelo maior número de usuários. Além disso, a utilização de compostos pode ser feita no intuito de se melhorarem as condições de exposição térmica a que tais aeronaves muitas vezes são submetidas em consequência das elevadas velocidades.

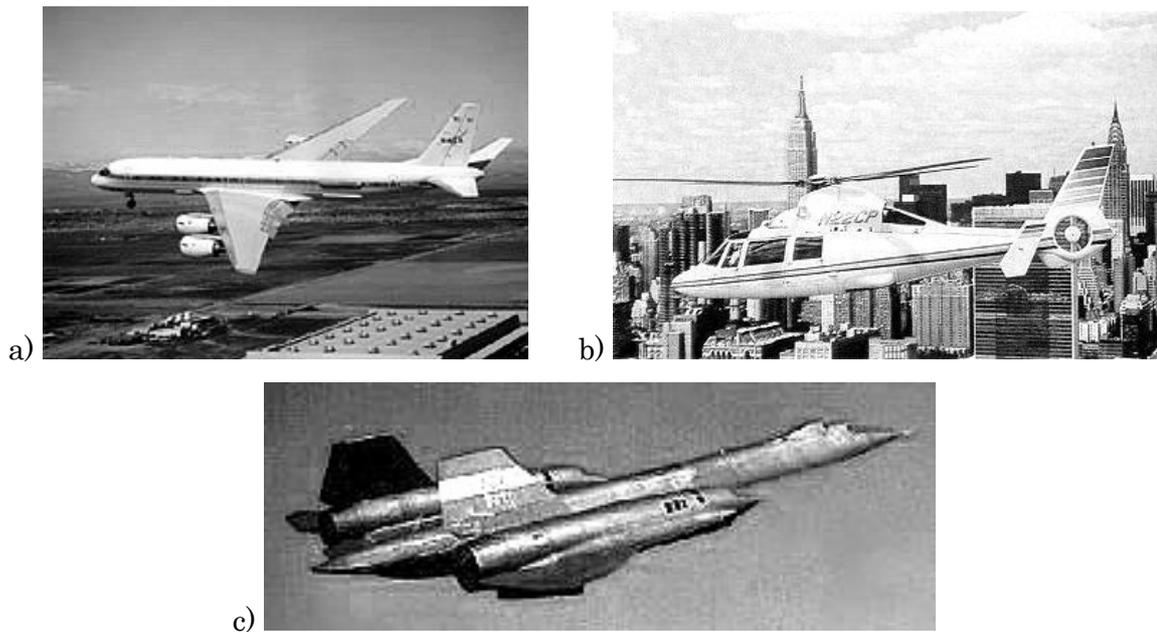


Figura 1.2 – Avião comercial (a), helicóptero (b) ([www.saint-gobainvetrotex.com.br](http://www.saint-gobainvetrotex.com.br), 24/02/2004) e militar (c) ([www.fiberset.com-html-work.htm](http://www.fiberset.com-html-work.htm), 24/02/2004)

#### B. Aplicações na indústria automotiva.

Vários componentes dos veículos modernos tais como ilustrado na Figura 1.3, são feitos em materiais compostos, por exemplo, carrocerias (de fibra de vidro), tampa de comando de válvulas, sistema de pedais, eixos de direção, etc.

#### C. Outras aplicações relevantes.

Muitas outras aplicações podem ser citadas, tais como, as indústrias navais, esportivas e até na bio-engenharia, onde inúmeras próteses precisam ser fabricadas reunindo-se propriedades especiais que só um composto pode atender.

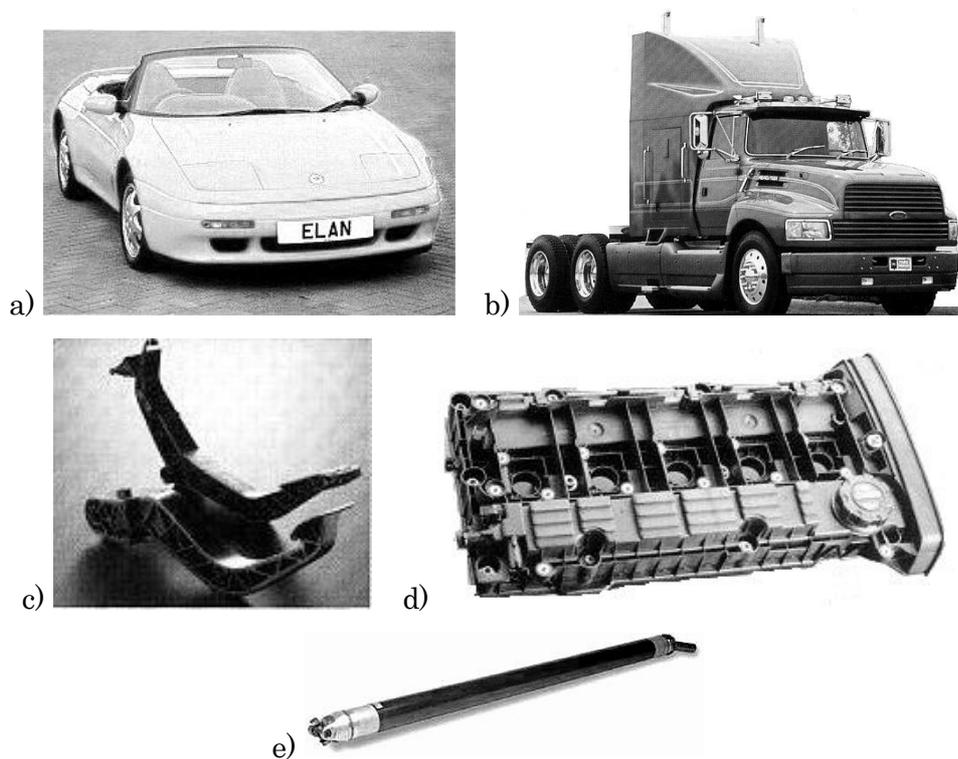


Figura 1.3 – Carros (a), caminhões (b), exemplos de sistema de pedais (c) e tampa do comando de válvulas com poliamida reforçada (d) ([www.saint-gobainvetrotex.com.br](http://www.saint-gobainvetrotex.com.br), 24/02/2004) e eixos de direção (e) ([www.strongweel.com](http://www.strongweel.com), 24/02/2004)

### 1.1.2 Danificação em Estruturas Compostas

Sólidos sujeitos a certas condições de carregamentos podem sofrer rearranjos na sua estrutura interna. Isto pode acarretar micro-trincas, vazios ou cavidades, formando uma alta concentração de tensão. Tais alterações na micro-estrutura interna, denominadas de *dano*, enfraquecem o material a nível microscópico, diminuindo sua rigidez. Os danos internos existem como perturbações discretas e, assim, sua análise permanece como um objetivo considerável.

A Mecânica do Dano em Meios Contínuos é um ramo emergente de estudo dos efeitos da deterioração do material em sólidos. Ela leva em conta os efeitos da degradação de modo difuso e progressivo dos materiais quando submetidos a ações de natureza mecânica ou não-mecânica, por meio da redução das propriedades de resistência e rigidez do material. É importante notar, desde logo, a diferença entre a

Mecânica do Dano e a Mecânica da Fratura. Enquanto que a Mecânica da Fratura lida com condições de propagação de uma fissura macroscópica imersa num meio contínuo íntegro, a Mecânica do Dano se ocupa do efeito, sobre a resposta do material, de um processo de microfissuração distribuída que se desenvolve numa etapa preliminar à formação da fissura discreta.

Hoje em dia, o comportamento das estruturas de materiais compostos sem danificação (isto é, íntegras) é bem compreendido e a avaliação do desempenho mecânico é feita por processos consagrados. Contudo, quando apresentam uma condição danificada, não se tem o mesmo entendimento do comportamento estrutural quando comparado com a condição original. A vida útil dos materiais compostos pode ter de ser comprometida quando existe alguma danificação. Como exemplo de estruturas danificadas, a Figura 1.4 mostra placas laminadas compostas contendo trincas transversais em sua matriz.

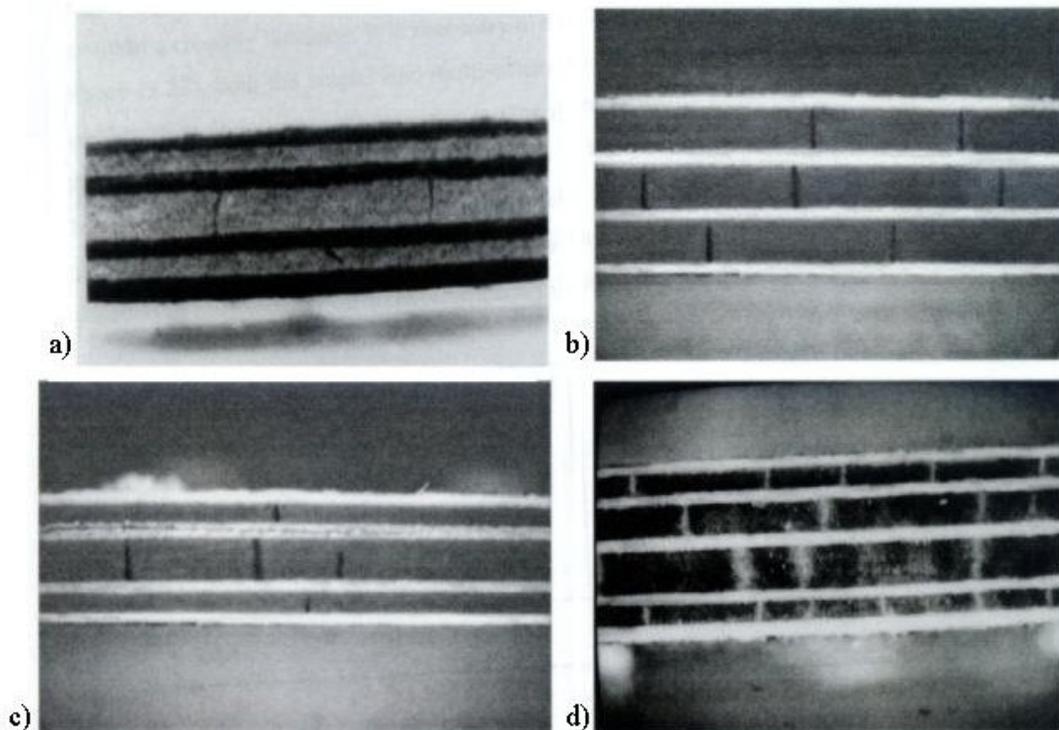


Figura 1.4 - Exemplos de laminados compostos com trincas transversais na matriz [Lim (1999)]: a) Laminado  $[0/90/0/90]_s$ ; b) Laminado  $[0/90_4/90_2]_s$ ; c) Laminado  $[0/90_2/90_2]_s$  e d) Laminado  $[0/90_2/0/90_4/0/90_3/0/90_2/0]$

O processo de danificação de estruturas está muito bem estabelecido em materiais isotrópicos, com o desenvolvimento da “Mecânica da Fratura” onde, para materiais elástico-lineares, um só parâmetro, a tenacidade à fratura, o caracteriza adequadamente. Entretanto, a aplicação desta teoria para análise de materiais compostos tem encontrado algumas limitações já que seu processo de danificação é bastante distinto dos materiais isotrópicos. Sendo assim, estes materiais necessitam de novas abordagens para que se modele o complexo estado de dano e sua evolução.

Na Figura 1.5, mostra-se, como exemplo, algumas manifestações do dano em estruturas laminadas compostas. Como citado por Nairn (2000b), Hashin (1987), Allen *et al.* (1987b), Tay e Lim (1996), dano por trincas transversais geralmente constitui-se no primeiro tipo de dano interno em laminados compostos reforçados com fibras contínuas unidirecionais. Estas trincas transversais formam-se em lâminas com fibras direcionadas distintamente do eixo de carregamento, estendendo-se paralelamente a estas fibras, alongando-se por sua largura e espessura. A multiplicação das trincas transversais ocorre de maneira difusa, reduzindo-se a vida de estruturas compostas carregadas com a redução de sua rigidez. Além disso, as trincas transversais aceleram o início de delaminações, alteram a frequência natural e aceleram a degradação destas estruturas em ambientes severos.

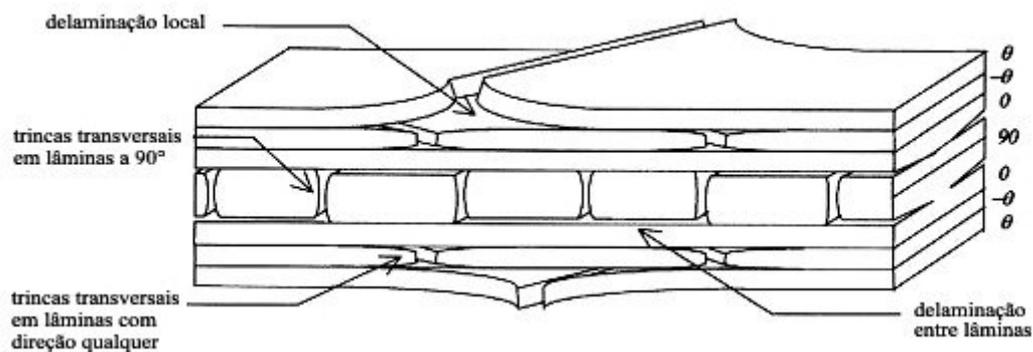


Figura 1.5 – Trincas transversais e delaminações em laminados compostos com fibras em direções quaisquer [Lim (1999)]

## 1.2 Objetivo

A utilidade estrutural dos materiais compostos pode somente ser aproveitada quando seus comportamentos estruturais não-danificados e danificados são bem compreendidos e efetivamente caracterizados. O uso contínuo de estruturas compostas comportando danos internos é praticável e pode ser uma boa alternativa de custo quando sua vida útil é estendida. Para isso, teorias de dano e sua evolução precisam ser adequadamente caracterizadas para prever o fenômeno de trincas transversais em materiais compostos.

Este trabalho tem como objetivo aplicar a Teoria do Dano em Meios Contínuos, proposta por Allen *et al.* (1987) e aplicada por Lim e Tay (1996) para laminados compostos contendo trincas transversais na matriz, descrevendo-se o comportamento de tais estruturas através de sua perda de rigidez utilizando-se de um método aproximado de solução denominado “Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL)”. Assim, são tratados neste trabalho materiais compostos laminados com fibras contínuas contendo dano somente por trincas transversais, desconsiderando-se outros tipos de dano, tais como, delaminações e rompimento das fibras.

## 1.3 Organização do trabalho

Inicialmente, no Capítulo 2, realiza-se uma revisão bibliográfica das principais teorias de dano desenvolvidas até o momento atual, suas aplicações e limitações e novos avanços e direcionamentos de estudos de dano e fratura em materiais utilizados na engenharia.

No Capítulo 3, mostram-se os principais aspectos dos materiais compostos e algumas de suas propriedades superiores aos materiais tradicionais. Também, faz-se menção sobre a relação tensão-deformação de uma lâmina e de um laminado, simplificações, convenções e teorias aplicadas a placas laminadas.

No Capítulo 4, apresenta-se um tensor de segunda ordem das variáveis internas de estado que são embutidas dentro das equações constitutivas derivadas dos princípios da Mecânica do Dano em Meios Contínuos, baseadas nas restrições da

Segunda Lei da Termodinâmica. Assim, expõem-se as relações constitutivas para laminados compostos com trincas transversais.

Uma descrição de como são calculadas as variáveis internas de estado é feita no Capítulo 5, onde se apresenta uma proposta numérica através do Método dos Elementos Finitos para avaliarem-se tais variáveis. Estas variáveis são desenvolvidas para carregamento Modo I e carregamentos acoplados Modos I e III.

Mostra-se, no Capítulo 6, a implementação do dano ao Método Modificado da Função de Green Local justificando-se o desenvolvimento da Teoria do Dano junto ao Método dos Elementos Finitos, com a inclusão do dano através de vetor somado ao vetor dos carregamentos aplicados.

Aplica-se a metodologia proposta no Capítulo 7, onde são apresentados alguns resultados de configurações diversas de laminados compostos. O principal foco é verificar a perda de rigidez de tais laminados comportando trincas transversais em sua matriz.

Finalmente, no Capítulo 8, faz-se alguns comentários finais, apresentando-se a conclusão e sugestões para trabalhos futuros.

## Capítulo 2

# Revisão Bibliográfica

### 2.1 Revisão das Teorias sobre o Dano

Este capítulo tem como finalidade apresentar uma breve revisão sobre as teorias de danificação em estruturas compostas, apresentando as suas vantagens e limitações e ainda, algumas tendências sobre o estudo de materiais compostos danificados.

Durante o processo de desenvolvimento de uma teoria é necessário identificar e representar os mecanismos de dano subjacentes ao seu fenômeno tal que a resposta ao dano da estrutura possa ser bem refletida pela teoria proposta. Todas as teorias propostas para materiais contendo falhas e suas estruturas necessitam, de alguma forma, de dados empíricos de entrada para modelar o fenômeno do dano. Existem trabalhos que exigem dados empíricos obtidos por testes padronizados (ex. ASTM) [Tsai *et. al.* (1990)], [Zhang *et. al.* (1992)], [Hashin (1986)], [Hashin (1987)], [Dvorak *et. al.* (1985)], [Laws *et. al.* (1983)], [Lim e Tay (1996)], [Tay *et. al.* (1992)], [Varna e Berglund (1991)]. Outras requerem dados empíricos não-padronizados e para isto exigem testes especiais adaptados [Hahn e Tsai (1974)], [Tsai e Hahn (1975)], [Highsmith e Reifsnider (1982)], [Wang *et. al.* (1985)], [Laws e Dvorak (1988)], [Laws *et. al.* (1983)], [Allen *et. al.* (1987a)], [Allen *et. al.* (1987b)], [Talreja (1985)], [Talreja *et. al.* (1992)]. Desta forma, dados empíricos não-padronizados necessitam de um esforço adicional para provar sua invariância para diferentes

tipos de laminados. Isto conduz a uma situação onde os escopos teóricos de aplicação destas soluções tornam-se incertos.

Alguns estudos realizados por Masters e Reifsnider, conforme Lim (1999), conduziram a descoberta de um Estado de Dano Característico – um histórico independente do carregamento, fenômeno da saturação das trincas transversais. Eles mostraram uma explícita correlação da redução de rigidez com o aumento do número de trincas transversais.

Modelar o dano por trincas transversais é ainda muito mais complicado pela influência das diferentes restrições impostas individualmente pelas lâminas danificadas com fibras em direção genérica devido à laminação. Possíveis fatores de restrição tais como: espessura da lâmina, orientação e seqüências de empilhamento das lâminas não são bem compreendidos. Conforme descrito por Lim (1999), em laminados com fibras cruzadas e laminados com fibras em direção genérica existem evidências para mostrar que a espessura, a orientação e a seqüência de empilhamento das lâminas necessitam ser consideradas. Efeitos de restrição, além de influenciar a resposta ao dano das lâminas individuais danificadas, também podem governar o início e a característica de evolução de trincas transversais em lâminas individuais para laminados compostos em geral. Assim, o início da trinca transversal e o critério de evolução devem considerar os efeitos de restrição em geral nas lâminas individuais dos laminados. Também, quanto maior a densidade de trinca, menor torna-se a distância entre as trincas transversais. Este resultado gera um alto nível de interações entre trincas transversais adjacentes e pode impedir a formação de novas trincas. Interações entre trincas transversais é um dos principais mecanismos de saturação delas. Além disso, também são esperados que diferentes restrições das lâminas possam gerar diferentes níveis de efeitos nas interações entre as trincas. Outros tipos de dano tais como, a delaminação e a ruptura das fibras, também contribuem para intensificar a extensão das interações entre trincas transversais. Quando o primeiro mecanismo de dano for desencadeado, as interações entre trincas serão iniciadas e o fenômeno de saturação das trincas transversais também. Os fenômenos da competição de mecanismos de dano e sua interação no estado de saturação das trincas transversais estão além do escopo deste trabalho.

Especialmente nas indústrias aeroespacial e marinha, estruturas compostas

freqüentemente operam sob condições extremas provenientes de carregamentos mecânicos adversos e de temperatura residual induzida. Alguns autores a consideraram em seus trabalhos [Nairn (2000a)], [Nairn (2000b)], [Nairn (2001)]. Além da consideração de carregamentos mecânicos e de temperaturas residuais induzidas, a análise da evolução do dano para carregamentos induzidos por variações da temperatura são necessárias.

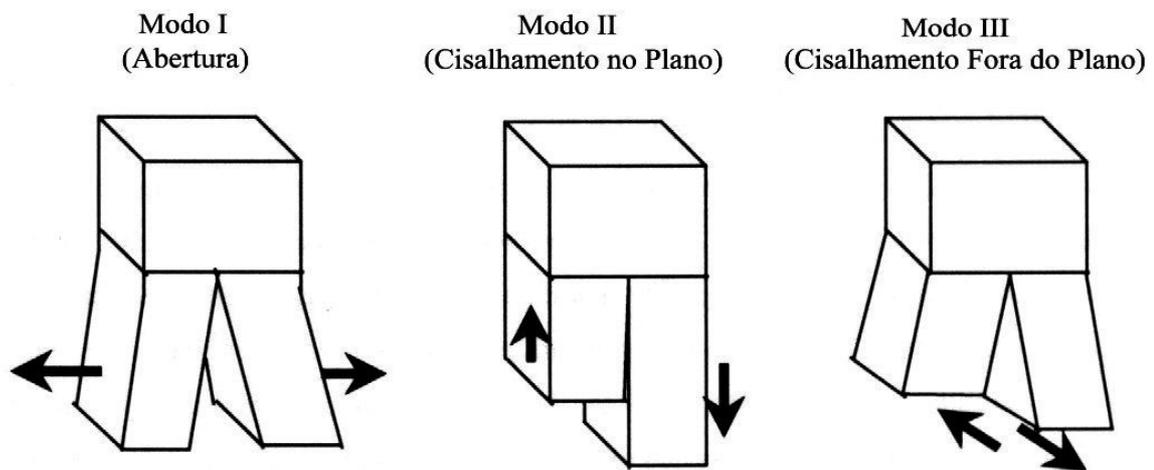


Figura 2.1 – Modos I, II e III de carregamento em trincas

Analisando-se uma configuração de um carregamento genérico em uma trinca, a resposta estrutural pode ser desmembrada em componentes de carregamentos modo I, II e III, visto na Figura 2.1. Em laminados compostos genéricos sujeitos a carregamento axial, os modos I e III acoplados de carregamento atuam em trincas transversais de lâminas com fibras em direção genérica. Até o momento, muitos modelos de dano levam somente em conta o modo I de carregamento para as trincas transversais, dedicando-se apenas a laminados compostos com fibras cruzadas [Tsai (1965)], [Wang *et. al.* (1985)], [Laws e Dvorak (1988)], [Zhang *et. al.* (1992)], [Nairn (1989)], [Laws *et. al.* (1983)], [Praveen e Reddy (1998)], [Talreja *et. al.* (1992)], [Tay *et. al.* (1992)], [Varna e Berglund (1991)]. A fim de se resolver dano por trincas transversais em laminados compostos genéricos, as teorias propostas precisam considerar modos I e III de carregamentos acoplados em trincas transversais das lâminas individuais com fibras em direção genérica, visto

na Figura 2.2. O carregamento modo II em trincas transversais está associado com sollicitações no plano e de torção nos laminados e não serão considerados neste trabalho.

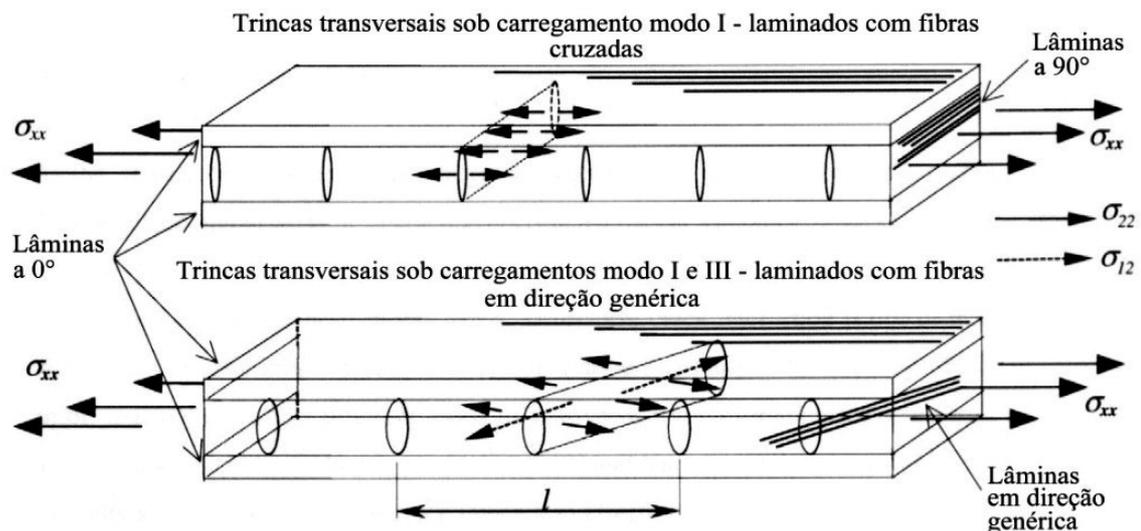


Figura 2.2 – Modos de carregamento em trincas transversais para laminados com fibras cruzadas e laminados com fibras em direção genérica [Lim (1999)]

O desafio imediato é desenvolver uma teoria do dano mais efetiva, geral e que considere a evolução das trincas transversais em laminados compostos genéricos. O dano e sua evolução devem levar em conta efeitos de restrição e interações entre trincas transversais em laminados com fibras em direções quaisquer, assim como carregamentos induzidos provenientes das variações da temperatura e modos de carregamento acoplados. Para o presente trabalho, a evolução do dano não é considerada.

Os mecanismos de dano subjacentes discutidos acima estão presentes em todos os laminados compostos que contém dano por trincas transversais. Entretanto, nenhuma das literaturas conhecidas atualmente considera todos os mecanismos de dano simultaneamente. O desenvolvimento de metodologias que considerem todos os mecanismos de danos identificados é necessário.

Muitos métodos teóricos foram propostos com a evolução da compreensão dos mecanismos básicos das trincas transversais. Os modelos de dano podem ser

divididos em teorias baseadas na camada descontínua, métodos de cisalhamento defasado, mecânica variacional, esquemas autoconsistentes, mecânica do dano em meios contínuos, método dos elementos finitos, entre outros. Um resumo de várias metodologias para cada modelo é discutido a seguir.

- Teoria da Camada Descontínua

Nesta aproximação, a rigidez da lâmina danificada é descontinuada no início da primeira trinca transversal. Assim, a física subjacente ao processo do dano não é levada em conta. A Camada Descontínua é amplamente aceita e usada devida a sua simplicidade embora excessivamente conservadora, pois previsões de propriedades residuais e trincas em lâminas com fibras na direção contrária ao carregamento ainda conservam considerável quantidade de sua capacidade inicial ao carregamento [Tsai (1965)].

- Esquemas Auto-Consistentes

Os Esquemas Auto-Consistentes fazem uso da solução por inclusões (trincas) em um meio anisotrópico para obter o módulo efetivo de uma lâmina com trincas usando o Método Variacional. Na literatura, microfissuras são utilizadas como inclusões para o modelo de trincas transversais. Neste caso, as transposições de fissuras que representam a geometria física das trincas transversais são questionáveis. Além disso, em laminados compostos, efeitos de restrição devido à variação da espessura da lâmina, a orientação e seqüência de empilhamento das lâminas adjacentes e as lâminas com trincas são normalmente desprezadas [Dvorak *et. al.* (1985)], [Laws *et. al.* (1983)].

- Métodos Estatísticos

Alguns autores usaram uma distribuição estatística para descrever o comportamento de lâminas com trincas transversais em laminados com fibras cruzadas. Neste Método Estatístico, dados empíricos adicionais são necessários para preencher as constantes estatísticas. Além disso, as constantes identificadas de experimentos especialmente elaborados precisam mostrar invariância quando aplicados a diferentes laminados [Peter *et. al.* (1983)].

Outros autores utilizaram elementos finitos para determinar coeficientes de taxa de liberação de energia associadas com trincas transversais em lâminas a 90° em laminados com fibras cruzadas. Combinando-se uma distribuição estatística de fissuras nas lâminas a 90° e implementando-se uma rotina, as evoluções de trincas transversais são analisadas. Este método necessita da determinação do tamanho inicial da falha – um valor de entrada desconhecido. Estudos dos efeitos das variações de restrição da lâmina no comportamento de iniciação e saturação de trincas transversais em laminados com fibras cruzadas foram relatados por Wang (1985).

- Método Variacional

Pela imposição de equilíbrio, das condições de contorno, Hashin aplicou o método variacional na função energia de deformação complementar e estendeu a análise para incluir o Modo III (carregamento por cisalhamento) em laminados com fibras cruzadas. O modelo de Hashin assumiu que as tensões normais das lâminas na direção do carregamento são constantes em toda espessura da lâmina. Apesar do rigor do método, este é capaz de resolver laminados com trincas transversais de configuração  $[0^{\circ}_m/90^{\circ}_n]_s$  somente, onde  $m$  e  $n$  significam um número qualquer de lâminas e  $s$  laminados simétricos. A aproximação de Hashin prediz a perda de rigidez de simples laminados com fibras cruzadas [Hashin (1987)].

Nairn estendeu o modelo variacional de Hashin para incluir tensões térmicas residuais e aplicou um critério de evolução baseado na Mecânica da Fratura para estudar o comportamento progressivo de trincas transversais de laminados com

fibras cruzadas  $[0^{\circ}_m/90^{\circ}_n]_s$  e  $[90^{\circ}_m/0^{\circ}_n]_s$ . Até então, os modelos comentados são somente unidimensionais, e as tensões assumidas são funções somente da direção longitudinal [Nairn (1989)].

Varna e Berglund (1991) aperfeiçoaram o método de Hashin considerando tensões variando na espessura e direções longitudinais para as lâminas a  $0^{\circ}$  e a  $90^{\circ}$  - uma análise bi-dimensional. Contudo, métodos numéricos são necessários para resolver o processo de minimização do funcional energia de deformação complementar. A solução alcançada demonstra uma representação mais realista do estado de tensões, mas o método pode somente resolver dano por trincas transversais em laminados com fibras cruzadas  $[0^{\circ}_m/90^{\circ}_n]_s$  e  $[90^{\circ}_m/0^{\circ}_n]_s$ .

- Teorias de Cisalhamento Defasado (“Shear Lag Theories”)

Nos modelos de Cisalhamento Defasado, as distribuições de tensão são obtidas a partir das condições de equilíbrio na forma integral. As equações de equilíbrio não são, portanto, satisfeitas em cada ponto dentro do laminado. As distribuições resultantes de tensão são tais que as condições de tensão de cisalhamento zero na superfície da trinca não são satisfeitas.

Há duas classes de modelos desta teoria, distinguindo-se pela distribuição de tensões assumidas dentro das lâminas a  $0^{\circ}$  e  $90^{\circ}$ . A primeira classe de modelos varia a distribuição de tensões somente na direção longitudinal (modelos unidimensionais). Os modelos foram propostos por Highsmith e Reifsnider (1982), Laws e Dvorak (1988), entre outros.

A outra classe de modelos varia a distribuição de tensões na direção longitudinal e na espessura (modelos bidimensionais). Tais modelos foram propostos por Tsai *et. al.* (1990), Zhang *et. al.* (1992), entre outros.

Ambos os modelos, unidimensional e bidimensional, necessitam determinar o parâmetro “shear lag” (cisalhamento defasado). Este parâmetro governa a quantidade de transferência de carregamento entre as camadas a  $0^{\circ}$  e  $90^{\circ}$ . Nos modelos unidimensionais, o parâmetro “shear lag” é associado a uma região rica em resina entre as camadas a  $0^{\circ}$  e  $90^{\circ}$  [Highsmith e Reifsnider (1982)]. O parâmetro “shear lag” foi determinado experimentalmente ou por adaptação de curvas para

unir-se às predições teóricas de resultados experimentais. Para modelos bidimensionais, este parâmetro é determinado com uma função das propriedades do material do laminado e da geometria da trinca. Isto depende da forma assumida do deslocamento longitudinal da lâmina a  $90^\circ$ .

Uma vantagem das Teorias de Cisalhamento Defasado é que os efeitos de restrição à resposta do dano em lâminas com trincas são explicitamente modelados. Sendo assim, estas teorias fornecem informações micromecânicas detalhadas dos estados de tensão de uma trinca e do laminado danificado. Além disso, os efeitos da interação entre as falhas durante as análises de evoluções das trincas transversais são levadas em conta. Entretanto, as Teorias de Cisalhamento Defasado são frequentemente limitadas a análises de simples laminados com fibras cruzadas  $[0^\circ_m/90^\circ_n]_s$  e  $[90^\circ_m/0^\circ_n]_s$ .

- Método dos Elementos Finitos

Praveen e Reddy (1998) utilizaram uma Teoria de Lâmina Discreta para derivar um limite superior variacional no módulo efetivo de laminados com fibras cruzadas restringidos interna e externamente. Eles também propuseram uma normalização do perfil de abertura da trinca como uma elipse, alegando levar em conta variações de empilhamento, densidades de trinca e parâmetros dos materiais de laminados.

McLaughlin e Santhanam (2002), através do Método dos Elementos finitos, modelaram cada lâmina em estado plano de tensões unindo-as nos nós e desunindo-as onde existiam danos (trincas transversais e delaminações). Um critério para propagação das trincas foi proposto através da taxa de liberação de energia obtendo-se resultados próximos, mas demonstrando que um melhor critério para propagação das trincas é necessário.

- Aproximação Semi-Inversa

Hahn e Tsai [Hahn e Tsai (1974)], [Tsai e Hahn (1975)] utilizaram uma aproximação semi-inversa para modelar as tensões-deformações de laminados com

fibras cruzadas depois da ocorrência da primeira falha.

- Variação da Energia Elástica

Gudmundson e Ostlund (1992) propuseram uma teoria de dano baseada na premissa da degradação das constantes de engenharia originando-se do dano por trinca transversais e podendo ser determinadas da variação da energia elástica de estruturas compostas. A teoria é aplicável para modelos bidimensionais e tridimensionais de redução de rigidez para empilhamentos de lâminas em geral. Contudo, esta teoria não leva em conta a evolução do dano e efeitos de restrição.

Tseng [Tseng (2000a)], [Tseng (2000b)] sugeriu um novo parâmetro para detecção do dano global: Energia de Defeito Estática. Esta metodologia busca uma simplificação de experimentos dinâmicos para estáticos, obtendo-se apenas um conjunto de variações da energia estática para o cálculo do dano. Utiliza-se o índice de dano como dado de entrada (razão entre a área danificada e a área original) para se reduzir o módulo de elasticidade do elemento que está danificado e variando-o para se determinar à variação na energia estática.

- Mecânica do Dano em Meios Contínuos

A Mecânica do Dano em Meios Contínuos foi introduzida pela primeira vez por Kachanov (1958). Este trabalho pioneiro procurou justificar a ruptura, precocemente observada em relação ao esperado em metais que se encontravam em regime de deformação lenta, como consequência da existência de defeitos no material. A partir de então, a teoria do dano teve grandes avanços, principalmente por Lemaitre (1992).

Desta forma, para se considerar os defeitos no material, a Mecânica do Dano em Meios Contínuos utiliza variáveis internas de estado, representando diferentes tipos de dano interno dentro de estruturas com trincas. Isto exige que os defeitos internos estejam numa distribuição estatisticamente homogênea. Baseado nas restrições da Segunda Lei da Termodinâmica, equações constitutivas para sólidos tridimensionais contendo dano interno são derivadas em termos das variáveis

internas de estado e variáveis externas (deformações, temperaturas, etc).

A maioria das Teorias da Mecânica do Dano em Meios Contínuos leva em conta carregamentos de modo I e III e são aplicáveis para análises tridimensionais. A restrição destes modelos repousa no fato de que dados experimentais são necessários para determinar valores de constantes e para variáveis internas de estado dentro das equações constitutivas.

As variáveis internas de estado precisam ser identificadas tanto em métodos onde os fenômenos são baseados na macromecânica quanto na micromecânica. Nas teorias iniciais, a maioria das constantes e das variáveis internas de estado são determinadas utilizando-se métodos fenomenológicos. Frequentemente, as constantes e as variáveis de estado necessitam de testes não-padronizados e exigem verificação para garantir sua aplicabilidade. Em alguns casos, dificuldades na identificação das constantes de entrada foram relatadas, sendo sua interpretação não óbvia [Allen *et. al.* (1987a)], [Allen *et. al.* (1987b)], [Talreja (1985)], [Talreja *et. al.* (1992)].

As Teorias da Mecânica do Dano em Meios Contínuos fornecem subsídios para a resposta média de estados de dano da estrutura. Nelas faltam informações detalhadas da micromecânica e, portanto, não levam em conta restrições da trinca transversal e nem efeitos de interação. Além disso, estas teorias exigem leis de crescimento do dano para descrever características de evolução do dano por trincas transversais.

Em alguns estudos, muitas constantes precisam ser determinadas. Algumas não são tão facilmente encontradas. Ao mesmo tempo, desde que leis de crescimento (leis de evolução) são derivadas de observações, diferentes leis de dano podem ser assumidas para representar um mesmo comportamento de dano. Disto resultaram diferentes teorias existentes na literatura. Em muitas destas teorias de dano, adaptações de curvas para as constantes em leis de evolução e funções para as variáveis de estado foram assumidas. Isto introduz muitas incertezas nos modelos de dano propostos [Allen *et. al.* (1987a)], [Allen *et. al.* (1987b)], [Talreja (1984a, 1984b)], [Talreja (1985)], [Talreja *et. al.* (1992)].

Para superar as deficiências acima mostradas nas teorias de dano, Tay e Lim (1996) propuseram calcular pelo Método dos Elementos Finitos as variáveis internas

de estado da Teoria da Mecânica do Dano em Meios Contínuos sugerido por Allen [Allen *et al.* (1987a)], [Allen *et al.* (1987b)]. Sua aproximação não necessita de experimentos para identificar as variáveis internas de estado. A aproximação proposta por Lim e Tay (1996) tem a capacidade de descrever danos por trincas transversais com carregamentos modo I e III e permite prever dano em laminados compostos empilhados genericamente, levando em consideração alterações de restrição em lâminas com fibras em direções genéricas.

As alterações de restrição são analisadas em termos de fatores de restrição tais como a espessura da lâmina, a orientação e as variações da seqüência de empilhamento. O trabalho inicial de Tay e Lim, citado anteriormente, conduz a evolução do dano somente por trincas transversais em laminados com fibras cruzadas. Para uma completa análise do dano e sua evolução em laminados compostos em geral, muitas pesquisas ainda são necessárias.

Allen *et al.* (1988) desenvolveram equações constitutivas considerando dano na matriz e por delaminação. O desenvolvimento foi feito através da teoria constitutiva termo-mecânica e o dano foi incluído pelas variáveis internas de estado. Este trabalho detalha uma definição consistente das variáveis internas de estado para delaminação entre as lâminas. A variável interna para delaminação não foi incorporada no nível da lâmina através da alteração da constituição da lâmina, mas sim na alteração dos deslocamentos de Kirchhoff (Teoria Clássica de Placas).

Já, o trabalho de Lo *et al.* (1993) fornece informações sobre a história da progressão dos eventos de falha. A análise segue em três fases: relações constitutivas não-lineares são derivadas pela mecânica do dano em meios contínuos, um algoritmo é proposto contendo estas relações constitutivas para análise da estrutura e um critério de falha indica a falha catastrófica da estrutura. Lo *et al.* utilizaram variáveis internas para trincas transversais na matriz e para delaminações. Allen [Allen (1994)], posteriormente, apresentou um trabalho similar.

Coats *et al.* (1998) ofereceu uma análise progressiva de falha, relacionando dano por trincas na matriz e fratura da fibra via variável de dano baseado na cinemática em volumes de elemento representativo aplicado para carregamentos quase-estáticos e cíclicos predizendo leis de evolução do dano. Predições da resistência residual comparada com experimentos demonstraram resultados

favoráveis. A evolução das variáveis de dano foi governada por experimentos baseados na evolução do dano. A capacidade do modelo de dano adotada foi limitada ao modo I (modo de abertura) e modo II (modo de cisalhamento no plano) para trincas na matriz e fratura da fibra, respectivamente.

## 2.2 Outros Enfoques e Direcionamentos sobre o Dano

Muitos estudos estão sendo direcionados para a detecção do dano por métodos não-destrutivos, na busca de parâmetros dinâmicos que identifiquem o dano. Alguns autores utilizam autovalores para se determinar a variação da frequência natural de sistemas danificados. Outros ainda analisaram os autovetores para verificar as mudanças nos modos de vibrar das estruturas, conforme descrito por Araújo dos Santos *et al.* (2000), Tseng (2000a, 2000b) e Araújo *et al.* (2000) que utilizam um modelo numérico baseado no método dos elementos finitos com campo de deslocamentos de ordem superior para identificação de seis módulos elásticos do material danificado.

Alguns autores estão utilizando um método de homogeneização para prever a resposta constitutiva de lâminas em materiais compostos. Métodos Locais-Globais como Caiazzo e Costanzo (2001) determinam importantes parâmetros do material, incluindo o carregamento na iniciação de trincas, taxa de crescimento do dano e resultado efetivo da rigidez do material. Um número discreto de variáveis internas de estado é calculado e as demais são obtidas por interpolação. Este método divide-se em três fases: 1) Pré-processamento, onde um modelo para o comportamento local do material é criado; 2) Solução, onde o comportamento global da estrutura é determinado utilizando informações do estado do material deduzido da lei constitutiva; 3) Pós-processamento, onde os dados do estado do material são armazenados para revisão. Apresenta alguns bons resultados para compostos  $[0/90_3]_s$ ,  $[0/90]_s$  vidro/epóxi, entre outros. Já Carrere *et al.* (2002) apresentam duas soluções multi-escala: uma aproximação seqüencial e uma aproximação integrada. A primeira é composta de um modelo macroscópico clássico que é deduzido das passagens da multi-escala. Tais modelos contêm algumas características microscópicas, embora eles sejam escritos como equações puramente

fenomenológicas na escala macroscópica. O composto é então descrito na escala estrutural como uma média homogênea. Apresenta baixo custo computacional, mas as quantidades locais são tratadas na média. A segunda resolve as leis constitutivas na escala local. Isto é possível utilizando-se um modelo analítico que dá as relações entre a escala macroscópica e a microscópica. Também é possível utilizar uma aproximação multi-nível por elementos finitos. Apresenta uma descrição precisa das quantidades locais, mas requer um alto custo computacional.

Novos avanços caminham para implementação de uma zona coesiva que é empregada para prever a formação de novas superfícies (que formam as fissuras) dentro de corpos. O comportamento não-linear e sem carregamento da zona coesiva resultará na criação de fronteiras internas onde energia suficiente é fornecida para a extensão da trinca. Estes problemas podem incluir: elasticidade, elastoplasticidade, viscoplasticidade e visco-elasticidade [Fouk *et. al.* (1999)]. A capacidade de se introduzir ductilidade na ponta da trinca demonstrou uma grande realização em processos de solução para evolução do dano [Allen e Searcy (2001)]. Phillips *et. al.* (2000) propuseram um estudo da evolução da degradação na interface matriz-fibra, de trincas na matriz e de delaminações onde o modelo proposto, devido à natureza complicada de muitas trincas, envolve uma metodologia de multi-escala: micro-meso-local-global. A degradação da interface na micro-escala é homogeneizada para produzir um modelo de zona coesiva, trincas na matriz na “meso-escala” para desenvolver as equações constitutivas dependentes do dano, delaminações na escala local e a resposta da placa laminada na escala global através de processos de homogeneização.

Resistência de materiais compostos com fibras em estado de tensão e compressão, campos residuais, transformações da deformação devido à mistura fibra/matriz, deformações térmicas, plasticidade, viscoplasticidade durante o processo de carregamento termomecânico e envolvendo dano por fadiga, análise do início do dano e seu crescimento, estruturas laminadas compostas sob carregamentos complexos e em ambientes severos são alguns assuntos que estão sendo cada vez mais aprofundados e incorporados em estudos recentes [Dvorak (2000)]. Aproximações pela micromecânica que considera os diferentes mecanismos de dano, tais como, dano na fibra, desunião da fibra/matriz e trincas na matriz e

aplicações para carregamento quase-estáticos e cíclicos (fadiga) também são tópicos de pesquisa [Abdelal (2000)]. Diferenças dos comportamentos de compressão e tração, incluindo dano viscoso e efeitos plásticos sendo, portanto, útil em situações de impacto onde a fratura da fibra é o modo de falha dominante foram analisados no trabalho de Edlund e Volgers (2003). Neste estudo, a plasticidade na matriz do material é modelada, e utilizam-se três variáveis de dano (tensão na fibra, tensão transversal e de cisalhamento) aplicados ao método dos elementos finitos.

Benabou *et. al.* (2002) estudaram o comportamento efetivo de compostos com matriz metálica reforçada com partículas contendo interfaces imperfeitas entre seus constituintes. A condição de união entre as partículas e a matriz é caracterizada pela existência de um salto no deslocamento que é proporcional à tração transmitida pela interface. Duas aproximações foram propostas: lei de dano pela termodinâmica e critério de falha pela lei de Coulomb. Este estudo se assemelha aos realizados em materiais frágeis, como o concreto, onde, de uma maneira geral, o dano inicial é constituído por defeitos na zona de interface entre as fases e por vazios ou poros na argamassa [Proença (2000)]. Alguns estudos nesta área estão empregando a mecânica do dano e a evolução do dano na busca de resultados mais próximo dos reais [Fish *et. al.* (1999)].

Muitos outros trabalhos envolvendo fratura da matriz, da fibra e delaminações podem ser encontrados na literatura atual. Estudos sobre a interface matriz-fibra [Aveston e Kelly (1973)], delaminações [Bolotin (1996)], [Makeev e Armanios (1999)], [Zou et al. (2002)], impacto [de Freitas et al. (2000)], crescimento de trincas [Vejen e Pyrz (2002)], [Dutta e Kushwaha (2004)] também são tratados amplamente pela Mecânica da Fratura. Apesar de grandes esforços para identificar e caracterizar estados de danificação das estruturas, muitos estudos ainda são necessários para modelar todas as formas de dano mais acuradamente.

Neste trabalho utiliza-se a Teoria do Dano em Meios Contínuos, proposta por Allen *et al.* (1987) e aplicada por Lim e Tay (1996) para a análise de laminados compostos contendo trincas transversais na matriz já que a mesma demonstra uma rigorosidade teórica e de relativa simples aplicação aos métodos de solução aproximados.

## Capítulo 3

# Materiais Compostos

### 3.1 Introdução

Este capítulo tem por finalidade discutir os principais aspectos dos materiais compostos, seus constituintes, tipos, as lâminas, os laminados compostos e definir as relações tensão-deformação. Ainda, demonstrar algumas hipóteses e simplificações que auxiliam o desenvolvimento deste trabalho.

Compreende-se por material composto aquele decorrente da associação, em escala macroscópica, de dois ou mais materiais distintos, preservando suas propriedades originais, que trabalham solidariamente entre si, resultando em qualidade superior à daqueles que o constituem [Machado (1992)].

Três aspectos fundamentais precisam ser salientados na definição acima. Primeiro, que a combinação dos materiais, sendo em escala macroscópica, torna o meio heterogêneo. Portanto, uma liga metálica não pode ser considerada um composto, uma vez que os metais que a constituem são misturados a nível microscópico, resultando num material homogêneo macroscopicamente.

Segundo, trabalho solidário entre os materiais significa que, numa análise macro-mecânica, não se considera a interação entre os diversos componentes de uma lâmina. Assim, esforços de coação interna, tais como os provenientes de deformações térmicas distintas, podem ser desprezados. Se, em termos práticos, essa simplificação é adotada com frequência, em outras situações, como nos casos de

danos, o comportamento microscópico passa a ser fundamental. Solidariedade significa, também, a proteção de um material pelo outro contra agentes externos, tais como corrosão, manipulação indevida, etc.

Finalmente, a qualidade superior do material resultante pode ser observada em algumas das seguintes propriedades e melhorias:

- Aumento da resistência a esforços externos, à corrosão, à fadiga, e/ou aos efeitos da temperatura;
- Redução do peso próprio e da densidade;
- Aumento da vida útil;
- Elevação da rigidez;
- Melhoria do desempenho térmico e acústico;
- Redução dos custos, e;
- Facilidade de composição.

Estas características têm permitido o uso de materiais compostos como solução nos mais distintos ramos da indústria, com aplicações cada vez mais freqüentes, já citadas anteriormente.

As técnicas de manufatura para fabricação de estruturas de materiais compostos dependem de uma série de fatores, dentre os quais se destacam os tipos de componentes, a configuração da estrutura, e a taxa de produção [Schwartz (1997)].

Sendo as fibras os materiais mais resistentes, é de se esperar que quanto maior a presença destas num composto, melhores sejam as propriedades resultantes. Na prática, não é bem assim. Além de influenciar diretamente no custo final do produto, as fibras dependem do meio contínuo garantido pela resina para poderem absorver as cargas atuantes. Assim, em aplicações na indústria naval, é comum uma proporção de 30% a 40% de fibras por volume de um composto. Em modernas aplicações da indústria aeronáutica, essa proporção pode chegar a 70%.

A Figura 3.1 ilustra comparativamente a resistência específica de materiais isolados e compostos.

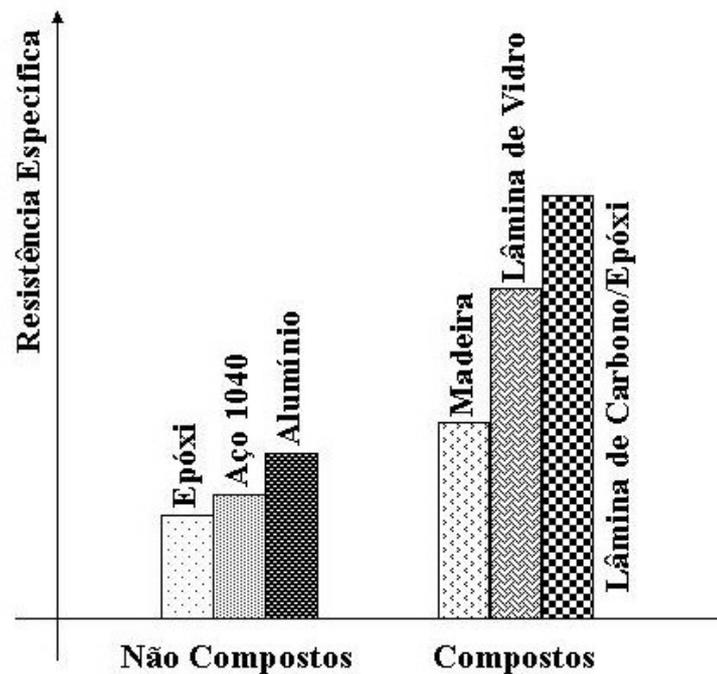


Figura 3.1 – Gráfico comparativo qualitativo sobre a resistência específica de alguns materiais [Machado (2001)]

Um composto pode ser dividido em três componentes fundamentais: reforços, matriz e interface [Hull e Clyne (1996)]. Os reforços são elementos descontínuos, de grande resistência e rigidez, e baixo peso. Essencialmente, são os responsáveis pela capacidade resistente das peças de materiais compostos, muito embora não fossem úteis se empregados de forma isolada, pois são muito esbeltos e pequenos e, portanto, não apresentam condições de utilização. Para que os reforços possam ser utilizados, é necessário que estejam mergulhados numa resina ou matriz que tem por finalidade tornar o meio contínuo, mas devem também ser de baixo peso. A matriz também tem por finalidade a proteção dos reforços ou armações. A solidariedade entre a matriz e o reforço se dá ao nível da interface entre os dois. Para que a combinação seja adequada, espera-se uma perfeita adesão entre os materiais, com resistência suficiente na interface e em cada componente.

As propriedades de um composto dependem de:

- Propriedades das fibras ou dos reforços;
- Propriedades da resina ou matriz;

- Proporção de fibras ou dos reforços na resina;
- Geometria e orientação das fibras no composto.

A Figura 3.2 mostra os tipos de compostos pela disposição das fibras. Compostos laminados com fibras contínuas (da Figura 3.2-a), nos quais lâminas com fibras contínuas dispostas na matriz são orientadas em direções determinadas e unidas para formar um laminado. Embora este tipo de laminado seja usado extensivamente, o potencial do problema da delaminação ou separação das lâminas é ainda um grande problema devido à resistência interlaminar ser dominada pela matriz. Compostos de fibras trançadas (da Figura 3.2-b) não têm lâminas distintas e não são suscetíveis a delaminação, mas sua resistência e rigidez são sacrificadas devido ao fato de que as fibras não são tão bem direcionadas como no composto com fibras contínuas. Compostos com fibras em pedaço podem ter pequenas fibras randomicamente dispersas na matriz (da Figura 3.2-c). Estes compostos são usados extensivamente em aplicações de alto volume devido ao baixo custo de fabricação, mas suas propriedades mecânicas são consideravelmente pobres comparadas com o composto de fibras contínuas. Finalmente, os compostos híbridos podem consistir de fibras em pedaço e contínuas (da Figura 3.2-d) ou tipos de fibras misturadas tais como vidro/grafite.

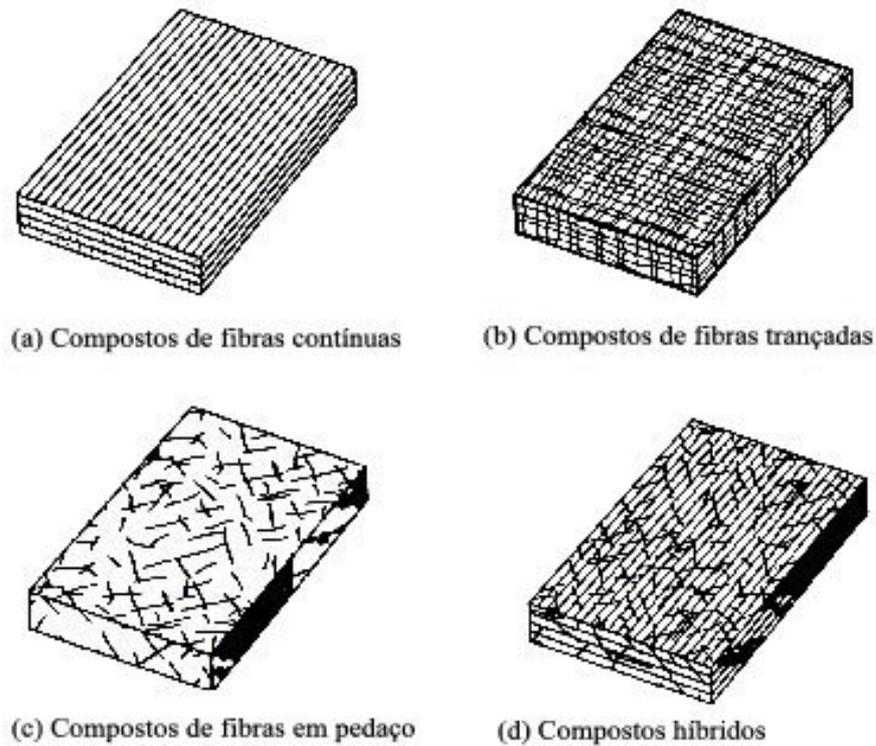


Figura 3.2 – Tipos de compostos reforçados por fibras [Gibson (1994)]

### 3.2 Relação Tensão-Deformação de uma Lâmina

A construção estrutural básica de um composto é a lâmina, que usualmente consiste de uma configuração fibra/matriz. A relação tensão-deformação para uma lâmina unidirecional forma a base para a análise não só para o laminado composto com fibras contínuas, mas, também, para os demais já citados.

Um material composto é obviamente heterogêneo ao nível do material constituinte, com propriedades que possivelmente se alteram ponto a ponto. Por exemplo, a relação tensão-deformação de um ponto é diferente para um ponto no material da fibra assim como para um ponto no material da matriz. Contudo, a relação tensão-deformação de uma lâmina, tratada sob o enfoque macromecânico pode ser expressa em termos de tensões e deformações médias e propriedades efetivas de um material homogêneo equivalente e relacionado pelo seu “módulo efetivo”.

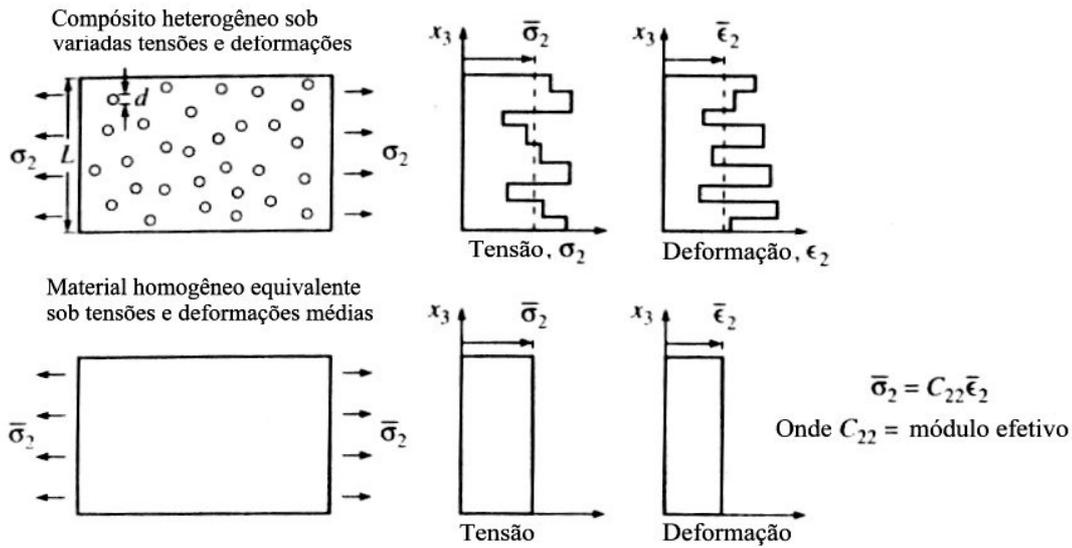


Figura 3.3 – Conceito de módulo efetivo de um material homogêneo equivalente [Gibson (1994)]

Como mostrado na Figura 3.3, se a escala de heterogeneidade em um material pode ser caracterizada por uma dimensão,  $d$ , então a dimensão,  $L$ , onde a média macromecânica acontece, deve ser muito maior do que  $d$  para que as médias de tensões e deformações possam ser relacionadas pelo módulo efetivo de um material homogêneo equivalente. Definindo-se tensões médias,  $\bar{\sigma}_i$ , e deformações médias,  $\bar{\epsilon}_i$ , ( $i = 1, 2, \dots, 6$ ) para serem rateadas sobre um volume  $V$ , que é caracterizado pela dimensão  $L$ , então:

$$\bar{\sigma}_i = \int_V \sigma_i dv / V \tag{3.1}$$

$$\bar{\epsilon}_i = \int_V \epsilon_i dv / V \tag{3.2}$$

onde  $i = 1, 2, \dots, 6$ ;  $\sigma_i$  e  $\epsilon_i$  são os componentes do tensor tensões e deformações em um ponto, respectivamente.

Se as tensões e deformações médias são usadas no lugar das tensões e deformações em um ponto, a Lei de Hooke generalizada torna-se:

$$\bar{\sigma}_i = C_{ij} \bar{\epsilon}_i \quad (3.3)$$

e o módulo elástico  $C_{ij}$  então torna-se o “módulo efetivo” de um material homogêneo equivalente de volume  $V$ .

De acordo com a Mecânica do Contínuo, o estado de tensões num ponto pode ser expresso por nove componentes  $\sigma_{ij}$ , onde  $i, j = 1, 2, 3$ , visto na Figura 3.4.

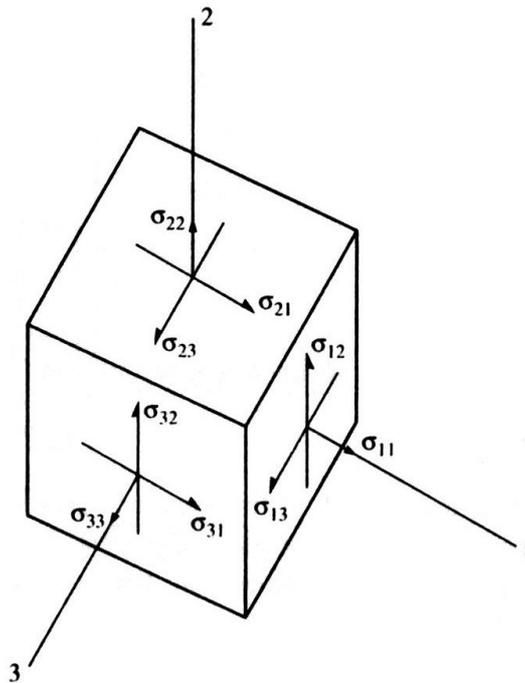


Figura 3.4 – Componentes de tensão num ponto

Para cada componente de tensão  $\sigma_{ij}$ , existe um componente de deformação  $\epsilon_{ij}$ . Para materiais elásticos, a relação tensão-deformação em um ponto no material pode ser representada da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

sendo que  $[C]$  é a matriz das relações constitutivas e está totalmente preenchida pelas constantes elásticas (tendo 81 componentes). Na prática, não existe a necessidade de se quantificar as 81 constantes elásticas do tensor  $C_{ijkl}$  porque várias condições de simetria simplificam esta matriz consideravelmente.

Da condição de equilíbrio, sabe-se que o tensor de tensões é simétrico, isto é,  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  o que reduz o número de variáveis independentes para apenas trinta e seis (36 componentes não-nulas na matriz de constantes elásticas).

A Lei de Hooke generalizada estabelece uma relação entre tensões e deformações que pode ser expressa por:

$$\{\sigma\} = [C]\{\epsilon\} \quad (3.5)$$

onde  $\{\sigma\}$  é o vetor tensão,  $\{\epsilon\}$  é o vetor deformação e  $[C]$  é a matriz (6x6, 36 componentes) das constantes elásticas (também conhecida como matriz de rigidez).

A relação anterior pode ser descrita de forma inversa sendo  $[S]$  a matriz de flexibilidade ("compliance matrix") e  $[S] = [C]^{-1}$ , ou seja,

$$\{\epsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (3.6)$$

Pode-se demonstrar (através das funções de densidade da energia de deformação) que a matriz  $[C]$  é simétrica e apresenta algumas características particulares. Para materiais anisotrópicos, dos 36 coeficientes da matriz, apenas 21 são independentes e a matriz toma a seguinte forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

*SIM*

Materiais ortotrópicos são aqueles que apresentam três planos de simetria em suas propriedades mecânicas (três planos de simetria elásticas mutuamente ortogonais). Lâminas de material composto reforçado por fibras de alta resistência apresentam essa característica. A Figura 3.5 mostra uma lâmina de material composto reforçado por fibras.

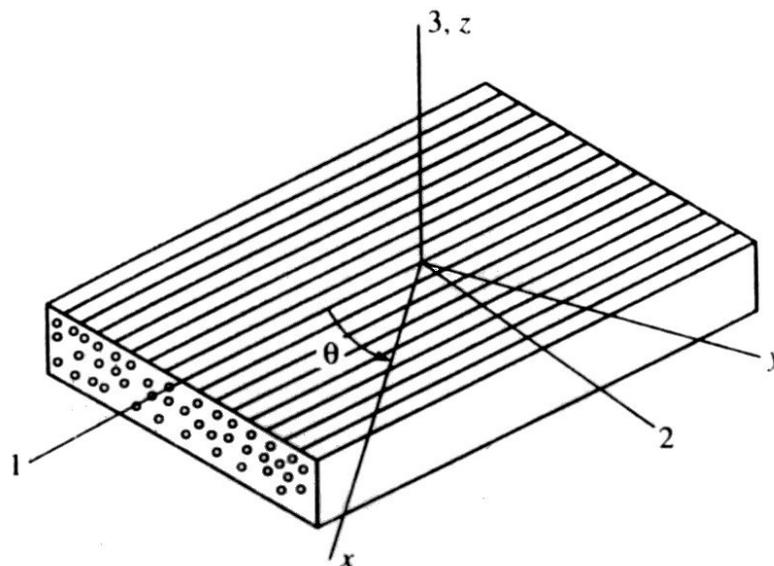


Figura 3.5 – Lâmina de material composto reforçado por fibras [Gibson (1994)]

A matriz de relações constitutivas se simplifica quando essa característica acontece, apresentando o aspecto indicado a seguir, com apenas nove termos independentes em doze componentes. Estes materiais também são chamados de *especialmente ortotrópicos*, onde os eixos principais do material estão associados com as direções do reforço.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & SIM & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

No caso de laminados, isto é, estruturas de lâminas empilhadas, observam-se que as propriedades do material são praticamente as mesmas em quaisquer direções perpendiculares às fibras. Tem-se, nestes casos, uma situação particular de ortotropia, e os materiais que apresentam estas características são conhecidos como *transversalmente isotrópicos*. Para tais materiais, a matriz rigidez se simplifica, reduzindo o número de variáveis independentes a cinco dos doze componentes não-nulos, na forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ & SIM & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

A situação mais simples é a dos materiais isotrópicos, para os quais qualquer

plano é um plano de simetria do material. Nestes casos, o número de variáveis independentes se reduz a dois dos doze termos não-nulos da matriz de rigidez, tornando-se da forma:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ SIM & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Sejam as seguintes constantes de engenharia:

- $E_1, E_2, E_3$  - módulos de elasticidade longitudinal nas direções 1, 2 e 3, respectivamente (módulos de Young);
- $G_{23}, G_{31}, G_{12}$  - módulos de elasticidade transversal relativos aos planos 2-3, 3-1, 1-2, respectivamente (módulos de cisalhamento);
- $\nu_{23}, \nu_{31}, \nu_{12}$  - coeficientes de Poisson relativos aos planos 2-3, 3-1, 1-2, respectivamente;

Os coeficientes de Poisson,  $\nu_{ij}$ , são decorrentes das relações entre as deformações transversais e longitudinais nas direções  $j$  e  $i$ , respectivamente, quando são aplicadas tensões na direção  $i$ , isto é:

$$\nu_{ij} = -\frac{\epsilon_j}{\epsilon_i} \text{ com } \sigma_i \neq 0 \text{ e } \sigma_j = 0, i \neq j \quad (3.11)$$

Através das constantes de engenharia listadas é possível escrever a matriz das relações constitutivas e, de modo inverso, a matriz flexibilidade. Desse modo, para o caso tridimensional de tensões pode-se escrever a matriz flexibilidade como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & & & \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & & & \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & & & \\ & & & 1/G_{23} & & \\ & & & & 1/G_{31} & \\ & & & & & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

Para materiais ortotrópicos e transversalmente isotrópicos, tem-se  $G_{13} = G_{12}$ ,  $E_2 = E_3$ ,  $\nu_{21} = \nu_{31}$ ,  $\nu_{23} = \nu_{32}$  e as seguintes relações também são válidas:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3.13)$$

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1 + \nu_{32})} \quad (3.14)$$

Analogamente, para materiais isotrópicos,  $G_{13} = G_{12} = G_{23} = G$ ;  $E_1 = E_2 = E_3 = E$ ;  $\nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{23} = \nu_{32} = \nu$ . Neste caso:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.15)$$

### 3.2.1 Lâminas Especialmente Ortotrópicas

É muito comum no projeto de peças laminadas que cada lâmina seja tratada como submetida a um estado plano de tensões. Neste caso, as relações tensão-deformação apresentadas anteriormente podem ser simplificadas novamente resultando em:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

onde:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ S_{12} = S_{21} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} \\ S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Logo, as tensões podem ser determinadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \quad (3.18)$$

sendo que  $Q_{ij}$  são as componentes da matriz de rigidez da lâmina no sistema local de coordenadas. Em termos das constantes de engenharia, as componentes podem ser escritas como:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = Q_{21} \\
Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\
Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} = G_{12}
\end{aligned}
\tag{3.19}$$

Neste caso, a caracterização experimental de lâminas ortotrópicas envolve a medida de quatro constantes de engenharia independentes, tais como,  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $G_{12}$  e  $\nu_{12}$ .

### 3.2.2 Relações Constitutivas da Lâmina num Sistema de Referências

#### Qualquer

As expressões apresentadas anteriormente foram elaboradas para o caso em que o eixo  $X_1$  (1) está orientado na mesma direção que as fibras. Entretanto, é necessário que as propriedades locais de uma lâmina sejam transformadas para um sistema qualquer. Assim, pode-se obter as respostas do laminado às solicitações numa direção qualquer orientada segundo os eixos  $x$  e  $y$ , tal como indicado na Figura 3.5, rotacionados de um ângulo  $\theta$  em relação aos eixos principais.

Por meio de rotação do vetor tensão  $\{\sigma\}$ , obtém-se as tensões para uma direção genérica, considerando-se  $c = \cos\theta$  e  $s = \sin\theta$ :

$$\{\sigma\}_{x-y} = [T]^{-1} \{\sigma\}_{X1-X2}
\tag{3.20}$$

ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.21)$$

Assim, a matriz transformação  $[T]$  é definida como:

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

A transformação inversa da relação (3.21) permite que se escreva:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.23)$$

O vetor de deformações se transforma de modo análogo:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

Substituindo-se a equação (3.24) na equação (3.18) e, então, substituindo-se o resultado na equação (3.21), encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} [Q] [T] \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

lembrando-se que  $[Q]$  é a matriz de rigidez ou das propriedades elásticas. Desenvolvendo a expressão, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

onde  $\bar{Q}_{ij}$  são as componentes da matriz de rigidez transformada da lâmina, que possuem os seguintes valores:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos \theta \sin^3 \theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66}) \cos^3 \theta \sin \theta \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \end{aligned} \quad (3.27)$$

### 3.3 Relações Tensão-Deformação de um Laminado

#### 3.3.1 Definição e caracterização de um Laminado

Uma das mais freqüentes aplicações de materiais compostos ocorre no caso de placas laminadas. Uma placa laminada, ou simplesmente laminado, nada mais é do que a sobreposição de diversas lâminas ou camadas individuais, associadas entre si nas interfaces através de uma película adesiva. O número e a orientação das lâminas podem ser quaisquer. O material constituinte de cada lâmina é, em geral, um composto de fibras de alta resistência, isto é, uma malha uni ou bi-direcional de

fibras como grafite, vidro, boro, ou outros, mergulhadas numa resina ou, mais genericamente, numa matriz. Enquanto as fibras são os elementos que conferem resistência à peça, compete à matriz mantê-las aderida entre si, transferir cargas a elas, e protegê-las contra os ataques do meio ambiente e de manipulação indevida [Reddy (1997)]. De um modo geral, o comportamento mecânico de cada lâmina é anisotrópico, com propriedades distintas em cada direção. O caso mais freqüente é o empilhamento de lâminas ortotrópicas, com malha unidirecional, de forma ordenada e seqüencial. A Figura 3.6 ilustra o caso de uma placa laminada com as fibras de cada lâmina orientadas segundo uma direção genérica. Num laminado pode existir qualquer número de lâminas. A seqüência deve ser tal que as exigências de projeto sejam atendidas. A orientação das fibras de cada lâmina pode ser qualquer, devendo seguir as previstas em projeto e as necessidades estruturais da peça.

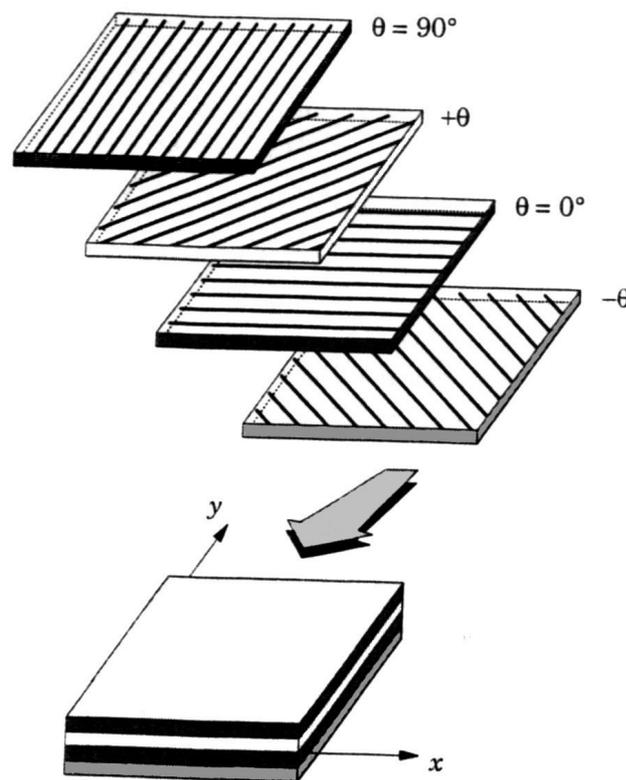


Figura 3.6 – Placa laminada com fibras em direções quaisquer [Reddy (1997)]

As propriedades resultantes do laminado dependem da quantidade de

lâminas, da orientação e concentração das fibras em cada uma delas, bem como do tipo de composto adotado (por exemplo, vidro/epóxi, grafite/epóxi, entre outros). As camadas podem ou não ser formadas pelo mesmo material embora, nos casos mais usuais, apenas um seja empregado, com as fibras orientadas diferentemente em cada lâmina.

Admite-se, em análises macro-mecânicas, que a aderência entre as diversas lâminas seja perfeita. Como a espessura da película adesiva é muito pequena, pode-se desprezar completamente a sua influência. Esta simplificação, no entanto, não pode ser generalizada, uma vez que, em diversas situações, como no caso de danos por delaminação, os efeitos de possíveis deslocamentos interlaminares são importantes.

É interessante observar que, apesar de cada lâmina ser considerada como um meio heterogêneo, com suas características variando de ponto a ponto, as propriedades resultantes do empilhamento são determinadas como se o material fosse homogêneo. Nesse sentido, o laminado pode apresentar um comportamento mecânico que reflete o acoplamento entre as propriedades de flexão e de membrana, fato este que não é encontrado em materiais verdadeiramente homogêneos e isotrópicos.

A natureza de uma placa laminada é bastante caracterizada pelo seu desempenho direcional. O módulo de elasticidade longitudinal, na direção das fibras, é muito superior aos módulos de elasticidade transversal e cisalhante. Em conseqüência, as deformações transversais por cisalhamento são muito mais pronunciadas em estruturas de materiais compostos do que naquelas executadas com materiais isotrópicos.

Os laminados são referenciados pelas orientações das fibras no empilhamento. A Figura 3.7 ilustra alguns exemplos. Os exemplos ilustrados são para laminados consistindo de camadas de mesmo material. Para laminados híbridos, que contêm lâminas de diferentes materiais, subscrições adicionais para as camadas podem ser utilizadas para identificar o material das lâminas.

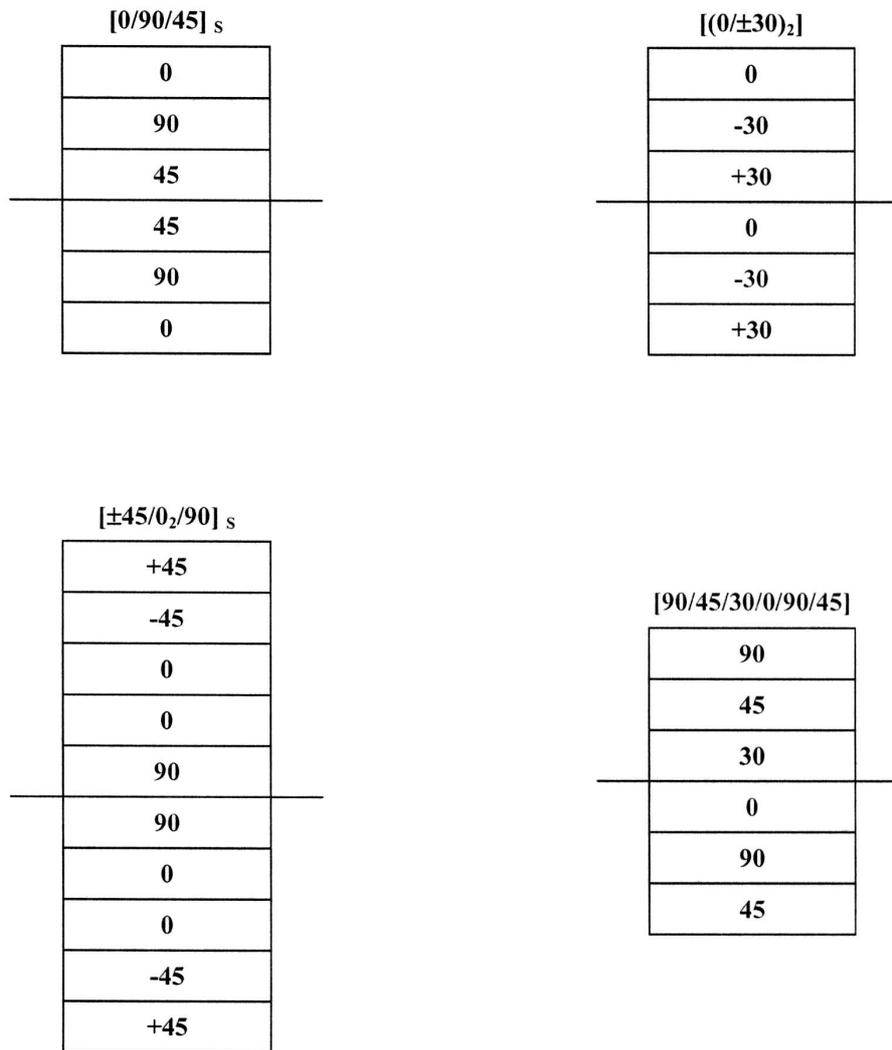


Figura 3.7 – Exemplos de empilhamento em laminados

### 3.3.2 Teoria de Placas Laminadas com Acoplamento

Uma das áreas de estudo dos materiais compostos na Mecânica Estrutural se concentra, atualmente, no desenvolvimento de modelos numéricos que representem, adequadamente, os elementos estruturais feitos por esses materiais, tais como placas e cascas laminadas, peças com enrijecedores, com aberturas, etc. Além de representarem o comportamento desses elementos às mais diversas solicitações – flexão, cisalhamento, flambagem, efeitos térmicos, delaminações, etc – os modelos devem ser, dentro do possível, simples e precisos.

Não é difícil perceber que os materiais compostos têm um comportamento estrutural muito mais complexo que os homogêneos. A experiência adquirida no trato com materiais homogêneos para resolver os problemas que envolvem materiais compostos anisotrópicos revela-se, muitas vezes, insuficiente e enganosa. É por esse motivo que existem tantas teorias e modelos distintos para análise de tais materiais, e nenhum deles é completo o bastante para resolver todas as situações práticas.

Existem diversas teorias para descrever o comportamento de uma placa laminada, referenciadas em várias literaturas [Whitney (1987)], [Machado (1992)], [Reddy (1997)]. Essencialmente, essas teorias podem ser classificadas por *Teorias de Camada Simples Equivalente* ou *Teorias do Tipo Lâmina Discreta*.

- *Teorias de Camada Simples Equivalente*: o laminado é tratado como se fosse uma única placa homogênea, cujas propriedades são determinadas por integração, ao longo da espessura, a partir das contribuições individuais de cada lâmina. Admite-se que cada lâmina seja elástica e esteja submetida a um estado plano de tensões. A placa resultante assim obtida é, em geral, anisotrópica. Os custos da análise são bastante reduzidos, sendo, por isso, a opção da grande maioria dos pesquisadores quando apenas os resultados globais são importantes (como deslocamentos, rotações e modos de vibração).

As Teorias de Camada Simples consideram a placa como uma estrutura bidimensional, adotando formulações semelhantes às das teorias convencionais de placas homogêneas. O modelo é, dessa forma, mais simples do que os que se baseiam em teorias tridimensionais. Em contrapartida, deve-se atentar para alguns inconvenientes que podem surgir, tais como, a representação incorreta dos esforços nos cantos das placas.

Na maioria das Teorias de Camadas Simples Equivalentes admite-se que são contínuos os deslocamentos e suas derivadas (as deformações) ao longo da espessura do laminado. No entanto, como as propriedades variam de uma camada para outra, as tensões resultantes, quando calculadas por meio das equações constitutivas, são descontínuas nas

interfaces.

- Teorias do Tipo Lâmina Discreta: considera-se, nestes modelos, que o laminado seja constituído de lâminas individuais empilhadas e discretas, não sendo mais tratado como uma única camada, como nos modelos de camada simples equivalente. Os efeitos das deformações cisalhantes são considerados e o ângulo de rotação da normal é considerado constante dentro de cada lâmina. O número de incógnitas do problema é, portanto, proporcional à quantidade de lâminas. Os deslocamentos são contínuos ao longo da espessura, mas suas derivadas não o são. Isto resulta em deformações transversais descontínuas em cada interface, mesmo quando calculadas pelas equações constitutivas. A abordagem nesse tipo de formulação é essencialmente tridimensional e os custos do processo são muito maiores do que nas de camada simples. A compensação é que os resultados interlaminares são muito mais precisos.

Quando as variáveis de interesse do problema são as globais, como por exemplo, deslocamentos, reações de apoio, modos de vibração, etc., as Teorias de Camada Simples são muito adequadas e de baixo custo. Possuem a restrição de não representarem perfeitamente as tensões interlaminares, que são fundamentais nas estruturas laminadas. Porém, para contornar tal inconveniente, exigem um cálculo adicional baseado nas equações de equilíbrio da elasticidade tridimensional. Ainda assim, quando forem muito importantes os efeitos locais, como tensões em regiões de discontinuidades geométricas, de força ou de material, outro procedimento deve ser adotado.

O presente trabalho se restringirá ao uso de uma das Teorias de Camada Simples. Nestas, o campo de deslocamentos é expandido a partir dos deslocamentos de translação nas direções dos eixos  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , acrescidos das influências das rotações da superfície normal ao plano médio.

A Figura 3.8 ilustra a equivalência entre uma placa laminada com espessura  $t$  (b) constituída de  $N$  lâminas individuais (a) e o modelo de camada simples com espessura  $t_{eq} = t$  (c).

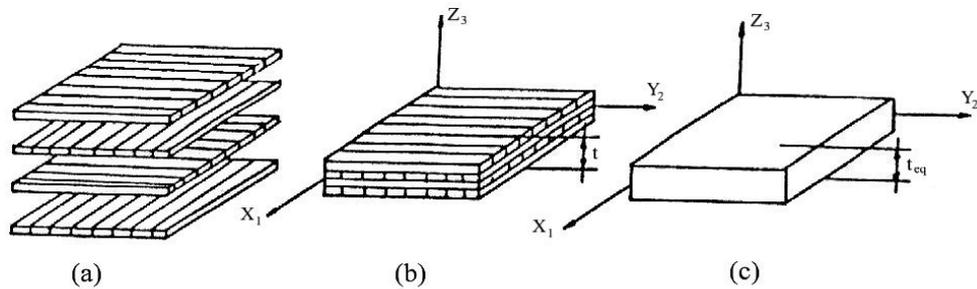


Figura 3.8 – Modelo de camada simples equivalente para placa laminada [Machado (1992)]

Conforme a expansão do campo de deslocamentos, as Teorias de Camadas Simples podem ainda ser classificadas como “Teorias de Primeira Ordem” e “Teorias de Ordem Superior”. As de Primeira Ordem são aquelas cujas expansões do campo de deslocamentos são polinômios de primeira ordem. De modo análogo, as de Ordem Superior envolvem expansões polinomiais de terceira, quinta, ou até ordens maiores.

O aumento da ordem do polinômio acarreta severos custos à análise, de modo que, sempre que possível, deve ser evitada. As Teorias de Primeira Ordem resolvem satisfatoriamente boa parte dos problemas de placas laminadas, especialmente para os casos de laminados simétricos. Nos casos de laminados não simétricos, as Teorias de Ordem Superior são mais apropriadas para avaliar a distribuição de tensões ao longo da espessura do laminado.

### 3.3.3 Conceitos e Convenções Adotadas

Para efeito deste trabalho serão consideradas as seguintes hipóteses básicas:

- A. Um laminado é constituído por um número arbitrário de lâminas de orientações quaisquer. A adesão entre as lâminas é perfeita, não havendo escorregamento relativo entre as mesmas.
- B. As películas adesivas são extremamente finas, de modo a não permitir o surgimento de deformações cisalhantes ao longo da sua espessura. Desse

modo, seu efeito pode ser desconsiderado.

- C. Uma placa é uma estrutura tridimensional plana, com duas dimensões apresentando ordem de grandeza maior do que a terceira, no caso, a espessura.
- D. Admite-se que o comportamento global dessa placa possa ser representado apenas pelo comportamento de sua superfície média, que também é plana.
- E. Os deslocamentos nas direções dos eixos de referência  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ , serão indicados por  $u_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , respectivamente, ou seja,  $u_1 = u$ ;  $u_2 = v$  e  $u_3 = w$ .
- F. As rotações da normal em relação aos eixos  $X_1$  e  $X_2$ , que definem o plano médio da placa, serão representadas por  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , ou seja,  $\theta_1 = \theta_x$  e  $\theta_2 = \theta_y$ .
- G. Os eixos principais de simetria do material de cada lâmina não precisam coincidir com o eixos de referência adotados, podendo formar entre eles um certo ângulo  $\alpha$  qualquer.
- H. Admite-se a hipótese de pequenos deslocamentos, o que significa que, quando comparados com a espessura  $t$  da placa, os deslocamentos na superfície de referência,  $u$ ,  $v$  e  $w$ , são muito pequenos.
- I. Os deslocamentos ao longo do contorno, se existirem, são contínuos e não produzem deslizamento relativo entre as lâminas.
- J. Cada lâmina obedece à Lei de Hooke.
- K. Não existem tensões cisalhantes  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$  nas superfícies livres da placa, quando  $z = \pm t/2$ .
- L. Será considerado apenas a Teoria Clássica de Placas Laminadas.
- M. O esforços internos no laminado seguem a convenção de sinais indicada na Figura 3.9.

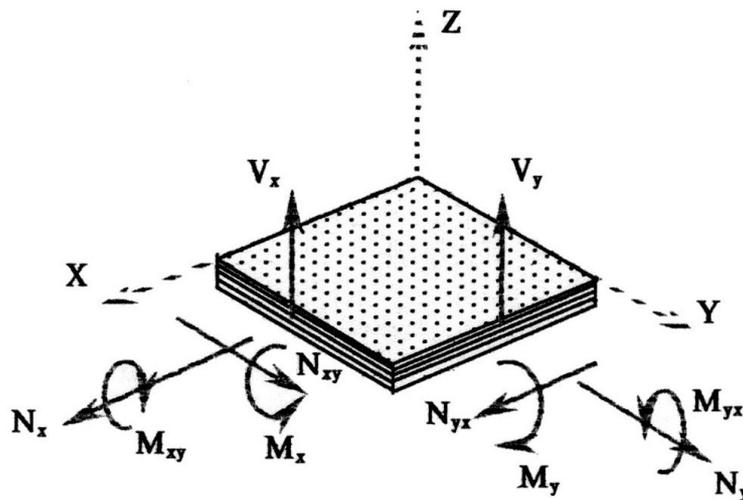


Figura 3.9 – Convenção de sinais [Machado (2001)]

Segundo o modelo de placa adotado, os deslocamentos  $(u, v, w) = (u_1, u_2, u_3)$  num ponto P genérico, de coordenadas  $(x, y, z)$ , pode ser expresso por:

$$u_i(x, y, z) = u_i^0(x, y) + z \cdot \theta_i^0(x, y) \quad (3.28)$$

sendo que:

$u_i^0(x, y)$  = deslocamentos  $(u, v, w)$  da superfície média;

$\theta_i^0(x, y)$  = rotações da seção transversal em relação a seção normal a superfície média, sendo  $\theta_1^0 = \theta_x^0$ ;  $\theta_2^0 = \theta_y^0$  e  $\theta_3^0 = 0$ ;

$z$  = coordenada medida ao longo da espessura da placa.

As relações deslocamentos – deformações em um ponto qualquer de coordenadas  $(x, y, z)$ , nestas circunstâncias, podem ser expressas por:

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y(x, y, z) = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy}(x, y, z) &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
\gamma_{yz}(x, y, z) &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\
\gamma_{xz}(x, y, z) &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned}
\tag{3.29}$$

Levando-se em consideração o campo de deslocamentos expresso em (3.28) e as relações apresentadas em (3.29), é possível deduzir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}
\tag{3.30}$$

ou seja:

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Deformações} \\ \textit{na} \\ \textit{placa} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \textit{Deformações} \\ \textit{na} \\ \textit{Superfície} \\ \textit{Média} \end{array} \right\} + z \cdot \{ \textit{Curvatura} \}$$

onde:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x^0(x, y) &= \frac{\partial u_0}{\partial x} \\
\varepsilon_y^0(x, y) &= \frac{\partial v_0}{\partial y} \\
\gamma_{xy}^0(x, y) &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \\
\kappa_x(x, y) &= \frac{\partial \theta_x}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

$$\kappa_y(x, y) = \frac{\partial \theta_y}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}$$

$$\kappa_{xy}(x, y) = -2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y}$$

(3.31)

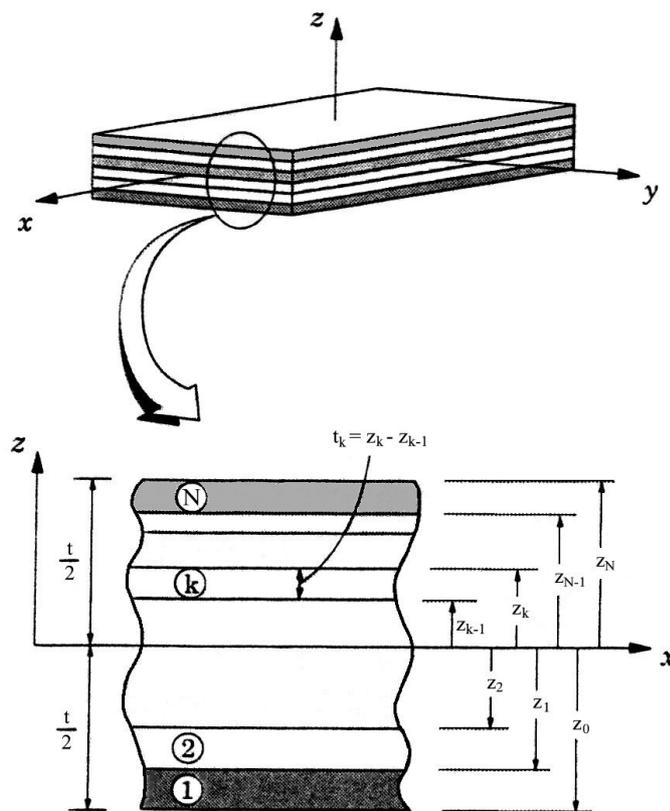


Figura 3.10 – Variáveis relativas a um laminado com N lâminas [Reddy (1997)]

Desta forma, as tensões em uma lâmina genérica  $\underline{k}$ , tal como indicada na Figura 3.10, podem ser calculadas, substituindo-se a expressão (3.30) na expressão (3.26):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left[ \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z^k \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right] \quad (3.32)$$

Os esforços internos no laminado, como um todo, podem ser obtidas por meio de integrais ao longo da espessura da placa:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3.33)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3.34)$$

A integral ao longo da espessura pode ser substituída pela soma das integrais ao longo de cada lâmina, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k dz \right] \quad (3.35)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \left[ \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k z dz \right] \quad (3.36)$$

sendo que:

$t$  = espessura do laminado;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \text{tensão na lâmina } \underline{k};$$

$z_{k-1}$  = distância da superfície média até a superfície inferior da lâmina  $\underline{k}$ ;

$z_k$  = distância da superfície média até a superfície superior da lâmina  $\underline{k}$ ,

conforme Figura 3.10 mostrada anteriormente.

Substituindo-se as relações tensão-deformação de uma lâmina (3.32) nas expressões (3.35) e (3.36) encontram-se as resultantes de tensão devido aos efeitos de membrana (forças no plano da placa) e as resultantes de momentos devido aos efeitos de flexão para o laminado sendo que elas podem ser agrupadas numa relação matricial como a que se segue:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.37)$$

ou na forma:

$$\begin{Bmatrix} N \\ \dots \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \dots & \vdots & \dots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \dots \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

onde:

$$\begin{aligned}
 A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k - z_{k-1}) \\
 B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\
 D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\bar{Q}_{ij})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)
 \end{aligned}
 \tag{3.39}$$

A submatriz com os coeficientes  $A_{ij}$  está relacionada com a parcela da rigidez axial da placa, associada aos efeitos de membrana. A submatriz com os coeficientes  $D_{ij}$  relaciona-se com os efeitos de flexão e a submatriz  $B_{ij}$  é a que corresponde aos efeitos de acoplamento membrana-flexão.

Em laminados simétricos, a matriz  $B$  é identicamente nula. O mesmo não acontece em laminados não-simétricos.

## Capítulo 4

# Teoria do Dano

### 4.1 Introdução

Este capítulo apresenta o formalismo da Mecânica do Dano, partindo-se da definição das variáveis internas de estado e, posteriormente, sua simplificação para o caso de laminados compostos com trincas transversais. Estendendo-se nos itens subseqüentes, as restrições da termodinâmica são impostas através de um potencial de estado e as variáveis internas são embutidas nas relações constitutivas. Finalmente, as relações constitutivas para laminados compostos com trincas transversais são apresentadas.

### 4.2 Mecânica do Dano em Meios Contínuos

Os sólidos se deformam quando carregados e seu comportamento de deformação é determinado pela microestrutura do material. Contudo, a análise de estruturas ao nível microscópico ainda é uma tarefa difícil. Portanto, relações analíticas chamadas de equações constitutivas que descrevem o comportamento do contínuo são usadas. Por razões práticas, estas equações constitutivas são freqüentemente modeladas como contínuo sem considerar as estruturas atômicas. Na realidade, como comentado, sólidos sujeitos a certas condições de carregamentos

sofrem rearranjos na sua estrutura interna. Isto pode ocorrer na forma de micro-trincas, vazios ou cavidades, formando altas concentrações de tensão. Tais alterações na micro-estrutura interna, denominadas de *dano*, enfraquecem o material a nível microscópico. Os danos internos existem como perturbações discretas e, assim, sua análise é necessária.

A Mecânica do Dano em Meios Contínuos é um ramo emergente de estudo das análises dos efeitos da deterioração do material em sólidos. Ela leva em conta os efeitos da degradação de modo difuso e progressivo dos sólidos, submetidos a ações de natureza mecânica ou não-mecânica, por meio da redução das propriedades de resistência e rigidez do material. A teoria permite descrever localmente, observando-se um *elemento de volume representativo* do material em torno do ponto considerado, a evolução dos fenômenos que se desenvolvem entre um estado inicial, relativo a uma situação de material íntegro, e um estado final, caracterizado pela formação de uma fissura macroscópica que equivale à ruptura do *elemento de volume representativo*.

Não se pode considerar que o dano seja mensurável diretamente, pois procedimentos voltados para tal fim não são viáveis. Porém, como se verá, é possível quantificá-lo de forma indireta, medindo-se a redução progressiva de uma propriedade mecânica global, como, por exemplo, o módulo de elasticidade.

No que se refere à transição de um estado de dano distribuído para uma fratura discreta, esta pode ser considerada como o resultado de um processo de localização do dano numa certa região de pequena largura do meio, seguido de sua evolução numa faixa progressivamente mais estreita até a formação da descontinuidade.

Em síntese, a diferença entre Mecânica do Dano e Mecânica da Fratura pode ser colocada [Proença (2000)], da seguinte forma:

- Na Mecânica do Dano, a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um campo de defeitos (micro-fissuras ou poros) considerado continuamente distribuído;
- Na Mecânica da Fratura, a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um único defeito, como uma fissura pontiaguda pré-definida, num meio mecanicamente intacto.

O trabalho pioneiro que introduziu o conceito de Dano foi proposto por Kachanov (1958). Para consideração dos defeitos numa abordagem de meio contínuo, uma variável de dano escalar que leva em conta o dano interno causado pelo crescimento de micro-trincas e deslocamentos cinéticos em metais é definido, denominada *continuidade* ( $\varphi$ ). Esta variável apresenta localmente um valor unitário para um material completamente livre de defeitos, enquanto que  $\varphi = 0$  caracteriza um material sem qualquer capacidade de carga. A quantidade complementar  $D = 1 - \varphi$  é, por conseguinte, uma medida do estado local de deterioração ou dano. Para um material completamente livre de defeitos tem-se  $D = 0$ , enquanto  $D = 1$  corresponde a um estado de completa perda de integridade da estrutura interna do material.

Assim, entidades internas de dano puderam ser modeladas por uma variável contínua dentro das equações constitutivas. Lemaitre e Chaboche (1985) introduziram restrições da termodinâmica irreversível em potenciais energéticos para derivar relações constitutivas. Este novo conceito na Mecânica do Dano em Meios Contínuos foi então formalizado com base numa metodologia fundamentada na termodinâmica dos processos irreversíveis. Assim, a representação do estado interno de dano é envolvido com o uso de um tensor baseado nas *variáveis internas de estado*.

#### 4.2.1 Definição do Elemento de Volume Representativo

Considere-se um sólido com defeitos em sua microestrutura. Um *elemento de volume representativo* possui dimensões suficientemente grandes para que se possa admitir homogeneidade para a distribuição dos defeitos nele contidos, mas ao mesmo tempo suficientemente pequenas para que se evitem gradientes elevados de grandezas locais de interesse, como a deformação. Dessa forma, pode-se admitir continuidade para as funções representativas dos fenômenos que ocorrem no elemento e as propriedades nele medidas são valores médios que podem ser associados a um ponto material.

Na Figura 4.1 ilustra-se o conceito de elemento de volume representativo orientado por um versor normal de direção  $n$ , em torno de um ponto do contínuo.

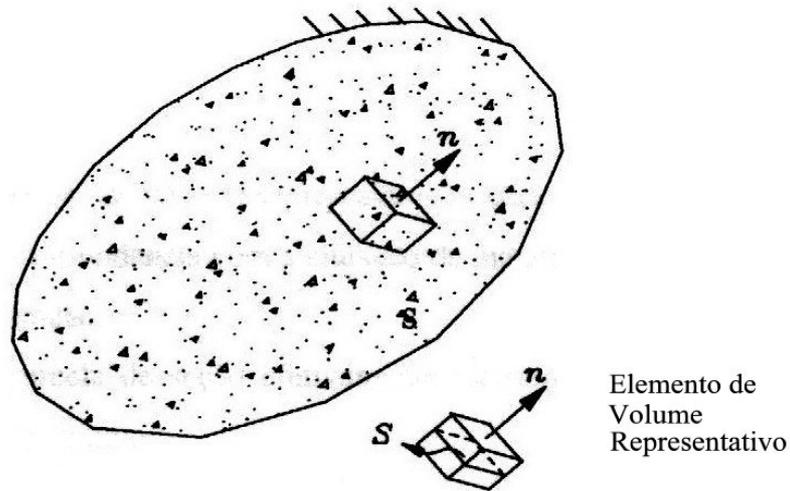


Figura 4.1 - Elemento de volume representativo de um sólido com dano [Proença (2000)]

#### 4.2.2 Definição da Tensão Efetiva

Considera-se uma situação de solitação uniaxial sobre o elemento de volume definido no item anterior, constituído por forças  $F$  aplicadas nas faces opostas orientadas pelo versor  $n$ . Seja ainda  $S$  a área total de uma seção genérica de normal  $n$  no interior do elemento (Figura 4.1 mostrada anteriormente). Nessas condições,  $\sigma = F/S$  é a tensão normal nominal em qualquer ponto da seção genérica.

Admitindo-se que o conjunto de defeitos seja totalmente incapaz de transferir tensões, pode-se definir uma tensão dita efetiva levando-se em conta somente à parte íntegra da seção.

Neste sentido, seja  $\tilde{S}$  a parcela íntegra da área total  $S$  da seção considerada. Então a diferença  $S_0 = S - \tilde{S}$  define a área dos defeitos medidos.

Pela definição proposta por Lemaitre (1992), o dano  $D_n$ , no caso associado a um plano de normal  $n$ , fica definido pela relação:

$$D_n = \frac{S_0}{S} \quad (4.1)$$

Nota-se que a variável de dano assume valores contidos no intervalo  $0 \leq D_n \leq 1$ , sendo que  $D_n = 0$  tem correspondência com a situação de material íntegro e  $D_n = 1$  indica um estado de total deterioração.

Assim sendo, a parcela de seção efetivamente resistente pode ser expressa em função da variável de dano como:

$$\tilde{S} = S - S_0 = S(1 - D_n) \quad (4.2)$$

Dessa forma, as tensões nominal  $\sigma$  e efetiva  $\tilde{\sigma}$  são definidas por:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (4.3)$$

e:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} \quad (4.4)$$

Levando-se em conta a relação (4.2) segue que:

$$\tilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D_n)} \quad (4.5)$$

Como a área íntegra é menor do que a nominal, para uma mesma força aplicada à tensão efetiva num meio danificado resulta comparativamente maior do que a tensão nominal. Em particular, nota-se que:

$\tilde{\sigma} = \sigma$  : para material localmente íntegro;

$\tilde{\sigma} \rightarrow \infty$  : para material totalmente danificado localmente.

Nota-se que no mesmo ponto a variável  $D_n$  pode assumir valores diferentes de acordo com a orientação da normal  $n$ . Essa característica indica uma natureza tensorial para a variável que representa o dano no elemento de volume representativo.

O chamado dano escalar tem correspondência com uma situação em que os micro-defeitos apresentam no elemento de volume representativo uma distribuição mais ou menos uniforme, de modo que segundo qualquer plano a medida de dano resulta a mesma, ou seja, independente da orientação da normal  $n$ . Em outras palavras, um único valor da variável de dano é suficiente para caracterizar completamente o estado local de deterioração:

$$D = D_n \quad \forall n \quad (\text{dano escalar})$$

### 4.2.3 Representação das Variáveis Internas de Estado de um Dano Interno

Atualmente, existem dois modelos bem conhecidos de laminados compostos com dano baseados na Mecânica do Dano em Meios Contínuos. O primeiro [Talreja (1990)] utiliza um tensor de primeira ordem para as variáveis internas de estado descrevendo os modos de dano. Assumindo que a densidade de energia dentro de um volume com trincas é função de um tensor deformação e de um vetor dano, um conjunto de equações constitutivas com deformações observáveis e um tensor tensão efetivo pode ser construído. Contudo, este método requer a determinação de várias constantes para um laminado geral contendo trincas na matriz. Um segundo modelo [Allen *et al.* (1987a, 1987b)] também emprega um conjunto de variáveis internas de estado descrito por quantidades tensoriais de segunda ordem originalmente proposta por Kachanov (1972). Este modelo parece necessitar de poucas constantes e explicitamente incorpora as características cinemáticas da trinca na formulação para as variáveis internas de estado. Por esta razão, o segundo modelo é utilizado no presente trabalho.

Em princípio, sempre é possível selecionar uma variável interna de estado que satisfaça as condições de restrição da termodinâmica irreversível. Contudo, somente uma variável interna de estado que é dotada com um claro significado físico

do mecanismo de dissipação dominante pode efetivamente representar a resposta ao dano. Assim, a seleção de apropriadas variáveis internas de estado que refletem o significado físico do processo de dano é crucial para o desenvolvimento de uma teoria de dano efetiva. Nos casos mais simples, as variáveis internas de estado podem ser entidades escalares. Em problemas mais sofisticados, tensores de ordem superior são adotados como as variáveis internas de estado.

Como exposto anteriormente, neste trabalho, variáveis internas de estado de tensores de segunda ordem que descrevem a cinemática do processo geral de trincas são adotadas para representar o estado de dano em materiais compostos. As variáveis internas de estado são definidas como [Allen *et. al.* (1987a)], [Allen *et. al.* (1987b)]:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{V} \int_{S_c} u_i n_j dS \quad (4.6)$$

onde  $i, j = 1, 2$  e  $3$ ,  $V$  é o volume do elemento representativo,  $u_i$  é o deslocamento de abertura da trinca,  $n_j$  é a normal à superfície da trinca e  $S_c$  é a nova superfície da trinca criada devido ao processo de dano irreversível.

No caso mais geral, a equação (4.6) expande-se para nove componentes dadas por:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{V} \int_S \begin{bmatrix} u_1 n_1 & u_1 n_2 & u_1 n_3 \\ u_2 n_1 & u_2 n_2 & u_2 n_3 \\ u_3 n_1 & u_3 n_2 & u_3 n_3 \end{bmatrix} dS \quad (4.7)$$

Para cada tipo de dano, os componentes individuais da equação (4.7) representam o dano atribuído para um modo particular de carregamento.

#### 4.2.4 Significado Físico das Variáveis Internas de Estado

Considere-se uma situação hipotética em que um sólido retangular está

sujeito a um carregamento uniaxial  $\sigma_{22}$ , como mostrado na Figura 4.2 e, também, que um dano interno ocorre como uma trinca retangular. Assim, a variável interna de estado para Modo I da trinca retangular toma a forma:

$$\alpha_{22} = \frac{1}{V} \int_{S_2} u_2 n_2 dS \quad (4.8)$$

Substituindo-se os elementos de área e volume em (4.8) resulta:

$$\alpha_{22} = \frac{1}{l.t.d} \int_0^t u_2 \cdot ddt \quad (4.9)$$

Integrando-se e procedendo-se simplificações, chega-se a:

$$\alpha_{22} = \frac{u_2}{l} \quad (4.10)$$

Sabendo-se que a deformação axial global é dada por:

$$\epsilon_{22} = \frac{\Delta l_2}{l} \quad (4.11)$$

onde:

$$\Delta l_2 = \Delta l + u_2$$

$\Delta l$  - deslocamento que o sólido teria se estivesse íntegro

$\Delta l_2$  - deslocamento do sólido com trinca

Desta forma, conclui-se que a variável interna  $\alpha_{22}$  da equação (4.10) é uma parcela da deformação axial  $\epsilon_{22}$ , sendo  $u_2$  uma fração de  $\Delta l_2$ .

Nos itens a seguir, mostrar-se-á que as variáveis internas de estado representam uma parcela de energia irrecuperável, dissipada através de processos irreversíveis.

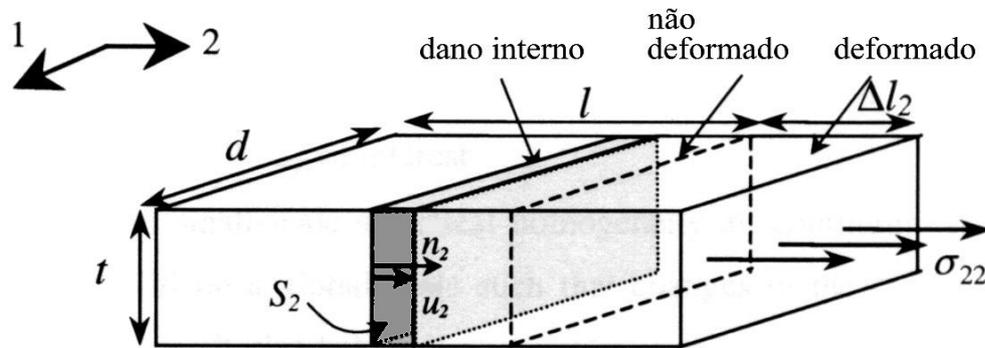


Figura 4.2 Elemento de volume representativo retangular contendo dano interno sob carregamento de tração

#### 4.2.5 Hipóteses da Teoria do Dano Aplicada a Laminados Compostos com Trincas Transversais

As seguintes hipóteses são feitas no desenvolvimento da teoria do dano para o caso de trincas transversais [Allen *et. al.* (1987a)]:

- A razão da área da superfície inicial da trinca em relação à superfície externa do corpo é considerada pequena. Isto garante que o corpo seja considerado como contínuo e estatisticamente homogêneo no estado não danificado;
- O dano resultante de um corpo é estatisticamente homogêneo na escala local, isto é, pequeno comparado com a escala do corpo de interesse;
- Sob a condição de homogeneidade estatística na pequena escala, todo o contínuo é baseado nas leis de conservação e também se assumem válidas na escala global tal que as alterações no contínuo são refletidas somente através das alterações do comportamento constitutivo;
- Todos os eventos de fratura são denominados de dano;
- O modelo é limitado a compostos de matriz polimérica ou cerâmica a temperaturas bem abaixo da transição vítrea tal que os efeitos de viscoelasticidade são assumidos pequenos;

- A formação de trincas transversais ocorre como fraturas frágeis. Então, a acumulação de deformação plástica é negligenciável.

#### 4.2.6 Termodinâmica dos Sólidos

A existência de um potencial de estado é postulada tal que as relações constitutivas do material podem ser derivadas baseadas em restrições termodinâmicas. Para este fim, a energia específica livre de Helmholtz ( $h$ ) é usada. Assume-se que essa energia pode ser expressa como uma função do tensor de deformação  $\epsilon_{ij}$ , das variáveis internas de estado  $\alpha_{ij}$  e da temperatura absoluta  $T$  do sólido [Allen *et. al.* (1987a)], [Lim (1999)]:

$$h = h(\epsilon_{ij}, \alpha_{ij}, T) \quad (4.12)$$

sendo que  $T = T_0 + \Delta T$ ,  $T_0$  é a temperatura de referência quando as deformações são nulas sem carregamento externo, e  $\Delta T$  é a variação da temperatura. Em adição, as equações constitutivas devem satisfazer os requisitos de admissibilidade física das leis de conservação, que serão a seguir apresentadas:

- Conservação da Massa [Moran e Shapiro (1993)]

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega = 0 \quad (4.13)$$

onde  $\rho$  é a densidade do sólido e  $\Omega$  é o domínio do sólido.

- Conservação do Momentum Linear

$$\sigma_{ij,i} + \rho F_j - \rho \dot{v}_j = 0 \quad (4.14)$$

sendo que  $\sigma_{ij}$  é o tensor tensão,  $F_j$  são as forças de corpo e  $\dot{v}_j$  são as acelerações (negligenciando-se forças externas).

- Conservação do Momentum Angular

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (4.15)$$

- 1ª Lei da Termodinâmica

$$\rho \dot{u} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} + q_{i,i} + \rho r \quad (4.16)$$

onde  $\dot{u}$  é a taxa de variação da densidade de energia interna por unidade de massa,  $\dot{\epsilon}_{ij}$  é a taxa de variação do tensor deformação,  $q$  é o fluxo de calor e  $r$  é a fonte de calor por unidade de massa. Note que  $q_{i,i} = \partial q_i / \partial x_i$ , e que  $q$  é positivo quando o gradiente de temperatura é positivo.

- 2ª Lei da Termodinâmica

A 2ª Lei da Termodinâmica é baseada no conceito da entropia associada aos processos termodinâmicos irreversíveis. Entropia é considerada como uma medida de variação se a dissipação de energia ocorre com respeito à temperatura. Define-se entropia  $S$  como uma função contínua aditiva:

$$S = \int_{\Omega} \rho s d\Omega \quad (4.17)$$

sendo que  $s$  é a entropia por unidade de massa, e  $\Omega$  é o domínio do sólido. Além disso, a entropia total produzida  $S_T$  é definida como:

$$S_T = \dot{S} - \int_{\Gamma} \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \rho \left( \frac{r}{T} \right) d\Omega \geq 0 \quad (4.18)$$

onde  $\mathbf{q}$  é o fluxo de calor por unidade de área de superfície,  $\mathbf{n}$  é o vetor normal à superfície e  $\Gamma$  é a superfície do sólido. Esta expressão é referida como a 2ª Lei da Termodinâmica, que define que a geração de entropia total é sempre maior ou igual a zero. Utilizando-se do Teorema da Divergência para transformar as integrais de superfície em integrais de volume e, agrupando-se os termos, encontra-se:

$$\int_{\Omega} \left[ \rho \dot{s} - \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{q}}{T} \right) - \rho \left( \frac{r}{T} \right) \right] d\Omega \geq 0 \quad (4.19)$$

tendo-se  $\nabla(\cdot) = i_i \partial(\cdot) / \partial x_i$  como o operador diferencial. Re-escrevendo-se a equação (4.19):

$$\rho T \dot{s} - q_{i,i} + q_i \frac{T_{,i}}{T} - \rho r \geq 0 \quad (4.20)$$

Definindo-se a energia específica livre de Helmholtz como a soma da energia específica interna  $u$  e a energia específica irreversível de calor  $-Ts$ , tem-se:

$$h = u - Ts \quad (4.21)$$

Substituindo-se a equação (4.21) em (4.16), obtêm-se:

$$\rho \dot{h} = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \rho \dot{T}s - \rho T \dot{s} + q_{i,i} + \rho r \quad (4.22)$$

Substituindo-se a equação (4.22) em (4.20), encontra-se a *desigualdade de Clausius-Duhem* que satisfaz a 2ª Lei da Termodinâmica para processos irreversíveis de dano:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \rho (\dot{h} + s\dot{T}) + q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (4.23)$$

#### 4.2.7 Equação Constitutiva Termomecânica dos Sólidos com Dano Interno

Da equação (4.12), a taxa de variação da energia específica livre de Helmholtz pode ser expressa por:

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial h}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + \frac{\partial h}{\partial T} \dot{T} \quad (4.24)$$

Combinando-se a equação (4.24) e a (4.23), a desigualdade de Clausius-Duhem é re-escrita como:

$$\sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \rho \left( \frac{\partial h}{\partial \epsilon_{ij}} \dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\partial h}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + \frac{\partial h}{\partial T} \dot{T} + s\dot{T} \right) + q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (4.25)$$

ou:

$$\left( \sigma_{ij} - \rho \frac{\partial h}{\partial \epsilon_{ij}} \right) \dot{\epsilon}_{ij} - \rho \left( \frac{\partial h}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial h}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0 \quad (4.26)$$

Os dois primeiros termos da equação (4.26) representam a porção reversível

dos processos termodinâmicos enquanto que os dois últimos representam os processos dissipativos.

A relação anterior deve ser válida em processos que envolvam uma variação independente de qualquer das variáveis de estado, incluindo-se, em particular, os processos puramente elásticos nos quais a dissipação é hipoteticamente nula e não existe qualquer alteração da estrutura interna. Assim, igualando-se os dois primeiros termos a zero para manter-se a condição de reversibilidade, as seguintes relações constitutivas são obtidas:

$$\sigma_{ij}^e = \rho \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.27)$$

e:

$$s^e = - \frac{\partial h}{\partial T} \quad (4.28)$$

onde  $\sigma_{ij}^e$  e  $s^e$  são o tensor tensão efetivo e entropia efetiva, respectivamente. A equação (4.27) apresenta a tensão efetiva  $\sigma_{ij}^e$  como função das deformações elásticas  $\varepsilon_{ij}$ , das variáveis internas de estado  $\alpha_{ij}$  e a temperatura  $T$  (que são funções de  $h$ ).

Para garantir que a desigualdade da equação (4.26) seja sempre satisfeita, uma dissipação positiva é necessária levando-se em conta o dano interno (processo irreversível), assumindo desprezíveis os gradientes térmicos, a viscoplasticidade e a plasticidade. Portanto:

$$- \rho \frac{\partial h}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} \geq 0 \quad (4.29)$$

O termo  $\rho \frac{\partial h}{\partial \alpha_{ij}}$  é uma função negativa que representa a dissipação de energia pelo corpo onde o dano ocorre. Assim, a última equação impõe:

$$\dot{\alpha}_{ij} \geq 0 \quad (4.30)$$

para garantir que a equação (4.29) seja positiva. A equação (4.30) sugere que a introdução das variáveis internas de estado somente pode representar a deterioração do sólido, e não processos de recuperação.

Em um evento quando alguma forma de gradiente de temperatura está presente durante os processos termodinâmicos, o último termo da equação (4.26) exigiria:

$$q_i \frac{T_i}{T} \geq 0 \quad (4.31)$$

levando-se em conta dissipação positiva.

Quando a energia livre de Helmholtz da equação (4.12) é expandida em séries de Taylor em termos de cada argumento, a expressão torna-se:

$$\begin{aligned} h &= h(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}, T) \\ &= h(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}, \Delta T) \Big|_{\substack{\varepsilon_{ij}=0 \\ \alpha_{ij}=0 \\ \Delta T=0}} + \varepsilon_{ij} \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} + \alpha_{ij} \frac{\partial h}{\partial \alpha_{ij}} + \Delta T \frac{\partial h}{\partial \Delta T} + \\ &+ \frac{1}{2!} \left[ \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial \alpha_{ij}} \alpha_{ij} + \frac{\partial}{\partial \Delta T} \Delta T \right]^2 h + \frac{1}{3!} [\dots]^3 h + \dots \end{aligned} \quad (4.32)$$

Alternativamente, a equação (4.32) pode ser re-escrita como:

$$\begin{aligned}
h(\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}, \boldsymbol{\alpha}_{ij}, T) = & A + B_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + C_{ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij} + D \Delta T + \frac{1}{2} E_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} + F_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \boldsymbol{\alpha}_{kl} + \\
& + G_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \Delta T + \frac{1}{2} H_{ijkl} \boldsymbol{\alpha}_{ij} \boldsymbol{\alpha}_{kl} + I_{ij} \boldsymbol{\alpha}_{ij} \Delta T + J \Delta T^2 + \dots
\end{aligned}
\tag{4.33}$$

Substituindo-se a expressão anterior na equação (4.27) e desprezando-se os termos de ordem superior, a relação constitutiva entre os tensores efetivos de tensão  $\boldsymbol{\sigma}_{ij}^e$  e deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}$ , as variáveis internas de estado  $\boldsymbol{\alpha}_{ij}$  e a variação de temperatura  $\Delta T$  torna-se:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^e = B_{ij} + E_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl} + F_{ijkl} \boldsymbol{\alpha}_{kl} + G_{ij} \Delta T
\tag{4.34}$$

sendo que  $B_{ij}$  representa o tensor de tensões residuais,  $E_{ijkl}$  e  $F_{ijkl}$  são os tensores de rigidez das porções não danificadas e danificadas do corpo e  $G_{ij}$  é o tensor termo-elástico. Na ausência de qualquer forma de dano, isto é,  $\boldsymbol{\alpha}_{ij} = \mathbf{0}$ , a equação (4.34) reduz-se à equação constitutiva para um corpo elástico sem dano. Se o tensor deformação térmica, com  $\boldsymbol{\kappa}_{kl}$  definido como os coeficientes do tensor de expansão térmica, é expresso por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^T = \boldsymbol{\kappa}_{kl} \Delta T
\tag{4.35}$$

então, o tensor tensão térmica é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^T = G_{ij} \Delta T = E_{ijkl} \boldsymbol{\varepsilon}_{kl}^T
\tag{4.36}$$

ou:

$$\sigma_{ij}^T = E_{ijkl} \kappa_{kl} \Delta T \quad (4.37)$$

Definindo-se o tensor tensão residual como sendo igual a outras formas de tensões residuais,  $\sigma_{ij}^R$ , tem-se:

$$\sigma_{ij}^R = B_{ij} \quad (4.38)$$

Inserindo-se as equações (4.36), (4.37) e (4.38) na equação (4.34), obtêm-se:

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^R + E_{ijkl} (\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{kl}^T) + F_{ijkl} \alpha_{kl} \quad (4.39)$$

onde  $i, j, k, l = 1, 2$  e  $3$  e é válido a soma implícita. Note que as variáveis internas de estado  $\alpha_{ij}$  na equação (4.39) não foram definidas funcionalmente e nem foram associadas com um tipo particular de dano. As variáveis internas de estado definidas na equação (4.6) podem ser utilizadas para representar danos internos como: vazios, trincas transversais, rupturas de fibras, desunião da matriz-fibra, etc, sujeitas às hipóteses da Teoria do Dano. Além disso, as equações constitutivas na expressão (4.39) permitem a representação de danos internos no espaço tri-dimensional.

#### 4.2.8 Relações Constitutivas para Lâmina Ortotrópica com Trincas

##### Transversais

Nesta seção, as equações constitutivas da expressão (4.39) serão aplicadas para representar a resposta ao dano de trincas transversais na lâmina ortotrópica de laminados compostos. A Teoria Clássica de Placas Laminadas será utilizada para este propósito.

Omitindo-se a temperatura e as tensões residuais, a equação (4.39) é simplificada para:

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} + F_{ijkl} \alpha_{kl} \quad (4.40)$$

Quando as simetrias de tensão e deformação são impostas na última expressão, as equações constitutivas tornam-se:

$$\sigma_i^e = E_{ij} \varepsilon_j + F_{ik} \alpha_k \quad (4.41)$$

em notação contraída, onde  $i$  e  $j$  variam entre 1 a 6, e  $k$  entre 1 a 9.  $E_{ij}$  e  $F_{ik}$  são as matrizes rigidez não-danificada e danificada, respectivamente.  $\sigma_i^e$ ,  $\varepsilon_j$  e  $\alpha_k$  são as tensões, as deformações e o vetor das variáveis internas de estado, respectivamente. Para maiores detalhes das simplificações das equações contidas nesta seção, vide apêndice A.

Se as restrições de simetria do material de uma lâmina ortotópica são utilizadas, o número de coeficientes é reduzido e a equação (4.41) assume a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_1^e \\ \sigma_2^e \\ \sigma_3^e \\ \sigma_4^e \\ \sigma_5^e \\ \sigma_6^e \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{56} & F_{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{68} & F_{69} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \\ \alpha_9 \end{Bmatrix} \quad (4.42)
 \end{aligned}$$

Quando se considera somente dano por trincas transversais, a equação (4.42) simplifica-se para:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_1^e \\ \sigma_2^e \\ \sigma_3^e \\ \sigma_4^e \\ \sigma_5^e \\ \sigma_6^e \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} + \\
 + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{56} & F_{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{68} & F_{69} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_5 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_8 \\ 0 \end{Bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

sendo que os componentes do vetor variáveis internas de estado  $\alpha_1$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$ ,  $\alpha_6$ ,  $\alpha_7$  e  $\alpha_9$  reduzem-se a zero. No caso de uma lâmina ortotrópica fina, onde as condições de estado plano de tensões (bi-dimensional) podem ser aplicadas, as relações constitutivas simplificam-se mais ainda para:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^e \\ \sigma_2^e \\ \sigma_6^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & F_{12} & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{68} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \tag{4.44}$$

onde  $\bar{Q}_{ij}$  são os componentes da matriz rigidez reduzida. Nota-se que na equação (4.44) os componentes  $\alpha_2$  e  $\alpha_8$  são, respectivamente, as variáveis internas de estado  $\alpha_{22}$  e  $\alpha_{12}$  para trincas transversais sujeitas ao carregamento dos modos I e III. Se  $F_{68}$  e  $\alpha_8$  são re-escritos como  $F_{66}$  e  $\alpha_6$ , então a equação (4.44), com os

valores de  $i$  e  $j$  sendo 1, 2 e 6, pode ser expressa em notação contraída como:

$$\sigma_i^e = \bar{Q}_{ij} \varepsilon_j + F_{ij} \alpha_j \quad (4.45)$$

Pode ser mostrado (vide apêndice A) que para trincas transversais na matriz, uma boa aproximação leva à:

$$F_{ij} = -\bar{Q}_{ij} \quad (4.46)$$

Esta hipótese simplifica consideravelmente a teoria, conduzindo a uma descrição completa do estado de dano pelas variáveis de estado internas  $\alpha_k$ .

Assim, a equação (4.45) torna-se:

$$\sigma_i^e = \bar{Q}_{ij} (\varepsilon_j - \alpha_j) \quad (4.47)$$

ou:

$$\sigma_i^e = \bar{Q}_{ij} (1 - D_j) \varepsilon_j \quad (4.48)$$

sendo que  $D_j$  são os componentes de dano na lâmina, definidos como:

$$D_j = \alpha_j \varepsilon_j^{-1} = \frac{\alpha_j}{\varepsilon_j} \quad (4.49)$$

Expandindo-se a equação (4.48), obtêm-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^e \\ \sigma_2^e \\ \sigma_6^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11}(1-D_1) & \bar{Q}_{12}(1-D_2) & 0 \\ \bar{Q}_{12}(1-D_1) & \bar{Q}_{22}(1-D_2) & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66}(1-D_6) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (4.50)$$

Alternativamente, a última equação pode ser expressa por:

$$\sigma_i^e = \bar{Q}_{ij}^e \varepsilon_j \quad (4.51)$$

onde  $\bar{Q}_{ij}^e$  são componentes da matriz rigidez efetiva dada por:

$$\bar{Q}_{ij}^e = \bar{Q}_{ij}(1-D_j) \quad (4.52)$$

Nota-se que a equação (4.52) necessita de  $D_1$ ,  $D_2$  e  $D_6$  para caracterizar completamente uma lâmina ortotrópica com dano característico. Quando somente trincas transversais são consideradas, a equação (4.52) reduz-se à determinação de  $D_2$  e  $D_6$  uma vez que  $D_1$  se relaciona à ruptura da fibra. Como  $D_2$  e  $D_6$  são variáveis internas de estado independentes, o dano devido aos carregamentos de modo I e III podem ser representados individualmente.

#### 4.2.9 Relações Constitutivas para Laminados Compostos com Trincas Transversais

As relações constitutivas descritas anteriormente podem ser usadas dentro da Teoria Clássica de Placas Laminadas [Tay e Lim (1996)]. No caso, o vetor das resultantes de força  $\{N\}$  e o vetor das resultantes de momento  $\{M\}$  podem ser expressos por:

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{\kappa^0\} + \{D^N\} \quad (4.53)$$

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{\kappa^0\} + \{D^M\} \quad (4.54)$$

Nas equações anteriores,  $\{\varepsilon^0\}$  é o vetor de deformações no plano médio,  $[A]$  é a matriz rigidez de membrana do laminado,  $[B]$  é a matriz rigidez de acoplamento (membrana e flexão),  $\{\kappa^0\}$  é o vetor de curvatura,  $\{D^N\}$  é o vetor dano de força,  $[D]$  é a matriz rigidez de flexão do laminado e  $\{D^M\}$  é o vetor dano de momento.

Assim, as quantidades nas equações (4.53) e (4.54) são apresentadas como:

$$\{N\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T dz \quad (4.55)$$

$$\{M\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T z dz \quad (4.56)$$

$$[A] = \sum_{k=1}^N (z_k - z_{k-1}) \left[ \bar{Q} \right]_k \quad (4.57)$$

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (z_k^2 - z_{k-1}^2) \left[ \bar{Q} \right]_k \quad (4.58)$$

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (z_k^3 - z_{k-1}^3) \left[ \bar{Q} \right]_k \quad (4.59)$$

$$\{\varepsilon^0\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T dz \quad (4.60)$$

$$\{\kappa^0\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{\kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy}\}^T dz \quad (4.61)$$

$$\{D^N\} = \sum_{k=1}^N (z_k - z_{k-1}) \left[ \bar{Q} \right]_k \left\{ \bar{\alpha} \right\}_k \quad (4.62)$$

$$\{D^M\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (z_k^2 - z_{k-1}^2) \left[ \bar{Q} \right]_k \left\{ \bar{\alpha} \right\}_k \quad (4.63)$$

sendo que  $\left[ \bar{Q} \right]_k$  é a matriz de rigidez reduzida e  $\left\{ \bar{\alpha} \right\}_k$  é o vetor das variáveis internas de estado (coordenada global).

A transformação da coordenada local para a global usualmente é verificada por:

$$\left[ \bar{Q} \right]_k = [T]_k^{-1} [Q]_k [T]_k \quad (4.64)$$

e:

$$\left\{ \bar{\alpha} \right\}_k = [T]_k \left\{ \alpha \right\}_k \quad (4.65)$$

onde  $[T]_k$  é a matriz transformação da coordenada local para a global de cada lâmina do laminado.

O vetor das variáveis internas de estado na coordenada local é dado por:

$$\left\{ \alpha \right\}_k = \sum_{\eta=1}^P \left\{ 0 \quad \alpha_{22}^{\eta} \quad \alpha_{12}^{\eta} \right\}_k \quad (4.66)$$

tendo-se  $P$  como o número total de tipos de dano sendo considerados.

Assim, a variável interna de estado para carregamento modo I é definida como:

$$\alpha_2 = \frac{1}{V} \int_{S_c} u_2 n_2 dS \quad (4.67)$$

onde  $u_2$  é o deslocamento de abertura da trinca,  $n_2$  é a normal unitária à superfície da trinca,  $V$  é o volume do elemento representativo e  $S_c$  é a área de superfície da trinca.

E, para carregamento modo III:

$$\alpha_6 = \frac{1}{V} \int_{S_c} u_1 n_2 dS \quad (4.68)$$

onde  $u_1$  é o deslocamento por deslizamento da trinca,  $n_2$  é a normal unitária ao plano da trinca na direção do cisalhamento,  $V$  é o volume do elemento representativo e  $S_c$  é a área de superfície da trinca.

## Capítulo 5

# Determinação das Variáveis Internas de Estado

### 5.1 Introdução

Neste capítulo, busca-se desenvolver uma metodologia para definição e caracterização das variáveis internas de estado específicas para laminados compostos com trincas transversais em suas matrizes. Somente com a determinação das variáveis internas torna-se possível caracterizar o dano e, assim, deduzir o vetor dano. Para este trabalho, uma análise numérica destas variáveis foi utilizada visto ser uma metodologia que incorpora aspectos importantes ao dano, tais como, densidade de trincas e efeitos de restrição nas lâminas danificadas e ainda, sem a complexidade de se efetuar experimentos neste tipo de material.

De qualquer forma, existem algumas maneiras de se adquirirem as variáveis internas de estado. Experimentos mecânicos ou micromecânicos podem ser utilizados para o cálculo de tais variáveis. Em uma aproximação bem elaborada, complexos experimentos são necessários. Além disso, quando há acoplamento de tipos de danos (ex: modo I e III), a delineação dos mecanismos do dano são frequentemente difíceis [Kachanov (1986)]. Mesmo se as variáveis internas de estado forem identificadas com sucesso através destes experimentos, suas bases físicas e suas interpretações não serão prontamente óbvias. Assim, a consideração de

invariância na representação de um mecanismo particular de dano pode ser questionada. Já as constantes utilizadas em funções adquiridas experimentalmente para a obtenção das variáveis internas de estado são muitas vezes usadas sem ênfase na necessidade de se provar suas invariâncias. Esta situação conduz à Teoria da Mecânica do Dano em Meios Contínuos ser associada com técnicas de ajuste de curvas analíticas, sendo as constantes citadas associadas ao material composto em estudo [Talreja (1992)]. Também, as variáveis internas de estado podem ser calculadas através da micromecânica onde a física implícita dos tipos de dano e modos de carregamento é explicitamente levada em conta.

Alternativamente, as variáveis internas de estado podem ser convenientemente obtidas através de um simples estudo paramétrico por elementos finitos [Tay e Lim (1993)]. Assim, um método numérico é utilizado para calcular as variáveis internas de estado de um dano por trincas transversais. O método dos elementos finitos é usado para análise de trincas transversais em elementos de um volume representativo, aproveitando-se da vantagem das trincas serem naturalmente dispersas e de espaçamentos aproximadamente iguais. A geometria e a cinemática da trinca retirada de uma análise por elementos finitos são então usadas para calcular as variáveis internas de estado para os modos I e III. A metodologia é estendida para análise de laminados compostos com lâminas internas em direções genéricas [Lim e Tay (1996)]. Para este trabalho, todo o dano está na forma de trincas transversais na matriz e supõe-se estar restrito às lâminas internas. Uma outra hipótese é que o dano seja igualmente distribuído dentro do laminado.

### 5.1.1 Variáveis Internas de Estado para Carregamento Puro Modo I

As variáveis internas de estado para trincas transversais sob o carregamento Modo I, definido pela equação (4.6), lembrando-se que a integração é sobre a superfície da trinca transversal  $S_c$  são dadas por:

$$\alpha_2 = \frac{1}{V} \int_{S_c} u_2 n_2 dS \quad (5.1)$$

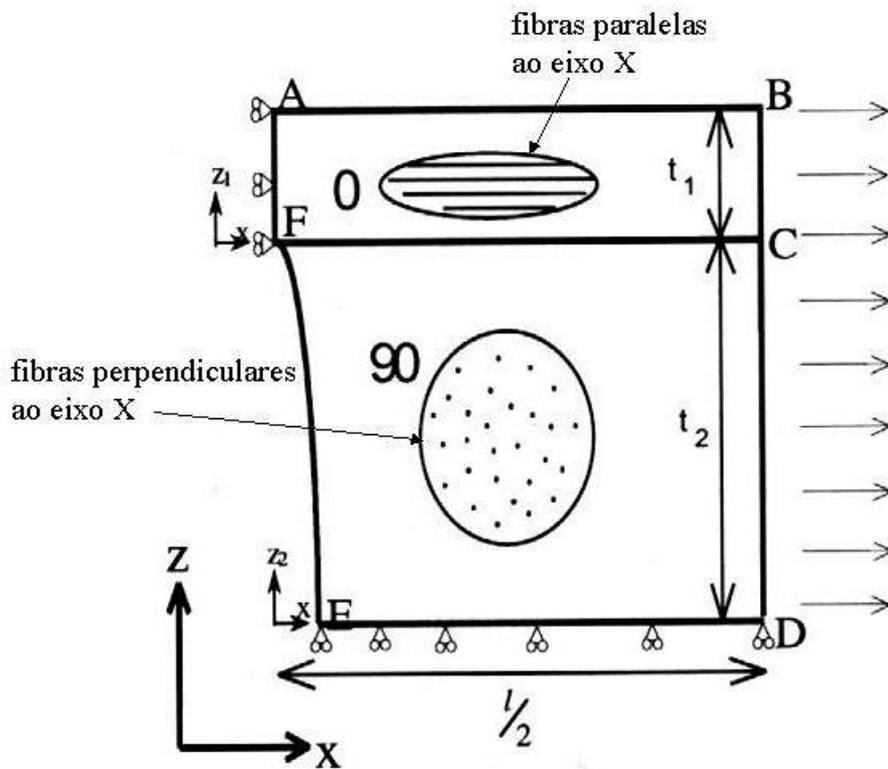


Figura 5.1 – Modelo para elementos finitos esquemático de um laminado [0°/90°] – [Lim e Tay (1996)]

Substituindo-se os termos da equação (5.1) relativos à trinca transversal dentro do elemento de volume representativo da Figura 5.1 obtém-se:

$$\alpha_2 = \frac{2u_2b}{bl2t_2} \int_{-t_2}^{+t_2} \psi(z_2) dz_2 \quad (5.2)$$

onde  $u_2$  é o máximo deslocamento de abertura da trinca,  $b$  é a largura do laminado,  $l$  é o espaçamento entre trincas,  $t_2$  é metade da espessura da lâmina interna,  $\psi$  é uma função associada ao perfil de abertura da trinca,  $z_2$  é a ordenada do sistema de coordenadas na direção Z relativa à camada a 90°,  $t_1$  é a espessura da lâmina a 0° e  $z_1$  é a ordenada do sistema de coordenadas na direção Z relativa à camada a 0° tal como definido pela Figura 5.1. Alternativamente, a equação (5.2) pode ser re-escrita da forma:

$$\alpha_2 = \frac{2u_2}{l} \int_{-0.5}^{+0.5} \psi(\xi) d\xi \quad (5.3)$$

sendo que a espessura da lâmina interna é expressa em termos da distância normalizada  $\xi$  que é definida por:

$$\xi = \frac{z_2}{2t_2} \quad (5.4)$$

Se a integração na equação (5.3) for definida como:

$$C_a = \int_{-0.5}^{+0.5} \psi(\xi) d\xi \quad (5.5)$$

onde  $C_a$  refere-se à área de abertura da trinca, então, a variável interna de estado para o modo I de dano por trincas transversais em laminados  $[0^\circ/90^\circ]$  é dada por:

$$\alpha_2 = 2C_a u_2 \zeta \quad (5.6)$$

tendo-se  $\zeta$  como a densidade de trinca, definida como:

$$\zeta = \frac{1}{l} \quad (5.7)$$

### 5.1.2 Variáveis Internas de Estado para Carregamentos Acoplados Modos I e III

Para laminados com lâminas internas em direção genérica (ou seja,  $[0^\circ/\phi^\circ]$ ), uma consideração deve ser dada para o deslocamento por deslizamento ou carregamento modo III em adição ao modo I (componente do deslocamento por abertura). É assumido que para um laminado sob carregamento uniaxial de tração,

os deslocamentos por deslizamento e abertura das trincas são relacionados através de considerações geométricas. A Figura 5.2 mostra a presença de trincas transversais na lâmina  $\phi$ , onde as direções locais 1-2 (da lâmina) são orientadas em um ângulo  $\phi$  das direções globais  $x$ - $y$  (do laminado).

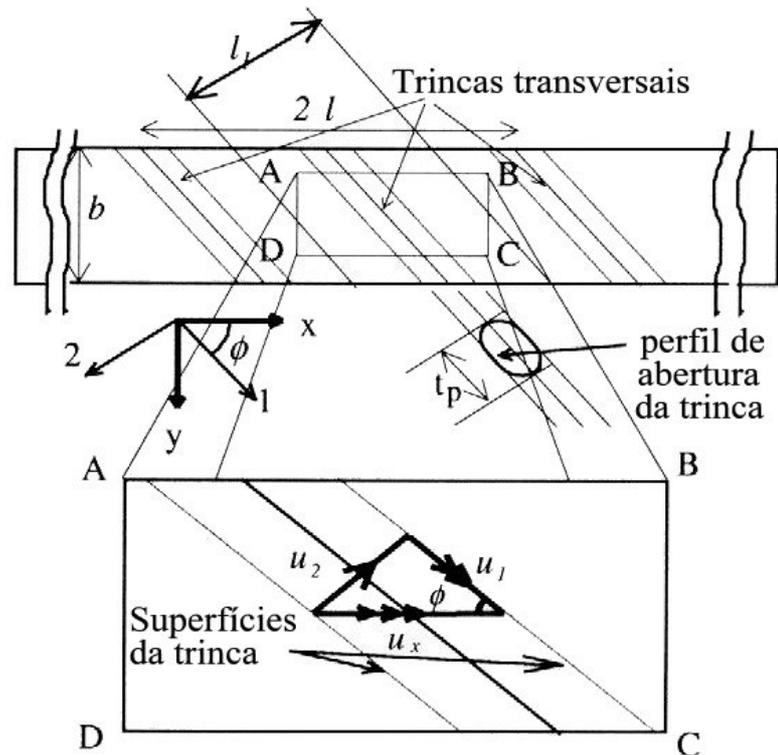


Figura 5.2 – Notação geométrica de uma lâmina com fibras em uma direção genérica [Lim e Tay (1996)]

Para lâminas com direção genérica, a densidade de trincas local  $\zeta_l$  é definida como:

$$\zeta_l = \frac{1}{l_l} \tag{5.8}$$

sendo que  $l_l$  é o espaçamento de trincas local definido pela Figura 5.2. A densidade de trincas local define a densidade absoluta de uma lâmina danificada no sistema de

coordenadas local 1-2. Contudo, como densidades de trincas são freqüentemente determinadas no sistema de coordenadas global x-y, a definição de densidade de trincas global deverá ser utilizada para todas as análises. A densidade de trinca global  $\zeta$  ou, simplesmente, densidade de trincas é relacionada com a densidade de trincas local  $\zeta_l$  por:

$$\zeta = \zeta_l \text{ sen } \phi \quad (5.9)$$

Ainda na Figura 5.2, a resultante do vetor deslocamento das faces da trinca  $u_x$  pode ser desmembrada em duas componentes: a paralela e a perpendicular ao eixo 1. Assim,  $u_2$  denota a abertura ou componente relativo ao modo I do vetor deslocamento, e  $u_1$  denota o deslizamento ou componente relativo ao modo III. A variável interna de estado para o modo I pode então ser definida analogamente como na equação (5.6), tendo-se  $\phi$  como a orientação da lâmina interna, de modo que a expressão é dada por:

$$\alpha_2 = 2C_a \frac{u_2 \zeta}{\text{sen } \phi} \quad (5.10)$$

Da Figura 5.2, o componente de deslizamento do vetor deslocamento  $u_1$  é relacionado com o componente de abertura  $u_2$  por:

$$u_1 = \frac{u_2 \cos \phi}{\text{sen } \phi} = u_2 \cot \phi \quad (5.11)$$

Desta forma, a variável interna de estado para o modo III é definida como:

$$\alpha_6 = \frac{1}{V} \int_{S_c} u_1 n_2 dS \quad (5.12)$$

Combinando-se as equações (5.11), (5.12) e (5.5), a variável interna de estado para o modo III torna-se:

$$\alpha_6 = 2C_a \frac{u_2 \zeta}{\tan \phi \operatorname{sen} \phi} \quad (5.13)$$

A equação (5.6) é derivada para somente o modo I de carregamento enquanto as equações (5.10) e (5.13) são derivadas para os modos I e III de carregamentos acoplados para dano por trincas transversais de uma lâmina com fibras orientadas numa direção arbitrária. Portanto, as variáveis internas de estado para trincas transversais de laminados  $[0^\circ/\phi^\circ]_s$  são prontamente determinadas uma vez que se conheça a orientação  $\phi$  da lâmina interna, o máximo deslocamento de abertura da trinca  $u_2$ , a área de abertura da trinca  $C_a$  e a densidade de trincas  $\zeta$ .

Quando as variáveis internas de estado descritas nas equações (5.6), (5.10) e (5.13) são inseridas nas relações constitutivas da Teoria do Dano em Meios Contínuos, as variações de rigidez de qualquer laminado composto podem ser obtidas se forem conhecidos o máximo deslocamento da abertura da trinca  $u_2$ , a área de abertura da trinca  $C_a$  e a densidade de trincas  $\zeta$ . Uma utilidade para tal correlação é verificar, em campo, a medida do máximo deslocamento de abertura da trinca  $u_2$ , a área de abertura da trinca  $C_a$  e a densidade de trincas  $\zeta$  de trincas transversais em estruturas compostas em trabalho para predizer a rigidez residual e ainda quanto tempo esta estrutura tem de vida útil. Assim, se o máximo deslocamento de abertura da trinca  $u_2$  e a área de abertura da trinca  $C_a$  para diferentes densidades de trincas são conhecidas a priori, então a rigidez respectiva de qualquer laminado composto pode ser precocemente calculada.

### 5.1.3 Cálculo das Variáveis Internas de Estado por Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos é utilizado para obter propriedades cinemáticas, tais como, o máximo deslocamento de abertura da trinca  $u_2$  e a área de abertura da trinca  $C_a$  para uma faixa de densidades de trincas. Entretanto, é

necessário obter-se valores de  $u_2$  e  $C_a$  que sejam aplicáveis para lâminas com fibras em orientações, espessuras e empilhamentos arbitrários. Assim, utiliza-se um procedimento de normalização para relacionar  $u_2$  e  $C_a$  como funções da densidade de trinca e do parâmetro de restrição da lâmina interna [Lim e Tay (1996)], que será visto a seguir.

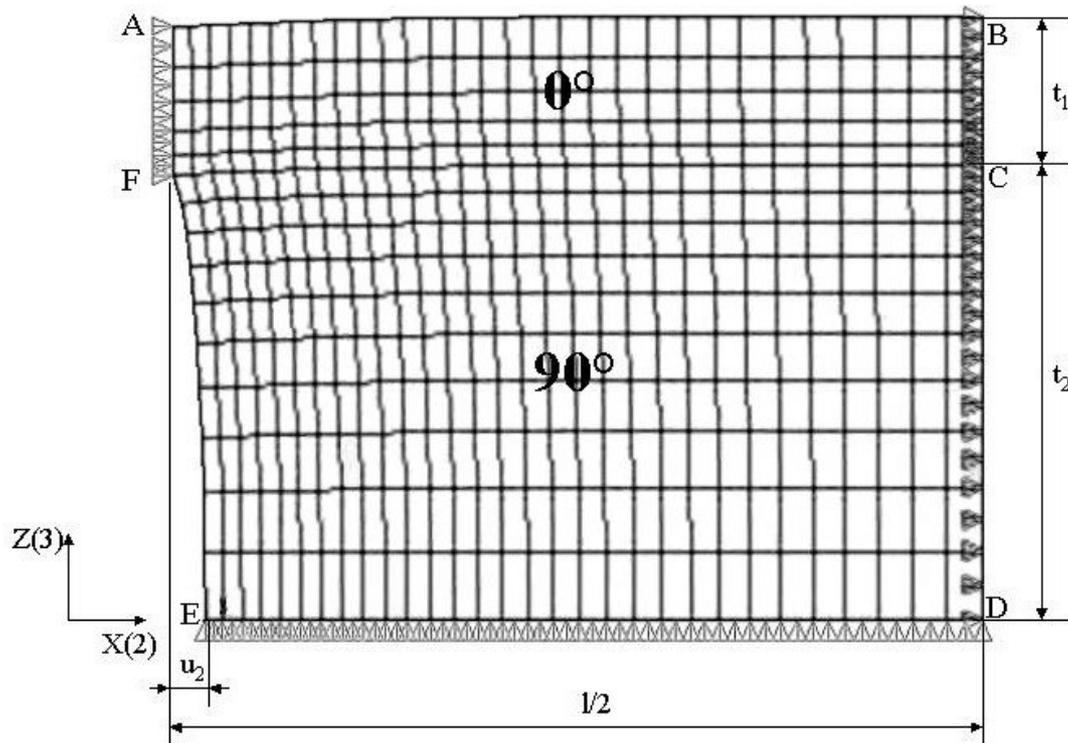


Figura 5.3 – Exemplo de malha de elementos finitos deformada para um laminado  $[0^\circ/90^\circ]_s$ .

Para as análises descritas anteriormente, modela-se um elemento de volume representativo, conforme a Figura 5.3. O tamanho e a forma do volume representativo depende das espessuras relativas entre as diferentes lâminas e a densidade de trincas (número de trincas por unidade de volume). Uma série de parâmetros normalizados é definida, tais como:

$$\rho = \frac{2t}{l} \quad (5.14)$$

$$\theta = \frac{t_1}{t_2} \quad (5.15)$$

$$\delta = \frac{u_2}{t_2} \quad (5.16)$$

$$t = t_1 + t_2 \quad (5.17)$$

$$\psi = \frac{u(\xi)}{u_2} \quad (5.18)$$

onde  $t_1$  e  $t_2$  são as espessuras das lâminas  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , respectivamente,  $l$  é a distância entre duas trincas transversais adjacentes,  $u_2$  é o máximo deslocamento de abertura da trinca,  $\theta$  é o parâmetro de restrição,  $\rho$  e  $\delta$  podem ser considerados como a densidade de trincas adimensional e o máximo deslocamento de abertura da trinca adimensional, respectivamente, e  $\psi$  é a função normalizada do perfil de abertura da trinca. Assim,  $u(\xi)$  é a função do perfil de abertura da trinca e  $\xi$  é a distância normalizada do centro da trinca, dado pela equação (5.4). Considerando-se o caso de análise linearmente elástica,  $\delta$  é diretamente proporcional à deformação aplicada. Os efeitos das variações da densidade de trincas  $\zeta$  e de restrição  $\theta$  são levados em conta através da análise de diferentes elementos de volume representativo.

Através das análises experimentais executadas por Lim e Tay (1996), uma função exponencial relacionando o máximo deslocamento de abertura da trinca normalizado  $\delta$ , com valores de  $\rho$  foi proposta:

$$\delta = C_1(e^{-a_1\rho}) + C_2(e^{-b_1\rho}) + C_3 \quad (5.19)$$

sendo que as constantes para compostos grafite/epóxi e vidro/epóxi podem ser visualizadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Constantes para o deslocamento de abertura da trinca,  $\delta$  versus a função da densidade de trincas normalizado  $\rho$  [Lim e Tay (1996)]

<b>Material Composto</b>	<b>C<sub>1</sub></b>	<b>C<sub>2</sub></b>	<b>C<sub>3</sub></b>	<b>a<sub>1</sub></b>	<b>b<sub>1</sub></b>
<b>Grafite/Epóxi - Gr/Ep</b>	<b>-8.86E-2</b>	<b>0.21</b>	<b>2.20E-2</b>	<b>1.95</b>	<b>0.74</b>
<b>Vidro/Epóxi - Gl/Ep</b>	<b>1.03</b>	<b>-0.81</b>	<b>2.28E-2</b>	<b>0.94</b>	<b>1.00</b>

Da mesma forma, uma função exponencial relacionando o máximo deslocamento de abertura da trinca normalizado  $\delta$ , com valores de  $\theta$  foi proposta [Lim e Tay (1996)]:

$$\delta = C_4(e^{a_2\theta}) + C_5(e^{b_2\theta}) + C_6 \quad (5.20)$$

onde as constantes para compostos grafite/epóxi e vidro/epóxi podem ser visualizadas na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Constantes para o deslocamento de abertura da trinca,  $\delta$  verso a razão de restrição  $\theta$  [Lim e Tay (1996)]

<b>Material Composto</b>	<b>C<sub>4</sub></b>	<b>C<sub>5</sub></b>	<b>C<sub>6</sub></b>	<b>a<sub>2</sub></b>	<b>b<sub>2</sub></b>
<b>Grafite/Epóxi - Gr/Ep</b>	<b>-4.51E-2</b>	<b>-0.17</b>	<b>0.30</b>	<b>-1.49</b>	<b>6.95E-4</b>
<b>Vidro/Epóxi - Gl/Ep</b>	<b>-0.14</b>	<b>0.00</b>	<b>0.20</b>	<b>-0.91</b>	<b>-0.91</b>

Também, expressa-se o perfil de abertura da trinca normalizado  $\psi$  contra a distância normalizada  $\xi$  para compostos Gr/Ep e Gl/Ep através da Figura 5.4

podendo-se observar que a forma do perfil de abertura da trinca é similar entre os dois materiais compostos.

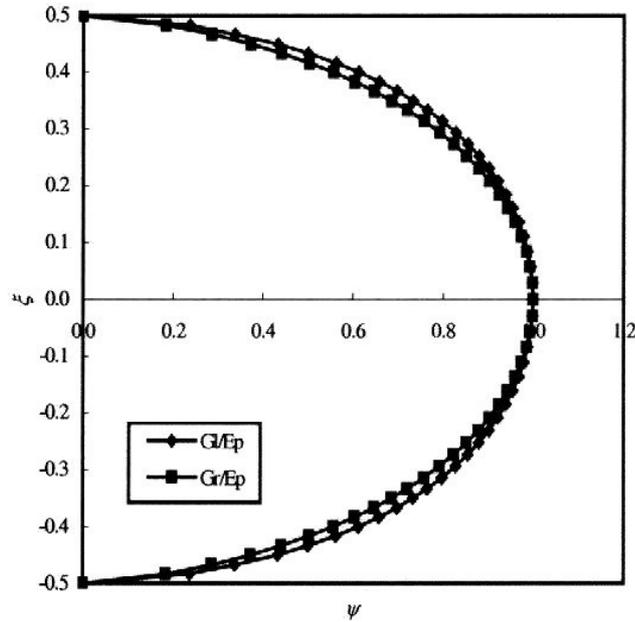


Figura 5.4 –  $\zeta$  versus  $\psi$  ( $\theta=0.333$ ,  $\rho=1.0$ ) – [Lim e Tay (1996)]

A função do perfil de abertura da trinca normalizada  $\psi$  versus a distância normalizada  $\xi$  pode ser representada por um polinômio de quarta ordem dado por:

$$\psi = 1.0 + C_7\xi + C_8\xi^2 + C_9\xi^3 + C_{10}\xi^4 \tag{5.21}$$

sendo que  $C_7$ ,  $C_8$ ,  $C_9$  e  $C_{10}$  são constantes dadas pela Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Constantes para o perfil de abertura da trinca,  $\psi$  versus a distância normalizada na direção da espessura  $\xi$  [Lim e Tay (1996)]

<b>Material Composto</b>	<b>C<sub>7</sub></b>	<b>C<sub>8</sub></b>	<b>C<sub>9</sub></b>	<b>C<sub>10</sub></b>
<b>Grafite/Epóxi - Gr/Ep</b>	<b>0.00</b>	<b>-1.16</b>	<b>0.00</b>	<b>-10.00</b>
<b>Vidro/Epóxi - Gl/Ep</b>	<b>0.00</b>	<b>-0.471</b>	<b>0.00</b>	<b>-12.00</b>

A área de abertura da trinca  $C_a$  é definida como a integração da área sob o perfil de abertura da trinca normalizado  $\psi$ , exposto na equação (5.5). Assim, usando a Tabela 5.3, a área de abertura da trinca  $C_a$  do grafite/epóxi (Gr/Ep) e do vidro/epóxi (Gl/Ep) torna-se:

$$C_a \approx \frac{4}{5} \quad (5.22)$$

Inserindo a última equação nas equações (5.6), (5.10) e (5.13), as variáveis de estado para o modo I e para os modos I e III acoplados tornam-se:

$$\text{Modo I} \quad \alpha_2 = 2C_a u_2 \zeta = \frac{8}{5} u_2 \zeta \quad (5.23)$$

$$\text{Modo I Acoplado} \quad \alpha_2 = 2C_a \frac{u_2 \zeta}{\sin \phi} = \frac{8}{5} \frac{u_2 \zeta}{\sin \phi} \quad (5.24)$$

$$\text{Modo III Acoplado} \quad \alpha_6 = 2C_a \frac{u_2 \zeta}{\tan \phi \sin \phi} = \frac{8}{5} \frac{u_2 \zeta}{\tan \phi \sin \phi} \quad (5.25)$$

Neste trabalho, o máximo deslocamento de abertura da trinca  $u_2$  é determinado através de duas formulações, propostas pelas equações (5.19) e (5.20): pela densidade de trincas normalizada  $\rho$ , e pelo parâmetro de restrição  $\theta$ , respectivamente. Para a formulação por  $\rho$ , tendo-se os valores de  $\rho$  pela equação (5.14), substituindo-se em (5.19), encontram-se os valores do máximo deslocamento de abertura da trinca normalizado  $\delta$ . Substituindo-se na equação (5.16), retiram-se os valores do máximo deslocamento de abertura da trinca  $u_2$ . Da mesma forma, para a formulação por  $\theta$ , calculando-se os valores de  $\theta$  pela equação (5.15), substituindo-se em (5.20), encontram-se os valores do máximo deslocamento de abertura da trinca normalizado  $\delta$ . Substituindo-se na equação (5.16), obtêm-se os valores do máximo deslocamento de abertura da trinca  $u_2$ . Tendo-se os valores do máximo deslocamento de abertura da trinca  $u_2$ , e sabendo-se que a densidade de trinca  $\zeta$  é função da distância entre duas trincas transversais adjacentes  $l$ , cujos valores são atribuídos aleatoriamente, o cálculo das variáveis internas de estado é executado através das equações (5.23) para modo I de carregamento e pelas equações (5.24) e (5.25) para modos I e III de carregamento, respectivamente, para verificação da perda da rigidez do grafite/epóxi (Gr/Ep) e do vidro/epóxi (Gl/Ep).

## 5.2 Verificação das Formulações $\rho$ e $\theta$

Com o objetivo de verificar as formulações propostas por Lim e Tay (1996) das quais pode-se conduzir, através de alguns desenvolvimentos matemáticos, ao cálculo das variáveis internas de estado, algumas análises foram conduzidas similarmente às feitas por estes autores, para se deduzir numericamente estas variáveis. A rotina utilizada para as análises está listada no apêndice B.

Na Figura 5.5, pode-se observar um exemplo de malha de elementos finitos utilizada para as análises, sendo que somente  $\frac{1}{4}$  do volume de elemento representativo é modelado devido à simetria. Nesta mesma figura, as regiões ABFC e FCED representam as lâminas a  $0^\circ$  e  $90^\circ$ , respectivamente. O lado ED é restringido ao movimento na direção vertical e o lado AF é restringido ao movimento na direção horizontal. Um deslocamento uniforme na direção positiva “x” é aplicado

no lado BCD. A trinca é representada pelo lado EF, com a ponta da trinca no ponto F, interface entre as lâminas a  $0^\circ$  e  $90^\circ$ . O modelo consiste em elementos com oito nós e propriedades para material ortotrópico. Para realizar as análises, usa-se o software ANSYS 5.6. As propriedades dos materiais estão descritas nas Tabela 5.4. Vale mencionar que a malha de elementos finitos selecionada para os resultados apresentados a seguir, na Figura 5.6, contém 2000 elementos e, baseado nas afirmações descritas por Lim (1999), que estudou a variação da malha de 480, 750, 3000 e 4069 elementos, sendo que a malha com 480 elementos já obteve convergência. Também, conforme Tay e Lim (1993), a curva mostrada na seqüência foi obtida para um valor de deformação aplicada. Já que as análises são elástico-lineares, qualquer alteração deste valor implica em alteração da escala no eixo  $\delta$  do gráfico da Figura 5.6.

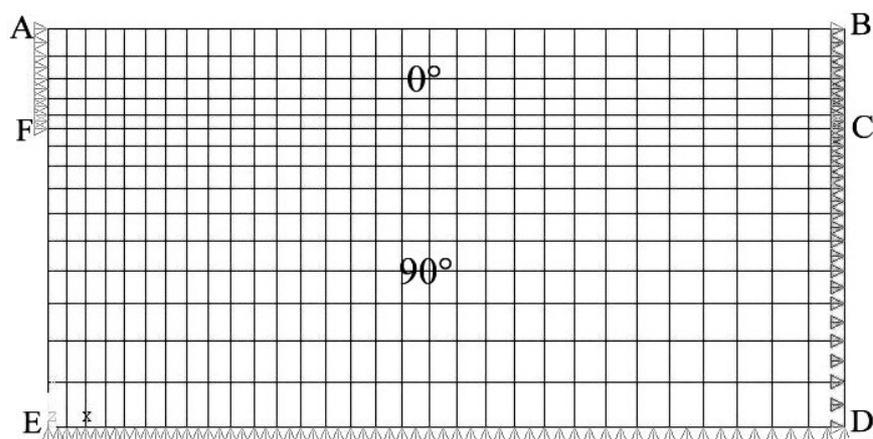


Figura 5.5 – Exemplo de malha de elementos finitos utilizada para as análises, com 450 elementos

Tabela 5.4 – Constantes Elásticas utilizadas para as análises

Material	$E_{11}$ (GPa)	$E_{22}$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$\nu_{12}$
<b>Grafite / Epóxi - Gr/Ep</b>	<b>142.00</b>	<b>9.85</b>	<b>4.48</b>	<b>3.37</b>	<b>0.3</b>
<b>Vidro / Epóxi - Gl/Ep</b>	<b>41.70</b>	<b>13.00</b>	<b>3.40</b>	<b>3.40</b>	<b>0.3</b>

Oito análises foram executadas para os materiais grafite/epóxi (Gr/Ep) e

vidro/epóxi (Gl/Ep), conforme descrito na Tabela 5.5, para se comparar os resultados da curva máximo deslocamento de abertura da trinca normalizado,  $\delta$ , com a densidade de trinca normalizado,  $\rho$ . Utilizou-se espessuras  $t_1 = 0,000203$  m,  $t_2 = 0,000609$  m e  $t = 0,000812$  m com  $\theta = 0,333$  para Gl/Ep e espessuras  $t_1 = 0,000127$  m,  $t_2 = 0,000381$  m e  $t = 0,000508$  m com  $\theta = 0,333$  para Gr/Ep. Resultados das análises são mostrados na Figura 5.6. Nota-se que os comportamentos das curvas estão bem próximas tanto para Gr/Ep quanto para Gl/Ep. Para Gl/Ep, os resultados obtidos subestimam os resultados de Lim e Tay. Já para Gr/Ep, os resultados superestimam. Isto pode ser atribuído à formulação dos elementos utilizados e falta de informações sobre qual a deformação aplicada nos estudos comparados.

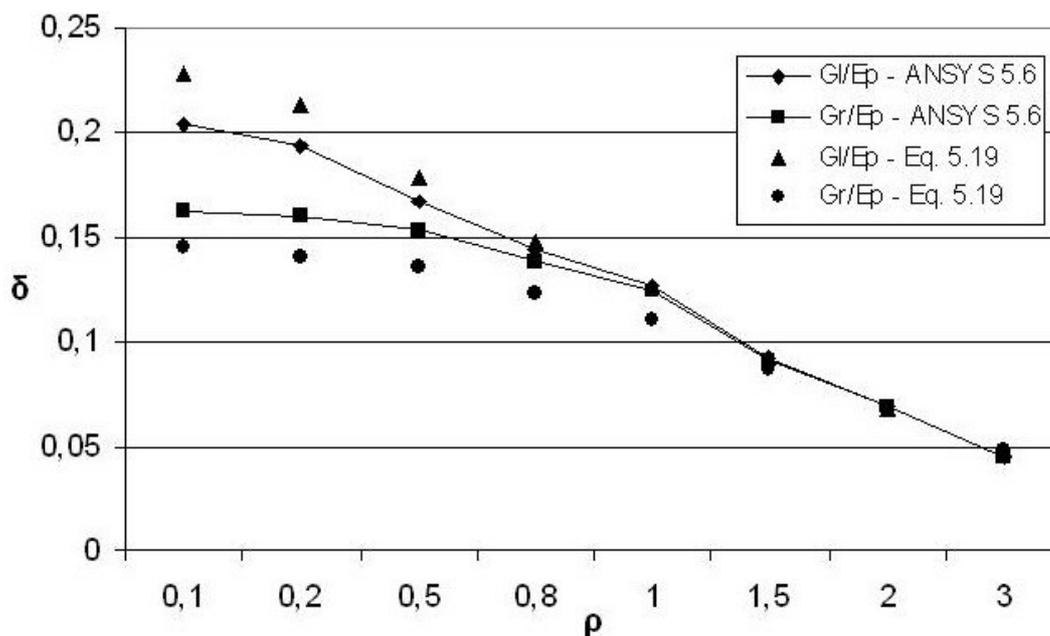


Figura 5.6 – Máximo deslocamento de abertura da trinca normalizado,  $\delta$  versus a densidade de trinca normalizado,  $\rho$

Seis análises foram executadas para os materiais Gr/Ep e Gl/Ep, conforme descrito na Tabela 5.6, para se comparar os resultados da curva máximo deslocamento de abertura da trinca normalizado,  $\delta$ , com o parâmetro de restrição,  $\theta$ . Resultados das análises demonstraram boa aproximação.

Desta forma, para este trabalho, as variáveis internas de estado são deduzidas pelas expressões (5.19) e (5.20).

Tabela 5.5 – Valores de comprimento, representados pela metade das distâncias entre trincas  $l/2$ , e da densidade de trinca normalizada  $\rho$  para as análises em ANSYS 5.6

<b>G/Ep</b>	<b>Espessura Total do Laminado (m)</b>
	<b>0,001624</b>
<b><math>\rho</math></b>	<b><math>l/2</math> (m)</b>
<b>0,1</b>	<b>0,008120</b>
<b>0,2</b>	<b>0,004060</b>
<b>0,5</b>	<b>0,001624</b>
<b>0,8</b>	<b>0,001015</b>
<b>1,0</b>	<b>0,000812</b>
<b>1,5</b>	<b>0,000541</b>
<b>2,0</b>	<b>0,000406</b>
<b>3,0</b>	<b>0,000271</b>
<b>Gr/Ep</b>	<b>Espessura Total do Laminado (m)</b>
	<b>0,001016</b>
<b><math>\rho</math></b>	<b><math>l/2</math> (m)</b>
<b>0,1</b>	<b>0,005080</b>
<b>0,2</b>	<b>0,002540</b>
<b>0,5</b>	<b>0,001016</b>
<b>0,8</b>	<b>0,000635</b>
<b>1,0</b>	<b>0,000508</b>
<b>1,5</b>	<b>0,000339</b>
<b>2,0</b>	<b>0,000254</b>
<b>3,0</b>	<b>0,000169</b>

Tabela 5.6 – Valores de comprimento, representados pela metade da distâncias entre trincas  $l/2$ , espessuras  $t_1$ ,  $t_2$  e  $t$ , parâmetro de restrição  $\theta$  para as análises em ANSYS 5.6, com  $\rho = 1,0$  para Gr/Ep e Gl/Ep

Gl/Ep			Espessura Total do Laminado (m)		
			0,001624		
$\rho$	$t_1$ (m)	$t_2$ (m)	$t$ (m)	$\theta$	$l/2$ (m)
1,0	0,000203	0,002030	0,002233	0,1	0,002233
1,0	0,000203	0,001015	0,001218	0,2	0,001218
1,0	0,000203	0,000406	0,000609	0,5	0,000609
1,0	0,000203	0,000203	0,000406	1,0	0,000406
1,0	0,000203	0,000068	0,000271	3,0	0,000271
1,0	0,000203	0,000020	0,000223	10,0	0,000223
Gr/Ep			Espessura Total do Laminado (m)		
			0,001016		
$\rho$	$t_1$ (m)	$t_2$ (m)	$t$ (m)	$\theta$	$l/2$ (m)
1,0	0,000127	0,00127	0,001397	0,1	0,001397
1,0	0,000127	0,000635	0,000762	0,2	0,000762
1,0	0,000127	0,000254	0,000381	0,5	0,000381
1,0	0,000127	0,000127	0,000254	1,0	0,000254
1,0	0,000127	0,000042	0,000169	3,0	0,000169
1,0	0,000127	0,000013	0,000140	10,0	0,000140

## Capítulo 6

# Implementação do Dano ao Método Modificado da Função de Green Local

### 6.1 Introdução

Muitos métodos aproximados têm sido utilizados para soluções de problemas da engenharia moderna. Entre os métodos aproximados mais consagrados destacam-se os de Elementos Finitos, de Elementos de Contorno e de Volumes Finitos. De qualquer forma, por mais poderosos e abrangentes que possam ser, os métodos aproximados possuem limitações e restrições ao uso. Por esta razão, muita pesquisa tem sido feita nas últimas décadas, seja para aprimorar os métodos consagrados e expandir o seu campo de aplicação, seja para o desenvolvimento de novas propostas e metodologias que venham a preencher lacunas não ocupadas pelos métodos convencionais.

Dentre estes novos desenvolvimentos, surgiu o “Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL)”. Trata-se de um método aproximado de solução, que associa o Método dos Elementos Finitos e o de Elementos de Contorno, resolvendo-se o problema através de um sistema de equações integrais de contorno. O MMFGL foi aplicado anteriormente por Machado (1992) para solução de problemas em placas laminadas de materiais compostos e, para este trabalho, incluiu-se o dano.

O objetivo deste capítulo é apresentar uma implementação da Teoria do Dano, discutida nos capítulos anteriores, em laminados compostos contendo trincas transversais através do MMFGL. Nos itens a seguir, alguns comentários serão efetuados sobre este método e considerações de sua implementação. Cabe salientar que o objetivo do presente não é o estudo e o desenvolvimento do MMFGL como foco primordial. O método foi empregado apenas como ferramenta computacional para a solução aproximada do problema do dano em materiais compostos. Assim, será feita, a seguir, uma breve apresentação do MMFGL. Maiores detalhes podem ser encontrados nos trabalhos de Silva (1988), Barbieri (1992) e Machado (1992).

## **6.2 Considerações sobre o Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL)**

O MMFGL emprega uma técnica de integração transversa e relações de reciprocidade para determinar, a nível local, a Função de Green, transformando, dessa forma, o operador parcial do problema, num operador parcial ordinário.

Este método foi aplicado anteriormente ao caso de placas laminadas de materiais compostos [Machado (1992)], onde se fez uma investigação de vários tipos de teorias para solução de placas laminadas através do MMFGL. Foram estudadas as teorias de camada simples baseadas em expansões lineares e de ordem superior dos campos de deslocamentos. Como em outras aplicações, o MMFGL mostrou-se bastante eficiente, com elevada precisão, mesmo com malhas muito grosseiras. A Figura 6.1 ilustra esquematicamente a aplicação deste método em placas laminadas de materiais compostos.

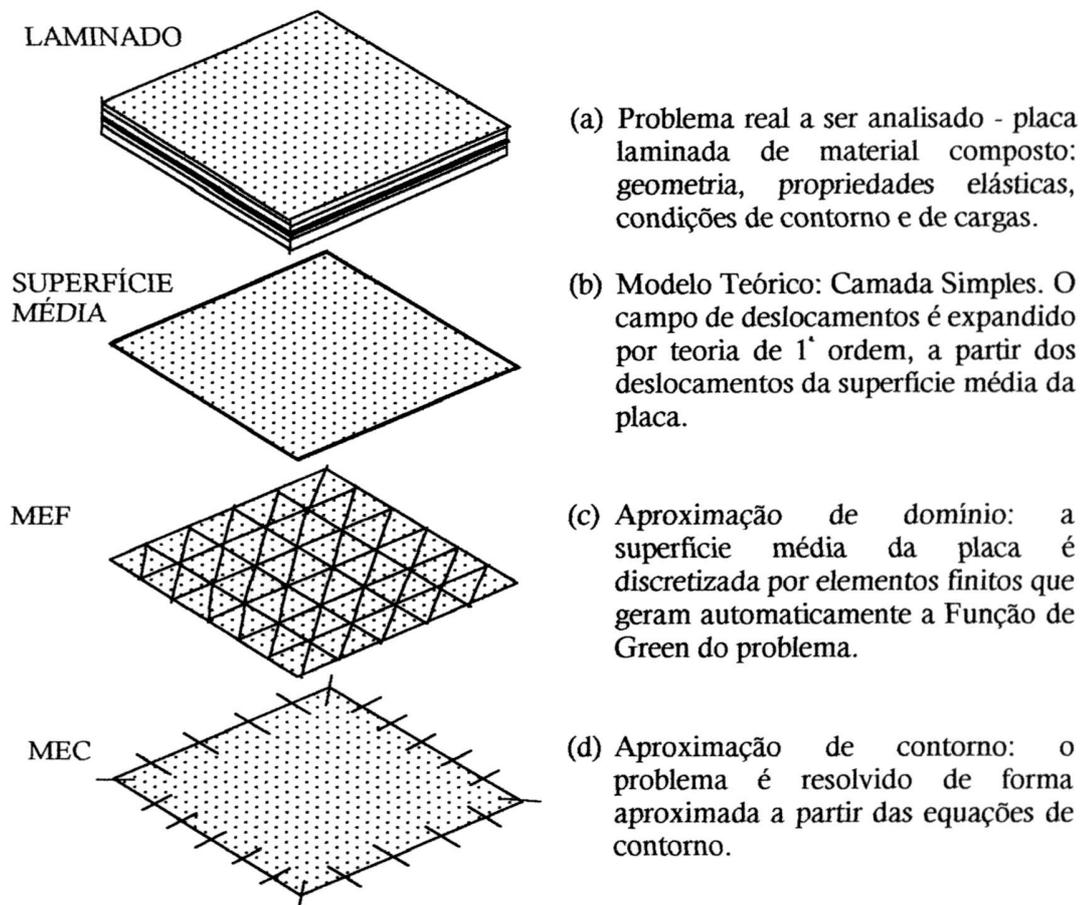


Figura 6.1 - Etapas de solução do problema de uma placa laminada pelo MMFGL [Machado (2001)]

No MMFGL, as matrizes do sistema de equações integrais são determinadas diretamente sem o conhecimento explícito da Função de Green. O MMFGL utiliza elementos finitos no domínio para gerarem, na base do espaço por eles formado, projeções discretas da Função de Green, correspondentes a soluções fundamentais, que serão posteriormente empregadas no sistema de equações integrais associado a discretização no contorno pelo Método dos Elementos de Contorno. Assim, as soluções obtidas por este método são de contorno, mas a determinação das matrizes das Funções de Green está baseada no Método dos Elementos Finitos. Desta forma, justifica-se abordar apenas as questões relativas ao Método dos Elementos Finitos no problema de dano. Isto é feito somando-se o vetor de dano ao vetor de forças

aplicadas e será discutido a seguir.

### 6.3 Desenvolvimento do Modelo de Dano por Elementos Finitos

A formulação das equações diferenciais governantes para um laminado composto com dano segue o mesmo procedimento do que o usado para a formulação para um laminado composto sem nenhum dano. A diferença entre as duas formulações torna-se aparente quando as equações constitutivas são examinadas. Através da incorporação das variáveis internas de estado nas equações constitutivas, o efeito da formação da trinca na matriz em lâminas individuais pode ser modelado. O desenvolvimento de um modelo de dano tem sido muito bem documentado em várias publicações [Allen *et al.* (1987)], [Buie (1988)], [Allen (1994)], [Lim (1999)]. Portanto, somente algumas considerações serão feitas para a formulação do problema de dano por trincas transversais.

Como já comentado anteriormente, os efeitos das trincas são introduzidos nas equações constitutivas através de uma modificação das restrições termodinâmicas localizadas no problema. Assim, a energia livre de Helmholtz é alterada para conter os efeitos mecânicos da formação de trincas na matriz. Tendo-se examinado o procedimento para determinação das variáveis internas de estado no capítulo anterior, tratam-se estas variáveis como já conhecidas no desenvolvimento da formulação por elementos finitos. Assim, somente os deslocamentos nas equações são entidades desconhecidas.

Utiliza-se para formulação das equações em elementos finitos para laminados compostos com trincas transversais a Teoria Clássica de Placas Laminadas, já que o problema analisado não apresenta flexão, sendo assim, um caso particular da Teoria de Primeira Ordem. Primeiramente, substituem-se as expressões (4.53) e (4.54) nas equações de equilíbrio [Villaça e Tabora Garcia (1996)]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = p_x^a \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = p_y^a \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = p_z^a \quad (6.3)$$

onde  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$ ,  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$  são as tensões resultantes definidas nas equações (3.35) e (3.36) e,  $p_x^a$ ,  $p_y^a$ ,  $p_z^a$  são elementos do vetor força de corpo aplicados.

Mais explicitamente, as equações (4.53) e (4.54) podem ser re-escritas como:

$$\begin{aligned} N_x = & A_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_x^0 + A_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_y^0 + A_{16}\boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 + B_{11}\boldsymbol{\kappa}_x + B_{12}\boldsymbol{\kappa}_y + B_{16}\boldsymbol{\kappa}_{xy} - \\ & - \sum_{k=1}^N \left\{ \bar{Q}_{11}\boldsymbol{\alpha}_{xx} + \bar{Q}_{12}\boldsymbol{\alpha}_{yy} + \bar{Q}_{16}\boldsymbol{\alpha}_{xy} \right\}_k (z_k - z_{k-1}) \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} N_y = & A_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_x^0 + A_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_y^0 + A_{26}\boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 + B_{12}\boldsymbol{\kappa}_x + B_{22}\boldsymbol{\kappa}_y + B_{26}\boldsymbol{\kappa}_{xy} - \\ & - \sum_{k=1}^N \left\{ \bar{Q}_{12}\boldsymbol{\alpha}_{xx} + \bar{Q}_{22}\boldsymbol{\alpha}_{yy} + \bar{Q}_{26}\boldsymbol{\alpha}_{xy} \right\}_k (z_k - z_{k-1}) \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} N_{xy} = & A_{16}\boldsymbol{\varepsilon}_x^0 + A_{26}\boldsymbol{\varepsilon}_y^0 + A_{66}\boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 + B_{16}\boldsymbol{\kappa}_x + B_{26}\boldsymbol{\kappa}_y + B_{66}\boldsymbol{\kappa}_{xy} - \\ & - \sum_{k=1}^N \left\{ \bar{Q}_{16}\boldsymbol{\alpha}_{xx} + \bar{Q}_{26}\boldsymbol{\alpha}_{yy} + \bar{Q}_{66}\boldsymbol{\alpha}_{xy} \right\}_k (z_k - z_{k-1}) \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} M_x = & B_{11}\boldsymbol{\varepsilon}_x^0 + B_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_y^0 + B_{16}\boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 + D_{11}\boldsymbol{\kappa}_x + D_{12}\boldsymbol{\kappa}_y + D_{16}\boldsymbol{\kappa}_{xy} - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\{ \bar{Q}_{11}\boldsymbol{\alpha}_{xx} + \bar{Q}_{12}\boldsymbol{\alpha}_{yy} + \bar{Q}_{16}\boldsymbol{\alpha}_{xy} \right\}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} M_y = & B_{12}\boldsymbol{\varepsilon}_x^0 + B_{22}\boldsymbol{\varepsilon}_y^0 + B_{26}\boldsymbol{\gamma}_{xy}^0 + D_{12}\boldsymbol{\kappa}_x + D_{22}\boldsymbol{\kappa}_y + D_{26}\boldsymbol{\kappa}_{xy} - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \left\{ \bar{Q}_{12}\boldsymbol{\alpha}_{xx} + \bar{Q}_{22}\boldsymbol{\alpha}_{yy} + \bar{Q}_{26}\boldsymbol{\alpha}_{xy} \right\}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \end{aligned} \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}
 M_{xy} = & B_{16}\varepsilon_x^0 + B_{26}\varepsilon_y^0 + B_{66}\gamma_{xy}^0 + D_{16}\kappa_x + D_{26}\kappa_y + D_{66}\kappa_{xy} - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{16}\alpha_{xx} + \bar{Q}_{26}\alpha_{yy} + \bar{Q}_{66}\alpha_{xy} \}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)
 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Substituindo-se as equações (6.4) a (6.6) em (6.1), têm-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} (A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + A_{16}\gamma_{xy}^0 + B_{11}\kappa_x + B_{12}\kappa_y + B_{16}\kappa_{xy}) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{11}\alpha_{xx} + \bar{Q}_{12}\alpha_{yy} + \bar{Q}_{16}\alpha_{xy} \}_k (z_k - z_{k-1}) + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} (A_{16}\varepsilon_x^0 + A_{26}\varepsilon_y^0 + A_{66}\gamma_{xy}^0 + B_{16}\kappa_x + B_{26}\kappa_y + B_{66}\kappa_{xy}) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial y} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{16}\alpha_{xx} + \bar{Q}_{26}\alpha_{yy} + \bar{Q}_{66}\alpha_{xy} \}_k (z_k - z_{k-1}) = p_x^a
 \end{aligned} \quad (6.10)$$

Utilizando-se as relações deformação-deslocamento apresentadas na equação (3.31), onde  $u^0$ ,  $v^0$  e  $w^0$  representam o deslocamento na superfície média da placa laminada, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_{11} \frac{\partial u^0}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial v^0}{\partial y} + A_{16} \left( \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) - \left( B_{11} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \right) \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_{16} \frac{\partial u^0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v^0}{\partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) - \left( B_{16} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \right) \right] - \\
 & - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{11}\alpha_{xx} + \bar{Q}_{12}\alpha_{yy} + \bar{Q}_{16}\alpha_{xy} \}_k (z_k - z_{k-1}) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial y} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{16}\alpha_{xx} + \bar{Q}_{26}\alpha_{yy} + \bar{Q}_{66}\alpha_{xy} \}_k (z_k - z_{k-1}) = p_x^a
 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Da mesma forma, substituindo-se as equações (6.4) a (6.9) em (6.2) e (6.3) e utilizando-se das relações deformação-deslocamento (3.31), encontram-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[ A_{16} \frac{\partial u^0}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial v^0}{\partial y} + A_{66} \left( \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) - \left( B_{16} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \right) \right] + \\
 & + \frac{\partial}{\partial y} \left[ A_{12} \frac{\partial u^0}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial v^0}{\partial y} + A_{26} \left( \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) - \left( B_{12} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \right) \right] - \\
 & - \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{16} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{26} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{66} \alpha_{xy} \}_k (z_k - z_{k-1}) - \\
 & - \frac{\partial}{\partial y} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{12} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{22} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{26} \alpha_{xy} \}_k (z_k - z_{k-1}) = p_y^a
 \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ B_{11} \frac{\partial u^0}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial v^0}{\partial y} + B_{16} \left( \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) - \left( D_{11} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \right) \right] + \\
 & + 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[ B_{16} \frac{\partial u^0}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial v^0}{\partial y} + B_{66} \left( \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) - \left( D_{16} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \right) \right] + \\
 & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left[ B_{12} \frac{\partial u^0}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial v^0}{\partial y} + B_{26} \left( \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right) - \left( D_{12} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y} \right) \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{11} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{12} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{16} \alpha_{xy} \}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) - \\
 & - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{16} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{26} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{66} \alpha_{xy} \}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) - \\
 & - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{12} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{22} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{26} \alpha_{xy} \}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = p_z^a
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Dentro do desenvolvimento dos sistemas de equações para o método dos elementos finitos [Huebner *et al.* (1995)], definem-se as seguintes funções de interpolação para os deslocamentos ( $u^0$ ,  $v^0$ ,  $w^0$ ) – deslocamentos no plano médio:

$$u^0 = \sum_{j=1}^M \psi_j u_j \tag{6.14}$$

$$v^0 = \sum_{j=1}^M \psi_j v_j \quad (6.15)$$

$$w^0 = \sum_{j=1}^M \phi_j w_j \quad (6.16)$$

onde  $(u_j, v_j, w_j)$  são os deslocamentos nodais,  $\psi_j$  e  $\phi_j$  são as funções de interpolação e  $M$  é o número de nós em um elemento. Note que aqui  $\psi_j$  é uma função de interpolação, diferentemente do capítulo 5, onde  $\psi$  é o perfil de abertura da trinca.

Utilizando-se o cálculo variacional, a forma fraca pode ser construída com as variações  $\delta u = \psi_j$ ,  $\delta v = \psi_j$  e  $\delta w = \phi_j$ .

Assim, integrando-se as equações diferenciais governantes (6.11), (6.12) e (6.13) sobre o domínio de cada elemento  $\Omega^e$  e utilizando-se das variações virtuais descritas anteriormente, obtêm-se:

$$\int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \left( A_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \left( A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right] u_j + \\ & + \left[ \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \left( A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \left( A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right] v_j + \end{aligned} \right\} dx dy - \\
 + \left[ \begin{aligned} & - \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \left( B_{11} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \right) - \\ & - \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \left( B_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right] w_j \\
 - \int_{\Omega^e} \left[ \begin{aligned} & \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{11} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{12} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{16} \alpha_{xy} \}_k (z_k - z_{k-1}) \right) - \\ & - \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \left( \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{16} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{26} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{66} \alpha_{xy} \}_k (z_k - z_{k-1}) \right) \end{aligned} \right] dx dy = \int_{\Omega^e} \psi_j p_x^a dx dy$$

(6.17)

$$\int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \left( A_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \left( A_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right] u_j + \\ & + \left[ \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \left( A_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \left( A_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + A_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right] v_j + \end{aligned} \right\} dx dy - \\
 + \int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ -\frac{\partial \psi_j}{\partial x} \left( B_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + B_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \right) - \right. \\ & \left. -\frac{\partial \psi_j}{\partial y} \left( B_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + B_{22} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \right) \right] w_j \end{aligned} \right\} dx dy - \\
 - \int_{\Omega^e} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial \psi_j}{\partial x} \left( \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{16} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{26} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{66} \alpha_{xy} \}_k (z_k - z_{k-1}) \right) - \\ & - \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \left( \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{12} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{22} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{26} \alpha_{xy} \}_k (z_k - z_{k-1}) \right) \end{aligned} \right\} dx dy = \int_{\Omega^e} \psi_j p_y^a dx dy$$

(6.18)

$$\int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^M \left\{ \begin{aligned} & \left[ \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \left( B_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \left( B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \left( B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right] u_j + \\ & + \left[ \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \left( B_{16} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + 2 \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \left( B_{66} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \left( B_{26} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + B_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right] v_j + \end{aligned} \right\} dx dy - \\
 + \left[ \begin{aligned} & - \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \left( D_{11} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \right) - \\ & - 2 \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \left( D_{16} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + D_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + 2D_{66} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \right) - \\ & - \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \left( D_{12} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \right] w_j \\
 - \int_{\Omega^e} \left[ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} \left( \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{11} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{12} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{16} \alpha_{xy} \}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) - \\ & - \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y} \left( \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{16} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{26} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{66} \alpha_{xy} \}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) - \\ & - \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} \left( \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{12} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{22} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{26} \alpha_{xy} \}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \right) \end{aligned} \right] dx dy = \int_{\Omega^e} \phi_j p_z^a dx dy
 \end{aligned}
 \tag{6.19}$$

As expressões resultantes podem ser expressas pelo seguinte sistema de equações algébricas para um elemento finito típico:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{26} \\ K_{61} & K_{62} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^a \\ F_2^a \\ F_6^a \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1^d \\ F_2^d \\ F_6^d \end{Bmatrix} \quad (6.20)$$

sendo que  $K_{ij}$  são os elementos usuais da matriz rigidez,  $(d_x, d_y, d_z)$  são os elementos do vetor deslocamento,  $\{F^a\}$  e  $\{F^d\}$  são o vetor força aplicada e o vetor força de dano. Estes vetores podem ser expressos por:

$$F_1^a = \int_{\Omega^e} p_x^a \psi_j dx dy \quad (6.21)$$

$$F_2^a = \int_{\Omega^e} p_y^a \psi_j dx dy \quad (6.22)$$

$$F_6^a = \int_{\Omega^e} p_z^a \phi_j dx dy \quad (6.23)$$

$$F_1^d = \int_{\Omega^e} p_x^d \psi_j dx dy \quad (6.24)$$

$$F_2^d = \int_{\Omega^e} p_y^d \psi_j dx dy \quad (6.25)$$

$$F_6^d = \int_{\Omega^e} p_z^d \phi_j dx dy \quad (6.26)$$

Nas expressões acima,  $\{p_x^d, p_y^d, p_z^d\}$  são definidos como:

$$p_x^d = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{11} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{12} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{16} \alpha_{xy} \}_k + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{16} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{26} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{66} \alpha_{xy} \}_k \end{array} \right] (z_k - z_{k-1}) \quad (6.27)$$

$$p_y^d = \left[ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{16} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{26} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{66} \alpha_{xy} \}_k + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{12} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{22} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{26} \alpha_{xy} \}_k \end{array} \right] (z_k - z_{k-1}) \quad (6.28)$$

$$p_z^d = \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{11} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{12} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{16} \alpha_{xy} \}_k + \\ + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{16} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{26} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{66} \alpha_{xy} \}_k + \\ + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_{k=1}^N \{ \bar{Q}_{12} \alpha_{xx} + \bar{Q}_{22} \alpha_{yy} + \bar{Q}_{26} \alpha_{xy} \}_k \end{array} \right] (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (6.29)$$

Assim, tendo-se como conhecidas as variáveis internas de estado  $\alpha_{kl}$  e substituindo-se as expressões (6.27) a (6.29) nas expressões (6.24) a (6.26), encontra-se o vetor força de dano  $\{F_k^d\}$ , sendo que os coeficientes  $\bar{Q}_{ij}$  são os elementos da matriz rigidez no sistema.

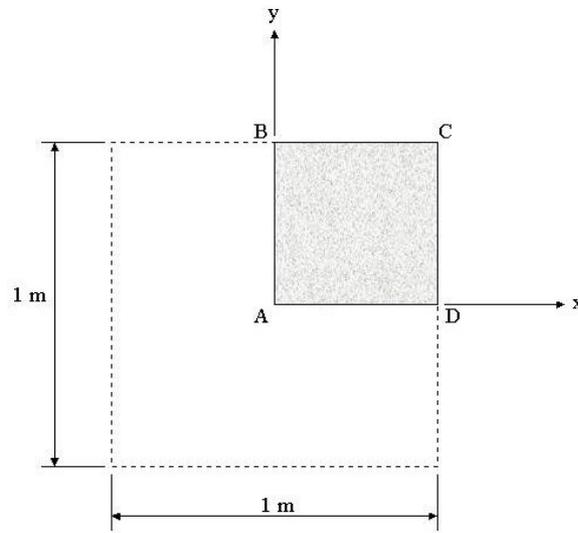
O sistema de equações dado em (6.20) pode ser utilizado com qualquer tipo de elemento cujas funções de forma são conhecidas. Para o desenvolvimento do modelo deste trabalho, foram considerados elementos finitos lagrangeanos quadráticos de nove nós na discretização do domínio e de três nós para o contorno. Um fluxograma da rotina utilizada para cálculo do dano em estruturas laminadas compostas pode ser visto no apêndice C.

## Capítulo 7

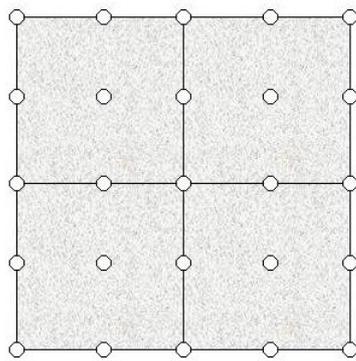
# Resultados

### 7.1 Introdução

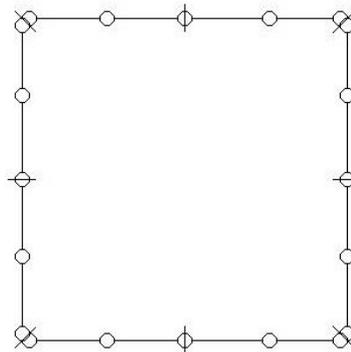
Este capítulo visa apresentar algumas aplicações do modelo proposto nos capítulos anteriores para placas laminadas com dano por trincas transversais na matriz. Para este fim, utiliza-se o Método Modificado da Função de Green Local, aplicado anteriormente por Machado (1992) em problemas de placas laminadas, mas aqui alterado considerando-se o dano. Todas as análises foram executadas através de uma Teoria de Primeira Ordem, apesar de não ser considerado esforços de flexão, usando-se um modelo de camada simples baseado em deslocamentos. Tendo em vista tratar-se de um problema não-linear, onde a quantidade de elementos exerce forte influência, utilizam-se variados números de elementos finitos e de elementos de contorno para estudo do processo de convergência. São considerados apenas elementos finitos lagrangeanos quadráticos de 9 nós na discretização do domínio, enquanto que, no contorno são empregados elementos de 3 nós. Desta forma, como no Método dos Elementos de Contorno, nós duplos são inseridos em pontos de descontinuidade da normal e/ou de condições de contorno. Como exemplo, é mostrado na Figura 7.1, o caso de uma placa quadrada, onde  $\frac{1}{4}$  do seu domínio é discretizado por quatro elementos finitos e oito elementos de contorno. Os resultados das análises são comparados com os modelos de Tay e Lim, e resultados experimentais.



(a) Placa: 1/4 discretizado



(b) Malha de Elementos Finitos



(c) Malha de Elementos de Contorno

Figura 7.1 – Exemplo de discretização de uma placa, aproveitando-se as condições de simetria e utilizando-se malha 2x2 (4 elementos finitos e 8 elementos de contorno)

Em todas as aplicações, utilizou-se:

- Relações tensão-deformação para lâminas ortotrópicas finas sob estado plano de tensão;
- Chapa quadrada de dimensões: 1m de largura por 1m de comprimento (vide Figura 7.2);

- Carregamento uniaxial de tração na direção “x”, de 5000 N (vide Figura 7.2);
- A título de comparação, duas formulações para o cálculo das variáveis internas de estado:  $\rho$  e  $\theta$ , equações (5.19) e (5.20);
- Devido às condições de simetria, apenas  $\frac{1}{4}$  da placa é discretizado (simetria nos bordos AB e AD da Figura 7.1 em relação aos eixos “y” e “x”, respectivamente);
- Os materiais empregados assim como suas propriedades estão listadas na Tabela 7.1;
- Os resultados para perda de rigidez foram adquiridos de forma indireta. Assim, buscou-se na análise o resultado do nó de maior deslocamento  $u_x$ , conforme Figura 7.2, e dividiu-se pelo deslocamento  $u_{0x}$  da placa não-danificada para se encontrar a razão  $u_x/u_{0x}$  que, aqui é tratada como perda de rigidez.
- No gráfico de convergência, admitiu-se o valor de deslocamento  $u_x$  para placa laminada danificada com distância entre trincas  $l$ , de 5mm;

Tabela 7.1 – Relação dos materiais utilizados - Highsmith e Reifsnider (1982)

<b>Material</b>	<b><math>E_{11}</math> (GPa)</b>	<b><math>E_{22}</math> (GPa)</b>	<b><math>G_{12}</math> (GPa)</b>	<b><math>G_{23}</math> (GPa)</b>	<b><math>\nu_{12}</math></b>
<b>Grafite / Epóxi (Gr/Ep)</b>	<b>142,00</b>	<b>9,85</b>	<b>4,48</b>	<b>3,37</b>	<b>0,3</b>
<b>Vidro / Epóxi (Gl/Ep)</b>	<b>41,70</b>	<b>13,00</b>	<b>3,40</b>	<b>3,40</b>	<b>0,3</b>

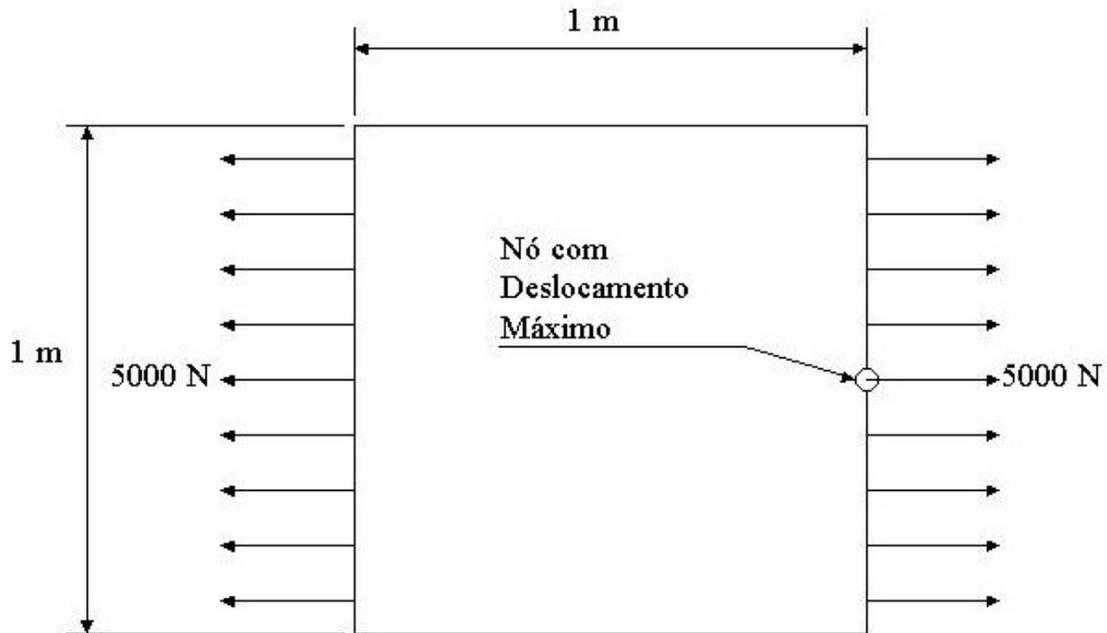


Figura 7.2 – Dimensões e condições de carregamento para o problema proposto de placas laminadas com trincas transversais na matriz

## 7.2 Aplicações

### 7.2.1 Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ]_s$

As propriedades complementares para a análise deste laminado estão descritas na Tabela 7.2.

Tabela 7.2 – Propriedades Geométricas para o laminado  $[0^\circ/90^\circ]_s$

Geometria	Material	Valor (mm)
Espessura total do laminado ( $t_l$ )	Gr/Ep	0,508
	Gl/Ep	0,812
Espessura de cada lâmina ( $t_l$ )	Gr/Ep	0,127
	Gl/Ep	0,203

São utilizadas malhas com 1, 4, 9, 16, 25 e 36 elementos finitos no domínio para examinar a convergência dos resultados e as formulações por  $\rho$  e  $\theta$  para o cálculo das variáveis internas de estado.

Para diversos valores de densidade de trinca  $\zeta$ , são determinados a perda de rigidez do laminado e comparados com resultados obtidos pelas análises numéricas de Tay e Lim [1996] e resultados experimentais reportados por Highsmith e Reifsnider [1982]. Os valores da perda de rigidez da análise executada para Gr/Ep, malha 6x6 e de Lim e Tay estão descritos nas Tabelas 7.3 e 7.4.

Tabela 7.3 – Laminado Gr/Ep [0°/90°]<sub>s</sub>: valores de perda de rigidez pela formulação  $\rho$

Densidade de trinca (mm <sup>-1</sup> )	Perda de Rigidez (%)	
	Resultados Malha 6x6	Lim e Tay
$\zeta$		
<b>0,0</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>
<b>0,2</b>	<b>99,61</b>	<b>99,60</b>
<b>0,4</b>	<b>99,22</b>	<b>99,14</b>
<b>0,6</b>	<b>98,84</b>	<b>98,78</b>
<b>0,8</b>	<b>98,53</b>	<b>98,39</b>
<b>1,0</b>	<b>98,22</b>	<b>98,05</b>
<b>1,2</b>	<b>97,91</b>	<b>97,75</b>
<b>1,4</b>	<b>97,67</b>	<b>97,40</b>
<b>1,6</b>	<b>97,44</b>	<b>97,20</b>
<b>1,8</b>	<b>97,21</b>	<b>96,95</b>

Tabela 7.4 – Laminado Gr/Ep [0°/90°]<sub>s</sub>: valores de perda de rigidez pela formulação  $\theta$ 

Densidade de trinca (mm-1)	Perda de Rigidez (%)	
	Resultados Malha 6x6	Lim e Tay
$\zeta$		
0,0	100,00	100,00
0,2	99,69	99,60
0,4	99,30	99,14
0,6	98,99	98,78
0,8	98,68	98,39
1,0	98,37	98,05
1,2	98,06	97,75
1,4	97,75	97,40
1,6	97,36	97,20
1,8	97,05	96,95

Nas Figuras 7.3 e 7.4, são apresentados os resultados de perda de rigidez para o material Gr/Ep pela formulação por  $\rho$  e por  $\theta$ . Os resultados para as duas formulações demonstraram uma boa aproximação com os trabalhos de Lim e Tay e os trabalhos experimentais de Highsmith e Reifsnider [1982] já com a malha 4x4 (16 elementos) e confirmando-se com o refino até a malha 6x6 (36 elementos).

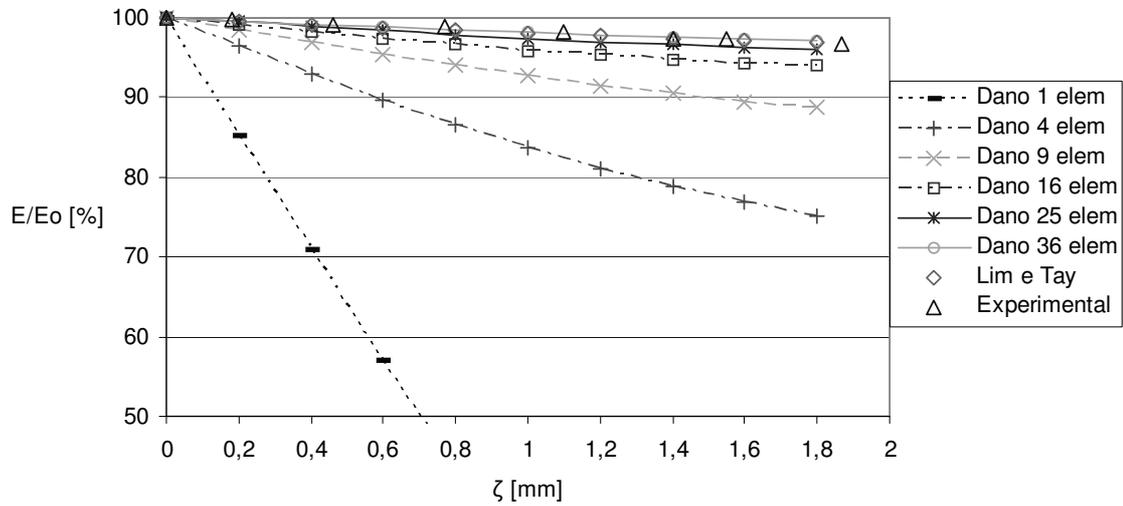


Figura 7.3 – Perda de rigidez E/Eo versus densidade de trinca  $\zeta$ , laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ]_s$  – formulação por  $\rho$

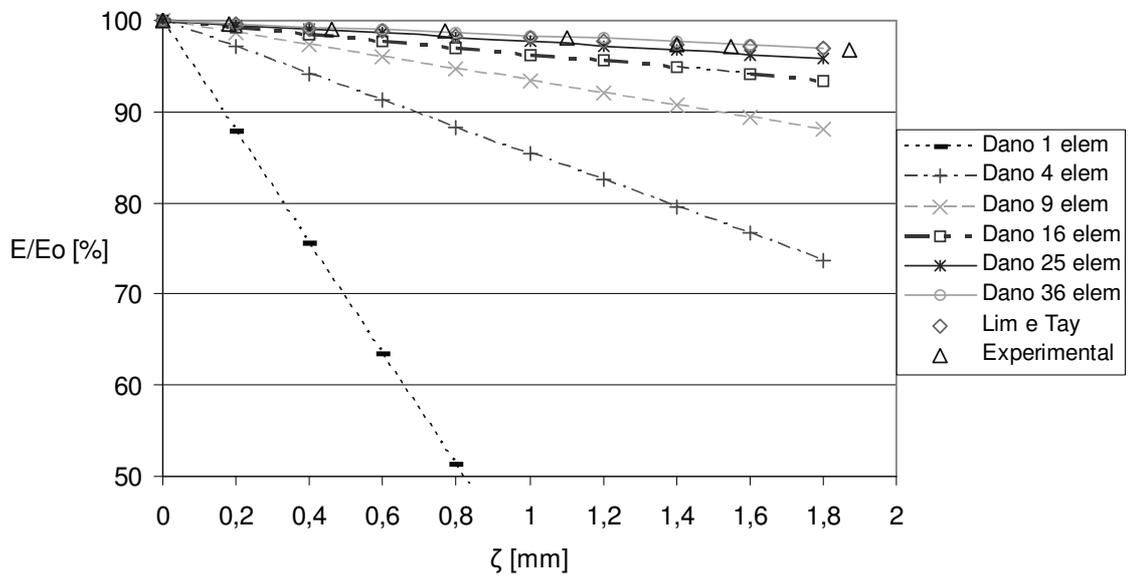


Figura 7.4 – Perda de rigidez E/Eo versus densidade de trinca  $\zeta$ , laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ]_s$  – formulação por  $\theta$

Verifica-se, conforme mostrado nas Figuras 7.5 e 7.6, a forte influência da característica não-linear do dano somado com a convergência do método dos elementos finitos. Análises executadas por Machado (1992) em laminados similares sem dano já apresentavam boa convergência com malha 1x1. Com dano, valores para a malha 1x1 (1 elemento) indicam uma certa discrepância, tornando-se necessário o refino. Já com a malha 2x2 (4 elementos) a curva indica uma situação de convergência que se confirma com uma maior quantidade de elementos. Observe-se, através da Figura 7.6, que a formulação por  $\theta$  demonstra ser levemente mais dependente do refino do que a por  $\rho$ .

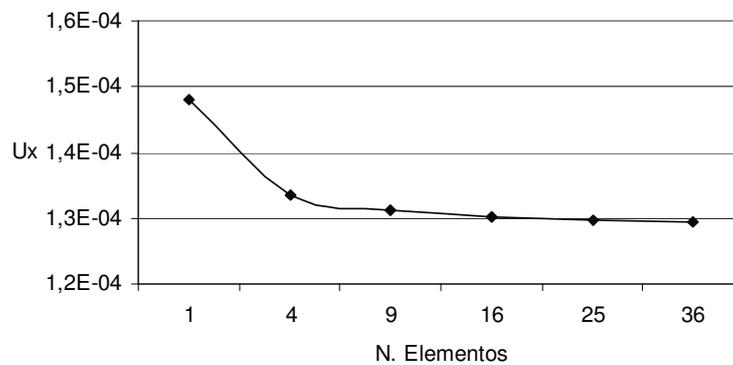


Figura 7.5 – Laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ]_s$  – formulação por  $\rho$ : verificação da convergência com  $u_x$  em milímetros

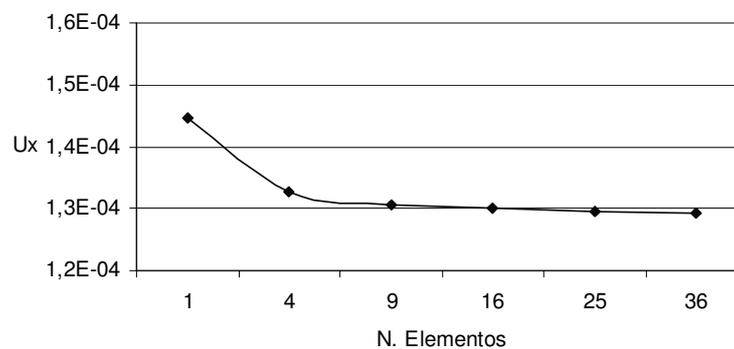


Figura 7.6 – Laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ]_s$  – formulação por  $\theta$ : verificação da convergência com  $u_x$  em milímetros

Os valores das análises executadas para GI/Ep, malha 4x4 – formulação  $\rho$  e malha 5x5 – formulação  $\theta$  e de Lim e Tay estão descritos nas Tabelas 7.5 e 7.6.

Tabela 7.5 – Laminado GI/Ep  $[0^\circ/90^\circ]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação  $\rho$

Densidade de trinca ( $\text{mm}^{-1}$ )	Perda de Rigidez (%)	
	Resultados malha 4x4	Lim e Tay
$\zeta$		
<b>0,0</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>
<b>0,2</b>	<b>95,30</b>	<b>96,25</b>
<b>0,4</b>	<b>91,58</b>	<b>93,13</b>
<b>0,6</b>	<b>88,63</b>	<b>90,63</b>
<b>0,8</b>	<b>86,35</b>	<b>88,75</b>
<b>1,0</b>	<b>84,60</b>	<b>87,50</b>
<b>1,2</b>	<b>83,35</b>	<b>86,25</b>
<b>1,4</b>	<b>82,45</b>	<b>85,00</b>
<b>1,6</b>	<b>81,87</b>	<b>84,38</b>
<b>1,8</b>	<b>81,51</b>	<b>83,75</b>

Tabela 7.6 – Laminado GI/Ep [0°/90°]<sub>s</sub>: valores de perda de rigidez pela formulação  $\theta$ 

Densidade de trinca (mm <sup>-1</sup> )	Perda de Rigidez (%)	
	Resultados malha 5x5	Lim e Tay
$\zeta$		
<b>0,0</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>
<b>0,2</b>	<b>98,03</b>	<b>96,25</b>
<b>0,4</b>	<b>96,06</b>	<b>93,13</b>
<b>0,6</b>	<b>94,09</b>	<b>90,63</b>
<b>0,8</b>	<b>92,12</b>	<b>88,75</b>
<b>1,0</b>	<b>90,15</b>	<b>87,50</b>
<b>1,2</b>	<b>88,17</b>	<b>86,25</b>
<b>1,4</b>	<b>86,20</b>	<b>85,00</b>
<b>1,6</b>	<b>84,23</b>	<b>84,38</b>
<b>1,8</b>	<b>82,25</b>	<b>83,75</b>

Nas Figuras 7.7 e 7.8, são apresentados os resultados de perda de rigidez para o material GI/Ep pela formulação por  $\rho$  e por  $\theta$ . Para o caso deste laminado, utilizando-se da formulação por  $\rho$ , os resultados apresentaram uma leve tendência de enrijecimento, em relação aos trabalhos de Tay e Lim, para as malhas acima de 16 elementos e boa aproximação com os resultados experimentais. De qualquer forma, para densidades de trinca  $\zeta < 1 \text{ mm}^{-1}$ , os valores da perda de rigidez se mantêm bem próximos para as malhas 4x4, 5x5 e 6x6. Observa-se que nos trabalhos de Lim e Tay os resultados fornecidos não são detalhados sobre qual malha de elementos finitos foram executadas as análises e nem qual o carregamento aplicado. Nota-se que pela formulação  $\theta$ , a curva adquire um formato descendente e com o refino da malha, os resultados aproximam-se dos relatos por Highsmith e Reifsnider

em seus trabalhos experimentais.

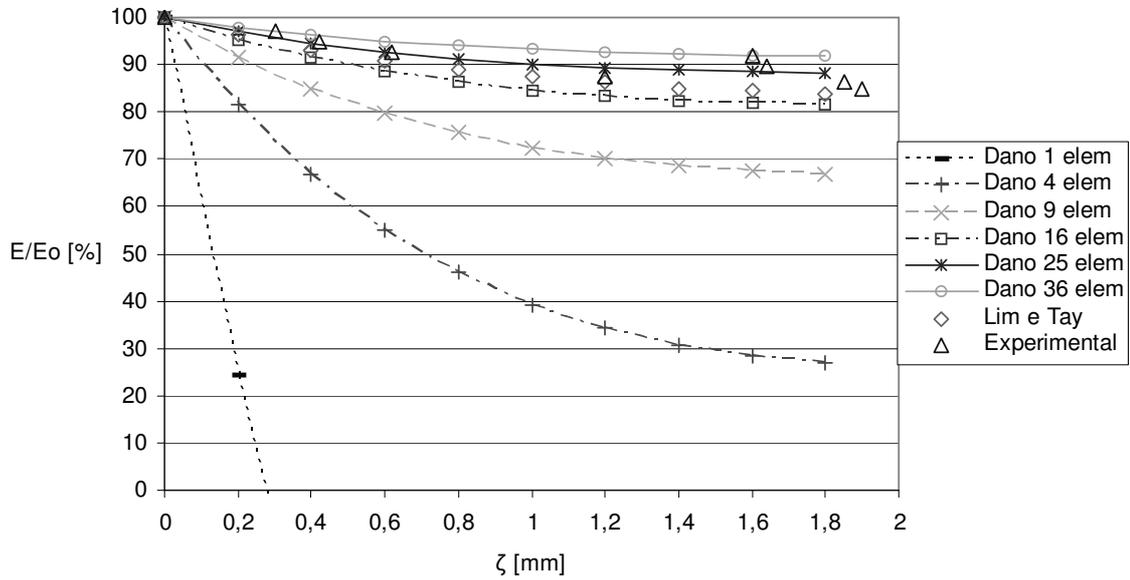


Figura 7.7 – Perda de rigidez  $E/E_0$  versus densidade de trinca  $\zeta$ , laminado Gl/Ep  $[0^\circ/90^\circ]_s$  – formulação por  $\rho$

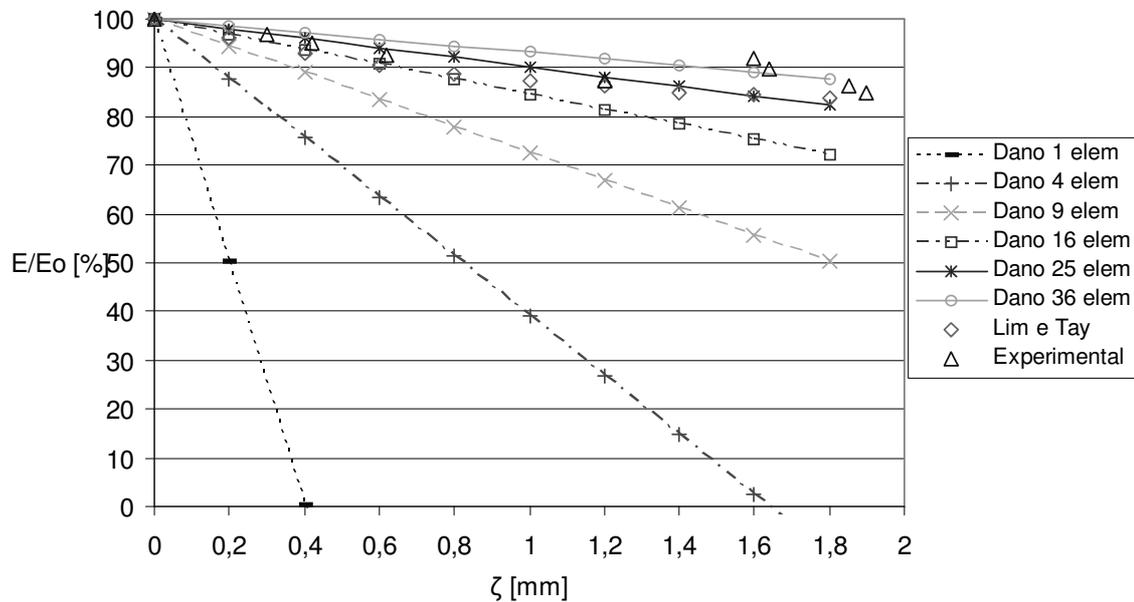


Figura 7.8 – Perda de rigidez  $E/E_0$  versus densidade de trinca  $\zeta$ , laminado Gl/Ep  $[0^\circ/90^\circ]_s$  – formulação por  $\theta$

Através das Figuras 7.9 e 7.10, pode-se notar uma maior dependência do tipo de material GI/Ep à quantidade de elementos finitos do que para o material Gr/Ep. Neste caso, para a formulação por  $\theta$ , a convergência é levemente pior do que para a formulação por  $\rho$ .

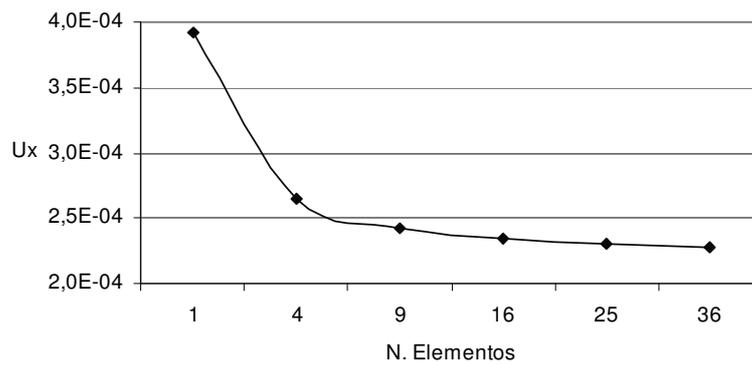


Figura 7.9 – Laminado GI/Ep  $[0^\circ/90^\circ]_s$  – formulação por  $\rho$ : verificação da convergência com  $u_x$  em milímetros

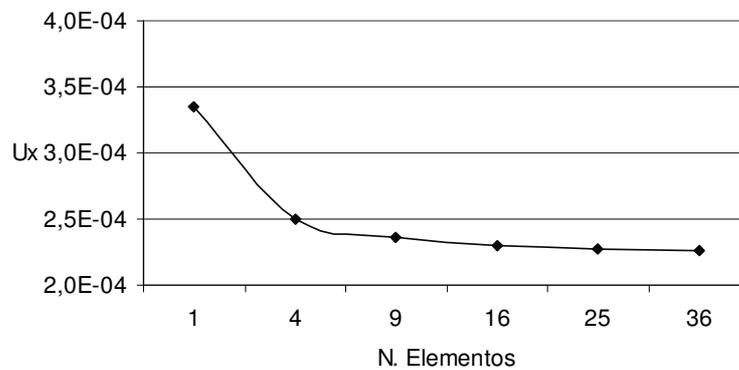


Figura 7.10 – Laminado GI/Ep  $[0^\circ/90^\circ]_s$  – formulação por  $\theta$ : verificação da convergência com  $u_x$  em milímetros

### 7.2.2 Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ_2]_s$

As propriedades complementares para a análise deste laminado estão descritas na Tabela 7.7.

Tabela 7.7 – Propriedades Geométricas para o laminado  $[0^\circ/90^\circ_2]_s$

<b>Geometria</b>	<b>Material</b>	<b>Valor (mm)</b>
<b>Espessura total do laminado (<math>t_t</math>)</b>	<b>Gr/Ep</b>	<b>0,762</b>
<b>Espessura de cada lâmina (<math>t_l</math>)</b>	<b>Gr/Ep</b>	<b>0,127</b>

São utilizadas malhas com 1, 4, 9, 16, 25 e 36 elementos finitos no domínio para examinar a convergência dos resultados e as formulações por  $\rho$  e  $\theta$  para o cálculo das variáveis internas de estado.

Para diversos valores de densidade de trinca  $\zeta$ , são determinados a perda de rigidez do laminado e comparados com resultados obtidos pelas análises numéricas de Tay e Lim [1996] e resultados experimentais reportados por Highsmith e Reifsnider (1982). Os valores da análise executada para Gr/Ep, malha 4x4 – formulação  $\rho$  e malha 5x5 – formulação  $\theta$  e de Lim e Tay estão descritos nas Tabelas 7.8 e 7.9.

Tabela 7.8 – Laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ]_s$ ; valores de perda de rigidez pela formulação  $\rho$ 

Densidade de trinca ( $\text{mm}^{-1}$ )	Perda de Rigidez (%)	
	Resultados malha 4x4	Lim e Tay
$\zeta$		
<b>0,0</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>
<b>0,2</b>	<b>98,27</b>	<b>98,75</b>
<b>0,4</b>	<b>96,63</b>	<b>97,45</b>
<b>0,6</b>	<b>95,07</b>	<b>96,20</b>
<b>0,8</b>	<b>93,75</b>	<b>95,00</b>
<b>1,0</b>	<b>92,60</b>	<b>94,25</b>
<b>1,2</b>	<b>91,69</b>	<b>93,50</b>
<b>1,4</b>	<b>90,95</b>	<b>92,95</b>
<b>1,6</b>	<b>90,38</b>	<b>92,00</b>
<b>1,7</b>	<b>90,21</b>	<b>91,75</b>
<b>1,8</b>	<b>89,97</b>	<b>91,50</b>

Tabela 7.9 – Laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ_2]_s$ ; valores de perda de rigidez pela formulação  $\theta$ 

Densidade de trinca ( $\text{mm}^{-1}$ )	Perda de Rigidez (%)	
	Resultados malha 5x5	Lim e Tay
$\zeta$		
<b>0,0</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>
<b>0,2</b>	<b>99,18</b>	<b>98,75</b>
<b>0,4</b>	<b>98,36</b>	<b>97,45</b>
<b>0,6</b>	<b>97,53</b>	<b>96,20</b>
<b>0,8</b>	<b>96,63</b>	<b>95,00</b>
<b>1,0</b>	<b>95,81</b>	<b>94,25</b>
<b>1,2</b>	<b>94,98</b>	<b>93,50</b>
<b>1,4</b>	<b>94,16</b>	<b>92,95</b>
<b>1,6</b>	<b>93,26</b>	<b>92,00</b>
<b>1,7</b>	<b>93,01</b>	<b>91,75</b>
<b>1,8</b>	<b>92,43</b>	<b>91,50</b>

Nas Figuras 7.11 e 7.12, são apresentados os resultados de perda de rigidez para o material Gr/Ep pela formulação por  $\rho$  e por  $\theta$ . Verifica-se que os resultados estão próximos dos fornecidos pelos outros estudos tanto para  $\rho$  quanto para  $\theta$ . É interessante observar que entre as formulações por  $\rho$  e por  $\theta$  existe uma diferença no deslocamento  $u(\rho)_{5 \times 5}$  e  $u(\theta)_{5 \times 5}$  de 1,23% para malha 5x5 e a diferença entre  $u(\rho)_{6 \times 6}$  e  $u(\theta)_{6 \times 6}$  cai para 0,86% na malha 6x6. Também, comparando-se os resultados de deslocamento deste laminado com o  $[0^\circ/90^\circ]_s$  (vide Figuras 7.3 e 7.11), nota-se que apesar do laminado  $[0^\circ/90^\circ_2]_s$  apresentar um valor de deslocamento menor, com o aumento do dano, seu comportamento é pior do que para o laminado  $[0^\circ/90^\circ]_s$ .

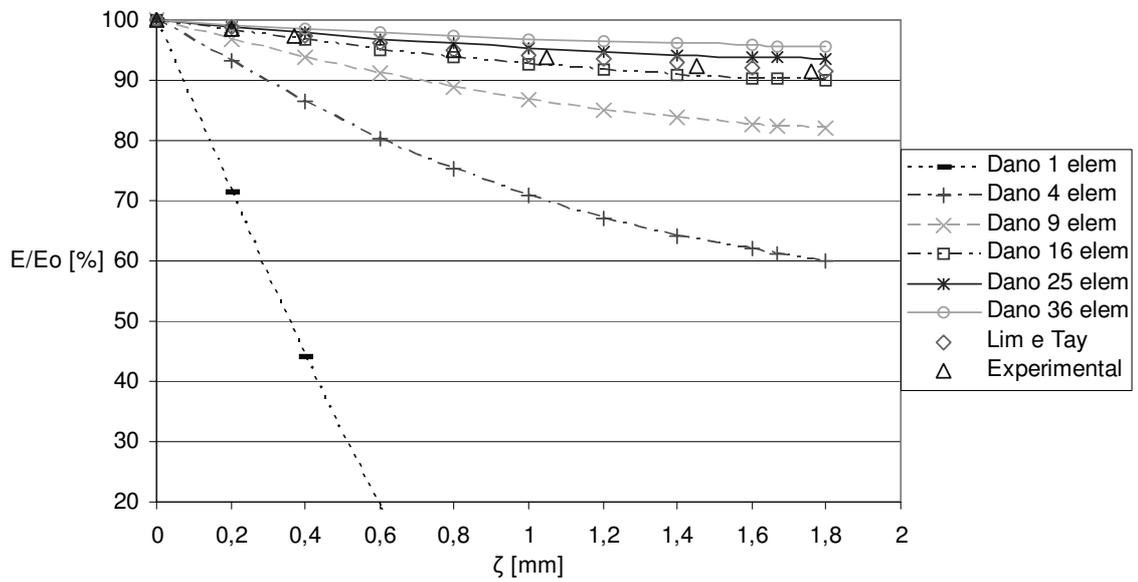


Figura 7.11 – Perda de rigidez E/Eo versus densidade de trinca  $\zeta$ , laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ_2]_s$  – formulação por  $\rho$

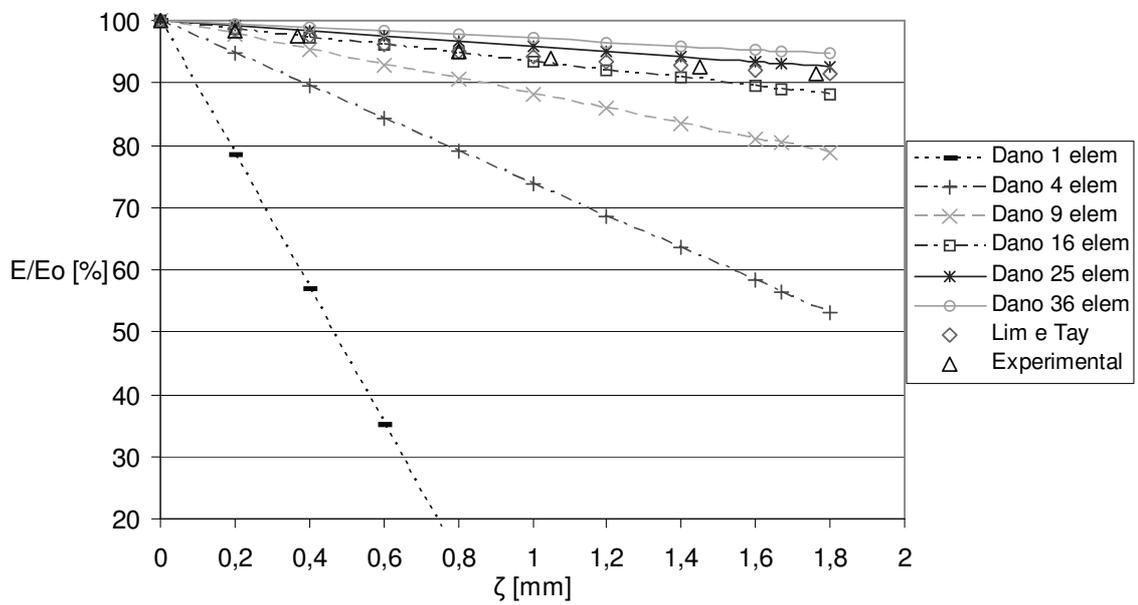


Figura 7.12 – Perda de rigidez E/Eo versus densidade de trinca  $\zeta$ , laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ_2]_s$  – formulação por  $\theta$

Quanto à convergência, como mostrado nas Figuras 7.13 e 7.14, as duas formulações apresentam curvas similares, com diferenças de 0,33% entre as malhas 5x5 e 6x6 na formulação de  $\rho$  e 0,24% entre as malhas 5x5 e 6x6 na formulação de  $\theta$ .

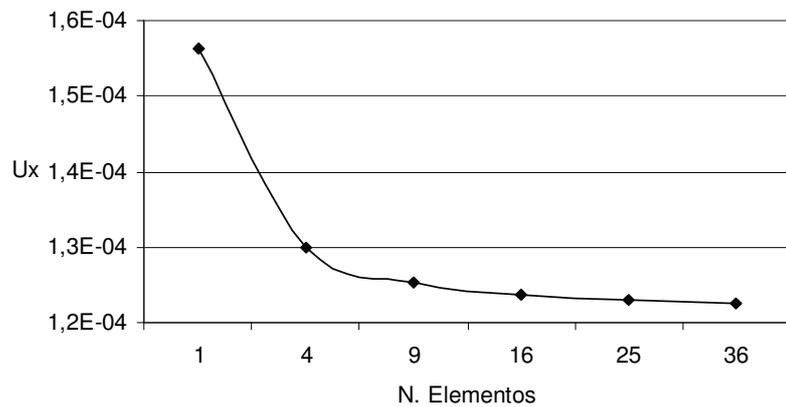


Figura 7.13 – Laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ_2]_s$  – formulação por  $\rho$ : verificação da convergência com  $u_x$  em milímetros

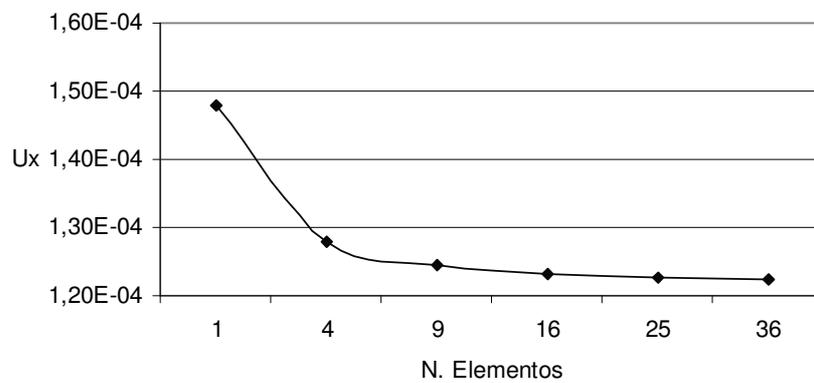


Figura 7.14 – Laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ_2]_s$  – formulação por  $\theta$ : verificação da convergência com  $u_x$  em milímetros

### 7.2.3 Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ_3]_s$

As propriedades complementares para a análise deste laminado estão descritas na Tabela 7.10.

Tabela 7.10 – Propriedades Geométricas para o laminado  $[0^\circ/90^\circ_3]_s$

<b>Geometria</b>	<b>Material</b>	<b>Valor (mm)</b>
<b>Espessura total do laminado (<math>t_l</math>)</b>	<b>Gr/Ep</b>	<b>1,016</b>
	<b>Gl/Ep</b>	<b>1,624</b>
<b>Espessura de cada lâmina (<math>t_l</math>)</b>	<b>Gr/Ep</b>	<b>0,127</b>
	<b>Gl/Ep</b>	<b>0,203</b>

Tabela 7.11 – Laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação  $\rho$

<b>Densidade de trinca (<math>\text{mm}^{-1}</math>)</b>	<b>Perda de Rigidez (%)</b>	
	<b>Resultados malha 4x4</b>	<b>Lim e Tay</b>
<b><math>\zeta</math></b>		
<b>0,0</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>
<b>0,1</b>	<b>98,69</b>	<b>98,80</b>
<b>0,2</b>	<b>97,37</b>	<b>97,30</b>
<b>0,3</b>	<b>96,15</b>	<b>95,95</b>
<b>0,4</b>	<b>95,01</b>	<b>94,50</b>
<b>0,5</b>	<b>93,96</b>	<b>93,55</b>
<b>0,6</b>	<b>92,99</b>	<b>92,20</b>
<b>0,7</b>	<b>91,94</b>	<b>91,15</b>
<b>0,8</b>	<b>91,59</b>	<b>90,10</b>

São utilizadas malhas com 1, 4, 9, 16, 25 e 36 elementos finitos no domínio para examinar a convergência dos resultados e as formulações por  $\rho$  e  $\theta$  para o cálculo das variáveis internas de estado.

Para diversos valores de densidade de trinca  $\zeta$ , são determinados a perda de rigidez do laminado e comparados com resultados obtidos pelas análises numéricas de Tay e Lim [1996] e resultados experimentais reportados por Highsmith e Reifsnider (1982). Os valores da análise executada para Gr/Ep, malha 4x4 para as duas formulações -  $\rho$  e  $\theta$ , e de Lim e Tay estão descritos nas Tabelas 7.11 e 7.12.

Tabela 7.12 – Laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação  $\theta$

Densidade de trinca ( $\text{mm}^{-1}$ )	Perda de Rigidez (%)	
	Resultados malha 4x4	Lim e Tay
$\zeta$		
<b>0,0</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>
<b>0,1</b>	<b>99,04</b>	<b>98,80</b>
<b>0,2</b>	<b>98,07</b>	<b>97,30</b>
<b>0,3</b>	<b>97,20</b>	<b>95,95</b>
<b>0,4</b>	<b>96,23</b>	<b>94,50</b>
<b>0,5</b>	<b>95,36</b>	<b>93,55</b>
<b>0,6</b>	<b>94,40</b>	<b>92,20</b>
<b>0,7</b>	<b>93,35</b>	<b>91,15</b>
<b>0,8</b>	<b>92,82</b>	<b>90,10</b>

Nas Figuras 7.15 e 7.16, são apresentados os resultados de perda de rigidez para o material Gr/Ep pela formulação por  $\rho$  e por  $\theta$ . Observa-se que os resultados para a formulação por  $\rho$  estão mais próximos dos trabalhos comparados para a malha 4x4 e, com o refino, os resultados assumem valores superiores aos dos

encontrados na literatura. Vale lembrar que o dano foi incorporado nas equações constitutivas via um vetor de dano que é somado ao vetor de forças aplicadas desenvolvido inicialmente para o Método dos Elementos Finitos. Assim, atualmente não foi encontrada nenhuma referência do desenvolvimento do dano junto ao Método Modificado da Função de Green Local. Para a formulação por  $\theta$ , os valores experimentais ficam abaixo das curvas que convergem em valores um pouco superiores. Já com os resultados obtidos por Lim e Tay, as malhas apresentam melhor adaptação, com diferenças menores.

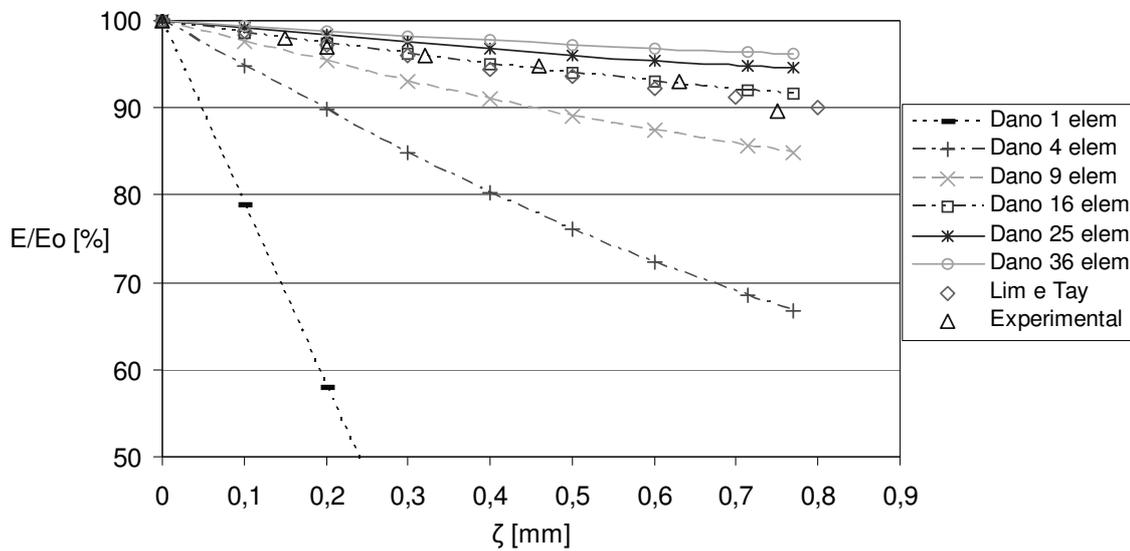


Figura 7.15 – Perda de rigidez  $E/E_0$  versus densidade de trinca  $\zeta$ , laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ_3]_s$  – formulação por  $\rho$

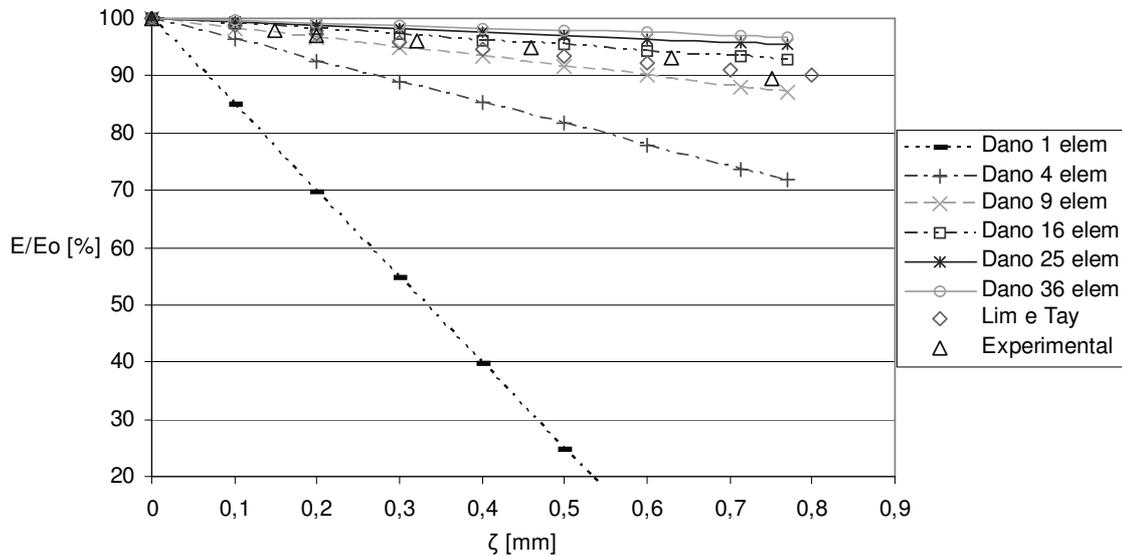


Figura 7.16 – Perda de rigidez  $E/E_0$  versus densidade de trinca  $\zeta$ , laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ_3]_s$  – formulação por  $\theta$

Analisando-se as Figuras 7.17 e 7.18, percebe-se uma melhor tendência da formulação  $\theta$  para a convergência. Observa-se que para a formulação  $\rho$ , o cálculo das variáveis internas de estado são efetuados através de uma equação exponencial que relaciona a densidade de trinca normalizada,  $\rho$ , com o máximo deslocamento da ponta da trinca normalizado,  $\delta$ , enquanto que para a formulação por  $\theta$ , esta relação se dá através da razão de espessuras do laminado,  $\theta$ , com o máximo deslocamento da ponta da trinca normalizado,  $\delta$ . A diferença entre as malhas 5x5 e 6x6 para a formulação  $\rho$  é de 0,43% enquanto que para a formulação  $\theta$  é de 0,35% e entre as formulações  $\rho$  e  $\theta$ , para a malha 6x6, é de 0,35%.

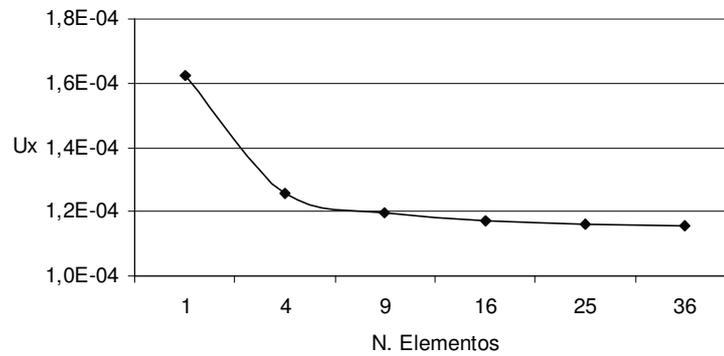


Figura 7.17 – Laminado Gr/Ep [0°/90°2]s – formulação por  $\rho$ : verificação da convergência com  $u_x$  em milímetros

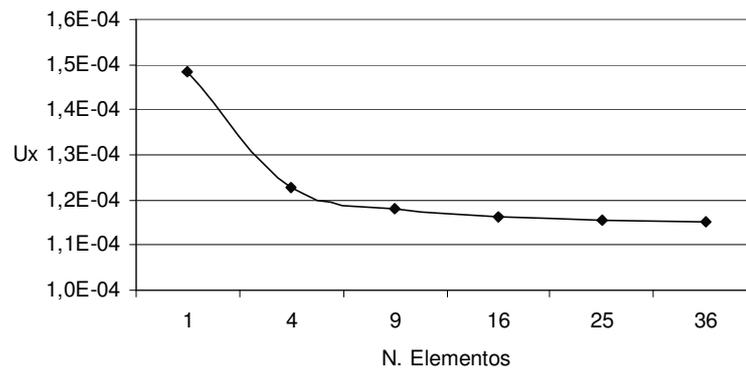


Figura 7.18 – Laminado Gr/Ep [0°/90°2]s – formulação por  $\theta$ : verificação da convergência com  $u_x$  em milímetros

Os valores da análise executada para Gl/Ep, malhas 3x3 e 4x4 para as duas formulações -  $\rho$  e  $\theta$ , e de Lim e Tay estão descritos nas Tabelas 7.13 e 7.14.

Tabela 7.13 – Laminado GI/Ep [0°/90°<sub>3</sub>]<sub>s</sub>: valores de perda de rigidez pela formulação  $\rho$ 

Densidade de trinca (mm <sup>-1</sup> )	Perda de Rigidez (%)			
	$\zeta$	Resultados malha 3x3	Resultados malha 4x4	Lim e Tay
0,0		100,00	100,00	100,00
0,1		87,53	93,01	90,00
0,2		77,64	87,47	83,13
0,3		69,79	83,11	75,63
0,4		63,79	79,75	73,75
0,5		59,23	77,18	71,25
0,6		55,87	75,26	70,63
0,7		53,23	73,81	62,50
0,8		52,31	73,35	61,25

Tabela 7.14 – Laminado Gl/Ep  $[0^\circ/90^\circ_3]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação  $\theta$ 

Densidade de trinca ( $\text{mm}^{-1}$ )	Perda de Rigidez (%)			
	$\zeta$	Resultados malha 3x3	Resultados malha 4x4	Lim e Tay
	0,0	100,00	100,00	100,00
	0,1	94,48	96,90	90,00
	0,2	88,98	93,80	83,13
	0,3	83,48	90,77	75,63
	0,4	77,99	87,66	73,75
	0,5	72,49	84,63	71,25
	0,6	66,99	81,53	70,63
	0,7	62,72	78,03	62,50
	0,8	57,68	76,32	61,25

Nas Figuras 7.19 e 7.20, são apresentados os resultados de perda de rigidez para o material Gl/Ep pela formulação por  $\rho$  e por  $\theta$ . Nota-se uma diferença do comportamento das curvas entre as formulações: por  $\theta$ , a curva decresce mais suave e por  $\rho$ , existe uma tendência de uma queda mais brusca. Os resultados com a formulação tanto de  $\rho$  quanto de  $\theta$  mostram que a solução numérica apresenta um enrijecimento para a placa danificada. É importante observar que a perda de precisão pode estar relacionada com o dano aplicado ao Método Modificado da Função de Green Local, que não existe nenhuma informação sobre a malha de elementos finitos, sobre os carregamentos utilizados nos trabalhos de Lim e Tay e que os resultados de perda de rigidez mostrados abaixo foram adquiridos de forma indireta, através dos deslocamentos. Vale mencionar aqui que as análises foram

executadas com 3, 4, 5, 6, 7 e 8 pontos de integração não alterando-se os valores máximos encontrados.

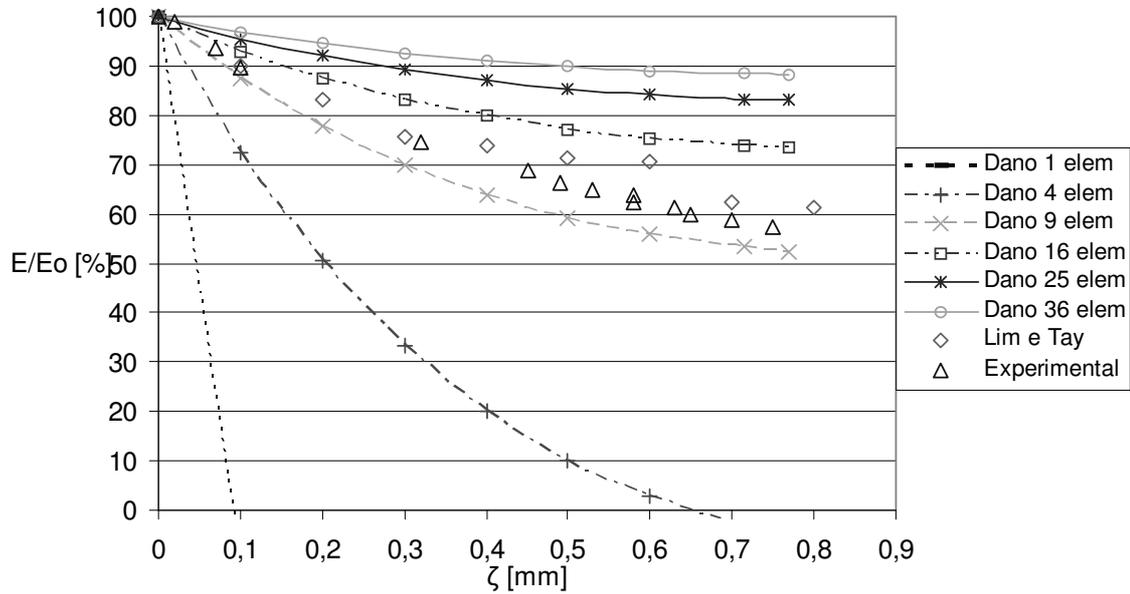


Figura 7.19 – Perda de rigidez  $E/E_0$  versus densidade de trinca  $\zeta$ , laminado  $G_l/E_p [0^\circ/90^\circ_3]_s$  – formulação por  $\rho$

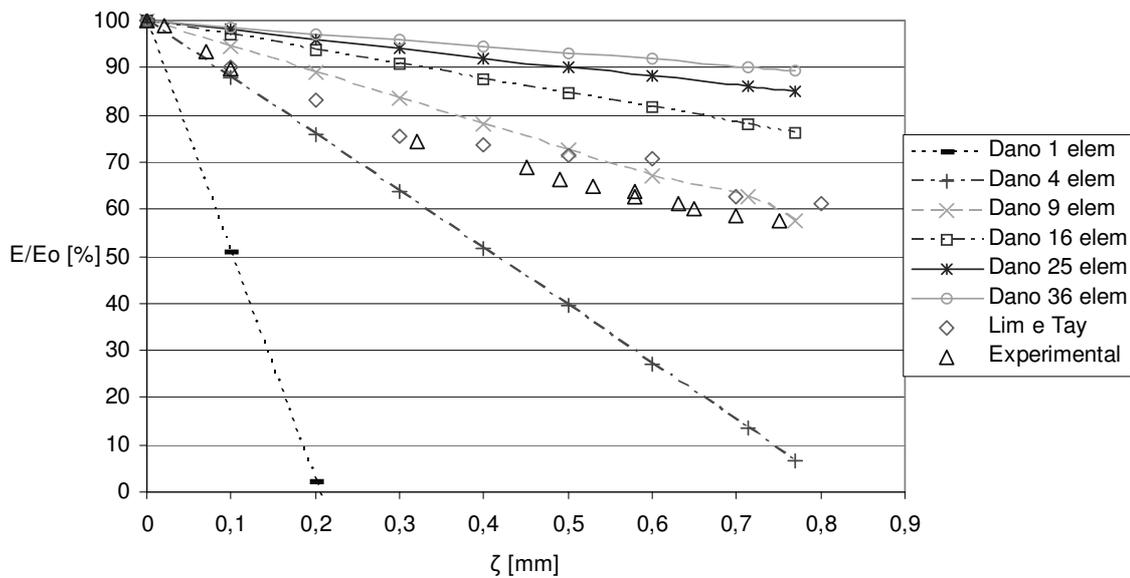


Figura 7.20 – Perda de rigidez  $E/E_0$  versus densidade de trinca  $\zeta$ , laminado  $G_l/E_p [0^\circ/90^\circ_3]_s$  – formulação por  $\theta$

Quanto à convergência, mostradas nas Figuras 7.21 e 7.22, ressalta-se que os resultados para o laminado Gr/Ep são mais fortemente influenciados ao refino da malha. As diferenças entre as malhas 5x5 e 6x6, para as formulações  $\rho$  e  $\theta$ , são 2,26% e 1,14%, respectivamente.

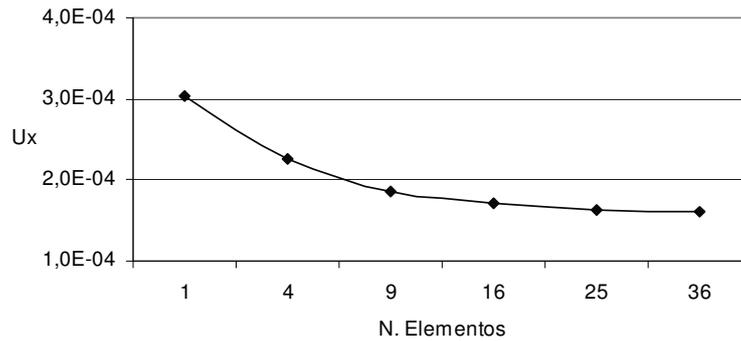


Figura 7.21 – Laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ_2]_s$  – formulação por  $\rho$ : verificação da convergência com  $u_x$  em milímetros

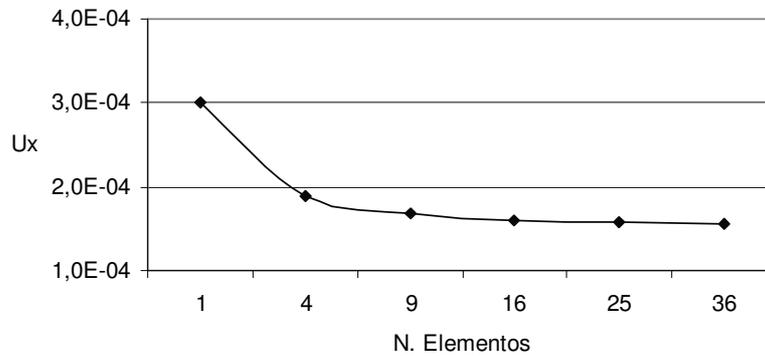


Figura 7.22 – Laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ_2]_s$  – formulação por  $\theta$ : verificação da convergência com  $u_x$  em milímetros

### 7.2.4 Placa Laminada $[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$

As propriedades complementares para a análise deste laminado estão descritas na Tabela 7.15.

Tabela 7.15 – Propriedades Geométricas para o laminado  $[0^\circ/90^\circ]_s$

<b>Geometria</b>	<b>Material</b>	<b>Valor (mm)</b>
<b>Espessura total do laminado (<math>t_l</math>)</b>	<b>Gr/Ep</b>	<b>1,016</b>
<b>Espessura de cada lâmina (<math>t_l</math>)</b>	<b>Gr/Ep</b>	<b>0,127</b>

Somente a malha de 36 elementos finitos no domínio é utilizada e a formulação por  $\rho$ .

Tabela 7.16 Valores dos deslocamentos encontrados na análises da malha 6x6 para os laminados  $[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$  e  $[0^\circ/90^\circ]_3s$

$\zeta$	<b>Deslocamento máximo - laminado <math>[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s</math></b>	<b>Deslocamento máximo - laminado <math>[0^\circ/90^\circ]_3s</math></b>
<b>0,0</b>	<b><math>0,9073 \times 10^{-4}</math></b>	<b><math>1,142 \times 10^{-4}</math></b>
<b>0,1</b>	<b><math>0,9130 \times 10^{-4}</math></b>	<b><math>1,149 \times 10^{-4}</math></b>
<b>0,2</b>	<b><math>0,9185 \times 10^{-4}</math></b>	<b><math>1,156 \times 10^{-4}</math></b>
<b>0,3</b>	<b><math>0,9238 \times 10^{-4}</math></b>	<b><math>1,162 \times 10^{-4}</math></b>
<b>0,4</b>	<b><math>0,9288 \times 10^{-4}</math></b>	<b><math>1,168 \times 10^{-4}</math></b>
<b>0,5</b>	<b><math>0,9334 \times 10^{-4}</math></b>	<b><math>1,173 \times 10^{-4}</math></b>
<b>0,6</b>	<b><math>0,9375 \times 10^{-4}</math></b>	<b><math>1,178 \times 10^{-4}</math></b>
<b>0,7</b>	<b><math>0,9417 \times 10^{-4}</math></b>	<b><math>1,183 \times 10^{-4}</math></b>
<b>0,8</b>	<b><math>0,9436 \times 10^{-4}</math></b>	<b><math>1,185 \times 10^{-4}</math></b>

Para diversos valores de densidade de trinca  $\zeta$ , são determinados a perda de rigidez do laminado. Os valores da análise executada para Gr/Ep, malha 6x6 e de  $[0^\circ/90^\circ_3]_s$  estão descritos na Tabela 7.17 e, para efeito de comparação, apresenta-se na Tabela 7.16 os valores de deslocamento destes laminados.

Tabela 7.17 – Laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$ : valores de perda de rigidez pela formulação  $\rho$

Densidade de trinca ( $\text{mm}^{-1}$ )	Perda de Rigidez (%)	
	Resultados malha 6x6	Resultados malha 6x6 $[0^\circ/90^\circ_3]_s$
$\zeta$		
<b>0,0</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>
<b>0,1</b>	<b>99,37</b>	<b>99,39</b>
<b>0,2</b>	<b>98,77</b>	<b>98,77</b>
<b>0,3</b>	<b>98,18</b>	<b>98,25</b>
<b>0,4</b>	<b>97,63</b>	<b>97,72</b>
<b>0,5</b>	<b>97,12</b>	<b>97,29</b>
<b>0,6</b>	<b>96,67</b>	<b>96,85</b>
<b>0,7</b>	<b>96,21</b>	<b>96,41</b>
<b>0,8</b>	<b>96,00</b>	<b>96,23</b>

Na Figura 7.23, são apresentados os resultados de perda de rigidez para o material Gr/Ep. A título de comparação, o laminado  $[0^\circ/90^\circ_3]_s$  também está mostrado. Verifica-se uma semelhança entre as duas curvas até a densidade de trinca  $\zeta = 0,4 \text{ mm}^{-1}$ , sendo que, após este valor, o laminado  $[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$  decresce mais rapidamente, perdendo maior rigidez. Nota-se, também, que com esta configuração de lâminas, o laminado sem dano  $[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$  possui uma maior rigidez, já que seu deslocamento máximo na direção “x” ( $u_x = 0,09073 \text{ mm}$ ) é bem

menor do que para o  $[0^\circ/90^\circ_3]_s$  ( $u_x = 0,1142$  mm).

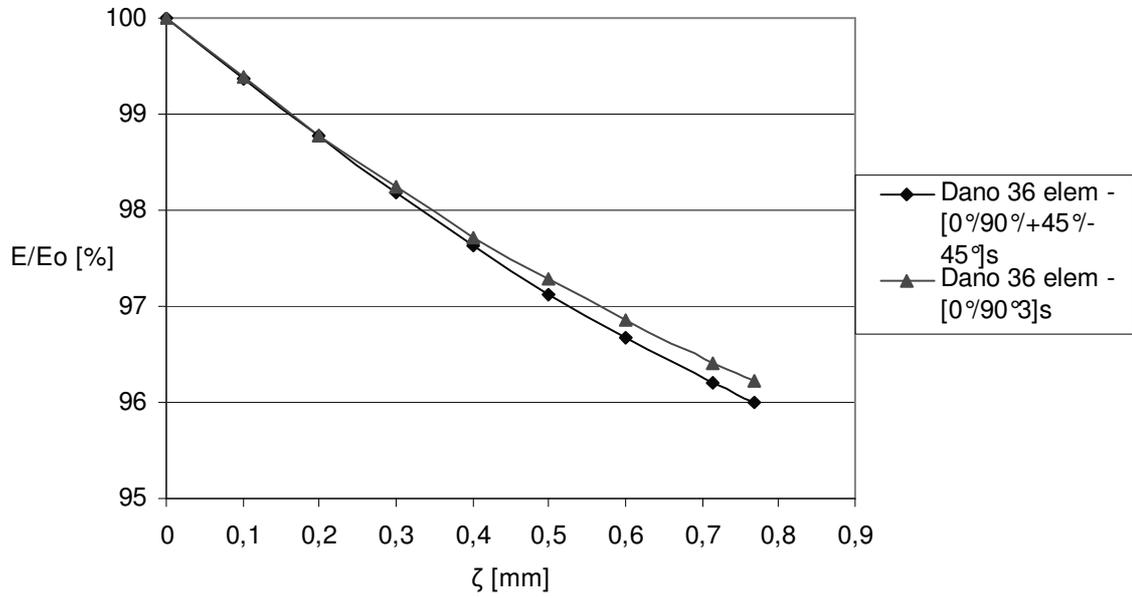


Figura 7.23 – Perda de rigidez  $E/E_0$  versus densidade de trinca  $\zeta$ , laminado Gr/Ep  $[0^\circ/90^\circ/+45^\circ/-45^\circ]_s$

## Capítulo 8

### Conclusões

O presente trabalho teve como objetivo aplicar a Teoria de Dano em Meios Contínuos, proposta inicialmente por Kachanov (1958), desenvolvida por Allen (1988) para o caso de placas laminadas de materiais compostos e aplicadas por Lim e Tay (1996) para laminados compostos contendo trincas transversais na matriz, descrevendo-se o comportamento de tais estruturas através de sua perda de rigidez. A Teoria de Dano proposta considera os mecanismos de dano por trincas transversais incluindo-se as variáveis internas de estado dentro das relações constitutivas baseadas na Mecânica do Dano em Meios Contínuos. Considerando-se as restrições da Segunda Lei da Termodinâmica, equações constitutivas para os sólidos com dano interno foram derivadas e desenvolvidas para compor as relações constitutivas para lâminas ortotrópicas com trincas transversais e conseqüentemente, para o laminado composto. Vale lembrar que estas relações constitutivas para laminados compostos com trincas transversais são obtidas pela imposição de simetria para materiais ortotrópicos, condições de estado plano de tensão e adoção da Teoria Clássica de Placas Laminadas sendo que para as análises deste trabalho os carregamentos foram restritos aos esforços axiais e não se analisou a flexão.

Para esta aplicação, utilizou-se o Método Modificado da Função de Green Local, aplicado anteriormente por Machado (1992) a diversas configurações de placas laminadas de materiais compostos, obtendo-se excelentes resultados para os

deslocamentos, desde o emprego de malhas grosseiras, para análises estáticas lineares (placas à flexão). Como comentado em seu trabalho, com o potencial deste método, novas aplicações seriam estendidas para placas laminadas compostas, sendo este trabalho, um exemplo desta aplicação, considerando-se dano por trincas transversais na matriz. Vale lembrar que este é o trabalho inaugural da inclusão do dano a este método, não se tendo conhecimento de outra aplicação na literatura atual. Interessantemente, nota-se que com a inclusão do dano, os resultados não são tão facilmente convergidos como no caso da placa laminada composta sem danificação. Isto pode ser explicado devido à natureza não-linear que o dano causa nas estruturas. Como o dano é modelado através da inclusão de um vetor de dano somado ao vetor de forças aplicadas, os componentes do vetor de dano trabalham como “forças ponderadas” aplicadas aos nós das malhas em questão (para este trabalho, malhas 1x1, 2x2, 3x3, 4x4, 5x5, 6x6).

Quanto ao cálculo das variáveis internas, procurou-se sua obtenção através da proposta apresentada por Lim e Tay (1996), sendo elas expressas como uma função linear do máximo deslocamento de abertura da trinca, a área de abertura da trinca e a densidade de trinca de lâminas danificadas com carregamento modo I. Assumindo-se relações geométricas entre os deslocamentos de abertura da trinca para modos I e III, pode-se derivar as variáveis internas de estado acopladas para carregamentos modo I e III. Para este caso, estas variáveis são expressas como funções não-lineares do máximo deslocamento de abertura da trinca  $u_2$ , a área de abertura da trinca  $C_a$  e a densidade de trincas  $\zeta$  em lâminas danificadas com carregamento modo I. Deste modo, para obter-se os valores de máximo deslocamento de abertura da trinca, utilizaram-se equações não-lineares relacionadas com a densidade de trinca normalizada,  $\rho$  e o parâmetro de restrição,  $\theta$ .

Tendo em vista a análise da perda de rigidez de diferentes configurações de placas laminadas de materiais compostos, os resultados são satisfatórios, com boa precisão mesmo com malhas grosseiras, comparando-se com métodos consagrados. Os resultados numéricos apresentam coerência na solução já que com o aumento da danificação diminui-se a rigidez. Também, os resultados conferem com outros autores, mas, para o caso de laminados  $G_l/E_p [0^\circ/90^\circ_3]_s$ , percebeu-se a tendência de convergência para uma solução mais rígida. Essas diferenças precisam ser melhor

investigadas e, como sugestão para trabalhos futuros, implementar-se um algoritmo em programas consagrados, como o Método dos Elementos Finitos já que esta técnica pode ser implementada em programas convencionais sem necessidade de alterações significativas. Vale mencionar que os resultados foram obtidos através de medição indireta da perda de rigidez considerando-se a proporcionalidade dos deslocamentos. Assim, novas formas de medição da perda de rigidez podem ser utilizadas como, por exemplo, deduzindo-se diretamente das equações constitutivas.

Por fim, muito ainda é requerido para se obter mecanismos de iniciação de trincas transversais em laminados genéricos. Muita pesquisa ainda é necessária para formular adequadamente todas as formas de manifestação do dano nas estruturas compostas. Assim, como sugestão para trabalhos futuros, esforços por flexão, estudos sobre a evolução do dano e critérios de evolução devem ser verificados. Inclusões de dano por delaminação e ruptura das fibras podem representar melhor uma configuração real de placas laminadas compostas. Também, aplicações mais complexas, onde tensões residuais e higró-térmicas possam ser consideradas.

## Referências Bibliográficas

1. Abdelal, G. F. - A Three-Phase Constitutive Model for MacroBrittle Fatigue Damage of Composites, PhD Thesis: College of Engineering and Mineral Resources at West Virginia University, West Virginia (2000).
2. Allen, D. H., Harris, C. E. e Groves, S. E. - A Thermomechanical Constitutive Theory for Elastic Composites with Distributed Damage – Part I: Theoretical Development, *Int. J. Solids Struct.*, 23, (9), 1301-1318 (1987a).
3. Allen, D. H., Harris, C. E. e Groves, S. E. - A Thermomechanical Constitutive Theory for Elastic Composites with Distributed Damage – Part II: Application to Matrix Cracking in Laminated Composites, *Int. J. Solids Struct.*, 23, (9), 1319-1338 (1987b).
4. Allen, D. H.; Groves, S. E. e Harris, C. E. - A Cumulative Damage Model for Continuous Fiber Composite Laminates with Matrix Cracking and Interply Delaminations, *Composite Materials: Testing and Design (Eighth Conference)*, ASTM STP 972, J. D. Whitcomb, Ed., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 57-80 (1988).
5. Allen, D. H. - Damage Evolution in Laminates, *Damage Mechanics of Composite Materials*, R. Talreja ed., Elsevier Science B. V., chapter 3, 79-116 (1994).
6. Allen, D. H. e Searcy, C. R. - A Micromechanical Model for a Viscoelastic Cohesive Zone, *International Journal of Fracture*, 107, 159-176 (2001).
7. ANSYS 5.6.2 – Structural Design (2000).

8. Araújo, A. L.; Mota Soares, C. M.; Moreira de Freitas, M. J.; Pedersen, P. e Herskovits, J. - Combined Numerical-Experimental Model for the Identification of Mechanical Properties of Laminated Structures, *Composite Structures*, 50, 363-372 (2000).
9. Araújo dos Santos, J. V.; Mota Soares, C. M.; Mota Soares, C. A. e Pina, H. L. G. - Development of a Numerical Model for the Damage Identification on Composite Plate Structures, *Composite Structures*, 48, 59-65 (2000).
10. Aveston, J. e Kelly, A. - Theory of Multiple Fracture of Fibrous Composites, *Journal of Materials Science*, 8, 352-362 (1973).
11. Barbieri, Renato - Desenvolvimento e Aplicação do Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) para Problemas do Meio Contínuo, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina (1992).
12. Benabou, L.; Benseddiq, N. e Naït-Abdelaziz - Comparative Analysis of Damage at Interfaces of Composites, *Composites: Part B*, 33, 215-224 (2002).
13. Bolotin, V. V. - Delaminations in Composite Structures: Its Origin, Buckling, Growth and Stability, *Composites: Part B*, 27B, 129-145 (1996).
14. Buie, K. D. - A Finite Element Model for Laminated Composite Plates with Matrix Cracks and Delaminations, Master Thesis: College of Texas A&M University, December (1988).
15. Caiazzo, A. A. e Costanzo, F. - Modeling the Constitutive Behavior of Layered Composites with Evolving Cracks, *International Journal of Solids and Structures*, 38, 3469-3485 (2001).
16. Carrere, N.; Feyel, F.; Kruch, S.; Kanoute, P. e Chaboche, J. L. - New Advances on the Mechanical Multiscale Modelling of Non Linear Composites Based on Various Homogenization Methods, Fifth World Congress on Computational Mechanics, Vienna, Austria, July 7-12 (2002).
17. Coats, T. W.; Harris, C. E.; Lo, D. C. e Allen, D. H. - Progressive Damage Analysis of Laminated Composite (PDALC) - (A Computational Model Implemented in the NASA COMET Finite Element Code) Version 2.0,

- National Aeronautics and Space Administration, Langley Research Center, Hampton, Virginia, October (1998).
18. Costa Júnior, J. C. A. - Análise Numérica do Dano em Placas Espessas sob Fadiga de Baixo Ciclo, Tese: Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Outubro (1998).
  19. de Freitas, M.; Silva, A. e Reis, L. – Numerical Evaluation of Failure Mechanisms on Composite Specimens Subjected to Impact Loading, Composites: Part B, 31, 199-207 (2000).
  20. Dutta, B. K. e Kushwaha, H. S. – A Modified Damage Potential to Predict Crack Initiation: Theory and Experimental Verification, Engineering Fracture Mechanics, 71, 263-275 (2004).
  21. Dvorak G. J., Laws N. e Hejaki M. - Analysis of Progressive Matrix Cracking in Composite Laminates I. Thermoelastic Properties of a Ply with Cracks, Journal of Composite Materials, v19, p216-234 (1985).
  22. Dvorak, G. J. - Composite Materials: Inelastic Behavior, Damage, Fatigue and Fracture, International Journal of Solids and Structures, 37, 155-170 (2000).
  23. Edlund, U. e Volgers, P. - A Composite Ply Failure Model Based on Continuum Damage Mechanics, Composite Structures (2003).
  24. Fish, J.; Yu, Qing e Shek, K. - Computational damage Mechanics for Composite Materials Based on Mathematical Homogenization, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45, 1657-1679 (1999).
  25. Foulk, J. W.; Allen, D. H. e Helms, K. L. E. - Formulation of a Three Dimensional Cohesive Zone Model for Application to a Finite Element Algorithm, Aerospace Engineering Department, Texas A&M University, CMAME (1999).
  26. Gibson, Ronald F. – Principles of Composite Material Mechanics, Mc. Graw Hill, ISBN 0-07-113335-6 (1994).

27. Gudmundson P. e Ostlund S. - Prediction of Thermoelastic Properties of Composite Laminates with Matrix Cracks, *Composite Science and Technology*, v44, p95-105 (1992).
28. Hahn H. T. e Tsai S. W. - On the Behavior of Composite Laminates After Initial Failures, *Journal of Composite Materials*, v8, p288-305 (1974).
29. Hashin Z. - Analysis of Orthogonally Cracked Laminates under Tension, *Transactions of The ASME*, v54, p872-879 (1987).
30. Highsmith A. L. e Reifsnider K. L. - Stiffness-Reduction Mechanisms in Composite Laminates, *Damage in Composite Materials*, ASTM STP775, Reifsnider K. L. – editor, American Society for Testing and Materials, p103-117 (1982).
31. Huebner, K. H.; Thornton, E. A.; Byrom, T. G. – *The Finite Element Method for Engineers*, John Wiley & Sons Inc., Third Edition (1995).
32. Hull, D. e Clyne, T. W. – *An Introduction to Composite Materials*, Cambridge Solid State Science Series, Second Edition (1996).
33. Kachanov, L. M. – On the Creep Fracture Time, *Izv. Akad. Nauk SSR Otd. Tekhn. Nauk*, no 8, 26-31 (1958).
34. Kachanov, M. – Continuum Theory of Media with Cracks, *Mekhanika Tverdogo Tela*, ASCE, 7, 54-9 (1972).
35. Kachanov, L. M. – *Introduction to Continuum Damage Mechanics*, Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Netherlands (1986).
36. Laws N., Dvorak G. J. e Hejazi M. - Stiffness Changes in Unidirectional Composites Caused by Crack Systems, *Mechanics of Materials*, v2, p123-137 (1983).
37. Laws N. e Dvorak G. J. - Progressive Transverse Cracking in Composite Laminates, *Journal of Composite Materials*, v22, p900-916 (1988).
38. Lemaitre J. e Chaboche, J. L. – *Mecanique Des Materiaux Solides*, Dund, Paris (1985).

39. Lemaitre, J. - A Course on Damage Mechanics, Cambridge University Press, Springer-Verlag, New York, ISBN: 3-540-60980-6 (1992).
40. Lim, E. H. e Tay, T. E. - Stiffness Loss of Composite Laminates with Transverse Cracks under Mode I and Mode III Loading, *Int. J. Damage Mech.*, 5, 190-215 (1996).
41. Lim, E. H. - Analysis and Testing of Composite Laminates with Transverse Cracks, PhD Thesis: National University of Singapore, January (1999).
42. Lo, D. C.; Allen, D. H. e Harris, C. E. - Modeling Progressive Failure of Laminated Composites with Continuum Damage Mechanics, *Fracture Mechanics: Twenty-Third Symposium*, ASTM STP 1189, Ravinder Chona, Ed., American Society for Testing and Materials, Philadelphia, pp. 680-695 (1993).
43. Machado, R. D. - Desenvolvimento do Método Modificado da Função de Green Local para a Solução de Placas Laminadas de Materiais Compostos, Tese: Universidade Federal de Santa Catarina, Dezembro (1992).
44. Machado, R. D. - Efeitos Hígro-Térmicos em Placas Laminadas: Abordagem por um Método Integral, Monografia - Concurso para Professor Titular: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Dezembro (2001).
45. Makeev, A. e Armanios, E. A. - Influence of Damage on the Elastic Behavior of Composite Beams, *American Helicopter Society 55th Annual Fórum*, Montréal, Canada, May 25-27 (1999).
46. McLaughlin, P. V. D. e Santhanam, S. - Simulating Damage Growth in a [90/0]<sub>s</sub> Composite Laminate using Quasi-two-dimensional Finite Element Methods, *Composite Structures*, 58, 227-236 (2002).
47. Moran, M. J. e Shapiro, H. N., *Fundamentals of Engineering Thermodynamics*, John Wiley & Sons Inc., Second Edition (1993).
48. Nairn, J. A. - The Strain Energy Release Rate of Composite Microcracking: A Variational Approach, *Journal of Composite Materials*, v23, p1106-1129 (1989).

49. Nairn, J. A. - Exact and Variational Theorems for Fracture Mechanics of Composites with Residual Stresses, Traction-Loaded Cracks, and Imperfect Interfaces, *International Journal of Fracture*, 105, 243-271, February (2000a).
50. Nairn, J. A. - Matrix Microcracking in Composites, *Polymer Matrix Composites*, Chapter 13, R. Talreja and J-A. Manson, eds. (2000b).
51. Nairn, J. A. - Fracture Mechanics of Composites with Residual Stresses, Imperfect Interfaces and Traction-Loaded Cracks, *Composites Science and Technology*, 61, 2159-2167 (2001).
52. Peter W. M., Chou T. W., Jones F. R. e Rock J. W. - Statistical Analysis of Multiple Fracture on 0°/90°/0° Glass Fibre / Epoxy Laminates, *Journal of Materials Science*, v18, p2876-2889 (1983).
53. Phillips, M. L.; Yoon, C. e Allen, D. H. - A Computational Model for Predicting Damage Evolution, *Laminated Composite Plates*, Aerospace Engineering Department, Texas A&M University (2000).
54. Praveen G. N. e Reddy J. N. - Transverse Matrix Cracks in Crossply Laminates: Stress Transfer, Stiffness Reduction and Crack Opening Profiles, *Acta Mechanica*, v130, pp.227-248 (1998).
55. Proença, S. P. B. - Elementos de Mecânica do Dano em Meios Contínuos, Texto n.4, São Carlos, Outubro (2000).
56. Reddy, J. N. - Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis, Texas A&M University, College Station, Texas, CRC Press Inc. (1997).
57. Schwartz, Mel M. - Composite Materials, Volume II: Processing, Fabrication and Applications, Prentice-Hall, Inc., New Jersey (1997).
58. Silva, L. H. M. - Novas Formulações integrais para Problemas da Mecânica, Tese de Doutorado, Universidade Federal de Santa Catarina (1988).

59. Talreja, R. - Residual Stiffness Properties of Cracked Composite Laminates, Proceedings of the Sixth Int. Conf. on Fracture, ICFG, New Dalhi, India 4-10, December (1984a).
60. Talreja, R. – Residual Stiffness Properties of Cracked Composite Laminates, Sixth Int. Conf. on Fracture, India (1984b).
61. Talreja, R. – Transverse Cracking and Stiffness Reduction in Composite Laminates, Journal of Composite Materials, v19, pp. 355-375 (1985).
62. Talreja, R. – Internal Variable Damage Mechanics of Composite Materials, Yielding, Damage and Failure of Anisotropic Solids, EGF5, Boehler J. P. ed., Mechanical Engineering Publications, London, 509-533 (1990).
63. Talreja R., Yalvac S., Yats L. D. e Wetters D. G., - Transverse Cracking and Stiffness Reduction in Crossply Laminates with Different Matrix Toughness, Journal of Composite Materials, v26, p1644-1663 (1992).
64. Tay, T. E.; Lim, E. H. e Tay, A. A. O. – Analysis of Stresses in Cross-Ply Composite Laminates Containing Distributed Transverse Cracks, Proceedings of Computational Methods in Engineering, Advance and Applications, Tay, A. A. O. e Lam, K. Y. – edtrs, World Scientific, v2, p986-991 (1992).
65. Tay, T. E. e Lim, E. H. - Analysis of Stiffness Loss in Cross-ply Composite Laminates, Composite Struct., 25, 419-425 (1993).
66. Tay, T. E. e Lim, E. H. - Analysis of Stiffness Loss in Cross-ply Composite Laminates, Composite Struct., 25, 419-425 (1993). Tay, T. E. e Lim, E. H. - Analysis of Composite Laminates with Transverse Cracks, Composite Struct., 34, 419-426 (1996).
67. Tay, T. E., Lam, K. Y. e Cen, Z, - Analysis of Composite Structures with Distributed and Localized Damage by the Finite-Element Method, Composite Structures, 37, 135-143 (1997).
68. Tsai C. L., Daniel I. M. e Lee J. W. - Progressive Matrix Cracking of Crossply Composite under Biaxial Loading, Microcracking-Induced Damage in Composites, Dvorak G. J. e Lagoudas D. C. – edtrs, Proceedings of ASME

- 1990 Winter Annual Meeting, AMD-v111, MD-v22, p9-18, ASME, New York (1990).
69. Tsai S. W. - Strength Characteristics of Composite Materials, NASA, CR-224, April (1965).
70. Tsai S. W. e Hahn H. T. - Failure Analysis of Composite Materials, Inelastic Behavior of Composite Materials, Herakovich C. T. – editor, AMD-v13, ASME (1975).
71. Tseng, Shih-Shong - Damage Assessment of Linear Structures by a Static Approach, I: Theory and Formulation, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 9, nº 2, 181-193 (2000a).
72. Tseng, Shih-Shong - Damage Assessment of Linear Structures by a Static Approach, II: Numerical Simulation Studies, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 9, nº 2, 195-208 (2000b).
73. Varna J. e Berglund L - Multiple Transverse Cracking and Stiffness Reduction in Crossply Laminates, Journal of Composites and Technology Research, JCTREER, v13, n2, p99-106 (1991).
74. Vejen, N. e Pyrz, R. – Transverse Crack Growth in Glass/Epoxy Composites with Exactly Positioned Long Fibres – Part II: Numerical, Composites: Part B, 33, 279-290 (2002).
75. Villaça, S. F. e Taborda Garcia, L. F. – Introdução à Teoria da Elasticidade, 1ª Edição, PUBTEC CIVIL 01/1996, COPPE/UFRJ (1996).
76. Wang A. S. D., Kishore N. N. e Li C. A., - Crack Development in Graphite-Epoxy Cross-Ply Laminates under Uniaxial Tension, Composite Science Technology, v24, p1-31 (1985).
77. Whitney, J. M. - Structural of Laminated Anisotropic Plates, Technomic Publishing Company, Inc, Lancaster, Pensilvania (1987).
78. [www.fiberset.com/html-work.htm](http://www.fiberset.com/html-work.htm)
79. [www.saint-gobainvetrotex.com.br](http://www.saint-gobainvetrotex.com.br)
80. [www.strongweel.com](http://www.strongweel.com)

81. Zhang J., Fan J. e Soutis C. - Analysis of Multiple Matrix Cracking in  $[\pm 0_m/90_n]_s$  Composite Laminates; Part 2: Development of Transverse Ply Cracks, *Composites*, v23, n5, p299-304 (1992).
82. Zou, Z.; Reid, S. R.; Li, S. e Soden, P. D. – Application of a Delamination Model to Laminated Composite Structures, *Composite Structures*, 56, 375-389 (2002).

## Apêndice A

### A.1 Aplicação das Restrições de Simetria

As derivações deste apêndice foram extraídas do trabalho de Allen *et al.* (1988a, 1988b).

As equações constitutivas para sólidos com dano interno na equação (4.39) é definida como segue:

$$\sigma_{ij}^e = \sigma_{ij}^R + E_{ijkl} (\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{kl}^T) + F_{ijkl} \alpha_{kl} \quad (\text{A.1})$$

Na ausência de tensões residuais e térmicas, as equações constitutivas tornam-se:

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} + F_{ijkl} \alpha_{kl} \quad (\text{A.2})$$

onde  $\sigma_{ij}^e$  é o tensor tensão efetivo,  $\varepsilon_{kl}$  é o tensor deformação,  $E_{ijkl}$  e  $F_{ijkl}$  são os tensores rigidez não-danificado e danificado, respectivamente. No caso mais geral, existem 81 coeficientes para  $E_{ijkl}$  e  $F_{ijkl}$ . Assumindo-se que o material é homogêneo, portanto as condições de simetria de tensão e deformação se aplicam, a existência de um potencial elástico pode ser aplicado na equação (A.2) para obter-se:

$$E_{ijkl} = E_{jikl}; E_{ijkl} = E_{ijlk}; E_{ijkl} = E_{klij} \quad (\text{A.3})$$

e:

$$F_{ijkl} = F_{jikl} \quad (\text{A.4})$$

Com as condições das equações (A.3) e (A.4), o número de coeficientes de  $E_{ijkl}$  e  $F_{ijkl}$  reduzem-se a 21 e 54, respectivamente. Re-indexando-se os componentes dos tensores para as notações contraídas, tem-se:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11} & \sigma_4 &= \sigma_{23} = \sigma_{32} \\ \sigma_2 &= \sigma_{22} & \sigma_5 &= \sigma_{13} = \sigma_{31} \\ \sigma_3 &= \sigma_{33} & \sigma_6 &= \sigma_{12} = \sigma_{21} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

e:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} & \varepsilon_4 &= \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22} & \varepsilon_5 &= \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_3 &= \varepsilon_{33} & \varepsilon_6 &= \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Além disso, as variáveis internas de estado são re-indexadas como:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \alpha_{11} & \alpha_4 &= \alpha_{23} & \alpha_7 &= \alpha_{31} \\
\alpha_2 &= \alpha_{22} & \alpha_5 &= \alpha_{32} & \alpha_8 &= \alpha_{12} \\
\alpha_3 &= \alpha_{33} & \alpha_6 &= \alpha_{13} & \alpha_9 &= \alpha_{21}
\end{aligned}
\tag{A.7}$$

Usando-se as notações contraídas, as equações constitutivas podem ser escritas como:

$$\sigma_i^e = E_{ij} \varepsilon_j + F_{ik} \alpha_k \tag{A.8}$$

sendo que  $i$  e  $j$  varia de 1 a 6, e,  $k$  varia de 1 a 9.

## A.2 Restrições de Simetria no Tensor de Rigidez Danificado

Considere a energia interna devido às trincas:

$$U^c = F_{ijkl} \varepsilon_{ij} \alpha_{kl} \tag{A.9}$$

Sabendo-se tensor deformação é simétrico:

$$F_{ijkl} = F_{jikl} \tag{A.10}$$

Portanto, o tensor rigidez danificado reduz-se a 54 constantes independentes. Expandindo-se a equação (A.9):

$$\begin{aligned}
 U^c = & F_{1111}\varepsilon_{11}\alpha_{11} + F_{1122}\varepsilon_{11}\alpha_{22} + F_{1133}\varepsilon_{11}\alpha_{33} + F_{1123}\varepsilon_{11}\alpha_{23} + \\
 & + F_{1132}\varepsilon_{11}\alpha_{32} + F_{1113}\varepsilon_{11}\alpha_{13} + F_{1131}\varepsilon_{11}\alpha_{31} + F_{1112}\varepsilon_{11}\alpha_{12} + \\
 & + F_{1121}\varepsilon_{11}\alpha_{21} + F_{2211}\varepsilon_{22}\alpha_{11} + F_{2222}\varepsilon_{22}\alpha_{22} + F_{2233}\varepsilon_{22}\alpha_{33} + \\
 & + F_{2223}\varepsilon_{22}\alpha_{23} + F_{2232}\varepsilon_{22}\alpha_{32} + F_{2213}\varepsilon_{22}\alpha_{13} + F_{2231}\varepsilon_{22}\alpha_{31} + \\
 & + F_{2212}\varepsilon_{22}\alpha_{12} + F_{2221}\varepsilon_{22}\alpha_{21} + F_{3311}\varepsilon_{33}\alpha_{11} + F_{3322}\varepsilon_{33}\alpha_{22} + \\
 & + F_{3333}\varepsilon_{33}\alpha_{33} + F_{3323}\varepsilon_{33}\alpha_{23} + F_{3332}\varepsilon_{33}\alpha_{32} + F_{3313}\varepsilon_{33}\alpha_{13} + \\
 & + F_{3331}\varepsilon_{33}\alpha_{31} + F_{3312}\varepsilon_{33}\alpha_{12} + F_{3321}\varepsilon_{33}\alpha_{21} + F_{2311}\varepsilon_{23}\alpha_{11} + \\
 & + F_{2322}\varepsilon_{23}\alpha_{22} + F_{2333}\varepsilon_{23}\alpha_{33} + F_{2323}\varepsilon_{23}\alpha_{23} + F_{2332}\varepsilon_{23}\alpha_{32} + \\
 & + F_{2313}\varepsilon_{23}\alpha_{13} + F_{2331}\varepsilon_{23}\alpha_{31} + F_{2312}\varepsilon_{23}\alpha_{12} + F_{2321}\varepsilon_{23}\alpha_{21} + \\
 & + F_{1311}\varepsilon_{13}\alpha_{11} + F_{1322}\varepsilon_{13}\alpha_{22} + F_{1333}\varepsilon_{13}\alpha_{33} + F_{1323}\varepsilon_{13}\alpha_{23} + \\
 & + F_{1332}\varepsilon_{13}\alpha_{32} + F_{1313}\varepsilon_{13}\alpha_{13} + F_{1331}\varepsilon_{13}\alpha_{31} + F_{1312}\varepsilon_{13}\alpha_{12} + \\
 & + F_{1321}\varepsilon_{13}\alpha_{21} + F_{1211}\varepsilon_{12}\alpha_{11} + F_{1222}\varepsilon_{12}\alpha_{22} + F_{1233}\varepsilon_{12}\alpha_{33} + \\
 & + F_{1223}\varepsilon_{12}\alpha_{23} + F_{1232}\varepsilon_{12}\alpha_{32} + F_{1213}\varepsilon_{12}\alpha_{13} + F_{1231}\varepsilon_{12}\alpha_{31} + \\
 & + F_{1212}\varepsilon_{12}\alpha_{12} + F_{1221}\varepsilon_{12}\alpha_{21}
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Para reduzir-se o número de coeficientes do tensor rigidez danificado, a simetria ortotrópica é imposta. Primeiramente, uma rotação de 180° em relação ao eixo  $x_3$  é executada. Os co-senos diretores para esta transformação são:

$$[a_{ik'}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.12}$$

Assim, desde que  $\varepsilon_{ij}$  é um tensor de segunda ordem:

$$\varepsilon_{k'l} = \varepsilon_{ij} a_{ik'} a_{jl} \tag{A.13}$$

e segue-se que:

$$\left[ \varepsilon_{k'l'} \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.14})$$

além disso:

$$\left[ \alpha_{k'l'} \right] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{23} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Visto que  $U^c$  deve ser independente do sistema de coordenadas:

$$U^c = F_{i'j'k'l'} \varepsilon_{i'j'} \alpha_{k'l'} \quad (\text{A.16})$$

Substituindo-se as equações (A.14) e (A.15) em (A.16) e comparando-se este resultado com a equação (A.11), obtêm-se:

$$\begin{aligned} F_{1123} &= F_{1132} = F_{1113} = F_{1131} = F_{2223} = F_{2232} = 0 \\ F_{2213} &= F_{2231} = F_{3323} = F_{3332} = F_{3313} = F_{3331} = 0 \\ F_{2311} &= F_{2322} = F_{2333} = F_{2312} = F_{2321} = F_{1311} = 0 \\ F_{1322} &= F_{1333} = F_{1312} = F_{1321} = F_{1223} = F_{1232} = 0 \\ F_{1213} &= F_{1231} = 0 \end{aligned}$$

(A.17)

Rotacionando-se  $180^\circ$  em relação ao eixo  $x_2$ , encontra-se:

$$[a_{ik}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

portanto:

$$[\varepsilon_{k'l}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & -\varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

além disso:

$$[\alpha_{k'l}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{23} \\ \alpha_{31} & -\alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

Substituindo-se as equações (A.19) e (A.20) em (A.16) e comparando-se este resultado com a equação (A.11), chega-se a:

$$\begin{aligned} F_{1112} = F_{1121} = F_{2212} = F_{2221} = F_{3312} = F_{3321} &= 0 \\ F_{2313} = F_{2331} = F_{1323} = F_{1332} = F_{1211} = F_{1222} = F_{1233} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Nenhuma restrição adicional é imposta rotacionando-se 180° em relação ao eixo  $x_1$ . Então, a imposição de restrições de simetria ortotrópica em  $F_{ijkl}$  reduz o número de componentes para 15. Expressos em notação contraída existem:

$$\begin{aligned} F_{11} = F_{1111} & \quad F_{12} = F_{1122} & \quad F_{21} = F_{2211} \\ F_{22} = F_{2222} & \quad F_{13} = F_{1133} & \quad F_{31} = F_{3311} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 F_{33} &= F_{3333} & F_{23} &= F_{2233} & F_{32} &= F_{3322} \\
 F_{44} &= F_{2323} & F_{45} &= F_{2332} & F_{56} &= F_{1313} \\
 F_{57} &= F_{1331} & F_{68} &= F_{1212} & F_{69} &= F_{2121}
 \end{aligned}$$

(A.22)

Por esta razão, a matriz rigidez danificada reduz-se a:

$$\begin{bmatrix}
 F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{56} & F_{57} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{68} & F_{69}
 \end{bmatrix} \quad (A.23)$$

Para o caso de dano por trincas transversais, as variáveis internas de estado na equação (4.6) é simplificada para:

$$[\alpha_{ij}] = [0 \quad \alpha_2^1 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha_5^1 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha_8^1 \quad 0] \quad (A.24)$$

onde somente os componentes  $j = 2$  do tensor de segunda ordem são não nulos. Observando-se a equação (A.24), a equação (A.23) reduz-se a:

$$\begin{bmatrix}
 0 & F_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & F_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & F_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{68} & 0
 \end{bmatrix} \quad (A.25)$$

Sob condição de estado plano de tensão (bidimensional), a equação (A.25) simplifica-se a:

$$\begin{bmatrix} 0 & F_{12} & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.26})$$

Da mesma forma, impondo-se restrição de simetria ortotrópica a  $E_{ijkl}$ , esta se reduz a:

$$[E_{ijkl}] = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1122} & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1133} & E_{2233} & E_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1212} \end{bmatrix} \quad (\text{A.27})$$

ou ainda, sob a lei de Hooke generalizada, o tensor de rigidez não-danificado pode ser expresso, em notação contraída, como:

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.28})$$

sendo que  $Q_{ij}$  é a matriz rigidez de um material ortotrópico. Para o caso de estado plano de tensão para material ortotrópico (bidimensional), a matriz rigidez  $Q_{ij}$  torna-se:

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (\text{A.29})$$

onde os componentes de  $Q_{ij}$  foram dados no capítulo 3 pela equação (3.19). Conseqüentemente, as equações constitutivas para a lâmina em estado plano de tensão (bidimensional) são dadas por:

$$\sigma_i^e = Q_{ij} \varepsilon_j + F_{ij} \alpha_j \quad (\text{A.30})$$

sendo que  $i$  e  $j$  são 1, 2 e 6, respectivamente. Note que  $F_{6s}$  é renomeado como  $F_{66}$  e  $\alpha_s$  é renomeado como  $\alpha_6$  na equação (A.30).

### A.3 Determinação da Matriz $F_{ij}$

Dado que a relação tensão-deformação na ausência de variações da temperatura é:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{A.31})$$

e integrando-se sobre o volume local (excluindo trincas), tem-se:

$$\sigma_{ij}^e = \frac{1}{V} \int_{V_L - V_c} \sigma_{ij} dV = \frac{1}{V} \int_{V_L - V_c} E_{ijkl} \varepsilon_{kl} dV \quad (\text{A.32})$$

onde  $\sigma_{ij}^e$  é a tensão efetiva fora da zona de dano,  $V_L$  é o elemento de volume representativo local e  $V_c$  é o volume de trincas. Assumindo-se que o valor do tensor de tensão efetiva é idêntico a tensão média do elemento de volume representativo e que  $E_{ijkl}$  é homogêneo, chega-se:

$$\sigma_{ij}^e = \frac{E_{ijkl}}{V_L} \int_{V_L-V_c} \varepsilon_{kl} dV = \frac{E_{ijkl}}{V_L} \int_{V_L-V_c} \frac{1}{2} (u_{k,l} + u_{l,k}) dV \quad (\text{A.33})$$

Usando-se o teorema da divergência no último termo, obtêm-se:

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl} \left[ \frac{1}{V_L} \int_{S_1} \frac{1}{2} (u_k n_l + u_l n_k) dS + \frac{1}{V_L} \int_{S_2} \frac{1}{2} (u_k n_l + u_l n_k) dS \right] \quad (\text{A.34})$$

ou equivalentemente:

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl} \left( \varepsilon_{kl} - \frac{1}{2} \alpha_{kl} - \frac{1}{2} \alpha_{lk} \right) \quad (\text{A.35})$$

De qualquer modo, da expansão das séries de Taylor, a equação (4.40) é expressa como (para condição isotérmica):

$$\sigma_{ij}^e = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} + F_{ijkl} \alpha_{kl} \quad (\text{A.36})$$

Portanto, igualando-se os termos das equações (A.36) e (A.35), tem-se:

$$\begin{aligned} F_{ijkl} &= -E_{jikl} & k = l \\ F_{ijkl} &= -\frac{1}{2} (E_{ijkl} + E_{ijlk}) & k \neq l \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

Sabendo-se que  $E_{ijkl} = E_{ijlk}$  origina-se da simetria de deformação, então:

$$F_{ijkl} = -E_{ijkl} \quad (\text{A.38})$$

Para materiais ortotrópicos sob condições de estado plano de tensões (bidimensional), o anexo (A.2) mostrou que o tensor rigidez danificado em notação contraída é simplificado para:

$$F_{ij} = -Q_{ij} \quad (\text{A.39})$$

e  $E_{ijkl}$  é substituído pela matriz rigidez reduzida  $Q_{ij}$  no caso de lâminas em estado plano de tensão (bidimensional).

## Apêndice B

### B.1 Rotina Utilizada para Análises das Formulações $\rho$ e $\theta$

Exemplo de rotina executada em ANSYS 5.6 para o material Gr/Ep com  $\rho = 0,1$ .

```
/BATCH
/COM,ANSYS RELEASE 5.6.2 UP20000525    17:38:24    04/01/2004
/input,menust,tmp    ,,1
/GRA,POWER
/GST,ON
!* TETA NO VARIATION / RO = 0.1
/TITLE,Gr/Ep - RO = 0.1
A=X
B=Y
C=Z
T1=A
T2=B
/PREP7
ET,1,PLANE183,,,2,,

!* MATERIAL DEFINITION
```

```
MP,EX,1,142E9
MP,EY,1,9.85E9
MP,EZ,1,9.85E9
MP,PRXY,1,0.3
MP,PRYZ,1,0.46
MP,PRXZ,1,0.3
!*MP,NUXY,1,0.02080985
!*MP,NUYZ,1,0.46
!*MP,NUXZ,1,0.02080985
MP,GXY,1,4.48E9
MP,GYZ,1,3.37E9
MP,GXZ,1,4.48E9

MP,EX,2,9.85E9
MP,EY,2,9.85E9
MP,EZ,2,142E9
MP,PRXY,2,0.46
MP,PRYZ,2,0.02
MP,PRXZ,2,0.02
!*MP,NUXY,2,0.46
!*MP,NUYZ,2,0.28832487
!*MP,NUXZ,2,0.28832487
MP,GXY,2,3.37E9
MP,GYZ,2,4.48E9
MP,GXZ,2,4.48E9

!* CREATE K POINTS
K,1, 0, 0, 0
K,2, 0, T2, 0
K,3, 0, (T1+T2), 0
K,4, C, 0, 0
K,5, C, T2, 0
```

K,6, C, (T1+T2), 0

!\* CREATE LINE

LSTR, 1, 2

LSTR, 2, 3

LSTR, 4, 5

LSTR, 5, 6

LSTR, 1, 4

LSTR, 2, 5

LSTR, 3, 6

!\* CREATE AREA

AL,1,6,3,5

AL,2,7,4,6

!\* MESHING

LESIZE,1,,30,0.8

LESIZE,2,,10,

LESIZE,3,,30,0.8

LESIZE,4,,10,

LESIZE,5,,40,2

LESIZE,6,,40,2

LESIZE,7,,40,2

!\*MESHING AREA

TYPE,1

MAT,1

REAL,1

AMESH,2

TYPE,1

```
MAT,2
REAL,1
AMESH,1

LSEL,S,LINE,,2,,1
D,ALL,UX,0

ALLSEL,ALL

LSEL,S,LINE,,5,,1
D,ALL,UY,0

ALLSEL,ALL

LSEL,S,LINE,,3,4,1,1
D,ALL,UX,C

ALLSEL,ALL

SAVE
/PBC,ALL,,1
/PBC,NFOR,,0
/PBC,NMOM,,0
/PBC,RFOR,,0
/PBC,RMOM,,0
/PBC,PATH,,0
/REP
!*
FINISH
/SOLU
!*
/STATUS,SOLU
```

```
SOLVE  
FINISH  
/POST1  
SET, LAST  
/EFACE, 1
```

```
!*  
PLNSOL, S, EQV, 0, 1  
SAVE  
FINISH  
! /EXIT, ALL
```

## Apêndice C

### C.1 Fluxograma da Rotina Utilizada para Cálculo do Dano (Perda de Rigidez)

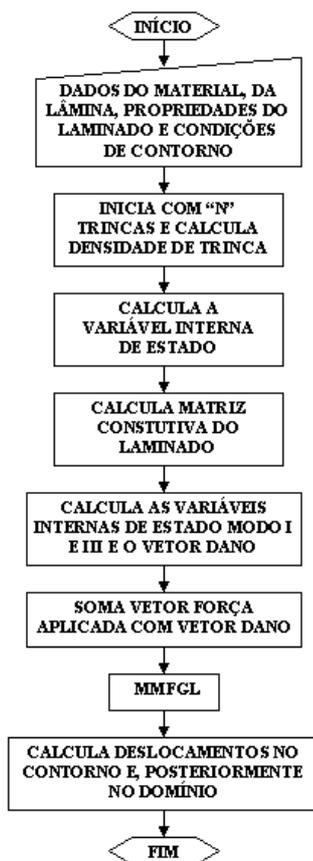


Figura C.1 - Fluxograma da Rotina para Dano