

**Pontifícia Universidade Católica do Paraná**

Luiz Carlos Winikes

**UMA CONTRIBUIÇÃO PARA AJUSTE DE PARÂMETROS DE UMA  
VIGA “*SANDWICH*”**

**MESTRADO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA  
PUCPR**

2006

Luiz Carlos Winikes

**UMA CONTRIBUIÇÃO PARA AJUSTE DE PARÂMETROS DE UMA  
VIGA “*SANDWICH*”**

Dissertação apresentada com parte dos requisitos à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Nilson Barbieri

Co-orientador: Prof. Dr. Renato Barbieri

Curitiba – Pr

Junho / 2006

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

**LUIZ CARLOS WINIKES**

**UMA CONTRIBUIÇÃO PARA AJUSTE DE PARÂMETROS DE UMA  
VIGA “SANDWICH”.**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, do Centro de Ciências Exatas de Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Pela seguinte banca examinadora:

Presidente: **Prof. Nilson Barbieri (Orientador)**

PUCPR

**Prof. Renato Barbieri (Co-Orientador)**

PUCPR

**Prof. Marcus Antonio Viana Duarte**

UFU – MG

**Prof. João Elias Abdalla Filho**

PUCPR

Curitiba, 29 de junho de 2006

Dedico esta dissertação a D. Elci Araújo (in memoriam).  
E a minha mãe Lucila e a minha irmã Carla.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço especialmente ao meu orientador e amigo Nilson Barbieri, por sua dedicação, sua paciência nos momentos difíceis, seus ensinamentos e pela sua motivação e compreensão durante o tempo deste mestrado.

Ao professor Renato Barbieri, por sua dedicação e orientação em vários momentos no decorrer de todas as etapas de estudo.

Ao professor Key Lima pela sua contribuição nas minhas dúvidas de programação e pela dedicação em muitos momentos no transcorrer do trabalho.

Aos demais professores que contribuíram de forma significativa através dos ensinamentos transmitidos, que serviram de base teórica para este trabalho, agradeço por toda a dedicação e incentivos dados em todos os momentos.

A amiga especial e secretária do mestrado, Sra. Jane, pela dedicação e pela paciência de nos ouvir em muitos momentos durante este curso.

A CAPES e a PUC-Pr pela bolsa de estudos que possibilitaram a realização deste projeto.

Agradeço especialmente ao professor João Elias pela sua orientação no momento de fazer a escolha da área de pesquisa e pela oportunidade que me concedeu.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho é ajustar os parâmetros físicos (módulo de elasticidade e fator de perda) dos materiais que constituem uma viga *sandwich* utilizando duas técnicas de ajuste de parâmetros: a primeira consiste no Algoritmo Genético (AG) acoplado a um método de elementos finitos. O AG é baseado na analogia entre otimização e os mecanismos da genética e a evolução natural das espécies. Sua fundamentação é feita a partir da combinação dos conceitos de adaptação coletiva, troca de material genético, e sobrevivência dos indivíduos mais aptos. A principal vantagem deste método é a robustez. Além disso, não requer a informação da derivada e pode trabalhar com dados gerados numericamente, dados experimentais e funções analíticas. Utilizando os termos de algoritmos genéticos a função aptidão (função objetivo) a ser minimizada consiste na diferença entre a Função Resposta em Frequência (FRF) experimental e numérica. Para calcular a FRF numérica foi empregado o método dos elementos finitos, a formulação do elemento de viga *sandwich* foi fundamentada segundo a teoria de Timoshenko. Enquanto que o segundo método é conhecido como "Predictor-Corrector" e é utilizado tanto para ajuste da forma (elementos finitos) como para ajuste da amplitude da resposta. Neste trabalho será utilizado somente o coeficiente de correlação de amplitude uma vez que não se pretende modificar a malha de elementos finitos.

## ABSTRACT

The objective of this work is to adjust the physical parameters (module of elasticity and loss factor) of the materials that constitute a beam "*sandwich*" using two techniques of adjustment of parameters: the first consists of the Genetic Algorithm (GA) coupled to a method of finite elements. GA is based on the analogy between optimization and the mechanisms of the genetics and the natural evolution of the species, combination, the concepts of selective adaptation, genetic material changes and survival of the fittest. The main advantage of this method is the robustness. Besides, it doesn't request the information of the derived and he/she can work with data numerical generated, experimental data and analytic functions. Using the terms of genetic algorithms the function aptitude (function objective) to be minimized it consists of the difference among the Frequency Response Function (FRF) experimental and numeric. To calculate numeric FRF the method of the finite elements, the formulation of the element of beam "*sandwich*" it was used it was based according to the theory of Timoshenko. While the second method is known like "Predictor-Corrector" and it is used so much for adjustment in the shape (finite elements) as for adjustment of the amplitude response. In this work only the amplitude correlation coefficient will be used once it doesn't intend to modify the mesh of finite elements.

## SUMÁRIO

Termo de Aprovação.....	i
Resumo.....	iv
Abstract.....	v
Sumário.....	vi
Lista de Figuras.....	viii
Lista de Tabelas.....	xi
Lista de Símbolos e Abreviações.....	xii
1 Introdução.....	1
1.1 Revisão Bibliográfica.....	2
1.2 Organização do trabalho.....	10
2 Teoria de Timoshenko para viga Sandwich.....	12
2.1 Introdução.....	12
2.2 Relações Cinemáticas.....	12
2.3 A viga “sandwich”.....	15
2.3.1 Configuração simétrica das faces da viga <i>sandwich</i> .....	16
2.3.2 Configuração não-Simétricas das faces da viga “sandwich”.....	22
3 O Elemento Finito para viga Sandwich.....	40
3.1 Introdução.....	40
3.2 Formulação de Timoshenko.....	40
4 Métodos de ajustes de parâmetros.....	45
4.1 Introdução.....	45
4.2 Algoritmo Genético.....	45
4.2.1 Algumas Terminologias utilizadas em algoritmos genéticos.....	47
4.2.2 Etapas de um Algoritmo Genético.....	49
4.2.3 Esquema de seleção.....	49
4.2.4 Representação de parâmetros.....	51
4.2.5 Operadores Genéticos.....	53
4.2.6 Parâmetros Genéticos.....	54

## SUMÁRIO

4.3 Método de ajuste com coeficiente de correlação de amplitude.....	55
5 Implementação Numérica.....	59
5.1 Introdução.....	59
6 FRF Experimental.....	64
6.1 Introdução.....	64
6.2 Materiais utilizados.....	64
6.3 Esquema de montagem.....	64
7 Resultados.....	67
8 Análise dos Resultados – Conclusões - Recomendações.....	97
8.1 Descrição das etapas percorridas no projeto.....	97
8.2 Discussões / Conclusões.....	98
8.3 Sugestões para trabalhos futuros.....	101
Referências Bibliográficas.....	102
Apêndice A – Matriz de Banda Simétrica.....	107

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Posicionamento do sensor para medição da FRF amostra.....	6
Figura 1.2 Esquema de viga acoplamento da viga no shaker para simular o engastamento.....	6
Figura 1.3 Módulo de elasticidade x temperaturas.....	7
Figura 1.4 Ângulo de fase do módulo de elasticidade x temperaturas.....	7
Figura 2.1 Deslocamentos cinematicamente admissíveis.....	13
Figura 2.2 Nomenclatura e Convenção de sinais para a viga <i>sandwich</i> .....	15
Figura 2.3 Elemento de viga <i>sandwich</i> e diagrama de tensões atuantes.....	19
Figura 2.4 Sistema de transformação de coordenadas utilizado para determinação da linha neutra.....	23
Figura 2.5 Efeito da deformação total (a), devida à flexão (b) e ao cisalhamento (c), em um elemento de viga <i>sandwich</i> .....	27
Figura 2.6 Componentes <i>transversal</i> e <i>longitudinal</i> da deformação cisalhante.....	27
Figura 2.7 Deformação cisalhante em um elemento de viga <i>sandwich</i> .....	28
Figura 2.8 Sistema de coordenadas locais estabelecido como referencia para o elemento de viga <i>sandwich</i> .....	30
Figura 2.9 Diagrama do corpo livre de um elemento de viga na condição deformada.....	34
Figura 2.10 Definição de Inércia Rotacional.....	36
Figura 3.1 Graus de liberdade para um elemento <i>sandwich</i> tratado conforme Viga de Timoshenko.....	43
Figura 4.1 Método da roleta.....	50
Figura 4.2 Cruzamento.....	53
Figura 4.3 Mutação.....	53
Figura 5.1 Fluxograma de operações para método de Timoshenko.....	63
Figura 6.1 Posicionamento dos acelerômetros na viga “sandwich”.....	65
Figura 6.2 Vista lateral da viga <i>sandwich</i> engastada na base de concreto.....	66
Figura 6.3 Vista frontal da viga <i>sandwich</i> engastada na base de concreto.....	66

## LISTA DE FIGURAS

Figura 7.1 Curva FRF experimental.....	68
Figura 7.2 Valores ajustados para o módulo de elasticidade do núcleo.....	70
Figura 7.3 Valores ajustados para o fator de perda do núcleo.....	70
Figura 7.4 Valores ajustados para o módulo de elasticidade do Poliestireno de Alto Impacto.....	71
Figura 7.5 Curvas FRF experimental e ajustadas.....	72
Figura 7.6 Curvas FRF experimental e ajustadas.....	72
Figura 7.7 Módulo de elasticidade do núcleo ajustado por dois métodos diferentes.....	74
Figura 7.8 Fator de perda do núcleo ajustado por dois métodos diferentes.....	74
Figura 7.9 Módulo de elasticidade do Poliestireno de Alto Impacto ajustado por dois métodos diferentes.....	75
Figura 7.10 Parâmetros ajustados e curva FRF.....	75
Figura 7.11 Curvas FRF experimental e ajustadas.....	76
Figura 7.12 Caso 1: Ajuste da FRF experimental e teórica.....	78
Figura 7.13 Caso 2: Ajuste da FRF experimental e teórica.....	78
Figura 7.14 Caso 3: Ajuste da FRF experimental e teórica.....	79
Figura 7.15 Caso 1: Resultado do Módulo de Elasticidade.....	79
Figura 7.16 Caso 2: Resultado do Módulo de Elasticidade.....	80
Figura 7.17 Caso 3: Resultado do Módulo de Elasticidade.....	80
Figura 7.18 Caso 1: Resultado do Fator de perda do núcleo.....	81
Figura 7.19 Caso 2: Resultado do Fator de perda do núcleo.....	81
Figura 7.20 Caso 3: Resultado do Fator de perda do núcleo.....	82
Figura 7.21 Caso 1: Resultado do Fator de perda da face.....	82
Figura 7.22 Caso 2: Resultado do Fator de perda da face.....	83
Figura 7.23 Caso 3: Resultado do Fator de perda da face.....	83
Figura 7.24 Caso 1: Ajuste da FRF experimental e teórica.....	84
Figura 7.25 Caso 2: Ajuste da FRF experimental e teórica.....	85
Figura 7.26 Caso 3: Ajuste da FRF experimental e teórica.....	85

## LISTA DE FIGURAS

Figura 7.27 Caso 1: Resultado do Módulo de Elasticidade.....	86
Figura 7.28 Caso 2: Resultado do Módulo de Elasticidade.....	86
Figura 7.29 Caso 3: Resultado do Módulo de Elasticidade.....	87
Figura 7.30 Caso 1: Resultado do Fator de perda do núcleo.....	87
Figura 7.31 Caso 2: Resultado do Fator de perda do núcleo.....	88
Figura 7.32 Caso 3: Resultado do Fator de perda do núcleo.....	88
Figura 7.33 Caso 1: Resultado do Fator de perda da face.....	89
Figura 7.34 Caso 2: Resultado do Fator de perda da face.....	89
Figura 7.35 Caso 3: Resultado do Fator de perda da face.....	90
Figura 7.36 Caso 1: Ajuste da FRF experimental e teórica.....	91
Figura 7.37 Caso 2: Ajuste da FRF experimental e teórica.....	91
Figura 7.38 Caso 3: Ajuste da FRF experimental e teórica.....	92
Figura 7.39 Caso 1: Resultado do Módulo de Elasticidade.....	92
Figura 7.40 Caso 2: Resultado do Módulo de Elasticidade.....	93
Figura 7.41 Caso 3: Resultado do Módulo de Elasticidade.....	93
Figura 7.42 Caso 1: Resultado do Fator de perda do núcleo.....	94
Figura 7.43 Caso 2: Resultado do Fator de perda do núcleo.....	94
Figura 7.44 Caso 3: Resultado do Fator de perda do núcleo.....	95
Figura 7.45 Caso 1: Resultado do Fator de perda da face.....	95
Figura 7.46 Caso 2: Resultado do Fator de perda da face.....	96
Figura 7.47 Caso 3: Resultado do Fator de perda da face.....	96

**LISTA DE TABELAS**

TABELA 4.1 Probabilidades para cada indivíduo.....	50
TABELA 4.2 Mapeamento de variáveis reais para o código binário.....	51
TABELA 4.3 Representação binária de 4 indivíduos com quatro variáveis.....	52
TABELA 4.4 Representação binária de uma população com quatro indivíduos.....	52
TABELA 7.1 Parâmetros modais ajustados.....	68

**LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIações**

$E$	Módulo de Elasticidade
$E^*$	Modulo de Elasticidade variável na freqüência
$E'$	Parte real do Módulo de Elasticidade variável na freqüência
$E''$	Parte imaginária do Módulo de Elasticidade variável na freqüência
$D$	Rigidez Flexural
$\sigma$	Tensão normal
$M$	Momento Fletor
$R$	Raio de curvatura
$I$	Momento de Inércia
$A$	Área
$V$	Força cortante
$N$	Normal
$\varepsilon$	Deformação
$\kappa$	Curvatura
$t$	Espessura
$h$	Altura da seção
$d$	Distância dos eixos baricentrais das faces de uma viga “sandwich”
$G$	Módulo de Cisalhamento transversal
$S$	Rigidez ao cisalhamento
$k$	Fator de cisalhamento
$\{q\}$	vetor deslocamento
$\{F\}$	vetor de Forças
$[M]$	Matriz massa
$[K]$	Matriz de Rigidez
$\eta$	Fator de amortecimento
$\tau$	Tensão cisalhante
$B(z)$	Primeiro momento de Área
$\gamma$	Deformação transversal

## LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIações

$q$	carga distribuída
$f$	Função Objetivo
$T$	Energia Potencial
$U$	Energia Cinética
$m$	massa
$u$	Deslocamento
$\omega_b$	Deformação devido a um momento fletor
$\omega_s$	Deformação devido a uma solitação transversal
$(.)_f$	Referente a face de uma viga “sandwich”
$(.)_c$	Referente ao núcleo (core) de uma viga “sandwich”
$\mathfrak{R}$	Inércia rotatória
$\rho$	Massa específica
$\rho^*$	Massa por unidade de superfície
$H$	Função Resposta em Frequência

## ABREVIações

FRF	Função Resposta em Frequência
FO	Função Objetivo
AG	Algoritmo Genético
AG's	Algoritmos Genéticos
PUR	Poliuretano
PSAI	Poliestireno de alto impacto

# Capítulo I

## Introdução

O objetivo deste trabalho é utilizar técnicas de ajuste de parâmetros, mais especificamente, o Algoritmo Genético (AG) (Goldberg, 1989) e o método de Coeficiente de Correlação de Amplitude (Grafe, 1998) para determinar as propriedades elásticas de uma viga do tipo *sandwich*. Os ajustes são baseados na curva da resposta em frequência, FRF, experimental e numérica.

O AG é baseado na analogia entre otimização e os mecanismos da genética e evolução natural das espécies. Sua fundamentação é feita a partir da combinação dos conceitos de adaptação coletiva, troca de material genético, e sobrevivência dos indivíduos mais aptos. O AG é considerado um método de pesquisa direto para otimização não linear, este método é referido na literatura como método de ordem zero ou método de minimização sem derivadas. O método é estocástico, pois tem a característica de buscar a solução a partir de regras de probabilidade, neste caso a pesquisa não é feita somente na vizinhança de um ponto, mas a partir de uma população de pontos sobre a região do espaço de busca onde se encontram as possíveis soluções do problema, com isso aumenta-se muito a chance de se achar um ponto de ótimo global. Utilizar o AG para solucionar problemas de otimização tem como grande vantagem a sua robustez, além disso, não é preciso calcular a derivada da função.

O outro método utilizado neste trabalho é baseado num Coeficiente de Correlação de Amplitude que leva em consideração as FRFs numérica e experimental. Para realimentação dos parâmetros utiliza-se a sensibilidade do Coeficiente de Correlação de amplitude que é calculada empregando a derivada da função objetivo (analítica) com relação aos parâmetros ajustados.

A viga *sandwich* estudada neste trabalho é composta por três camadas: a face interna é uma chapa de material plástico termoformado (Poliestireno de Alto Impacto - PSAI); o núcleo é de espuma rígida de poliuretano (PUR) e a face externa é uma chapa de aço laminado. Este tipo de construção normalmente é utilizado em geladeiras e freezer's como elemento de isolamento térmico e de vibrações. Os parâmetros ajustados são o módulo de elasticidade e o fator de perda do PSAI e do PUR.

Na formulação numérica são utilizados elementos finitos obtidos com o uso da teoria de Timoshenko para viga *sandwich* (Zenkert, 1995). As FRFs numéricas foram obtidas com a varredura em frequência e com carregamento unitário aplicado no ponto de impacto (o mesmo da análise experimental).

### 1.1 Revisão bibliográfica

Segundo Inman (1996) a relação tensão/deformação para material viscoelástico é dado por um módulo complexo denotado por  $E^*$ , ou seja:

$$E^* = E(1 + \eta j) \quad (1.1)$$

onde:

$$j = \sqrt{-1}$$

$\eta$  = fator de perda do material viscoelástico

O módulo complexo de um material, definido como na eq. (1.1) pode ser medido e depende da frequência e da temperatura numa grande faixa de valores.

Materiais que exibem comportamento viscoelástico são borrachas e substâncias "*rubberlike*", por exemplo, neoprene, poliuretano, vinil e nylon. O uso de tais materiais viscoelásticos em projetos visa melhorar o amortecimento da estrutura ou também podem servir como material isolante. Camadas de materiais viscoelásticos são freqüentemente adicionadas em estruturas

compostas com a finalidade fornecer um alto amortecimento, principalmente quando montadas juntamente com o alumínio e aço que tem um amortecimento interno relativamente pequeno, desta maneira, o conjunto proporciona uma rigidez suficiente para carregamento estático e o amortecimento necessário para controlar a vibração da nova estrutura formada.

A noção de fator de perda é relatado pela definição da razão de amortecimento na ressonância, isto é,  $\omega_{dr} = \omega = \sqrt{k/m}$ . Então quando a direção da frequência é a mesma da frequência natural,  $\eta = 2\xi$ . Esta relação simples é freqüentemente usada para descrever uma aproximação do decaimento livre de um material visco-elástico.

Segundo Oresten (2003), a adoção de um material viscoelástico entre as faces de uma viga “*sandwich*” tem como objetivo produzir o amortecimento dinâmico da estrutura.

Nos materiais poliméricos principalmente verifica-se o efeito da viscoelasticidade. Segundo Nashif et al (1985) num material viscoelástico o amortecimento resulta de fenômenos e recuperação da rede polimérica após a deformação, existindo bastante influência da frequência e da temperatura por causa da relação direta destas propriedades com a movimentação molecular. Essa influência se revela na presença do módulo elástico variável no domínio da frequência, segundo a equação:

$$E^* = E'(\omega) + iE''(\omega) \quad (1.2)$$

onde:  $E'$  e  $E''$  são respectivamente, as partes real e imaginária do módulo de elasticidade.

A determinação do módulo de elasticidade e do módulo de cisalhamento, igualmente relacionado à frequência de excitação da estrutura, são difíceis, assim como conferem dificuldades de observação e caracterização experimental.

A abordagem das deformações em placas e vigas de Euler-Bernoulli descreve teoricamente que a deformação do eixo neutro de uma viga como

sendo a soma da uma translação com uma rotação da seção, que podem ser consideradas como a derivada da translação em relação ao comprimento. Porém, em vigas mais robustas esta consideração perde sua eficiência, daí a necessidade de utilizar-se a teoria da viga de Timoshenko que foi desenvolvida para suprir essa carência. Essa teoria leva em consideração que a rotação da seção não se mantém mais perpendicular a linha neutra devido a presença de uma tensão cisalhante no campo de deformações da viga. Para cada tipo de seção transversal é utilizada uma constante que, desta maneira, acaba limitando a determinação das tensões impostas por carregamento, e no caso de geometrias mais complexas conseqüentemente tornam-se inviáveis (Oresten, 2003).

Dentre as técnicas que já usam em larga escala o Método dos elementos Finitos ou MEF, deve-se destacar o uso corrente da minimização dos desvios das soluções aproximadas de autovalores e autovetores, técnica comumente denominada Método da Sensibilidade (*Sensitivity Method*). Qian et al (1997) desenvolveram a identificação de parâmetros de compósitos laminados a partir deste método. A partir do desenvolvimento convencional são obtidas as matrizes de rigidez, massa e amortecimento utilizando funções interpoladoras, e então é estabelecida a diferença entre os valores medidos e calculados. Os valores calculados têm sua primeira estimativa levantada por uma série de Taylor, e a correção para cada iteração é efetuada por Mínimos Quadrados. Dentro desse passo são também introduzidas as atualizações das matrizes do sistema. A diferença é inserida na chamada função custo, que é minimizada de maneira a permitir que as iterações necessárias sejam executadas até que o resíduo chegue aos níveis desejados.

Caracciolo et al (2000,2001,2004) mostram que o módulo de elasticidade pode ser obtido experimentalmente em uma viga Engastada excitada por uma força de entrada harmônica, utilizando simultaneamente o deslocamento vertical de um ponto da viga medido por um sensor laser e a aceleração do engaste onde é colocado um acelerômetro para efetuar a medição. A partir da definição de módulo de elasticidade para um material isotrópico dada pela eq. (1.3) é feita a dedução completa para obter-se a eq.

(1.4) da qual obtêm-se experimentalmente o módulo de elasticidade para uma viga Engastada:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (1.3)$$

$$E(i\omega) = \frac{\rho L^4}{h^2} \left[ F_1 \left( \frac{U_L(i\omega)}{a_b(i\omega)} + \frac{1}{\omega^2} \right)^{-1} + F_2 \omega^2 \right] \quad (1.4)$$

onde:

$\rho$  = densidade do material.

$L$  = comprimento da viga.

$h$  = altura da seção da viga.

$U_L$  = deslocamento absoluto medido pelo laser

$a_b$  = aceleração da base do suporte.

$F_1$  e  $F_2$  são parâmetros adimensionais calculados de acordo com a teoria de vigas. ( $F_1 = -1.0686$  e  $F_2 = 0.9707$ ) servindo para este tipo específico de viga.

A Fig. 1.1 (Caracciolo et al, 2004) mostra as dimensões da amostra e onde deve ser posicionado o sensor de deslocamento (laser). A posição é escolhida num ponto nodal do 2º modo de vibrar. A Fig. 1.2 contém o desenho esquemático da montagem da viga no suporte do shaker para simular o engastamento da viga (Caracciolo et al, 2004).

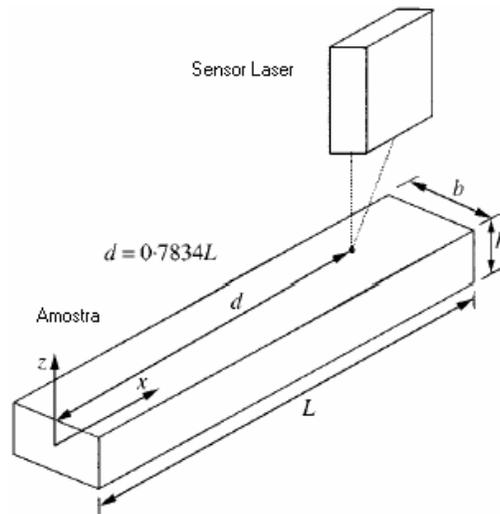


Figura 1.1 – Posicionamento do Sensor para a medição da FRF amostra (Caracciolo et al, 2004)

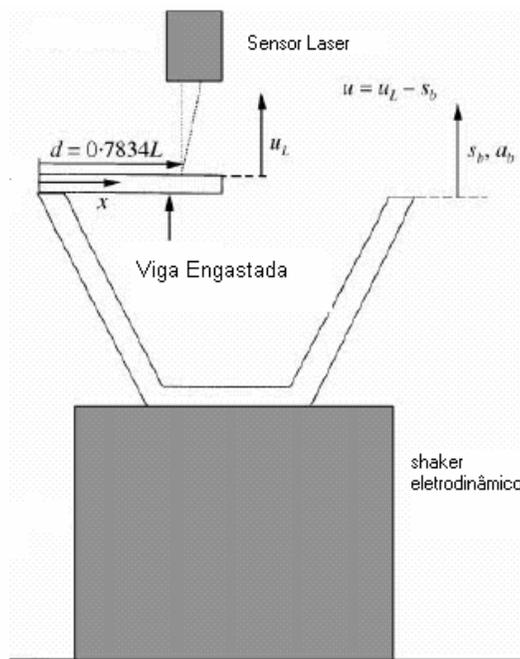


Figura 1.2 – Esquema de acoplamento da Viga no Shaker para simular o engastamento (Caracciolo et al, 2004).

Aplicando-se o método das variáveis reduzidas (Nashif et al, 1985) foram determinadas as curvas, para diferentes temperaturas e frequências, do

módulo de elasticidade e de ângulo de fase do módulo de elasticidade de um material viscoelástico, conforme mostrado nas Figuras 1.3 (valor absoluto do módulo de elasticidade de um material viscoelástico) e 1.4 (ângulo de fase do módulo de elasticidade complexo) (Caracciolo et al, 2004). A viga era feita de uma mistura de PVC e carbonato de cálcio.

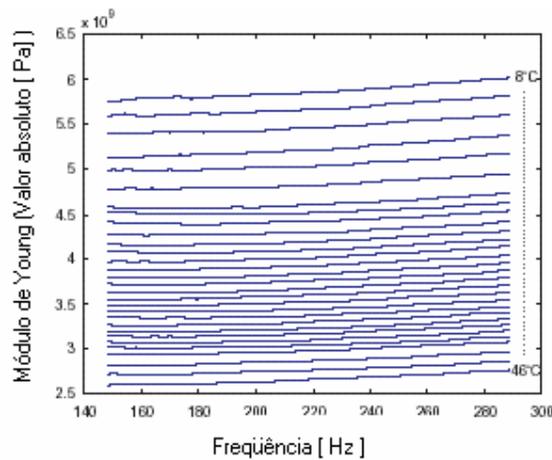


Figura 1.3 – Módulo de Elasticidade x Temperatura (Caracciolo et al, 2004)

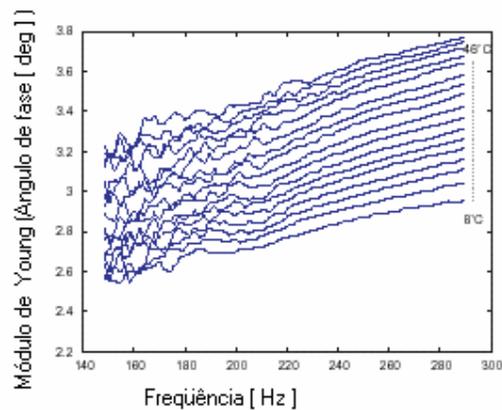


Figura 1.4 – Ângulo de fase do módulo de elasticidade x temperatura (Caracciolo et al, 2004)

Segundo Grafe (1998) o essencial para analisar estruturas vibrando é que o modelo matemático seja capaz de descrever a resposta de uma estrutura para cada posição,  $\{x\}$ , e tempo,  $t$ , quando é aplicada a força externa,  $\{f\}$ .

O fenômeno da vibração é o resultado da interação entre as propriedades elásticas e as massas (inércias) dos materiais envolvidos. Em estruturas dinâmicas as propriedades de rigidez e de massa são os parâmetros chave para a formulação matemática e estabelecimento de uma relação entre a entrada e a saída de um sistema. Tal modelo descritivo pode ser derivado do balanço de forças usando a 2ª lei de Newton, ou considerando o fato que a energia num sistema conservativo é constante, neste caso o método de Lagrange é aplicado. A descrição matemática do modelo é a peça central na análise de vibração mecânica e permite o entendimento do comportamento mecânico da estrutura.

A distribuição de massa e rigidez de um sistema dinâmico pode ser usada para expressar o balanço entre as interações das forças nos  $N$  graus de liberdade. A equação do movimento para modelo discreto de um sistema conservativo (sem amortecimento) pode ser convenientemente expressa na notação vetorial e matricial como:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (1.5)$$

onde:

$[M]$  = matriz de massa.

$[K]$  = matriz de rigidez.

O sistema da Eq. (1.5) é composto por  $N$  equações diferenciais lineares (nesta aplicação) com coeficientes constantes e representam o equilíbrio dinâmico onde as forças de restauração elástica somada com as forças de inércia equilibram as forças externas aplicadas na estrutura,  $\{f(t)\}$ . É normal incluir translação bem como rotação nos graus de liberdade,  $\{x(t)\}$ .

O sistema como descrito na eq. (1.5) pode ser analisado para respostas harmônicas assumindo-se que  $\{x(t)\} = \{X\}e^{i\omega t}$  quando  $\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t}$ . Neste

caso a equação de equilíbrio pode ser expressa para qualquer instante de tempo por:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{x\} = \{F\} \quad (1.6)$$

O valor da amplitude dos deslocamentos generalizados pode ser obtido invertendo a Eq.(1.6) e escrito na forma:

$$\{x\} = [H]\{F\} \quad (1.7)$$

onde:

$$[H] = (-\omega^2[M] + [K])^{-1} \quad (1.8)$$

e que é conhecida como matriz FRF.

Estruturas *sandwich* são extensivamente utilizadas na engenharia devido a sua alta rigidez específica e resistência. A modelagem de estruturas *sandwich* tem sido muito estudadas mas pouca atenção tem sido dada para identificação das propriedades do material (Shi et al, 2006). Desta forma, métodos utilizando dados vibratórios para realimentação de parâmetros físicos do modelo matemático tem sido utilizados. É comum a utilização de métodos de busca ou aproximação por séries.

Muitos modelos matemáticos foram desenvolvidos para caracterização de materiais viscoelásticos, laminados ou estruturas *sandwich*: Kim e Krider (in press), Pintelon et al (2004), Singh et al (2003), Deng et al (2003), Al-Khoury et al (2002), Mossberg et al (2001), Ohkami e Swoboda (1999), Yu e Haddad (1996), Park (2005), Yang (2005), Daya et al (2004).

Hornig e Flowers (2003) empregaram da técnica de algoritmos genéticos para caracterização de um modelo de histerese de um material composto.

Hão e Rao (2005) apresentaram um estudo sobre amortecimento em materiais viscoelásticos. O modelo consiste em uma viga bi-engastada excitada

por um shaker. Medem-se os primeiros quatro modos de vibrar através de um acelerômetro colocado sobre a amostra. Varia-se a temperatura e analisa-se o comportamento dos parâmetros: fator de perda, fator de amortecimento e frequências, para uma grande faixa de variação de temperatura. O material utilizado foi o poliestireno.

## 1.2 Organização do trabalho.

O trabalho consiste basicamente de 8 capítulos e um anexo.

O primeiro capítulo apresenta uma introdução contendo os objetivos do trabalho, neste capítulo também é elaborado a revisão bibliográfica e a organização do trabalho.

O segundo capítulo contém a fundamentação teórica de vigas.

O terceiro capítulo faz uma abordagem da formulação do elemento de viga “*sandwich*” segundo a teoria de viga de Timoshenko.

O quarto capítulo faz uma introdução aos métodos numéricos: algoritmos genéticos e Coeficiente de Correlação de Amplitude. Cita-se algumas vantagens do método AG, mostra algumas das terminologias, o tipo de representação utilizada, a função de cada um dos operadores genéticos e a influência de cada parâmetros no processo de busca da melhor solução do problema.

O quinto capítulo apresenta a implementação numérica do algoritmo genético e do método de Timoshenko.

O sexto capítulo contém a discriminação dos materiais e equipamentos utilizados na experiência. Neste capítulo é mostrado um desenho esquemático com a disposição dos acelerômetros na viga “*sandwich*”.

O sétimo capítulo mostra os resultados numéricos obtidos utilizando o Algoritmo Genético e o Coeficiente de Correlação de Amplitude acoplado ao Método dos Elementos finitos usando a teoria de viga de Timoshenko.

No oitavo capítulo apresentam-se as considerações finais do trabalho, avalia-se os resultados obtidos de maneira geral e as sugestões para trabalhos

futuros. A análise foi feita em tópicos para melhor esclarecimento de cada um dos parâmetros que foram calculados numericamente.

O Anexo A apresenta os conceitos básicos da matriz simétrica na forma de banda e o algoritmo de eliminação de Gauss para resolver a matriz de banda simétrica.

## Capítulo 2

# Teoria de Timoshenko para Viga Sandwich

### 2.1-Introdução

Neste capítulo são mostrados os princípios básicos utilizados para a formulação de vigas *sandwich* com a teoria de viga de Timoshenko. Os conteúdos são semelhantes aos da teoria clássica de vigas, com a exceção que é levada em consideração as deformações por cisalhamento transversal, resultando na Teoria de Vigas de Timoshenko.

### 2.2- Relações Cinemáticas

A cinemática descreve como as deflexões de vigas são tratadas.

O deslocamento  $w(x)$ , distância do plano neutro da viga na condição não carregada, é usualmente acompanhado por uma rotação deste plano, definida por  $\theta$ , bem como por uma rotação da seção transversal da viga, definida por  $\psi$ , conforme Fig. 2.1:

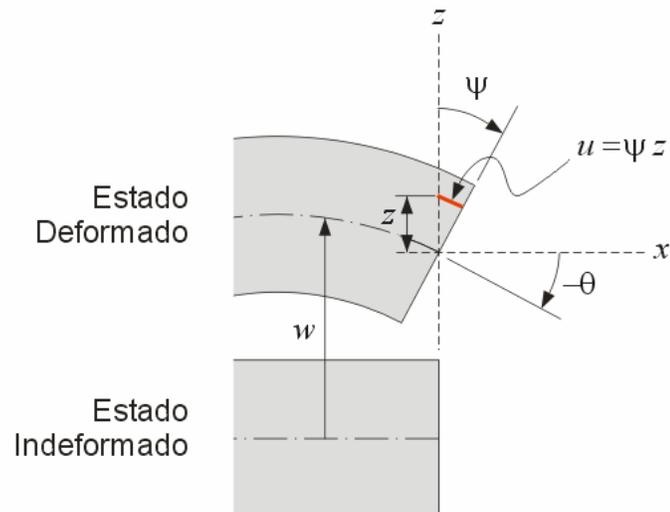


Figura 2.1 – Deslocamentos Cinematicamente Admissíveis.

Admitindo que a deformação é dada por:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (2.1)$$

e que a viga de Euler segue as assertivas de Kirchhoff, (Shames e Dym, 1985)

1. As normais permanecem retas (não curvam);
2. As normais não “esticam” (mantêm o mesmo comprimento);
3. As normais permanecem perpendiculares ao plano neutro da viga, admitindo-se que a deformação na direção  $z$  pode ser negligenciada e, portanto, o deslocamento pode ser determinado por simples análise geométrica, sendo da forma:

$$u = \psi(x)z \quad (2.2)$$

Logo, a eq. (2.1) toma a forma:

$$\varepsilon_x = \frac{d\psi}{dx} z \quad (2.3)$$

Mantendo a assertiva de que as normais estão sempre perpendiculares ao plano neutro da viga, extrai-se que:

$$\psi(x) = -\theta = -\frac{dw}{dx} \quad (2.4)$$

Substituindo eq. (2.4) em (2.3), obtém-se:

$$\varepsilon_x = -\frac{d^2 w}{dx^2} z \quad (2.5)$$

O termo  $-d^2 w/dx^2$  é designado curvatura  $\kappa_x$ , que vem a ser o inverso do raio de curvatura  $R_x$ , ou seja:

$$\frac{1}{R_x} = \kappa_x = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.6)$$

Logo, a deformação em uma fibra situada a uma distância  $z$  do plano neutro da viga é:

$$\varepsilon_x = \kappa_x z \quad (2.7)$$

O momento fletor necessário para causar a curvatura  $\kappa_x$  é:

$$M_x = \int \sigma_x z dz = \int \frac{E z^2}{R_x} dz = \kappa_x \int E z^2 dz = \frac{EI}{R_x} \quad (2.8)$$

onde  $EI = \int E z^2 dz = D$  é denominada *rigidez flexural*, e constitui-se do produto entre o módulo de elasticidade  $E$  e o momento de inércia da seção  $I$ .

Assim, para uma seção de viga qualquer, obtém-se a equação geral para a deformação:

$$\epsilon_x = \frac{M_x z}{D} \quad (2.9)$$

### 2.3 A Viga *Sandwich* (Zenkert, 1995)

A princípio é estabelecido o sistema de coordenadas com as direções positivas de aplicação de carregamentos (Força Normal  $N_x$  e Força Cortante  $V_x$ ) e do Momento Fletor  $M_x$ , a partir deste referencial pode-se definir a rigidez de flexão para vigas *sandwich*.

Na Fig. 2.2 é mostrada a convenção a ser utilizada. Para efeito de simplificação, será considerado também que as vigas possuem largura unitária, de forma que as cargas e demais propriedades mecânicas sejam dadas por unidade de largura.

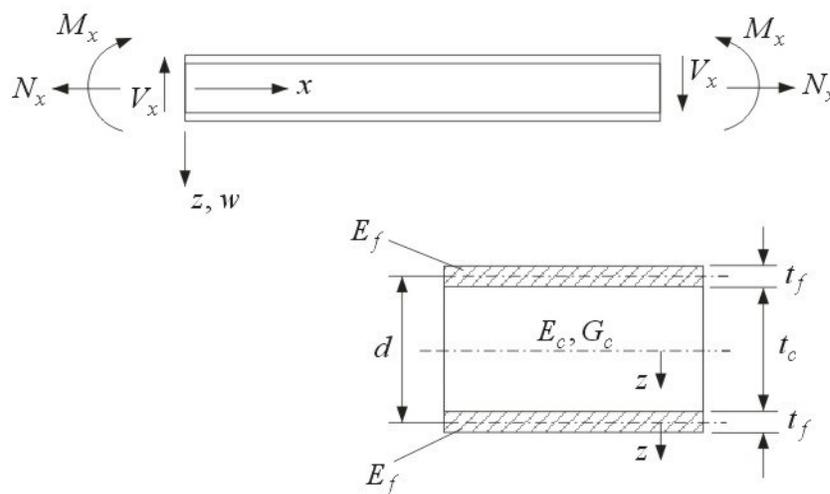


Figura 2.2 – Nomenclatura e Convenção de sinais para a viga *sandwich*.

### 2.3.1 Configuração simétrica das faces da viga *sandwich*.

Neste caso, considera-se que as faces possuem o mesmo material de módulo elástico  $E_f$  e também a mesma espessura  $t_f$ . Para o núcleo, a espessura, o módulo de elasticidade e o módulo de cisalhamento são definidos por  $t_c$ ,  $E_c$  e  $G_c$ , respectivamente. Considerando a definição de rigidez de flexão e a convenção mostrada na Fig. 2.2, tem-se:

$$D = \int E z^2 dz = \int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} E_c z^2 dz + 2 \int_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} E_f \left( z' + \frac{d}{2} \right)^2 dz' \quad (2.10)$$

Onde  $z'$  é o sistema de coordenadas é referenciado a partir do baricentro da face.

Resolvendo a primeira integral em termos de  $E_c$ , obtém-se:

$$\int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} E_c z^2 dz = E_c \frac{z^3}{3} \Big|_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} = \frac{E_c t_c^3}{12} = D_c \quad (2.11)$$

Resolvendo-se a segunda integral, chega-se a:

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} E_f \left( z' + \frac{d}{2} \right)^2 dz' &= 2 \int_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} E_f \left( z'^2 + \frac{d^2}{4} + z'd \right) dz' = 2 \left[ \int_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} E_f z'^2 dz' + \frac{E_f d^2}{4} \int_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} dz' \right] = \\ &= 2 \left[ E_f \frac{z'^3}{3} \Big|_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} + \frac{E_f d^2}{4} z' \Big|_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} \right] = 2(D_f + D_o) \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde:

$$D_f = E_f \frac{z'^3}{3} \Big|_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} = \frac{E_f t_f^3}{12} \quad (2.13)$$

$$D_o = \frac{E_f d^2}{4} z' \Big|_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} = \frac{E_f t_f d^2}{2} \quad (2.14)$$

e observando-se a Fig. 2.2,  $d = t_f + t_c$ , é a distância entre os baricentros das faces.

Somando-se os resultados encontrados para as integrais na eq. (2.10), então a rigidez flexural  $D$  para a viga *sandwich* é determinada por:

$$D = 2(D_f + D_o) + D_c \quad (2.15)$$

Cada termo da eq. (2.15) pode ser definido como:

$D_f$  é à rigidez flexural das faces como elementos isolados, fletindo sobre suas linhas neutras.

$D_o$  é a rigidez flexural das faces associadas na estrutura *sandwich* e fletindo sobre a linha neutra.

$D_c$  é a rigidez flexural do núcleo.

### O efeito “sandwich”

Contudo, se as faces são finas comparadas à espessura do núcleo, de forma que  $t_f \ll t_c$ , o primeiro termo da eq. (2.15) é muito pequeno e até menor que 1% do segundo se (Zenkert, 1995):

$$3 \left( \frac{d}{t_f} \right)^3 > 100 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{t_f} > 5,77 \quad (2.16)$$

Dependendo dos materiais associados na viga, o módulo de elasticidade do núcleo vem a ser muito menor que o das faces, ou seja,  $E_c \ll E_f$ , e o terceiro termo da eq. (2.15), será menor que 1% do segundo se:

$$\frac{6E_f t_f d^2}{E_c t_c} > 100 \quad (2.17)$$

Logo, para uma viga *sandwich* que atenda a essas condições, a rigidez flexural pode ser aproximada por:

$$D \cong \frac{E_f t_f d^2}{2} \quad (2.18)$$

As relações de espessuras núcleo/face está normalmente no intervalo de 10 a 50, e do módulo de elasticidade face/núcleo se encontra na faixa de e 50 a 1000, para os materiais mais utilizados em estruturas de engenharia do tipo *sandwich*.

A viga composta por núcleo de PUR e faces de PSAl e Aço em questão neste projeto se encaixam neste perfil.

As Tensões em Viga *Sandwich* levam em consideração a definição de deformação na eq. (2.9), assim as tensões devido à flexão são facilmente obtidas:

Tensões na face:

$$\sigma_f = \frac{M_x z E_c}{D} \quad \text{para} \quad \frac{t_c}{2} < |z| < \frac{t_c}{2} + t_f \quad (2.19)$$

Tensões no núcleo:

$$\sigma_c = \frac{M_x z E_c}{D} \quad \text{para} \quad |z| < \frac{t_c}{2} \quad (2.20)$$

Pelas equações (2.19) e (2.20), percebe-se que as tensões axiais de flexão variam linearmente ao longo das espessuras dos materiais constituintes, porém, há uma alteração brusca no valor na interface entre as faces e o núcleo.

A deformação devida a um carregamento normal  $N_x$  é dada por:

$$\epsilon_{x_0} = \frac{N_x}{2E_f t_f + E_c t_c} = \frac{N_x}{A_x} \quad (2.21)$$

onde:

$\epsilon_{x_0}$  é a deformação na linha neutra da viga.

Logo, as tensões no núcleo e nas faces devidas a esse mesmo carregamento são:

$$\sigma_c = \epsilon_{x_0} E_c \quad (2.22)$$

$$\sigma_f = \epsilon_{x_0} E_f \quad (2.23)$$

Para a análise das tensões cisalhantes, considera-se o elemento infinitesimal  $dx$  de uma viga conforme mostrado na Fig. 2.3, onde a força cisalhante deve compensar a variação das tensões axiais para garantia do campo de tensões:

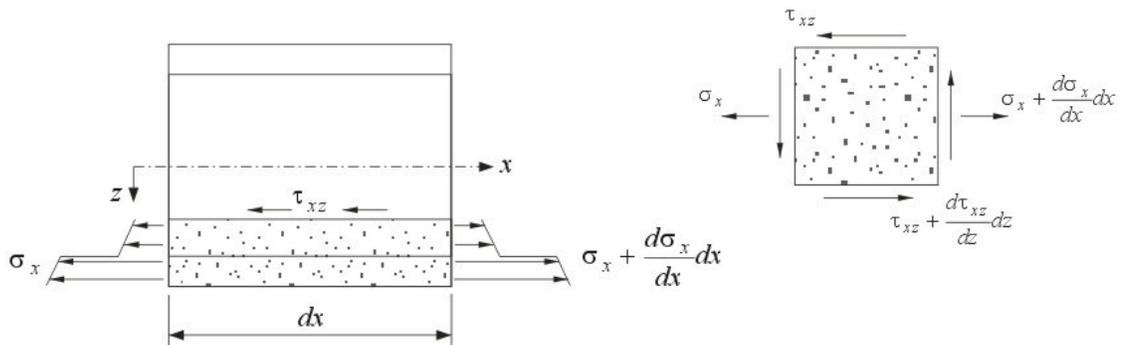


Figura 2.3 – Elemento de viga sandwich e diagrama de tensões atuantes.

Fazendo o equilíbrio de forças na direção  $x$  obtém-se:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} = 0 \quad (2.24)$$

E, conseqüentemente,

$$\tau_{xz}(z) = \int_z^{\frac{d}{2} + t_f} \frac{d\sigma_x}{dx} dz \quad (2.25)$$

Sabendo que  $dM_x/dx = V_x$ , tem-se de maneira geral que:

$$\tau = \frac{V_x}{D} \int_z^{\frac{d}{2} + t_f} E z dz = \frac{V_x B(z)}{D} \quad (2.26)$$

onde  $B(z)$  é o primeiro momento de área, que no núcleo, para  $|z| < t_c/2$ , resulta em:

$$B(z) = \frac{E_f t_f d}{2} + \frac{E_c}{2} \left( \frac{t_c}{2} - z \right) \left( \frac{t_c}{2} + z \right) \quad (2.27)$$

Portanto, a expressão para a tensão cisalhante no núcleo é dada por:

$$\tau_c(z) = \frac{V_x}{D} \left[ \frac{E_f t_f d}{2} + \frac{E_c}{2} \left( \frac{t_c^2}{4} - z^2 \right) \right] \quad (2.28)$$

De maneira análoga, obtém-se o primeiro momento de área nas faces, para  $t_c/2 < |z| < t_c/2 + t_f$ :

$$B(z) = \frac{E_f}{2} \left( \frac{t_c}{2} + t_f - z \right) \left( \frac{t_c}{2} + t_f + z \right) \quad (2.29)$$

e a expressão da tensão cisalhante:

$$\tau_f(z) = \frac{V_x E_f}{D} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{t_c^2}{4} + t_c t_f + t_f^2 - z^2 \right) \right] \quad (2.30)$$

As tensões cisalhantes atingem seus valores máximos na linha neutra ( $z = 0$ ):

$$\tau_{c,máx}(z = 0) = \frac{V_x}{D} \left( \frac{E_f t_f d}{2} + \frac{E_c t_c^2}{8} \right) \quad (2.31)$$

e na interface do núcleo com a face ( $z = t_c/2$ ):

$$\tau_{c,mín} = \tau_{f,máx} = \tau \left( \frac{t_c}{2} \right) = \frac{V_x}{D} \left[ \frac{E_f t_f d}{2} \right] \quad (2.32)$$

As aproximações podem ser resumidas da seguinte maneira:

Núcleo significativamente menos rígido que as faces ( $E_c \ll E_f$ ):

$$\sigma_c(z) = 0 \quad (2.33)$$

$$\sigma_f = \frac{M_x z E_f}{(D_o + 2D_f)} \quad (2.34)$$

$$\tau_c(z) = \frac{V_x E_f t_f d}{2(D_o + 2D_f)} \quad (2.35)$$

$$\tau_f(z) = \frac{V_x}{(D_o + 2D_f)} \frac{E_f}{2} \left( \frac{t_c^2}{4} + t_c t_f + t_f^2 - z^2 \right) \quad (2.36)$$

Juntando a  $E_c \ll E_f$ , ainda tem-se faces com espessura não significativa em relação à espessura do núcleo ( $t_f \ll t_c$ ):

$$\sigma_c(z) = 0 \quad (2.37)$$

$$\sigma_f = \pm \frac{M_x}{t_f d} \quad (2.38)$$

$$\tau_c(z) = \frac{V_x}{d} \quad (2.39)$$

$$\tau_f(z) = 0 \quad (2.40)$$

Pode-se deduzir, através destas simplificações, que na estrutura *sandwich*, as faces suportam os momentos fletores e suas forças de tração/compressão, e o núcleo resiste aos esforços transversais (cisalhantes).

### 2.3.2 Configuração não-Simétrica das faces da viga “sandwich”

Para vigas *sandwich* cujas faces, além de espessuras diferentes, possuem materiais diferentes, é necessário primeiramente determinar a posição da linha neutra, que é definida pelo sistema de coordenadas para o qual o primeiro momento de área é nulo quando integrado ao longo de toda a seção transversal. Segundo Oresten (2003):

$$\int \sigma_x dz = \int E \epsilon_x dz = \int \frac{Ez}{R_x} dz = \frac{1}{R_x} \int Ez dz = 0 \quad (2.41)$$

Como a origem do sistema de referência é desconhecida, faz-se uma transformação de coordenadas por um ponto conhecido da seção, conforme mostrado na Fig. 2.4, onde  $z^* = z - e$ :

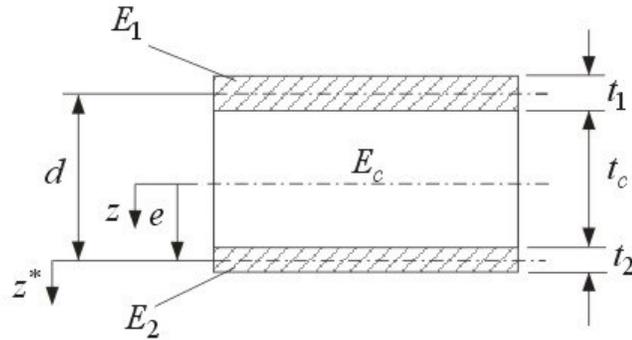


Figura 2.4 – Sistema de transformação de coordenadas utilizadas para determinação da linha neutra.

A expressão para o primeiro momento de área é então dada por:

$$B(z) = \int E z dz = \int E(z^* + e) dz^* = 0 \quad (2.42)$$

$$-\int E z^* dz^* = e \int E dz^* \quad (2.43)$$

Assim, para estrutura *sandwich* com uma seção transversal conforme a mostrada na Fig. 2.4, resulta:

$$E_1 t_1 \left( \frac{t_1}{2} + t_c + \frac{t_2}{2} \right) + E_c t_c \left( \frac{t_c}{2} + \frac{t_2}{2} \right) = e [E_1 t_1 + E_c t_c + E_2 t_2] \quad (2.44)$$

E, na condição de um núcleo pouco rígido, pode-se escrever:

$$e \cong \frac{E_1 t_1 d}{E_1 t_1 + E_2 t_2} \quad (2.45)$$

$$d - e \cong \frac{E_2 t_2 d}{E_1 t_1 + E_2 t_2} \quad (2.46)$$

Por conseguinte, para a rigidez de flexão obtém-se a expressão:

$$D = \frac{E_1 t_1^3}{12} + \frac{E_2 t_2^3}{12} + \frac{E_c t_c^3}{12} + E_1 t_1 (d - e)^2 + E_2 t_2 e^2 + E_c t_c \left( \frac{t_c + t_2}{2} - e \right)^2 \quad (2.47)$$

na qual

$$d = \frac{t_1}{2} + t_c + \frac{t_2}{2} \quad (2.48)$$

e  $d$  é a distância entre os centróides das duas faces.

Para a condição  $E_c \ll E_1, E_2$ , a eq. (2.47) pode ser simplificada, de forma que a rigidez de flexão para a estrutura *sandwich* assume a forma:

$$D \cong \frac{E_1 t_1^3}{12} + \frac{E_2 t_2^3}{12} + \frac{E_1 t_1 E_2 t_2 d^2}{E_1 t_1 + E_2 t_2} \quad (2.49)$$

Através das equações (2.19) e (2.20) e aplicando as considerações de núcleo pouco rígido de faces finas, as tensões normais podem ser determinadas:

$$\sigma_1 = -\frac{M_x (d - e) E_1}{D} = -\frac{M_x E_1 E_2 t_2 d}{D(E_1 t_1 + E_2 t_2)} \approx -\frac{M_x}{t_1 d} \quad (2.50)$$

$$\sigma_2 = -\frac{M_x e E_2}{D} = -\frac{M_x E_1 E_2 t_1 d}{D(E_1 t_1 + E_2 t_2)} \approx \frac{M_x}{t_1 d} \quad (2.51)$$

Onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são as tensões axiais nas faces.

As expressões para as tensões cisalhantes podem ser adaptadas, e assim resultam:

$$\text{Face 1: } -d + e - \frac{t_1}{2} \leq z \leq -d + e + \frac{t_1}{2}$$

$$\tau_1(z) = \frac{V_x E_1}{D} \frac{1}{2} \left[ \left( d - e + \frac{t_1}{2} \right)^2 - z^2 \right] \quad (2.52)$$

$$\text{Face 2: } e - \frac{t_2}{2} \leq z \leq e + \frac{t_2}{2}$$

$$\tau_2(z) = \frac{V_x E_2}{D} \frac{1}{2} \left[ \left( e + \frac{t_2}{2} \right)^2 - z^2 \right] \quad (2.53)$$

$$\text{Núcleo: } -d + e - \frac{t_1}{2} \leq z \leq 0$$

$$\tau_c(z) = \frac{V_x}{D} \left[ E_1 t_1 (d - e) + \frac{E_c}{2} \left\{ \left( d - e + \frac{t_1}{2} \right)^2 - z^2 \right\} \right] \quad (2.54)$$

$$\text{Núcleo: } 0 \leq z \leq e - \frac{t_2}{2}$$

$$\tau_c(z) = \frac{V_x}{D} \left[ E_2 t_2 e + \frac{E_c}{2} \left\{ \left( e - \frac{t_2}{2} \right)^2 - z^2 \right\} \right] \quad (2.55)$$

Igualmente, aplicando as considerações de núcleo não-rígido, a tensão cisalhante nesta região da estrutura pode ser aproximada por:

$$\tau_c \equiv \frac{V_x E_1 t_1 E_2 t_2 d}{D E_1 t_1 + E_2 t_2} \quad (2.56)$$

E no caso de aplicarem-se as considerações para faces finas, a expressão para a tensão cisalhante é simplificada como:

$$\tau_c \equiv \frac{V_x}{D} \quad (2.57)$$

### Equações do Movimento para Viga *Sandwich*

Na análise clássica de vigas, a deformação cisalhante é negligenciada pelo fato de o cisalhamento corresponder a uma pequena parcela do efeito do carregamento.

No caso das estruturas *sandwich*, o efeito do cisalhamento é efetivo e, portanto, tanto as deformações devidas a momentos fletores,  $w_b$ , com as devidas às solicitações transversais,  $w_s$ , devem ser consideradas.

Logo, a deformação total é composta por estas duas parcelas:

$$w = w_b + w_s \quad (2.58)$$

A Fig. 2.5 ilustra estas componentes da deformação individualmente em um elemento de viga *sandwich* e o resultado da ação conjunta das duas nesse mesmo elemento. Os termos de deslocamento são denotados por  $(.)'$  se referem à deformação transversal, enquanto que  $(.)''$  dizem respeito à deformação no sentido longitudinal. A deformação cisalhante é denotada por  $\gamma_c$ .

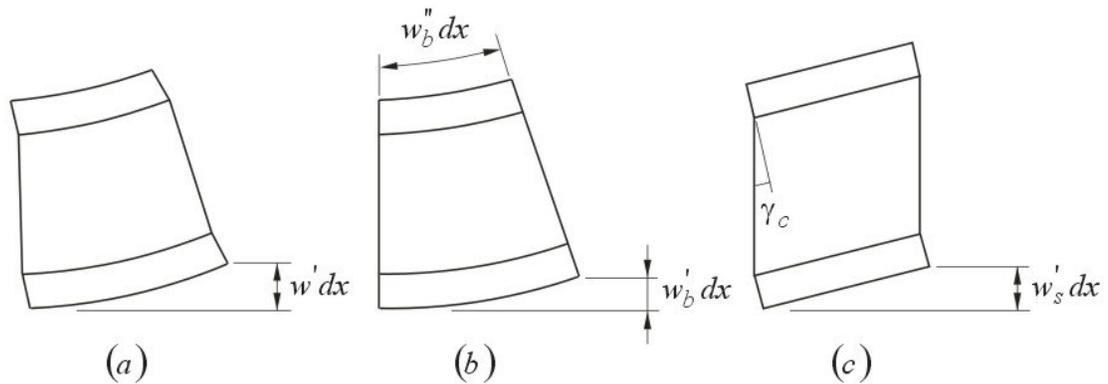


Figura 2.5 – Efeito da deformação total (a), devida à flexão (b) e ao cisalhamento (c), em um elemento de viga *sandwich*.

### Deformações por Cisalhamento

Quando um elemento estrutural está sujeito a forças cisalhantes a deformação ocorre sem mudança de volume. Tal deformação ainda pode ser dividida em duas partes distintas conforme esquematizado na Fig. 2.6, a *transversal*, denominada por  $\gamma_t$ , e a *longitudinal*, definida por  $\gamma_o$ .

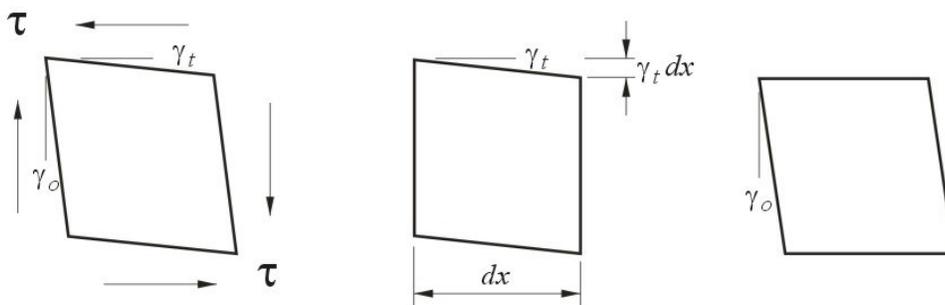


Figura 2.6 – Componentes *transversal* e *longitudinal* da deformação cisalhante.

Na Fig. 2.7, estas componentes são agora mostradas para um elemento estrutural *sandwich*. Neste caso, a deformação ocorre somente no núcleo, já que o módulo de cisalhamento das faces,  $G_f$ , tende ao infinito, e que ainda é a

mesma é linear, visto que  $E_c \ll E_f$ , resultando tensões cisalhantes e deformação no cisalhamento constantes.

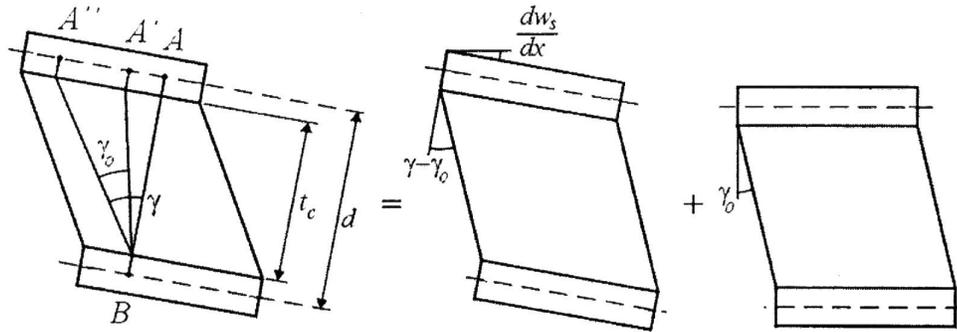


Figura 2.7 – Deformação cisalhante em um elemento de viga *sandwich*.

Na Fig. 2.7,  $\gamma$  é o cisalhamento total,  $\gamma_0$  sua componente longitudinal e a reta  $AB$  referencia no elemento a condição anterior à deformação. O deslocamento do ponto  $A$  para  $A'$  é devido ao cisalhamento transversal e, de  $A'$  para  $A''$  devido ao cisalhamento longitudinal. Por meio de simples análise geométrica, pode estabelecer a distância entre  $A$  e  $A'$  como:

$$\frac{dw_s}{dx}d = (\gamma - \gamma_0)t_c$$

$$\frac{dw_s}{dx} = \frac{V_x}{S} - \frac{\gamma_0 t_c}{d} \rightarrow \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{I}{S} \frac{dV_x}{dx} \quad (2.59)$$

Logo,

$$w_s = \int_0^x \left( \frac{V_x}{S} - \frac{\gamma_0 t_c}{d} \right) dx = \frac{M_x}{S} - \frac{\gamma_0 t_c}{d} x + C \quad (2.60)$$

onde  $C$  é uma constante de integração e  $S$  é a rigidez ao cisalhamento, a qual será definida na seqüência.

### Rigidez ao Cisalhamento

A rigidez ao cisalhamento  $S$  de uma seção transversal é definida como sendo a relação entre a medida da deformação cisalhante e a força cortante,  $\gamma = V_x/S$ .

Para uma seção homogênea,  $S$  pode ser determinada pela expressão:

$$S = \frac{Gh}{k} \quad (2.61)$$

Na qual  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $h$  é altura da seção e  $k$  é o fator de cisalhamento, que varia de acordo com a geometria da seção. Para uma seção qualquer,  $S$  pode ser obtido por meio do cálculo da energia de deformação da seção, da qual se obtém:

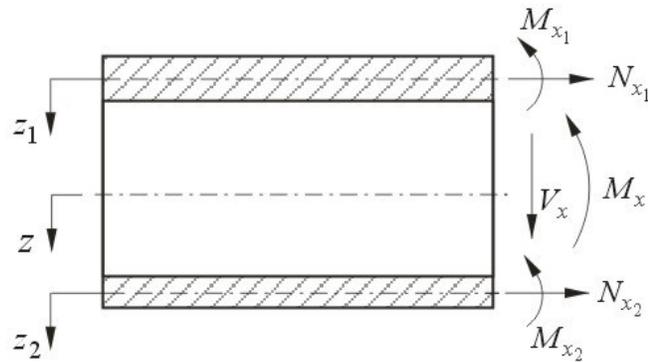
$$\frac{1}{2}V_x\gamma = \frac{1}{2}\int \tau_{xz}(z)\gamma_{xz}(z)dz \quad (2.62)$$

Aplicando as aproximações para  $t_f \ll t_c$  e  $E_c \ll E_f$  e ainda, considerando o módulo de cisalhamento das faces como possuindo magnitude extremamente elevada, tem-se  $\tau_{xz} = V_x/d$  e a eq. (2.62) resulta:

$$\frac{1}{2}V_x\gamma = \frac{1}{2}\int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} \frac{V_x}{d} \frac{V_x}{G_c d} dz = \frac{V_x^2 t_c}{2G_c d^2} = \frac{V_x^2}{2S}$$

$$S = \frac{G_c d^2}{t_c} \quad (2.63)$$

As equações em termos do campo de deslocamento são definidas a partir do sistema de coordenadas locais para as faces e para o núcleo conforme a Fig. 2.8.



**Figura 2.8 – Sistema de coordenadas locais estabelecido como referencia para o elemento de viga *sandwich*.**

As condições cinemáticas estabelecem que os deslocamentos longitudinais e transversais são da forma:

$$u(z) = u_o + z\psi_x \quad (2.64)$$

$$w = w_b + w_s \quad (2.65)$$

Onde o deslocamento longitudinal  $u$  é uma função linear em  $z$ , e  $\psi_x$  é a rotação da seção transversal. Sabendo que esta depende tão somente da deformação devido à flexão da viga, já que o cisalhamento provoca unicamente o deslizamento da seção, tem-se que:

$$\psi_x = -\frac{dw_b}{dx} \quad (2.66)$$

Será considerado primeiramente o caso de se ter faces suficientemente finas de forma a comportarem-se como membranas, ou seja, qualquer deformação transversal ocorrerá sem qualquer resistência das faces à flexão sobre suas linhas neutras. Este tratamento é proveniente do conceito de *deflexões parciais*, ou seja, flexões provocam tensões axiais e forças cortantes provocam tensões cisalhantes e deformações. A abordagem dada considera apenas efeitos provenientes de forças impostas à viga, de forma que não existem deformações iniciais na mesma (Oresten, 2003).

Oriundas da curvatura devida à flexão, as tensões axiais para as faces e núcleo apresentam a forma:

$$\sigma_1 = -E_1 z \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (2.67)$$

$$\sigma_2 = -E_2 z \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (2.68)$$

$$\sigma_c = -E_c z \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (2.69)$$

Sabendo que  $z_1 = z + d - e$  e  $z_2 = z - e$ , as forças axiais para as faces superior e inferior podem ser expressas respectivamente por:

$$N_{x_1} = - \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \left[ E_1 (z_1 - d + e) \frac{d^2 w_b}{dx^2} \right] dz_1 = E_1 t_1 (d - e) \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (2.70)$$

$$N_{x_2} = - \int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \left[ E_1 (z_2 + e) \frac{d^2 w_b}{dx^2} \right] dz_2 = - E_2 t_2 e \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (2.71)$$

onde  $e$  é a distância entre a face e a linha neutra.

No caso de faces simétricas, as forças normais simplesmente se reduzem a:

$$N_{x_{f1}} = -N_{x_{f2}} = -\frac{D_o}{d \left( \frac{d^2 w_b}{dx^2} \right)} \quad (2.72)$$

O valor do momento fletor na face superior é obtido por:

$$M_{x_1} = -\int_{-\frac{t_1}{2}}^{\frac{t_1}{2}} \left[ E_1 z_1 (z_1 - d + e) \frac{d^2 w_b}{dx^2} \right] dz_1 = -\frac{E_1 t_1^3}{12} \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (2.73)$$

e tem a mesma forma para a face inferior. Utilizando a mesma integração para o núcleo, obtêm-se:

$$N_{x_c} = 0 \quad (2.74)$$

$$M_{x_c} = -D_c \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (2.75)$$

Logo, o momento fletor total fica definido por:

$$M_x = -(D_o + D_1 + D_2 + D_c) \frac{d^2 w_b}{dx^2} = -D \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (2.76)$$

É possível verificar que a resposta de uma viga *sandwich* a uma solicitação é descrita por duas constantes: a rigidez flexural  $D$  e a rigidez ao

cisalhamento  $S$ . Estas constantes são definidas considerando distorções de um elemento sob ação de apenas uma das cargas  $M_x$  e  $V_x$  de cada vez.

Por definição:

$$D = -\frac{M_x}{\frac{d^2 w_b}{dx^2}} \quad (2.77)$$

$$S = \frac{\frac{dV_x}{dx}}{\frac{d^2 w_s}{dx^2}} \quad (2.78)$$

e o resultado do efeito agregado:

$$\frac{d^2 w_s}{dx^2} = -\frac{M_x}{D} + \frac{1}{S} \frac{dV_x}{dx} \quad (2.79)$$

### Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio são obtidas a partir da análise do diagrama de corpo livre do elemento de viga na condição distorcida, o qual é mostrado na Fig. 2.9.

Considerando o equilíbrio de momentos, parte-se que  $dM_x/dx = V_x$  e, através da definição dada na eq. (2.73), estabelece-se uma relação entre as deflexões parciais, qual seja:

$$\frac{d^2 w_s}{dx^2} = -\frac{D}{S} \frac{d^4 w_b}{dx^4} \quad (2.80)$$

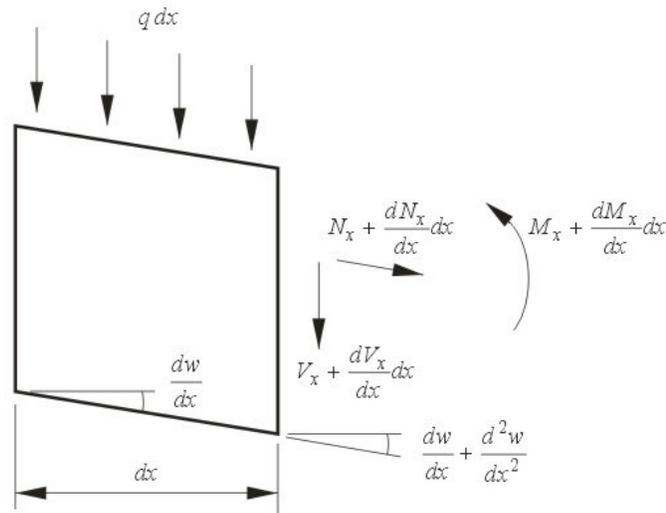


Figura 2.9 – Diagrama de corpo livre de um elemento de viga na condição deformada.

Fazendo o equilíbrio de forças na direção vertical, obtém-se que:

$$q + \frac{dV_x}{dx} + N_x \frac{d^2w}{dx^2} = 0 \quad (2.81)$$

$$S \frac{d^2w_s}{dx^2} + N_x \frac{d^2w}{dx^2} = -q \quad (2.82)$$

Combinando as equações (2.80) e (2.82), resulta na equação diferencial em termos de  $w_b$  :

$$D \frac{d^4w_b}{dx^4} - N_x \frac{d^2w}{dx^2} = q \quad (2.83)$$

A partir da relação entre as deflexões parciais, a eq. (2.83) ainda pode ser expressa por:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - D \frac{d^4 w_s}{dx^4} - N_x \frac{d^2 w}{dx^2} = q \quad (2.84)$$

Porém,

$$D \frac{d^4 w_s}{dx^4} = -\frac{D}{s} \frac{d^2}{dx^2} \left[ N_x \frac{d^2 w}{dx^2} + q \right] \quad (2.85)$$

Por conseguinte, chega-se a:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = \left( 1 - \frac{D}{s} \frac{d^2}{dx^2} \right) \left( q + N_x \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (2.86)$$

Que vem a ser a equação diferencial para vigas obtida por Mindlin (Shames e Dym, 1985).

### Equação de Movimento

Para se obter as equações de movimento para vigas *sandwich*, as equações de equilíbrio devem ser manipuladas considerando forças inerciais, de forma que o tempo é introduzido como variável. Para este fim, aplica-se a abordagem desenvolvida por Timoshenko.

Considerando as forças inerciais:

- Inércia Vertical: as forças de corpo atuando no elemento quando submetido a uma aceleração  $\partial^2 w / \partial x^2$  são:

$$-\int \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz = -\rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.87)$$

onde  $\rho^*$  é a massa por unidade de área e dado por:

$$\rho^* = \int \rho dz \quad (2.88)$$

- Inércia Rotacional: a seção transversal rotaciona quando fletida, numa proporção igual a  $\partial w_b / \partial x$ , conforme indicado na Fig. 2.10:

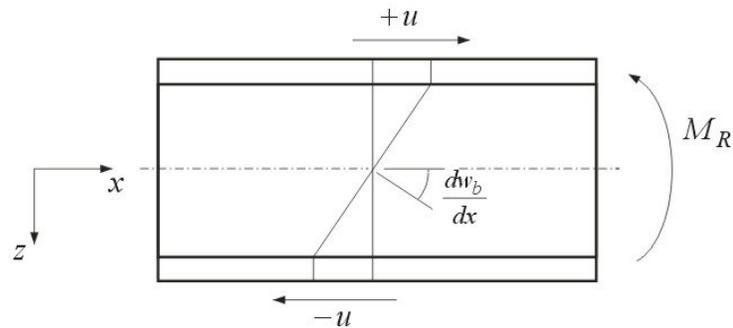


Figura 2.10 – Definição de Inércia Rotacional.

Se as faces são consideradas finas, implicando em tensões cisalhantes constantes ao longo da seção, pode-se escrever o deslocamento  $x$  como sendo:

$$u = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (2.89)$$

uma vez que

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \quad (2.90)$$

Cria-se também um momento fletor na direção oposta, definido como positivo na mesma direção que  $M_x$  e expresso por:

$$-\int \rho z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz = \int \rho z^2 \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t} dz = \mathfrak{R} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \quad (2.91)$$

Onde  $\mathfrak{R}$  é a *inércia rotatória* da seção transversal.

As equações de equilíbrio assumem a forma:

Forças Verticais:

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.92)$$

Momentos:

$$-V_x + \mathfrak{R} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \quad (2.93)$$

Utilizando as definições da relação de deslocamentos dada pelas equações (2.65) e (2.79), obtém-se que:

$$\rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - S \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = 0 \quad (2.94)$$

$$D \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + S \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \mathfrak{R} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (2.95)$$

A eq. (2.95) estabelece então a nova relação entre  $w_b$  e  $w_s$ , substituindo a eq. (2.59) no novo contexto. As deflexões parciais são agora eliminadas, e têm-se as expressões:

$$S \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.96)$$

$$\mathfrak{R} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} = \mathfrak{R} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\mathfrak{R} \partial^2}{S \partial t^2} \left[ \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2.97)$$

$$D \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} = D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{D \partial^2}{S \partial x^2} \left[ q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \quad (2.98)$$

a partir das quais chega-se à equação do movimento:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left( \frac{D \partial^2}{S \partial x^2} - 1 - \frac{\mathfrak{R} \partial^2}{S \partial t^2} \right) \left[ q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] - \mathfrak{R} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (2.99)$$

que é a chamada *Equação da Viga de Timoshenko*. No caso de vibração livre não amortecida, as cargas aplicadas  $q$  e  $N_x$  são nulas e a eq. (2.99) se resume a:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho}{S} \left( D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \mathfrak{R} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \right) - \mathfrak{R} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (2.100)$$

A massa específica do material componente, denominada por  $\rho^*$ , que pode ser considerado como sendo o peso por unidade de superfície, é determinada por:

$$\rho^* = \rho_1 t_1 + \rho_2 t_2 + \rho_3 t_3 \quad (2.101)$$

Já para a determinação da inércia rotatória, procede-se como para o cálculo da rigidez flexural  $D$  porém substituindo  $E$  por  $\rho$ , de forma que isto resulta em:

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho_1 t_1^3}{12} + \frac{\rho_2 t_2^3}{12} + \frac{\rho_c t_c^3}{12} + \rho_1 t_1 (d - e)^2 + \rho_2 t_2 e^2 + \rho_c t_c \left( \frac{t_c + t_2}{2} - e \right)^2 \quad (2.102)$$

É importante salientar que, nesta, a contribuição do núcleo torna-se bastante significativa, uma vez que a razão de massa específica é menor que a de módulos elásticos.

# Capítulo 3

## O Elemento Finito para a Viga Sandwich

### 3.1 Introdução

Neste capítulo será mostrada a dedução do elemento de viga *sandwich* baseado na eq. de equilíbrio obtida com a teoria da Viga de Timoshenko.

### 3.2 Formulação de Timoshenko

Neste tópico apresenta-se a formulação básica para o elemento de viga *sandwich* elaborada por Oresten ( 2003).

A eq. (2.99) apresentada no Capítulo 2 é chamada de Equação do movimento para viga *sandwich* de Timoshenko. A partir da mesma é feita uma simplificação para o caso de vibração livre não amortecida, onde as cargas  $q$  e  $N_x$  são nulas, obtendo-se a Equação Homogênea do movimento da viga representada na eq. (2.100) aqui reescrita:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho}{S} \left( D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \mathfrak{K} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \right) - \mathfrak{K} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

onde:

$w = w(x, t)$  é uma função harmônica (deslocamento transversal da LN).

$\rho^*$  é o peso por unidade de superfície cujo valor é calculado na eq. (2.101)

$D$  é a rigidez flexural mostrada na eq. (2.49)

$\mathfrak{R}$  é a inércia rotatória da seção transversal dada na eq. (2.102)

$S$  é a rigidez ao cisalhamento de uma seção transversal cujo valor é determinado pela eq. (2.61).

Admitindo-se que  $w = w(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$  é uma função harmônica expressa em função do tempo e espaço, e derivando-se  $w(x, t)$  em relação ao tempo:

derivada de primeira ordem:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = i\omega W(x)e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

derivada de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\omega^2 W(x)e^{i\omega t} \quad (3.3)$$

derivada de terceira ordem:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} = -i\omega^3 W(x)e^{i\omega t} \quad (3.4)$$

derivada de quarta ordem:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = \omega^4 W(x)e^{i\omega t} \quad (3.5)$$

Substituindo os resultados das equações (3.2) a (3.5) na eq. (3.1) e arranjando-se os termos, obtém-se a eq. (3.6):

$$e^{i\omega t} \left[ D \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} + \rho^* (-\omega^2) W(x) - \frac{\rho}{S} \left( D(-\omega^2) \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} - \mathfrak{R} \omega^4 W(x) \right) - \mathfrak{R}(-\omega^2) \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (3.6)$$

Aproximando-se  $W(x)$  por  $\tilde{w}(x)$  na eq. (3.6), obtém-se a eq. (3.7) onde  $\epsilon(x)$  é o resíduo.

$$\left[ D \frac{\partial^4 \tilde{w}(x)}{\partial x^4} + \rho^* (-\omega^2) \tilde{w}(x) - \frac{\rho}{S} \left( D(-\omega^2) \frac{\partial^2 \tilde{w}(x)}{\partial x^2} - \mathfrak{R} \omega^4 \tilde{w}(x) \right) - \mathfrak{R}(-\omega^2) \frac{\partial^2 \tilde{w}(x)}{\partial x^2} \right] = \epsilon(x) \quad (3.7)$$

Aplicando-se o Método dos Resíduos Ponderados (Método de Galerkin) na eq. (3.7) obtém-se a eq. (3.8) que representa a matriz dinâmica equivalente para um elemento *sandwich*.

$$[K^e] = D[K] - \omega^2 \left[ \rho^* [M] + \left( \frac{\rho^* D}{S} + \mathfrak{R} \right) [K_\sigma] \right] + \omega^4 \frac{\rho^* \mathfrak{R}}{S} [M] \quad (3.8)$$

Onde:

A matriz  $[K_\sigma]$  é semelhante à matriz de rigidez para a flambagem da viga e vale:

$$[K_\sigma] = \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

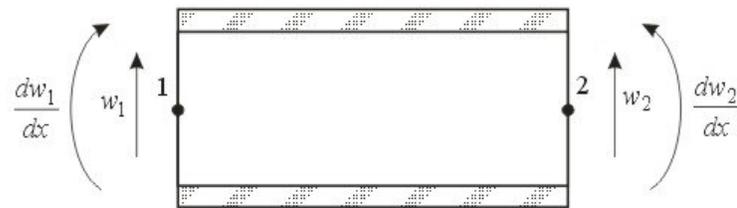
A matriz  $[M]$  é a matriz de massa do elemento de viga convencional com densidade unitária. Sua expressão numérica é:

$$[M] = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A matriz  $[K]$  é a parcela da matriz de rigidez semelhante à matriz de rigidez para a flexão do elemento de viga convencional com  $EI = 1$ . Sua expressão é:

$$[K] = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

A Fig. 3.1 mostra os graus de liberdade (translação e rotação) para um elemento de viga de Timoshenko.



**Figura 3.1 – Graus de liberdade para um elemento *sandwich* tratado conforme Viga de Timoshenko**

Para resolver o sistema proposto na eq. (3.12), realiza-se as seguintes etapas:

$$[K^e]\{q\} = \{F\} \quad (3.12)$$

- 1) Transforma-se a matriz de rigidez equivalente para uma matriz global em forma de banda.
- 2) Aplicam-se as condições de contorno e forças nodais na matriz global em forma de banda.
- 3) Transforma-se a matriz global em forma de banda em uma matriz triangular superior, conforme a rotina mostrada no anexo A.
- 4) Aplica-se a retro-substituição para encontrar a solução do campo de deslocamentos, conforme a rotina mostrada no anexo A.

Os deslocamentos calculados representam a Função Resposta em Freqüência numérica (FRF) onde a força (excitação do tipo transiente impulsiva) com o martelo de impacto foi aplicada. Para efeitos de cálculo utiliza-se uma força de amplitude unitária.

# Capítulo 4

## Métodos de ajuste de parâmetros

### 4.1 Introdução

Neste trabalho, foram utilizados dois métodos para ajuste de parâmetros físicos de um sistema mecânico, um baseado em algoritmos genéticos e outro baseado em um coeficiente de correlação de amplitude. Ambos os métodos utilizam a FRF obtida experimentalmente como referência para ajuste dos parâmetros de um modelo matemático. O modelo matemático foi mostrado no capítulo anterior.

### 4.2 Algoritmos Genéticos

Os algoritmos genéticos (AG's) são métodos de otimização e pesquisa que imitam os mecanismos de evolução dos seres vivos. Estes algoritmos seguem o princípio da seleção natural e a sobrevivência do mais apto, conforme Charles Darwin em seu livro: "A Origem das Espécies" (1859).

O método foi introduzido por John Holland (1975) através do estudo dos postulados do processo de Evolução Biológica citados a seguir:

- A evolução é um processo que opera sobre os cromossomos do organismo e não sobre o organismo que os carrega. Desta maneira, o que ocorrer com o organismo, durante sua vida, não irá se refletir sobre seus cromossomos. Entretanto o inverso não é verdadeiro: os cromossomos do organismo são o projeto e terão reflexos diretos sobre todas as características desse organismo (o indivíduo é a decodificação de seus cromossomos).

- Seleção natural é o elo entre os cromossomos e o desempenho que suas estruturas decodificam (o próprio organismo). O processo de seleção natural faz com que, aqueles cromossomos, que decodificarem organismos mais bem adaptados ao seu meio ambiente, sobrevivam e reproduzam mais do que aqueles que decodificam organismos menos adaptados.
- O processo de reprodução é o ponto através do qual a evolução se caracteriza. Mutação pode causar diferenças entre os cromossomos dos pais e o de seus filhos. Além disso, processos de recombinação (“Crossover”) podem fazer com que os cromossomos dos filhos sejam bastante diferentes dos de seus pais, uma vez que eles combinam materiais cromossômicos de dois genitores.

David Goldberg (1989), popularizou o método, resolvendo um problema muito difícil envolvendo controle de transmissão de gases em um gasoduto.

Nesta técnica de otimização são utilizados:

- 1) Um espaço de busca onde estão todas as possíveis soluções do problema.
- 2) Uma função de aptidão (objetivo), que é normalmente utilizada para avaliar cada um dos indivíduos da população (solução), associando a cada um deles uma nota.

Algumas das vantagens de um algoritmo genético são:

- a) Trabalham tanto com parâmetros contínuos como discretos.
- b) Não requer informação da derivada.
- c) Adaptam-se bem a computadores paralelos porque cada processador pode calcular uma função separadamente em algum momento do processamento.
- d) Trabalham com dados gerados numericamente, dados experimentais, ou funções analíticas.

- e) São fáceis de serem implementados em computadores
- f) Otimizam um número grande de variáveis.
- g) Realizam pesquisas simultâneas em uma grande região do espaço de busca, pois trabalham com uma população de pontos e não com um único ponto.

#### 4.2.1 Algumas terminologias usadas em Algoritmos Genéticos.

- Função Aptidão (“*Fitness Function*”) – corresponde a Função Objetivo a ser Otimizada, e tem a função de fazer a conexão entre o algoritmo genético e o problema a ser resolvido. A função toma como entrada o cromossomo (indivíduo), que é uma tentativa de solução do problema, e retorna um valor que mede o seu desempenho no problema: este número representa o seu grau de aptidão, que informa quão longe ou perto este cromossomo está da solução ótima do problema. A função aptidão tem a finalidade de fazer o mesmo papel que o meio ambiente faz com os organismos vivos, ou seja, fornece o grau de adequação do organismo ao meio ambiente e o seu valor será usado para o processo de seleção na reprodução.
- Gene ou Genes – Na biologia corresponde a unidade genética. No AG corresponde a uma unidade básica (parâmetro) que faz parte do cromossomo.
- Cromossomo – é um vetor de parâmetros (variáveis), cujo valor é passado para função objetivo a ser otimizada. Um cromossomo representa uma das soluções possíveis que pertencem ao espaço de busca. Se o cromossomo apresenta  $n$  parâmetros da função, então o espaço de busca é um espaço com  $n$  dimensões.
- População – Uma população é um vetor de cromossomos (indivíduos).

- Diversidade – Refere-se à distância média entre indivíduos numa população. Uma população tem alta diversidade se a distância média é grande; caso contrário a população terá baixa diversidade. A diversidade é essencial para os AG's porque possibilita que o algoritmo pesquise uma grande região no espaço de busca.
- Pais e filhos – Para criar a próxima geração, o algoritmo genético seleciona certos indivíduos na população, chamados de pais (“*parents*”), e os mesmos são usados para gerar novos indivíduos na próxima geração, conhecidos como filhos (“*children*”). Tipicamente o algoritmo selecionará os pais com melhores aptidões.
- Cruzamento é a capacidade de extrair o melhor gene a partir de indivíduos diferentes e combiná-los então para formar um filho com potencial superior.
- Mutação adiciona diversidade na população e desse modo aumenta a probabilidade do algoritmo gerar indivíduos com melhores valores de aptidão.
- Genótipo – representa a informação contida no cromossomo.
- Fenótipo – representa o objeto, estrutura ou organismo construído a partir das informações do genótipo. É o cromossomo decodificado. Por exemplo, considere que o cromossomo codifica parâmetros como as dimensões das vigas em um projeto de construção de um edifício. O fenótipo é o edifício construído.
- Alelo – representa os valores que o gene pode assumir.

#### 4.2.2 Etapas de um Algoritmo Genético

- a) Criar uma população inicial de soluções potenciais (indivíduos) utilizando um gerador aleatório.
- b) Avaliar cada indivíduo da população por meio da função aptidão.
- c) Selecionar os indivíduos mais aptos que serão os genitores da próxima geração.
- d) Gerar uma nova população através de manipulações genéticas (cruzamento e mutação). Retornar ao item (b) para calcular a aptidão de cada indivíduo da nova população.
- e) Repetir o processo até que a condição de parada seja satisfeita.

#### 4.2.3 Esquema de seleção

Na natureza, a seleção dos indivíduos é realizada pela sobrevivência do mais apto. Mais de um indivíduo é adaptado para o meio ambiente e grandes são as suas chances de sobreviver e gerar descendentes transferindo seus genes para próxima geração.

Nos algoritmos genéticos, os melhores indivíduos são ordenados de acordo com o cálculo da função aptidão. Se o problema de otimização é de minimização, então indivíduos com menor valor da função aptidão terão grandes chances de serem escolhidos para recombinação e gerar descendentes.

#### **Tipos de seleção:**

##### **Seleção proporcional a aptidão (Roleta).**

Primeiramente é calculada a probabilidade de cada indivíduo da população atual pela eq. (4.1) e a partir dos resultados é feita a escolha dos pais usando o método da roleta com o objetivo de copiar os membros mais aptos para reprodução.

$$P_i = \frac{f(x_i)}{\sum_{k=1}^N f(x_k)} \quad (4.1)$$

No método da Roleta cada setor da Fig. 4.1 representa um indivíduo com probabilidade  $P_i$ . Um número randômico entre 0 e  $2\pi$  determina qual o setor selecionado e o indivíduo que será escolhido.

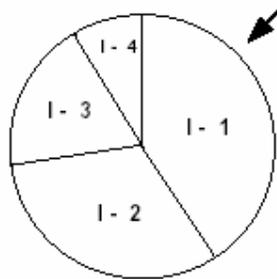


FIGURA 4.1 – Método da roleta

TABELA 4.1 – Probabilidades para cada indivíduo.

Número do sorteio	Indivíduo escolhido	Função Aptidão	Probabilidade – P
1	I - 1	4	0.4
2	I - 2	3	0.3
3	I - 3	2	0.2
4	I - 4	1	0.1

### Seleção por posto (*Rank selection*)

O indivíduo é sorteado de acordo com o valor de sua função aptidão e então é atribuído um posto para o mesmo. O posto do melhor indivíduo é igual

a 1. O posto do indivíduo que ocupa o segundo lugar é 2 e assim sucessivamente.

A probabilidade de cada indivíduo é calculada de acordo com a função não-linear apresentada na eq. (4.2). Para a seleção dos pais é usado o método da roleta.

$$P = \beta(1 - \beta)^{(\text{rank}-1)} \quad (4.2)$$

Onde:  $\beta$  é um coeficiente definido pelo usuário.

#### 4.2.4. Representação de parâmetros

A representação binária é historicamente importante, uma vez que foi utilizada nos trabalhos iniciais de Holland (1975), e é o sistema de representação tradicional, sendo fácil de utilizar e manipular. Porém, quando há muitos parâmetros, obtêm-se longas cadeias de bits que podem fazer o algoritmo convergir lentamente. Neste tipo de representação utilizam-se operadores convencionais, por exemplo: *Crossover* de 1 ponto, *crossover* de 2 pontos, *crossover* de  $n$  pontos e *crossover-uniforme*.

A relação existente entre o código binário e as variáveis reais limitadas por  $X_{\min}$  e  $X_{\max}$ , onde o comprimento do cromossomo ( $m=10$  bits) é representado na Tab. 4.2.

**Tabela 4.2 - Mapeamento de variáveis reais para o código binário**

Variável real	Código binário
$X_{\min}$	0000000000
$X_{\max}$	1111111111

O mapeamento das variáveis reais que pertencem ao intervalo limitado por  $[X_{\min}$  e  $X_{\max}]$  é calculado através da eq. (4.3):

$$valor_{real} = X_{\min} + \left( \frac{valor_{binario}}{2^n - 1} \right) (X_{\max} - X_{\min}) \quad (4.3)$$

Nos algoritmos genéticos cada indivíduo pode representar uma variável ou um conjunto de variáveis. No caso de problemas com multi-variáveis deve-se avaliar a ação conjunta de todos os parâmetros que constituem o indivíduo. Por exemplo, num problema com quatro variáveis, cuja solução é igual ao vetor  $X = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4]$ , onde cada  $X_i$  é uma variável e seu conjunto representa o indivíduo.

Na Tab. 4.3 é indicada uma das maneiras de se representar as variáveis ou parâmetros de cada indivíduo da população. Neste caso cada uma das variáveis  $X_{i,j}$  tem comprimento de 6 bits.

**Tabela 4.3 – Representação binária de 4 indivíduos com quatro variáveis.**

População	Variáveis			
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
Indivíduo 1	100101	010110	011000	101001
Indivíduo 2	110011	001110	100110	011110
Indivíduo 3	111001	110011	001100	110011
Indivíduo 4	110101	011100	110011	011010

Na Tab. 4.4 é mostrado como representar uma cadeia de bits, ou seja, o conjunto de todos os parâmetros de cada indivíduo da população.

**Tabela 4.4 – Representação binária de uma população com quatro indivíduos**

População	Representação binária
Indivíduo 1	100101010110011000101001
Indivíduo 2	110011001110100110011110
Indivíduo 3	111001110011001100110011
Indivíduo 4	110101011100110011011010

### 4.2.5. Operadores Genéticos

#### a) Cruzamento

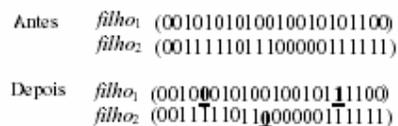
O cruzamento ou corte (*crossover*) ocorre em duas etapas, sendo a primeira onde se determina de forma aleatória quais os indivíduos que se combinarão e, também de maneira aleatória, em que posição do cromossomo se processará o cruzamento. A Fig. 4.2 mostra um exemplo de cruzamento utilizando a codificação binária.



**Figura 4.2 - Cruzamento**

#### b) Mutação

A mutação é uma alteração aleatória e ocasional de uma posição qualquer do cromossomo. Esta alteração ocorre de acordo com uma probabilidade prefixada e, por exemplo, no caso de representação binária, poderá significar mudança de “1” para “0” ou de “0” para “1”. A Fig. 4.3 apresenta um caso de mutação utilizando a codificação binária.



**Figura 4.3 – Mutação**

#### **4.2.6. Parâmetros genéticos**

Os parâmetros genéticos são elementos importantes nos AG's. Eles controlam todo processo de busca, influenciando diretamente a velocidade de convergência, e evitando que aconteça a supremacia de uma determinada sub-população, o que geraria o chamado "Elitismo".

##### **a) Tamanho da população**

O tamanho da população afeta a eficiência do algoritmo. Uma população pequena produz um desempenho menor e poderá levar a solução para um mínimo local. Uma grande população eleva o tempo computacional, pois o número de avaliações da Função Objetivo é muito maior. Mas em compensação poderá encontrar uma solução global.

##### **b) Probabilidade de cruzamento ( $P_c$ )**

A probabilidade de cruzamento é um valor percentual do número de indivíduos que experimentam mutação em relação ao número total de indivíduos. Uma alta probabilidade de cruzamento, sem elitismo, faz com que os indivíduos com alto desempenho sejam eliminados antes mesmo que a seleção possa produzir aperfeiçoamento. E uma baixa taxa de cruzamento diminui a exploração das características genéticas.

##### **c) Probabilidade de Mutação ( $P_m$ )**

É o percentual do número de bits escolhidos aleatoriamente para serem alterados em relação ao número total de bits da população. Uma baixa taxa de mutação não permite a restauração da diversidade genética da população. Enquanto que uma alta taxa de mutação resulta em busca essencialmente aleatória.

### 4.3 Método de ajuste com coeficiente de correlação de amplitude

Assumindo que a resposta  $H_{ij}$  equação (4.4) e a sua derivada (4.5) podem ser calculadas a partir de uma representação de um sistema reduzido,

$$H_{ij} = \Re(H_{ij}) + \Im(H_{ij}) \quad (4.4)$$

e

$$\frac{\partial H_{ij}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Re(H_{ij})}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Im(H_{ij})}{\partial \varphi} \quad (4.5)$$

É proposto fazer uso dos coeficientes de correlação de forma  $\chi_s(\omega_k)$  e de amplitude  $\chi_a(\omega_k)$  e as suas sensibilidades (derivadas) de uma maneira combinada para melhorar o nível global da correlação.

Coefficiente de correlação de forma  $\chi_s$  :

$$\chi_s(\omega_k) = \frac{|\{H_x(\omega_k)\}^H \{H_A(\omega_k)\}|^2}{(\{H_x(\omega_k)\}^H \{H_x(\omega_k)\})(\{H_A(\omega_k)\}^H \{H_A(\omega_k)\})} \quad (4.6)$$

Coefficiente de correlação de amplitude  $\chi_a$  :

$$\chi_a(\omega_k) = \frac{2|\{H_x(\omega_k)\}^H \{H_A(\omega_k)\}|}{\{H_x(\omega_k)\}^H \{H_x(\omega_k)\} + \{H_A(\omega_k)\}^H \{H_A(\omega_k)\}} \quad (4.7)$$

A derivada do coeficiente de correlação de forma é mostrada na eq. (4.8):

$$\frac{\partial \chi_s(\omega_k)}{\partial \varphi} = \frac{\partial |\{H_x\}^H \{H_A\}|^2}{\partial \varphi} \frac{(\{H_x\}^H \{H_x\})(\{H_A\}^H \{H_A\})}{(\{H_x\}^H \{H_x\})^2 (\{H_A\}^H \{H_A\})^2} - \frac{\partial (\{H_x\}^H \{H_x\})(\{H_A\}^H \{H_A\})}{\partial \varphi} \frac{|\{H_x\} \{H_A\}|^2}{(\{H_x\}^H \{H_x\})^2 (\{H_A\}^H \{H_A\})^2} \quad (4.8)$$

A derivada do coeficiente de correlação de amplitude é mostrada na eq. (4.9):

$$\frac{\partial \chi_a(\omega_k)}{\partial \varphi} = 2 \frac{\partial |\{H_x\}^H \{H_A\}|}{\partial \varphi} \frac{(\{H_x\}^H \{H_x\} + \{H_A\}^H \{H_A\})}{(\{H_x\}^H \{H_x\} + \{H_A\}^H \{H_A\})^2} - 2 \frac{\partial (\{H_A\}^H \{H_A\})}{\partial \varphi} \frac{|\{H_x\}^H \{H_A\}|^2}{(\{H_x\}^H \{H_x\} + \{H_A\}^H \{H_A\})^2} \quad (4.9)$$

onde:

$\{H_A\} = \{H_A(\omega_k, \{\varphi\})\}$  é a FRF numérica

$\{H_x\} = \{H_x(\omega_k)\}$  é a FRF experimental

$\varphi$  é o parâmetro sendo ajustado

Baseado numa série expandida de Taylor truncada, pode-se escrever as equações (4.8) e (4.9) para a frequência  $\omega_k$  como é mostrado na eq. (4.10):

$$\begin{Bmatrix} 1 - \chi_s(\omega_k) \\ 1 - \chi_a(\omega_k) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \chi_s(\omega_k)}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial \chi_s(\omega_k)}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial \chi_s(\omega_k)}{\partial \varphi_{N_\varphi}} \\ \frac{\partial \chi_a(\omega_k)}{\partial \varphi_1} & \frac{\partial \chi_a(\omega_k)}{\partial \varphi_2} & \frac{\partial \chi_a(\omega_k)}{\partial \varphi_{N_\varphi}} \end{bmatrix}_{2 \times N_\varphi} \{\nabla \varphi\} \quad (4.10)$$

onde  $N_\varphi$  é o número de parâmetros.

A eq. (4.10) pode ser reorganizada para que a formulação fique na forma padrão dos modelos de realimentação (ajuste) baseados na sensibilidade, conforme é mostrado na eq. (4.11).

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\nabla\varphi\} \quad (4.11)$$

A equação (4.11) pode ser transformada em um sistema de equações considerando um determinado número de freqüências. Assumindo que  $N_{fu}$  é o número de freqüências selecionadas e que  $2N_{fu} > N\varphi$ , então a solução é viável.

Um coeficiente baseado numa extensão de “Mínimos-Quadrados” é proposto para minimizar:

$$J(\{\varphi\}) = \{\varepsilon\}^T [W_f] \{\varepsilon\} + \{\nabla\varphi\}^T [W_\varphi] \{\nabla\varphi\} \quad (4.12)$$

Onde:

$[W_f]$  é uma Matriz diagonal de peso para os pontos da freqüência.

$[W_\varphi]$  é uma Matriz diagonal de peso para atualização dos parâmetros

A equação (4.12) pode ser resolvida através de:

$$\{\nabla\varphi\} = \left[ [S]^T [W_f] [S] + [W_\varphi] \right]^{-1} [S]^T [W_f] \{\varepsilon\} \quad (4.13)$$

Onde:

$$[W_f] = \begin{bmatrix} [\chi_s(\omega)] & 0 \\ 0 & [\chi_a(\omega)] \end{bmatrix}_{2N_{fu} \times 2N_{fu}} \quad (4.14)$$

$$[\omega_\varphi] = [[S]^T [W_f] [S]]^{-1} \quad (4.15)$$

$$[W_\varphi] = \frac{\|[\omega_\varphi]\|^2}{\max(\text{diag}([\omega_\varphi]))} [\text{diag}([\omega_\varphi])]_{N_\varphi \times N_\varphi} \quad (4.16)$$

[S] é a matriz sensibilidade.

{ε} é o vetor resíduo.

O método descrito é conhecido como “Predictor-Corrector” e é utilizado tanto para ajuste da forma (elementos finitos) como para ajuste da amplitude da resposta. Neste trabalho será utilizado somente o coeficiente de correlação de amplitude uma vez que não se pretende modificar a malha de elementos finitos.

# Capítulo 5

## Implementação numérica

### 5.1 Introdução

As rotinas computacionais para a implementação dos métodos de ajuste usando Algoritmo Genético e Coeficiente de Correlação de Amplitude, assim como, Método dos Elementos Finitos foram implementadas em Matlab 5.3.

Para a implementação do Método dos Elementos Finitos usou-se a formulação da viga de Timoshenko para materiais compostos. Através do modelo matemático obtido pelo Método dos Elementos Finitos é possível avaliar numericamente a Função Resposta em Freqüência da viga “sandwich” considerando o ponto de aplicação da força o mesmo ponto onde é aplicada uma força instantânea por meio de um martelo de impacto para obtenção dos valores experimentais.

A Função Aptidão (Função Objetivo) a ser minimizada possui variáveis diferentes de projeto dependendo do caso em estudo. A função aptidão, neste caso, corresponde ao resíduo entre a Função Resposta em Freqüência experimental e numérica. A FRF experimental é obtida diretamente através de um acelerômetro disposto ao longo da amostra e os dados são adquiridos e tratados por um analisador de sinais da HP. Os arquivos com os dados experimentais são convertidos para o formato Matlab para poderem ser inseridos posteriormente nos programas.

A seguir mostra-se um esquema resumido do programa Genético:

## Programa principal

Inserir dados iniciais;

Contador de gerações = 0;

Geração da população de forma aleatória;

Avaliação da Função aptidão; (resíduo entre a Função Resposta em Freqüência numérica e experimental - Método de Timoshenko)

Faça enquanto [(contador de gerações ≤ número máximo de gerações) ou ( Função aptidão ≥ 0.01)]

Contador de geração = contador de geração +1;

Reprodução; (Seleção dos indivíduos mais aptos)

Cruzamento; (Operação entre pares de indivíduos escolhidos com uma taxa de probabilidade  $P_c$ )

Mutação; (Operação aleatória sobre um indivíduos selecionado com uma taxa de probabilidade  $P_m$ )

Avaliação da função aptidão para cada indivíduo da população atual;

Fim do faça enquanto;

Fim do Programa principal;

A eq. (5.1) representa a função aptidão (objetivo) -  $f(x)$  que contém os parâmetros a serem ajustados através do algoritmo Genético.

## Minimizar

$$f(x) = |FRF_{exp} - FRF_{num}| \quad (5.1)$$

sujeita a:

$$LB_i \leq X_i \leq UB_i, \quad i=1,2,3,4.$$

onde:

LB – limite inferior

UB – limite superior

**Dados fornecidos ao programa genético:**

**Variáveis de projeto ( $X_i$ ):**

$X_1$  = Módulo de elasticidade do núcleo de espuma rígida de poliuretano.

$X_2$  = Módulo de elasticidade da face de poliestireno.

$X_3$  = Fator de perda do núcleo.

$X_4$  = Fator de perda da face (somente para alguns casos em estudo)

**Limites das variáveis:**

a) limites do módulo de elasticidade do núcleo

$$LB_1 \leq X_1 \leq UB_1$$

b) limites do módulo de elasticidade da face

$$LB_2 \leq X_2 \leq UB_2$$

c) limites do fator de amortecimento do núcleo

$$LB_3 \leq X_3 \leq UB_3$$

d) limites do fator de amortecimento da face

$$LB_4 \leq X_4 \leq UB_4$$

**Parâmetros Genéticos:**

Tamanho da população = TP

Probabilidade de cruzamento = Pc

Probabilidade de mutação = Pm

**Critérios de parada:**

Número máximo de iterações (gerações) ou que a Função aptidão menor que 1%

**Intervalo de frequências:**

Frequência mínima =  $Freq_{min}$

Frequência máxima =  $Freq_{max}$

**Nome do arquivo para salvar os dados obtidos.**

< Nome arquivo >. mat

Na dissertação de Oresten (2003) foi apresentado através de um fluxograma o funcionamento da implementação das rotinas computacionais para simulação dinâmica de uma viga usando o Método de Timoshenko ( Figura 5.1). Neste trabalho alterou-se no fluxograma somente as etapas para cálculo dos valores modais, autovalores e autovetores, porque o objetivo é a obtenção da Função Resposta em Frequência numérica no nó onde foi aplicada a força com o martelo de impacto.

Para implementação do Método de ajuste usando Coeficiente de Correlação de Amplitude, foram implementadas somente duas rotinas novas uma para cálculo do Coeficiente de Amplitude, eq. (4.7) e sua sensibilidade (4.9). Com estes dados resolve-se o sistema mostrado na eq. (4.10). Como o valor do Coeficiente de Correlação de Amplitude possui valores entre 0 e 1, adotou-se como critério de convergência o valor 0.975.

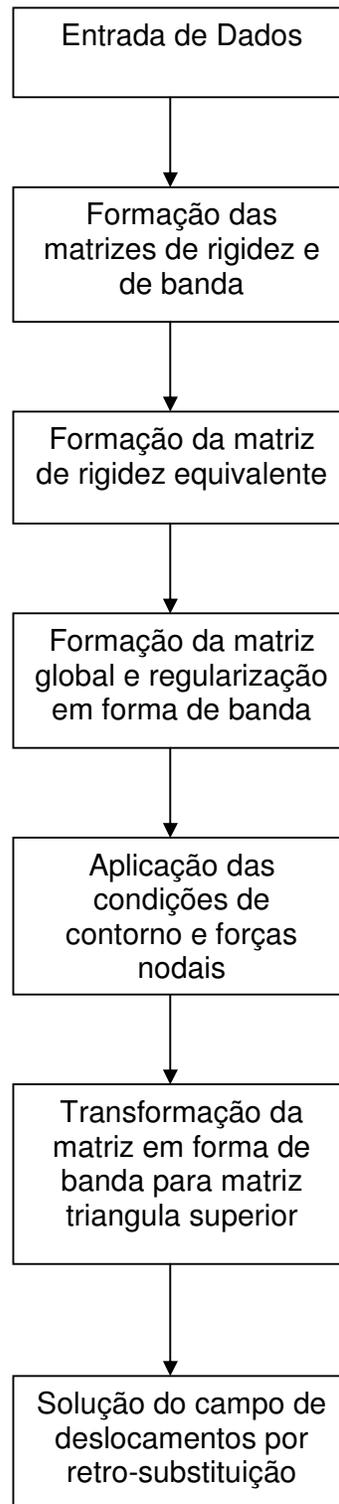


Figura 5.1 Fluxograma de operações para método de Timoshenko.

# Capítulo 6

## FRF Experimental

### 6.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados os equipamentos básicos de medição e esquema físico da amostra e os pontos de medição.

### 6.2 Materiais utilizados

- Martelo de Impacto PCB modelo 086C03 de 0 a 500 lb – utilizado para submeter a amostra a uma excitação implusiva.
- Analisador de sinais da Hewlett-Packard modelo 3566 – utilizado para captar os sinais vibratórios.
- Acelerômetros PCB modelo 353B18
  - Nº série 41.709 – 9.72 mV/g
  - Nº série 41.708 – 9.71 mV/g
  - Nº série 41.705 – 9.38 mV/g
  - Nº série 41.711 – 9.96 mV/g
- Amostras (Viga *sandwich* engastada numa base de concreto).
- Micro-computador PC.

### 6.3 Esquema de montagem

A Fig. 6.1 apresenta um desenho esquemático com o posicionamento dos acelerômetros na viga *sandwich* na condição engastada (as dimensões não estão em escala real). Duas baterias de testes foram realizadas: a primeira utilizando a faixa de frequências de 0 a 200 Hz (capturando os dois primeiros

modos de vibrar da viga) e a segunda parte na faixa de 0 a 400 Hz (capturando os quatro primeiros modos).

Os arquivos com as Funções Resposta em Frequência foram obtidas através de quatro acelerômetros dispostos ao longo da amostra nas posições  $L/4$ ,  $L/2$ ,  $3L/4$  e  $L$ . Os dados foram adquiridos e processados pelo Analisador de sinais 3566 e software específico da HP. Posteriormente os dados foram convertidos para o formato MatLab para serem inseridos no programa de ajuste de parâmetros.

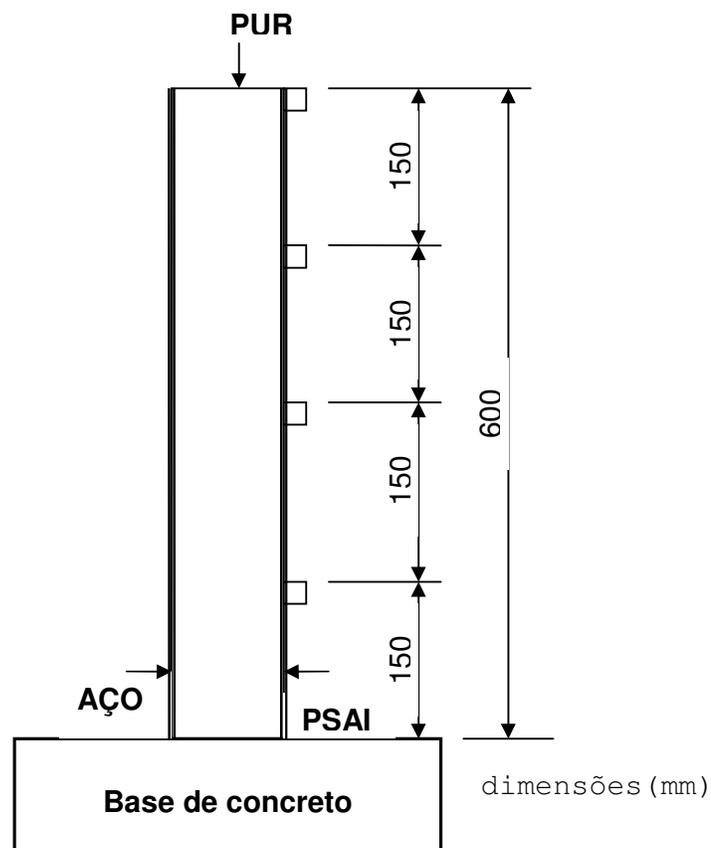
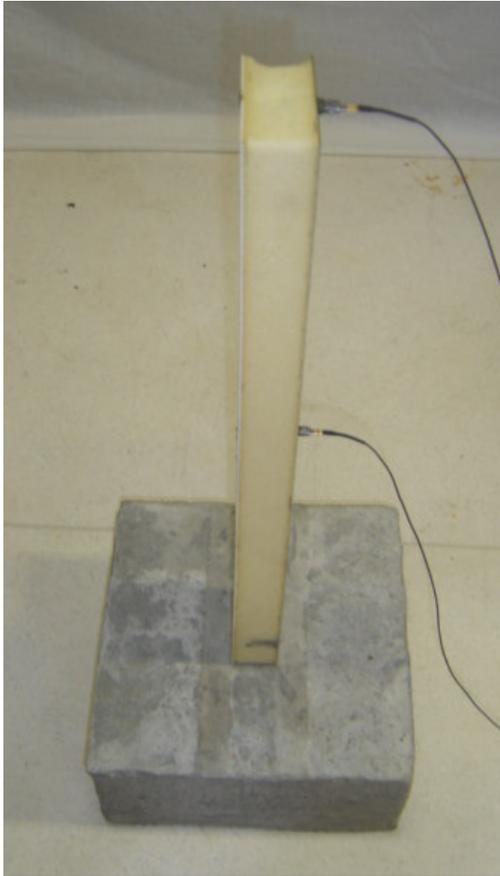


FIGURA 6.1 Posicionamento dos acelerômetros na viga *sandwich*

As Figuras 6.2 e 6.3 apresentam a maneira como foi realizado o engaste da viga *sandwich* na base de concreto. O peso da base de concreto é muito superior ao peso da viga. As espessuras da chapa de aço é 0,6 mm; do PSAI é 1,25 mm e do PUR é 38.25 mm. A largura da viga é 39.18 mm.



**FIGURA 6.2** Vista lateral da viga *sandwich* engastada na base de concreto



**FIGURA 6.3** Vista frontal da viga *sandwich* engastada na base de concreto

# Capítulo 7

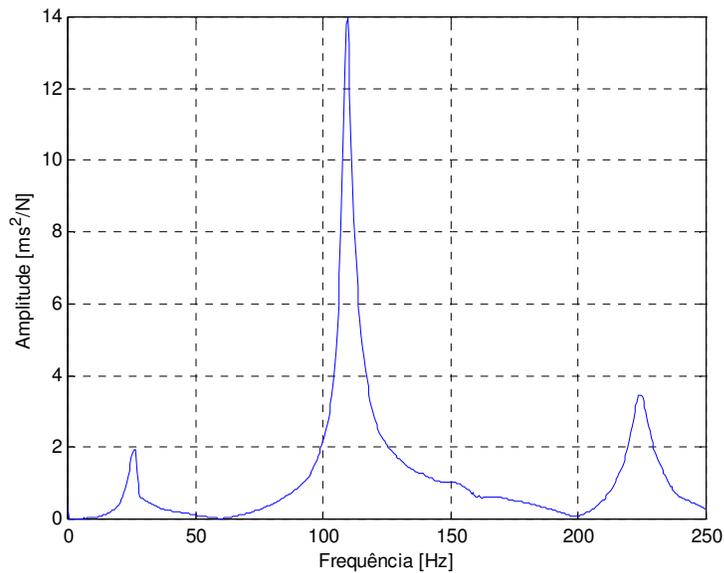
## Resultados

### Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar os resultados obtidos com o Método dos Algoritmos Genético e do Método de Correlação de Amplitude para ajuste de parâmetros de viga *sandwich*. Os procedimentos envolvem a simulação numérica de um modelo matemático baseado no Método dos Elementos Finitos usando a formulação da viga de Timoshenko para material composto e comparação dos resultados numéricos com dados experimentais.

### Ajuste dos Parâmetros Modais

Em uma primeira tentativa de ajuste considerou-se a Função Resposta em Freqüência para ajuste dos parâmetros modais. Para ajuste destes parâmetros utilizou-se o “Método dos Polinômios em Frações Racionais” (Iglesias, 2000). A Fig. 7.1 mostra uma curva experimental obtida pelo acelerômetro colocado no meio da amostra. A faixa de freqüência adotada foi até 250 Hz (três primeiros modos de vibrar).



**Figura 7.1 – Curva FRF experimental.**

Os valores obtidos para as freqüências naturais e os fatores de amortecimento estão mostrados na Tab. 7.1. Foram feitas três simulações para cada freqüência.

**Tabela 7.1 – Parâmetros modais ajustados**

Modo de vibrar	Freqüência [Hz]	Fator de amortecimento
1º modo	25.390	0.050
	25.389	0.050
	25.389	0.050
2º modo	109.45	0.0165
	109.45	0.0165
	109.45	0.0165
3º modo	224.02	0.0152
	223.99	0.0152
	224.02	0.0152

Com base nestes resultados, procurou-se ajustar alguns parâmetros físicos do sistema, ou seja, o módulo de elasticidade e o fator de perda da espuma rígida de poliuretano (núcleo) e o módulo de elasticidade Poliestireno de Alto Impacto. Estes parâmetros foram ajustados utilizando-se o algoritmo genético e considerando a função objetivo como sendo a diferença entre a frequência correspondente ao valor máximo nas curvas FRF numérica e experimental. Esta frequência é igual a  $\omega = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$ , onde  $\omega_n$  é a frequência natural e  $\xi$  é o fator de amortecimento. Como critério de convergência utilizou-se 1% da frequência natural experimental. Utilizaram-se os resultados de seis simulações para cada frequência. As Figuras 7.2 a 7.4 mostram os valores ajustados. Nestas figuras estão representados os valores das seis simulações e a curva média. O módulo de elasticidade do núcleo (Fig. 7.2) apresenta um grande aumento entre o 1º e o 2º modo, entretanto, mantém quase constante entre o 2º e o 3º modo. O fator de perda do núcleo (Fig. 7.3) apresenta uma grande redução no valor entre o 1º e o 2º modo de vibrar, entre o 2º e o 3º modo a variação é pequena. O módulo de elasticidade do Poliestireno de Alto Impacto (Fig. 7.4) apresenta comportamento semelhante ao módulo de elasticidade do núcleo apresentando somente uma pequena variação entre o 2º e o 3º modo. Nota-se nestas figuras a grande variação que os valores podem assumir para uma mesma frequência.

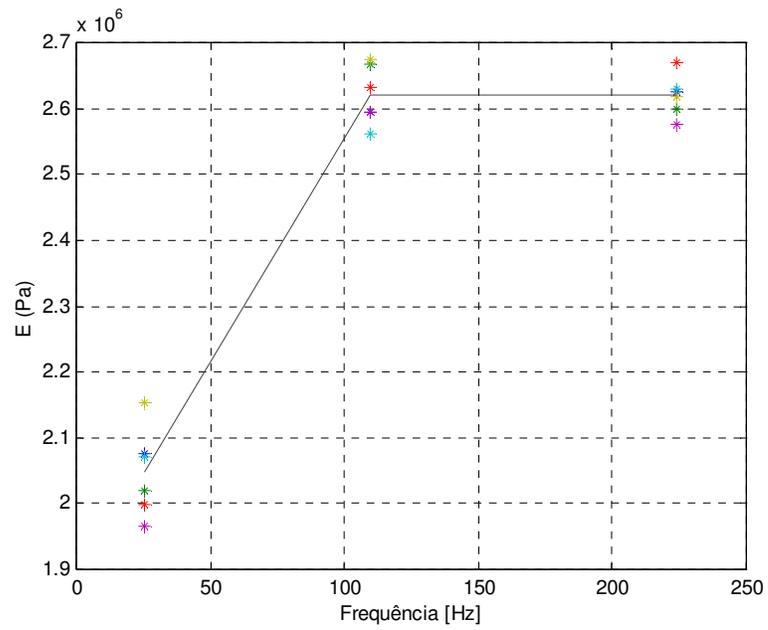


Figura 7.2 – Valores ajustados para o módulo de elasticidade do núcleo

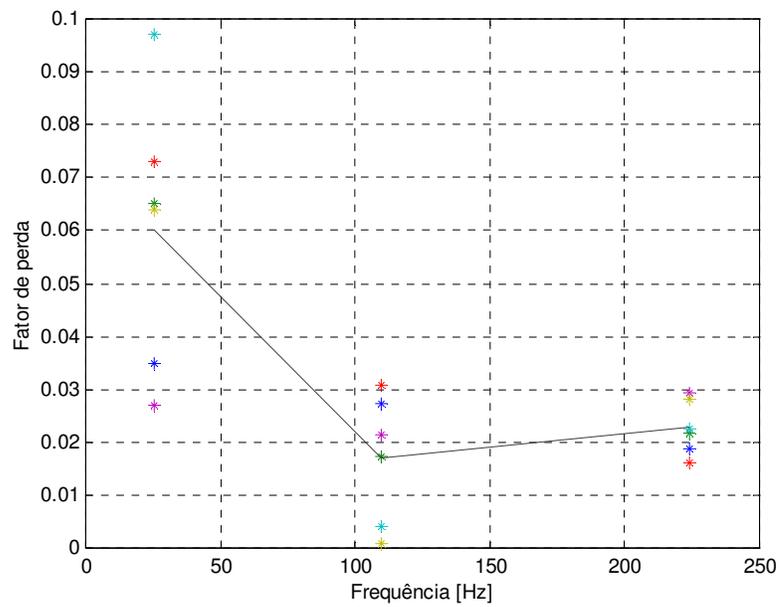
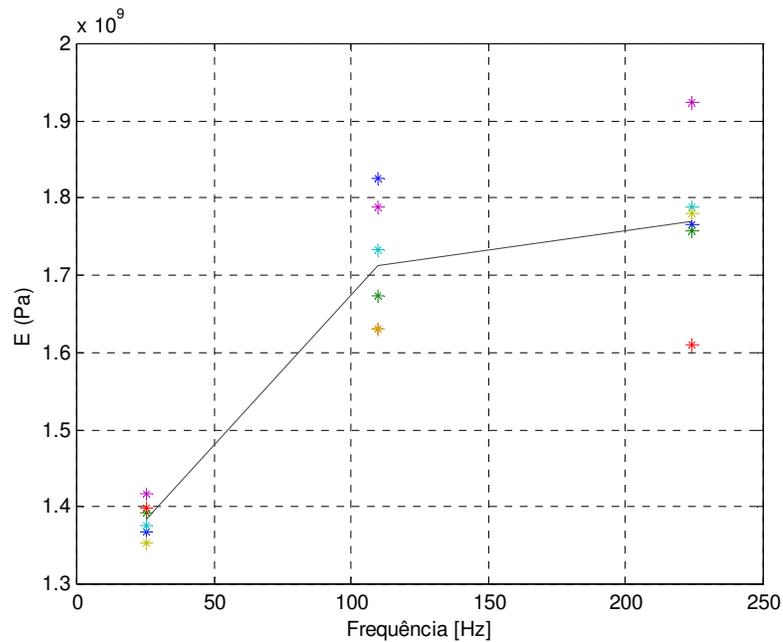


Figura 7.3 – Valores ajustados para o fator de perda do núcleo



**Figura 7.4 – Valores ajustados para o módulo de elasticidade do Poliestireno de Alto Impacto.**

Com base nas curvas ajustadas (valores médios) ajustou a curva FRF do sistema (Fig. 7.5). A curva denominada “polinômio sem modificação” utilizou os valores ajustados para o fator de perda mostrados na Fig. 7.3. Notou-se que houve uma grande variação em torno da 1ª frequência natural. Na tentativa de melhorar o ajuste próximo desta curva foi adotado para esta faixa fator de perda de 0.1 (duas vezes o fator de amortecimento). Pode-se notar na Fig. 7.6 que com estes valores, os picos da curva experimental e ajustada ficaram próximos. Nota-se na Fig. 7.5 que as curvas experimentais e ajustadas possuem comportamentos semelhantes.

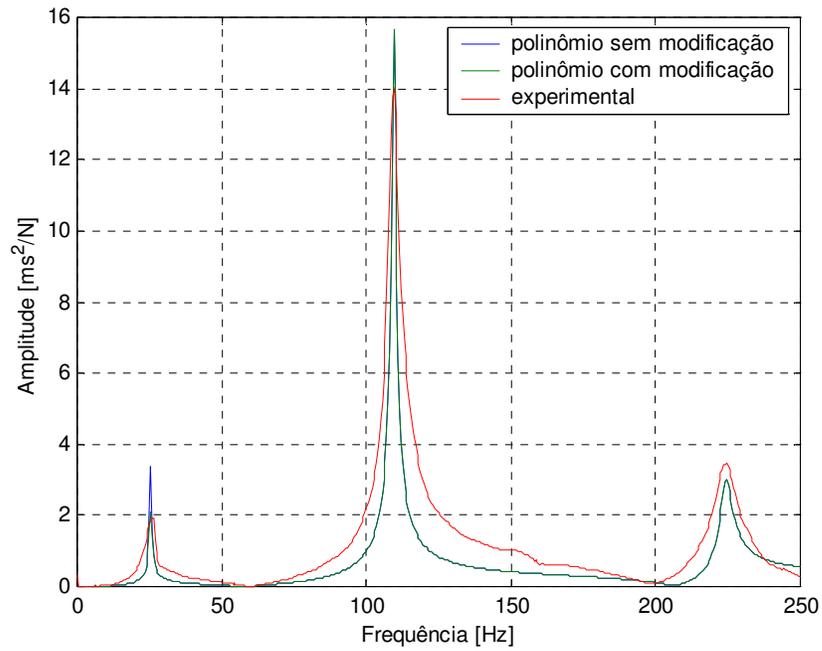


Figura 7.5 – Curvas FRF experimental e ajustadas.

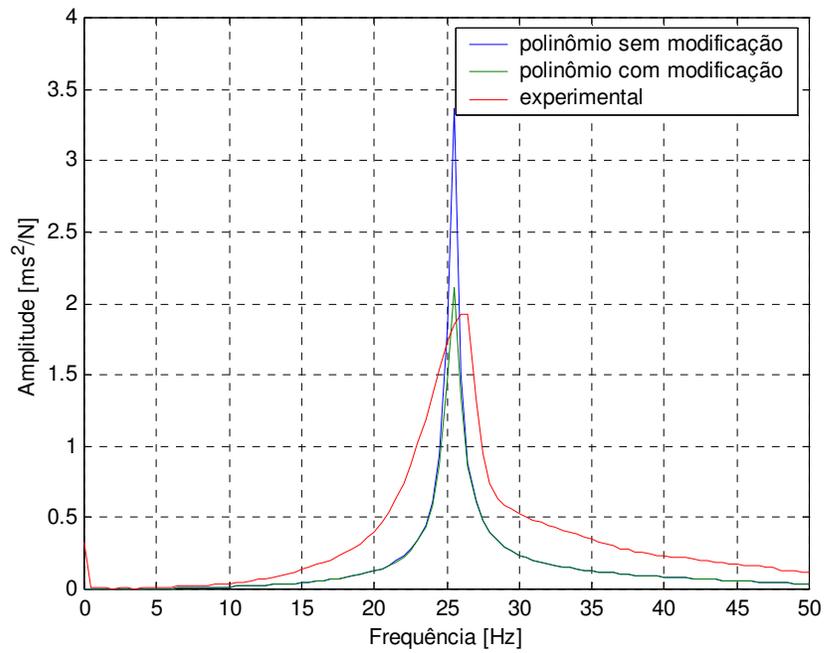


Figura 7.6 – Curvas FRF experimental e ajustadas.

Na tentativa de melhor ajuste dos parâmetros, utilizou-se as curvas médias (Fig. 7.2 a 7.4) como parâmetros de referência para dois métodos de ajuste utilizando-se algoritmos genéticos e um coeficiente de correlação de amplitude das FRFs experimental e numérica. Como limites para os parâmetros foram considerados  $\pm 50\%$  do valor de referência. Considerou-se a faixa de frequência de 15 a 250 Hz.

A Fig. 7.7 mostra as curvas ajustadas para o módulo de elasticidade do núcleo. Nota-se maior flutuação dos valores utilizando-se o método de ajuste com algoritmos genéticos. Existe somente uma pequena região que o comportamento das duas curvas são diferentes, entre 155 e 170 Hz.

Na Fig. 7.8 estão representadas as curvas para o fator de perda do núcleo. Verifica-se comportamento semelhante entre as curvas dos dois métodos. O mesmo comportamento pode ser verificado nas curvas da Fig. 7.9 para o módulo de elasticidade do Poliestireno de Alto Impacto.

A Fig. 7.10 mostra as curvas dos três parâmetros e a curva FRF experimental. Nesta figura as legendas: E – módulo de elasticidade, FP – fator de perda, GA – algoritmo genético, CC – coeficiente de correlação e PSAI – Poliestireno de Alto Impacto. Nota-se que as maiores flutuações nas curvas estão associadas com pontos de inflexão na curva FRF.

A Fig. 7.11 mostra as curvas FRF experimental e ajustada pelos dois métodos. Nota-se que existem maiores divergências para o método de coeficiente de correlação de amplitude. As divergências estão mais acentuadas próximas dos picos (ou seja, regiões de ressonâncias). Além disso, considerou como critério de parada da simulação 3% de variação entre os valores experimentais e numéricos e/ou 2000 iterações. Nem sempre o critério referente à variação de 3% foi obedecido. Mesmo assim, verifica-se um bom ajuste entre as curvas. Com o uso do método de algoritmos genéticos nota-se um ajuste quase perfeito entre as curvas.

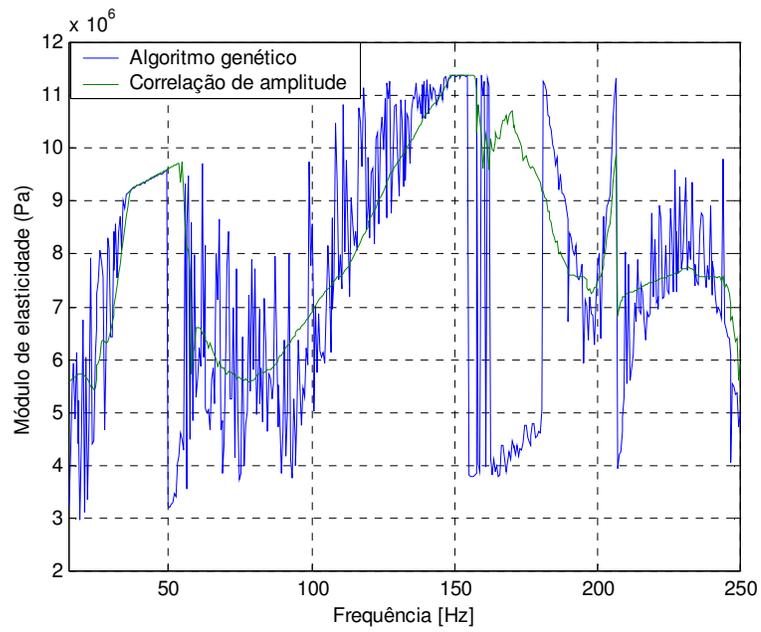


Figura 7.7 – Módulo de elasticidade do núcleo ajustado por dois métodos diferentes.

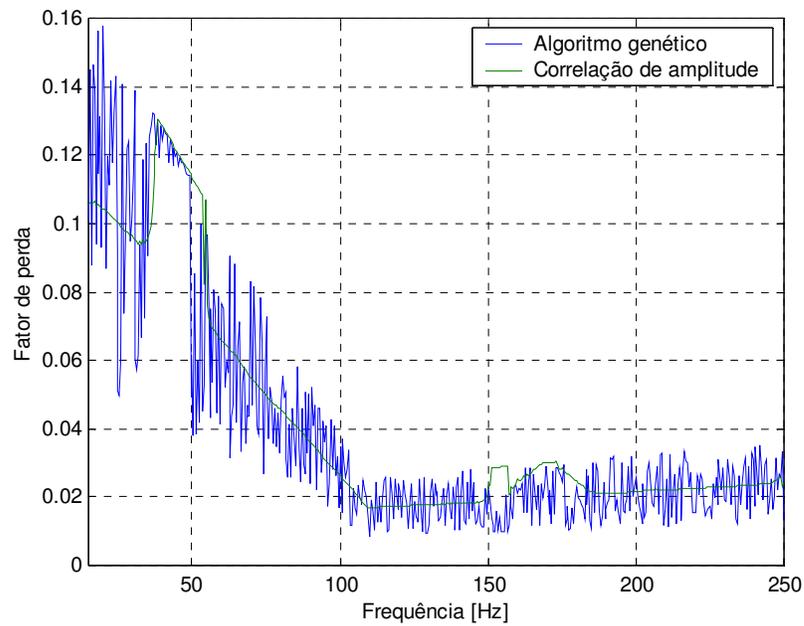
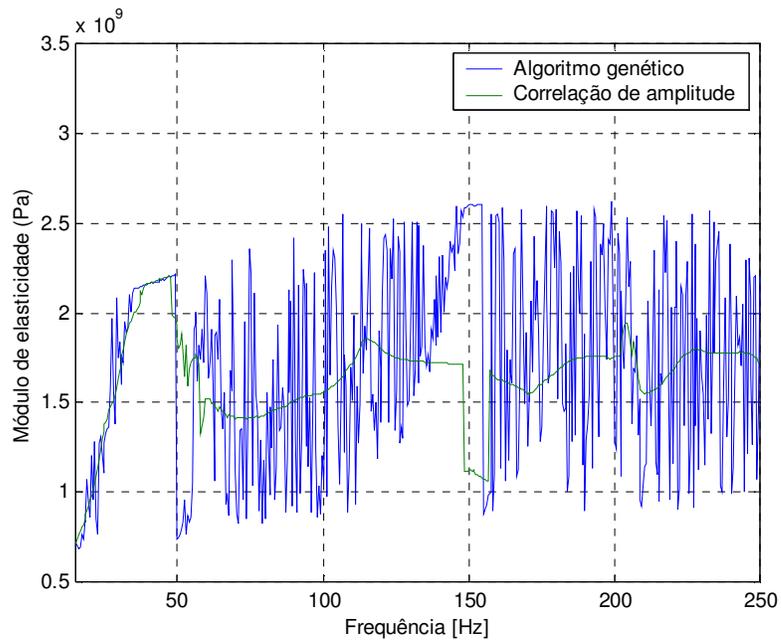
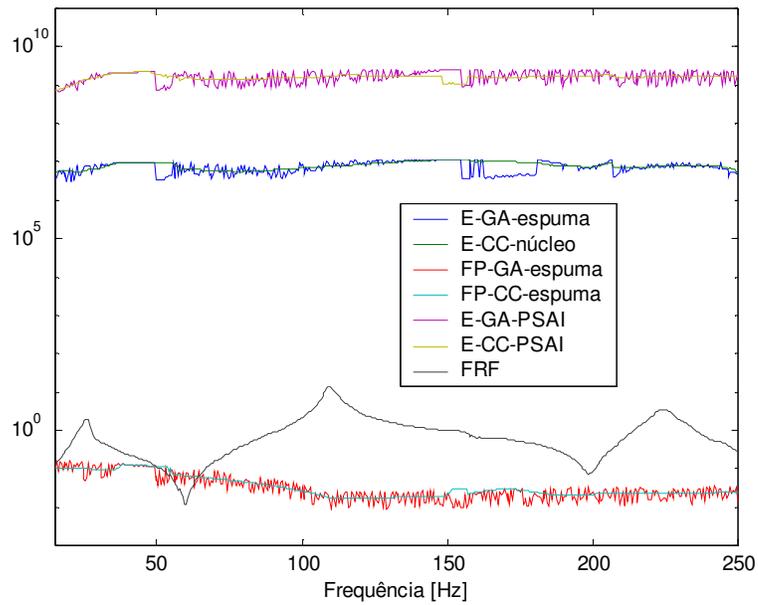


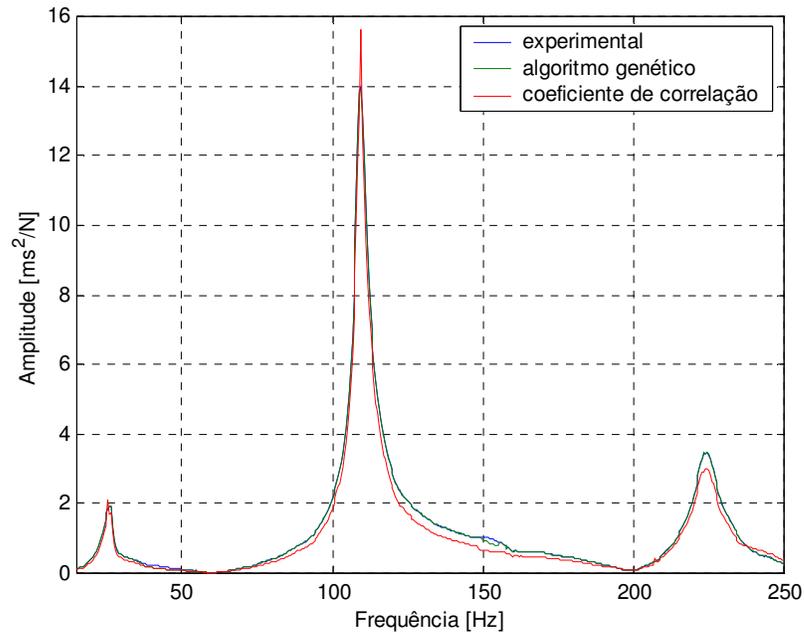
Figura 7.8 – Fator de perda do núcleo ajustado por dois métodos diferentes.



**Figura 7.9 – Módulo de elasticidade do Poliestireno de Alto Impacto ajustado por dois métodos diferentes.**



**Figura 7.10 - Parâmetros ajustados e curva FRF.**



**Figura 7.11 – Curvas FRF experimental e ajustadas.**

Baseados nos resultados apresentados anteriormente, optou-se por utilizar algoritmos genéticos para fazer novas simulações numéricas. Os critérios utilizados são: o tempo de processamento, a flexibilidade do método e que não é necessário o cálculo do gradiente da função objetivo.

O primeiro caso estudado utiliza um algoritmo genético com representação real. Os parâmetros genéticos usados nas simulações são:

Nº máximo de iterações – 500;

Taxa de mutação – 0.05;

Tamanho da população – 75;

*BestRate* – 0.1;

*NewRate* – 0.1;

Onde:

*BestRate* é o percentual da população que é copiado para próxima geração sem participar da seleção. (coeficiente de elite)

*NewRate* é a porcentagem da geração, que é preenchida com indivíduos criados recentemente.

Num segundo caso, utiliza-se um algoritmo genético simples (SGA) com representação binária. Os parâmetros genéticos usados nas simulações são:

Nº máximo de iterações – 50;  
Taxa de mutação – 0.02;  
Taxa de cruzamento – 0.6;  
Tamanho da população – 100;  
Nº de bits – 10;

Num terceiro caso, utiliza-se um algoritmo genético simples (SGA) com representação binária. Os parâmetros genéticos usados nas simulações são:

Nº máximo de iterações – 60;  
Taxa de mutação – 0.03;  
Taxa de cruzamento – 0.75;  
Tamanho da população – 30;  
Nº de bits – 12;

As Figuras 7.12 a 7.14 mostram as curvas FRF ajustadas para os 3 casos e para a faixa de frequência em torno do 1º modo de vibrar. Os dados experimentais foram obtidos em outra data (modificação das condições ambientes). Nota-se que todas as curvas ajustadas possuem comportamento semelhante. As Figuras 7.15 a 7.17 mostram as curvas ajustadas para o módulo de elasticidade do núcleo ( $E_c$ ) e o módulo de elasticidade do Poliuretano de Alto Impacto ( $E_2$ ). Novamente os resultados estão próximos entre os três casos. As Figuras 7.18 a 7.20 mostram as curvas do fator de perda do núcleo. Nota-se maiores flutuações dos valores entre as curvas dos três casos. As Figuras 7.21 a 7.23 mostram as curvas do fator de perda da face (PSAI). Notam-se flutuações dos valores entre os três casos.

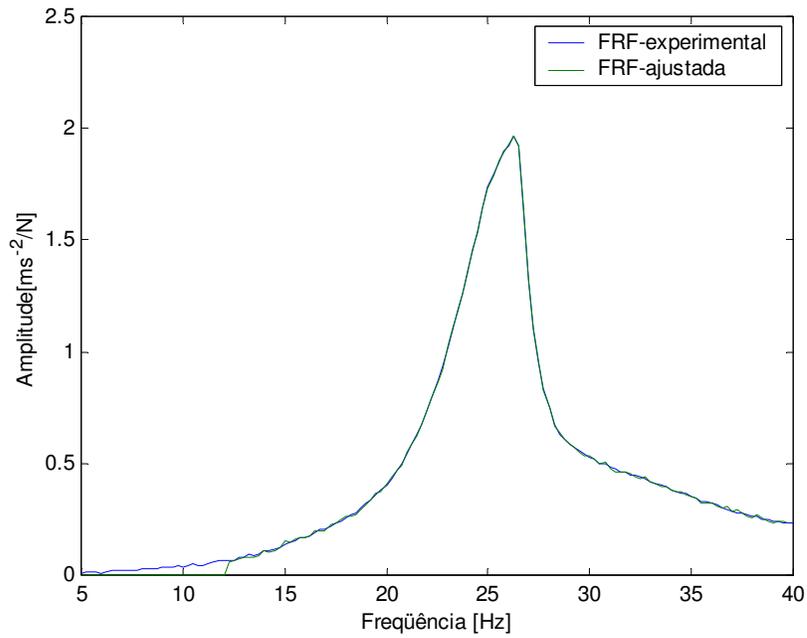


Figura 7.12 – Caso 1: Ajuste da FRF experimental e teórica

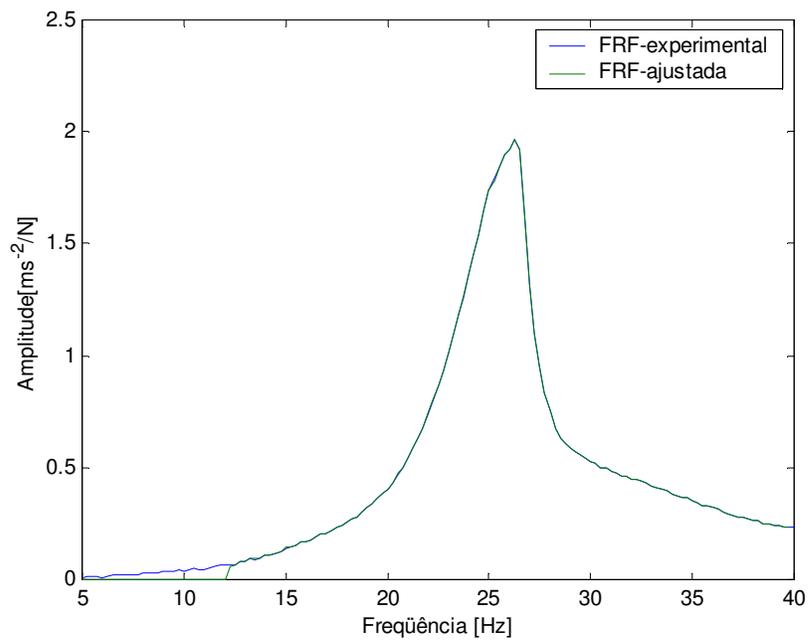


Figura 7.13 – Caso 2: Ajuste da FRF experimental e teórica

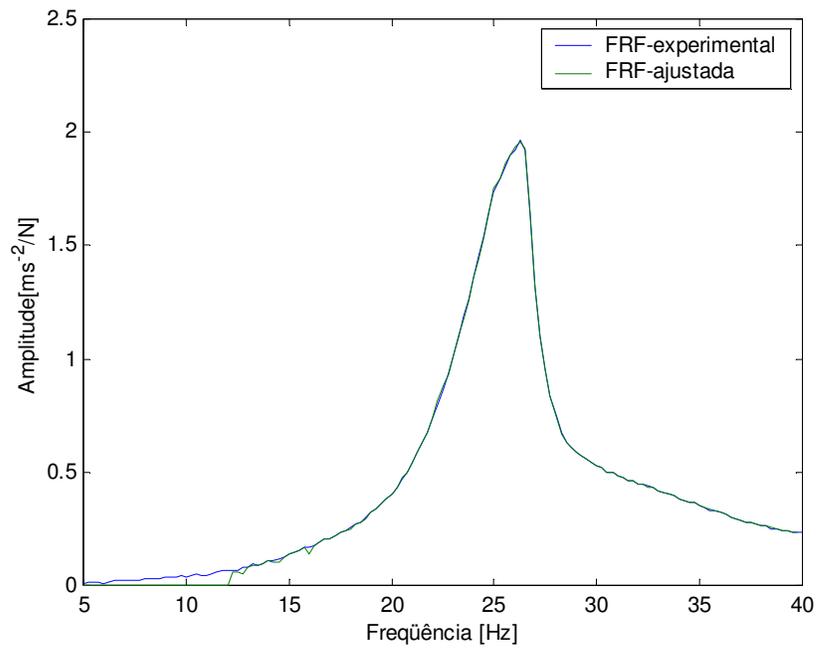


Figura 7.14 – Caso 3: Ajuste da FRF experimental e teórica

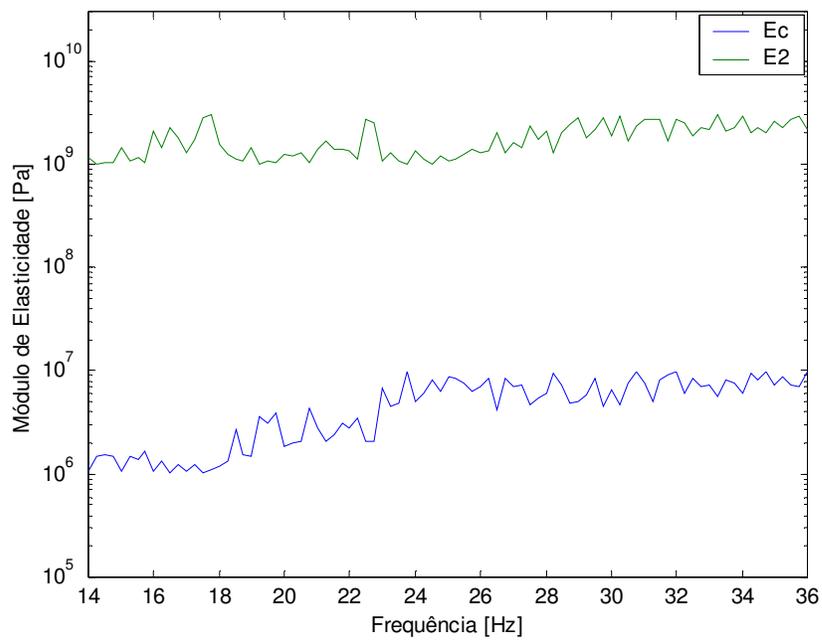


Figura 7.15 – Caso 1: Resultado do Módulo de Elasticidade

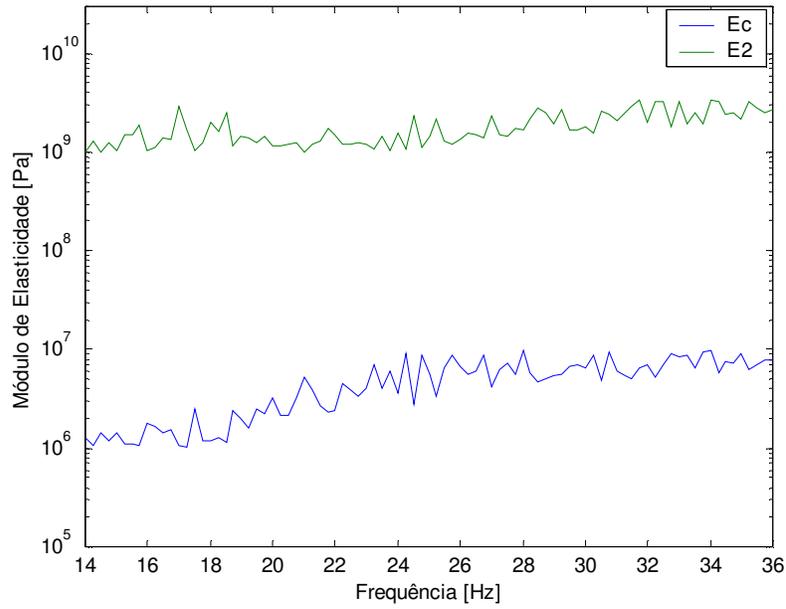


Figura 7.16– Caso 2: Resultado do Módulo de Elasticidade

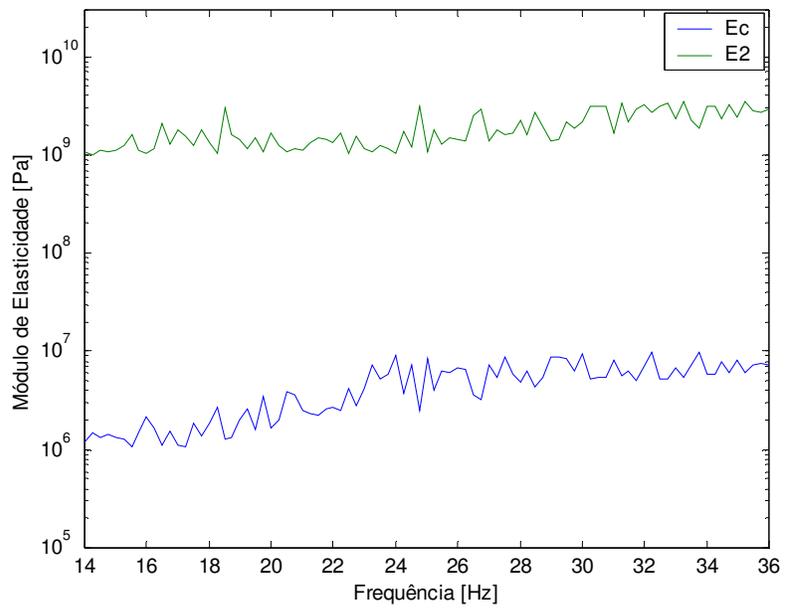
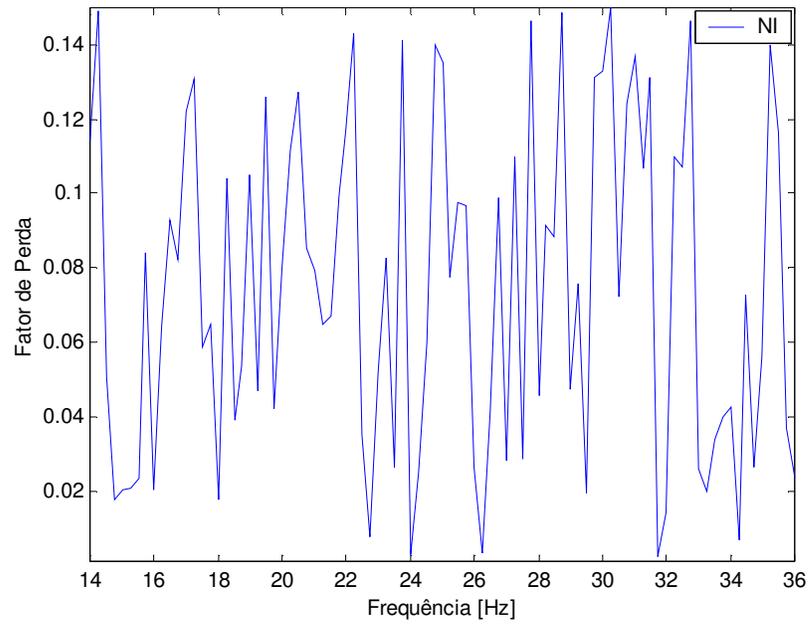
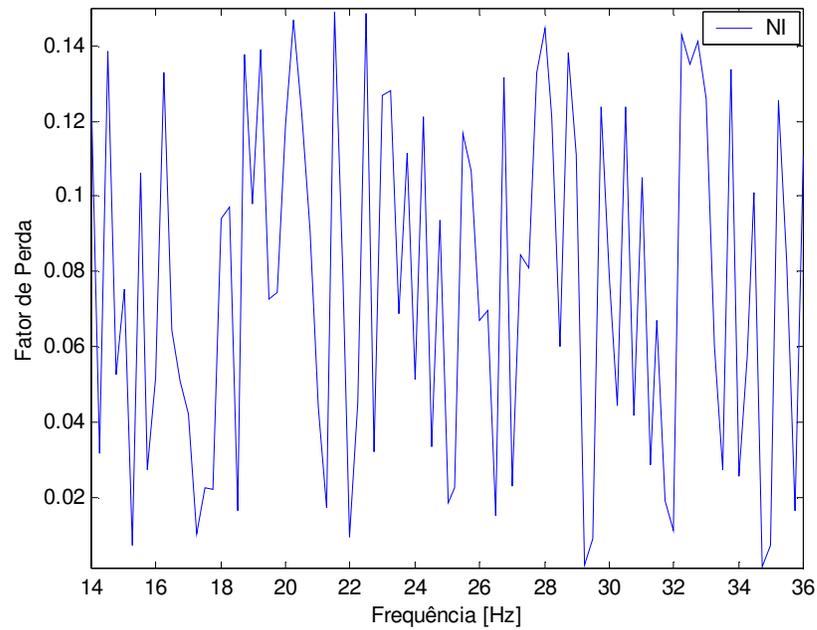


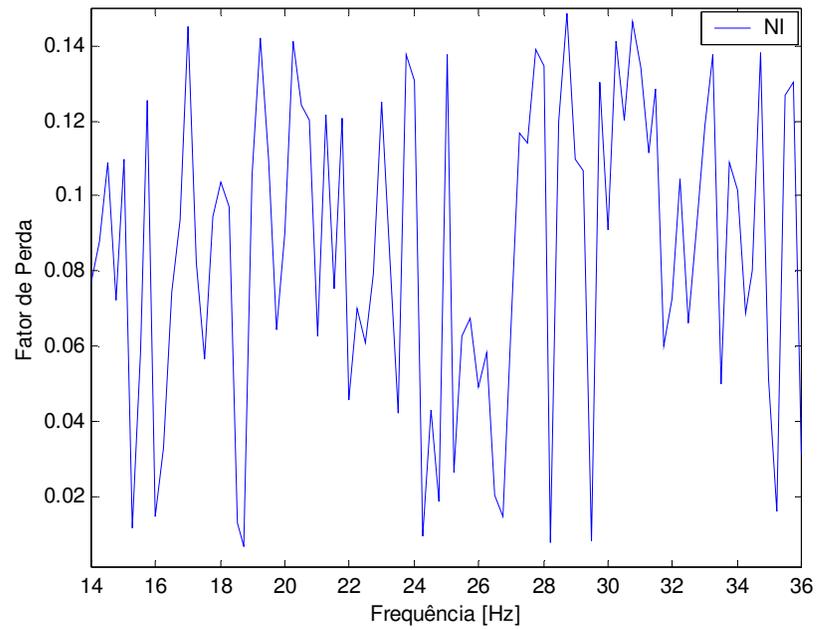
Figura 7.17 – Caso 3: Resultado do Módulo de Elasticidade



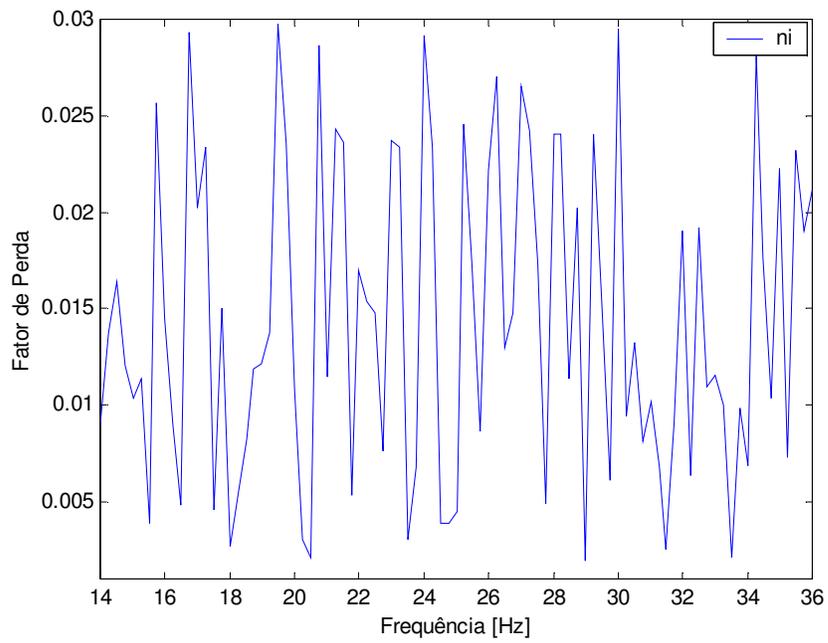
**Figura 7.18 – Caso 1: Resultado do Fator de perda do núcleo**



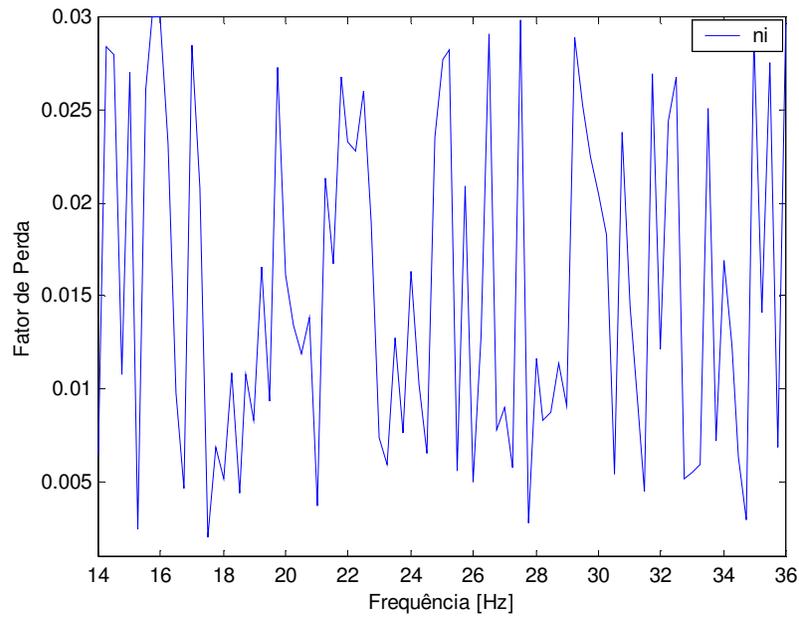
**Figura 7.19 – Caso 2: Resultado do Fator de perda do núcleo**



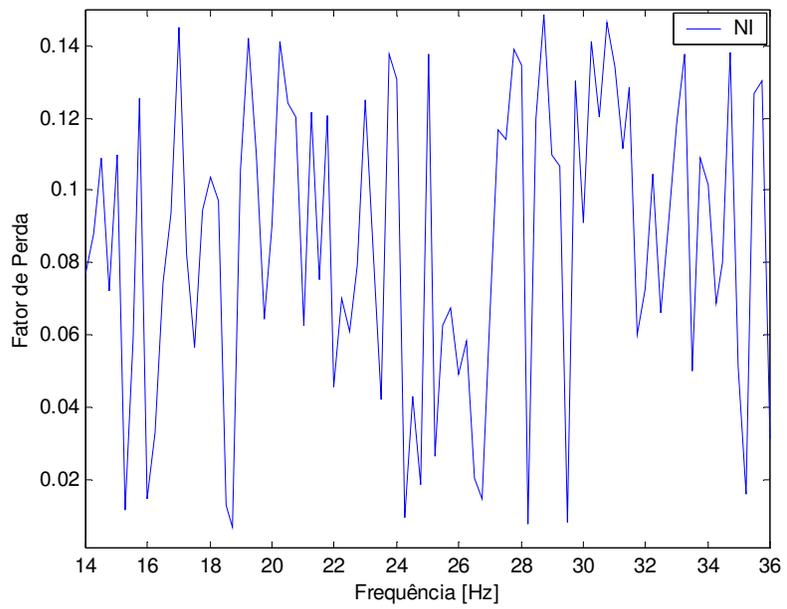
**Figura 7.20 – Caso 3: Resultado do Fator de perda do núcleo**



**Figura 7.21 – Caso 1: Resultado do Fator de perda da face**

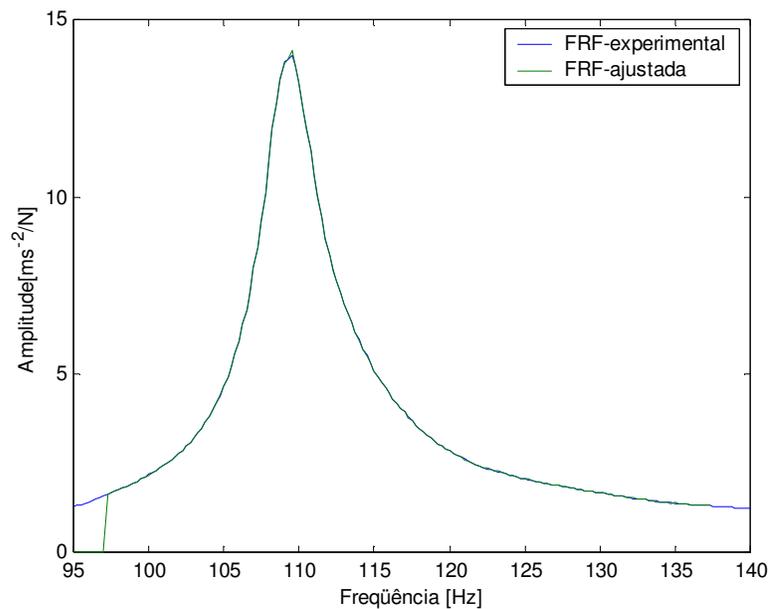


**Figura 7.22 – Caso 2: Resultado do Fator de perda da face**



**Figura 7.23 – Caso 3: Resultado do Fator de perda da face**

As Figuras 7.24 a 7.26 mostram as curvas FRF ajustadas para os 3 casos e para a faixa de frequência em torno do 2º modo de vibrar. Os dados experimentais foram obtidos em outra data (modificação das condições ambientes). Nota-se que todas as curvas ajustadas possuem comportamento semelhante. As Figuras 7.27 a 7.29 mostram as curvas ajustadas para o módulo de elasticidade do núcleo ( $E_c$ ) e o módulo de elasticidade do Poliuretano de Alto Impacto ( $E_2$ ). Novamente os resultados estão próximos entre os três casos. As Figuras 7.30 a 7.32 mostram as curvas do fator de perda do núcleo. Nota-se o mesmo comportamento entre as curvas dos três casos. As Figuras 7.33 a 7.35 mostram as curvas do fator de perda da face (PSAI). Notam-se flutuações dos valores entre os três casos.



**Figura 7.24 – Caso 1: Ajuste da FRF experimental e teórica**

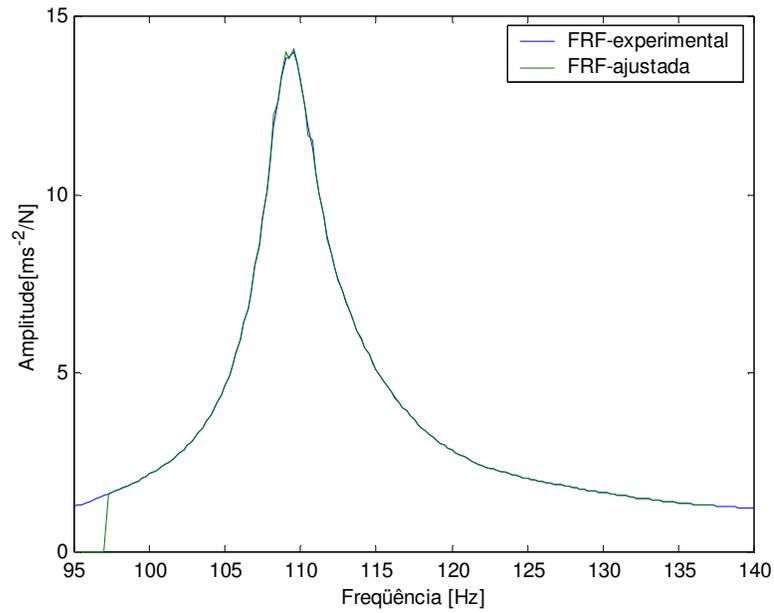


Figura 7.25 – Caso 2: Ajuste da FRF experimental e teórica

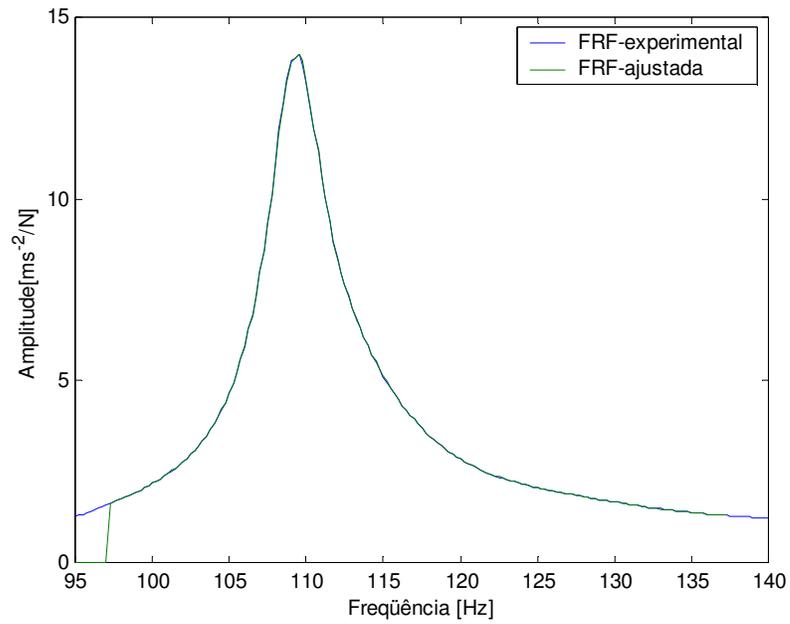


Figura 7.26 – Caso 3: Ajuste da FRF experimental e teórica

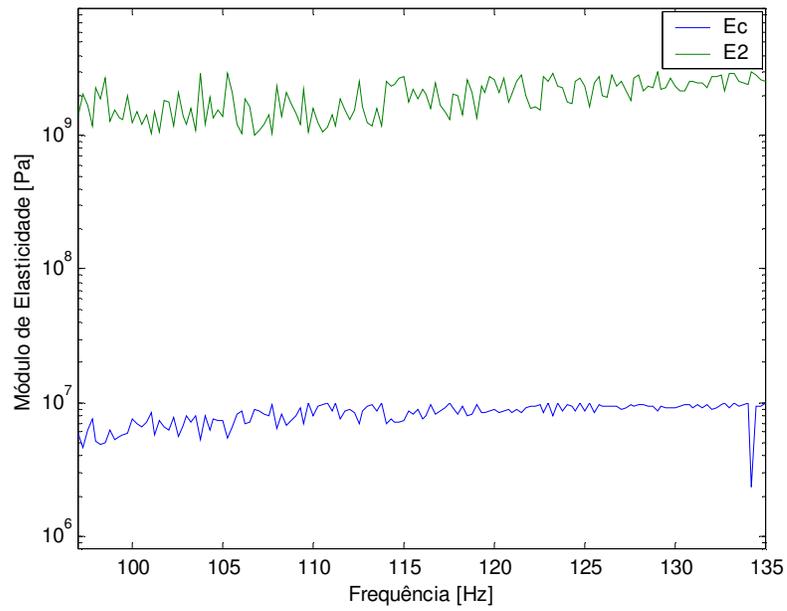


Figura 7.27 – Caso 1: Resultado do Módulo de Elasticidade

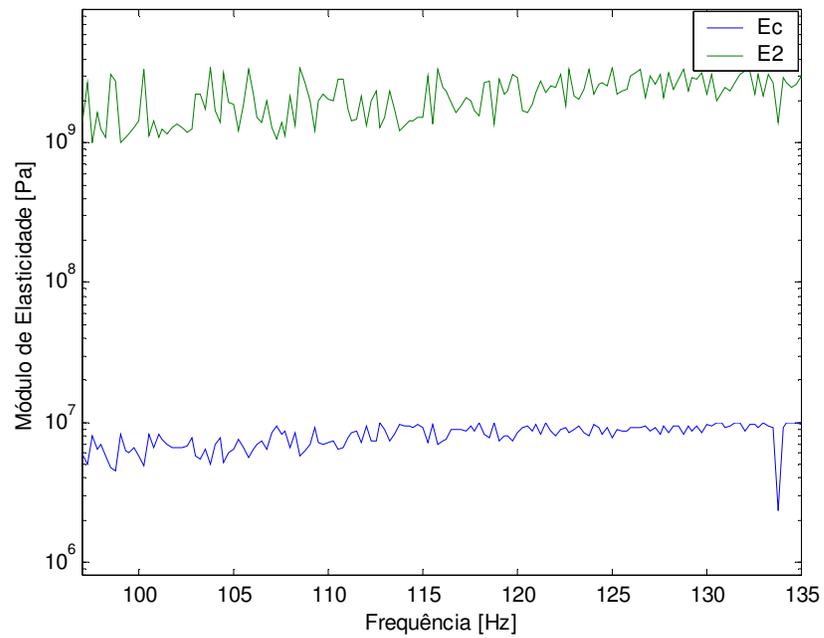


Figura 7.28 – Caso 2: Resultado do Módulo de Elasticidade

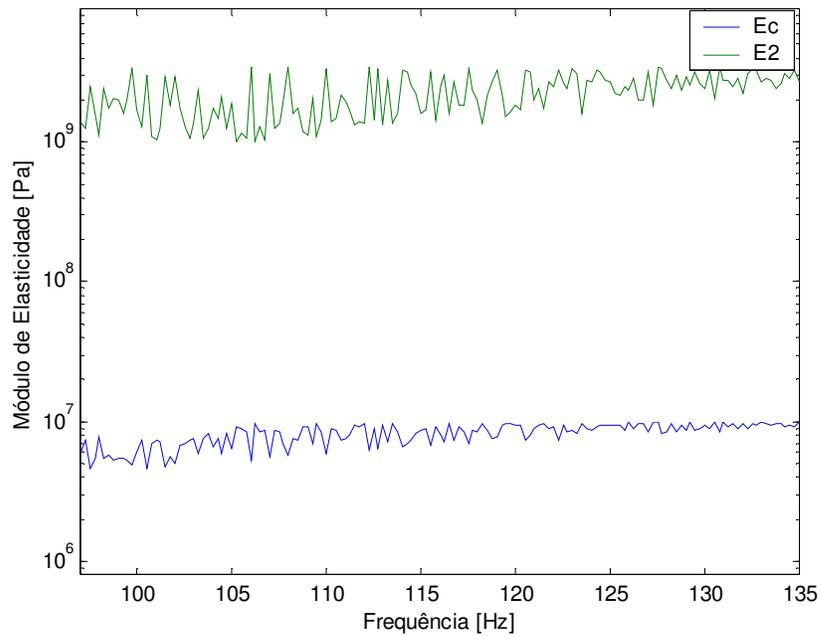


Figura 7.29 – Caso 3: Resultado do Módulo de Elasticidade

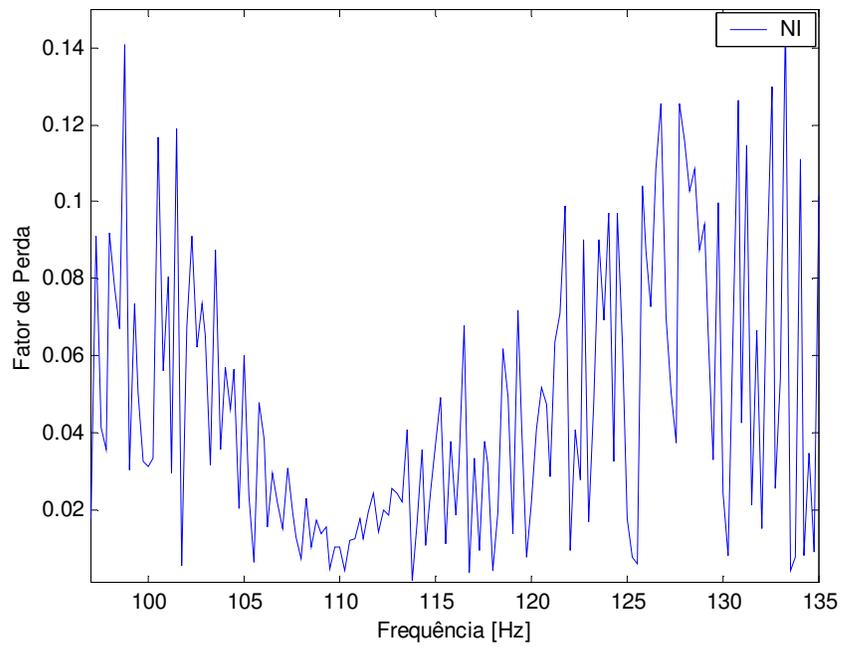
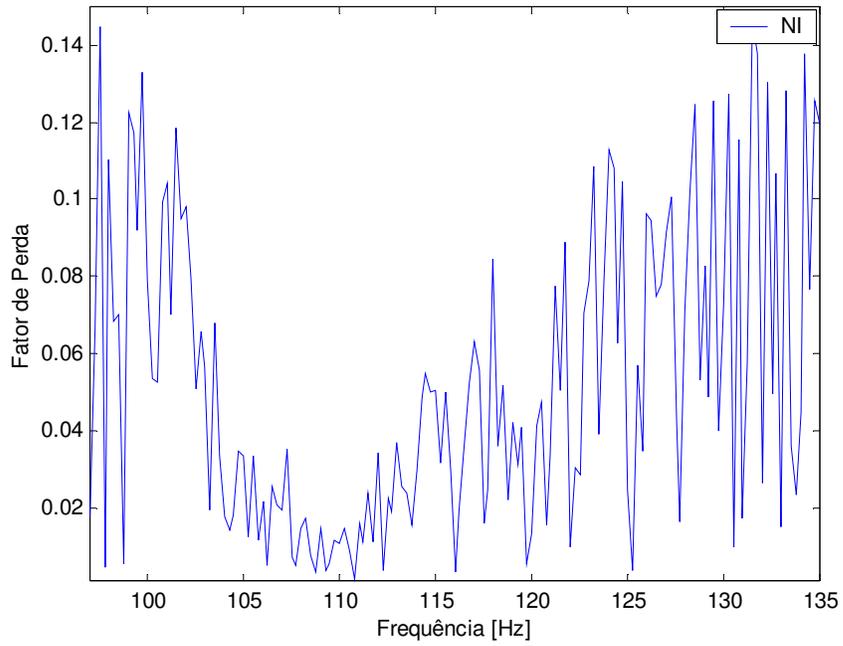
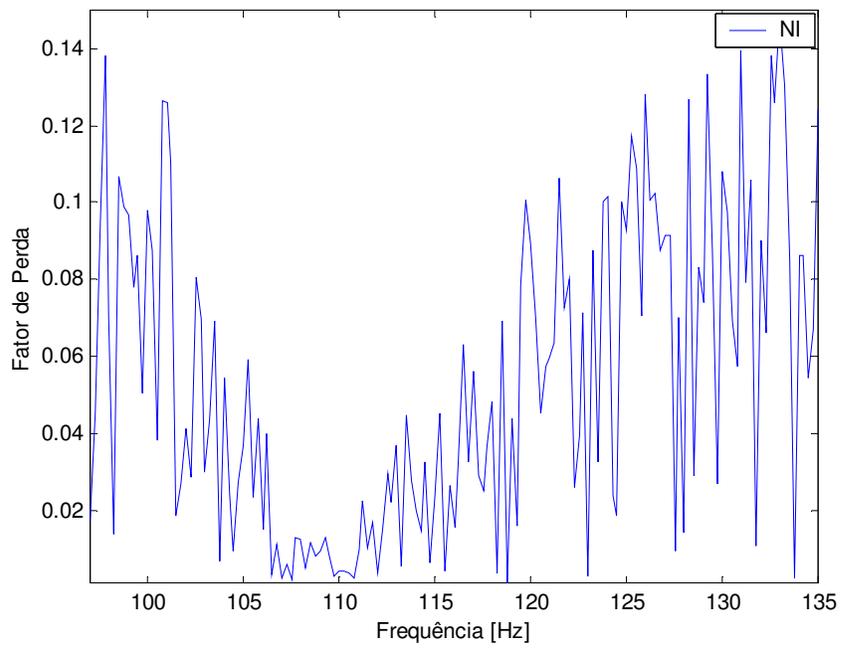


Figura 7.30 – Caso 1: Resultado do Fator de perda do núcleo



**Figura 7.31 – Caso 2: Resultado do Fator de perda do núcleo**



**Figura 7.32 – Caso 3: Resultado do Fator de perda do núcleo**

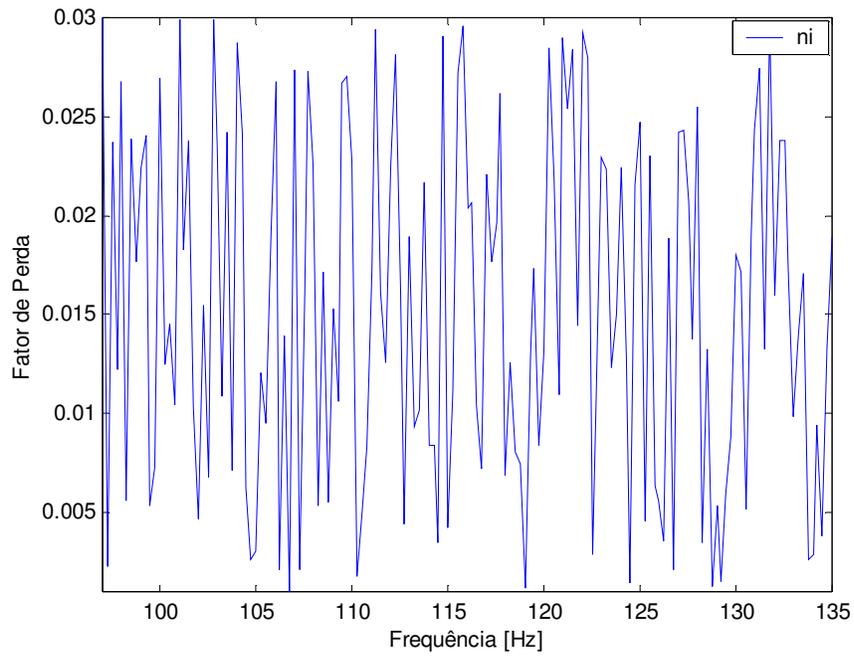


Figura 7.33 – Caso 1: Resultado do Fator de perda da face

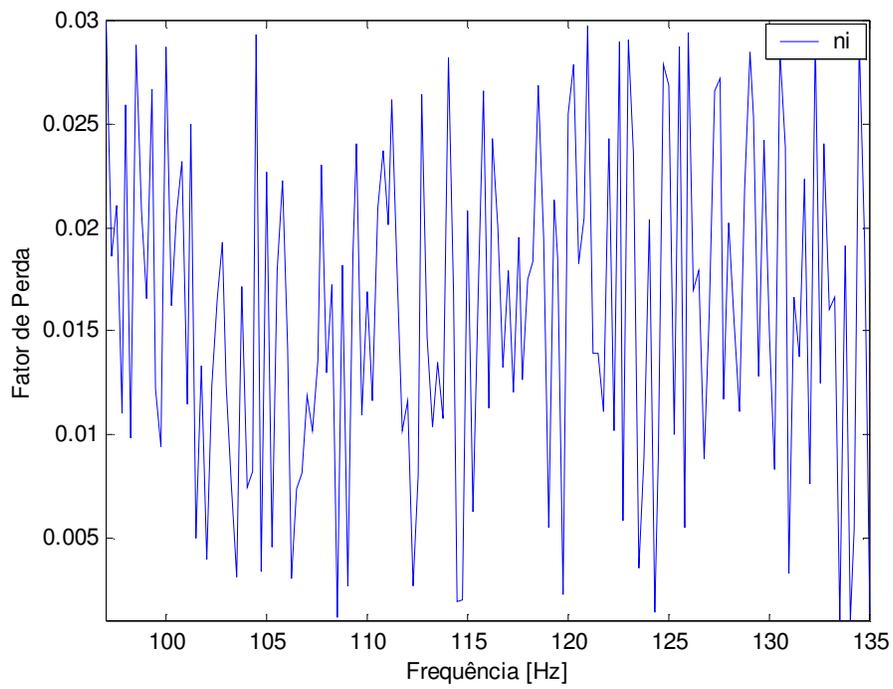
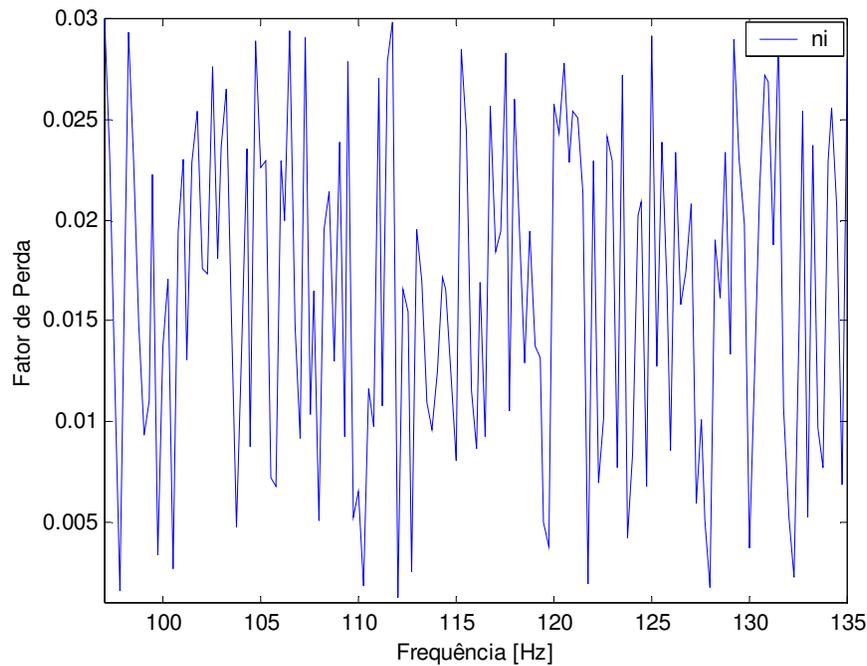
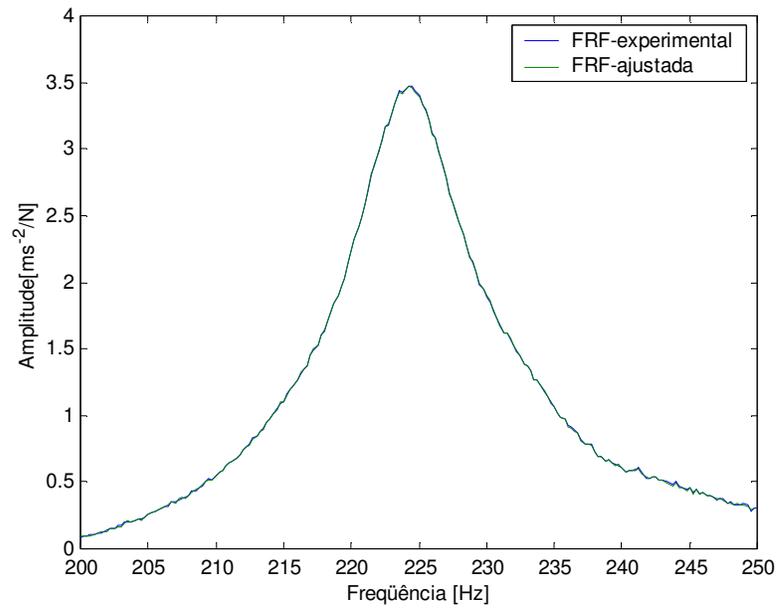


Figura 7.34 – Caso 2: Resultado do Fator de perda da face

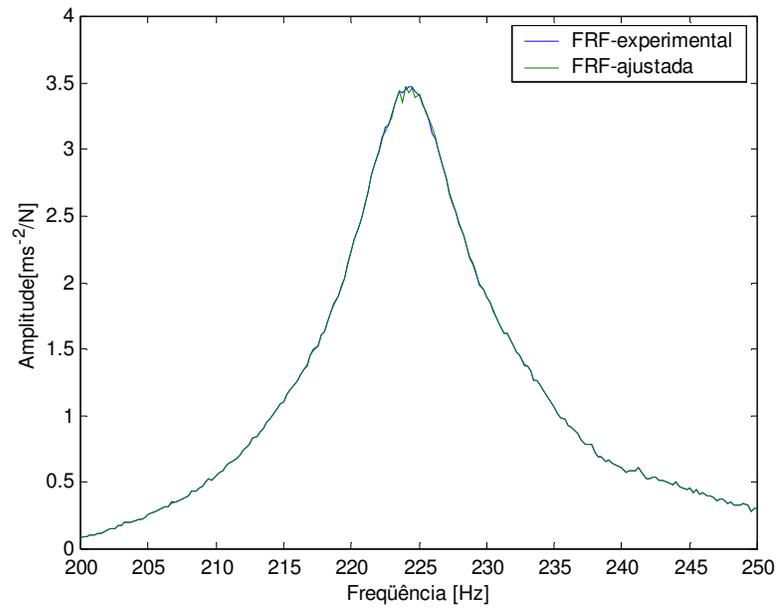


**Figura 7.35 – Caso 3: Resultado do Fator de perda da face**

As Figuras 7.36 a 7.38 mostram as curvas FRF ajustadas para os 3 casos e para a faixa de frequência em torno do 3º modo de vibrar. Os dados experimentais foram obtidos em outra data (modificação das condições ambientes). Nota-se que todas as curvas ajustadas possuem comportamento semelhante. As Figuras 7.39 a 7.41 mostram as curvas ajustadas para o módulo de elasticidade do núcleo ( $E_c$ ) e o módulo de elasticidade do Poliuretano de Alto Impacto ( $E_2$ ). Novamente os resultados estão próximos entre os três casos. As Figuras 7.42 a 7.44 mostram as curvas do fator de perda do núcleo. Nota-se o mesmo comportamento entre as curvas dos três casos. As Figuras 7.45 a 7.47 mostram as curvas do fator de perda da face (PSAI). Notam-se flutuações dos valores entre os três casos.



**Figura 7.36 – Caso 1: Ajuste da FRF experimental e teórica**



**Figura 7.37 – Caso 2: Ajuste da FRF experimental e teórica**

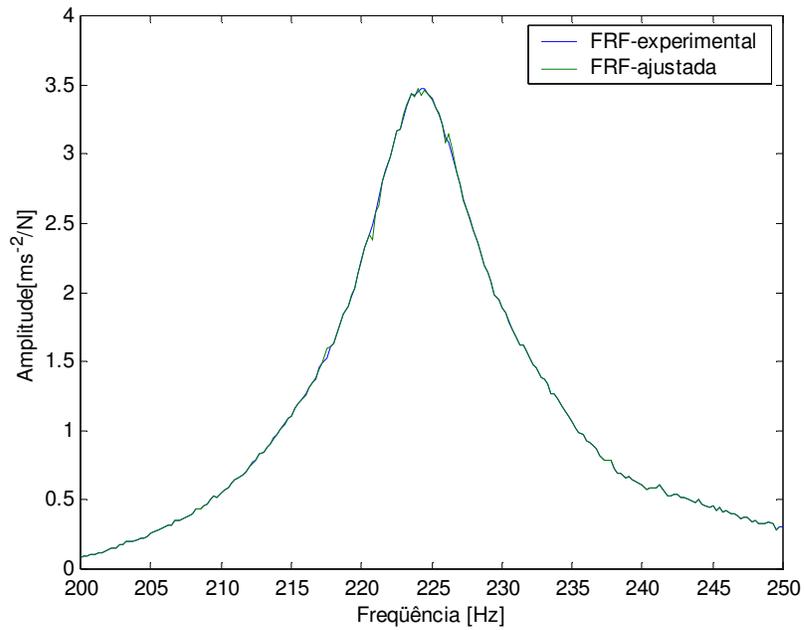


Figura 7.38 – Caso 3: Ajuste da FRF experimental e teórica

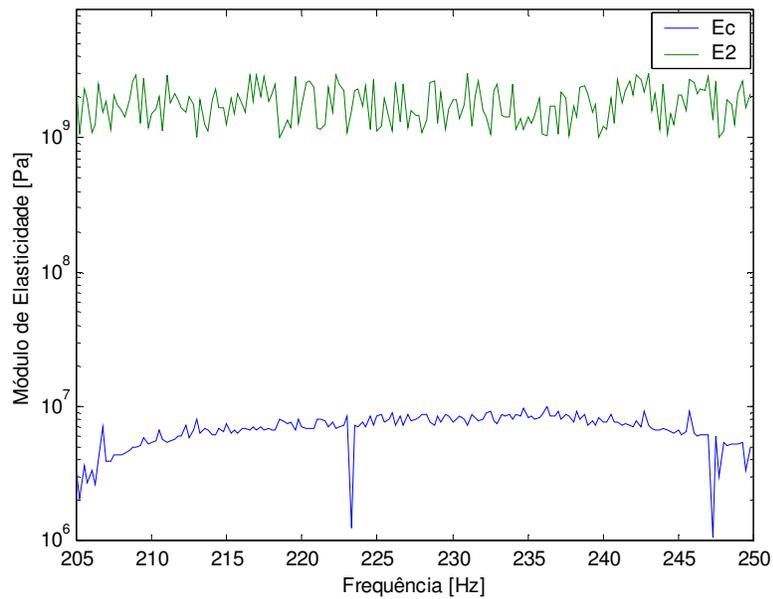


Figura 7.39 – Caso 1: Resultado do Módulo de Elasticidade

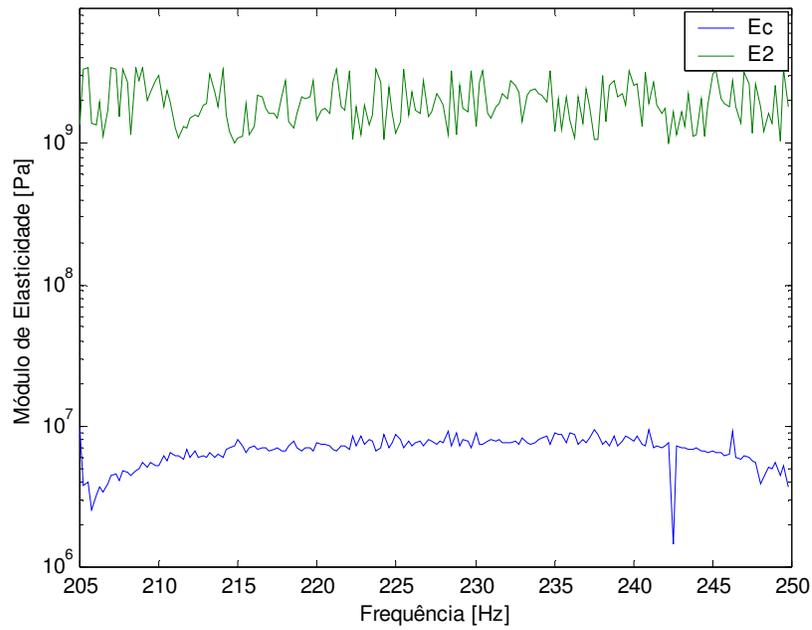


Figura 7.40 – Caso 2: Resultado do Módulo de Elasticidade

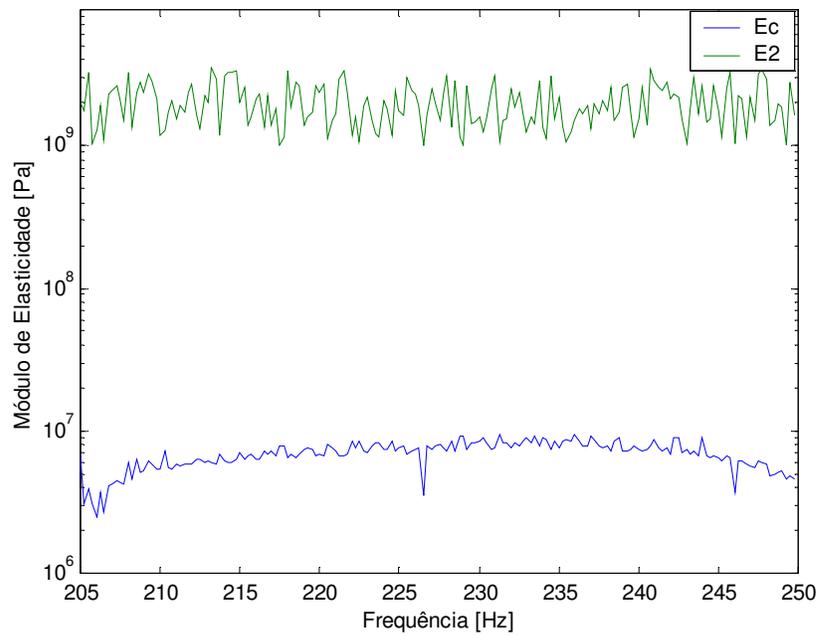
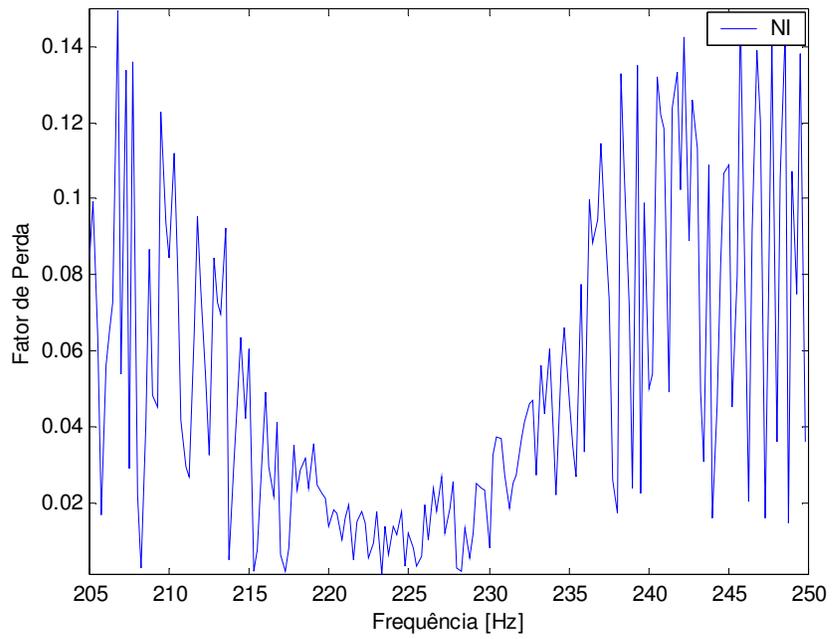
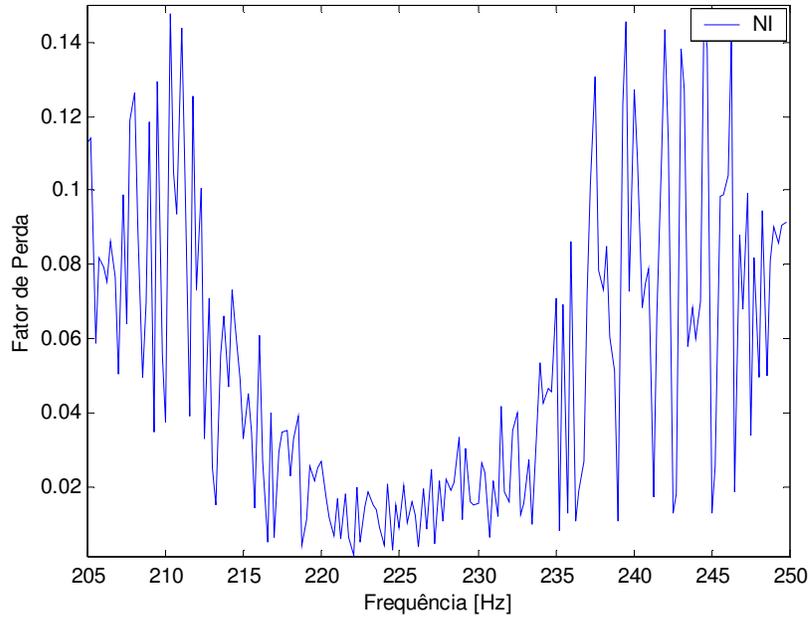


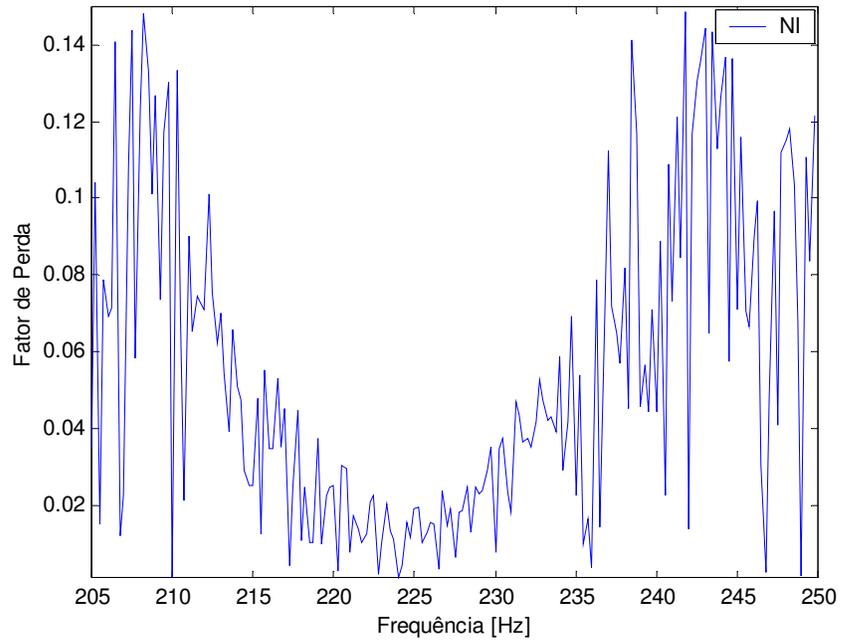
Figura 7.41 – Caso 3: Resultado do Módulo de Elasticidade



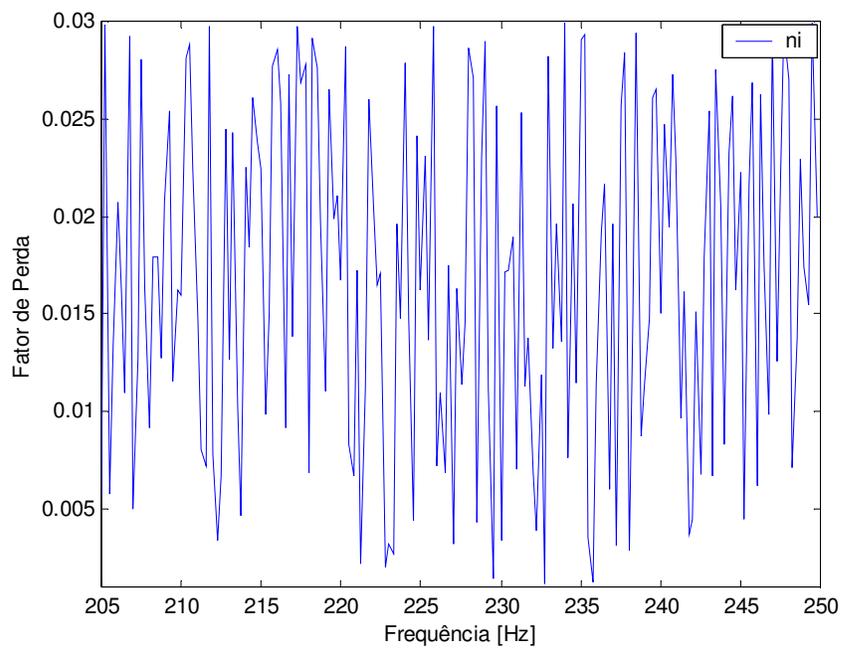
**Figura 7.42 – Caso 1: Resultado do Fator de perda do núcleo**



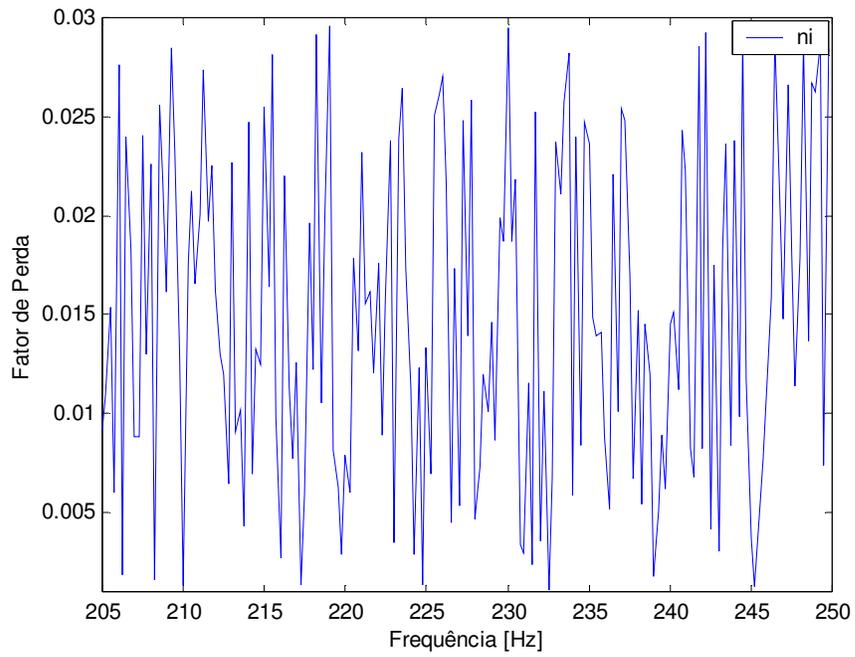
**Figura 7.43 – Caso 2: Resultado do Fator de perda do núcleo**



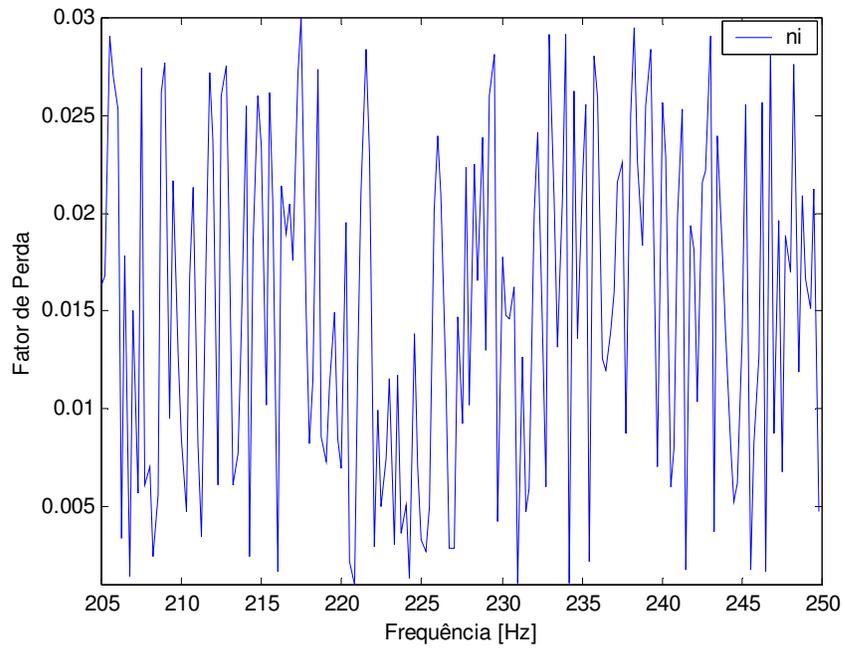
**Figura 7.44 – Caso 3: Resultado do Fator de perda do núcleo**



**Figura 7.45 – Caso 1: Resultado do Fator de perda da face**



**Figura 7.46 – Caso 2: Resultado do Fator de perda da face**



**Figura 7.47 – Caso 3: Resultado do Fator de perda da face**

## Capítulo 8

# Análise dos resultados - Conclusões – Recomendações

### 8.1 Descrição das etapas percorridas no projeto.

A idéia inicial deste projeto foi a de trabalhar com o método Predictor-Corrector (P-C) desenvolvido por Grafe (1998), mas constatou-se que o método é muito dependente da escolha da faixa de freqüências, por exemplo, nas proximidades das freqüências naturais ocorria uma instabilidade (tempo computacional muito elevado) e o método não convergia, enquanto que em regiões afastadas da freqüência natural o método funcionava bem. Foram feitas várias tentativas para corrigir o problema até serem obtidos resultados satisfatórios. Enquanto isso optou-se em escolher um novo método para ajustar os parâmetros físicos dos materiais que compõem a viga *sandwich*, o algoritmo genético devido a suas características estocásticas foi escolhido para tentar resolver a questão.

Na etapa inicial de utilização do algoritmo genético notou-se que os ajustes entre as Funções Resposta em Freqüência experimental e numérica eram bons, mas foi constatado que os resultados adquiridos para cada parâmetro físico estavam muito distantes do esperado, ou seja, os valores obtidos para o módulo de elasticidade do núcleo e da face estavam muito elevados.

Tentou-se trabalhar de uma maneira similar ao descrito nos artigos técnicos de Caracciolo et al (2000,2001,2004) utilizando um sensor laser para medir o deslocamento transversal da viga ao mesmo tempo em que a base era

excitada por uma força harmônica através de um shaker, gerando uma aceleração na mesma devido ao movimento. A experiência foi feita para o conjunto da viga *sandwich* e para os componentes isoladamente. Os resultados obtidos experimentalmente não foram satisfatórios e um dos possíveis motivos é que o engaste das amostras não era perfeito.

Uma nova tentativa foi feita alterando-se as variáveis do problema na programação do algoritmo genético, ou seja, fornecia-se uma faixa bem pequena de frequências próximas a frequência natural como dado de entrada e obtinha-se como resultado os valores do módulo de elasticidade do núcleo e da face juntamente com o fator de perda. Desta maneira verificou-se que os valores não variavam muito de uma frequência natural para outra, ao contrário do que os resultados iniciais estavam indicando, a partir desta conclusão procurou-se limitar a faixa de valores utilizada para cada um dos parâmetros físicos. Isto quer dizer que o espaço de busca utilizado para cada uma das variáveis de projeto no AG foi restringido num intervalo menor, com isso, verificou-se que os resultados do módulo de elasticidade do núcleo e da face, apresentados depois da correção aproximavam-se de uma reta e os valores obtidos estavam coerentes com valores encontrados na literatura técnica.

## **8.2 Discussões/conclusões.**

Primeiramente cabe destacar que este estudo foi realizado em um lote de materiais fornecidos por uma empresa de refrigeradores, onde não foi possível descobrir informações a respeito do processo de fabricação da espuma rígida de poliuretano. Sabe-se que os parâmetros de processamento podem variar muito de um lote para outro, com isso a análise efetuada é válida para uma condição específica não podendo ser generalizada.

Na dissertação de mestrado de Oresten (2003) foi obtido experimentalmente o Módulo de Cisalhamento,  $G$ , para o núcleo de espuma rígida de Poliuretano. Para os corpos de prova sem falhas superficiais encontrou-se o valor médio igual a 2.066 MPa e o desvio padrão igual a 0.082 MPa e para os corpos com falhas superficiais o valor médio igual a 2.184 MPa

e o desvio padrão igual a 0.245 MPa. Além disso, foi medido experimentalmente o Módulo de Elasticidade,  $E$ , da face de PSAI para vários corpos de prova e obteve-se o valor médio igual a 1.405 GPa e desvio padrão igual a 0.018 GPa. Adotou-se a relação entre o módulo de elasticidade ( $E$ ) e cisalhamento ( $G$ ) igual a  $E/G=2,8947$ .

Para ajuste da frequência de pico utilizou-se o método dos Algoritmos Genéticos. Verificou-se que os valores dos parâmetros ajustados não convergiam para um valor único. Com base nos valores ajustados estabeleceu-se retas levando-se em consideração os valores médios dos parâmetros. Notou-se que a FRF ajustada considerando as retas dos valores médios tinha o mesmo comportamento da FRF experimental embora apresentasse desvios elevados. Procurou-se ajustar os parâmetros do modelo para que as curvas numéricas e experimentais tivessem uma boa convergência de valores. Para este ajuste foram utilizados os métodos de Algoritmos Genéticos e Coeficiente de Correlação de Amplitude. Verificou-se que o ajuste por Algoritmos Genéticos apresentava melhores resultados. Além disso, o tempo de processamento era maior para o método utilizando Coeficiente de Correlação de Amplitude e notou-se que próximo das ressonâncias e em regiões de inflexão, a convergência era lenta e difícil. Desta forma, optou-se por trabalhar com o método dos Algoritmos Genéticos.

Observando os valores numéricos encontrados para cada parâmetro no ajuste das FRF experimental e numérica pelo algoritmo genético constatou-se que os resultados obtidos experimentalmente por Oresten (2003) estão dentro dos limites para cada um dos parâmetros numa determinada faixa de frequências.

Nos artigos de Caracciolo et al (2000,2001, 2004) são mostrados alguns resultados para o módulo de elasticidade de um material viscoelástico para várias temperaturas e frequências (Fig. 1.3). Nesta figura observa-se que o resultado do módulo de elasticidade para a faixa de frequência entre 140 e 300 Hz o comportamento é linear nas diferentes temperaturas. Os resultados apresentados no Capítulo 7 com o algoritmo genético para o 2º e 3º modos de vibração, no que diz respeito aos valores obtidos numericamente para o

módulo de elasticidade também aproximam-se de uma reta nas faixas de frequências estudadas.

Para o ajuste dos parâmetros foram utilizadas duas categorias de algoritmos genéticos: O primeiro caso foi resolvido com um algoritmo genético com representação real, enquanto que o segundo e o terceiro caso usaram para solucionar a questão um algoritmo genético simples com representação binária.

Observa-se que os dois tipos de algoritmos utilizados forneceram respostas próximas. Também convém destacar que uma solução não se repete de maneira idêntica mesmo que se faça uso dos mesmos parâmetros genéticos (tamanho da população, taxa de mutação e taxa de recombinação) porque o algoritmo genético trabalha de forma aleatória e probabilística.

Utilizando o algoritmo genético conseguiu-se um bom ajuste para a FRF experimental e numérica nos três primeiros modos de vibrações em todos os casos avaliados.

O resultado do Módulo de Elasticidade do núcleo de espuma rígida de poliuretano ( $E_c$ ) em todos os casos analisados do primeiro modo de vibração mostram uma dispersão muito grande nos valores numéricos obtidos. Enquanto que no segundo e terceiro modo de vibração os valores numéricos obtidos tiveram uma variação bem pequena, aproximando-se de uma reta. Em algumas regiões do campo de frequências analisado constata-se que ocorre um desvio muito grande no valor do módulo de elasticidade de uma frequência para outra, próximo da frequência de 242.5 Hz. Provavelmente seja devido ao método genético que tem uma característica aleatória e probabilística na busca dos melhores resultados de uma iteração para outra.

A variação dos resultados obtidos para o módulo de elasticidade da face de poliestireno ( $E_2$ ) restringiram-se a uma faixa de valores entre  $E_{2_{\min}} = 1.0$  GPa e  $E_{2_{\max}} = 3.0$  GPa conforme observa-se em todos os gráficos analisados. Com esta faixa de valores conseguiu-se um bom ajuste para a FRF experimental e numérica em todos os modos de vibração.

No primeiro modo de vibração, em todos os casos analisados, o fator de perda do núcleo de espuma rígida de poliuretano (parâmetro NI) apresentou

resultados com grande oscilação entre a faixa de 0.001 a 0.15. Enquanto que no segundo e terceiro modo de vibração constata-se que nas frequências naturais, onde a amplitude do movimento é máxima, o valor para fator de perda do núcleo é mínimo. Nota-se também que a medida que o valor da amplitude cresce ocorre uma diminuição gradativa nos valores do fator de perda até chegar ao valor mínimo.

Para o ajuste das Frequências experimentais e numéricas o fator de perda da face de poliestireno ( $\eta$ ) restringiu-se ao intervalo entre 0.001 a 0.03 em todos os gráficos obtidos. Nesta situação devido aos valores baixos do fator de perda não foi constatada uma diminuição gradativa no fator de perda como aconteceu no caso do núcleo.

### **8.3 Sugestões para futuros trabalhos**

- Para ampliar o estudo realizado sugere-se que a experiência seja feita em várias temperaturas para determinar o efeito que a mesma produz em cada um dos parâmetros.
- Realizar a experiência com peças de diferentes lotes para se avaliar a influência do processo de fabricação nos resultados. Para isso é necessário conseguir as informações referentes à fabricação.
- Fazer novas experiências com outros tipos de condições de contorno para verificar se ocorre divergência nos resultados.
- Ajustar os parâmetros utilizando o algoritmo genético acoplado com outros modelos de elementos finitos: elasticidade bidimensional e modelos baseados na teoria de Mead-Markus que são amplamente utilizados na literatura.

## Referências Bibliográficas

- Al-Khoury, R., Scarpas, A., Kasbergen, C., & Blaauwendraad, J., 2002. Spectral element technique for efficient parameter identification of layered media. Part III: viscoelastic aspects. ***International Journal of Solids and Structures*** 39, 2189–2201.
- Belegundu, A. D.; Chandrupatla, T. R.; 2002. ***Introduction to Finite Elements in Engineering***. 3<sup>o</sup> Ed.; New Jersey.
- Caracciolo, R., Gasparetto, A., Giovagnoni, M., 2000. ***Measurement of the isotropic dynamic Young's modulus in a seismically excited cantilever beam using a laser sensor***. *Journal of Sound and Vibration* 231 (5), 1339-1353.
- Caracciolo, R., Gasparetto, A., Giovagnoni, M., 2001. ***Application of Causality check and of the reduced variables method for experimental determination of Young's modulus of a viscoelastic material***. *Mechanics of Materials* 33, 693-703.
- Caracciolo, R., Gasparetto, A., Giovagnoni, M., 2004. ***An experimental technique for complete dynamic characterization of a viscoelastic material***. *Journal of Sound and Vibration*.
- Chandrupatla, T. R., & Belegundu, A. D., 1999. ***Optimization Concepts and Applications in Engineering***. Prentice Hall.
- Daya, E.M., Azrar, L., & Potier-Ferry, M., 2004. An amplitude equation for the non-linear vibration of viscoelastically damped *sandwich* beams. ***Journal of Sound and Vibration*** , vol. 271, pp. 789–813.

- Deng, R., Davies, P., & Bajaj, A. K., 2003. Flexible polyurethane foam modelling and identification of viscoelastic parameters for automotive seating applications. ***Journal of Sound and Vibration*** 262, 391–417.
- Goldberg, D. E., Korb, B., & Deb, K., 1989. Messy genetic algorithms: Motivation, analysis, and first results. ***Complex Systems***, vol. 3, n. 5, pp. 493–530.
- Goldberg, D. E. 1989. ***Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning***. 1<sup>o</sup> Ed. ; Canada. Addison Wesley.
- Grafe, H., 1998. ***Model Updating Structural Dynamics Models Using Measured Response Functions***. Ph. D. thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicine, Department of Mechanical Engineering, London, UK.
- Haupt, S. E., 1998. ***Practical Genetic Algorithms***. 1<sup>o</sup> Ed.; USA. John Wiley & Sons.
- Holland, J. H., 1975, ***Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Applications to Biology, Control, and Artificial Intelligence***. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press
- Hornig, K. H, & Flowers, G. T., 2003. Nonlinear model of hysteresis of composite materials: an optimization approach using genetic algorithms. ***Tenth international congress on sound and vibration, ICSV10***. Stockholm, Sweden.
- Iglesias, M. A. M., 2000. ***Investigating various modal analysis techniques to estimate damping ratio***. Blacksburg, USA. Dissertação de mestrado – Virginia Polytechnic Institute and State University.

- Inman, D. J., 1996. **Engineering Vibration**. 1ªEd. New Jersey. USA. Prentice Hall.
- Kim, S., & Kreider, K. L., (in press). Parameter identification for nonlinear elastic and viscoelastic plates. **Applied Numerical Mathematics**.
- Lacerda, E. G. M. de, CARVALHO, André Carlos P. L. F. de ; **Introdução aos Algoritmos Genéticos**. UFRN.Rio Grande do Norte, Brasil.
- Mossberg, M., Hillström, L., & Söderström, T.,2001. Non-parametric identification of viscoelastic materials from wavepropagation experiments. **Automatica** 37, 511-521.
- NASHIF, Ahid D.; JONES, David I. G.; HENDERSON, John P. 1985. **Vibration Damping**. 10 ed. New York: J. Wiley & Sons,
- Ohkami, T., & Swoboda, G., 1999. Parameter identification of viscoelastic materials. **Computers and Geotechnics** 24, 279-295.
- Oresten, L. F., 2003. **Caracterização Dinâmica de Vigas “Sandwich” com Núcleo de Espuma Rígida de Poliuretano**. PUCPR, Brasil, Dissertação de Mestrado.
- Park, J., 2005. Transfer function methods to measure dynamic mechanical properties of complex structures. **Journal of Sound and Vibration** , vol. 288, pp. 57–79.
- PINHEIRO, Frederico A. 1998. **Aplicação de um Algoritmo Genético no Estudo das Perdas e do Controle de Tensão em Sistemas Elétricos de Potência**. UFMG, Minas Gerais, Brasil. Dissertação de mestrado.

- Pintelon, R., Guillaume, P., Vanlanduit, S., De Belder, K., & Rolain, Y., 2004. Identification of Young's modulus from broadband modal analysis experiments. ***Mechanical Systems and Signal Processing*** 18, 699–726.
- Popov, A., ***Genetic Algorithms for Optimization***. Programs for MATLAB version 1.0. User Manual. Hamburg. 2005
- QIAN, Guan-Liang; HOAS, Suong V.; XIAO, Xinran. ,1997. ***A vibration Method for Measuring Mechanical Properties of Composite, Theory and Experimental***. Composite Structures, vol.39, n. 1-2, pp. 31-38
- Shames, I. H., Dym, C. L., 1985. ***Energy and Finite Element Methods in Structural Mechanics***. McGraw-Hill Publ., New York, 1985, 755 pp.
- Shi, Y., Sol, H., & Hua, H., 2006. Material parameter identification of *sandwich* beams by an inverse method. ***Journal of Sound and Vibration*** 290, 1234–1255.
- Singh, R., Davies, P., & Bajaj, A. K., 2003. Estimation of the dynamical properties of polyurethane foam through use of Prony series. ***Journal of Sound and Vibration*** 264,1005–1043.
- Yang, W-P., Chen, L-W., & Wang, C-C., 2005. Vibration and dynamic stability of a traveling *sandwich* beam. ***Journal of Sound and Vibration***, vol. 285, pp. 597–614.
- Yu, P., & Haddad, Y. M., 1996. On the dynamic system identification of the response behaviour of linear viscoelastic materials. ***Int. J. Pres. Ves. & Piping*** 61, 45-54.

Zang, C., Grafe H., Imregun M., 2001. **Frequency-Domain Criteria for Correlating and Updating Dynamic Finite Element Models**. Journal of Mechanical System and Signal Processing. 15 (1), 139-155.

Zenkert, D., 1995. **An introduction to sandwich construction**. 2 ed. Warley, UK: Engineering Materials Advisory Services.

Ziaei Rad, S., 1997. **Methods for Updating Numerical Models in Structural Dynamics**. Ph. D. thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicine, Department of Mechanical Engineering, London, UK. Dissertação de Mestrado – Virginia Polytechnic Institute and State University.

# ANEXO A - Matriz de Banda Simétrica

Na matriz banda, todos os elementos diferentes de zero, estão contidos dentro de uma banda. Fora da banda todos os elementos são nulos.

Considere uma matriz de banda simétrica ( $n \times n$ ) conforme a Figura A.1

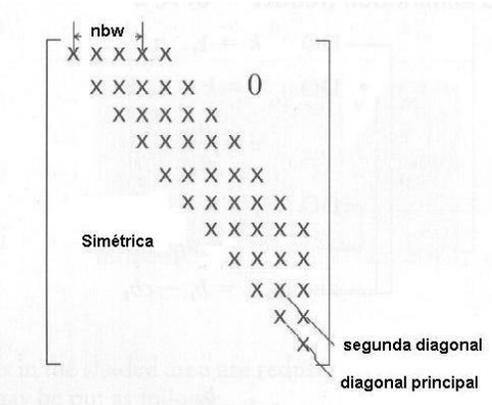


Figura A.1 – Matriz de Banda simétrica

Na Figura A.1, nbw é chamado Faixa da banda. Desde que somente elementos diferentes de zero precisam ser guardados, os elementos desta matriz são armazenados de forma compactada na matriz ( $n \times nbw$ ) como é mostrado na Figura A.2:

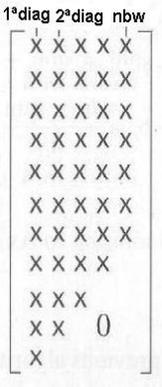


Figura A.2 – Matriz de Banda Compactada

A diagonal principal ou primeira diagonal na Figura A.1 é a primeira coluna na Figura A.2. Em geral, a  $k$ -ésima diagonal na Figura A.1 é armazenada na  $k$ -ésima coluna da Figura A.2.

A correspondência entre os elementos é dada por:

$a_{ij}$  ( $j > i$ ) na Figura A.1 equivale a  $a_{i(j-i+1)}$  na Figura A.2. Também nota-se que  $a_{ij} = a_{ji}$  (simetria) na Figura A.1, e que o número de elementos na  $k$ -ésima linha da Figura A.2 é  $\min(n - k + 1, nbw)$ .

Apresenta-se o algoritmo de eliminação de Gauss para resolver a matriz de banda simétrica.

Parte 1: Algoritmo para transformar a matriz de banda simétrica em matriz triangular superior:

```

Do k = 1, n = 1
  Nbk = min(n - k + 1, nbw)
  Do i = k + 1, nbk + k - 1
    l1 = i - k + 1
    c = ak, i1 / ak, 1
    Do j = i, nbk + k - 1
      j1 = j - i + 1
      j2 = j - k + 1
      ai, j1 = ai, j1 - c ak, j2
    End Do
  bi = bi - c bk
  End Do
End Do

```

Parte 2: Algoritmo para Retro-substituição:

$$b_n = b_n / a_{n,1}$$

**Do** ii = 1, n - 1

$$i = n - ii$$

$$nbi = \min(n - i + 1, nbw)$$

$$soma = 0$$

**Do** j = 2, nbj

$$soma = soma + a_{i,j} b_{i+j-1}$$

**End Do**

$$b_i = [ (b_i - soma) / a_{i,1} ]$$

**End Do**