

Pontifícia Universidade Católica do Paraná  
Curso de Engenharia Mecânica  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica

# **CARACTERIZAÇÃO DINÂMICA DE VIGAS "SANDWICH" COM NÚCLEO DE ESPUMA RÍGIDA DE POLIURETANO**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica na Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil.

Luís Fernando Oresten

Curitiba, Dezembro de 2003

# **TERMO DE APROVAÇÃO**

**Luís Fernando Oresten**

**“Caracterização dinâmica de vigas  
“Sandwich” com núcleo de espuma rígida de  
Poliuretano”**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, do Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

---

**Prof. Dr. Renato Barbieri (*Orientador*)**  
Curso de Engenharia Mecânica – PUCPR

---

**Prof. Dr. Nilson Barbieri (*Co-orientador*)**  
Curso de Engenharia Mecânica – PUCPR

---

**Prof. Dr. Arcanjo Lenzi**  
Departamento de Engenharia Mecânica - UFSC

---

**Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado**  
Curso de Engenharia Mecânica – PUCPR

# Resumo

Este trabalho tem o objetivo de analisar as características dinâmicas de vigas do tipo “sandwich” compostas pela associação do aço laminado, espuma rígida de Poliuretano e Poliestireno de Alto Impacto, utilizada para a fabricação de refrigeradores e congeladores domésticos. Foram desenvolvidas rotinas em FORTRAN para a determinação das frequências naturais utilizando duas abordagens inseridas dentro do contexto do Método dos Elementos Finitos: a Teoria da Viga de Timoshenko, de cuja equação diferencial do movimento foi desenvolvido um elemento finito através do Método de Galerkin, e segundo a formulação de Mead-Markus, que gerou o seu respectivo elemento através da teoria variacional por meio do Princípio de Hamilton. Os elementos foram comparados entre si com resultados analíticos oriundos da literatura disponível e com dados experimentais de vigas extraídas de gabinetes de refrigeradores, descobrindo-se que geram elementos mais rígidos, mas ainda com boa concordância para diversas condições de contorno. Os resultados experimentais da resposta em frequência foram utilizados para o levantamento da matriz de amortecimento e identificação de parâmetros modais por meio do Método do Polinômio em Frações Racionais. Para diminuir a parcela de incerteza dos resultados numéricos em relação aos experimentais, um dispositivo foi construído para a medição do módulo de cisalhamento transversal da espuma rígida de Poliuretano, visando obter um valor mais confiável desta propriedade. Os resultados dos programas acima mencionados para as vigas de aço/PU/PSAI foram então validados através da obtenção de resultados bastante semelhantes.

# Abstract

This work analyses the dynamic characteristics of sandwich beams made by the association of rolled steel, Polyurethane rigid foam and High Impact Polystyrene, used in the assembly of household refrigerators and food freezers. FORTRAN-built routines were developed for the determination of natural frequencies using two contexts related with the Finite Element Method (FEM): the Timoshenko Beam Theory, whose differential equation of movement supplied a special element by using the Method of Galerkin, and the formulation of Mead-Markus, generating the element from the variational theory and the Principle of Hamilton. The elements were compared by means of analytical results from the literature and with experimental data from test samples extracted from refrigerator cabinets. Both proposals were found to be more rigid, but still having good agreement for different boundary conditions. The experimental frequency response was used to obtain the damping matrix and identification of modal parameters with the Method of Rational Fraction Polynomials. In order to reduce the uncertainty of the numerical results in relation to the experimental ones, a device was built to measure the transverse shear module of the Polyurethane rigid foam, so that an average value could be considered as a more reliable data. The results of the above mentioned programs for the Steel/PU/HIPS beams could be then validated through very similar output results.

*Porque o Senhor dá a sabedoria, da sua boca vem o conhecimento e o entendimento.*  
(*Bíblia Sagrada - Provérbios de Salomão, capítulo 2, versículo 6*)

# Agradecimentos

A Jesus, Senhor, Salvador e Maravilhoso Conselheiro, pelo que Ele é.

A Mahara, esposa, companheira e amiga, que por tantas vezes me trouxe os olhos à direção certa.

A meus pais, cujo zelo ímpar pelo meu sustento e apoio incondicional ao estudo foram os grandes alentos da minha vida e certamente me ajudaram a chegar até aqui.

Ao Professor Renato Barbieri, pela inestimável ajuda prestada sem medir esforços, e pela tranquilidade transmitida nas horas de desespero.

Ao Professor Nilson Barbieri, pelo fundamental suporte na parte experimental deste trabalho.

Ao colega Eduardo Alves Cardoso, pelo apoio na forma da permissão às horas de trabalho passadas na PUC a despeito da extenuante demanda de trabalho, o que foi de extrema importância para cumprir esta importante etapa.

Ao colega Huang Wei Hsin, por instigar-me, à sua maneira, ao desafio de iniciar a caminhada rumo a este trabalho.

Aos colegas de trabalho e de estudo que auxiliaram com disponibilidade incontestada na confecção de corpos de prova e obtenção de resultados.

# Sumário

<b>Termo de Aprovação</b>	<b>i</b>
<b>Resumo</b>	<b>ii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iii</b>
<b>Sumário</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiv</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xv</b>
<b>Capítulo 1</b>	
<b>Introdução</b>	<b>2</b>
1.1 Visão Geral do Trabalho.....	2
1.2 Trabalhos Relacionados.....	3
1.3 Organização do Trabalho.....	6
<b>Capítulo 2</b>	
<b>Fundamentos de Vigas “Sandwich”</b>	<b>6</b>
2.1 Rigidez de Flexão.....	6
2.2 O Efeito “Sandwich” .....	11
2.3 Tensões em uma viga “sandwich”.....	12
2.4 Tensões Cisalhantes .....	13
2.5 Aproximações na Tensão Cisalhante .....	14
2.6 Resumo das Aproximações .....	15
2.7 Viga “Sandwich” com Faces Não-Simétricas.....	16

<b>Capítulo 3</b>	
<b>Equações de Movimento para Vigas “Sandwich”</b>	<b>20</b>
3.1 Deformações por Cisalhamento.....	21
3.2 Rigidez ao Cisalhamento.....	23
3.3 Equações em termos do Campo de Deslocamentos.....	24
3.4 Equações de Equilíbrio.....	27
3.5 Equação de Movimento.....	29
<b>Capítulo 4</b>	
<b>Formulação de Elementos de Viga “Sandwich”</b>	<b>33</b>
4.1 Formulação de Mead-Markus.....	33
4.1.1 Considerações Iniciais.....	33
4.1.2 Obtenção das matrizes do elemento.....	35
4.2 Elemento para a Teoria da Viga de Timoshenko.....	39
4.3 Descrição das Rotinas Computacionais.....	43
4.3.1 Formulação de Mead-Markus.....	43
4.3.2 Formulação para a Teoria da Viga de Timoshenko.....	46
4.4 Análise de Convergência.....	49
<b>Capítulo 5</b>	
<b>Identificação de Parâmetros em Vigas “Sandwich”</b>	<b>57</b>
5.1 Introdução.....	57
5.2 Método dos Polinômios em Frações Racionais.....	62
<b>Capítulo 6</b>	
<b>Caracterização dos Materiais</b>	<b>68</b>
6.1 Espuma Rígida de Poliuretano.....	68
6.1.1 Módulo de Cisalhamento, $G$ .....	68
6.1.2 Densidade.....	75
6.2 Chapa Metálica.....	76
6.3 Chapa de Poliestireno.....	77
6.3.1 Módulo de Elasticidade.....	77
6.3.2 Densidade.....	80
<b>Capítulo 7</b>	
<b>Resultados Numéricos e Experimentais</b>	<b>81</b>
7.1 Sistema de medição para vibração livre de vigas.....	81
7.1.1 Condição “Free-Free”.....	81
7.1.2 Condição Engastada.....	91

<b>Capítulo 8</b>	
<b>Conclusão e Sugestões para Trabalhos Futuros</b>	<b>102</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>106</b>

# Lista de Figuras

Figura 2.1	Viga submetida a momento fletor .....	7
Figura 2.2	Definição de curvatura .....	8
Figura 2.3	Convenção de sinais para a viga “sandwich” .....	9
Figura 2.4	Seção infinitesimal $dx$ e definição de forças atuantes para a equação de equilíbrio .....	13
Figura 2.5	Parte Superior: Distribuição de tensões normais: (a) sem aproximações (b) adotando $E_c \ll E_f$ e (c) adotando $E_c \ll E_f$ juntamente com $t_c \ll t_f$ . Parte inferior: Distribuição de tensões cisalhantes: (d) sem aproximações (e) adotando $E_c \ll E_f$ e (f) adotando $E_c \ll E_f$ juntamente com $t_c \ll t_f$ .....	16
Figura 2.6	Sistema de coordenadas adotado para a determinação da linha neutra .....	17
Figura 3.1	Elemento “sandwich” ilustrando (a) a deformação total, (b) flexão e (c) deformação cisalhante .....	21
Figura 3.2	Deformação de um elemento estrutural sujeito a cisalhamento .....	21
Figura 3.3	Deformação no cisalhamento para um elemento “sandwich” .....	22
Figura 3.4	Seção de uma viga “sandwich” com coordenadas locais para as faces ...	24
Figura 3.5	Elemento de viga distorcido .....	27
Figura 3.6	Definição de inércia rotacional.....	30
Figura 4.1	Deflexão da viga .....	34
Figura 4.2	Graus de liberdade nodais para o elemento de viga .....	35
Figura 4.3	Graus de liberdade do elemento de viga “Sandwich” segundo a Equação da Viga de Timoshenko .....	43

Figura 4.4	Fluxograma de operações para a rotina desenvolvida segundo a Formulação de Mead-Markus .....	44
Figura 4.5	Fluxograma de operações para o Método da Iteração Inversa (Bathe, 1996) .....	45
Figura 4.6	Fluxograma de operações para a rotina segundo a Formulação para a Viga de Timoshenko .....	46
Figura 4.7	Resposta em frequência da viga, uma das saídas da rotina da teoria de Timoshenko.....	48
Figura 4.8	Número de negativos na diagonal da matriz triangularizada x frequência .....	48
Figura 4.9	Dimensões da Viga 1, na condição de engastamento.....	49
Figura 4.10	Representação do primeiro modo natural para a viga engastada.....	50
Figura 4.11	Representação do segundo modo natural para a viga engastada .....	50
Figura 4.12	Representação do terceiro modo natural para a viga engastada .....	51
Figura 4.13	Dimensões da Viga 2 (mm).....	51
Figura 4.14	Representação do primeiro modo natural para a viga biapoiada.....	52
Figura 4.15	Representação do segundo modo natural para a viga biapoiada .....	53
Figura 4.16	Representação do terceiro modo natural para a viga biapoiada .....	53
Figura 4.17	Convergência de resultados para a formulação de Mead-Markus – configuração engastada .....	54
Figura 4.18	Convergência de resultados para a formulação de Timoshenko – Configuração engastada .....	54
Figura 4.19	Convergência de resultados para a configuração engastada utilizando o <i>software</i> ALGOR® .....	55
Figura 4.20	Convergência de resultados para a formulação da teoria da Viga de Timoshenko – configuração biapoiada .....	55
Figura 4.21	Convergência de resultados para a formulação de Mead-Markus – configuração biapoiada.....	56
Figura 4.22	Convergência de resultados para a configuração biapoiada utilizando o <i>software</i> ALGOR® .....	56
Figura 5.1	Função Resposta ao Impulso com <i>Leakage</i> (direita).....	62
Figura 6.1	Vista Geral do dispositivo para ensaio torcional do PU .....	70

Figura 6.2	Detalhe da Fixação do Corpo de Prova na Extremidade Fixa.....	70
Figura 6.3	Detalhe da Extremidade Móvel com Mancal de Rolamento e Anel de Fixação do Ponteiro de Medição Angular.....	71
Figura 6.4	Detalhe de Fixação do Ponteiro e Escala de Medição do Ângulo de Torção .....	71
Figura 6.5	Aplicação do torque .....	71
Figura 6.6	Vazio encontrado no núcleo de Poliuretano de uma das amostras de corpos de prova utilizados experimentalmente .....	72
Figura 6.7	Descontinuidade encontrada na interface entre a lâmina de Poliestireno e a espuma.....	73
Figura 6.8	Ampliação em microscopia da espuma rígida de PU.....	73
Figura 6.9	Detalhe da estrutura da célula .....	73
Figura 6.10	Ângulo de Torção x Torque.....	74
Figura 6.11	Descrição geométrica do corpo de prova de tração da chapa metálica...	76
Figura 6.12	Correlação entre força e deformação obtidos no ensaio de tração no corpo de prova de aço SAE 1010 laminado. ....	77
Figura 6.13	Corpo de prova utilizado no ensaio de tração para o PSAI. Espessura = 1,6 mm .....	78
Figura 6.14	Curva tensão-deformação para o corpo de prova de PSAI.....	78
Figura 6.15	Extração da região de linearidade do gráfico da Fig. 6.14, com ajuste da equação da reta.....	79
Figura 7.1	Bancada de teste, com uma amostra de viga “sandwich” suspensa por três elásticos e equipada com acelerômetros. Na parte inferior, vê-se o martelo de impacto. ....	82
Figura 7.2	Esquema da bancada, onde: 1 – Estrutura da bancada 2 – Acelerômetros 3 – Martelo de Impacto 4 – Viga “sandwich” 5 – Analisador de Sinais 6 – Microcomputador PC .....	83
Figura 7.3	Arranjo de acelerômetros para o levantamento do terceiro modo natural na configuração <i>free-free</i> (medidas em mm) .....	83
Figura 7.4	Função Resposta em Frequência para o 2º modo natural experimental.....	85
Figura 7.5	Ângulo de fase para o 2º modo natural experimental.....	85

Figura 7.6	Coerência para o 2º modo natural experimental.....	86
Figura 7.7	Função Resposta em Freqüência para o 3º modo natural experimental.....	87
Figura 7.8	Ângulo de Fase para o 3º modo natural experimental.....	87
Figura 7.9	Coerência para o 3º modo natural experimental.....	88
Figura 7.10	Detalhe da malha utilizada no elemento 2D do ALGOR®, para a configuração “free-free”, com a camada superior em PSAI e a inferior sendo a chapa de aço .....	89
Figura 7.11	Comparativo do primeiro modo natural, configuração “free-free”: resultados numéricos.....	90
Figura 7.12	Comparativo do segundo modo natural, configuração “free-free”: resultados numéricos X pontos de medição experimental.....	90
Figura 7.13	Comparativo do terceiro modo natural, configuração “free-free”: resultados numéricos X pontos de medição experimental.....	91
Figura 7.14	Engaste produzido no corpo de prova por meio de forma de concreto....	92
Figura 7.15	Arranjo de acelerômetros para a experimentação na configuração engastada (medidas em mm) .....	92
Figura 7.16	Detalhe do engastamento produzido no modelo 2D do ALGOR® para a análise da viga (o símbolo @ indica um ponto de engaste) .....	94
Figura 7.17	Função Resposta em Freqüência para o 1º modo natural experimental – Configuração Engastada.....	94
Figura 7.18	Ângulo de Fase para o 1º Modo Natural Experimental – Configuração Engastada .....	95
Figura 7.19	Coerência para o 1º modo experimental – Configuração Engastada....	95
Figura 7.20	Função Resposta em Freqüência para o 2º modo natural experimental – Configuração Engastada.....	96
Figura 7.21	Ângulo de Fase para o 2º modo natural experimental – Configuração Engastada .....	96
Figura 7.22	Coerência para o 2º modo experimental – Configuração Engastada....	97
Figura 7.23	Função Resposta em Freqüência para o 3º modo natural experimental – Configuração Engastada.....	98

Figura 7.24 Ângulo de Fase para o 3º modo natural experimental – Configuração Engastada .....	98
Figura 7.25 Coerência para o 3º modo experimental – Configuração Engastada.....	99
Figura 7.26 Comparativo do primeiro modo natural, configuração engastada: resultados numéricos X pontos de medição experimental.....	99
Figura 7.27 Comparativo do segundo modo natural, configuração engastada: resultados numéricos X pontos de medição experimental.....	100
Figura 7.28 Comparativo do terceiro modo natural, configuração engastada: resultados numéricos X pontos de medição experimental.....	100

# Lista de Tabelas

Tabela 4.1	Resultados numéricos para a Viga 1 – Configuração Engastada (Sokolinsky <i>et al</i> ) .....	50
Tabela 4.2	Resultados numéricos para a Viga 2 – Configuração Biapoiada (Zenkert) .....	52
Tabela 6.1	Módulo de cisalhamento experimental, G .....	74
Tabela 6.2	Medições da Densidade do Poliuretano Rígido .....	75
Tabela 6.3	Medições do Módulo de Elasticidade do PSAI .....	79
Tabela 6.4	Medições da Densidade do PSAI .....	80
Tabela 7.1	Comparação dos resultados experimentais com resultados numéricos para as frequências naturais na configuração “Free-Free” (rotinas em FORTRAN e modelo construído no ALGOR® com elementos <i>sandwich</i> e 2D).....	89
Tabela 7.2	Comparação dos resultados experimentais com resultados numéricos para as frequências naturais na configuração engastada (rotinas em FORTRAN e modelo construído no ALGOR® com elementos <i>sandwich</i> e 2D).....	93
Tabela 7.3	Fator de amortecimento $\xi$ para viga “ <i>sandwich</i> ” na configuração engastada.....	101

# Lista de Símbolos

$E^*$	Módulo de elasticidade variável na frequência
$E'$	Parte real do módulo de elasticidade variável na frequência
$E''$	Parte imaginária do módulo de elasticidade variável na frequência
$\kappa$	Curvatura
$\varepsilon$	Deformação
$M$	Momento fletor
$\sigma$	Tensão normal
$E$	Módulo de elasticidade
$R$	Raio de curvatura
$I$	Momento de inércia
$D$	Rigidez flexural
$V$	Força cortante
$N$	Força normal
$t$	Espessura
$G$	Módulo de Cisalhamento Transversal
$d$	Distância entre os eixos baricentrais das faces de uma viga "sandwich"
$A$	Área
$\tau$	Tensão cisalhante
$B(z)$	Primeiro momento de área
$\gamma$	Deformação transversal
$S$	Rigidez ao cisalhamento
$k$	Fator de cisalhamento
$q$	Carga distribuída

$\mathfrak{R}$	Inércia rotatória
$\rho$	Massa específica
$\rho^*$	Massa por unidade de superfície
$u$	Deslocamento
$\{q\}$	Vetor deslocamento
$T$	Energia potencial
$U$	Energia cinética
$m$	Massa
$[M]$	Matriz Massa
$[K]$	Matriz de Rigidez
$H$	Função Resposta em Frequência
$e$	Função Erro
$\{E\}$	Vetor Erro
$J$	Função erro quadrática
$\{V\}$	Vetor gradiente total
$\xi$	Fator de amortecimento
$(.)_f$	Referente à face de uma viga <i>sandwich</i>
$(.)_c$	Referente ao núcleo ( <i>core</i> ) de uma viga <i>sandwich</i>
$w_b$	Deformação devida a um momento fletor
$w_s$	Deformação devida a uma sollicitação transversal



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Visão Geral do Trabalho

A construção caracterizada pelo nome de “*sandwich*” atualmente é uma das mais utilizadas nas estruturas de engenharia. O uso de dois materiais rígidos e de baixa espessura, separados por uma camada de material flexível resulta num conjunto que, além de ser leve, pode adquirir propriedades mecânicas comparáveis às dos materiais convencionais para aplicações estruturais. Por tal razão, muitos ramos da indústria, principalmente, os relacionados ao setor de transporte – aeronáutica, aeroespacial, automobilística, ferroviária e marítima – utilizam corriqueiramente a viga “*sandwich*” em seus produtos, uma vez que as altas razões rigidez/massa e resistência mecânica/massa proporcionam um decisivo melhoramento nas capacidades de carga, desempenho e consumo de energia.

Na chamada “linha branca”, especialmente no ramo dos refrigeradores e congeladores ou *freezers*, o uso de vigas e placas “*sandwich*” faz parte da concepção básica do produto, não com função estrutural como premissa básica de utilização, mas sim como elemento de isolamento térmica, para tal adotando a lã de vidro, a lã de rocha e a espuma rígida de Poliuretano intermediando uma chapa de aço laminada na parte externa, e uma chapa de material plástico termoformado fazendo parte do interior do refrigerador ou caixa interna. Devido ao efeito nocivo da lã de vidro e da lã de rocha à natureza e ao Homem e à baixa eficiência na isolamento térmica em relação a outros materiais, hoje o Poliuretano ou PU é utilizado na totalidade dos aparelhos fabricados no Brasil.

A comprovada eficiência das vigas “*sandwich*” e a subsequente aplicação dessa estrutura em escala cada vez mais larga exige hoje um maior conhecimento de suas propriedades mecânicas. E, em situações sujeitas a cargas dinâmicas, torna-se necessário o conhecimento do comportamento destes conjuntos “*sandwich*” ante tais solicitações. Como exemplo, nos refrigeradores a geração de ruído advém da vibração causada no gabinete e que provoca às vezes movimentação e irradiação sonora de componentes internos como prateleiras e gavetas, e em alguns casos comprometimento do sistema de refrigeração.

Assim, o objetivo deste trabalho foi conhecer o comportamento dinâmico da associação “*sandwich*” utilizada em refrigeradores domésticos. Para tal, duas formulações distintas de vigas “*sandwich*” foram utilizadas para levantamento das frequências naturais e modos de vibrar por meio do Método dos Elementos Finitos. Os resultados foram comparados com os obtidos por meio de *software* comercial para diferentes condições de contorno. Como parte da experimentação, amostras de vigas extraídas de refrigeradores foram avaliadas e seus parâmetros dinâmicos levantados por meio de métodos numéricos baseados na Função Resposta em Frequência (FRF). Os resultados experimentais foram também confrontados com os resultantes dos modelos implementados e do aplicativo comercial ALGOR®. Para tal comparação, as propriedades mecânicas pertinentes aos procedimentos numéricos desenvolvidos foram levantados para os materiais constituintes da viga, quais sejam o núcleo de espuma rígida de poliuretano, a chapa de aço laminado da parte externa e a chapa de poliestireno de alto impacto que forma a chamada caixa interna do gabinete do refrigerador.

## **1.2 Trabalhos Relacionados**

A teoria de Euler-Bernoulli é a que dá início à abordagem das deformações em placas e vigas. Suas considerações dizem respeito à deformação do eixo neutro de uma viga como sendo a soma de uma translação com uma rotação da seção que corresponde à derivada da translação em relação ao comprimento da viga (Dym e Shames, 1973) [1]. No entanto, as considerações acima perdem eficiência para vigas de seções mais robustas. A teoria de Timoshenko veio para suprir essa carência, com a consideração da rotação da seção de forma que a mesma não mais se mantenha perpendicular à linha neutra, graças à presença de uma tensão cisalhante no campo de deformações da viga. A determinação das tensões impostas

por carregamentos depende, no entanto, da utilização de constantes limitadas a determinados tipos de seção transversal, que se tornam pouco eficazes em geometrias mais complexas.

A Teoria de Mindlin é outra proposta importante nesse contexto, adicionando o termo referente à inércia rotatória e trazendo maior exatidão à análise dinâmica, enquanto a Teoria de Mead-Markus (Wang, 2000 [11]) vem a ser pioneira na tratativa de vigas de diferentes materiais, sendo um dos mais citados no contexto dos materiais compósitos e tendo sido por isso utilizado como base para uma das abordagens deste trabalho, vindo por isso a ser descrito com o devido detalhe posteriormente.

Como em muitas outras áreas da Engenharia, o uso do Método dos Elementos Finitos (doravante tratado como MEF) trouxe maior capacidade de análise, principalmente no que diz respeito às placas “*sandwich*”. Com efeito, uma das principais preocupações nesse caso é garantir a continuidade de deslocamentos do todo, isto é, conjugar os pequenos deslocamentos de um material mais rígido nas faces com o material do núcleo. Para isso, várias têm sido as opções apresentadas, a saber:

- A adoção de elementos  $C^1$  que garantem continuidade de tensões, deformações e de forças, sendo as últimas asseguradas pela definição de graus de liberdade distintos para núcleo e para as faces ao longo das fronteiras entre os materiais, bem como pelo entrelaçamento dos elementos por meio da associação das propriedades mecânicas e posterior unificação dos graus de liberdade, conforme relatado no trabalho de Austin (1998) [2].
- As atuações na chamada “teoria de alta ordem”, nas quais expansões polinomiais são inseridas como funções representativas das variáveis de campo, e que têm garantido bons resultados principalmente nos pontos críticos das vigas “*sandwich*”, a interface entre núcleo e faces, e a linha central da seção. Sokolinsky *et al* (2001) [3] apresentam de maneira acessível esta teoria, permitindo em particular uma boa compreensão das condições simplificadoras que são adotadas de uma maneira geral nessa abordagem. Rao *et al* (2001) [4] apresentam a “teoria mista”, adotando polinômios de ordem cúbica para a caracterização do deslocamento da viga conjugados com funções interpoladoras e adotando o Princípio de

Hamilton para o levantamento das frequências naturais. Cook e Tessler (1998) [5] usam ainda coeficientes de correção obtidos a partir das considerações da Teoria da Elasticidade, que garantem a continuidade de tensões axiais ao longo da viga.

Uma das aplicações resultantes da boa resistência mecânica produzida pela estrutura “*sandwich*” é a adoção de um material viscoelástico entre as faces, visando também produzir amortecimento dinâmico. Tal aplicação é utilizada em grande escala nas indústrias aeronáuticas, aeroespaciais e marítimas, sendo inclusive proveniente de seu corpo técnico uma generosa parcela da produção acadêmica existente no estudo de compósitos. Pela proposta deste trabalho, não se objetiva avaliar o efeito viscoelástico da associação que faz parte do refrigerador, no entanto segue resumida descrição para conveniência à explanação dos conteúdos posteriores.

O efeito da viscoelasticidade é encontrado principalmente em materiais poliméricos, sendo estes utilizados de maneira geral para propósitos de amortecimento. Segundo Nashif *et al* (1985) [6] num material viscoelástico o amortecimento resulta de fenômenos de relaxação e recuperação da rede polimérica após a deformação, existindo bastante influência da frequência e da temperatura devido à relação direta destas grandezas com a movimentação molecular. Essa influência se revela na presença do módulo elástico variável no domínio da frequência, segundo a Equação 1.1:

$$E^* = E'(\omega) + iE''(\omega) \quad (1.1)$$

onde  $E'$  e  $E''$  são as partes real e imaginária do Módulo de Elasticidade, respectivamente.

A determinação do módulo elástico e do módulo de cisalhamento, igualmente relacionado à frequência de excitação da estrutura, é de difícil obtenção, assim como conferem dificuldade de observação e caracterização experimental. Devido a estes fatos foram geradas diversas técnicas numéricas para modelagem das estruturas com materiais viscoelásticos através do MEF, algumas das quais se tornaram populares nos últimos anos. O método da Energia de Deformação Modal (*MSE – Modal Strain Energy*) assume que os vetores representativos dos modos de vibrar da estrutura são resultado de aproximações dos modos complexos, evitando assim o uso das matrizes complexas (Johnson e Kienholz, 1983) [7]. A estrutura

amortecida é representada em termos de seus modos de vibrar não-amortecidos com termos de amortecimento inseridos nas equações de movimento, termos esses correspondentes à relação entre a energia de deformação do núcleo e da estrutura.

O método Golla-Hughes-McTavish ou GHM (Hughes e McTavish, 1993) [8] apresenta uma metodologia de análise denominada que vem a caracterizar a relação do material viscoelástico com a frequência por meio da representação das propriedades através de funções denominadas “mini-osciladores”, dotadas de coeficientes determinados experimentalmente para os materiais da estrutura em estudo. A analogia mecânica do mini-oscilador é a de um sistema com o comportamento dinâmico de tensões e deformações equivalente ao de um material viscoelástico, e os efeitos inerciais devido à introdução dos termos de massa correspondentes auxiliam a caracterizar as mudanças mais lentas das propriedades mecânicas com a frequência.

### **1.3 Organização do Trabalho**

Pode-se dividir o texto em três partes, a saber:

- *Teoria Geral de Vigas “sandwich”*, onde se discorre sobre a determinação de tensões e suas aproximações como hipóteses simplificadoras (Capítulo 2), assim como o levantamento do comportamento dinâmico deste material pela obtenção da equação de movimento para vibração livre não-amortecida (Capítulo 3).
- *Análise Dinâmica Computacional de Vigas “sandwich”*, que ilustra as duas formulações aplicadas para construção de elementos de viga aplicados, respectivamente as teorias de Mead-Markus e Timoshenko (Capítulo 4). Nesse capítulo são também apresentados os resultados obtidos a partir de estruturas extraídas da literatura, bem como a análise de convergência dos resultados para diferentes graus de refinamento de malha
- *Análise Dinâmica Experimental de Vigas “sandwich”*, que englobam a apresentação do método de identificação de parâmetros modais baseados na experimentação direta (Capítulo 5), além do levantamento experimental das propriedades mecânicas dos materiais das vigas “sandwich” analisadas neste trabalho (Capítulo 6), que, uma vez inseridos nas rotinas computacionais,

forneem o comportamento modal da estrutura que é confrontado com os resultados experimentais das amostras reais de vigas reais (Capítulo 7).

Por fim, o Capítulo 8 conclui este trabalho, apresentando conclusões sobre os resultados obtidos, comentários gerais e sugestões para a geração de novos estudos relacionados com o tema em questão.

## Capítulo 2

# Fundamentos de Vigas “*Sandwich*”

Nesta seção os princípios básicos da teoria de vigas “*sandwich*” serão abordados. Basicamente, trata-se dos mesmos conteúdos da teoria clássica de vigas, com a exceção de que são levadas em consideração as deformações por cisalhamento transversal, resultando na conhecida Teoria de Vigas de Timoshenko. Também, deve-se considerar que diferentes cargas serão absorvidas por diferentes partes da estrutura. Como simplificação, assume-se que todas as vigas possuem largura unitária, o que faz com que as cargas e as demais propriedades mecânicas sejam dadas por largura unitária.

### 2.1 Rigidez de Flexão

Seja o problema de uma viga reta sujeita a flexão constante, que confere à viga uma curvatura  $\kappa_x$  (que vem a ser o inverso do raio de curvatura  $R_x$ ), de acordo com a Figura 2.1:

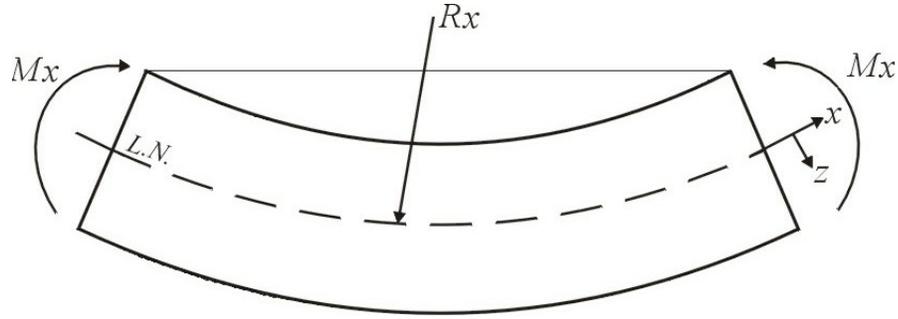


Figura 2.1 Viga submetida a momento fletor

A deformação em uma fibra situada a uma distância  $z$  da linha neutra é:

$$\varepsilon_x = \kappa_x z \quad (2.1)$$

isto é, variando linearmente com  $z$ . O momento fletor aplicado necessário para causar a curvatura  $\kappa_x$  é então:

$$M_x = \int \sigma_x z dz = \int \frac{Ez^2}{R_x} dz = \kappa_x \int Ez^2 dz = \frac{EI}{R_x} \quad (2.2)$$

onde  $EI = \int Ez^2 dz = D$ . A constante  $EI$  (que de agora em diante é designada  $D$ ) é conhecida como *rigidez flexural*, que normalmente é o produto do módulo elástico  $E$  e do momento de inércia da seção  $I$ .

Ora, se o módulo de Young  $E$  varia ao longo da coordenada  $z$  então não pode ser removido da integral na Equação 2.2. Portanto, para uma seção qualquer, a Equação 2.2 deve ser usada e a rigidez flexural  $D$  considerada como a única propriedade definida. Disso tem-se que a expressão geral para a deformação será:

$$\varepsilon_x = \frac{M_x z}{D} \quad (2.3)$$

A deformação ainda varia linearmente com  $z$  ao longo da normal à seção transversal. Considerando pequenos deslocamentos, o raio de curvatura pode ser determinado em termos do campo de deslocamentos (Figura 2.2):

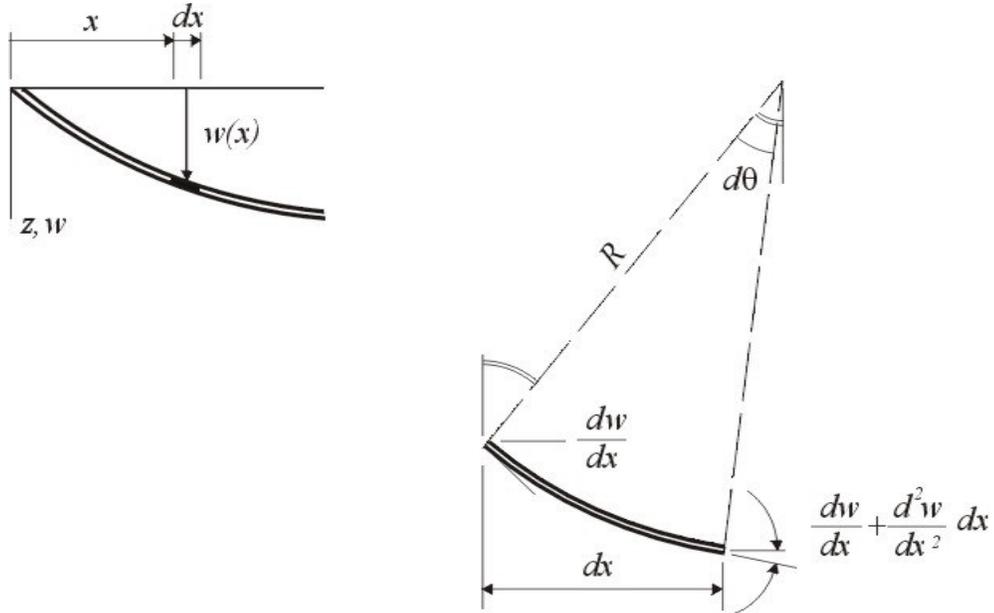


Figura 2.2 Definição de curvatura

Da Figura 2.2 é visível por geometria que  $dx \approx R d\theta$  (sempre considerando pequenos deslocamentos) e por diferenciação que a variação da inclinação da seção  $dw/dx$ :

$$d\theta = \frac{d}{dx} \left( \frac{dw}{dx} \right) dx \quad (2.4)$$

$$d\theta = \frac{d^2 w}{dx^2} dx$$

Isto significa que:

$$\frac{1}{R_x} = \kappa_x = -\frac{d^2 w}{dx^2} \quad (2.5)$$

Com as equações básicas definidas, resta definir o sistema de coordenadas e as direções positivas de aplicação de carregamentos (Força Normal  $N_x$  e Força Cortante  $V_x$ ) e do Momento Fletor  $M_x$  de acordo com a Figura 2.3:

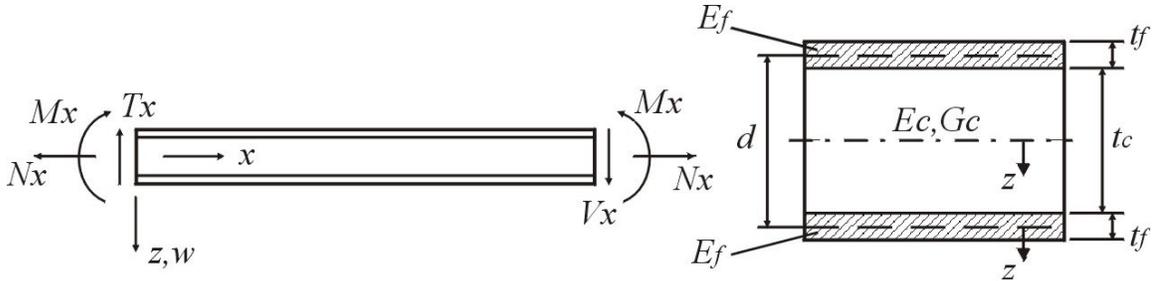


Figura 2.3 Convenção de sinais para a viga “sandwich”

Considerando, a princípio para fins de maior facilidade de compreensão, uma disposição simétrica da viga “sandwich”, ou seja, as faces tendo a mesma espessura  $t_f$  e sendo do mesmo material com módulo elástico  $E_f$ . O núcleo tem espessura  $t_c$ , módulo elástico  $E_c$  e módulo de cisalhamento  $G_c$ . Para uma seção como a da Figura 2.3, a rigidez flexural  $D$  vem de sua definição e prossegue (considerando o sistema de coordenadas da Figura 2.3):

$$D = \int E z^2 dz = \int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} E_c z^2 dz + 2 \int_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} E_f \left( z' + \frac{d}{2} \right)^2 dz' \quad (2.6)$$

onde  $z'$  é o sistema de coordenadas tomado a partir do eixo baricentral da face.

A primeira integral em termos de  $E_c$  resulta em:

$$\int_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} E_c z^2 dz = E_c \frac{z^3}{3} \Big|_{-\frac{t_c}{2}}^{\frac{t_c}{2}} = \frac{E_c t_c^3}{12} = D_c \quad (2.7)$$

E a segunda integral pode ser colocada como sendo:

$$\begin{aligned}
2 \int_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} E_f \left( z' + \frac{d}{2} \right)^2 dz' &= 2 \int_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} E_f \left( z'^2 + \frac{d^2}{4} + z'd \right) dz' = \\
2 \left[ \int_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} E_f z'^2 dz' + \frac{E_f d^2}{4} \int_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} dz' \right] &= 2 \left[ E_f \frac{z'^3}{3} \Big|_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} + \frac{E_f d^2}{4} z' \Big|_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} \right] = \\
2(D_f + D_0) &
\end{aligned} \tag{2.8}$$

onde

$$D_f = E_f \frac{z'^3}{3} \Big|_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} = \frac{E_f t_f^3}{12} \tag{2.9}$$

$$D_0 = \frac{E_f d^2}{4} z' \Big|_{-\frac{t_f}{2}}^{\frac{t_f}{2}} = \frac{E_f t_f d^2}{2} \tag{2.10}$$

e  $d=t_f+t_c$ , que é a distância entre os eixos baricentrais das faces.

Tem-se então a soma dos termos resultantes das integrais, que determina a rigidez flexural  $D$ :

$$D = 2(D_f + D_0) + D_c \tag{2.11}$$

O primeiro termo ( $D_f$ ) corresponde à rigidez flexural das faces como elementos isolados, fletindo sobre suas linhas neutras; o segundo ( $D_0$ ) representa a rigidez das faces associadas na estrutura “sandwich” e fletindo sobre a linha neutra daquela, e o terceiro ( $D_c$ ), a rigidez flexural do núcleo.

## 2.2 O Efeito “Sandwich”

Se as faces são finas comparadas à espessura do núcleo, isto é,  $t_f \ll t_c$ , o primeiro termo da Equação 2.11 é muito pequeno e até menor que 1% do segundo se:

$$3 \left( \frac{d}{t_f} \right)^2 > 100 \quad \text{ou} \quad \frac{d}{t_f} > 5,77 \quad (2.12)$$

Como resultado da escolha de materiais, o núcleo geralmente tem um módulo elástico muito menor que o das faces, isto é,  $E_c \ll E_f$ . Assim, o terceiro termo da Equação 2.11 é menor que 1% do segundo se:

$$\frac{6E_f t_f d^2}{E_c t_c} > 100 \quad (2.13)$$

Com isso, para uma estrutura “sandwich” com faces finas e um núcleo de baixa rigidez, a rigidez flexural pode ser aproximada para:

$$D \cong \frac{E_f t_f d^2}{2} \quad (2.14)$$

Para materiais de engenharia utilizados rotineiramente em estruturas “sandwich”, a relação de espessuras núcleo/face está comumente entre 10 e 50, e a relação de módulos elásticos face/núcleo entre 50 e 1000, o que é atendido para o caso em estudo. Um fato é importante: o termo dominante da rigidez flexural é o que trata da flexão das faces em torno da linha neutra da estrutura como um todo, e caracteriza as solicitações por tração-compressão das faces. Se não houver uma adesão do núcleo às faces, este termo é comprometido, deixando predominantes os termos 1 e 3 da Equação 2.11, que são independentes entre si. Isto tudo significa que desta forma uma parcela considerável, senão a “totalidade” da rigidez de flexão da

estrutura será perdida. O fato da rigidez de flexão desse tipo de estrutura estar associado à interação de seus elementos constituintes é o que se caracteriza como *efeito “sandwich”*.

### 2.3 Tensões em uma viga “sandwich”

Usando as definições de deformação, Equação 2.3, as tensões em uma viga “*sandwich*” devido à flexão são facilmente determinadas. As tensões na face e no núcleo são respectivamente:

$$\sigma_f = \frac{M_x z E_f}{D} \quad \text{para} \quad \frac{t_c}{2} < |z| < \frac{t_c}{2} + t_f \quad (2.15)$$

$$\sigma_c = \frac{M_x z E_c}{D} \quad \text{para} \quad |z| < \frac{t_c}{2} \quad (2.16)$$

Assim, as tensões axiais de flexão variam linearmente ao longo da espessura de cada material constituinte da estrutura; contudo, há um salto no valor na interface entre as faces e o núcleo. A deformação e a tensão devidas a um carregamento normal  $N_x$  são respectivamente dados por:

$$\varepsilon_{x0} = \frac{N_x}{2E_f t_f + E_c t_c} = \frac{N_x}{A_x} \quad (2.17)$$

e assim

$$\sigma_f = \varepsilon_{x0} E_f \quad (2.18)$$

$$\sigma_c = \varepsilon_{x0} E_c \quad (2.19)$$

onde  $\varepsilon_{x0}$  é a deformação na linha neutra. As tensões e deformações devido à flexão e cargas axiais podem ainda ser superpostas.

## 2.4 Tensões Cisalhantes

Da mesma forma que exposto anteriormente, faz-se necessária uma definição mais geral para a tensão cisalhante. Considerando um elemento infinitesimal  $dx$  de uma viga, como mostrado na Figura 2.4, a força cisalhante deve compensar a variação das tensões axiais para a garantia do campo de tensões:

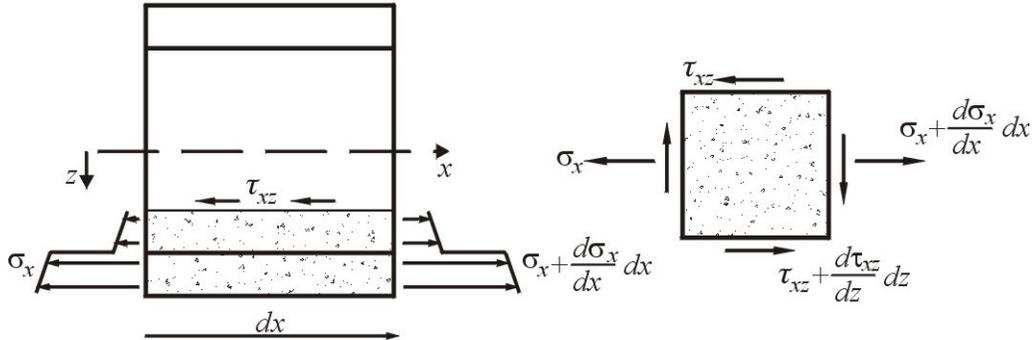


Figura 2.4 Seção infinitesimal  $dx$  e definição de forças atuantes para a equação de equilíbrio

Do equilíbrio de forças na direção  $x$  tem-se que:

$$\frac{d\sigma_x}{dx} + \frac{d\tau_{xz}}{dz} = 0 \quad (2.20)$$

$$\tau_{xz}(z) = \int_z^{\frac{d}{2}+t_f} \frac{d\sigma_x}{dx} dz$$

considerando que a tensão  $\tau_{xz}$  em  $(d/2)+t_f$  (superfície livre da face, segundo Figura 2.3) é nula. Agora, da Equação 2.20 e sabendo que  $dM_x/dx = V_x$  tem-se de maneira geral que:

$$\tau = \frac{V_x}{D} \int_z^{\frac{d}{2}+t_f} E z dz = \frac{V_x B(z)}{D} \quad (2.21)$$

sendo  $B(z)$  o primeiro momento de área.

No material do núcleo, para  $|z| < t_c/2$ , o primeiro momento de área é:

$$B(z) = \frac{E_f t_f d}{2} + \frac{E_c}{2} \left( \frac{t_c}{2} - z \right) \left( \frac{t_c}{2} + z \right) \quad (2.22)$$

o que resulta na seguinte expressão para a tensão cisalhante no núcleo:

$$\tau_c(z) = \frac{V_x}{D} \left[ \frac{E_f t_f d}{2} + \frac{E_c}{2} \left( \frac{t_c^2}{4} - z^2 \right) \right] \quad (2.23)$$

e da mesma forma nas faces para  $t_c/2 \leq |z| \leq t_c/2 + t_f$

$$B(z) = \frac{E_f}{2} \left( \frac{t_c}{2} + t_f - z \right) \left( \frac{t_c}{2} + t_f + z \right) \quad (2.24)$$

e

$$\tau_f(z) = \frac{V_x E_f}{D} \left[ \left( \frac{t_c^2}{4} + t_c t_f + t_f^2 - z^2 \right) \right]$$

As máximas tensões cisalhantes ocorrem na linha neutra, isto é, em  $z=0$ , e na interface do núcleo com a face ( $z = t_c/2$ ). Seus valores são, respectivamente:

$$\tau_{c,\max}(z=0) = \frac{V_x}{D} \left( \frac{E_f t_f d}{2} + \frac{E_c t_c^2}{8} \right) \quad (2.25)$$

e

$$\tau_{c,\min} = \tau_{f,\max} = \tau\left(\frac{t_c}{2}\right) = \frac{V_x}{D} \left[ \frac{E_f t_f d}{2} \right] \quad (2.26)$$

## 2.5 Aproximações na Tensão Cisalhante

A razão entre as tensões cisalhantes máxima e mínima no núcleo, de acordo

com (2.15) será pequena e próxima de 1% se:

$$\frac{4E_f t_f d}{E_c t_c^2} > 100 \quad (2.27)$$

## 2.6 Resumo das Aproximações

As aproximações podem ser resumidas da seguinte maneira: se o núcleo é bem menos rígido que as faces ( $E_c \ll E_f$ ), então as tensões são:

$$\sigma_c(z) = 0 \quad (2.28)$$

$$\sigma_f = \frac{M_x z E_f}{(D_0 + 2D_f)} \quad (2.29)$$

$$\tau_c(z) = \frac{V_x E_f t_f d}{2(D_0 + 2D_f)} \quad (2.30)$$

$$\tau_f(z) = \frac{V_x}{(D_0 + 2D_f)} \frac{E_f}{2} \left( \frac{t_c^2}{4} + t_c t_f + t_f^2 - z^2 \right) \quad (2.31)$$

Ainda, se juntamente com a condição acima tem-se faces de pequena espessura, ou seja,  $t_f \ll t_c$ , então as expressões anteriores se reduzem às suas formas mais simples:

$$\sigma_c(z) = 0 \quad (2.32)$$

$$\sigma_f = \pm \frac{M_x}{t_f d} \quad (2.33)$$

$$\tau_c(z) = \frac{V_x}{d} \quad (2.34)$$

$$\tau_f(z) = 0 \quad (2.35)$$

Tais hipóteses simplificam o tratamento de uma estrutura “sandwich”

através da seguinte consideração: *as faces suportam os momentos fletores e suas forças de tração/compressão, e o núcleo resiste aos esforços transversais (cisalhantes).*

A Figura 2.5 ilustra os diferentes graus de aproximação e suas respectivas distribuições de tensão ao longo da espessura da estrutura:

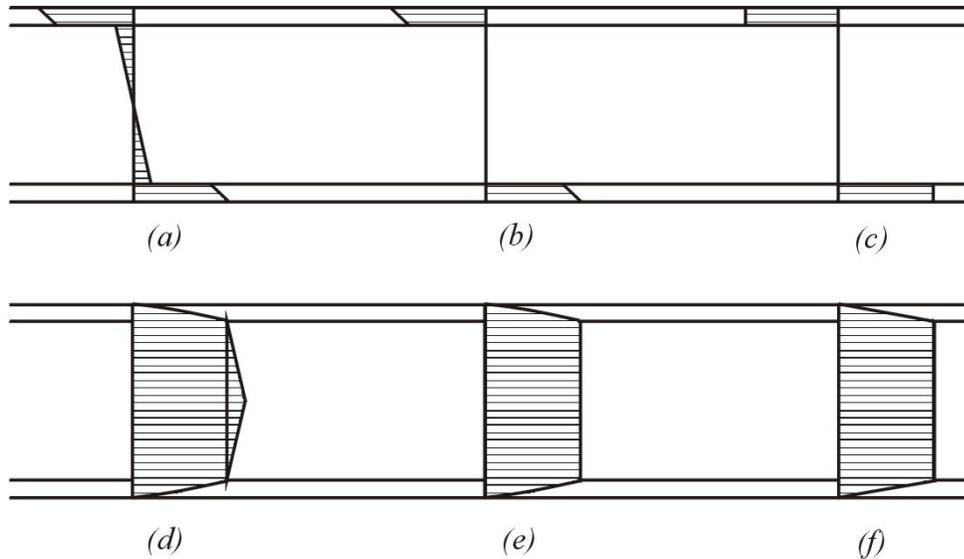


Figura 2.5 Parte Superior: Distribuição de tensões normais: (a) sem aproximações (b) adotando  $E_c \ll E_f$  e (c) adotando  $E_c \ll E_f$  juntamente com  $t_c \ll t_f$ . Parte inferior: Distribuição de tensões cisalhantes: (d) sem aproximações (e) adotando  $E_c \ll E_f$  e (f) adotando  $E_c \ll E_f$  juntamente com  $t_c \ll t_f$

## 2.7 Viga “Sandwich” com Faces Não-Simétricas

Para os casos com faces diferentes, isto é, não só com espessuras mas também com materiais diferentes, é necessário primeiramente determinar a posição da linha neutra. Esta é dada pelo sistema de coordenadas para o qual o primeiro momento de área é nulo quando integrado ao longo de toda a seção transversal, ou seja:

$$\int \sigma_x dz = \int E \varepsilon_x dz = \int \frac{Ez}{R_x} dz = \frac{1}{R_x} \int Ez dz = 0 \quad (2.36)$$

Uma vez que a origem do sistema procurado é desconhecida, faz-se uma transformação de coordenadas com relação a um ponto conhecido da seção, por exemplo,  $z^*=z - e$ , de acordo com a Figura 2.6:

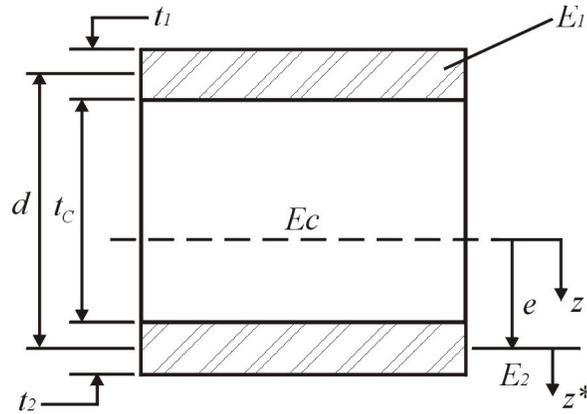


Figura 2.6 Sistema de coordenadas adotado para a determinação da linha neutra

A equação para o primeiro momento de área fica:

$$\begin{aligned} B(z) &= \int E z dz = \int E(z^* + e) dz^* = 0 \\ & - \int E z^* dz^* = e \int E dz^* \end{aligned} \quad (2.37)$$

Para uma seção transversal qualquer de uma estrutura “sandwich” como a da Figura 2.6 resulta que:

$$E_1 t_1 \left( \frac{t_1}{2} + t_c + \frac{t_2}{2} \right) + E_c t_c \left( \frac{t_c}{2} + \frac{t_2}{2} \right) = e [E_1 t_1 + E_c t_c + E_2 t_2] \quad (2.38)$$

Para um “sandwich” com um núcleo *pouco rígido* pode-se escrever:

$$e \cong \frac{E_1 t_1 d}{E_1 t_1 + E_2 t_2} \quad (2.39)$$

$$d - e \cong \frac{E_2 t_2 d}{E_1 t_1 + E_2 t_2} \quad (2.40)$$

A rigidez de flexão será então:

$$D = \frac{E_1 t_1^3}{12} + \frac{E_2 t_2^3}{12} + \frac{E_c t_c^3}{12} + E_1 t_1 (d - e)^2 + E_2 t_2 e^2 + E_c t_c \left( \frac{t_c + t_2}{2} - e \right)^2 \quad (2.41)$$

onde  $d = t_1/2 + t_c + t_2/2$  (distância entre os centróides das duas faces). Para ( $E_c \ll E_1$  e  $E_2$ ) a Equação 2.38 pode ser simplificada e quando inserida na Equação 2.41 uma expressão mais simples aparece para a rigidez de flexão:

$$D \cong \frac{E_1 t_1^3}{12} + \frac{E_2 t_2^3}{12} + \frac{E_1 t_1 E_2 t_2 d^2}{E_1 t_1 + E_2 t_2} \quad (2.42)$$

onde os dois primeiros termos são muito pequenos em relação ao terceiro quando as faces são finas. As tensões normais podem ser determinadas pelo uso de sua definição oriunda das Equações 2.15 e 2.16 simplificadas usando as considerações de núcleo pouco rígido/faces finas para obter:

$$\sigma_1 = -\frac{M_x (d - e) E_1}{D} = -\frac{M_x E_1 E_2 t_2 d}{D (E_1 t_1 + E_2 t_2)} \approx -\frac{M_x}{t_1 d} \quad (2.43)$$

$$\sigma_2 = \frac{M_x e E_2}{D} = -\frac{M_x E_1 E_2 t_1 d}{D (E_1 t_1 + E_2 t_2)} \approx \frac{M_x}{t_1 d} \quad (2.44)$$

onde  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  são as tensões normais nas faces. Também, adaptando as expressões para as tensões cisalhantes, elas resultarão como:

**Face 1:**  $-d + e - \frac{t_1}{2} \leq z \leq -d + e + \frac{t_1}{2}$

$$\tau_1(z) = \frac{V_x E_1}{D} \frac{1}{2} \left[ \left( d - e + \frac{t_1}{2} \right)^2 - z^2 \right] \quad (2.45)$$

**Face 2:**  $e - \frac{t_2}{2} \leq z \leq e + \frac{t_2}{2}$

$$\tau_2(z) = \frac{V_x E_2}{D} \left[ \left( e + \frac{t_2}{2} \right)^2 - z^2 \right] \quad (2.46)$$

**No núcleo:** para  $-d + e - \frac{t_1}{2} \leq z \leq 0$

$$\tau_c(z) = \frac{V_x}{D} \left[ E_1 t_1 (d - e) + \frac{E_c}{2} \left\{ \left( d - e + \frac{t_1}{2} \right)^2 - z^2 \right\} \right] \quad (2.47)$$

**No núcleo:** para  $0 \leq z \leq e - \frac{t_2}{2}$

$$\tau_c(z) = \frac{V_x}{D} \left[ E_2 t_2 e + \frac{E_c}{2} \left\{ \left( e - \frac{t_2}{2} \right)^2 - z^2 \right\} \right] \quad (2.48)$$

Igualmente, com as considerações de núcleo não-rígido, a tensão cisalhante no mesmo é aproximada por:

$$\tau_c \cong \frac{V_x}{D} \frac{E_1 t_1 E_2 t_2 d}{E_1 t_1 + E_2 t_2} \quad (2.49)$$

E considerando faces finas, tem-se no final a expressão simplificada

$$\tau_c \cong \frac{V_x}{D} \quad (2.50)$$

correspondente à mesma expressão para estruturas “*sandwich*” simétricas.

## Capítulo 3

# Equações de Movimento para Vigas “Sandwich”

Para qualquer estrutura do tipo das vigas, placas ou cascas, a deformação consiste de dois termos:

- Deformações devidas a momentos fletores (*bending*) -  $w_b$
- Deformações devidas a solicitações transversais (*shear*) -  $w_s$

As deformações cisalhantes são usualmente negligenciadas na análise clássica de estruturas a não ser que o membro tenha dimensões reduzidas, pois usualmente o cisalhamento é uma pequena parcela do efeito do carregamento. Para as estruturas “*sandwich*” essa ocorrência é uma realidade, tanto que as duas partes são consideradas em conjunto e por isso superpostas na forma:

$$w = w_b + w_s \quad (3.1)$$

A Figura 3.1 caracteriza discriminadamente as componentes de deslocamentos. Nela, os termos denotados por  $(\cdot)'$  dizem respeito à deformação transversal, enquanto  $(\cdot)''$  trata da deformação no sentido longitudinal. Ainda,  $\gamma_c$  é a deformação cisalhante.

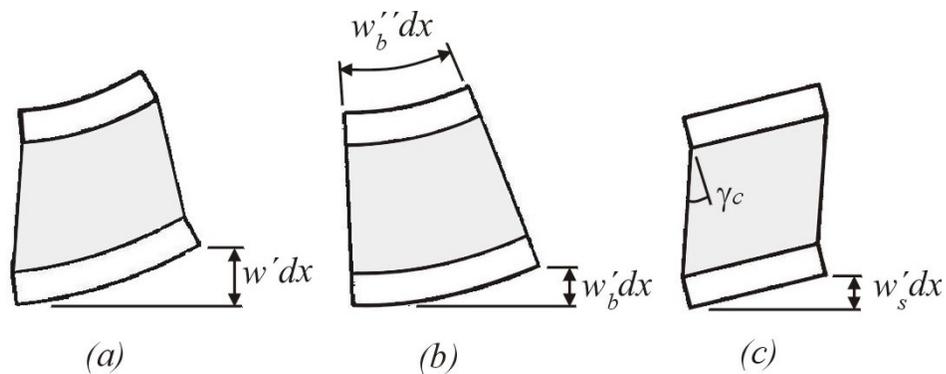


Figura 3.1 Elemento “sandwich” ilustrando (a) a deformação total, (b) flexão e (c) deformação cisalhante

### 3.1 Deformações por Cisalhamento

Quando um elemento estrutural está sujeito a forças cisalhantes a deformação ocorre sem mudança de volume, Figura 3.2. Tal deformação será ainda dividida em duas partes distintas, a transversal (Figura 3.2 (b)) representada por  $\gamma_t$  e a plana ou longitudinal (Figura 3.2 (c)) mostrada por meio de  $\gamma_o$ .

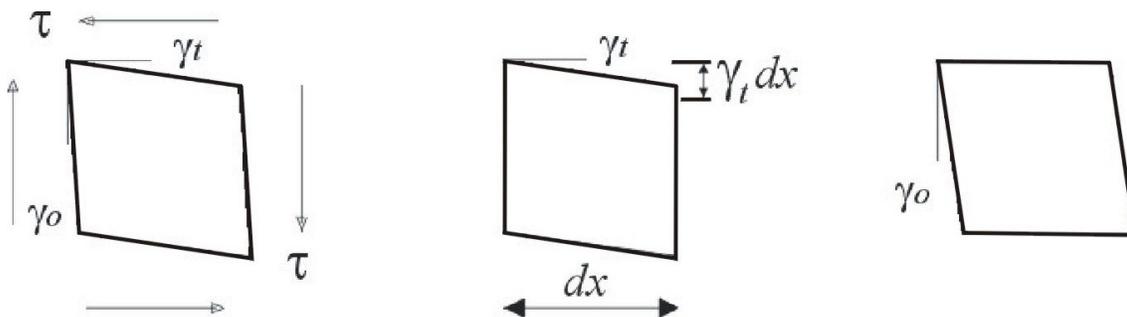


Figura 3.2 Deformação de um elemento estrutural sujeito a cisalhamento

A representação é novamente esquematizada na Figura 3.3 para um elemento “sandwich”, considerando que a deformação ocorre somente no núcleo ( $G_f \rightarrow \infty$ ) e que a deformação é linear ( $E_c \ll E_f$ ), proporcionando tensões cisalhantes constantes e deformação no cisalhamento constante.

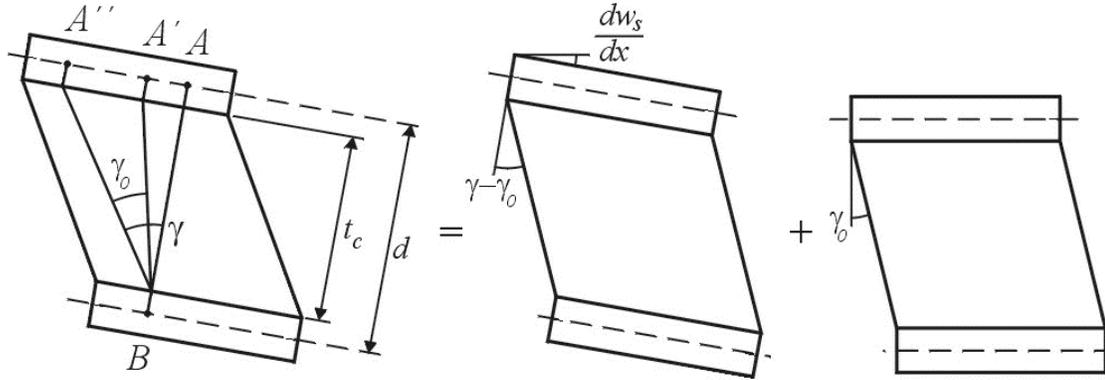


Figura 3.3 Deformação no cisalhamento para um elemento “sandwich”

Sejam o cisalhamento total  $\gamma$  e o longitudinal  $\gamma_0$ . Considerando pequenas deformações, pela Figura 3.3 pode-se deduzir uma relação geométrica para um caso geral onde uma parte do cisalhamento pode também ocorrer no plano longitudinal da viga. Fazendo uma linha reta AB antes da deformação, e considerando que a mesma se deslocou devido ao cisalhamento, vê-se que o ponto A foi para a posição A' devido ao cisalhamento transversal e do ponto A' ao ponto A'' devido ao longitudinal. A distância entre A e A' pode então ser escrita como:

$$\frac{dw_s}{dx} d = (\gamma - \gamma_0) t_c \quad (3.2)$$

$$\frac{dw_s}{dx} = \frac{V_x}{S} - \frac{\gamma_0 t_c}{d} \rightarrow \frac{d^2 w_s}{dx^2} = \frac{1}{S} \frac{dV_x}{dx}$$

$$w_s = \int_0^x \left( \frac{V_x}{S} - \frac{\gamma_0 t_c}{d} \right) dx = \frac{M_x}{S} - \frac{\gamma_0 t_c x}{d} + \text{constante} \quad (3.3)$$

Resolvendo as duas equações acima para  $w_s$ , ficam duas constantes de integração a serem determinadas pelas condições de contorno do problema em análise. Nas equações acima,  $V_x$  é a força cortante que provoca cisalhamento, conforme Figura 2.3, e  $S$  é a rigidez ao cisalhamento, conceito definido na seqüência.

### 3.2 Rigidez ao Cisalhamento

A *rigidez ao cisalhamento*  $S$  de uma seção transversal é definida como a relação entre a medida da deformação cisalhante e a força cortante,  $\gamma = V_x/S$ . Para uma seção homogênea, a grandeza  $S$  é determinada por:

$$S = \frac{Gh}{k} \quad (3.4)$$

onde  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $h$  é a altura da seção, e  $k$  é o fator de cisalhamento, que depende da geometria da seção. Para uma seção retangular homogênea é igual a 1,2 (Dym e Shames, 1973 [1]). Para uma seção generalizada,  $S$  é encontrado calculando a energia de deformação da seção, o que resulta em:

$$\frac{1}{2}V_x\gamma = \frac{1}{2}\int \tau_{xz}(z)\gamma_{xz}(z)dz \quad (3.5)$$

onde por definição:

$$\gamma = \frac{V_x}{S} \quad (3.6)$$

Usando as aproximações  $t_f \ll t_c$  e  $E_c \ll E_f$  e considerando o módulo de cisalhamento das faces  $G_f$  como extremamente elevado, vê-se que  $\tau_{xz} = V_x/d$  (Equação 2.35) e a Equação 3.5 torna-se:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}V_x\gamma &= \frac{1}{2}\int_{-t_c/2}^{t_c/2} \frac{V_x}{d} \frac{V_x}{G_c d} dz = \frac{V_x^2 t_c}{2G_c d^2} = \frac{V_x^2}{2S} \\ S &= \frac{G_c d^2}{t_c} \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.3 Equações em termos do Campo de Deslocamentos

A Figura 3.4 define o sistema de coordenadas locais para as faces e para o núcleo. Isto posto, são definidas as *condições cinemáticas*, que prescrevem que os deslocamentos longitudinais e transversais podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} u(z) &= u_0 + z\psi_x \\ w &= w_b + w_s \end{aligned} \quad (3.8)$$

onde o deslocamento longitudinal  $u$  é uma função linear em  $z$ , e  $\psi_x$  é a rotação da seção transversal que depende apenas da deformação devido à flexão  $w_b$  da viga, uma vez que o cisalhamento causa tão somente o deslizamento da seção. Assim:

$$\psi_x = -\frac{dw_b}{dx} \quad (3.9)$$

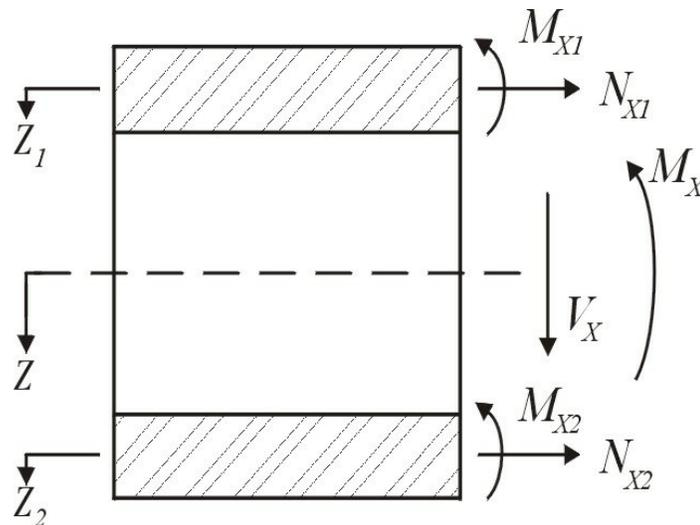


Figura 3.4 Seção de uma viga “sandwich” com coordenadas locais para as faces

Considerando primeiramente o caso de faces finas o suficiente para comportar-se como membranas, isto é, qualquer deformação transversal ocorrerá sem qualquer resistência das faces devido à flexão sobre suas linhas neutras; esta

tratativa é proveniente do conceito de *deflexões parciais*, ou seja, flexões provocam tensões axiais e forças cortantes provocam tensões cisalhantes e deformações. Este estudo considera apenas efeitos advindos de forças impostas na viga, ou seja, não há deformações iniciais na mesma. Assim, as tensões axiais oriundas da curvatura devido à flexão são:

$$\sigma_1 = -E_1 z \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (3.10)$$

$$\sigma_2 = -E_2 z \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (3.11)$$

$$\sigma_c = -E_c z \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (3.12)$$

Como  $z_1 = z + d - e$  para a face superior e  $z_2 = z - e$  para a face inferior, as forças axiais para a face superior podem ser escritas como:

$$N_{x1} = - \int_{-t_1/2}^{t_1/2} \left[ E_1 (z_1 - d + e) \frac{d^2 w_b}{dx^2} \right] dz_1 = E_1 t_1 (d - e) \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (3.13)$$

sendo  $e$  a distância entre a face e a linha neutra. Da mesma forma, para a face inferior:

$$N_{x2} = - \int_{-t_1/2}^{t_1/2} \left[ E_1 (z_2 + e) \frac{d^2 w_b}{dx^2} \right] dz_2 = -E_2 t_2 e \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (3.14)$$

Para faces simétricas as forças normais simplesmente ficam  $N_{xf1} = -N_{xf2} = -D_0 / d(d^2 w_b / dx^2)$ . Da noção de momento fletor tem-se os valores dos momentos nas faces:

$$M_{x1} = - \int_{-t_1/2}^{t_1/2} \left[ E_1 z_1 (z_1 - d + e) \frac{d^2 w_b}{dx^2} \right] dz_1 = - \frac{E_1 t_1^3}{12} \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (3.15)$$

e da mesma forma para a face inferior. Para o núcleo, a mesma integração pode ser executada, resultando em

$$N_{xc} = 0 \quad (3.16)$$

$$M_{xc} = -D_c \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (3.17)$$

O momento fletor total é então:

$$M_x = -(D_0 + D_1 + D_2 + D_c) \frac{d^2 w_b}{dx^2} = -D \frac{d^2 w_b}{dx^2} \quad (3.18)$$

É possível verificar que a resposta de uma viga “sandwich” a uma solicitação é descrita por duas constantes: a rigidez flexural  $D$  e a rigidez ao cisalhamento  $S$ , as quais são definidas considerando distorções de um elemento sob a ação de apenas uma das cargas  $M_x$  e  $T_x$  de cada vez. Por definição:

$$D = - \frac{M_x}{d^2 w_b / dx^2} \quad (3.19)$$

$$S = \frac{dV_x / dx}{d^2 w_s / dx^2} \quad (3.20)$$

e o efeito agregado fica:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = - \frac{M_x}{D} + \frac{1}{S} \frac{dV_x}{dx} \quad (3.21)$$

### 3.4 Equações de Equilíbrio

As equações de equilíbrio são obtidas a partir da Figura 3.5, que mostra um elemento  $dx$  em sua condição distorcida com forças atuantes em suas direções positivas:

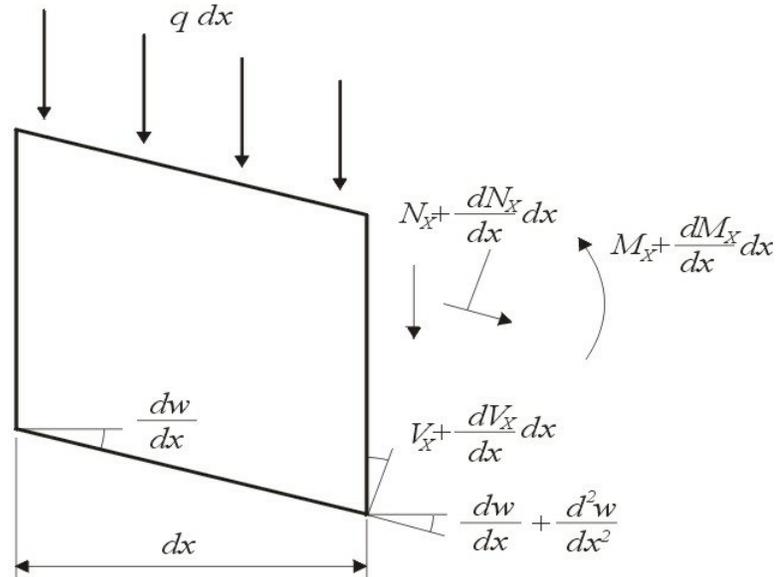


Figura 3.5 Elemento de viga distorcido

A partir do equilíbrio de momentos, parte-se que  $dM_x/dx = V_x$ , e pelas definições de (3.15) pode ser encontrada uma relação entre as deflexões parciais, qual seja:

$$\frac{d^2 w_s}{dx^2} = -\frac{D}{S} \frac{d^4 w_b}{dx^4} \quad (3.22)$$

Pelo equilíbrio de forças verticais tem-se que:

$$q + \frac{dV_x}{dx} + N_x \frac{d^2 w}{dx^2} = 0 \quad (3.23)$$

$$S \frac{d^2 w_s}{dx^2} + N_x \frac{d^2 w}{dx^2} = -q \quad (3.24)$$

É possível ver que no caso de flexão pura, pequenas deformações e ausência da ação de forças axiais, é obtida uma equação em função de  $w_s$ , que pode ser integrada duas vezes resultando em duas constantes de integração que são determinadas através das condições de contorno pertinentes. Esse procedimento é comparável ao apresentado na Equação 3.2. Reescrevendo a equação acima usando o conceito da Equação 3.22 dá a equação diferencial da viga em termos de  $w_b$ :

$$D \frac{d^4 w_b}{dx^4} - N_x \frac{d^2 w}{dx^2} = q \quad (3.25)$$

A partir da relação entre as deflexões parciais da Equação 3.22 a equação de movimento pode ser escrita:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} - D \frac{d^4 w_s}{dx^4} - N_x \frac{d^2 w}{dx^2} = q \quad (3.26)$$

Mas:

$$D \frac{d^4 w_s}{dx^4} = -\frac{D}{S} \frac{d^2}{dx^2} \left[ N_x \frac{d^2 w}{dx^2} + q \right] \quad (3.27)$$

então:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = \left( 1 - \frac{D}{S} \frac{d^2}{dx^2} \right) \left( q + N_x \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \quad (3.28)$$

que vem a ser a equação diferencial para vigas obtida por Mindlin (Dym e Shames, 1973 [1]).

### 3.5 Equação de Movimento

Para obter as equações de movimento para vigas “*sandwich*”, as equações de equilíbrio devem ser manipuladas considerando forças inerciais, e assim o tempo é introduzido como variável. Para este fim, é utilizada a abordagem utilizada por Timoshenko (Dym e Shames, 1973 [1] e Zenkert, 1995 [9]). Considerando as forças de inércia:

- Inércia Vertical: as forças de corpo atuando no elemento quando submetido a uma aceleração  $\partial^2 w / \partial t^2$  são:

$$-\int \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz = -\rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.29)$$

com

$$\rho^* = \int \rho dz \quad (3.30)$$

onde  $\rho^*$  é a massa por unidade de área. A massa pode ainda ser uma função do comprimento da viga se a seção é variável.

Uma aceleração na direção positiva de  $w$  (para baixo na Figura 3.6) cria uma força de corpo na direção oposta (para cima)

- Inércia rotacional: A seção transversal rotaciona quando fletida, numa proporção igual a  $\partial w_b / \partial x$  (Figura 3.6). Se as faces são consideradas finas, o que implica nas tensões cisalhantes sendo constantes ao longo da seção, pode-se escrever os deslocamentos em  $x$  como sendo:

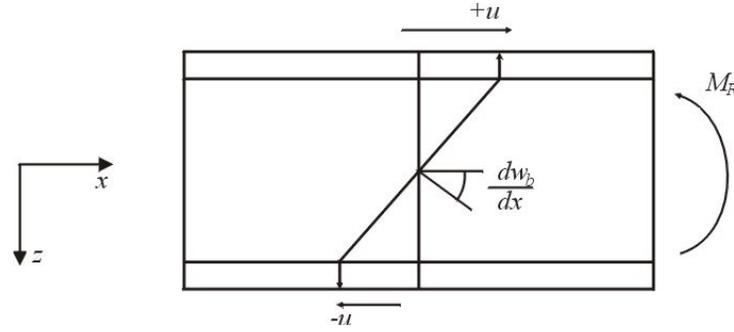


Figura 3.6 Definição de inércia rotacional

$$u = -z \frac{\partial w_b}{\partial x} \quad (3.31)$$

uma vez que

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} \quad (3.32)$$

Cria-se também um momento fletor na direção oposta de valor:

$$-\int \rho z \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz = \int \rho z^2 \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} dz = \mathfrak{R} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} \quad (3.33)$$

definido como positivo na mesma direção que  $M_x$ .  $\mathfrak{R}$  é a *inércia rotatória* da seção transversal.

As equações de equilíbrio assumem a seguinte forma:

**Forças Verticais:**

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3.34)$$

**Momentos:**

$$-V_x + \mathfrak{R} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0 \quad (3.35)$$

Usando essas equações juntamente com a Equação 3.1 e a Equação 3.21, tem-se que:

$$\rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - S \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = 0 \quad (3.36)$$

$$D \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} + S \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - \mathfrak{R} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (3.37)$$

e a última equação constitui a nova relação entre  $w_b$  e  $w_s$  para ser usada ao invés da Equação 3.22 neste novo contexto. As deflexões parciais são então eliminadas resultando em:

$$S \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} = \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.38)$$

$$\mathfrak{R} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^2 \partial t^2} = \mathfrak{R} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\mathfrak{R}}{S} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - q - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (3.39)$$

$$D \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} = D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{D}{S} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] \quad (3.40)$$

o que dá a equação de movimento abaixo:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left( \frac{D}{S} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 1 - \frac{\mathfrak{R}}{S} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \left[ q + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right] - \mathfrak{R} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (3.41)$$

que é a chamada *Equação da Viga de Timoshenko*. No caso de vibração livre não-amortecida, as cargas aplicadas  $q$  e  $N_x$  são nulas e a Equação 3.41 se resume a:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho}{S} \left( D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \mathfrak{R} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \right) - \mathfrak{R} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (3.42)$$

As propriedades de seção transversal  $\rho^*$  e  $\mathfrak{R}$  são determinadas por:

$$\rho^* = \rho_1 t_1 + \rho_2 t_2 + \rho_3 t_3 \quad (3.43)$$

onde  $\rho$  é a densidade ou massa específica do material componente. Assim,  $\rho^*$  pode ser considerado como sendo o peso por unidade de superfície. Para determinar o valor de  $\mathfrak{R}$ , procede-se como para o cálculo da rigidez flexural  $D$  mas substituindo  $E$  por  $\rho$ . Isto dá:

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho_1 t_1^3}{12} + \frac{\rho_2 t_2^3}{12} + \frac{\rho_c t_c^3}{12} + \rho_1 t_1 (d - e)^2 + \rho_2 t_2 e^2 + \rho_c t_c \left( \frac{t_c + t_2}{2} - e \right)^2 \quad (3.44)$$

Deve-se notar que a contribuição do núcleo nesta expressão é significativa, uma vez que a razão de densidade é menor que a razão de módulos elásticos.

## Capítulo 4

# Formulação de Elementos de Viga “*Sandwich*”

Nesta parte, pretende-se apresentar as características das formulações utilizadas para as rotinas de cálculo das frequências naturais de uma viga “*sandwich*” de maneira computacional. Apresenta-se primeiramente a teoria de Mead-Markus para estruturas de três camadas, e logo a seguir a adaptação do Método dos Elementos Finitos (MEF) para o levantamento das matrizes de rigidez e massa do elemento resultante. A seguir, é apresentado o uso da Equação de Movimento para a Viga de Timoshenko para a obtenção das já referidas matrizes através do Método dos Resíduos Ponderados (Método de Galerkin). Em seguida, são apresentadas as seqüências de cálculos das rotinas construídas em FORTRAN para a obtenção das frequências naturais. Por fim, são apresentados os resultados obtidos, sendo comparados entre si e com o levantamento das frequências naturais por meio de *software* comercial.

### 4.1 Formulação de Mead-Markus

#### 4.1.1 Considerações Iniciais

A seguir, as considerações adotadas para as deduções executadas (Wang, 2000 [11]):

- As faces são elásticas e isotrópicas e não sofrem deformação transversal cisalhante;
- A inércia nos movimentos longitudinal e transversal é considerada; no entanto, a inércia rotatória das faces é desprezada e tão somente o material do núcleo contribui para a inércia transversal;
- Todos os pontos da viga se movem com o mesmo campo de deslocamento transversal;
- Não ocorre qualquer escorregamento nas interfaces entre o núcleo e as faces da viga.

As considerações acima são violadas se a espessura do núcleo é da mesma ordem de grandeza que as lâminas das faces. Esse comportamento caracteriza um deslocamento transversal desigual entre os materiais e geração de novas tensões internas, conforme mostrado por Zenkert (1995 [9]). Assim, as considerações aqui apresentadas referem-se a configurações com faces finas, de acordo com toda a formulação até aqui apresentada. Baseado nisso, as deformações transversais do núcleo podem ser descritas em função dos deslocamentos das faces, como mostra a Figura 4.1.

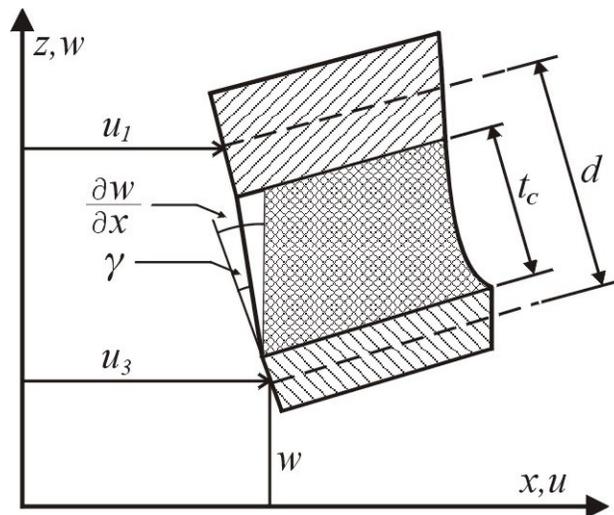


Figura 4.1 Deflexão da viga

A deformação transversal é então:

$$\gamma = \frac{d}{t_c} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{(u_1 - u_2)}{t_c} \quad (4.1)$$

onde

$$d = t_c + \frac{t_1 + t_2}{2} \quad (4.2)$$

### 4.1.2 Obtenção das matrizes do elemento

Um elemento de dois nós foi utilizado para aproximar o campo de deslocamentos longitudinais nas faces 1 e 3, designados  $u_1$  e  $u_3$ , o deslocamento transversal  $w$  e a rotação  $w' = \partial w / \partial x$ . Os graus de liberdade nodais são relacionados no vetor de deslocamentos, com a Figura 4.2 caracterizando os mesmos.

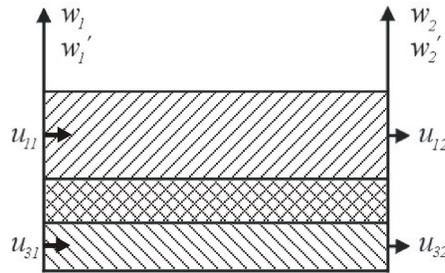


Figura 4.2 Graus de liberdade nodais para o elemento de viga

$$\{q\} = \left[ u_{11} \quad u_{12} \quad u_{31} \quad u_{32} \quad w_1 \quad \frac{\partial w_1}{\partial x} \quad w_2 \quad \frac{\partial w_2}{\partial x} \right]^T \quad (4.3)$$

onde :

$u_{1n}$  e  $u_{3n}$  = deslocamentos longitudinais do nó  $n$  das faces 1 e 3 respectivamente;

$w_n$  = deslocamento transversal do nó  $n$ ;

$\frac{\partial w_n}{\partial x}$  = rotação da seção, nó  $n$ .

Assim, nas faces 1 e 3 os deslocamentos longitudinais  $u_1$  e  $u_3$  são interpolados como funções lineares,

$$u_1 = \left[ \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \quad \left( \frac{x}{l} \right) \right] \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

$$u_2 = \left[ \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \quad \left( \frac{x}{l} \right) \right] \begin{Bmatrix} u_{31} \\ u_{32} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

enquanto o deslocamento transversal para a viga é aproximado por:

$$w = \left[ \left( 1 - 3\frac{x^2}{l^2} + 2\frac{x^3}{l^3} \right) \quad \left( x - 2\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) \quad \left( 3\frac{x^2}{l^2} - 2\frac{x^3}{l^3} \right) \quad \left( -\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2} \right) \right] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_1' \\ w_2 \\ w_2' \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

onde é possível notar que na Equação 4.4 são usados os polinômios interpoladores de Lagrange, enquanto na Equação 4.6 usa-se os polinômios de Hermite. Nessas equações,  $l$  significa o comprimento do elemento, e os termos  $(\cdot)'$  denotam as derivadas em relação a  $x$ .

A energia cinética  $T$  e a energia de deformação  $U$  para um elemento de viga “sandwich” podem ser escritas como sendo (Dym e Shames, 1973 [1]):

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ m \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + m_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + m_3 \left( \frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (4.7)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ E_1 A_1 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + E_3 A_3 \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} \right)^2 + D_t \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + G_c A_c \gamma^2 \right] dx \quad (4.8)$$

onde  $m$  é a soma das massas das faces  $m_1$  e  $m_3$ , e do núcleo  $m_c$ :

$$m = m_1 + m_3 + m_c \quad (4.9)$$

e os componentes  $E$  e  $I$  dizem respeito ao módulo de elasticidade e momentos de inércia da seção transversal das faces 1 e 3 respectivamente. Ainda, a Equação 4.10 denota a expressão equivalente para  $D_t$ :

$$D_t = E_1 I_1 + E_3 I_3 \quad (4.10)$$

Substituindo as Equações 4.4 e 4.5 nas Equações 4.7 e 4.8 resulta:

$$T = \frac{1}{2} \{q^T\} [M_e] \{q\} \quad (4.11)$$

$$U = \frac{1}{2} \{q^T\} [K_e] \{q\} \quad (4.12)$$

donde são obtidas as matrizes de massa e rigidez do elemento, respectivamente  $[M_e]$  e  $[K_e]$ , e sendo  $\{q\}$  o vetor constante da Equação 4.3. A expressão explícita para a matriz de rigidez do elemento é:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} [k_{11}] & [k_{12}] \\ [k_{21}] & [k_{22}] \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

onde

$$[k_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{E_1 A_1}{l} + \frac{G_c A_c l}{3h_2^2} & -\frac{E_1 A_1}{l} + \frac{G_c A_c l}{6h_2^2} & -\frac{G_c A_c l}{3h_2^2} & -\frac{G_c A_c l}{6h_2^2} \\ -\frac{E_1 A_1}{l} + \frac{G_c A_c l}{6h_2^2} & \frac{E_1 A_1}{l} + \frac{G_c A_c l}{3h_2^2} & -\frac{G_c A_c l}{6h_2^2} & -\frac{G_c A_c l}{3h_2^2} \\ -\frac{G_c A_c l}{3h_2^2} & -\frac{G_c A_c l}{6h_2^2} & \frac{E_3 A_3}{l} + \frac{G_c A_c l}{3h_2^2} & -\frac{E_3 A_3}{l} + \frac{G_c A_c l}{6h_2^2} \\ -\frac{G_c A_c l}{6h_2^2} & -\frac{G_c A_c l}{3h_2^2} & -\frac{E_3 A_3}{l} + \frac{G_c A_c l}{6h_2^2} & \frac{E_3 A_3}{l} + \frac{G_c A_c l}{3h_2^2} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$[k_{12}] = \begin{bmatrix} -\frac{G_c A_c d}{2h_2^2} & \frac{G_c A_c dl}{12h_2^2} & \frac{G_c A_c d}{2h_2^2} & -\frac{G_c A_c dl}{12h_2^2} \\ -\frac{G_c A_c d}{2h_2^2} & -\frac{G_c A_c dl}{12h_2^2} & \frac{G_c A_c d}{2h_2^2} & \frac{G_c A_c dl}{12h_2^2} \\ \frac{G_c A_c d}{2h_2^2} & \frac{G_c A_c dl}{12h_2^2} & -\frac{G_c A_c d}{2h_2^2} & -\frac{G_c A_c dl}{12h_2^2} \\ \frac{G_c A_c d}{2h_2^2} & -\frac{G_c A_c dl}{12h_2^2} & -\frac{G_c A_c d}{2h_2^2} & \frac{G_c A_c dl}{12h_2^2} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

$$[k_{21}] = [k_{12}]^T \quad (4.16)$$

$$[k_{22}] = \begin{bmatrix} \frac{12D_t}{l^3} + \frac{6G_c A_c d^2}{5lt_c^2} & \frac{6D_t}{l^2} + \frac{G_c A_c d^2}{10t_c^2} & -\frac{12D_t}{l^3} - \frac{6G_c A_c d^2}{5lt_c^2} & \frac{6D_t}{l^2} + \frac{G_c A_c d^2}{10t_c^2} \\ \frac{6D_t}{l^2} + \frac{G_c A_c d^2}{10t_c^2} & \frac{4D_t}{l} + \frac{2G_c A_c d^2 l}{15t_c^2} & -\frac{6D_t}{l^2} - \frac{G_c A_c d^2}{10t_c^2} & \frac{2D_t}{l} - \frac{G_c A_c d^2 l}{30t_c^2} \\ -\frac{12D_t}{l^3} - \frac{6G_c A_c d^2}{5lt_c^2} & -\frac{6D_t}{l^2} - \frac{G_c A_c d^2}{10t_c^2} & \frac{12D_t}{l^3} + \frac{6G_c A_c d^2}{5lt_c^2} & -\frac{6D_t}{l^2} - \frac{G_c A_c d^2}{10t_c^2} \\ \frac{6D_t}{l^2} + \frac{G_c A_c d^2}{10t_c^2} & \frac{2D_t}{l} - \frac{G_c A_c d^2 l}{30t_c^2} & -\frac{6D_t}{l^2} - \frac{G_c A_c d^2}{10t_c^2} & \frac{4D_t}{l} + \frac{2G_c A_c d^2 l}{15t_c^2} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Para a matriz massa tem-se:

$$[M_e] = \begin{bmatrix} [M_{11}] & 0_{4 \times 4} \\ 0_{4 \times 4} & [M_{22}] \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

onde

$$[M_{11}] = \frac{l}{6} \begin{bmatrix} 2m_1 & m_1 & 0 & 0 \\ m_1 & 2m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2m_3 & m_3 \\ 0 & 0 & m_3 & 2m_3 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

$$[M_{22}] = \frac{ml}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

donde  $m_1$  e  $m_3$  são as massas das faces segundo Equação 4.9. Nota-se que  $[M_{22}]$  é exatamente a matriz de massa para o elemento de viga convencional. Também, salienta-se que  $G_c$  é o módulo de cisalhamento do núcleo, apresentado na Equação 4.8.

## 4.2 Elemento para a Teoria da Viga de Timoshenko

Seja a equação do movimento homogênea segundo a Equação 3.42:

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho}{S} \left( D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \mathfrak{R} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \right) - \mathfrak{R} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (4.21)$$

Admitindo que  $w=w(x,t)$  é uma função harmônica e que pode ser expressa como sendo o produto de uma função no espaço com uma função no tempo tem-se:

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= W(x)e^{i\omega t} \\
\frac{\partial w}{\partial t} &= i\omega W(x)e^{i\omega t} \\
\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= -\omega^2 W(x)e^{i\omega t} \\
\frac{\partial^3 w}{\partial t^3} &= -i\omega^3 W(x)e^{i\omega t} \\
\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} &= \omega^4 W(x)e^{i\omega t}
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Substituindo a Equação 4.22 em 4.21 tem-se o formato da equação diferencial:

$$e^{i\omega t} \left[ D \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} + \rho^* (-\omega^2) W(x) - \frac{\rho}{S} \left( D (-\omega^2) \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} - \Re \omega^4 W(x) \right) - \Re (-\omega^2) \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right] = 0 \tag{4.23}$$

donde é possível ver que somente o termo entre colchetes pode ser nulo para todo  $t$ . Aproximando  $W(x)$  por  $\tilde{w}(x)$  e substituindo na Equação 4.23 resulta:

$$D \frac{\partial^4 \tilde{w}(x)}{\partial x^4} + \rho^* (-\omega^2) \tilde{w}(x) - \frac{\rho}{S} \left( D (-\omega^2) \frac{\partial^2 \tilde{w}(x)}{\partial x^2} - \Re \omega^4 \tilde{w}(x) \right) - \Re (-\omega^2) \frac{\partial^2 \tilde{w}(x)}{\partial x^2} = \varepsilon(x) \tag{4.24}$$

onde  $\varepsilon(x)$  é o erro cometido devido à aproximação de  $\tilde{w}(x)$ . Utilizando o Método dos Resíduos Ponderados (Método de Galerkin) para minimizar este resíduo tem-se:

$$\int_0^l H_i(x) \varepsilon(x) dx = 0 \tag{4.25}$$

onde  $H_i$  são as próprias funções de interpolação de Elementos Finitos, no caso presente os polinômios de Hermite dados na Equação 4.6. Considerando  $W_i$  como o deslocamento do nó  $i$  e  $W_i'$  sua derivada ( $W_i' = \partial W / \partial x$ ),  $\tilde{w}(x)$  pode ser escrita como sendo:

$$\tilde{w}(x) = H_1 W_1 + H_2 \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_1 + H_3 W_2 + H_4 \left( \frac{\partial W}{\partial x} \right)_2 \quad (4.26)$$

e escrita na forma

$$\tilde{w}(x) = H_i q_i \quad i = 1, 2, \dots, 4 \quad (4.27)$$

onde

$$q = \{W_1 \quad W_1' \quad W_2 \quad W_2'\} \quad (4.28)$$

A expressão para o resíduo ponderado fica sendo:

$$\int_0^l \left[ D \left( \frac{\partial^4 H_i}{\partial x^4} q_i + \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} q_i + \frac{\partial H_i}{\partial x} q_i \right) \right] H_j dx = 0 \quad (4.29)$$

Fazendo  $D = 1$ , a primeira integral desta expressão pode ser reescrita como sendo

$$\int_0^l \left( \frac{\partial^4 H_i}{\partial x^4} q_i \right) H_j dx = \int_0^l \left( \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} q_i \right) \frac{\partial^2 H_j}{\partial x^2} dx + \text{termos de contorno} \quad (4.30)$$

Eliminando os termos de contorno o resultado desta integral é exatamente igual à matriz de rigidez do elemento de viga convencional com  $EI = 1$ , isto é:

$$[K] = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

As integrais envolvendo as derivadas segundas de  $\tilde{w}(x)$  podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\int_0^l \left( \frac{\partial^2 H_i}{\partial x^2} q_i \right) H_j dx = \int_0^l \frac{\partial H_i}{\partial x} q_i \frac{\partial H_j}{\partial x} dx + \text{termos de contorno} \quad (4.32)$$

Novamente, desconsiderando os termos de contorno o resultado desta integral é bastante conhecido (flambagem de viga), e vale:

$$[K_\sigma] = \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Finalmente,

$$\int_0^l \tilde{w} H_j(x) dx = \int_0^l (H_i q_i) H_j dx \quad (4.34)$$

que por sua vez é semelhante à matriz de massa  $M$  do elemento de viga com densidade unitária, a saber:

$$[M] = \frac{l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Agregando-se as matrizes resultantes da Equação 4.24 e reagrupando-se os termos, chega-se à expressão:

$$[K^e] \{q\} = \left[ D[K] - \omega^2 \left[ \rho^* [M] + \left( \frac{\rho^* D}{S} + \mathfrak{R} \right) [K_\sigma] \right] + \omega^4 \frac{\rho^* \mathfrak{R}}{S} [M] \right] \{q\} = 0 \quad (4.36)$$

de onde se identifica a *matriz dinâmica equivalente*  $[K^e]$  do elemento “sandwich” segundo a equação de movimento da Viga de Timoshenko para o problema  $[K^e] \{q\} = \{F\}$ . A Figura 4.3 esquematiza os graus de liberdade do elemento

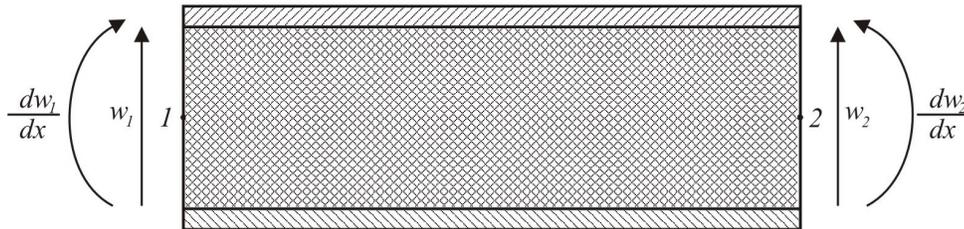


Figura 4.3 Graus de liberdade do elemento de viga “Sandwich” segundo a Equação da Viga de Timoshenko

## 4.3 Descrição das Rotinas Computacionais

### 4.3.1 Formulação de Mead-Markus

O fluxograma na seqüência descreve de maneira resumida a ordem de operações realizada para obtenção das freqüências naturais pelo método de Mead-Markus:

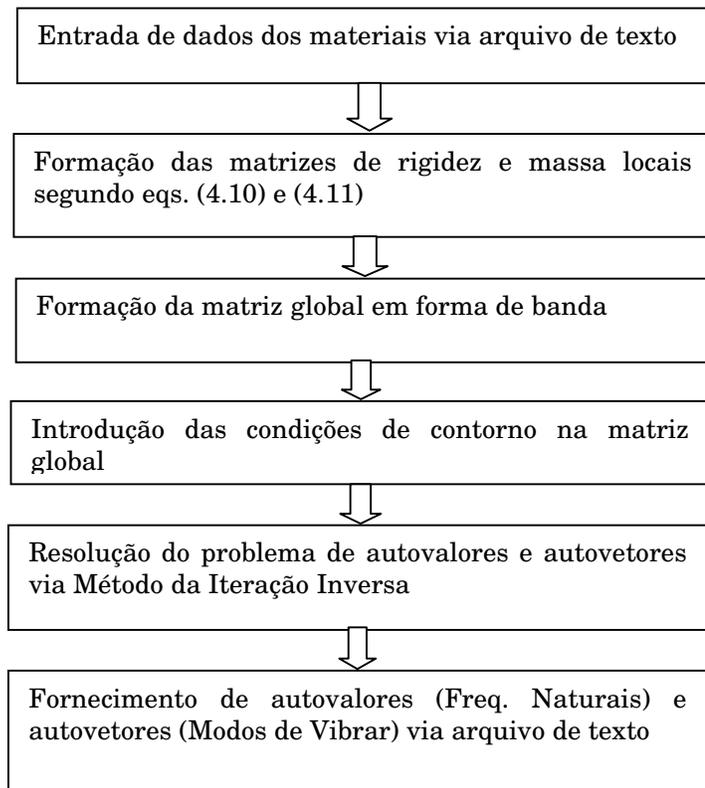


Figura 4.4 Fluxograma de operações para a rotina desenvolvida segundo a Formulação de Mead-Markus

O arquivo de dados insere as características geométricas da viga em estudo, como comprimento, largura e espessuras dos materiais das faces e do núcleo, além do número de elementos desejado para a análise. Fornece também as propriedades mecânicas dos materiais, assim como as densidades dos materiais.

Após a formação da matriz global, a mesma é imediatamente transformada para a configuração em forma de banda. Em reduzindo as dimensões da matriz, os cálculos ulteriores efetuados tornam-se mais rápidos por demandarem uma menor capacidade computacional. Os algoritmos utilizados para a subsequente implementação na linguagem FORTRAN são apresentados em Chandrupatla (1991 [12]). Também, por meio da forma de banda torna-se de fácil compreensão e implementação a etapa de introdução de condições de contorno para a viga.

Por fim, o cálculo dos autovalores e autovetores é efetuado por meio do Método da Iteração Inversa, onde, como nos métodos de solução de autovetores por iteração, o objetivo é resolver a equação:

$$K\bar{x}_k = Mx_{k-1} \tag{4.37}$$

O fluxograma específico para a Iteração Inversa é mostrado na Figura 4.5:

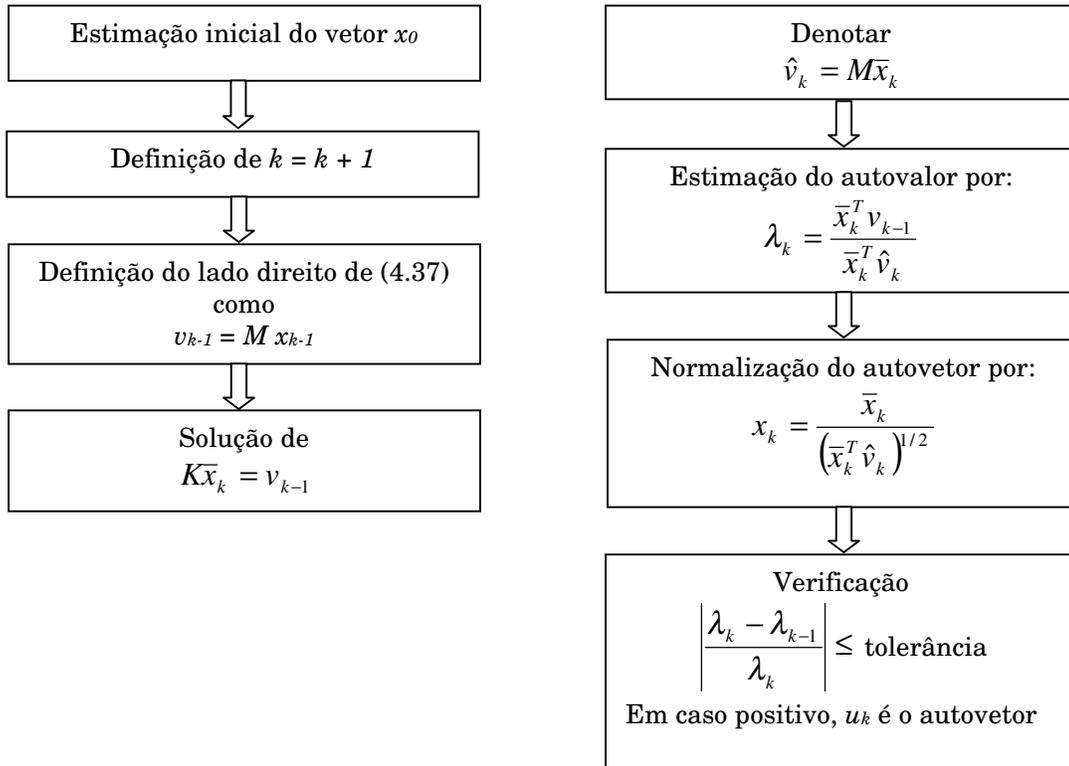


Figura 4.5 Fluxograma de operações para o Método da Iteração Inversa (Bathe, 1996)

Nesse algoritmo, K e M são positivas-definidas, condição primordial para as matrizes formuladas sob a abordagem de Mead-Markus. Como já referido, a matriz K, em sendo na forma de banda ou triangularizada, facilita a solução para a obtenção do vetor estimado  $x_{k+1}$  que se aproxima do autovetor com o avanço das iterações. O vetor  $x_k$  representa o estágio anterior de iteração, e pode ser iniciado com um vetor unitário (Bathe, 1996 [13]).

A rotina traz como resultado final o conjunto dos  $n$  autovalores e autovetores solicitados para cálculo por meio de interface com o usuário. Os mesmos são armazenados em um arquivo do padrão ASCII, podendo ser manipulados para

posterior processamento.

### 4.3.2 Formulação para a Teoria da Viga de Timoshenko

Da mesma forma que para a abordagem anterior, apresenta-se inicialmente o fluxograma dos passos que a rotina executa para a obtenção dos resultados desejados:

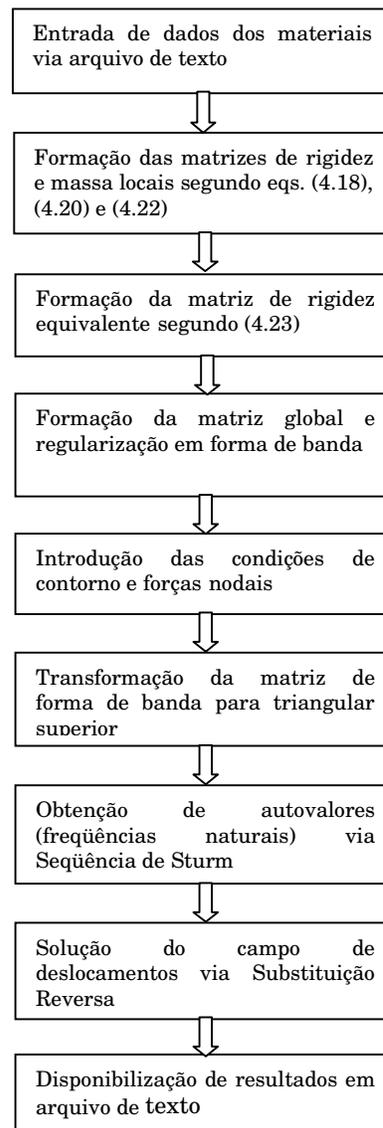


Figura 4.6 Fluxograma de operações para a rotina segundo a Formulação para a Viga de Timoshenko

O arquivo de dados de entrada é bastante semelhante ao descrito para o elemento Mead-Markus, apenas com um dado adicional que é o número do nó onde é posicionada uma força unitária no sentido negativo do eixo  $y$ , para avaliação posterior da Função Resposta em Freqüência. Também, como procedimentos iniciais as matrizes de deslocamentos, forças nodais e a matriz de rigidez global em forma de banda são preenchidas com seus termos iguais a zero, para evitar a presença de termos indesejados no *buffer* de alocação de memória necessária para a execução do programa.

Os passos acima descritos são executados internamente a um *loop* cuja variável é a freqüência, um recurso utilitário destinado tão-somente à obtenção gráfica da resposta espectral da FRF. Desta forma, para cada valor de freqüência dentro da faixa de interesse, tem-se a formação de uma matriz equivalente e a avaliação do campo de deslocamentos. A avaliação dos autovalores, que correspondem às freqüências naturais, é efetuada através da aplicação da propriedade da Seqüência de Sturm, que verifica o número de elementos negativos na matriz dinâmica global. Para cada aumento do número de negativos, o intervalo das freqüências entre as quais houve esse aumento é novamente pesquisado com uma resolução de varredura menor, de forma a determinar o valor mais próximo da freqüência e o atribuir à ordem modal da estrutura.(Bathe, 1996 [13]). O resultado de saída é mostrado para uma das análises executadas na Figura 4.7, por meio da resposta em freqüência, e na Figura 4.8 através do gráfico número de negativos na diagonal da matriz triangularizada x freqüência.

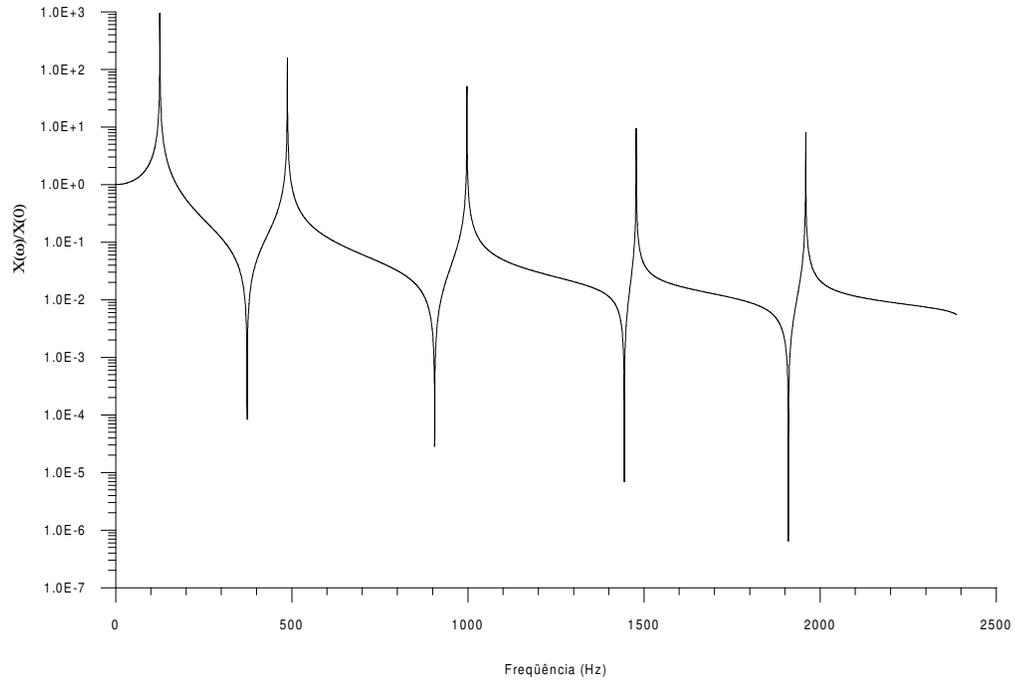


Figura 4.7 Resposta em freqüência da viga, uma das saídas da rotina da teoria de Timoshenko

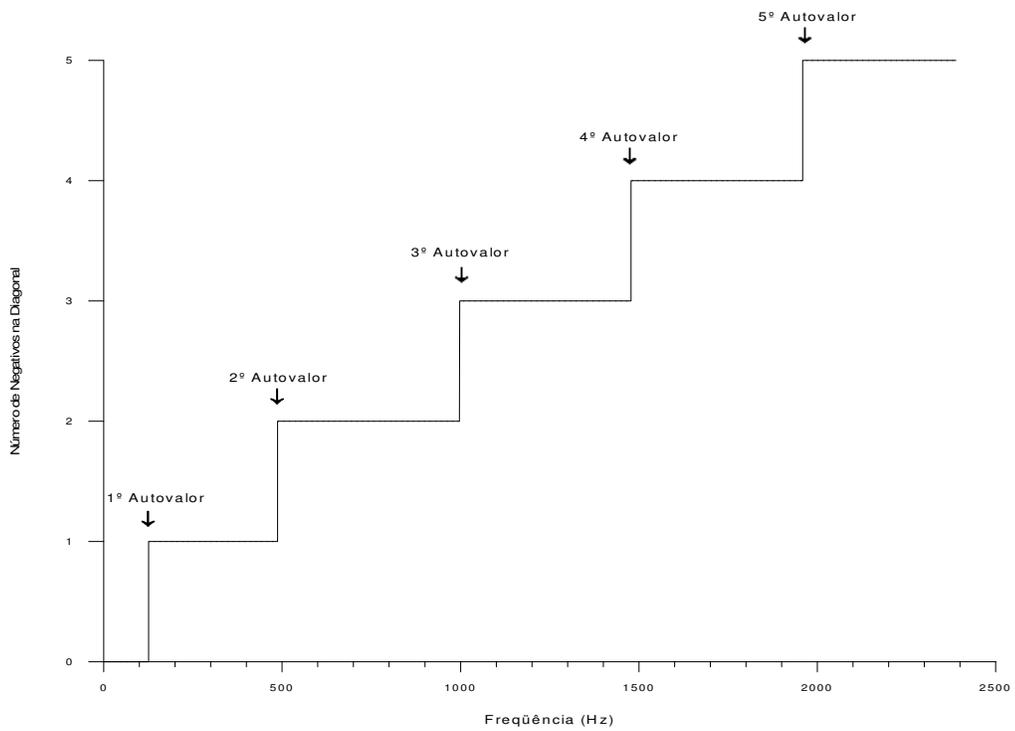


Figura 4.8 Número de negativos na diagonal da matriz triangularizada x freqüência

## 4.4 Análise de Convergência

Para avaliar os resultados fornecidos pelos programas desenvolvidos para obter as frequências naturais para a viga “sandwich”, foram utilizadas duas associações de componentes oriundas da bibliografia consultada para este trabalho, e que são descritas separadamente, juntamente com os resultados obtidos.

Para a aplicação das condições de contorno foi adotado o critério apresentado em Chandrupatla [12], no qual uma constante de valor elevado é inserida na matriz de rigidez global, na posição referente ao grau de liberdade cuja restrição é desejada, técnica denominada *Penalty Approach*. Foi então levantada a relação das cinco primeiras frequências naturais em função do número de elementos da discretização da viga para a análise de convergência. O mesmo levantamento de frequências naturais foi executado com o aplicativo ALGOR® para ambos os modelos de viga e as diferentes condições de contorno. Para tal, foi utilizado o elemento padronizado *SANDWICH* e malha homogênea de  $4 \times n$  elementos, isto é, 4 elementos na espessura e  $n$  elementos no comprimento.

O comparativo entre as soluções para os elementos de Mead-Markus, Timoshenko e a solução fornecida pelo ALGOR® está relacionado nas tabelas 4.1 e 4.2.

- **Viga 1** (Sokolinsky *et al*, 2001 [3]): material cerâmico de tipo não identificado com densidade de  $4400 \text{ kg/m}^3$ , com núcleo isotrópico de polimetacrilida (PMI) com densidade de  $52,06 \text{ kg/m}^3$ . Demais características:

- Módulo Elástico das faces: 36 GPa;
- Módulo Elástico do núcleo: 50 MPa;
- Módulo de Cisalhamento do núcleo: 20 MPa;

As dimensões estão ilustradas na Figura 4.9:

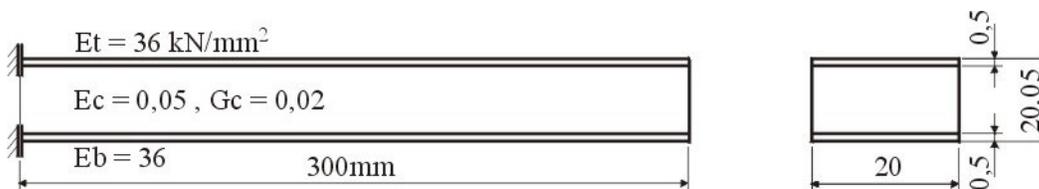


Figura 4.9 Dimensões da Viga 1, na condição de engastamento

Os resultados podem ser visualizados na Tabela 4.1:

Tabela 4.1 Resultados numéricos para a Viga 1 – Configuração Engastada (Sokolinsky *et al*)

Modo Natural	Número de Elementos	Fr. Natural. (Timo)	Erro (%)	Fr. Natural. (MM)	Erro (%)	Fr.Natural (ALGOR®)	Erro (%)
1 <sup>o</sup> (129,9905 Hz)	10	125,2583	3,640	131,8641	-1,441	125,7472	3,264
	20	125,3033	3,606	131,0371	-0,805	128,5352	1,120
	40	125,3148	3,597	130,6649	-0,518	125,6721	3,322
	80	125,3177	3,595	130,5006	-0,392	130,6247	-0,488
2 <sup>o</sup> (491,3485 Hz)	10	486,7646	0,933	523,2199	-6,487	454,3267	7,535
	20	487,1197	0,861	511,8509	-4,173	461,7536	6,023
	40	487,2182	0,841	504,9086	-2,760	457,8189	6,824
	80	487,2434	0,835	501,223	-2,010	495,4413	-0,833
3 <sup>o</sup> (996,2801 Hz)	10	996,3453	-0,007	-	-	893,6424	10,302
	20	996,7789	-0,050	1064,3135	-6,829	914,0986	8,249
	40	996,9863	-0,071	1045,7179	-4,962	913,1051	8,349
	80	997,0447	-0,077	1029,7060	-3,355	1003,243	-0,699
4 <sup>o</sup> (1465,1062 Hz)	10	1478,4985	-0,914	-	-	1274,681	12,997
	20	1477,8182	-0,868	-	-	1324,8392	9,574
	40	1478,0488	-0,883	1581,5297	-7,946	1332,687	9,038
	80	1478,1335	-0,889	1545,1680	-5,464	1478,1023	-0,887
5 <sup>o</sup> (1930,7076 Hz)	10	1963,5927	-1,703	-	-	1622,8776	15,944
	20	1959,1585	-1,474	-	-	1728,485	10,474
	40	1959,2010	-1,476	2146,6594	-11,185	1751,359	9,289
	80	1959,2928	-1,481	2091,0136	-8,303	1952,5256	-1,130

As Figuras 4.10 a 4.12 ilustram os três primeiros modos naturais para a configuração da Viga 1.

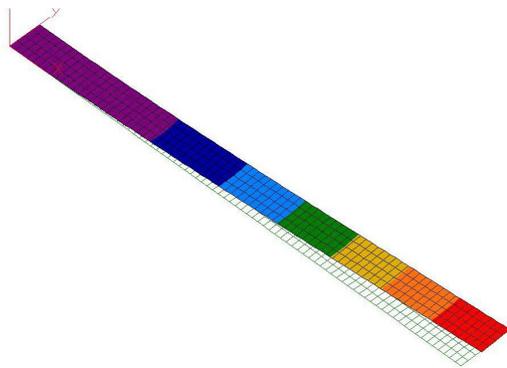


Figura 4.10 Representação do primeiro modo natural para a viga engastada

Figura 4.11 Representação do segundo modo natural para a viga engastada

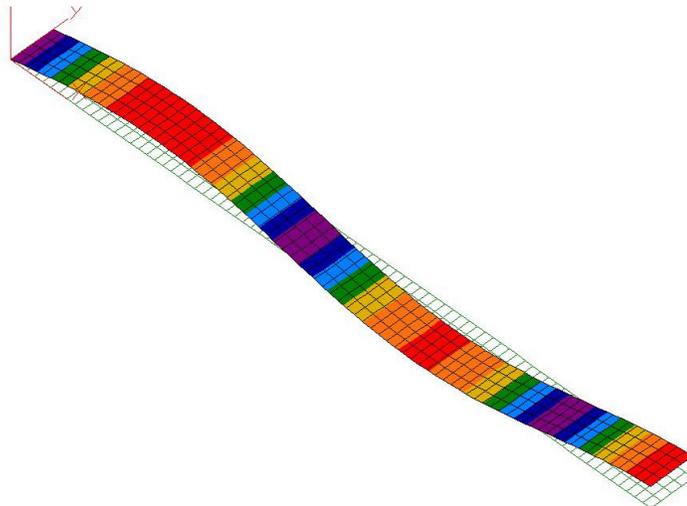


Figura 4.12 Representação do terceiro modo natural para a viga engastada

Faz-se necessário salientar que a falta de alguns resultados na Tabela 4.1 se deve à pouca resolução da malha, onde o baixo número de elementos não permitiu levantar os modos naturais de maior ordem.

- **Viga 2** (Zenkert, 1995 [9]): Composto de dois materiais (um para a lâmina e outro para o núcleo) com as seguintes propriedades:

- Densidade do núcleo:  $100 \text{ kg/m}^3$ ;
- Densidade das faces:  $1400 \text{ kg/m}^3$ ;
- Módulo Elástico das faces:  $20 \text{ GPa}$ ;
- Módulo Elástico do núcleo:  $100 \text{ MPa}$ ;
- Módulo de cisalhamento do núcleo:  $40 \text{ MPa}$ .

A Figura 4.13 apresenta as características geométricas da Viga 2.

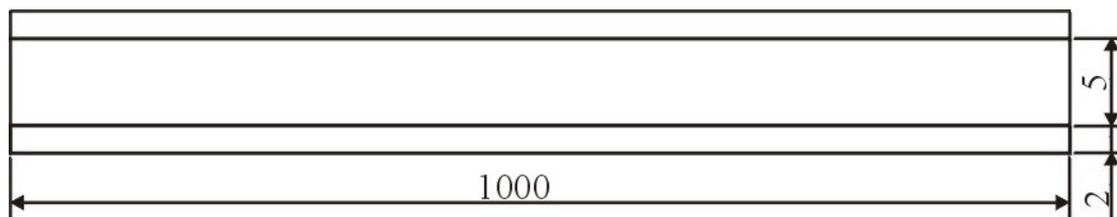


Figura 4.13 Dimensões da Viga 2 (mm)

A Tabela 4.2 apresenta os resultados para a Viga 2, na configuração biapoiada, enquanto as Figuras 4.14 a 4.16 ilustram os modos naturais:

Tabela 4.2 Resultados numéricos para a Viga 2 – Configuração Biapoiada (Zenkert)

Modo Natural	Número de Elementos	Fr. Natural. (Timo)	Erro (%)	Fr. Natural. (MM)	Erro (%)	Fr.Natural (ALGOR®)	Erro (%)
1 <sup>o</sup> (100,4268 Hz)	10	101,0202	-0,591	123,4999	-22,975	102,1897	-1,755
	20	101,1218	-0,692	122,7122	-22,190	101,9985	-1,565
	40	101,1218	-0,692	122,4053	-21,885	101,9321	-1,499
	80	101,1218	-0,692	122,2742	-21,755	101,9071	-1,474
2 <sup>o</sup> (318,3099 Hz)	10	318,5475	-0,075	325,7043	-2,323	303,5683	4,631
	20	319,0234	-0,224	321,3397	-0,952	304,2844	4,406
	40	319,1768	-0,272	319,0623	-0,236	304,4187	4,364
	80	319,1768	-0,272	317,9119	0,125	304,4364	4,358
3 <sup>o</sup> (562,6127 Hz)	10	562,3358	0,049	592,2496	-5,267	509,3766	9,462
	20	562,8372	-0,040	583,5357	-3,719	517,2612	8,061
	40	563,1654	-0,098	576,6796	-2,500	519,1588	7,724
	80	563,2610	-0,115	572,4747	-1,752	519,6137	7,643
4 <sup>o</sup> (807,0747 Hz)	10	807,7114	-0,079	838,7213	-3,868	697,5748	13,568
	20	806,8563	0,027	836,2465	-3,562	723,4186	10,365
	40	807,2671	-0,024	824,7605	-2,139	729,7969	9,575
	80	807,4133	-0,042	815,5452	-0,998	731,3706	9,380
5 <sup>o</sup> (1047,7169 Hz)	10	1051,9454	-0,404	-	-	863,0091	17,630
	20	1047,3867	0,032	1102,4683	-5,172	920,9823	12,096
	40	1047,6837	0,003	1088,6489	-3,854	935,4943	10,711
	80	1047,8623	-0,014	1072,5779	-2,321	939,1071	10,366

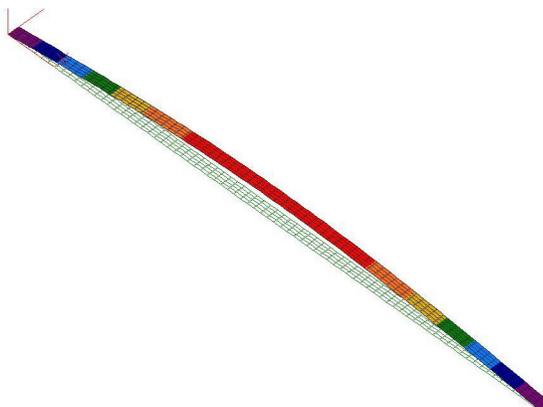


Figura 4.14 Representação do primeiro modo natural para a viga biapoiada

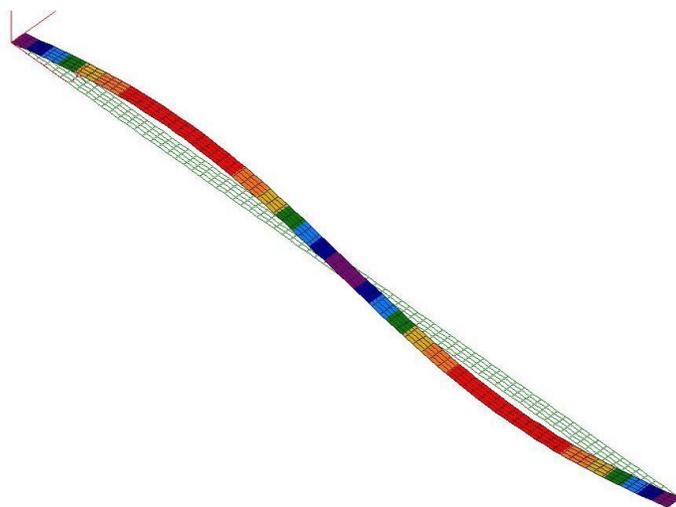


Figura 4.15 Representação do segundo modo natural para a viga biapoiada

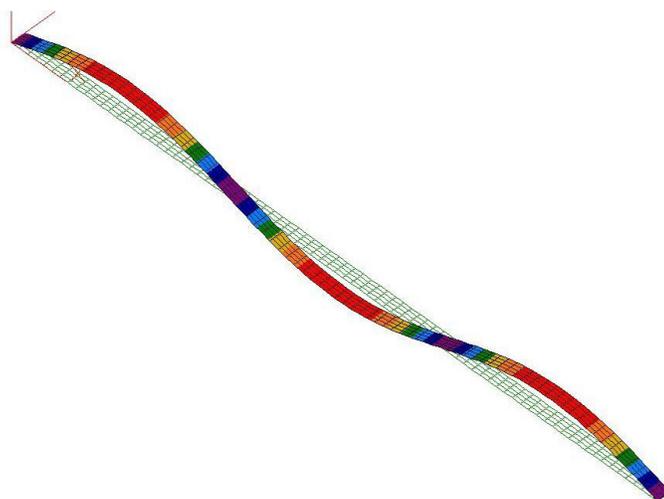


Figura 4.16 Representação do terceiro modo natural para a viga biapoiada

Os resultados mostram que para o elemento Mead-Markus, as frequências naturais obtidas situaram-se numa faixa de valores maior do que o correspondente resultado analítico, com exceção da 2ª frequência, o que denota a formulação de um elemento mais rígido. Entretanto, nota-se a convergência para o resultado com poucos elementos, a partir dos gráficos das Figuras 4.17 e 4.21. Da mesma forma, para o elemento de Timoshenko, a convergência assim se verificou, além de se obter uma diferença bastante pequena com relação à solução analítica de referência (*vide* Figuras 4.18 e 4.20). Por fim, nota-se uma convergência um pouco mais lenta no ALGOR®, (Figuras 4.19 e 4.22).

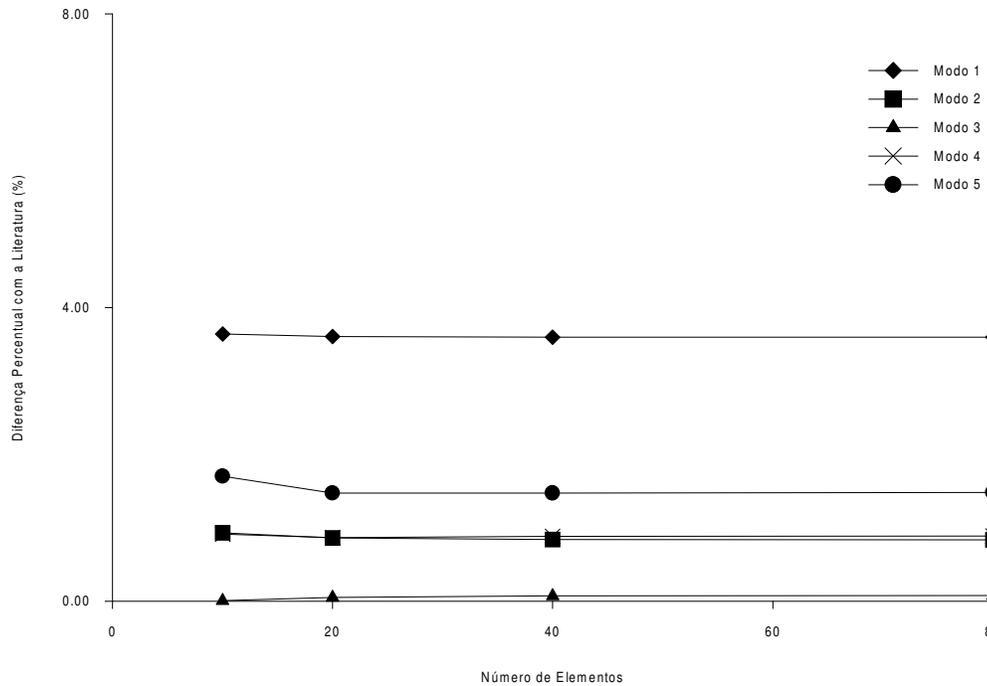


Figura 4.17 Convergência de resultados para a formulação de Mead-Markus – configuração engastada

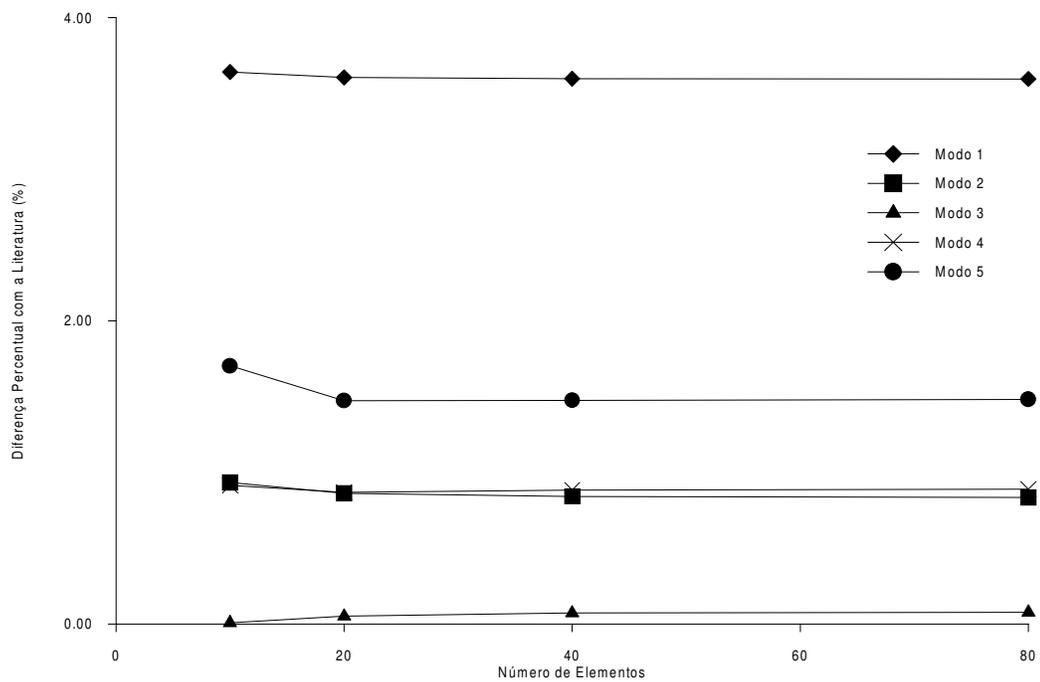


Figura 4.18 Convergência de resultados para a formulação de Timoshenko – Configuração engastada

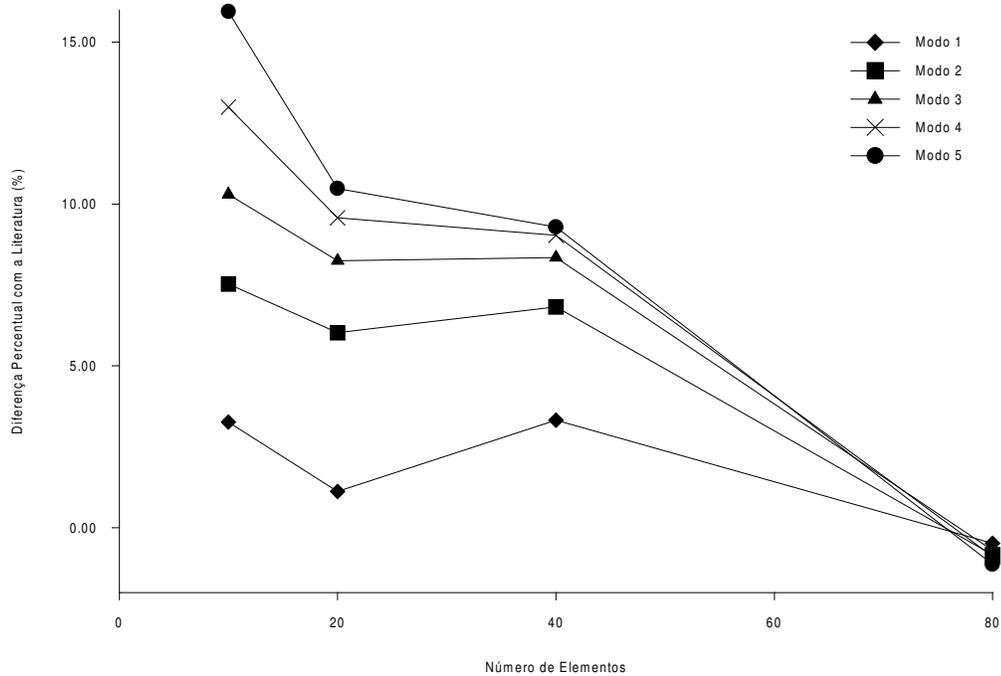


Figura 4.19 Convergência de resultados para a configuração engastada utilizando o *software* ALGOR®

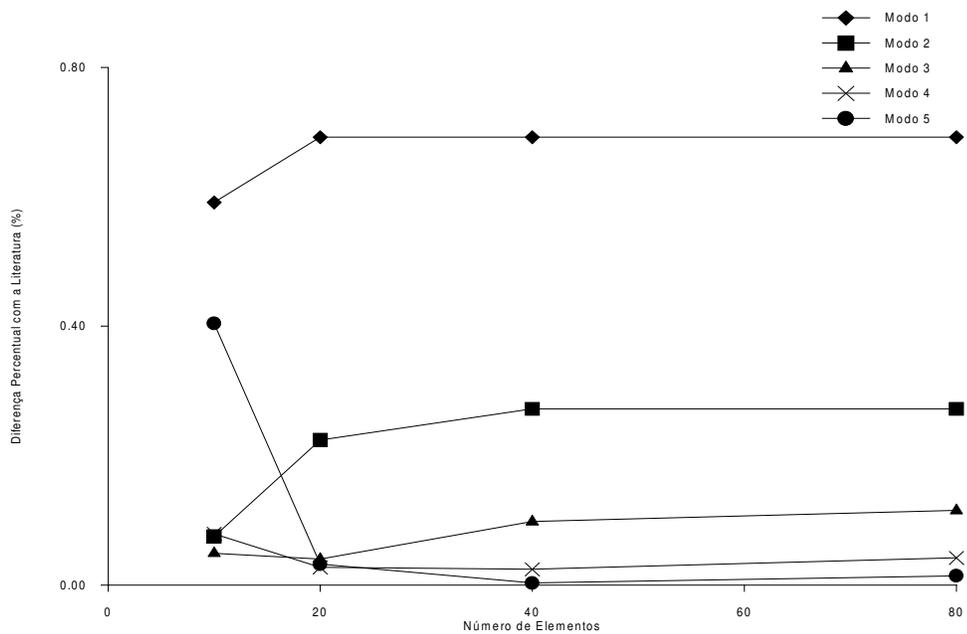


Figura 4.20 Convergência de resultados para a formulação da teoria da Viga de Timoshenko – configuração biapoada

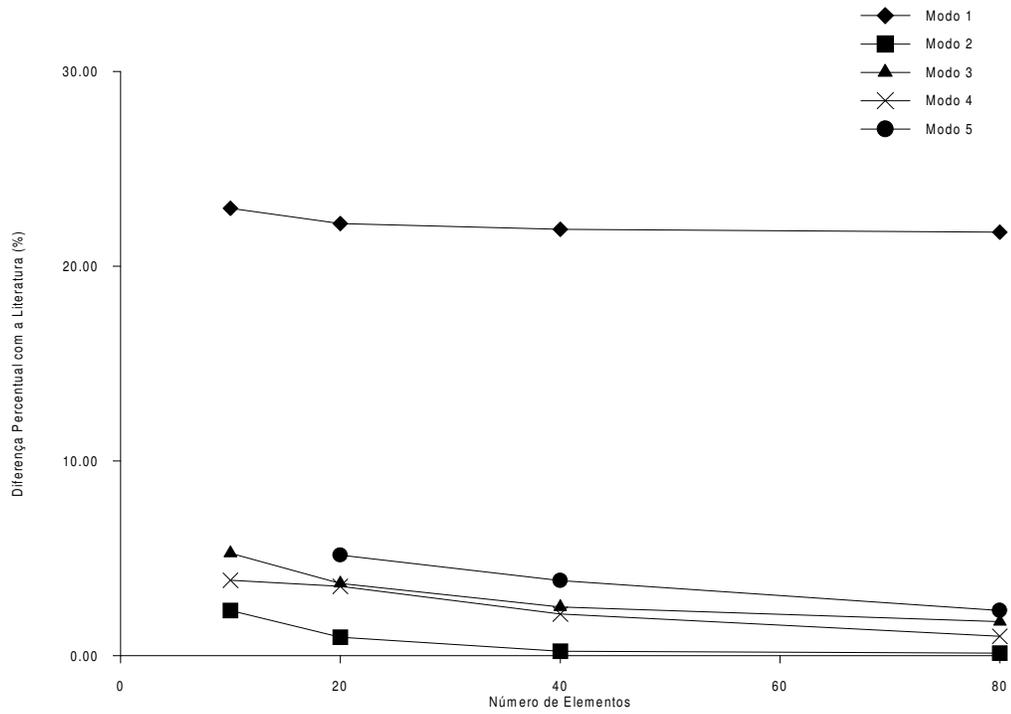


Figura 4.21 Convergência de resultados para a formulação de Mead-Markus – configuração biapoiada

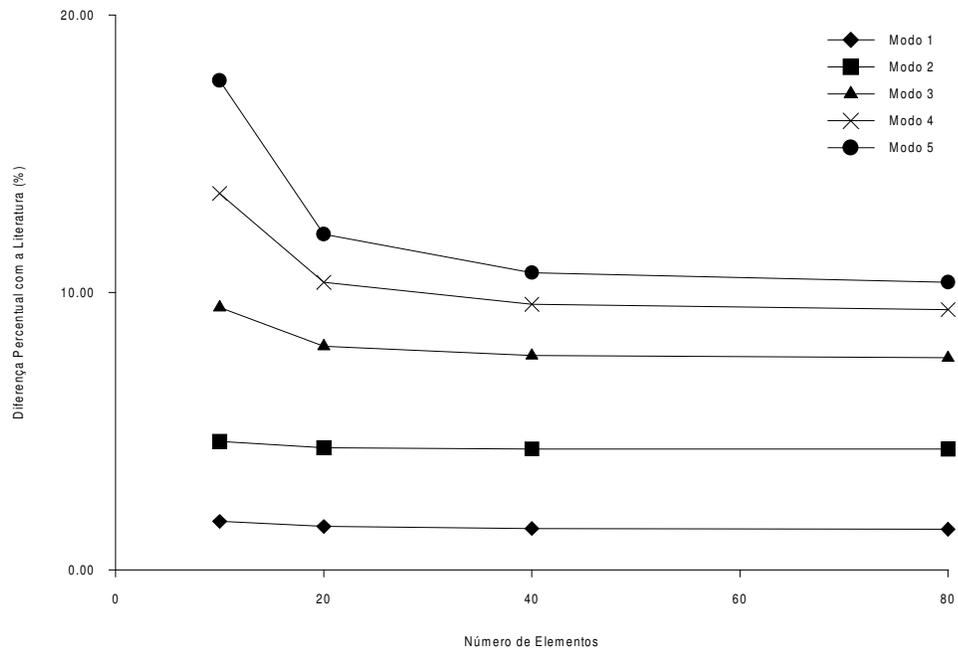


Figura 4.22 Convergência de resultados para a configuração biapoiada utilizando o *software* ALGOR®

## Capítulo 5

# Identificação de Parâmetros em Vigas “Sandwich”

Neste capítulo é apresentada a técnica utilizada nas atividades experimentais para a identificação das propriedades dinâmicas de vigas “sandwich”. Apresenta-se em primeiro lugar uma revisão das técnicas mais atuais divulgadas na literatura, seguindo-se para as teorias consagradas e ministradas corriqueiramente na literatura atual, salientando-se que tais técnicas não são o foco para esta parte do trabalho. Após, seguem descritas algumas das técnicas utilizadas tendo como base de dados a resposta em frequência da estrutura, dando-se aí especial destaque ao Método dos Polinômios em Frações Racionais ou RFP (*Rational Fraction Polynomials*), que foi o utilizado para o levantamento das características das amostras do compósito em estudo.

### 5.1 Introdução

Vários métodos são utilizados para a identificação de amortecimento de um sistema mecânico. Normalmente estes métodos relacionam a resposta do sistema (obtida por instrumentação mecânica) com uma excitação conhecida. Dentre os métodos, pode-se citar: Método da Meia Potência (*Halfpower Method*) (Smith, 1999 [22]), Método da Exponencial Complexa, Método de Ibrahim (*Ibrahim Time Domain Method*), Método de Hilbert e Método dos Polinômios em Frações Racionais (*RFP* –

*Rational Fraction Polynomials*) (Iglesias, 2000 [23]). Este último será utilizado para a identificação modal dos parâmetros dos sistemas analisados neste trabalho.

Outros métodos servem para caracterização das aplicações de materiais viscoelásticos destinados ao amortecimento passivo de estruturas e materiais compósitos de maneira geral. A teoria de Ross-Kerwin-Ungar (RKU) é apresentada por Teng e Hu (2001 [14]) para o levantamento do fator de perda de estruturas viscoelásticas. A partir de condições simplificadoras semelhantes às apresentadas no tópico 4.1 deste trabalho, dado que o método RKU é contemporâneo da Teoria de Mead-Markus para estruturas de três camadas, apresenta-se a determinação do fator de perda de um material viscoelástico que exerce função de amortecimento entre duas lâminas como obtida através de uma composição dos módulos elásticos das faces e do módulo de cisalhamento.

Fasana e Marchesiello (2001 [15]) utilizam o método de Rayleigh-Ritz, onde os deslocamentos correspondem a somas de funções de forma polinomiais apropriadas a diversas condições de contorno. A minimização do quociente de Rayleigh em relação a coeficientes constantes leva a um sistema de equações donde se obtém autovalores (frequências naturais) e autovalores (modos de vibrar), além do fator de perda a partir de sua definição, que é a razão entre a parte imaginária e a parte real do autovalor correspondente à frequência natural.

Dentre as técnicas que já usam em larga escala o Método dos Elementos Finitos ou MEF, deve-se destacar o uso corrente da minimização dos desvios das soluções aproximadas de autovalores e autovetores, técnica comumente denominada Método da Sensibilidade (*Sensitivity Method*). Qian *et al* [17]) desenvolveram a identificação de parâmetros de compósitos laminados a partir deste método. A partir do desenvolvimento convencional são levantadas as matrizes de rigidez, massa e amortecimento utilizando funções interpoladoras, e estabelecida a diferença entre os valores medidos e calculados. Os valores calculados têm sua primeira estimativa levantada por meio de uma Série de Taylor, e a correção para cada iteração é efetuada por Mínimos Quadrados. Dentro deste passo são também injetadas as atualizações das matrizes do sistema. A diferença é então inserida na chamada função custo, que é minimizada de maneira a permitir as iterações necessárias até que o resíduo chegue aos níveis desejados.

Cunha e Piranda (1999 [17]) utilizam o mesmo princípio, propondo a análise de sub-domínio denominados macro-elementos que são formados por regiões da matriz constitutiva do sistema, sobre os quais são efetuadas as correções. Essas possuem uma rotina de cálculo semelhante à usada na referência acima descrita. O avanço desse trabalho está no melhoramento do método para alguns aspectos práticos, como a dificuldade da garantia da normalização dos autovetores, solucionada por meio da adição de coeficientes de correção denominados massas generalizadas. Também propõe a condensação do sistema por meio de superposição modal, e sugere o posicionamento ótimo de sensores para a instrumentação mecânica, através do desacoplamento dos vetores-linha da matriz de sensibilidade. Os resultados mostram convergência das iterações, assim como ótima aproximação.

Rikards *et al* (1999 [18]) propõem a identificação de parâmetros de materiais compósitos pelo denominado método inverso, onde se parte tão-somente da experimentação que fornece a resposta em frequência do sistema em estudo e se segue rumo ao levantamento das propriedades elásticas do material. São levantados parâmetros adimensionais que constituem funções dessas propriedades, as quais formam um vetor que é inserido no funcional da diferença entre as frequências naturais medidas e numéricas, e de cujo valor mínimo se extraem os valores ótimos desse vetor. Destes valores são determinadas constantes que são inseridas na solução clássica de autovalores e autovetores via MEF em um número otimizado de pontos, número este determinado por meio dos conceitos de projeto de experimentos (*DOE - Design of Experiments*). Uma equação em função dos parâmetros adimensionais acima citados é determinada via regressão linear para determinar a chamada “superfície de resposta” para o valor das propriedades nos pontos ótimos, que parte de uma estimativa inicial executada via Método dos Mínimos Quadrados e chega à melhor configuração através de processos de redução de termos do modelo matemático. Os resultados mostram valores de apreciável precisão em comparação com os resultados de referência da literatura.

Chen *et al* (1999, [19]) apresentam a predição de características de amortecimento de materiais viscoelásticos em duas partes: a solução iterativa da equação diferencial de primeira ordem para a parte real dos autovalores e autovetores, e a solução para a redução de ordem da equação que rege a parte

complexa. A primeira parte da equação do movimento de vibração livre é adicionada de parâmetros expressos como funções do módulo de armazenamento  $G$ , que varia com a frequência para o tipo referido de material. Considerando que esses parâmetros podem ser progressões de  $G$ , eles são inseridos na solução geral do problema real de autovalores e autovetores, e pela relação de ortogonalidade de autovetores se chega à solução estimada para os autovalores, autovetores e para a matriz de rigidez da estrutura. A segunda parte se refere à parte complexa, onde por meio do algoritmo de Lanczos, são formados  $m$  vetores ortogonais de base complexa a partir de um sistema com  $n$  graus de liberdade (sendo  $m \ll n$ ), e que aproveitam a progressão em função de  $G$  adotada na primeira parte para formar autovetores para o sistema de ordem reduzida, que são então inseridos em rotinas de iteração direta.

No trabalho de Gounaris e Anifantis (1999 [20]), a avaliação de amortecimento viscoelástico não-linear parte da aproximação de um módulo de elasticidade complexo cuja parte imaginária é função da tensão. Conjugando esta aproximação à parte real, surge um sistema de equações donde se obtêm amplitudes de oscilação, autovalores e autovetores para a estrutura, sendo que as amplitudes são utilizadas posteriormente para cálculo de tensões fletivas. O fator de perda do material resulta de aproximações baseadas na energia de dissipação e na tensão para cada elemento da estrutura discretizada; por meio de uma estimativa do fator de perda, inicia-se a iteração até que haja a convergência do fator de perda e das tensões para a tolerância desejada.

Por fim, Dalenbring (1999 [21]) apresenta o método IDA (*Incremental Damping Approximation*), onde parte da chamada Lei de Hooke Aumentada para determinar um campo de deslocamentos tridimensional e relações constitutivas distintas. Neste modelo, o amortecimento é determinado por meio dos chamados coeficientes espectrais e de funções no domínio de Laplace que são indexadas a parâmetros denominados frequências de relaxação e amplitudes modais; por meio dessas, o módulo dependente da frequência para um material viscoelástico pode ser obtido. O processo de estimação de parâmetros se dá então por meio dos seguintes passos:

- Obtenção da geometria, dados elásticos (módulo elástico, coeficiente de Poisson), Função Resposta em Frequência da estrutura e parâmetros

obtidos do modelamento segundo o Método dos Elementos Finitos, a saber, frequências naturais e modos de vibrar;

- Estimação dos coeficientes espectrais através da análise modal híbrida, que projeta os dados experimentais da FRF numa base de funções ortogonais, que são as amplitudes dos pontos de medição no intervalo de frequência analisado, e aproximação via Mínimos Quadrados. A seguir é executada uma aproximação dos valores do amortecimento nas frequências de ressonância amortecidas, dado que será utilizado no passo subsequente;
- Aproximação da resposta em frequência através de método iterativo, onde por meio de duas amplitudes de vibração referentes a um intervalo de frequências denominadas “frequências de processo”, é feita uma análise do máximo valor de amortecimento dentro desse intervalo. O valor da frequência correspondente à mudança de sinal de uma dada função de amortecimento corresponde ao valor aproximado para a FRF, e a iteração continua para todo o espectro desejado.

O método IDA mostra boa aproximação da FRF numérica em relação à experimental, tendo boa estabilidade, mas considerando somente estar sujeito a variações devido a imperfeições na geometria a ser analisada por meio do MEF, e à escolha de pontos de medição da estrutura real que apresentem reciprocidade, isto é, simetria da receptância entre dois pontos da estrutura.

Richardson e Formenti (1982, [24]) apresentam uma dificuldade crônica dos métodos que processam sinais no domínio do tempo, notadamente todos os apresentados à exceção do RFP. Uma vez que estes métodos, a partir da Função Resposta em Frequência, procedem ao cálculo da Transformada Inversa de Fourier para a obtenção da resposta ao impulso no domínio do tempo para a subsequente manipulação matemática, um erro denominado *wrap around* ou *time domain leakage* (ou simplesmente *leakage*) pode ser causado pelo truncamento matemático da FRF. Esta deficiência torna-se notória ao se analisar graficamente a resposta ao impulso, como pode ser visto na Figura 5.1, e é comentada pelos autores como uma das possíveis causas das diferenças reveladas no trabalho referido acima.

Já o método RFP se torna isento dos erros associados à transformação no

domínio do tempo, uma vez que trabalha diretamente no domínio da frequência com o sinal obtido diretamente da medição em um analisador. Como já referido, o fato das matrizes obtidas para a determinação da solução serem fracamente condicionadas é compensado pelo método de minimização da função erro, conforme será referido adiante quando da descrição em detalhe do método RFP.

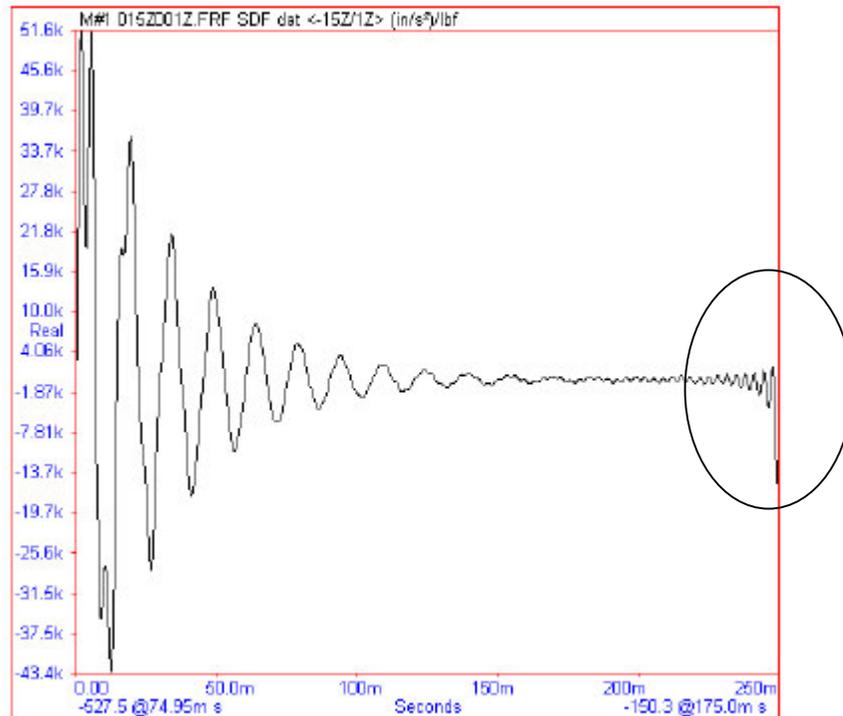


Figura 5.1 Função Resposta ao Impulso com *Leakage* (direita)

Pelo fato dos requisitos básicos de um algoritmo para a determinação de parâmetros vibracionais serem a sua estabilidade numérica e facilidade de uso, decidiu-se utilizar o Método dos Polinômios em Frações Racionais (Iglesias, 2000 [23]) para o levantamento deste trabalho, devido à ausência do distúrbio decorrente do *time domain leakage* e por utilizar o dado direto do analisador de frequência, agilizando a verificação da consistência do experimento.

## 5.2 Método dos Polinômios em Frações Racionais

O Método dos Polinômios em Frações Racionais ou RFP (*Rational Fraction Polynomials*) (Iglesias, 2000 [23]) utiliza dados no domínio da frequência. A

formulação da Função Resposta em Freqüência é expressa na forma de uma fração racional, isto é, uma expressão correspondente a um quociente entre dois polinômios, onde a função erro é constituída de tal maneira que o sistema de equações resultante é linear. Como este sistema possui matrizes que são fracamente condicionadas, o Método do Gradiente é usado para minimizar a função erro, sendo a estimativa inicial para o erro calculada por meio do Método dos Mínimos Quadrados.

A FRF, em termos de receptância para um sistema linear com  $N$  graus de liberdade e amortecimento viscoso pode ser modelada através da seguinte equação de fração parcial:

$$H(\omega) = \sum_{r=1}^N \frac{A_r + i\omega \cdot B_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + i2\xi_r \omega_r \omega} \quad (5.1)$$

onde:

$A_r$  e  $B_r$  = constantes;

- $\omega$  = Freqüência
- $\omega_r$  = Freqüência Natural Amortecida
- $\xi_r$  = Razão de Amortecimento

A Equação 5.1 pode ser expressa na forma de fração parcial como se segue:

$$H(\omega) = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^{2N-1} b_k (i\omega)^k} \quad (5.2)$$

A diferença entre a FRF analítica  $H(\omega)$  e a FRF experimental  $H_e(\omega)$  é a função erro dada por:

$$e_j = \frac{\sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega)^k}{\sum_{k=0}^{2N-1} b_k (i\omega)^k} - H_e(\omega_j) \quad (5.3)$$

A função erro é linearizada a partir da função erro modificada abaixo:

$$e'_j = e_j \sum_{k=0}^{2N} b_k (i\omega_j)^k \quad (5.4)$$

e fazendo  $b_{2N} = 1$ , resulta em

$$e'_j = \sum_{k=0}^{2N-1} a_k (i\omega_j)^k - H_e(\omega_j) \left[ \sum_{k=0}^{2N-1} b_k (i\omega_j)^k + (i\omega_j)^{2N} \right] \quad (5.5)$$

Um vetor erro é definido para todas as  $L$  frequências medidas:

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \mathbf{M} \\ e'_L \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

A Equação 5.6 expressa na forma matricial resulta em:

$$\{E\} = \begin{Bmatrix} 1 & (i\omega_1) & (i\omega_1)^2 & \Lambda & (i\omega_1)^{2N-1} \\ 1 & (i\omega_2) & (i\omega_2)^2 & \Lambda & (i\omega_2)^{2N-1} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 1 & (i\omega_L) & (i\omega_L)^2 & \Lambda & (i\omega_L)^{2N-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \mathbf{M} \\ a_{2N-1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} H_e(\omega_1) & H_e(\omega_1)(i\omega_1) & \Lambda & H_e(\omega_1)(i\omega_1)^{2N-1} \\ H_e(\omega_2) & H_e(\omega_2)(i\omega_2) & \Lambda & H_e(\omega_2)(i\omega_2)^{2N-1} \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ H_e(\omega_L) & H_e(\omega_L)(i\omega_L) & \Lambda & H_e(\omega_L)(i\omega_L)^{2N-1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \mathbf{M} \\ b_{2N-1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} H_e(\omega_1)(i\omega_1)^{2N} \\ H_e(\omega_2)(i\omega_2)^{2N} \\ \mathbf{M} \\ H_e(\omega_L)(i\omega_L)^{2N} \end{Bmatrix} \quad (5.7)$$

ou, em forma compacta,

$$\{E\} = \underset{(L \times 1)}{[P]} \underset{(\underbrace{L \times 2N}_{(2N \times 1)})}{\{a\}} - \underset{(\underbrace{L \times 2N}_{(2N \times 1)})}{[T]} \underset{(L \times 1)}{\{b\}} - \underset{(L \times 1)}{\{W\}} \quad (5.8)$$

A equação que será minimizada através do Método do Gradiente é a função erro quadrática  $J$

$$J = \{E^*\}^T \{E\} \quad (5.9)$$

onde o símbolo \* indica conjugado complexo. Substituindo então 5.8 em 5.9 e após manipulação matemática, obtém-se

$$J = \{a\}^T \operatorname{Re}([P^*]^T [P])\{a\} + \{b\}^T \operatorname{Re}([T^*]^T [T])\{b\} + \{W^*\}^T \{W\} - 2\{a\}^T \operatorname{Re}([P^*]^T [T])\{b\} - 2\{a\}^T \operatorname{Re}([P^*]^T \{W\}) + 2\{b\}^T \operatorname{Re}([T^*]^T \{W\}) \quad (5.10)$$

Esta equação possui matrizes fracamente condicionadas, sendo esta a razão do uso do Método do Gradiente para que seja minimizada a função erro de 5.10. O Método dos Mínimos Quadrados pode ser usado para obter a estimativa inicial necessária ao Método do Gradiente. Assim, o MMQ é executado tomando as derivadas da Equação 5.10 em relação a  $\{a\}$  e  $\{b\}$  e igualando a zero, formando o sistema de equações conforme abaixo:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}([P^*]^T [P])\{a\} - \operatorname{Re}([P^*]^T [T])\{b\} - \operatorname{Re}([P^*]^T \{W\}) &= \{0\} \\ \operatorname{Re}([T^*]^T [T])\{b\} - \operatorname{Re}([T^*]^T [P])\{a\} + \operatorname{Re}([T^*]^T \{W\}) &= \{0\} \end{aligned} \quad (5.11)$$

ou

$$\begin{bmatrix} [Y] & [X] \\ [X]^T & [Z] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{a\} \\ \{b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{G\} \\ \{F\} \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

onde

$$\begin{aligned}
[Y] &= \text{Re}\left([P^*]^T [P]\right) \\
[X] &= -\text{Re}\left([P^*]^T [T]\right) \\
[Z] &= \text{Re}\left([T^*]^T [T]\right) \\
[G] &= \text{Re}\left([P^*]^T \{W\}\right) \\
[F] &= -\text{Re}\left([T^*]^T \{W\}\right)
\end{aligned} \tag{5.13}$$

A partir daí o sistema é resolvido para os valores iniciais de  $\{a\}$  e  $\{b\}$ , que são depois usados para a obtenção do gradiente. O gradiente com relação a  $\{a\}$  é a derivada parcial de 5.13 com relação a  $\{a\}$

$$\text{Re}\left([P^*]^T [P]\right)\{a\} - \text{Re}\left([P^*]^T [T]\right)\{b\} - \text{Re}\left([P^*]^T \{W\}\right) = \{M\} \tag{5.14}$$

onde  $\{M\}$  é o vetor gradiente com relação a  $\{a\}$ . De maneira análoga, o gradiente de  $\{b\}$  é a derivada parcial de 5.13 com relação a  $\{b\}$ :

$$\text{Re}\left([T^*]^T [T]\right)\{b\} - \text{Re}\left([T^*]^T [P]\right)\{a\} + \text{Re}\left([T^*]^T \{W\}\right) = \{N\} \tag{5.15}$$

onde  $\{N\}$  é o vetor gradiente com relação a  $\{b\}$ .

Com as equações 5.14 e 5.15 o vetor gradiente total é:

$$\{V\} = \begin{Bmatrix} M \\ N \end{Bmatrix} \tag{5.16}$$

a direção do vetor gradiente é calculada para ser subtraída dos coeficientes  $a$  e  $b$  para que a direção do vetor resultante seja tal que a função erro é minimizada. A direção do vetor gradiente é:

$$\{S\} = \frac{-\{V\}}{\|\{V\}\|} \tag{5.17}$$

onde  $\|\{V\}\|$  é a norma do vetor. Então, os novos coeficientes serão:

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \{V\} + \{S\} \quad (5.18)$$

O vetor gradiente e sua norma são calculados e comparados com a tolerância desejada. Se o valor é maior que a tolerância, a direção do vetor gradiente é subtraída dos coeficientes de maneira a obter novos valores. O processo se repete até que a norma do vetor gradiente seja menor que a tolerância.

Após obter os coeficientes da equação de frações racionais de Equação 5.2, é possível calcular os parâmetros modais. As raízes ou pólos do polinômio do denominador contêm os valores da frequência natural e da razão de amortecimento, que podem ser obtidos através das equações abaixo:

$$\begin{aligned} f_r &= \frac{|P_r|}{2\pi} \\ \xi_r &= -\frac{\text{Re}(P_r)}{|P_r|} \end{aligned} \quad (5.19)$$

onde  $P_r$  é o pólo para o modo  $r$ .

Para calcular os resíduos ou autovetores, a fração racional é expandida para uma equação de frações parciais e o numerador se torna um par de constantes complexas conjugadas denominadas resíduos.

## Capítulo 6

# Caracterização dos Materiais

## Introdução

Neste capítulo é mostrado o procedimento experimental utilizado para a determinação das propriedades elásticas e da densidade dos componentes da viga sandwich em estudo.

As propriedades elásticas dos materiais da viga foram determinadas com os ensaios de tração simples e torção. O módulo torcional,  $G$ , do material do núcleo foi determinado utilizando o ensaio de torção com corpo de prova com seção quadrada e os módulos de elasticidade da chapa de aço e da chapa de plástico foram determinadas com o ensaio de tração.

### 6.1 Espuma Rígida de Poliuretano

#### 6.1.1 Módulo de Cisalhamento, $G$

Como é possível notar nos capítulos anteriores, o módulo de cisalhamento do material do núcleo,  $G$ , é uma das propriedades requisitadas para a formulação matemática dos elementos de viga "sandwich".

Um dispositivo especial foi projetado para avaliar a grandeza  $G$  do núcleo.

Este dispositivo foi necessário devido à dificuldade de adaptar o corpo de prova em máquinas de ensaio convencionais (torção e/ou tração).

Este dispositivo foi elaborado para o cálculo do  $G$  por meio da torção pura. Usando a teoria para a torção pura de vigas com seções retangulares (Boresi, 1993 [25]) é possível relacionar  $G$  com as características geométricas do corpo de prova e com o torque externo e o ângulo de torção. Esta relação é:

$$G = \frac{T}{k_1 \theta (2b)(2h)^3} \quad (6.1)$$

onde:

$G$  = módulo de cisalhamento (Pa),

$T$  = torque aplicado (Nm),

$\theta$  = ângulo de torção (rad),

$b$  e  $h$  = meias dimensões da seção retangular do corpo de prova, e

$k_1$  = fator de forma que depende das dimensões da seção retangular. Para seções quadradas (corpo de prova),  $k_1 = 0,141$ .

O dispositivo de ensaio foi construído em aço, Figura 6.1, para garantir rigidez suficiente e isentar o corpo de prova de deformações não oriundas do carregamento externo de torção. O corpo de prova com dimensões de 30 mm x 30 mm x 250 mm é encaixado firmemente (engastado) em uma das extremidades, Figura 6.2, e o carregamento externo de torção é aplicado na outra extremidade (móvel) que é acoplada na estrutura do dispositivo com mancais de rolamentos, Figura 6.3. Na extremidade móvel um ponteiro foi instalado para a medição do ângulo de torção desta extremidade, Figura 6.4, com escala em graus e precisão de 0,5 grau.

O torque externo é aplicado com pesos calibrados, como ilustrado na Figura 6.5, e o ensaio é realizado variando o torque e com a leitura direta do ângulo de torção. Com estes dados e a Equação 6.1 é possível calcular o valor de  $G$ .

Os corpos de prova de Poliuretano rígido foram extraídos todos do mesmo gabinete para evitar variações devido a condições distintas de produção. A partir de um fragmento da lateral do refrigerador (zona mais plana e menos sujeita a falhas de espumação), os corpos de prova foram cortados e feita a classificação visual segundo a quantidade de falhas superficiais (vide Figuras 6.7 a 6.9). O objetivo desta classificação foi avaliar a variação do valor obtido para  $G$  com corpos de prova *visualmente perfeitos* e com falhas superficiais.

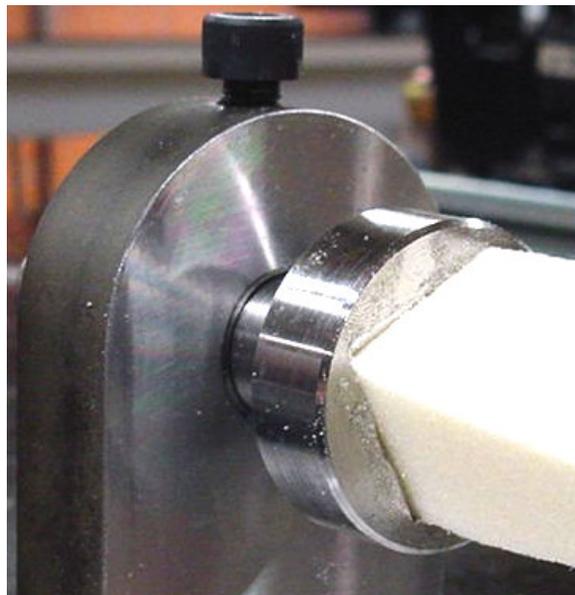
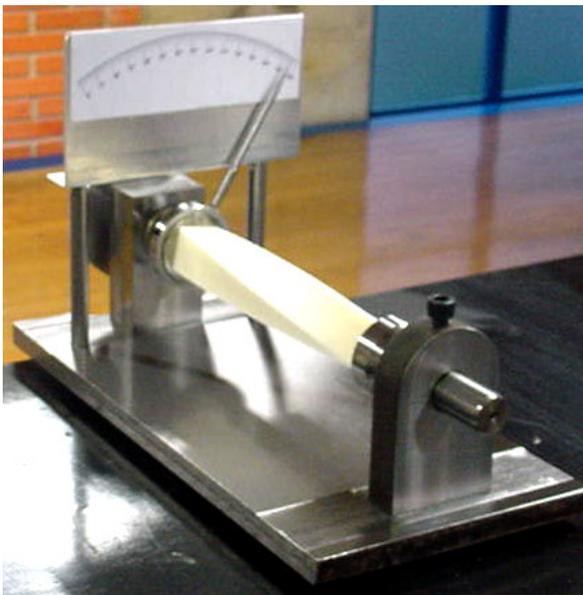


Figura 6.1 Vista Geral do dispositivo para ensaio torcional do PU

Figura 6.2 Detalhe da Fixação do Corpo de Prova na Extremidade Fixa

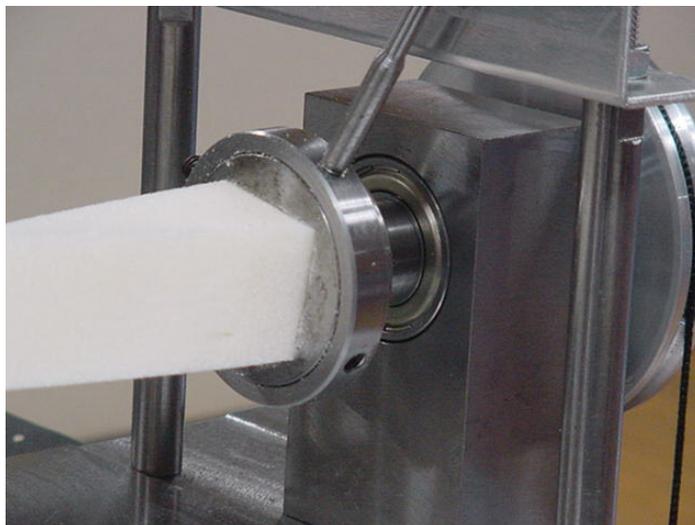


Figura 6.3 Detalhe da Extremidade Móvel com Mancal de Rolamento e Anel de Fixação do Ponteiro de Medição Angular

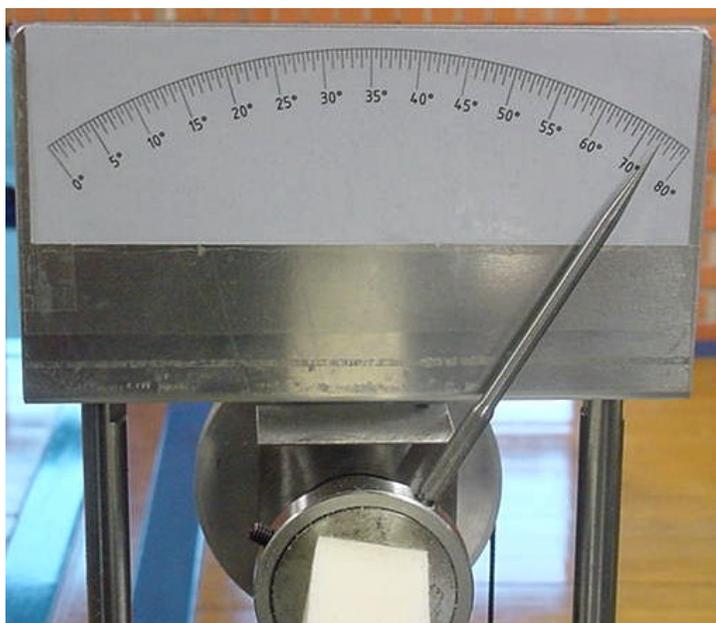


Figura 6.4 Detalhe de Fixação do Ponteiro e Escala de Medição do Ângulo de Torção



Figura 6.5 Aplicação do torque

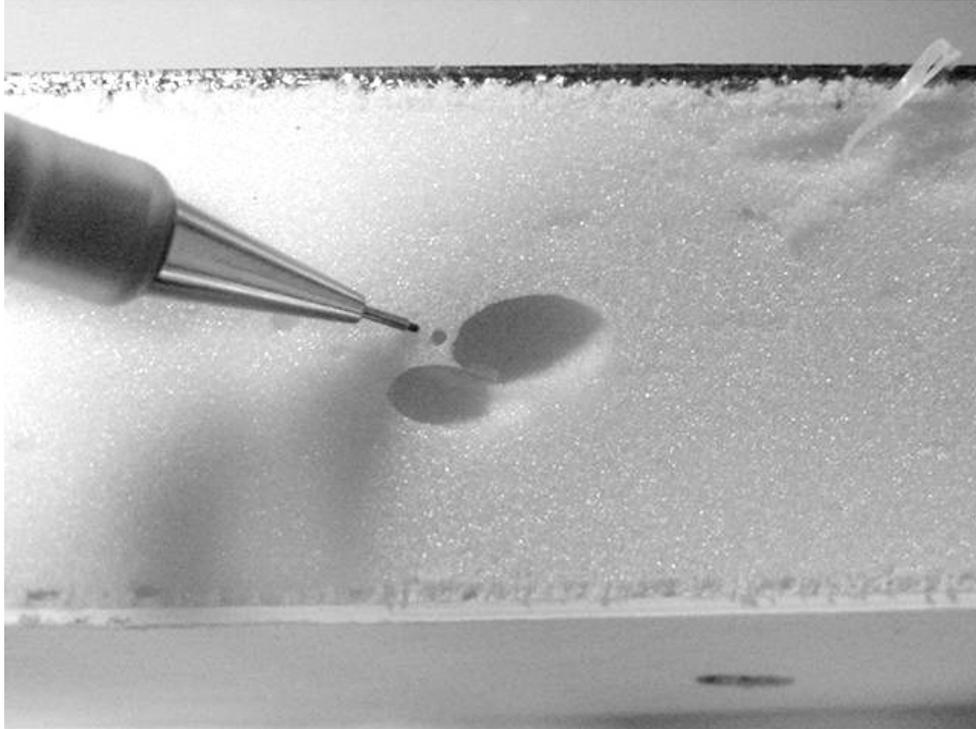


Figura 6.6 Vazio encontrado no núcleo de Poliuretano de uma das amostras de corpos de prova utilizados experimentalmente



Figura 6.7 Descontinuidade encontrada na interface entre a lâmina de Poliestireno e a espuma

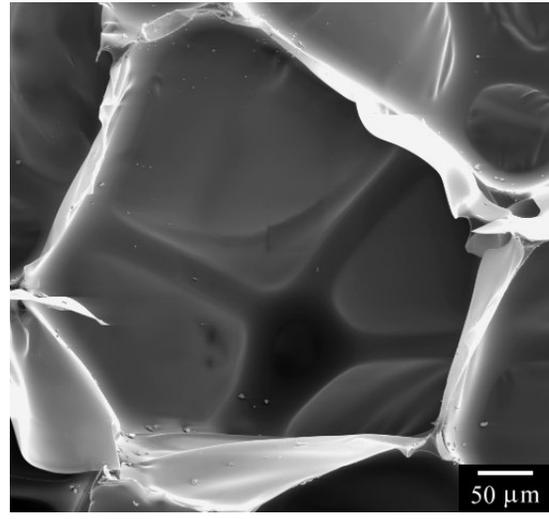
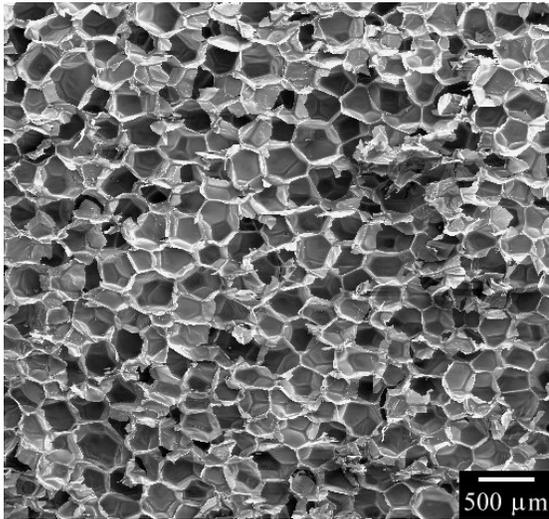


Figura 6.8 Ampliação em microscopia da Figura 6.9 Detalhe da estrutura da célula espuma rígida de PU

Os ensaios foram realizados em 12 corpos de prova com incrementos de 0,02375 Nm de tal modo a provocar uma variação angular adequada para o sistema de medição em uso. Na Tabela 6.1 são mostrados os valores obtidos para os corpos de prova ensaiados, assim como o valor médio e desvio padrão obtidos.

Tabela 6.1 Módulo de cisalhamento experimental, G

Sem Falhas Superficiais		Com Falhas Superficiais	
CP	G (MPa)	CP	G (MPa)
OK1	1,977	I1	2,423
OK2	2,015	I2	1,896
OK3	2,215	I3	1,935
OK4	2,045	I4	2,205
OK5	2,091	I5	2,496
OK6	2,054	I6	2,152
Valor médio = 2,066 MPa		Valor médio = 2,184 MPa	
Desvio Padrão = 0,082 MPa		Desvio Padrão = 0,245 MPa	

Verificou-se a existência do regime de deformação linear, conforme ilustrado pela Figura 6.7, com pequeno resíduo, o que é verificado na literatura (Branner, 1995 [29]).

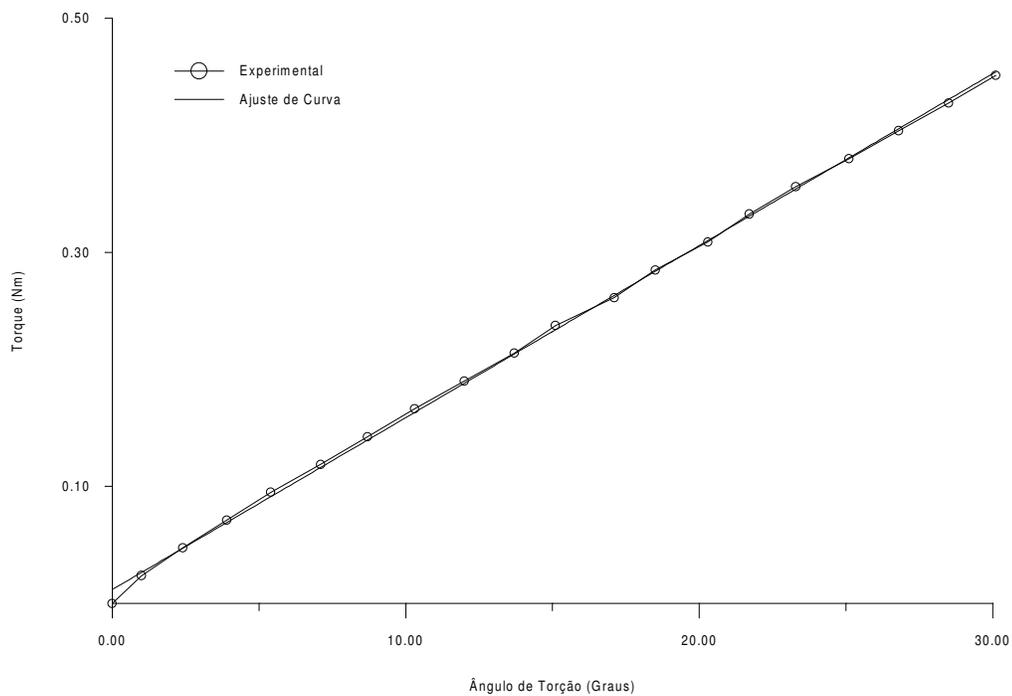


Figura 6.10 Ângulo de Torção x Torque

### 6.1.2 Densidade

Branner (1995)[29] mostra a dependência não só do módulo de cisalhamento  $G$ , mas também do módulo elástico  $E$ , com relação à densidade específica do material. A abordagem no nível da microestrutura levanta fatores de proporcionalidade à deflexão axial e transversal que levam em conta a relação entre a densidade total e a densidade da célula da espuma, o que valida esta dependência mas dispensa comentários adicionais por fugir do escopo deste trabalho. Desta forma, procedeu-se à medição da densidade dos corpos de prova, a qual foi executada numa balança Scientech modelo SA210, com resolução de 0,001g e destinada a medições para processos químicos. A Tabela 6.2 ilustra os números obtidos para 12 corpos de prova selecionados aleatoriamente entre as modalidades sem falhas (OK) e os dotados de vazios superficiais (I).

Tabela 6.2 Medições da Densidade do Poliuretano Rígido

CPs sem falhas superficiais		CPs com falhas	
Especificação do CP	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	Especificação do CP	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
OK1	28,400	I1	29,111
OK2	28,876	I2	28,573
OK3	28,769	I3	28,262
OK4	28,751	I4	29,280
OK5	28,369	I5	29,111
OK6	28,329	I6	29,671
Valor médio parcial – 28,582 kg/m <sup>3</sup>		Valor médio parcial – 29,002 kg/m <sup>3</sup>	
Desvio Padrão – 0,242 kg/m <sup>3</sup>		Desvio Padrão – 0,506 kg/m <sup>3</sup>	
<b>Média de todas as amostras – 28,792 kg/m<sup>3</sup></b>			

O valor médio determinado da densidade foi comparado com o levantamento de propriedades do Poliuretano produzido para a espumação de gabinetes no mês de Janeiro de 2003, durante o qual foram produzidos os produtos que tiveram fragmentos extraídos para experimentação, e foi considerado dentro do intervalo de variação admissível para esse valor.

## 6.2 Chapa Metálica

Abe e Almeida (2003 [26]) determinaram o módulo elástico da chapa de aço laminado utilizando o procedimento da norma NBR 6673, fabricando corpos de prova de tração simples com as dimensões mostradas na Figura 6.9 e extraídas na direção longitudinal, transversal e a 45° do eixo da bobina de origem.

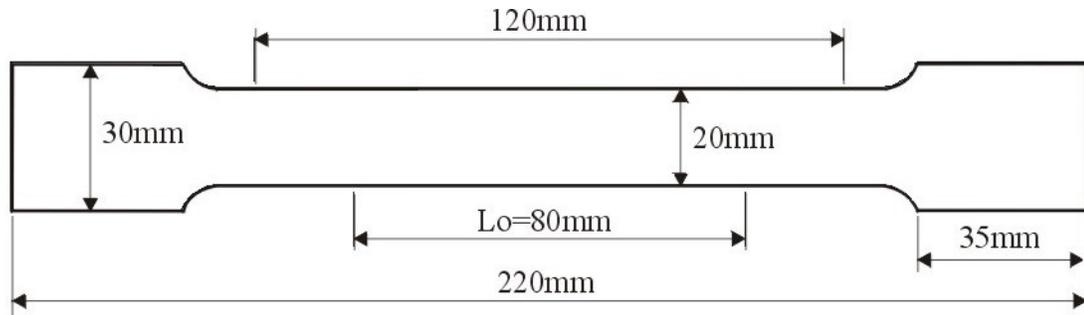


Figura 6.11 Descrição geométrica do corpo de prova de tração da chapa metálica

Como resultado do ensaio de tração na chapa metálica, obteve-se uma correlação entre forças e deformações. O módulo elástico é obtido através da expressão:

$$E = \frac{P}{\epsilon A} \quad (6.2)$$

onde:

P = carga aplicada (N)

A = área da seção transversal (m<sup>2</sup>)

$\epsilon$  = deformação longitudinal (adimensional)

Resulta então que o módulo elástico obtido por ensaio ficou em 209,6 GPa, obtendo regime de linearidade conforme mostra a Figura 6.10.

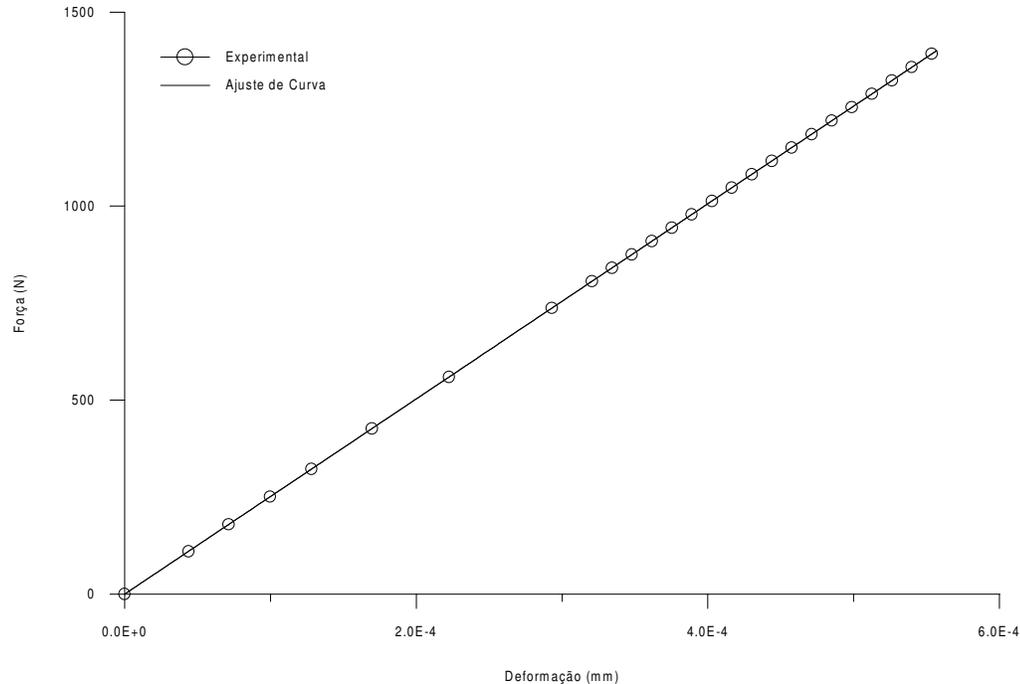


Figura 6.12 Correlação entre força e deformação obtidos no ensaio de tração no corpo de prova de aço SAE 1010 laminado.

## 6.3 Chapa de Poliestireno

### 6.3.1 Módulo de Elasticidade

A parte interior do gabinete de um refrigerador espumado, denominada *caixa interna*, é confeccionada pelo processo de termoformagem, onde uma chapa de material plástico obtida por meio de extrusão é aquecida e soprada de encontro a um molde que a conforma de acordo com o perfil desejado para um determinado modelo de produto. Para essa aplicação, tem sido empregado em larga escala o Poliestireno de Alto Impacto (PSAI ou HIPS – *High Impact Polystyrene*), devido principalmente à sua maleabilidade e custo reduzido em relação a outros materiais como o ABS.

Para caracterizar experimentalmente este material, utilizou-se o ensaio de tração. A norma técnica ASTM D638 [27] especifica os requisitos necessários para a obtenção por ensaio de tração das características mecânicas de materiais injetados, sendo adotada como procedimento-base devido ao fato de não ter sido localizado procedimento equivalente para materiais termoformados. A geometria do corpo de

prova utilizado consta da Figura 6.13:

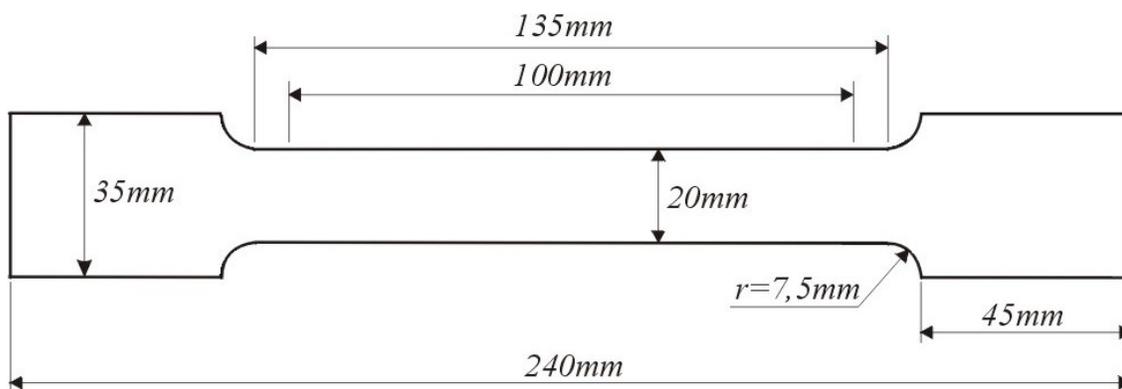


Figura 6.13 Corpo de prova utilizado no ensaio de tração para o PSAI. Espessura = 1,6 mm

Utilizando-se uma máquina universal de tração da marca EMIC com célula de carga para até 2000 N, foram ensaiados seis corpos de prova com velocidade de ensaio de 5 mm/min. O módulo de elasticidade foi obtido através da extração do coeficiente angular da região de linearidade do gráfico tensão-deformação, conforme mostram as Figuras 6.14 e 6.15 para um dos corpos de prova:

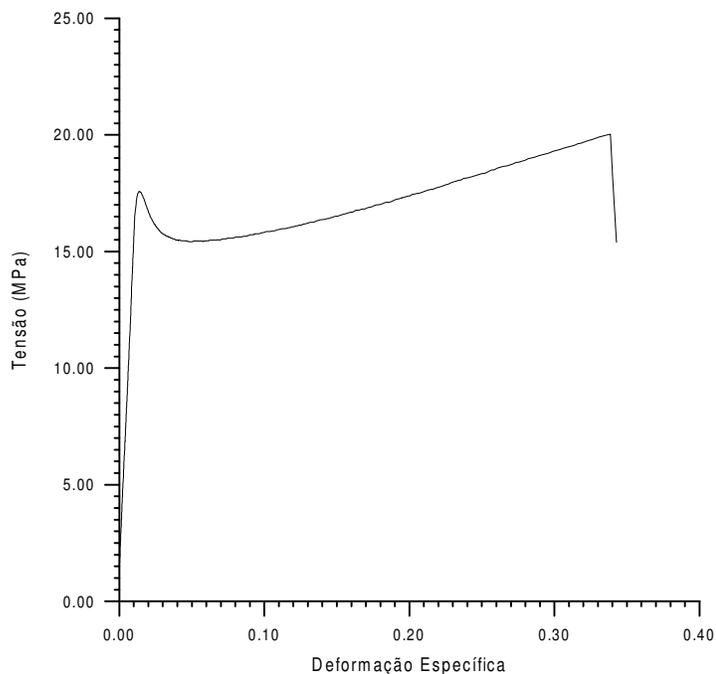


Figura 6.14 Curva tensão-deformação para o corpo de prova de PSAI

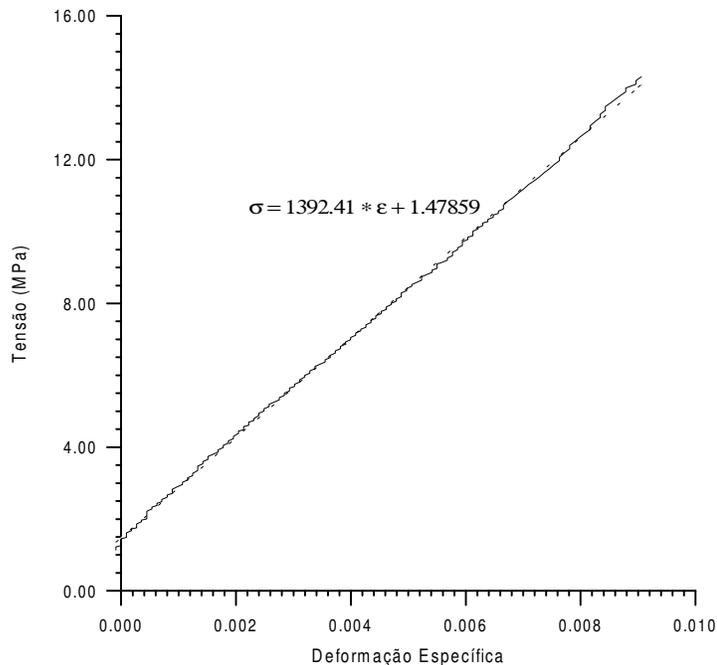


Figura 6.15 Extração da região de linearidade do gráfico da Fig. 6.14, com ajuste da equação da reta

Cabe lembrar que o resíduo constante da equação da reta da Figura 6.15 diz respeito a uma pré-tensão induzida por um deslocamento inicial do extensômetro da máquina de tração, uma característica inerente do sistema a qual não foi possível eliminar durante o ensaio.

A Tabela 6.3 mostra os valores do módulo de elasticidade obtidos para todos os corpos de prova, além do valor médio e do desvio padrão encontrado. Das seis medições, uma foi excluída por ser considerada discrepante das demais.

Tabela 6.3 Medições do Módulo de Elasticidade do PSAI

Corpo de Prova	Módulo de Elasticidade (GPa)
1	1,392
2	1,388
3	1,439
4	1,399
5	1,409
<b>Valor médio – 1,405 GPa</b>	
Desvio Padrão – 0,018 GPa	

### 6.3.2 Densidade

A norma técnica ASTM D792 [28] prescreve um método de ensaio para a determinação da densidade de plásticos por meio do deslocamento de um volume de líquido quando da imersão do material em análise nesse. A massa do corpo de prova é primeiramente determinada na atmosfera, e logo após o mesmo é imerso em um líquido (água, para o método utilizado neste trabalho). Sua massa aparente sob imersão é medida, e sua gravidade específica, que constitui a razão entre a massa do corpo de prova na atmosfera e a massa de um mesmo volume de água destilada na mesma condição atmosférica, é determinada, donde se obtém o valor da densidade pela multiplicação por uma constante referente ao valor da densidade da água a 23°C. Utilizando este procedimento, seis corpos de prova foram medidos e os resultados constantes da Tabela 6.4 foram obtidos:

Tabela 6.4 Medições da Densidade do PSAI

Corpo de Prova	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
1	1059,6
2	1069,1
3	1060,1
4	1059,3
5	1060,3
6	1062,8
<b>Valor médio - 1061,9 kg/m<sup>3</sup></b>	
Desvio Padrão - 3,8 kg/m <sup>3</sup>	

## Capítulo 7

# Resultados Numéricos e Experimentais

### 7.1 Sistema de medição para vibração livre de vigas

#### 7.1.1 Condição “*Free-Free*”

As vigas “*sandwich*” avaliadas experimentalmente foram extraídas diretamente de gabinetes de refrigeradores domésticos novos, sem uso anterior que viesse a despertar suspeita sobre atuação de gradientes de temperatura, carregamentos de longa duração que induzissem deformações viscoelásticas em condições de produção normais e épocas de montagem próximas para evitar que variáveis de processo sujeitas à variação diária pudessem influir decisivamente nas propriedades mecânicas do conjunto.

Para avaliar a vibração livre das amostras, escolheu-se primeiramente a condição “*free-free*”. Uma bancada didática de testes de vibração foi utilizada de forma a prover uma base rígida o suficiente para que não houvesse suspeitas no tocante à possibilidade de amortecimento do sistema por parte desta estrutura. Também, os corpos de prova permaneceram suspensos por elásticos durante o ensaio. A Figura 7.1 mostra uma foto do equipamento.

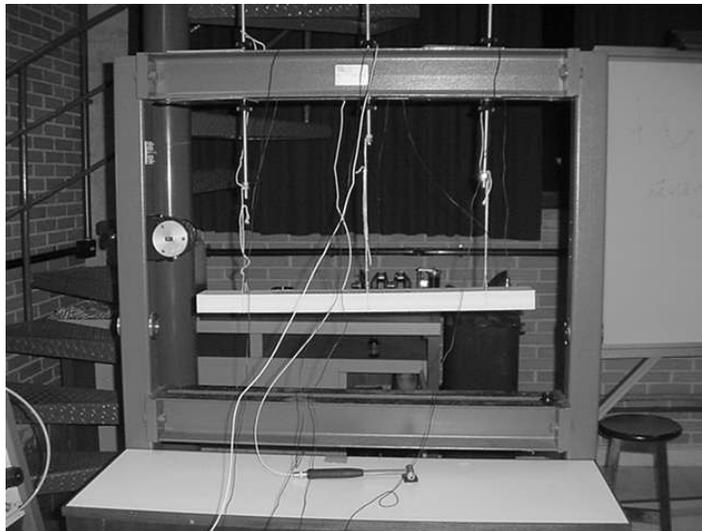


Figura 7.1 Bancada de teste, com uma amostra de viga “sandwich” suspensa por três elásticos e equipada com acelerômetros. Na parte inferior, vê-se o martelo de impacto.

A Figura 7.2 mostra um esquema do sistema de medição de vibrações. A viga suspensa na bancada foi equipada com acelerômetros PCB modelo 353B18, de reduzida massa (1,8 g) [30] e que desta forma não adicionariam elementos de inércia ao sistema. Também, um martelo de impacto PCB modelo 086C03 foi utilizado para impor uma excitação impulsiva na viga. Os sinais foram adquiridos por um analisador de sinais de 16 canais Hewlett-Packard modelo 3566, cujo *software* de pós-processamento foi regulado para produzir a Função Resposta em Freqüência da amostra.

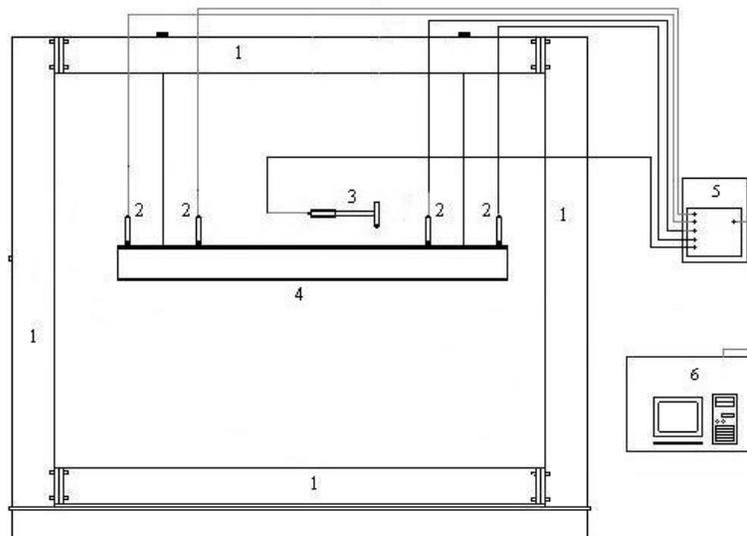


Figura 7.2 Esquema da bancada, onde: 1 – Estrutura da bancada 2 – Acelerômetros 3 – Martelo de Impacto 4 – Viga “sandwich” 5 – Analisador de Sinais 6 – Microcomputador PC

O posicionamento dos acelerômetros foi determinado de maneira a comparar pontos de deslocamento determinado referente ao modo de vibrar, a saber deslocamento máximo, sendo modificados para cada modo natural. Da mesma forma, os pontos de apoio da viga situam-se nos pontos de deslocamento nulo. A Figura 7.3 mostra o arranjo de sensores para a avaliação do terceiro modo natural

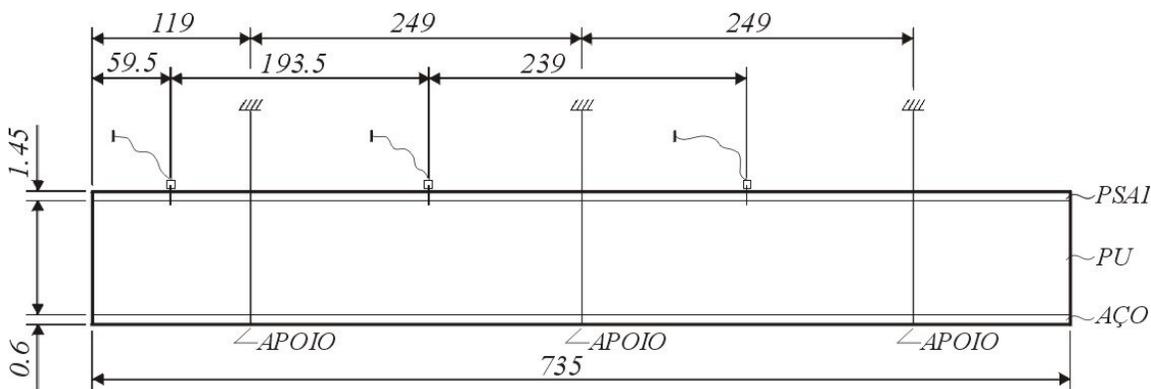


Figura 7.3 Arranjo de acelerômetros para o levantamento do terceiro modo natural na configuração *free-free* (medidas em mm)

Além da resposta em frequência, a coerência foi também determinada como utilitário para a avaliação da confiabilidade da medição. A explicação do conceito de coerência vem a seguir (Iglesias, 2000 [23]).

Sendo a Função Resposta em Frequência a relação mostrada abaixo:

$$H = \frac{\sum_{k=1}^F X_k^* Y_k}{\sum_{k=1}^F X_k^* X_k} = \frac{\sum_{k=1}^F G_{xy}}{\sum_{k=1}^F G_{xx}} \quad (7.1)$$

onde  $X$  é o sinal de excitação e  $Y$  é o sinal de saída, e o asterisco indica complexo conjugado, a coerência (ou função de coerência) é expressa por:

$$\gamma_{xy}^2 = \frac{\sum_{k=1}^F G_{xy} \sum_{k=1}^F G_{yx}}{\sum_{k=1}^F G_{xx} \sum_{k=1}^F G_{yy}} \quad (7.2)$$

Em termos mais simples, a coerência é a fração do sinal de saída inteiramente relacionada ao sinal de entrada, e possui um valor entre 0 e 1. Quando o valor é igual a 1, isso indica que  $G_{nn} = 0$ , o que diz que não há conteúdo não-correlacionado na resposta da medição e as frequências naturais nesse caso são inteiramente excitadas pelo sinal de entrada. Do lado oposto, quando a coerência é nula há a indicação de que  $G_{nn} = G_{yy}$ , o que sugere que a medição de saída é composta inteiramente de medidas não-correlacionadas com o sistema, o que pode se dever às seguintes causas:

- Medidas contaminadas por ruído;
- Não-linearidades presentes no sistema em análise, e
- Perda por presença de sinal não periódico.

Os resultados para a FRF e a coerência podem ser visualizados nas Figuras 7.4 a 7.9, onde estão representados respectivamente o segundo e terceiro modos naturais.

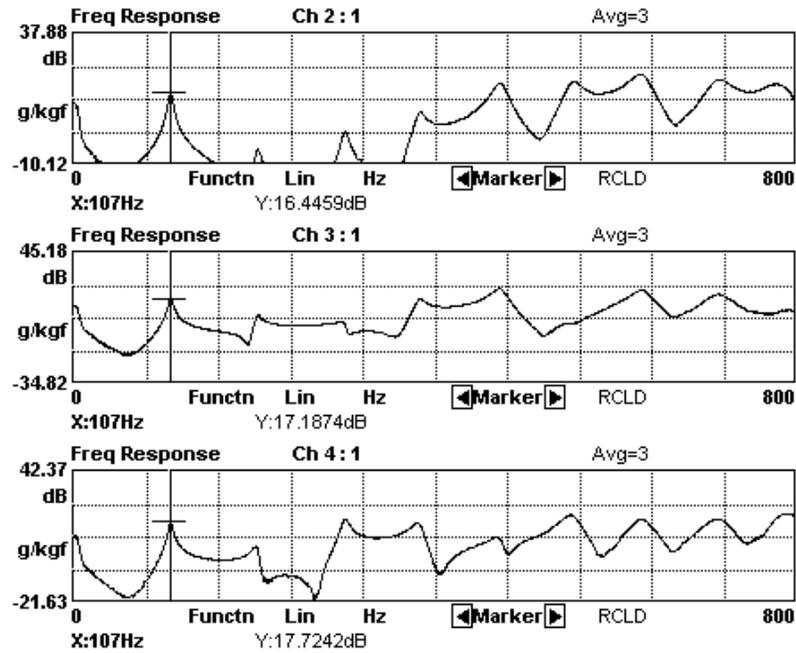


Figura 7.4 Função Resposta em Frequência para o 2º modo natural experimental

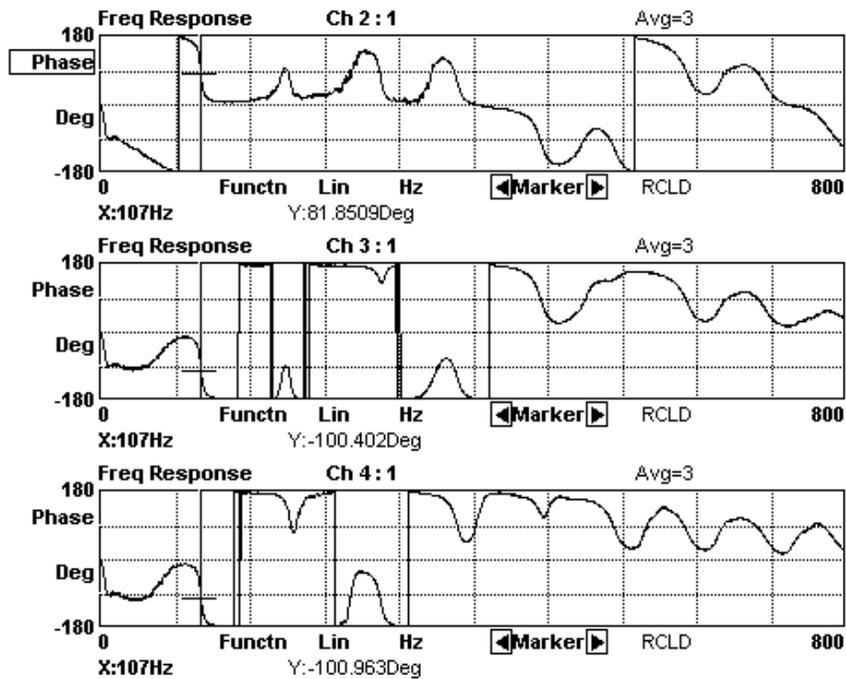
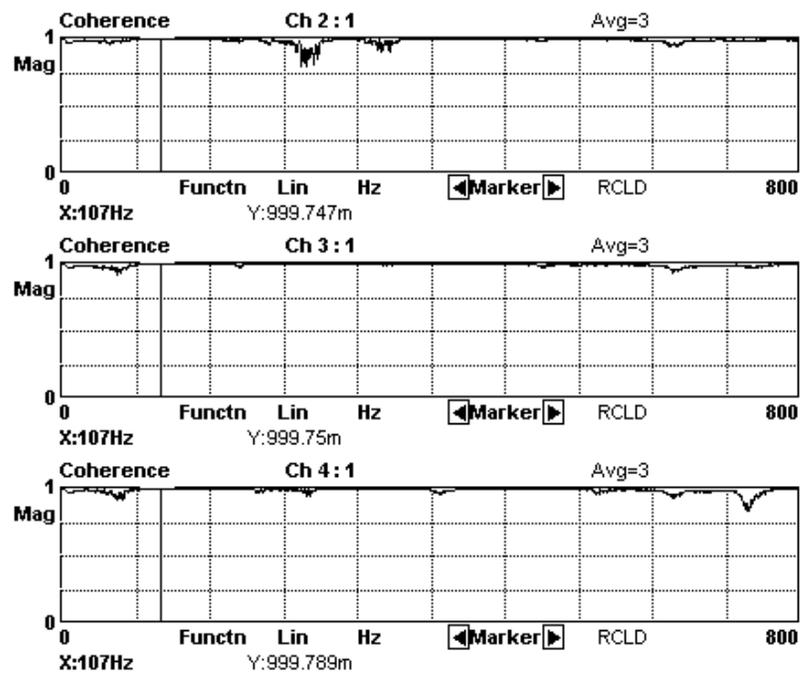


Figura 7.5 Ângulo de fase para o 2º modo natural experimental



(c)

Figura 7.6 Coerência para o 2º modo natural experimental

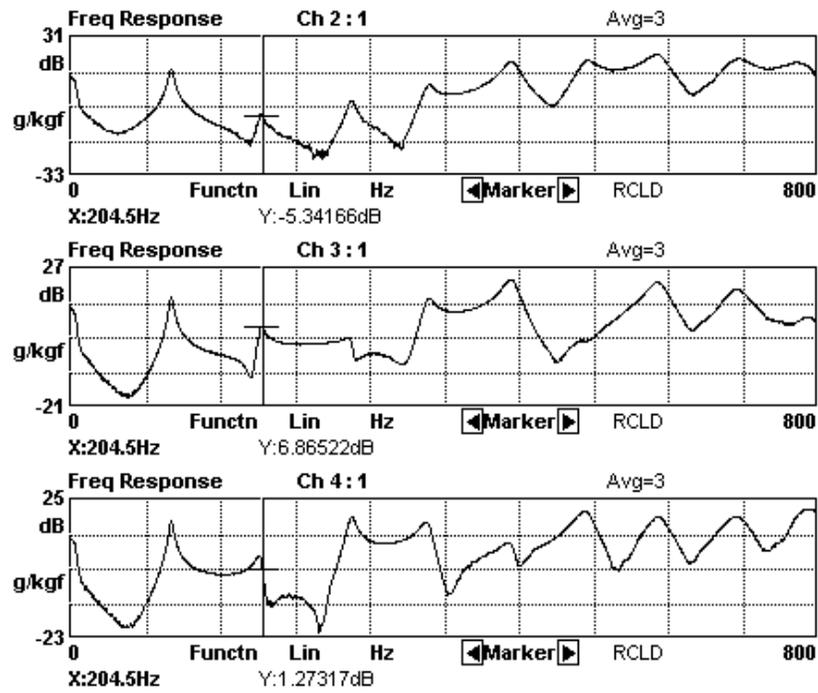


Figura 7.7 Função Resposta em Freqüência para o 3º modo natural experimental

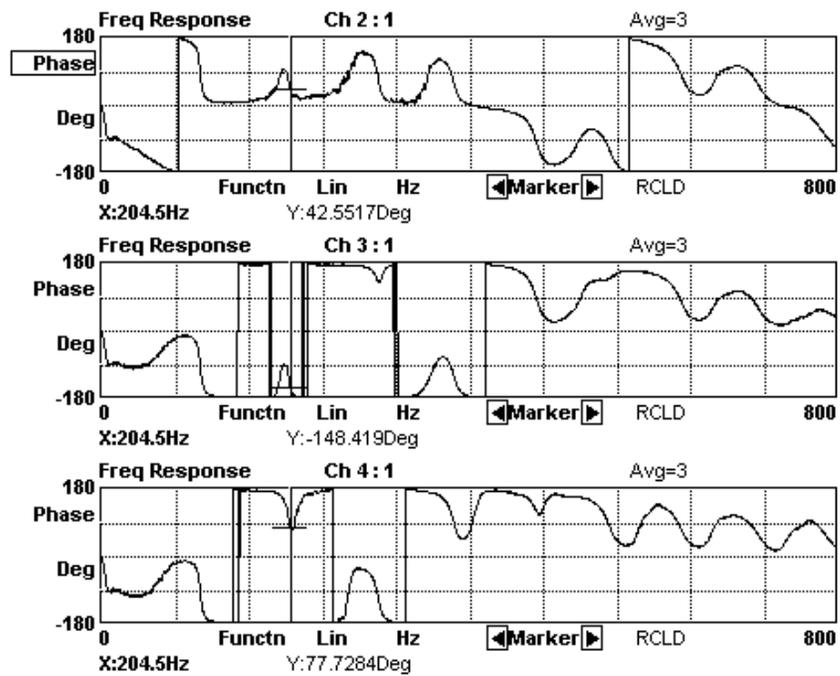


Figura 7.8 Ângulo de Fase para o 3º modo natural experimental

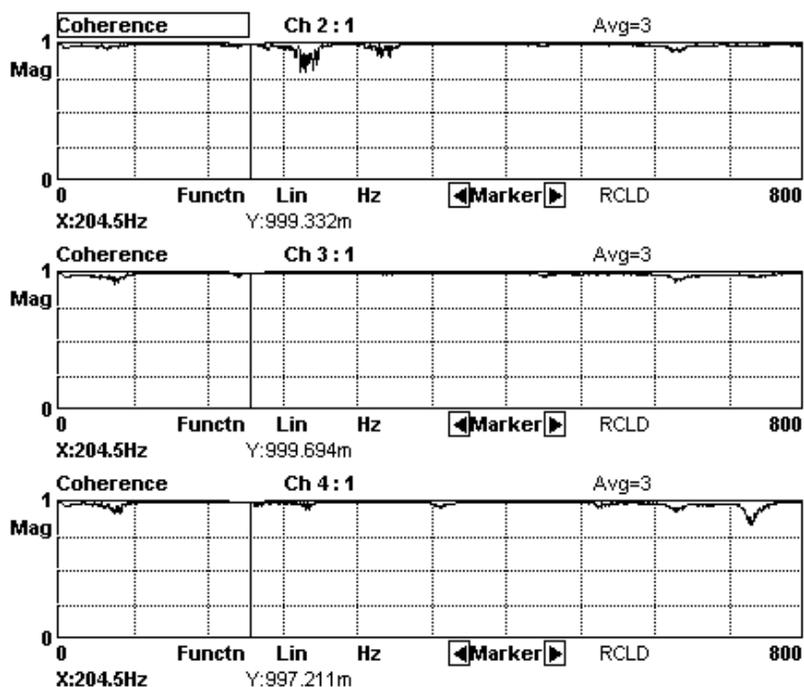


Figura 7.9 Coerência para o 3<sup>o</sup> modo natural experimental

Os resultados obtidos foram então comparados com simulações executadas nas rotinas desenvolvidas e descritas anteriormente (Mead-Markus e Timoshenko) com as características dos materiais obtidos da experimentação citada no tópico anterior, e com uma malha de 80 elementos para ambas. Para a análise pela formulação de Mead-Markus ainda foram prescritas condições de contorno determinadas nas extremidades, a saber deslocamentos das faces e rotação da seção transversal nulos. Foi também utilizado um modelo construído no *software* comercial ALGOR® com o elemento padrão do programa denominado *sandwich*, com malha confeccionada de acordo com os parâmetros citados na Seção 4.4 para a comparação dos resultados analíticos. Também foi utilizado um modelo deste mesmo aplicativo considerando um elemento denominado 2D, que aplica as condições clássicas da Teoria da Elasticidade e é caracterizado por três grupos de elementos distintos, cada qual dizendo respeito aos materiais PSAI, PU e aço, respectivamente. Como forma de evitar os erros advindos do regime linear elástico, o modelo teve um maior refinamento de sua malha, como pode ser visto na Figura 7.6:

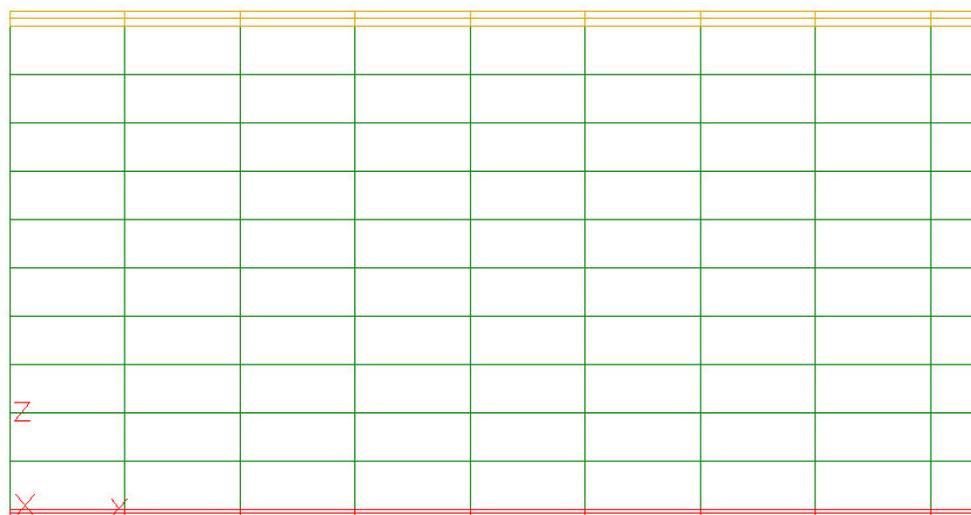


Figura 7.10 Detalhe da malha utilizada no elemento 2D do ALGOR®, para a configuração “free-free”, com a camada superior em PSAI e a inferior sendo a chapa de aço

A Tabela 7.1 mostra o comparativo de resultados obtidos para a configuração *free-free*:

Tabela 7.1 Comparação dos resultados experimentais com resultados numéricos para as frequências naturais na configuração “Free-Free” (rotinas em FORTRAN e modelo construído no ALGOR® com elementos *sandwich* e 2D)

Modo	Medição (Hz)	Numérico (Hz)		ALGOR® (Hz)		Erro (%)			
		MM	Timo	Sand	2D	Numérico		ALGOR®	
						MM	Timo	Sand	2D
1	-	60,65	60,64	60,05	-	N/A	N/A	N/A	N/A
2	107	118,30	122,23	120,07	96,80	10,56	14,23	12,21	10,54
3	204,5	194,90	191,78	180,04	181,39	4,92	6,63	13,58	12,74

Os três primeiros modos naturais da viga “free-free” para os resultados numéricos obtidos são mostrados graficamente nas Figuras 7.6 a 7.8, juntamente com os pontos de medição experimentais, em sua localização equivalente nos corpos de prova.

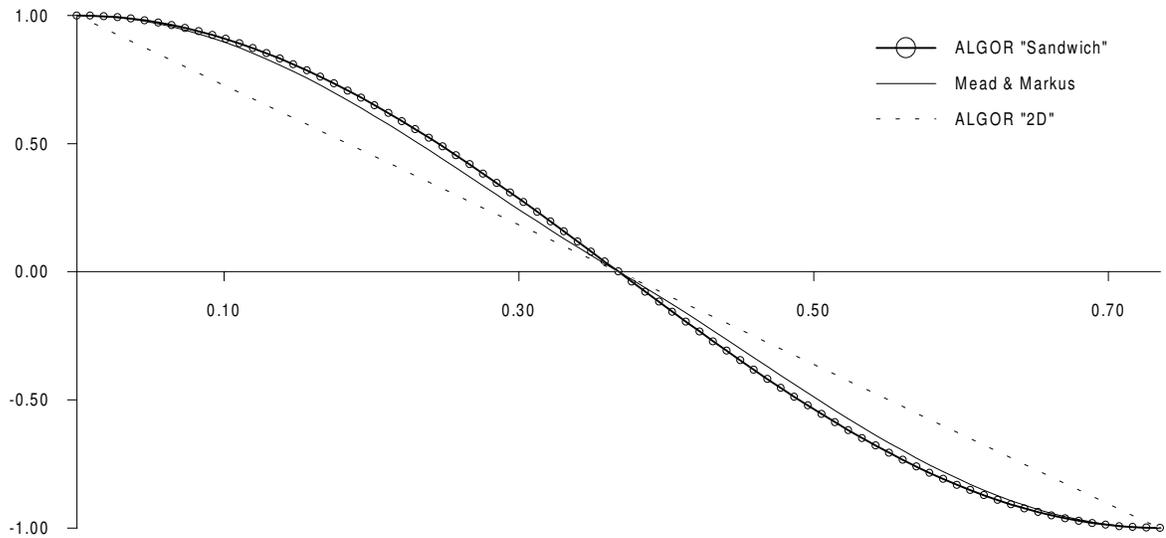


Figura 7.11 Comparativo do primeiro modo natural, configuração "free-free": resultados numéricos

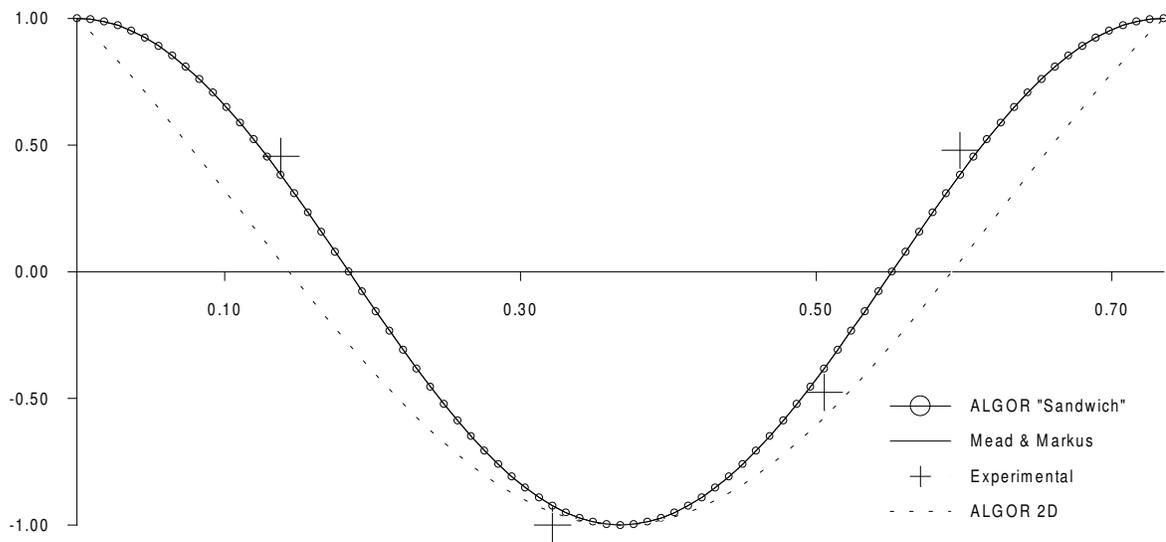


Figura 7.12 Comparativo do segundo modo natural, configuração "free-free": resultados numéricos X pontos de medição experimental

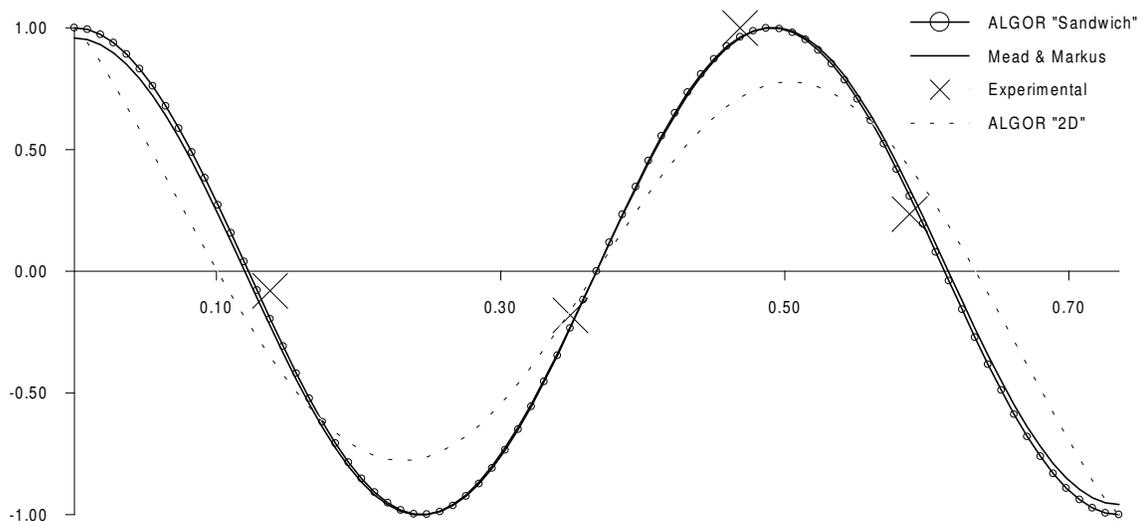


Figura 7.13 Comparativo do terceiro modo natural, configuração “free-free”: resultados numéricos X pontos de medição experimental

### 7.1.2 Condição Engastada

Avaliando a seguir a configuração de apoio engastado para a viga, visou-se aproximar o engaste da condição mais próxima da ideal, qual seja valores nulos para o deslocamento e a rotação da seção transversal no engaste. Chegou-se então à configuração ilustrada na Figura 7.14, onde o corpo de prova foi preso por meio de uma caixa de concreto. Tal proposta, além de atender às condições de contorno prescritas, foi escolhida por apresentar menor risco de esmagamento do núcleo de poliuretano, o que foi cogitado no caso de engastamento por meio de elementos de fixação convencionais como parafusos, que poderiam produzir o fenômeno denominado indentação, que é o colapso das células advindo da produção de reentrâncias no material (Vilar, 1998 [31]).



Figura 7.14 Engaste produzido no corpo de prova por meio de forma de concreto

A Figura 7.15 mostra a disposição dos acelerômetros utilizada para o levantamento modal experimental.

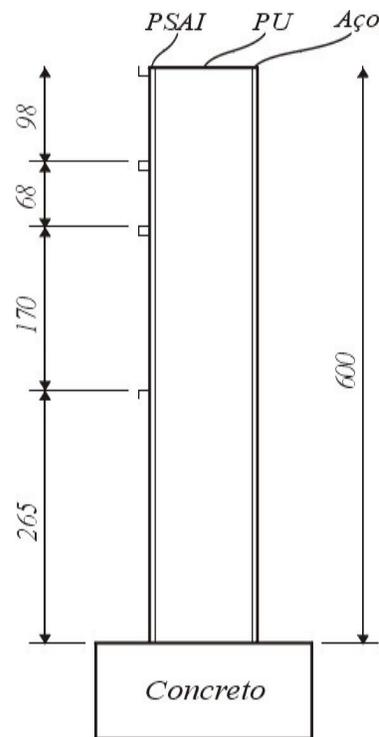


Figura 7.15 Arranjo de acelerômetros para a experimentação na configuração engastada (medidas em mm)

Utilizando a mesma instrumentação descrita na Figura 7.2 com exceção da bancada, três amostras foram submetidas a excitação implusiva por meio do martelo de impacto. Da mesma maneira a comparação com os métodos numéricos foi efetuada, os resultados podendo ser visualizados na Tabela 7.2:

Tabela 7.2 Comparação dos resultados experimentais com resultados numéricos para as frequências naturais na configuração engastada (rotinas em FORTRAN e modelo construído no ALGOR® com elementos *sandwich* e 2D)

Modo	Medição (Hz)	Numérico (Hz)		ALGOR® (Hz)		Erro (%)			
		MM	Timo	<i>Sand.</i>	2D	Numérico		ALGOR®	
						MM	Timo	<i>Sand.</i>	2D
VIGA 1									
1	25,51	18,11	25,31	27,70	26,84	40,86	0,79	-8,58	-5,21
2	103,17	72,62	95,02	94,00	112,69	42,07	8,58	9,75	-9,23
3	205,92	150,46	192,42	182,26	247,07	36,86	7,02	12,98	19,98
VIGA 2									
1	25,22	18,11	25,31	27,70	26,84	39,26	-0,36	-8,95	-6,42
2	108,87	72,62	95,02	94,00	112,69	49,91	14,58	15,82	-3,51
3	220,63	150,46	192,42	182,26	247,07	46,63	15,66	21,05	-11,98
VIGA 3									
1	27,16	18,11	25,31	21,71	26,84	49,97	7,31	25,10	1,19
2	112,12	72,62	95,02	82,96	112,69	54,39	18,00	35,15	-0,51
3	230,35	150,46	192,42	168,91	247,07	53,09	19,71	36,37	-7,25

Cabe salientar que a viga 3 possuía diferença de 5 mm em sua largura, o que implicou em resultados diferenciados para a análise por meio do ALGOR® e somente para o elemento *sandwich*. No entanto, tal diferença só acarretou mudança nos resultados numéricos a partir da quarta casa decimal, não sendo então caracterizada na tabela acima.

O elemento 2D citado na tabela acima foi utilizado da mesma maneira que no conteúdo constante de 7.1.1. A Figura 7.10 mostra um detalhe do modelo.

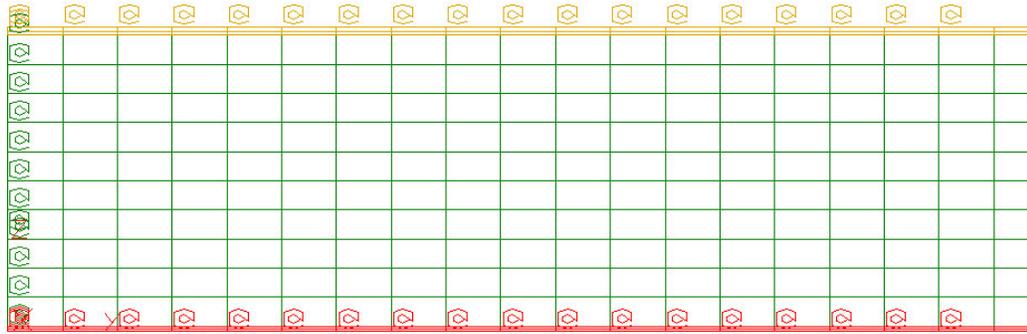


Figura 7.16 Detalhe do engastamento produzido no modelo 2D do ALGOR® para a análise da viga (o símbolo @ indica um ponto de engaste)

As Figuras 7.11 a 7.13 ilustram a FRF e a coerência para os três primeiros modos naturais da viga engastada na análise experimental.

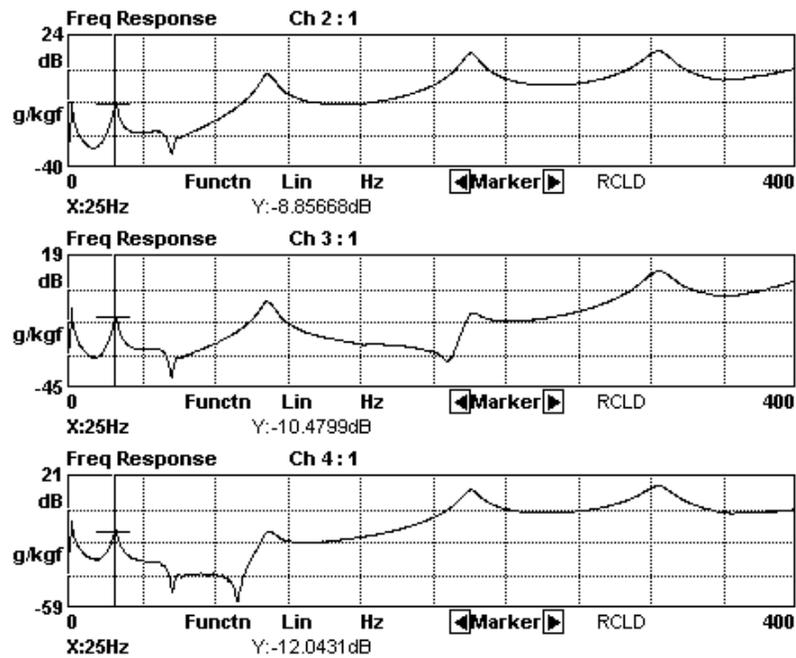


Figura 7.17 Função Resposta em Freqüência para o 1º modo natural experimental – Configuração Engastada

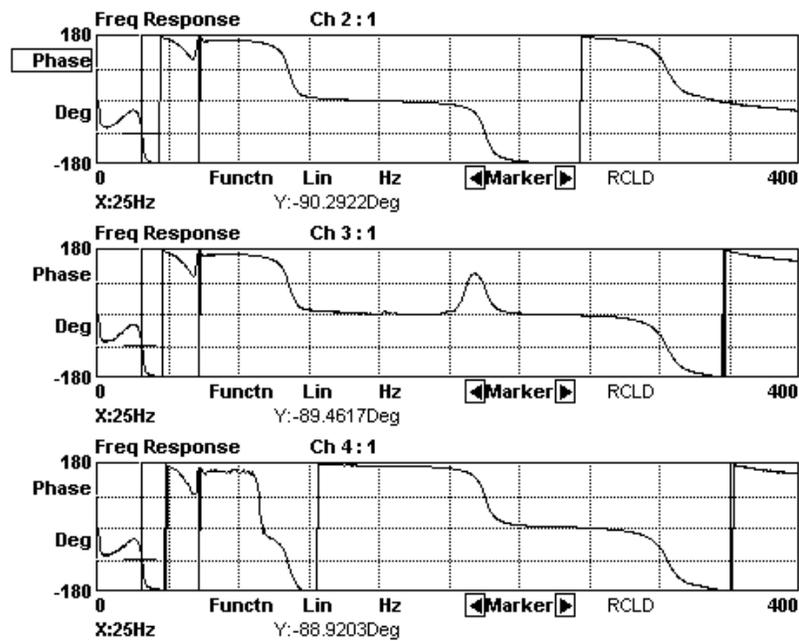


Figura 7.18 Ângulo de Fase para o 1º Modo Natural Experimental – Configuração Engastada

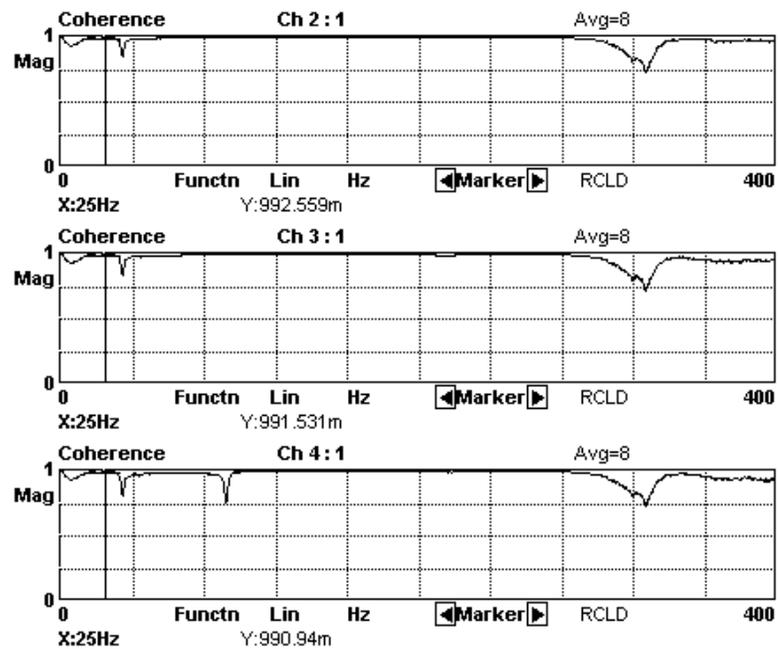


Figura 7.19 Coerência para o 1º modo experimental – Configuração Engastada.

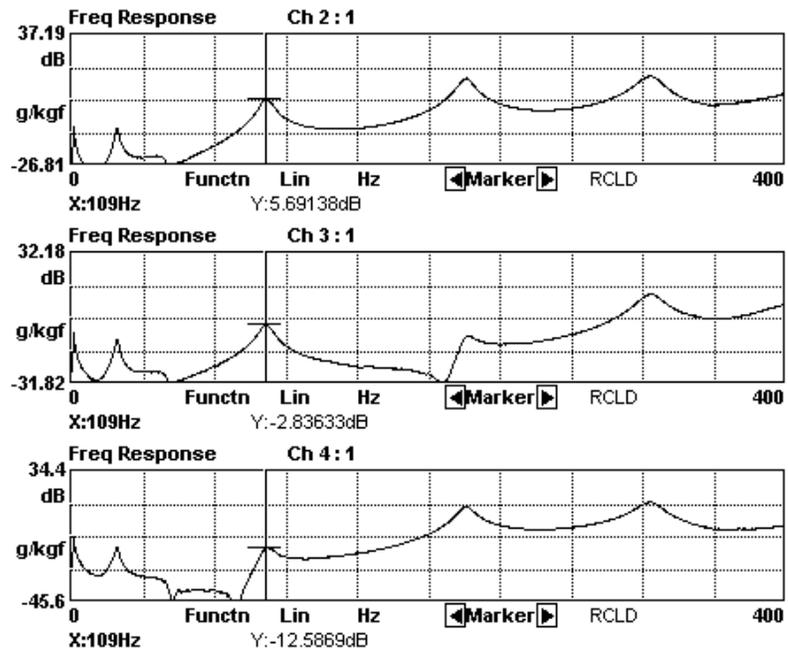


Figura 7.20 Função Resposta em Frequência para o 2º modo natural experimental – Configuração Engastada

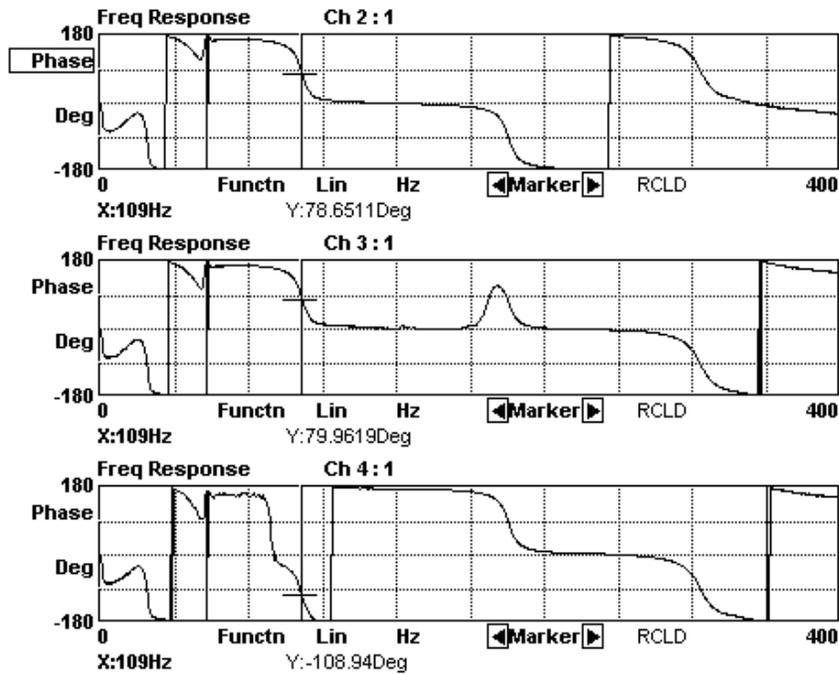


Figura 7.21 Ângulo de Fase para o 2º modo natural experimental – Configuração Engastada

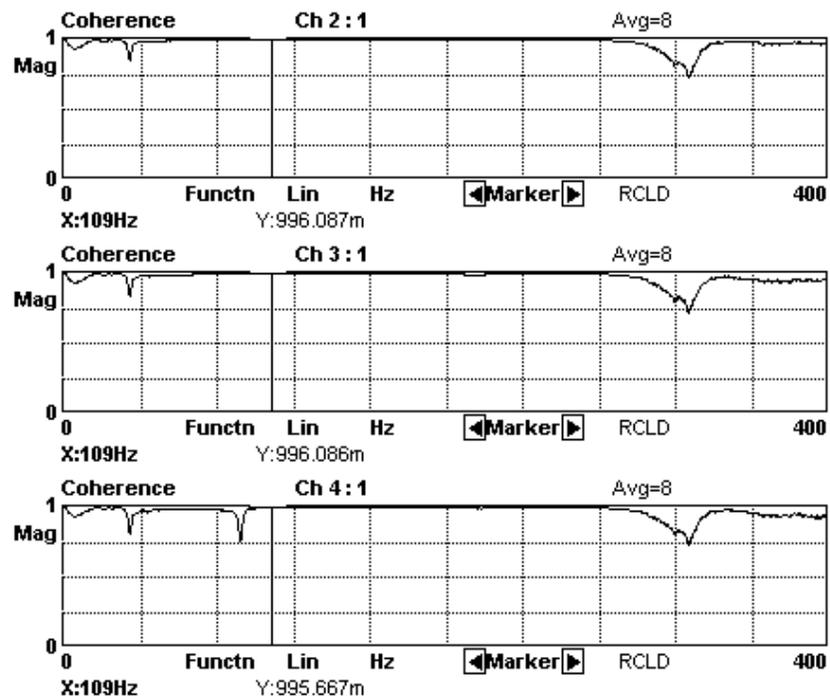


Figura 7.22 Coerência para o 2º modo experimental – Configuração Engastada.

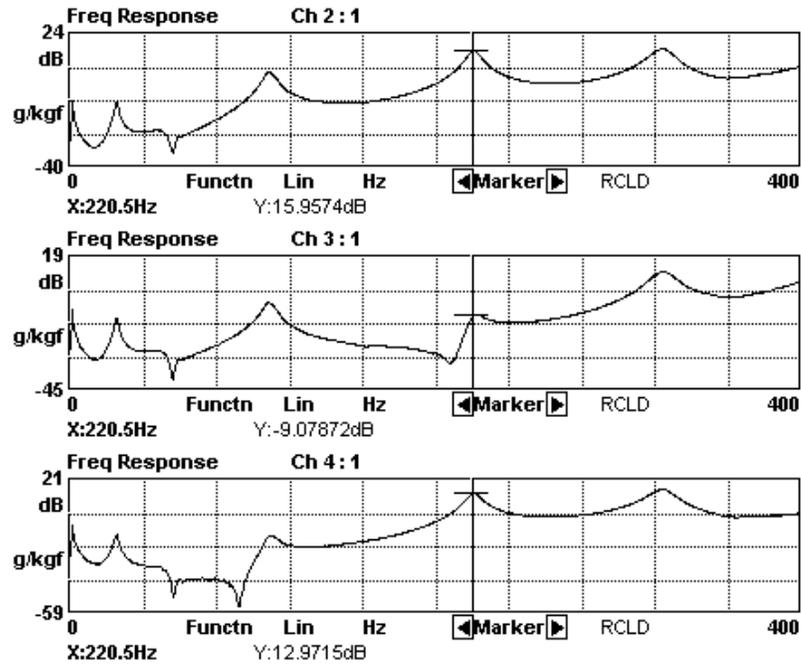


Figura 7.23 Função Resposta em Freqüência para o 3º modo natural experimental – Configuração Engastada

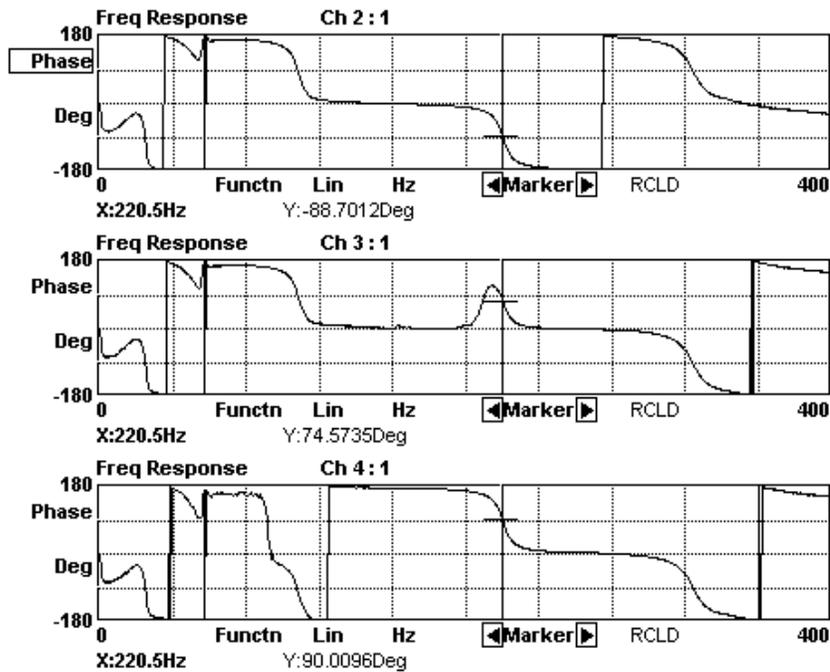
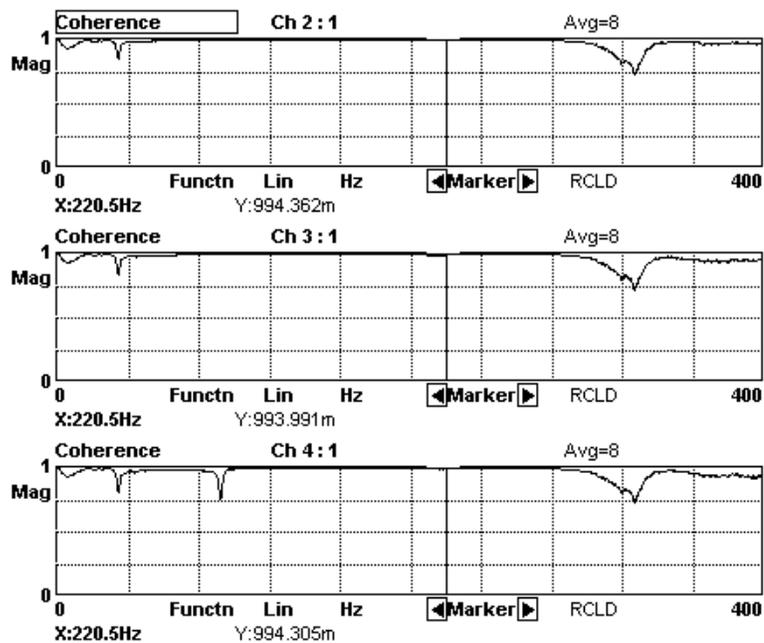


Figura 7.24 Ângulo de Fase para o 3º modo natural experimental – Configuração Engastada



(c)

Figura 7.25 Coerência para o 3º modo experimental – Configuração Engastada.

Os modos de vibrar estão ilustrados de maneira comparativa, a exemplo da configuração *free-free*, nas Figuras 7.14 a 7.16.

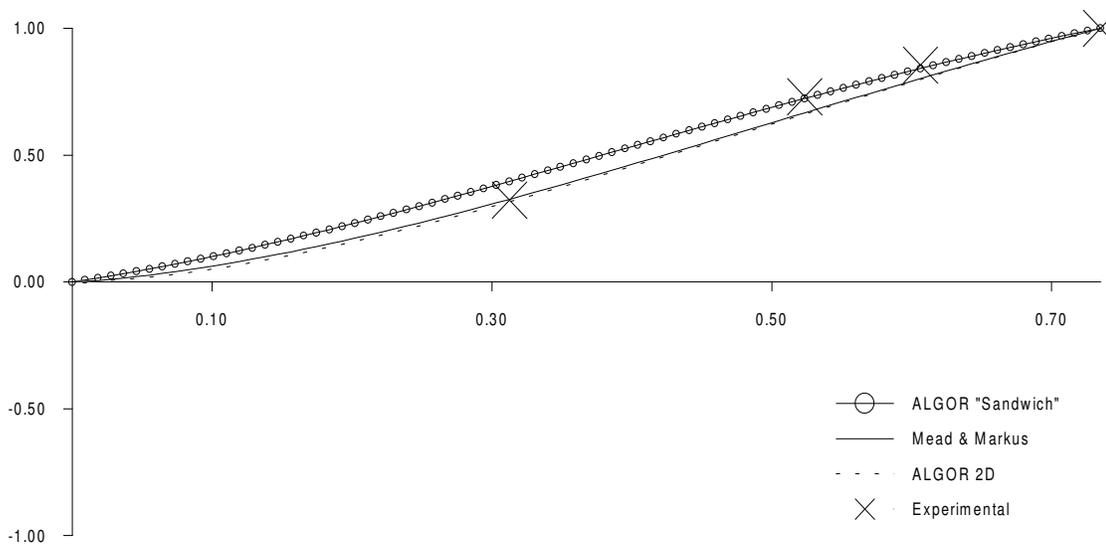


Figura 7.26 Comparativo do primeiro modo natural, configuração engastada: resultados numéricos X pontos de medição experimental

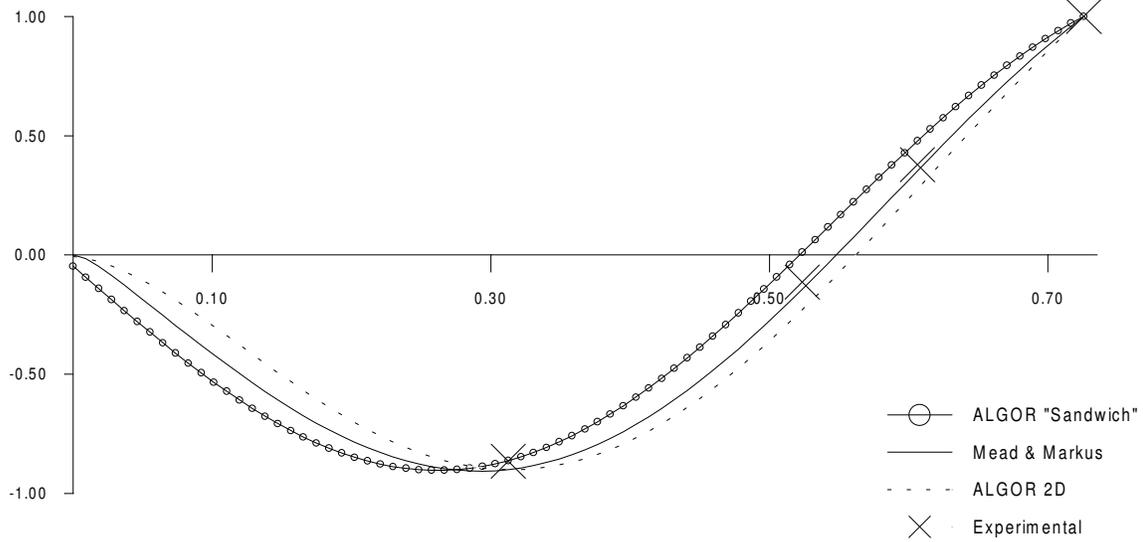


Figura 7.27 Comparativo do segundo modo natural, configuração engastada: resultados numéricos X pontos de medição experimental

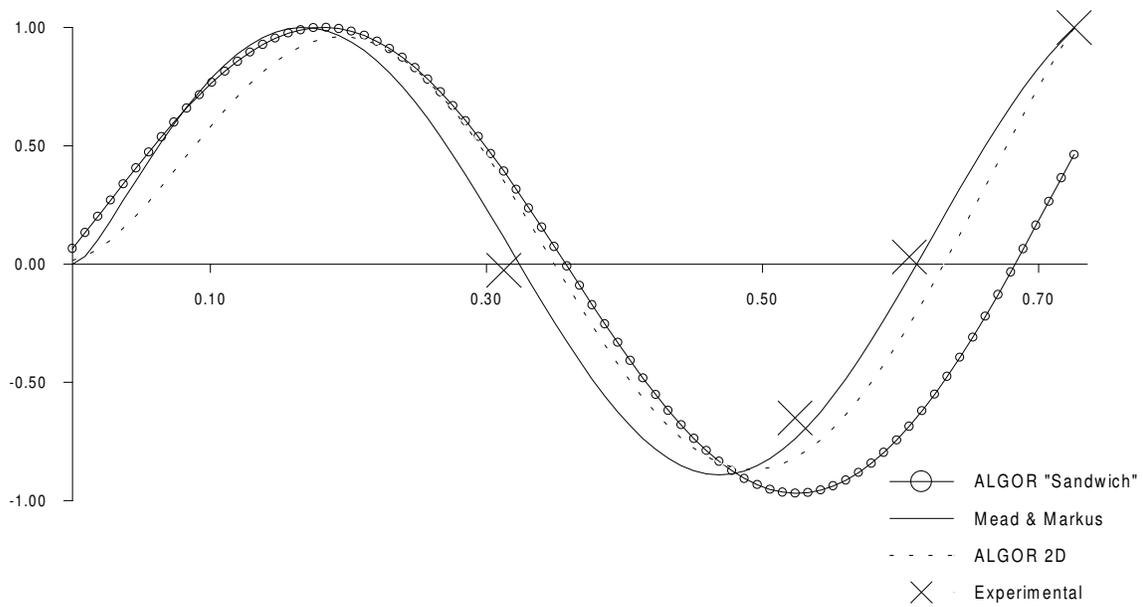


Figura 7.28 Comparativo do terceiro modo natural, configuração engastada: resultados numéricos X pontos de medição experimental

Diante dos melhores resultados obtidos para a configuração engastada do que para a configuração “*free-free*” no comparativo entre os métodos numéricos e a experimentação, aplicou-se aí o método RFP para o levantamento do fator de amortecimento do compósito. Os resultados foram os constantes da Tabela 7.3.

Tabela 7.3 Fator de amortecimento  $\xi$  para viga “*sandwich*” na configuração engastada

Modo	Fator de amortecimento $\xi$				Desv. Pad. Percentual (%)
	Viga 1	Viga 2	Viga 3	<b>Média</b>	
1	0,0518	0,0439	0,0646	<b>0,0534</b>	15,91
2	0,0213	0,0302	0,0269	<b>0,0261</b>	14,17
3	0,0155	0,0183	0,0180	<b>0,0172</b>	7,55

## Capítulo 8

# Conclusão e Sugestões para Trabalhos Futuros

A seguir são comentados alguns aspectos dos capítulos apresentados anteriormente neste trabalho, assim como são relacionadas sugestões para o prosseguimento da linha de pesquisa proposta pelo mesmo.

Nos capítulos 2 e 3, foi apresentada a implementação de um material elástico entre duas lâminas que acaba por proporcionar um aumento considerável de rigidez, o chamado efeito “*sandwich*”. Desde a análise de tensões para faces simétricas até a evolução para faces assimétricas, passando pela determinação do campo de deslocamentos, que remonta ao conteúdo da teoria de Mindlin, é possível verificar que o conteúdo matemático que envolve a análise das vigas “*sandwich*” é acessível, devendo ser feita a mesma consideração quando se diz respeito à obtenção da equação do movimento, que adota os difundidos preceitos da teoria de Timoshenko.

No capítulo 4, pode-se notar que a aplicação do Método dos Elementos Finitos é também de simples compreensão àqueles que possuem familiaridade com tais conceitos. A partir de dois caminhos familiares, a saber, o Princípio de Hamilton e o Método de Galerkin, foi possível a formulação de dois elementos com número de graus de liberdade suficientes para reproduzir a situações encontradas em solicitações mecânicas para vigas. O capítulo atesta também a efetividade das formulações propostas, ao ilustrar resultados bastante semelhantes e de boa

aproximação aos encontrados nas referências da literatura. Neste capítulo, a descrição das rotinas desenvolvidas mostra também a utilização de métodos computacionais populares, e que culminaram na produção de programas de boa estabilidade e rápida execução e convergência. Deve-se notar a diferença encontrada para alguns resultados na formulação de Mead & Markus, que resultaram em um elemento mais rígido, o que se justifica pela própria natureza da formulação para o campo de deslocamentos, a partir de um polinômio de primeira ordem. No Capítulo 5, mostrou-se de maneira resumida os métodos mais divulgados para identificação de parâmetros modais, dando-se com efeito especial menção ao Método dos Polinômios em Frações Racionais, que foi usado para a determinação dos parâmetros para este trabalho.

No capítulo 6, apresenta-se a determinação em testes de laboratório das propriedades mecânicas necessárias à validação numérica de resultados demonstra a preocupação com a veracidade dos resultados; deve-se destacar a boa repetibilidade de resultados do módulo de cisalhamento do Poliuretano entre peças com e sem falhas superficiais, o que à primeira vista se considerou como possível fonte de variação dessas propriedades pela falta de homogeneidade do material provocada por aquelas falhas. Tal consideração deve ser repetida ao se tratar da densidade do poliuretano, que se revelou dentro dos valores esperados, ainda mais pela consideração inicial que as descontinuidades significavam redução da massa do corpo de prova. Por fim, no capítulo 7 constatou-se a eficiência de praticamente todos os conteúdos anteriores, com resultados experimentais apresentando similaridade aos valores numéricos. Deve-se considerar o fato de não ter sido possível reproduzir experimentalmente um dos modos naturais fornecido pelo aplicativo ALGOR® para o elemento *sandwich*, mas que acabou também não sendo reproduzido para o elemento 2D representativo da Teoria da Elasticidade, o que levanta a hipótese de uma possível limitação dos elementos para materiais compósitos em fornecer dados de saída condizentes com a realidade do sistema. Em vista da condição “*free-free*” apresentar tais limitações, optou-se pela configuração engastada, que reproduziu com boa proximidade as condições ideais prescritas numericamente, e que culminou nas diferenças encontradas entre os experimentos e sua validação numérica, a despeito da variação entre os corpos de prova para essa configuração. A grande

diferença para esta configuração na formulação Mead & Markus se deve às razões citadas anteriormente no que diz respeito ao campo de deslocamentos proposto. Também foram levadas em conta principalmente a eventual variação das propriedades do poliuretano e a maior ou menor quantidade de vazios existentes dentre os corpos de prova, além das imperfeições encontradas na interface entre as lâminas das faces e a espuma (Figuras 6.6 e 6.7) que contrariam a continuidade de tensões prescritas nos modelos numéricos, tanto os desenvolvidos neste trabalho como os elementos utilizados no aplicativo comercial ALGOR®.

Para a realização de trabalhos futuros na linha de pesquisa do compósito aço laminado-poliuretano rígido-poliestireno, pode-se relacionar as propostas abaixo:

- A avaliação do efeito viscoelástico oriundo de cargas estáticas de longa duração, quesito de extrema utilidade em campos como por exemplo a avaliação da deformação de gabinetes espumados de refrigeradores, fenômeno notadamente causado por tal efeito;

- A caracterização da associação supracitada no tocante à viscoelasticidade dinâmica, sendo sugerida neste caso a avaliação experimental da variação das propriedades mecânicas com a frequência e a aplicação de métodos numéricos citados neste trabalho no auxílio a esta tarefa, como por exemplo o método GHM (McTavish e Hughes, 1993 [8]);

- A consideração do funcionamento de refrigeradores domésticos, e a variação de temperatura no seu interior, e seus efeitos na caracterização dinâmica;

- O estudo do mecanismo de deformação do núcleo de poliuretano no âmbito microestrutural. Branner (1995 [29]) relaciona para espumas de PVC dimensões de arestas e faces de células com a densidade relativa, além de atribuir os papéis daquelas nas deformações fletiva e cisalhante. Mills (2000 [32]) efetua estudo semelhante na espuma de PU com células abertas, obtendo relações tensão-deformação e propriedades mecânicas a partir de carregamentos em células individuais, em planos cristalinos determinados.

- A execução de estudo semelhante ao deste trabalho para geometrias como placas, e estudo da viabilidade da adoção de elementos que contemplam geometrias curvas (como elementos de casca), sempre adotando a abordagem

de estudo do compósito como um todo, visando em um estágio ulterior a programação desses elementos em *softwares* comerciais e a comparação com os elementos padronizados destes.

## Referências Bibliográficas

- [1] DYM, Clyde L.; SHAMES, Irving H. **Solid Mechanics: A Variational Approach**. 1 ed. New York: McGraw-Hill, 1973.
  
- [2] AUSTIN, Eric Michael. **Influences of Higher Order Modeling Techniques on the Analysis of Layered Viscoelastic Damping Treatments**. Blacksburg, USA, 1998. Dissertação de Doutorado - Virginia Polytechnic Institute and State University.
  
- [3] SOKOLINSKY, Vladimir.; FROSTIG, Yeoshua.; NUTT, Steven R. Special Behavior of Soft-Core Sandwich Beams. 32nd Conference of the Society for the Advancement of Materials and Process Engineering. **Anais**. Seattle, 2001.
  
- [4] RAO, M. K., Desai, Y. M., Chitnis, M. R. Free vibrations of laminated beams using mixed theory. **Composite Structures**, vol. 52, pp. 149-160, 2001.
  
- [5] COOK, Geoffrey M.; TESSLER, Alexander. A {3,2}-order bending theory for laminated composite and sandwich beams. **Composites Part B**, vol. 29B, pp. 565-576, 1998.

- [6] NASHIF, Ahid D.; JONES, David I. G.; HENDERSON, John P. **Vibration Damping**. 10 ed. . New York: J. Wiley & Sons, 1985.
- [7] JOHNSON, Conor D.; KIENHOLZ, David A. **Prediction of Damping in Structures with Viscoelastic Materials**. Palo Alto: CSA Engineering Inc., 1983.
- [8] McTAVISH, D. J.; HUGHES, P. C.; Modeling of Linear Viscoelastic Space Structures. **Journal of Vibration and Acoustics**, vol. 15, pp. 103-110, 1993.
- [9] ZENKERT, Dan. **An Introduction to Sandwich Construction**. 2 ed. Warley, UK: Engineering Materials Advisory Services, 1995.
- [10] COOK, Robert D. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 2 ed. New York: J. Wiley & Sons, 1981
- [11] WANG, Gang. **Analyses of Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Core**. College Park, USA, 2001. Dissertação de Doutorado - The University of Maryland.
- [12] CHANDRUPATLA, Tirupathi. R; BELEGUNDU, Ashoh. D. **Introduction to Finite Elements in Engineering**. 10 ed. New Jersey: Prentice Hall, 1991.

- [13] BATHE, Klaus Jürgen. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 1996.
- [14] TENG, Tso-Liang; HU, Ning-Kang. Analysis of Damping Characteristics for Viscoelastic Laminated Beams. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, vol. 190, pp. 3881-3892, 2001.
- [15] FASANA, A.; MARCHESIELLO, S.; Rayleigh-Ritz Analysis of Sandwich Beams. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 241, n. 4, pp. 643-652, 2001.
- [16] QIAN, Guan-Liang; HOA, Suong V.; XIAO, Xinran. A Vibration Method for Measuring Mechanical Properties of Composite, Theory and Experimental. **Composite Structures**, vol. 39, n. 1-2, pp. 31-38, 1997.
- [17] CUNHA, Jesiel; PIRANDA, Jean. Application of Model Updating in Dynamics for the Identification of Elastic Constants os Composite Materials. **Composites: Part B**, vol. 30, pp. 79-85, 1999.
- [18] RIKARDS, R. *et al.* Method for Identification of Elastic Properties of Laminates Based on Experiment Design. **Composites: Part B**, vol. 30, pp. 279-289, 1999.

- [19] CHEN, X.; CHEN, H. L.; HU, X. L. Damping Prediction of Sandwich Structures by Order-Reduction-Iteration Approach. **Journal of Sound and Vibration**, vol. 222, n. 5, pp. 803-812, 1999.
- [20] GOUNARIS, G.D.; ANIFANTIS, N. K.: Structural Damping Determination by Finite Element Approach. **Computers & Structures**, vol. 73, pp. 445-452, 1999.
- [21] DALENBRING, M. Damping Function Estimation Based on Measured Vibration Frequency Responses and Finite Element Displacement Modes. **Mechanical Systems and Signal Processing**, vol. 13, n. 4, pp. 547-569, 1999.
- [22] SMITH, Clifford Bergman. **Damping Identification in Helicopter Rotor Systems**. College Park, USA, 1999. Dissertação de Doutorado - The University of Maryland.
- [23] IGLESIAS, Miguel Angel Moises. **Investigating Various Modal Analysis Techniques to Estimate Damping Ratio**. Blacksburg, USA, 2000. Dissertação de Mestrado - Virginia Polytechnic Institute and State University.
- [24] RICHARDSON, Mark H.; FORMENTI, David L. Parameter Estimation from Frequency Response Measurements using Rational Fraction Polynomials. 1<sup>st</sup> International Modal Analysis Conference. **Anais**. Orlando, USA, 1982.

- [25] BORESI, Arthur P.; SCHMIDT, Richard J.; SIDEBOTTOM, Omar M. **Advanced mechanics of materials**. 5 ed. New York: J. Wiley & Sons, 1993.
- [26] ABE, Henrique Hiromitsu; ALMEIDA, Leonardo Ferreira Pedroso de. **Deformação em Gabinetes Espumados de Refrigeradores Domésticos**. Curitiba, 2003. Trabalho de Graduação (Departamento Acadêmico de Mecânica) – Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná.
- [27] AMERICAN SOCIETY FOR TESTING OF MATERIALS. **Standard Test Method for Tensile Properties of Materials**, D638. West Conshohocken, 2002
- [28] AMERICAN SOCIETY FOR TESTING OF MATERIALS. **Standard Test Methods for Density and Specific Gravity (Relative Density) of Plastics by Displacement**, D792. West Conshohocken, 2000
- [29] BRANNER, Kim. **Capacity and Lifetime of Foam Core Sandwich Structures**. Lyngby, Dinamarca, 1995. Dissertação de Doutorado (Department of Naval Architecture and Offshore Engineering) – Technical University of Denmark.
- [30] PCB PIEZOTRONIC INC. **353B18 ICP® Accelerometer Data Sheet**. Depew, NY, USA, 2002.

[31] VILAR, Walter Dias. **Química e Tecnologia dos Poliuretanos**. 2 ed. Rio de Janeiro: Vilar Consultoria, 1998.

[32] MILLS, Nigel J. Micromechanics of Polymeric Foams. 3<sup>rd</sup> Nordic Meeting on Materials and Mechanics. **Anais**. Aalborg, Dinamarca, 2000

