

IVAN MOURA BELO

ANÁLISE EFICIENTE DE COMPÓSITOS
LAMINADOS PLANOS UTILIZANDO-SE A
FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS
CORRIGIDA *A-PRIORI* SEM OS EFEITOS DO
TRAVAMENTO

Curitiba

Fevereiro 2006

IVAN MOURA BELO

**ANÁLISE EFICIENTE DE COMPÓSITOS LAMINADOS
PLANOS UTILIZANDO-SE A FORMULAÇÃO DE
ELEMENTOS FINITOS CORRIGIDA *A-PRIORI* SEM OS
EFEITOS DO TRAVAMENTO**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Departamento de Ciências Exatas e de Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Orientador: Prof. João Elias Abdalla F^o, Ph.D

Curitiba

Fevereiro 2006

Termo de Aprovação

Ivan Moura Belo

**“Análise Eficiente de Compósitos Laminados Planos utilizando-se
a Formulação de Elementos Finitos corrigida *a-priori* sem os
Efeitos do Travamento”**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, do Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Presidente: **Prof. Dr. João Elias Abdalla Filho (*Orientador*)**
Curso de Engenharia Mecânica (PUCPR)

Prof. Dr. Carlos Alberto de Almeida
Departamento de Engenharia Mecânica (PUC-RIO)

Prof. Dr. Manoel Rodrigues Justino Filho
Curso de Engenharia Civil (PUCPR)

Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado
Curso de Engenharia Mecânica (PUCPR)

Curitiba, 24 de Fevereiro de 2006.

Dedicatória

*Aos meus pais,
Getúlio Moura Belo e
Edith Maria Belo,
pelo amor, apoio e compreensão.*

Agradecimentos

À primeira vista, uma dissertação de mestrado na área de Mecânica dos Sólidos Computacional parece ser algo solitário feito no computador durante as intermináveis manhãs, tardes e noites de estudo. Mas a solidão é apenas aparente. Muitas pessoas estiveram presentes nesta minha jornada acadêmica. Os primeiros parceiros foram os meus familiares: pai, mãe, irmão, tios, primos... Todos torcendo pelo meu sucesso, mesmo sem entender o que tanto eu fazia lendo artigos sobre um “tal” de método dos elementos finitos. A todos vocês o meu muito obrigado!

Nesta curta jornada acadêmica fiz colegas de ofício e mais do que isso, amigos. O professor Renato Machniewscz foi um deles. Ele foi o responsável por sanar todas as dúvidas que tive e tenho em $\text{\LaTeX}$. Valeu Renato! Aos professores Manoel Rodrigues Justino Filho, Renato Barbieri, Roberto Dalledone Machado e Viviana Cocco Mariani o meu muito obrigado. Eles se mostraram prestativos em todos os momentos de dificuldade, e não foram poucos... Ao meu orientador João Elias Abdalla Filho, a palavra obrigado é pouco para expressar a minha gratidão. Ele leu, discutiu, argumentou e muitas vezes conseguiu me convencer, apesar das minhas intransigências, cada linha deste trabalho. Vislumbrou caminhos que eu mesmo não havia percebido. Que a parceria se repita.

Aos amigos que não tem ligação com a Mecânica dos Sólidos, meu obrigado. Em especial a José Augusto Borgert Jr, que por diversos momentos me ajudou sem mesmo perceber, principalmente, quando o assunto era programação e à Jane Marques da Rocha, pela sua dedicação e paciência em resolver os assuntos burocráticos e pelos seus preciosos conselhos.

Agradeço também ao CNPq e à Capes, órgãos financiadores da minha iniciação científica e do Mestrado, respectivamente. Sem este apoio seria impossível a dedicação à pesquisa.

E, finalmente, agradeço a Deus, por me dar saúde e inteligência necessárias para a realização deste trabalho.

Epígrafe

*“Deus nos fez perfeitos e não escolhe os capacitados, capacita os escolhidos.
Fazer ou não fazer algo só depende de nossa vontade e perseverança.”*

Albert Einstein

Resumo

A formulação de elementos finitos de placa livres de *locking* utilizando a notação *strain gradient* para análise de compósitos laminados é revista e amplamente validada para o cálculo de tensões. Os elementos são baseados na Teoria de Primeira Ordem de Mindlin segundo o modelo da Lâmina Equivalente. As deformações e tensões podem ser calculadas em diferentes pontos ao longo da espessura do laminado. O efeito parabólico da tensão cisalhante transversal é incluída no modelo pelo emprego adequado de funções de ponderação.

A notação *strain gradient*, que é fisicamente interpretável, permite analisar detalhadamente *a-priori* o modelo de elemento finito. As expansões polinomiais são inspecionadas e os termos espúrios causadores do travamento são precisamente identificados nas expressões das deformações cisalhantes. O elemento é corrigido com a simples remoção desses termos, o que é equivalente ao procedimento de integração reduzida. A vantagem aqui está na eliminação do erro antes da implementação computacional. As implementações computacionais dos elementos são revistas e o código Fortran[®] atualizado e melhorado. Os elementos estão implementados em duas versões: com e sem termos espúrios.

Para ampliar a validação dos elementos e o procedimento de remoção dos termos espúrios, resultados provenientes de ambos modelos são comparados com soluções analíticas. O efeito deletério dos termos espúrios é estudado através das análises de convergência. É mostrado que os modelos corrigidos convergem rapidamente, enquanto os modelos com cisalhamento parasítico apresentam convergência pobre.

Palavras-chave: Compósitos Laminados, Notação *Strain Gradient*, Método dos Elementos Finitos, Travamento por Cisalhamento, Eliminação de Erros.

Abstract

A plate finite element which is locking-free is developed using strain gradient notation for the analysis of laminated composites. The element is based on a First-order Shear Deformation Theory and on the Equivalent Single-Layer assumption. Strains and stresses can be calculated at different points through the laminate's thickness. The parabolic nature of the transverse shear stress distribution is included into the model by the use of an adequate weighting function.

The physically interpretable strain gradient notation allows for the detailed *a-priori* analysis of the finite element model. The polynomial expansions are inspected and spurious terms responsible for locking are precisely identified in the shear strains expansions. The element is corrected by simply removing the spurious terms from those expansions, which is an equivalent procedure to performing reduced-order integration. The advantage here is that the error elimination is done prior to the element's computational implementation. The elements are implemented into a Fortran[®] finite element code in two versions; namely, with and without spurious terms.

To validate the element and the spurious terms removal procedure, results provided by both models are compared to analytical solutions to show the effects of the spurious terms on the solutions. The deleterious effects of the spurious terms are studied through convergence analyses. It is shown that the corrected model converges rapidly, while the element with parasitic shear describes poor convergence.

Keywords: Laminated Composites, Strain Gradient Notation, Finite Elements Method, Shear Locking, Error Elimination.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xiv
Lista de Siglas	xvi
Lista de Símbolos	xvii
1 Introdução	1
1.1 Considerações Iniciais	1
1.2 Objetivo.....	2
1.3 Motivação	2
1.4 Metodologia	3
1.5 Resumo	4
2 Revisão Bibliográfica	6
2.1 Introdução	6
2.2 Revisão dos Trabalhos e Artigos	7
3 Materiais Compósitos	14
3.1 Introdução	14
3.2 Conceitos Preliminares	14
3.3 Transformação de Coordenadas	16
3.4 Análise Mecânica de uma Lâmina	20
3.4.1 Micromecânica de uma Lâmina	20

3.4.2	Macromecânica de uma Lâmina	22
3.5	Relações Constitutivas no EPT	24
3.6	Tipos de Laminados	27
4	Teoria de Análise de Placas Laminadas	30
4.1	Introdução	30
4.2	Análise via CLPT	31
4.3	Análise via FSDT	37
4.4	Análise via HSDT	42
4.5	Comparação entre as Teorias da Lâmina Equivalente	46
5	A Notação <i>Strain Gradient</i> para Compósitos Laminados.....	48
5.1	Introdução	48
5.2	Formulação dos Elementos Finitos	48
5.2.1	Aspectos Gerais	48
5.2.2	Quadrilátero de 4 nós	51
5.2.3	Quadrilátero de 8 nós	57
6	Aplicações Numéricas	65
6.1	Introdução	65
6.2	Análise Numérica com o Quadrilátero de 4 Nós	66
6.2.1	Placa Isotrópica Simplesmente Apoiada.....	66
6.2.2	Laminado Cruzado Simplesmente Apoiado (SS-1).....	69
6.2.3	Laminado Angular Simplesmente Apoiado (SS-2)	78
6.3	Análise Numérica com o Quadrilátero de 8 Nós	87
6.3.1	Placa Isotrópica Apoiada nos Cantos	87
6.3.2	Laminado Cruzado Simplesmente Apoiado (SS-1).....	90
6.3.3	Laminado Angular Simplesmente Apoiado (SS-2)	97

6.4 Elemento <i>Strain Gradient</i> $\times$ Isoparamétrico	104
7 Considerações Finais	119
7.1 Introdução	119
7.2 Conclusões	120
7.3 Sugestões para Trabalhos Futuros	122
Referências Bibliográficas	123
Apêndice A – A Notação <i>Strain Gradient</i>	127
A.1 Tabela de Coeficientes	127
Apêndice B – Soluções Analíticas	129
B.1 Solução Analítica para Placas	129
B.2 Solução Analítica para Laminados via FSDT	130
B.2.1 Solução de Navier para Laminados Cruzados Simplesmente Apoiados (SS–1)	130
B.2.2 Solução de Navier para Laminados Angulares Simplesmente Apoiados (SS–2)	136
B.3 Solução Analítica para Laminados via HSDT	138

Lista de Figuras

Figura 3.1	Tipos de compósitos.	16
Figura 3.2	Sistema de coordenadas global e do material.	17
Figura 3.3	Ensaio de caracterização mecânica de um laminado.	21
Figura 3.4	Níveis de análise de um compósito laminado.	22
Figura 3.5	Lâmina no estado plano de tensões.	25
Figura 3.6	Seqüência de empilhamento de um laminado qualquer.	28
Figura 3.7	Exemplos de esquemas de laminação.	29
Figura 4.1	Configuração da placa deformada e indeformada segundo as hipóteses de Kirchhoff.	32
Figura 4.2	Numeração típica de um laminado com a variação de sua deformação e tensão normais ao longo da espessura segundo a CLPT.	34
Figura 4.3	Elemento diferencial de placa sujeito à flexão com as resultantes de tensão e distribuição das tensões segundo a CLPT.	35
Figura 4.4	Configuração da placa deformada e indeformada segundo a Teoria de Primeira Ordem de Mindlin.	38
Figura 4.5	Elemento diferencial de placa sujeito à flexão com as resultantes de tensão e distribuição das tensões segundo a FSDT.	41
Figura 4.6	Comparação da deformação conforme as teorias clássica, primeira ordem de Mindlin e terceira ordem de Reddy.	47
Figura 5.1	Graus de liberdade do quadrilátero de 4 nós.	51
Figura 5.2	Graus de liberdade do quadrilátero de 8 nós.	57
Figura 6.1	Geometria da placa isotrópica simplesmente apoiada sujeita à uma carga concentrada no seu centro.	66
Figura 6.2	Convergência do deslocamento transversal, w , para as relações $a/h = 10$ e 20.	68

Figura 6.3	Convergência do deslocamento transversal, w , para as relações $a/h = 50$ e 100.	69
Figura 6.4	Geometria e condições de contorno do laminado $[0/90/90/0]$ simplesmente apoiado (SS-1) com carregamento uniformemente distribuído e $a/b = 1$	70
Figura 6.5	Tensões normais no plano, $\bar{\sigma}_{xx}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/90/0]$ para relação $a/h = 100$	74
Figura 6.6	Tensões normais no plano, $\bar{\sigma}_{yy}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/90/0]$ para relação $a/h = 100$	75
Figura 6.7	Tensões cisalhantes transversais, $\bar{\tau}_{xz}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/90/0]$ para relação $a/h = 100$	76
Figura 6.8	Tensões cisalhantes transversais, $\bar{\tau}_{yz}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/90/0]$ para relação $a/h = 100$	77
Figura 6.9	Deslocamento transversal máximo adimensional ($\bar{w}$) <i>versus</i> razão lado-espessura (a/h) para o laminado $[0/90/90/0]$	78
Figura 6.10	Convergência das tensões normais adimensionalizadas para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/90/0]$	80
Figura 6.11	Convergência das tensões cisalhantes adimensionalizadas para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/90/0]$	81
Figura 6.12	Geometria e condições de contorno do laminado $[-45/45]$ simplesmente apoiado (SS-2) com carregamento uniformemente distribuído e $a/b = 1$	82
Figura 6.13	Tensões normais adimensionais máximas, $\bar{\sigma}_{xx}$, analisadas ao longo da espessura do laminado $[-45/45]$ para relação $a/h = 100$	84
Figura 6.14	Tensões cisalhantes adimensionais máximas, $\bar{\tau}_{xy}$, analisadas ao longo da espessura do laminado $[-45/45]$ para relação $a/h = 100$	85
Figura 6.15	Tensões cisalhantes adimensionais máximas, $\bar{\tau}_{xz}$, analisadas ao longo da espessura do laminado $[-45/45]$ para relação $a/h = 100$	86
Figura 6.16	Convergência do deslocamento transversal e das tensões normais adimensionalizadas para relação $a/h = 100$ do laminado $[-45/45]$	87
Figura 6.17	Convergência das tensões cisalhantes adimensionalizadas para relação $a/h = 100$ do laminado $[-45/45]$	88

Figura 6.18 Geometria da placa isotrópica simplesmente apoiada nos cantos submetida ao carregamento uniformemente distribuído.	89
Figura 6.19 Deslocamento transversal adimensionalizado para relação $a/h = 100$. .	91
Figura 6.20 Convergência do deslocamento transversal adimensional, $\bar{w}$, para as relações $a/h = 10$ e 20	92
Figura 6.21 Convergência do deslocamento transversal adimensional, $\bar{w}$, para as relações $a/h = 50$ e 100	93
Figura 6.22 Geometria e condições de contorno do laminado $[0/90/0]$ simplesmente apoiado (SS-1) com carregamento uniformemente distribuído e $a/b = 1$. .	94
Figura 6.23 Tensões normais no plano, $\bar{\sigma}_{xx}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/0]$ para relação $a/h = 100$	96
Figura 6.24 Tensões normais no plano, $\bar{\sigma}_{yy}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/0]$ para relação $a/h = 100$	97
Figura 6.25 Tensões cisalhantes transversais, $\bar{\tau}_{xz}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/0]$ para relação $a/h = 100$	98
Figura 6.26 Tensões cisalhantes transversais, $\bar{\tau}_{yz}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/0]$ para relação $a/h = 100$	99
Figura 6.27 Convergência das tensões normais no plano adimensionalizadas para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/0]$	100
Figura 6.28 Convergência das tensões cisalhantes transversais adimensionalizadas para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/0]$	101
Figura 6.29 Geometria e condições de contorno do laminado $[-45/45]_4$ simplesmente apoiado (SS-2) com carregamento uniformemente distribuído e $a/b = 1$. .	102
Figura 6.30 Tensões adimensionalizadas máximas, $\bar{\sigma}_{xx}$, analisadas ao longo da espessura do laminado $[-45/45]_4$ para relação $a/h = 100$	105
Figura 6.31 Tensões adimensionalizadas máximas, $\bar{\tau}_{xy}$, analisadas ao longo da espessura do laminado $[-45/45]_4$ para relação $a/h = 100$	106
Figura 6.32 Tensões adimensionalizadas máximas, $\bar{\tau}_{xz}$, analisadas ao longo da espessura do laminado $[-45/45]_4$ para relação $a/h = 100$	107
Figura 6.33 Convergência do deslocamento transversal e da tensão normal $\bar{\sigma}_{xx}$ adi-	

dimensional para relação $a/h = 100$ do laminado $[-45/45]_4$	108
Figura 6.34 Convergência das tensões cisalhantes adimensionais para relação $a/h = 100$ do laminado $[-45/45]_4$	109
Figura 6.35 Geometria e condições de contorno do laminado quadrado $[0/90/90/0]$ simplesmente apoiado (SS-1) submetido ao carregamento senoidal.	110
Figura 6.36 Comparação entre a tensão normal adimensionalizada $\bar{\sigma}_{xx}$ obtida via MEF para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/90/0]$ submetido ao carregamento senoidal.	113
Figura 6.37 Comparação entre a tensão normal adimensionalizada $\bar{\sigma}_{yy}$ obtida via MEF para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/90/0]$ submetido ao carregamento senoidal.	114
Figura 6.38 Comparação entre a tensão cisalhante adimensionalizada $\bar{\tau}_{xz}$ obtida via MEF para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/90/0]$ submetido ao carregamento senoidal.	115
Figura 6.39 Comparação entre a tensão cisalhante adimensionalizada $\bar{\tau}_{yz}$ obtida via MEF para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/90/0]$ submetido ao carregamento senoidal.	116
Figura B.1 Placa retangular simplesmente apoiada submetida ao carregamento concentrado.	129
Figura B.2 Geometria da placa isotrópica simplesmente apoiada nos cantos submetida ao carregamento uniformemente distribuído.	130

Lista de Tabelas

Tabela 6.1	Materiais empregados nas análises numéricas.	65
Tabela 6.2	Comparação de resultados obtidos para o deslocamento transversal, w , para uma placa isotrópica quadrada sujeita à carga concentrada.	67
Tabela 6.3	Resultados obtidos via MEF para deslocamento e tensões adimensionais, $\bar{w}$ e $\bar{\sigma}$, para um laminado espesso e semi-espesso $[0/90/90/0]$, submetido ao carregamento uniformemente distribuído.	71
Tabela 6.4	Resultados obtidos via MEF para deslocamento e tensões adimensionais, $\bar{w}$ e $\bar{\sigma}$, para um laminado delgado $[0/90/90/0]$, submetido ao carregamento uniformemente distribuído.	72
Tabela 6.5	Erros percentuais apresentados pelos elementos com e sem termos espúrios para as tensões adimensionais do laminado $[0/90/90/0]$ simplesmente apoiado.	79
Tabela 6.6	Resultados obtidos via MEF para deslocamento e tensões adimensionais para os laminados espesso, semi-espesso e delgado $[-45/45]$ submetidos ao carregamento senoidal.	83
Tabela 6.7	Comparação de resultados obtidos para o deslocamento transversal adimensional, $\bar{w}$, para uma placa isotrópica quadrada apoiada nos cantos submetida ao carregamento uniformemente distribuído.	90
Tabela 6.8	Resultados obtidos via MEF para deslocamento e tensões adimensionais, $\bar{w}$ e $\bar{\sigma}$, para um laminado $[0/90/0]$, submetido ao carregamento uniformemente distribuído para as diferentes relações a/h	95
Tabela 6.9	Resultados obtidos via MEF para deslocamento e as tensões adimensionais para um laminado $[-45/45]_4$ submetido ao carregamento uniformemente distribuído.	103
Tabela 6.10	Comparação de resultados obtidos via MEF entre os quadriláteros de 4 nós para deslocamento e tensões adimensionais ($\bar{w}$, $\bar{\sigma}$ e $\bar{\tau}$) para um laminado $[0/90/90/0]$ sujeito à carga senoidal.	111

Tabela 6.11 Comparação de resultados obtidos via MEF entre os quadriláteros de 8 nós para deslocamento e tensões adimensionais ($\bar{w}$, $\bar{\sigma}$ e $\bar{\tau}$) para um laminado [0/90/90/0] sujeito à carga senoidal.	117
Tabela A.1 Coeficientes em função das deformações.	127
Tabela A.2 Coeficientes para um elemento 3D de quarta ordem.	128
Tabela B.1 Coeficientes do carregamento dado pela expansão da série trigonométrica de Fourier empregando o método de Navier.	132

Lista de Siglas

MEF	Método dos Elementos Finitos
FSDT	Teoria de Primeira Ordem de Mindlin, do inglês <i>First-order Shear Deformation Theory</i>
HSDT	Teoria de Ordem Superior, do inglês <i>High-order Shear Deformation Theory</i>
CLPT	Extensão da Teoria Clássica de Placas para laminados feita por Kirchhoff, do inglês <i>Classical Laminated Plate Theory</i>
ESLT	Teoria da Lâmina Equivalente, oriunda do inglês <i>Equivalent Single-Layer Theory</i>
LWT	Teoria da Lâmina Discreta, do inglês <i>Layer-Wise Theory</i>
CPT	Teoria Clássica de Placas, do inglês <i>Classical Plate Theory</i>
TSDT	Teoria de Terceira Ordem, do Inglês <i>Third-order Shear Deformation Theory</i>
EPT	Estado Plano de Tensões
ESG	Elemento <i>Strain Gradient</i>

Lista de Símbolos

C^1	Grau de continuidade 1 da função
u_i	Deslocamento na direção x no nó i
v_i	Deslocamento na direção y no nó i
w_i	Deslocamento na direção z no nó i
ϕ_i^1	Rotação no nó i na direção 1
ϕ_i^2	Rotação no nó i na direção 2
w_{xi}	Deslocamento interpolado a partir de função interpoladora no plano xi
w_{yi}	Deslocamento interpolado a partir de função interpoladora no plano yi
w_{xyi}	Deslocamento interpolado a partir de função interpoladora no plano xyi
a	Dimensão de maior comprimento da placa
b	Dimensão de menor comprimento da placa
h	Espessura do laminado
θ_x	Rotação normal a superfície de referência sobre o eixo y
θ_y	Rotação normal a superfície de referência sobre o eixo x
w_l	Termo de ordem superior da série de Taylor definido na superfície de referência
β_x	Termo de ordem superior da série de Taylor definido na superfície de referência
β_y	Termo de ordem superior da série de Taylor definido na superfície de referência
Γ	Termo de ordem superior da série de Taylor definido na superfície de referência
C^0	Grau de continuidade 0 da função
$x_1x_2x_3$	Sistema de coordenadas do material, ou local
xyz	Sistema de coordenadas do problema, ou global
θ	Ângulo de rotação entre os sistemas coordenados
$[\sigma]$	Tensor de tensões

σ_{xx}	Tensão normal no plano
σ_{xy}	Tensão normal no plano
σ_{zz}	Tensão normal transversal
τ_{xy}	Tensão cisalhante no plano
τ_{xz}	Tensão cisalhante transversal
τ_{yz}	Tensão cisalhante transversal
$[\epsilon]$	Tensor de deformações
ϵ_{xx}	Deformação linear no plano
ϵ_{yy}	Deformação linear no plano
ϵ_{zz}	Deformação linear transversal
γ_{xy}	Distorção angular no plano
γ_{xz}	Distorção angular transversal
γ_{yz}	Distorção angular transversal
E_f	Módulo de elasticidade longitudinal da fibra
E_m	Módulo de elasticidade longitudinal da matriz
ν_f	Coefficiente de <i>Poisson</i> da fibra
ν_m	Coefficiente de <i>Poisson</i> da matriz
V_f	Fração de volume da fibra
V_m	Fração de volume da matriz
G_f	Módulo de elasticidade transversal da fibra
G_m	Módulo de elasticidade transversal da matriz
$[C]$	Matriz constitutiva
$[S]$	Matriz de flexibilidade
E_i	Módulo de elasticidade longitudinal na direção i
G_{ij}	Módulo de elasticidade transversal no plano $i - j$
ν_{ij}	Coefficiente de <i>Poisson</i> no plano $i - j$
$[Q]$	Matriz de rigidez reduzida

$[\bar{Q}]$	Matriz de rigidez transformada
u_0	Deslocamento de um ponto genérico na superfície de referência na direção x
v_0	Deslocamento de um ponto genérico na superfície de referência na direção y
w_0	Deslocamento de um ponto genérico na superfície de referência na direção z
$\partial w_0/\partial x$	Rotação de um ponto genérico na superfície de referência em relação à y
$\partial w_0/\partial y$	Rotação de um ponto genérico na superfície de referência em relação à x
$\{\varepsilon^0\}$	Deformações de membrana
$\{\varepsilon^1\}$	Curvaturas
$[A]$	Matriz de rigidez extensional
$[D]$	Matriz de rigidez à flexão
$[B]$	Matriz de rigidez de acoplamento
ϕ_x	Rotação em torno do eixo y
ϕ_y	Rotação em torno do eixo x
ϕ_z	Rotação em torno do eixo z
K	Fator de cisalhamento
$\{N\}$	Resultante de tensão: esforços normais
$\{M\}$	Resultante de tensão: esforços de momentos
$\{Q\}$	Resultante de tensão: esforços cisalhantes
$\{P\}$	Resultante de tensão de ordem superior
$\{R\}$	Resultante de tensão de ordem superior
$[E]$	Matriz de rigidez de ordem superior
$[F]$	Matriz de rigidez de ordem superior
$[H]$	Matriz de rigidez de ordem superior
$\{d\}$	Vetor de deslocamento nodal
$\{\varepsilon_{sg}\}$	Vetor contendo os modos de deformação que o elemento é capaz de representar
$[K]$	Matriz de rigidez
$[\phi]$	Matriz de transformação que associa os deslocamentos nodais aos modos de

deformação

$[T_{sg}]$ Matriz de transformação que associa as deformações com os modos de deformação

$[T_{sg}^{cp}]$ Matriz de transformação que associa as deformações com os modos de deformação contendo termos espúrios

1 Introdução

1.1 Considerações Iniciais

Uma das preocupações da Mecânica do Contínuo está no desenvolvimento de modelos matemáticos que representem adequadamente o problema em estudo. Numa análise estrutural, por exemplo, o objetivo pode ser a obtenção dos deslocamentos, deformações ou tensões atuantes no sistema. Com o aumento da complexidade da situação física real devido às condições de contorno, carregamento, geometria, entre outras, existe a necessidade de se aplicar uma hipótese simplificadora para se conseguir obter a solução, pois a solução analítica, dependendo da complexidade do problema em questão, é *a-priori*, uma solução extremamente difícil de se obter. Com isso, busca-se desenvolver e aplicar métodos aproximados que possibilitem a aplicação dos princípios matemáticos que a Mecânica do Contínuo apresenta, porém de uma forma mais acessível.

Dentre os vários métodos aproximados que possibilitam a representação e a análise de problemas do meio contínuo, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é, sem dúvida, o mais empregado. Sendo sua versatilidade uma das suas principais características, o MEF não fica restrito apenas a resolver problemas de mecânica estrutural, sendo empregado na solução de muitos outros tipos de problemas, tais como:

- (i) Mecânica dos Sólidos;
- (ii) Mecânica dos Fluidos;
- (iii) Termodinâmica;
- (iv) Eletromagnetismo;
- (v) Acústica, entre outros.

Entretanto, por ser um método aproximado, a solução obtida por meio do MEF possui erros. Conseqüentemente, os modelos atualmente empregados buscam a precisão

e acurácia necessárias para viabilizar a implementação computacional em programas comerciais e conferir credibilidade desses elementos em qualquer tipo de análise. Na área de compósitos laminados, essa busca tem sido tema de pesquisa seguramente há mais de duas décadas.

1.2 Objetivo

O objetivo principal deste trabalho é calcular, com elevada precisão, as tensões ao longo da espessura em compósitos laminados. Para isso, utilizam-se elementos finitos formulados via notação *strain gradient* em virtude desses elementos apresentarem resultados precisos e acurados [2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 24, 36]. O intuito é utilizar elementos livres de erros em sua formulação, portanto, capazes de descrever corretamente os fenômenos físicos inerentes ao comportamento de um compósito laminado.

O modelo proposto é baseado no campo dos deslocamentos da Teoria da Lâmina Equivalente, segundo o modelo de Mindlin para compósitos laminados. Conseqüentemente, o elemento deve ser capaz de representar adequadamente a distribuição das tensões normais e cisalhante no plano e cisalhantes transversais para as diversas relações a/h .

Para avaliar, e assim, validar o elemento proposto, serão desenvolvidas soluções analíticas que serão comparadas com as respostas numéricas oriundas dos elementos. Além disso, os elementos *strain gradient* são comparados com elementos isoparamétricos, por estes serem bem aceitos na literatura. O intuito dessa analogia é mostrar a eficiência numérica dos elementos obtidos pela notação *strain gradient* e avaliar a sua precisão. Dessa forma, o objetivo secundário desta dissertação é ampliar a validação de elementos finitos retangulares de 4 e 8 nós que utilizam a notação *strain gradient* na sua formulação.

1.3 Motivação

Durante os últimos cinqüenta anos, investigações vêm sendo realizadas com objetivo de desenvolver técnicas confiáveis para análises estruturais. Além disso, a necessidade de se utilizar materiais mais leves, com maior rigidez e vida útil, fez com que a ciência dos materiais se desenvolvesse de maneira rápida. Dessa forma, os materiais compósitos surgem com o objetivo de suprir esta demanda, pois eles apresentam (a) boa rigidez, (b) resistência à corrosão, (c) baixo peso, (d) boas propriedades térmicas, (e) maior vida útil, entre outras.

Nesse contexto, surge a necessidade de gerar modelos numéricos que sejam confiáveis e capazes de representar de maneira simples e eficiente um problema complexo de engenharia. Com isso, desde que a análise via MEF seja empregada, a precisão se torna muito importante. Sendo assim, o emprego de elementos capazes de corresponder com a realidade física em sua formulação se faz necessário e imprescindível para uma correta análise, justificando, assim, a realização deste estudo.

1.4 Metodologia

Para o desenvolvimento deste trabalho, serão adotados os seguintes procedimentos metodológicos, seguindo a seqüência cronológica dos fatos:

- (i) Realização de uma revisão bibliográfica dos principais conceitos e teorias sobre materiais compósitos [12, 16, 27, 41];
- (ii) Realização de uma revisão bibliográfica das teorias de primeira ordem [2, 8, 15, 20, 23, 24, 46];
- (iii) Realização de uma revisão bibliográfica das teorias de ordem superior [1, 10, 18, 25, 26];
- (iv) Obtenção de soluções analíticas para o caso de laminados segundo a FSDT e HSDT utilizando Reddy [27];
- (v) Realização de simulações numéricas com o emprego do método dos elementos finitos usando a técnica da reanálise e comparando com o trabalho realizado por Schünemann [36] usando o elemento quadrangular de 4 nós;
- (vi) Implementação do cálculo das tensões no elemento quadrangular de 8 nós;
- (vii) Realização de simulações numéricas com o elemento quadrangular de 8 nós implementado;
- (viii) Análise dos resultados obtidos e a comparação com soluções analíticas;
- (ix) Com a validação dos elementos obtidos empregando a notação *strain gradient*, realizar comparações deste com os elementos isoparamétricos.

1.5 Resumo

Este capítulo introdutório mostrou o objetivo, as justificativas e a metodologia utilizadas para o desenvolvimento deste trabalho.

A seguir, o Capítulo 2 apresenta a revisão bibliográfica sobre os principais trabalhos relacionados aos compósitos laminados obtidos utilizando a notação *strain gradient* e por elementos finitos tradicionais. Primeiramente, é realizado o estudo dos modelos que empregam a teoria de primeira ordem e, posteriormente, os de ordem superior.

O Capítulo 3 discute os tópicos inerentes ao estudo dos materiais compósitos laminados, dentre os quais: os conceitos preliminares, a transformação de coordenadas conforme a direção das fibras da lâmina, as análises micromecânica e macromecânica de uma lâmina, as relações constitutivas no estado plano de tensões e a terminologia dos principais tipos de laminados.

O Capítulo 4 mostra, mais detalhadamente, as teorias que são empregadas para análise numérica das placa laminadas. É enfatizada a análise dos modelos que utilizam a CLPT, FSDT e HSDT. Além disso, é realizada a comparação entre as três teorias.

O Capítulo 5 revisa a formulação de elementos finitos utilizando a notação *strain gradient*. Inicialmente, são considerados os aspectos gerais da formulação de um elemento qualquer. Num momento posterior, é descrita a formulação dos elementos empregados nas análises numéricas desta dissertação, ou seja, os quadriláteros de 4 e 8 nós.

Com o embasamento teórico necessário visto nos Capítulos 2, 3, 4 e 5, o Capítulo 6 mostra as aplicações numéricas e os resultados obtidos neste trabalho. Com intuito de validar os elementos via notação *strain gradient*, são abordadas diferentes condições de contorno e de carregamento. Inicialmente, com o retângulo de 4 nós serão avaliados os seguintes problemas: (i) placa isotrópica simplesmente apoiada submetida à uma carga concentrada no seu centro, (ii) laminado cruzado simplesmente apoiado (SS-1), composto de 4 lâminas e sujeito ao carregamento uniformemente distribuído e (iii) laminado angular anti-simétrico simplesmente apoiado (SS-2) com 2 camadas submetidas à uma carga senoidal. Posteriormente, com o elemento retangular de 8 nós: (iv) placa isotrópica apoiada nos cantos também sujeita ao carregamento uniformemente distribuído, (v) laminado cruzado simplesmente apoiado (SS-1), composto de 3 lâminas e sujeito ao carregamento uniformemente distribuído e (vi) laminado angular anti-simétrico simplesmente apoiado (SS-2) com 8 camadas submetidas à uma carga uniforme. Com ambos os elementos, é feita a análise de um (vii) laminado cruzado simplesmente apoiado (SS-1) sujeito ao car-

regamento senoidal. Os resultados são comparados com a solução de Navier para diversas relações a/h . Entretanto, é enfatizado o estudo dos laminados delgados.

Finalmente, o Capítulo 7 contém as considerações finais desta dissertação. Além disso, apresenta sugestões para trabalhos futuros.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução

Como todo método numérico, o Método dos Elementos Finitos se baseia na aproximação da solução exata do problema em questão; portanto, é um método intrinsicamente dotado de erros. Com isso, os modelos atualmente empregados buscam se aproximar ao máximo da solução analítica. Além disso, o MEF vêm sendo amplamente empregado na engenharia estrutural para auxílio em projetos e até mesmo para verificação da segurança e estabilidade de estruturas já em uso.

É importante destacar que com o avanço da tecnologia e, principalmente, dos materiais, vários são os modelos e teorias empregadas para a formulação de um elemento que viabilize a implementação computacional de problemas da engenharia moderna. Surgem também, muitas técnicas para solução de tais problemas. Portanto, é fundamental para o engenheiro utilizar de métodos que sejam confiáveis e eficientes computacionalmente, uma vez que existe um grande custo envolvido em todo este processo.

Nesse contexto, o presente capítulo tem como objetivo apresentar uma revisão de trabalhos sobre o desenvolvimento e aplicação de modelos numéricos computacionais empregados na análise dos compósitos laminados. Num primeiro momento, é feita a revisão das teorias de primeira ordem e, posteriormente, de ordem superior. Vale ressaltar que em muito dos artigos revisados nas seções seguintes, os autores não deixam claro que tipos de elementos foram utilizados (triângulos ou quadriláteros, por exemplo), nem os detalhes dos exemplos como: carregamentos, dimensões da placa, entre outros. Dessa forma, uma comparação entre trabalhos fica prejudicada e de difícil emprego. Contudo, todo tipo de pesquisa se depara com alguma dificuldade e é tarefa do pesquisador resolver esses problemas de modo a dar sua contribuição para o desenvolvimento da ciência.

2.2 Revisão dos Trabalhos e Artigos

Esta seção apresenta um resumo dos principais trabalhos envolvendo as Teorias de Primeira Ordem e Ordem Superior para análise de laminados em material compósito, bem como apresentar os pontos importantes e relevantes para o estudo do presente trabalho. Além disso, é importante destacar que maiores detalhes sobre as teorias discutidas nesta seção, serão demonstrados no Capítulo 4.

Em 1989, Reddy [26] fez a revisão e a comparação entre duas teorias que envolvem o problema das placas laminadas feitas de material compósito, a saber:

- (i) Teoria da Lâmina Equivalente – ESLT;
- (ii) Teoria da Lâmina Discreta – LWT.

Para os modelos que empregam a Teoria de Lâmina Equivalente, o elemento utilizado tem continuidade C^1 , isto é, a primeira derivada deve ser contínua. Dentro da modelagem via Teoria da Lâmina Equivalente, são empregadas as: (a) Teoria de Primeira Ordem, ou FSDT; (b) Teoria Clássica de Placas, ou CPT; e finalmente (c) Teoria de Ordem Superior, ou HSDT.

No elemento FSDT, o número de graus de liberdade por nó é de 5 ($u_i, v_i, w_i, \phi_i^1, \phi_i^2$). Para o elemento CPT, o número de graus de liberdade por nó aumenta para 6 ($u_i, v_i, w_i, w_{xi}, w_{yi}, w_{xyi}$). Já para elementos HSDT, a complexidade cresce ainda mais e isso pode ser percebido nos graus de liberdade por nó, que aumenta no mínimo para 8 ($u_i, v_i, w_i, w_{xi}, w_{yi}, w_{xyi}, \phi_i^1, \phi_i^2$).

O autor [26] fez uma comparação entre essas teorias por meio de modelagem numérica de uma placa de grafite-epóxi. Para obter um resultado satisfatório via CPT, a malha gerada foi de 4×4 . Mesmo assim, apresentou um valor que gerou um erro de quase 3%. Para uma malha 1×1 , os elementos modelados por FSDT e HSDT, já convergiram para um resultado muito próximo da solução analítica, apontando um erro de 0.9% e 0.42%, respectivamente. Vale ressaltar que para solução deste exemplo, foi considerada uma placa espessa, onde as relações entre o comprimento da placa e sua espessura foram de $a/h = 2, 4$ e 10 .

Outro ponto importante abordado neste artigo foi a comparação entre um modelo utilizando um quarto de placa e outro empregando a placa inteira. Observou-se que com o emprego da placa inteira, os resultados obtidos foram mais próximos dos analíticos,

apesar do esforço computacional ser maior. Utilizando o modelo de quarto de placa, os valores gerados foram coerentes, porém, mais afastados da solução analítica. Finalmente, foi concluído que as teorias empregadas geram resultados satisfatórios, mas não retratam fenômenos físicos importantes como o caso da delaminação, ou da tensão entre lâminas. Também é ressaltada a eficiência numérica dos elementos modelados via FSDT e HSDT.

Em 1974, os autores Mawenya & Davies [20] formularam um elemento isoparamétrico quadrático considerando o efeito do cisalhamento transversal. Foram avaliados os deslocamentos e momentos máximos em laminados isotrópicos e ortotrópicos retangulares e circulares. O elemento apresentou resultados satisfatórios comparados com a solução analítica. Entretanto, ao analisar laminados delgados, o modelo se mostrou ineficiente. Esse problema foi inicialmente abordado por Zienkiewicz [46]. Os autores [20] concluem que a acurácia e a versatilidade deste elemento é comprovada nos exemplos numéricos.

Num artigo publicado em 1979, os autores Panda & Natarajan [23] mostraram a necessidade de considerar o cisalhamento transversal na análise de estruturas laminadas anisotrópicas oriunda das comparações entre a solução analítica e o modelo numérico. Foi empregado um quadrilátero de 8 nós superparamétrico com cinco graus de liberdade por nó utilizando a técnica da integração reduzida nos pontos de Gauss mostrada por [46]. Além disso, foram avaliadas as tensões normais e de cisalhamento no plano para várias relações a/h em diferentes configurações de laminação. Os valores obtidos numericamente mostraram excelente concordância com a solução analítica.

Em 1978, Hughes [15] desenvolveram um novo tipo de elemento com alta precisão chamado de *heterosis*. Para análise de resultados, comparou-se o novo elemento com os quadriláteros de 8 nós (*serendipity*), e de 9 nós (*lagrangeano*). Aqui vale ressaltar que os elementos lagrangeanos são mais indicados para a solução de determinados casos, como por exemplo, quando a integração é reduzida. Em outras situações, o elemento serendipity é menos indicado; por exemplo, quando a placa é muito fina, quantitativamente significa dizer que se a razão do comprimento da placa pela sua espessura for grande, da ordem de 10^2 .

De fato, o que o elemento heterosis faz é concatenar o que existe de funcional em cada tipo de elemento, o serendipity e o lagrangeano. De uma maneira sucinta, este novo elemento utiliza as funções de forma para o deslocamento vertical da placa do elemento serendipity. Por outro lado, é utilizado o elemento lagrangeano para as funções de forma das rotações e para o esquema de integração. Portanto, este novo elemento apresenta a mesma deficiência do elemento lagrangeano, ou seja, ele não é capaz de resolver problemas

em que a placa ou o laminado sejam muito finos, pois nestes casos, ocorre o problema da não linearidade geométrica, tornando este modelo inadequado para resolver este tipo de problema.

Na tese de doutorado escrita por Abdalla [2], o objetivo foi mostrar a presença de termos espúrios que atrasam a convergência em modelos que empregam o MEF para análise de laminados feitos de material compósito. Os elementos empregados nesta dissertação foram formulados, os termos espúrios identificados e eliminados.

Num artigo publicado em 1994, os autores Dow & Abdalla [8] apresentaram uma análise de erros qualitativos para modelos de placas laminadas em material compósito. Esse modelo empregava a notação *strain gradient* e comparava os resultados obtidos para os retângulos de 4 e 8 nós com e sem termos espúrios. Todos os exemplos se referem a um laminado engastado numa extremidade e livre em todas as outras. Foram avaliadas diferentes configurações de laminado, simétricos e assimétricos, para diferentes tipos de carregamento: uma tração uniforme ao longo do lado livre, carga transversal uniforme e momento torsor. Os modelos utilizaram 4, 16, 64 e 256 elementos.

Na primeira aplicação numérica, foi analisado um laminado com esquema de laminação [30/-30/30]. Os gráficos mostraram que mesmo para a malha mais refinada, o deslocamento transversal ainda não dava sinal de convergência para o elemento com termos espúrios. Entretanto, para o elemento corrigido, a convergência foi satisfatória.

Esse mesmo comportamento ocorreu nos outros exemplos. A segunda análise foi de um laminado assimétrico com seqüência de empilhamento [30/60/60/-20] e o último caso o laminado tinha a seguinte configuração: [30/-30] com diferentes espessuras. Os autores concluem o artigo mostrando que através da notação *strain gradient* é possível identificar e remover os termos espúrios responsáveis por *shear locking* sem introduzir modos espúrios de energia nula. Este problema é típico de elementos isoparamétricos de 8 nós devido à integração de ordem reduzida da matriz de rigidez.

Em outro artigo, os autores Pereira, Abdalla & Machado [24] têm como objetivo avaliar o comportamento de uma placa de compósito laminado por meio de modelagem numérica, via notação *strain gradient*, e comparar os resultados obtidos com os apresentados através de solução analítica. Para isso, foram empregados elementos retangulares de 4 nós em malhas 2×2 , 4×4 , 8×8 , 12×12 e 16×16 (com e sem cisalhamento parasítico). O modelo empregado para solução deste problema foi o de Mindlin – FSDT.

Analisando uma placa simplesmente apoiada com carregamento uniforme, os autores utilizaram como referência o valor analítico para o deslocamento máximo da placa

igual a 0.72 mm. Empregando uma malha 2×2 , o resultado apontou para 0.2986 mm com cisalhamento parasítico e 0.5970 mm sem cisalhamento parasítico. Isso mostra uma rigidez artificial do elemento que possui os termos espúrios causadores de cisalhamento parasítico. A convergência do elemento modelado sem os termos espúrios é mais rápida. Com uma malha 4×4 , obteve-se um resultado satisfatório, com erro de 0.14%, diferente dos 26.61% apresentado pela malha contendo cisalhamento parasítico.

Com isso, a semiografia *strain gradient*, além de ser eficaz no que concerne a sua viabilidade computacional, também é uma ferramenta que auxilia na compreensão do comportamento físico do elemento finito, permitindo a identificação e eliminação de termos espúrios responsáveis por *locking*.

Um dos primeiros trabalhos empregando a HSDT foi publicado em 1977. Os autores Lo, Christensen & Wu [18] fizeram um modelo baseado nessa teoria e compararam os resultados obtidos com a modelagem via CLPT e também com a Teoria da Elasticidade. O objetivo principal deste artigo foi mostrar a incapacidade do modelo gerado via CLPT em reproduzir alguns fenômenos físicos importantes, principalmente para placas espessas. Nesse caso, o cisalhamento transversal se torna pertinente uma vez que a espessura da placa não é pequena. Também é ressaltada a importância da análise por meio da HSDT para problemas com impacto e carregamentos dinâmicos, enfim, problemas essencialmente de natureza tridimensional.

Para o exemplo numérico, foi considerado um carregamento senoidal distribuído ao longo da placa e o compósito utilizado foi o grafite-epóxi. As placas modeladas tiveram a seguinte orientação das suas fibras: $[30/-30/30]$ e $[0/90/0]$. Foram empregadas as relações $a/h = 4$ e 10 . A comparação com a solução obtida por meio da Teoria da Elasticidade para a placa com orientação $[30/-30/30]$ mostrou erros inferiores a 1%, principalmente nas regiões onde a tensão devida à flexão aumenta. Nas regiões de interface entre as camadas das lâminas, foram apresentados erros próximos a 10%. Além disso, este modelo é capaz de mostrar o comportamento parabólico da tensão ao longo da espessura da placa, diferente do resultado linear obtido pela CLPT.

Para a placa com orientação $[0/90/0]$, os resultados se mostraram satisfatórios e próximos aos obtidos através da Teoria da Elasticidade. Porém, nas regiões de interface das camadas, ocorreu uma pequena discrepância dos resultados, provavelmente ocasionada pela elevada descontinuidade nessas regiões, segundo os autores. Finalmente, foi concluído que a teoria apresentada demonstra resultados muito melhores àqueles obtidos via CLPT, especialmente para placas mais espessas, onde os efeitos das componentes de tensões

cisalhantes transversais não podem ser desprezados.

Num artigo publicado em 1985 para análise de placas de laminado anisotrópico, Phan & Reddy [25] empregaram a HSDT para comparar os resultados com os obtidos por Kirchhoff através da CLPT. Neste artigo, a distribuição da tensão é parabólica. Também foi realizada a introdução de coeficientes de correção para o campo dos deslocamentos para os elementos de primeira ordem. O elemento empregado foi um quadrilátero de 4 nós isoparamétrico e cada nó possuía 7 graus de liberdade.

O laminado empregado apresentava distribuição $[0/90/90/0]$ e foi submetido a um carregamento senoidal. A partir dos resultados obtidos, foi mostrado que a solução via HSDT teve excelente convergência e pequena margem de erro quando comparada com uma solução analítica obtida por meio da Teoria da Elasticidade. Os efeitos do cisalhamento transversal nas deflexões foram mostrados nos resultados conforme foi previsto. Além disso, devido à esses efeitos, houve uma redução na rigidez da placa. Apesar da HSDT se mostrar mais eficiente que as outras teorias de primeira ordem, os autores indicam a utilização da CLPT ou FSDT para solução de placas finas ($a/h \geq 50$), pois o cisalhamento transversal nessas placas podem ser desprezados.

As diferenças significativas nos resultados entre a HSDT e CLPT começaram a ser mais evidentes a partir da razão $a/h = 10$, onde a solução obtida através da CLPT não prevê a deflexão para o cisalhamento transversal. Também foi mostrado que os elementos modelados pela HSDT obtiveram uma convergência mais rápida que os elementos gerados pela CLPT. Vale ressaltar que neste artigo foram considerados os efeitos de carregamentos dinâmicos e efeitos de flambagem da placa, porém não foram comentados por não fazerem parte do escopo deste trabalho.

Mais recentemente (2003), foi publicado um artigo onde os autores Aagaah, Mahinfalah & Jazar [1] modelaram um triângulo de 6 nós baseado na Teoria de Lâmina Equivalente – ESLT de Reddy [26] com o objetivo de comparar os resultados obtidos e mostrar que para a modelagem de elementos de terceira ordem não é necessária a inclusão de coeficientes de correção, como é o caso para elementos de primeira ordem. Para os exemplos numéricos, foram empregados três tipos de problema, como segue:

- (i) Uma placa quadrada ($a/b = 1$), de mesma espessura das lâminas, sujeita a um carregamento senoidal com a distribuição laminar da forma $[0/90/0]$;
- (ii) Outra placa quadrada $[0/90/90/0]$ com as mesmas características que a anterior e a mesma condição de carregamento;

- (iii) Uma comparação dos deslocamentos máximos utilizando a FSDT, com fator de correção $k = 5/6$ e a Teoria de Terceira Ordem – TSDT. Conforme os autores, as teorias de terceira ordem e ordem superior (HSDT) são equivalentes, uma vez que a adição de termos de ordem superior a 3 torna o esforço computacional extremamente elevado.

A partir dos resultados obtidos, constatou-se a maior conveniência no elemento implementado empregando a TSDT. Não só pela precisão ser maior, mas também pela facilidade de tornar dispensável a utilização de fatores de correção, que dependem das propriedades das lâminas, fatores estes presentes na FSDT. Para a razão $a/h = 4$, o erro para as tensões usando a TSDT e FSDT resultou em 4.6% e 43.6%, respectivamente. Com a diminuição da espessura do laminado, ou seja, relação $a/h = 10$, os erros reduziram para 3.2% e 26% para teorias de terceira e primeira ordem, respectivamente. Esses foram os erros referentes ao primeiro problema apresentado. O segundo problema mostrou erros menos expressivos. Para $a/h = 4$, o erro foi de 2% para TSDT e 12.8% para FSDT. Com $a/h = 10$, resultou em erros de 1.4% e 10.8% para TSDT e FSDT, respectivamente. Para $a/h = 100$, ambas as teorias resultaram em erro de 0.4%.

Os autores Ganapathi [10] formularam um elemento baseado na HSDT com as equações governantes obtidas por meio do princípio de minimização da energia potencial. Além disso, este elemento possui 11 graus de liberdade por nó ($u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y, w_l, \beta_x, \beta_y, \Gamma, \phi_x, \phi_y$), onde u_0, v_0, w_0 são os deslocamentos de um ponto genérico na superfície de referência; θ_x e θ_y são as rotações normais à superfície de referência sobre os eixos y e x , respectivamente; $w_l, \beta_x, \beta_y, \Gamma, \phi_x$ e ϕ_y são os termos de ordem superior da série de Taylor definidas na superfície de referência. Foi proposto um quadrilátero de 8 nós com continuidade C^0 . Com isso, cada elemento gera 88 graus de liberdade.

Os resultados obtidos foram comparados com as teorias de primeira ordem (elemento com 5 graus de liberdade por nó – FSDT5) e de ordem elevada obtidas através de outras hipóteses, empregando elementos com 9 graus de liberdade por nó (w_l e $\Gamma = 0$ – HSDT9). Os valores de tensão e deslocamento são dados na forma adimensional por meio de expressões apresentadas no artigo. Foram avaliados apenas os casos onde a razão $a/h = 5$ e 10 e $a/b = 0.5, 1$ e 2 , pois foi objetivo do artigo comparar apenas placas espessas, que é onde ocorre o problema do cisalhamento transversal. Dessa forma, obteve-se valores com melhor aproximação para os elementos HSDT11 que os mostrados pelo FSDT5 e HSDT9. Os erros gerados pelo elemento HSDT11 foi de 0.15%, contra 1.28% e 3.30% para os elementos HSDT9 e FSDT5, respectivamente, observando que esses foram os valores

referentes às relações $a/h = 5$ e $a/b = 0.5$.

Para $a/h = 5$ e $a/b = 1$ os erros indicaram 0.12%, 0.70% e 1.18% para os elementos HSDT11, HSDT9 e FSDT5, respectivamente. Com $a/h = 5$ e $a/b = 2$, foram obtidos erros de 1.16% para HSDT11, 8.51% para HSDT9 e 8.25% para FSDT5. Aqui o elemento de primeira ordem se mostrou mais eficaz que o elemento de ordem superior com 9 graus de liberdade, fato este não explicado pelos autores. Já para relações onde a placa é menos espessa, foram obtidos os seguintes resultados: (a) $a/h = 10$ e $a/b = 0.5$, com erros de 0.11%, 1.01% e 1.07% para HSDT11, HSDT9 e FSDT5, respectivamente; (b) $a/h = 10$ e $a/b = 1$ resultaram em erros de 0.15% para HSDT11, 0.56% com HSDT9 e 2.39% para FSDT5; (c) $a/h = 10$ e $a/b = 2$ foi obtido erros de 0.02% e 0.88% para HSDT9 e FSDT5, respectivamente. Para o elemento HSDT11, o resultado foi idêntico ao obtido por meio de solução analítica, enfatizando que esses resultados foram referentes à comparação entre os deslocamentos normalizados para o caso de uma placa com a distribuição $[0/90]_s$. Finalmente, pôde-se concluir que:

- (i) O elemento HSDT11 obteve um resultado ligeiramente melhor que os elementos padrão FSDT5 e HSDT9 empregados para comparações de resultados;
- (ii) Na maioria dos casos estudados, o elemento HSDT11 obteve resultados muito próximos do elemento HSDT9.

Dessa forma, o engenheiro tem que saber avaliar até que ponto vale à pena a implementação de um elemento que tenha muitos graus de liberdade, a fim de favorecer a eficiência computacional.

Este capítulo apresentou a revisão bibliográfica dos artigos pertinentes ao desenvolvimento deste trabalho. Os modelos que empregam as teorias de primeira ordem e ordem superior, baseados na hipótese da Lâmina Equivalente, foram contemplados. O próximo capítulo apresenta uma breve descrição de materiais compósitos.

3 Materiais Compósitos

3.1 Introdução

Ao longo dos anos, a engenharia vem intensificando seus esforços em busca de novos materiais, capazes de se adequar às condições de projeto, assim como melhorar a eficiência de produtos e equipamentos. Este capítulo tem como objetivo mostrar os conceitos básicos e as terminologias utilizadas no estudo dos materiais compósitos.

3.2 Conceitos Preliminares

Os materiais estruturais se dividem basicamente em quatro categorias:

- (i) Metais;
- (ii) Polímeros;
- (iii) Cerâmicos;
- (iv) Compósitos.

Os compósitos, que consistem da união de dois ou mais materiais em **escala macroscópica**, são feitos da combinação de um dos três materiais descritos em (i), (ii) e (iii) com um dos outros dois a fim de melhorar as propriedades que estes teriam se utilizados de maneira isolada. É importante destacar o termo escala macroscópica pois é exatamente o que diferencia os materiais compósitos das ligas metálicas, que estão combinadas na escala microscópica. Ou ainda, segundo Reddy & Miravete [31]:

“Os compósitos são formados pela combinação de dois ou mais materiais na escala macroscópica a fim de promover melhores propriedades de engenharia que individualmente os componentes não apresentam.”

Os compósitos apresentam boa rigidez, resistência à corrosão, baixo peso, boas propriedades térmicas, vida útil maior, entre outras. Isso faz com que ele seja empregado na indústria automotiva nos chassis de carros de alto desempenho, na indústria aeroespacial nos aviões militares e civis, entre outras aplicações. Em aeronaves como os caças F-14, F-15 e F-16 houve uma redução de 20% no peso [12]. Segundo a Boeing[®], o 767 tem 30% da sua superfície externa em material compósito. Em aviões modernos como o caça F-22 da Força Aérea Norte Americana, esse número chega à 45%, ou seja, quase metade da aeronave é em material compósito. Na indústria esportiva, os compósitos são amplamente empregados na fabricação de raquetes de tênis, tacos de golfe, componentes para bicicletas, entre outros. Na construção civil, eles são utilizados em elementos estruturais, como por exemplo, o bambu, o compensado e a viga laminada colada.

A grande maioria dos compósitos é feita de dois materiais: a estrutura chamada de *fibra* e a base do material chamada de *matriz*. A fibra é o elemento que melhora as características mecânicas do compósito, ou seja, rigidez, resistência à ruptura, diminuição do peso, entre outros. As fibras podem ser curtas, geralmente injetadas na peça durante a moldagem ou longas, cortadas após a fabricação. Também podem ser contínuas ou descontínuas, unidirecionais ou bidirecionais, trançadas ou com distribuição randômica. As fibras mais comumente utilizadas são: grafite-carbono, boro, vidro e aramida (*kevlar*[®]). Já a matriz é responsável pela transferência de solicitações mecânicas às fibras, além de protegê-las do ambiente externo. Dentre as matrizes mais utilizadas, destacam-se: as resinosas (poliéster e epóxi), as minerais (carbono) e as metálicas (geralmente em liga de alumínio).

Para a escolha de como será formado o material compósito, é importante observar a aplicação do material (resistência mecânica, elevadas temperaturas), o custo e a compatibilidade entre fibra e matriz (por exemplo, o coeficiente de dilatação térmica deve ser próximo dos materiais empregados).

Como a definição é bastante abrangente, procurou-se caracterizar os compósitos em três principais tipos, a saber:

- (a) *Compósitos fibrosos* $\Rightarrow$ consiste da fibra de um material na matriz de outro. A orientação e o número de fibras utilizadas é que determina a resistência dos materiais compósitos reforçados com fibras, Figs. 3.1(a), 3.1(b) e 3.1(c);
- (b) *Compósitos particulados* $\Rightarrow$ são formados por partículas não tão pequenas de um material suspenso na matriz de outro conforme mostra a Fig. 3.1(d);

(c) *Compósitos laminados* $\Rightarrow$ são compostos pela formação de camadas de diferentes materiais, incluindo os dois primeiros tipos de compósito, Figs. 3.1(e) e 3.1(f).

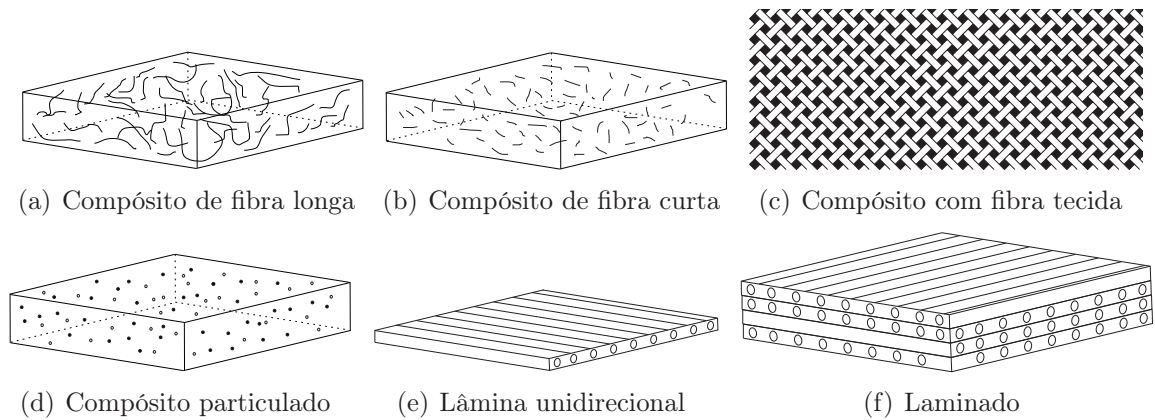


Figura 3.1: Tipos de compósitos.

Fará parte do escopo deste trabalho os compósitos laminados reforçados com fibras unidirecionais, pois se trata do tipo mais utilizado na indústria. A *lâmina* representa o bloco fundamental da estrutura e consiste de fibras envoltas na matriz. No caso das fibras unidirecionais, a lâmina apresenta elevada resistência e módulo de elasticidade na direção da fibra, mas baixos valores dessas propriedades na direção ortogonal às fibras. Já o *laminado* é o conjunto de lâminas empilhadas orientadas sob diversas direções a fim de promover o aumento das características físicas e mecânicas que somente uma lâmina teria. A sequência de empilhamento das lâminas segundo as várias direções é chamado de *esquema de laminação*. A orientação das fibras em várias direções e a sequência de empilhamento das lâminas que garantem aos compósitos laminados a otimização da estrutura conforme um dado carregamento.

Por exemplo, para estruturas sujeitas ao cisalhamento, as fibras devem ser orientadas à 30° e 45° . Com isso, o esquema de laminação auxilia o projetista, pois apresenta um leque de opções de configuração para cada tipo de solicitação. Mas os compósitos laminados apresentam desvantagens, dentre elas a *delaminação*. A delaminação ocorre principalmente devida à tensão de cisalhamento produzida entre as lâminas, especialmente nos bordos do laminado. Além disso, problemas de manufatura e processos de fabricação podem ocasionar delaminação.

3.3 Transformação de Coordenadas

As relações constitutivas de um material ortotrópico são escritas em termos das componentes de tensão e deformação que estão referenciadas num sistema de coordenadas.

É importante destacar que os compósitos laminados possuem várias lâminas (camadas), cada uma delas com fibras em diferentes orientações. Com isso, geralmente, o sistema de coordenadas do material é diferente do sistema de coordenadas do problema. Dessa forma, é necessário estabelecer uma relação de transformação entre as tensões e deformações para os dois sistemas coordenados.

Quando o plano formado pelos eixos x_1x_2 é paralelo às fibras da lâmina e a direção z normal ao plano do laminado coincide com o eixo coordenado do material x_3 , tem-se um tipo especial de transformação entre as coordenadas do material e as coordenadas do problema.

Sejam xyz as coordenadas de solução do problema e $x_1x_2x_3$ as coordenadas principais do material desde que $x_1x_2x_3$ seja obtido de xyz pela rotação do plano xy por um ângulo θ em torno do eixo z , ver Fig. 3.2. A transformação de coordenadas de um ponto qualquer de um sistema para outro com $z = x_3$ é dada por:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

Ou a forma inversa da Eq. (3.1):

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = [A]^T \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

onde $[A]$ representa a matriz dos cossenos diretores. Tal matriz é dita *ortogonal*, isto é, $[A]^{-1} = [A]^T$.

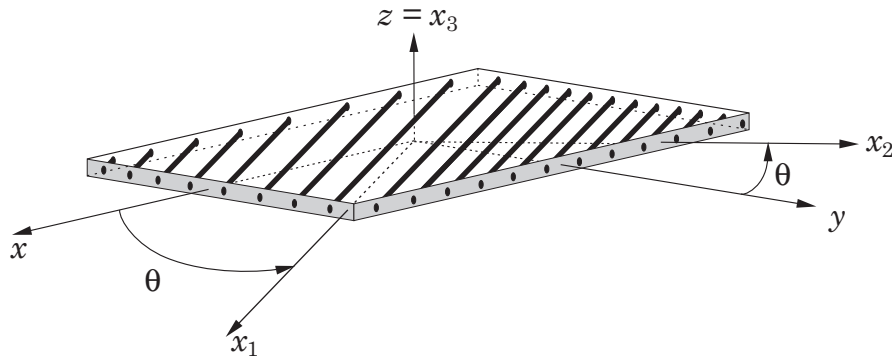


Figura 3.2: Sistema de coordenadas global e do material.

As relações de transformação das Eqs. (3.1) e (3.2) também são válidas para os

vetores unitários associados aos sistemas de coordenadas. Dessa forma,

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{Bmatrix} = [A] \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x \\ \hat{\mathbf{e}}_y \\ \hat{\mathbf{e}}_z \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_x \\ \hat{\mathbf{e}}_y \\ \hat{\mathbf{e}}_z \end{Bmatrix} = [A]^T \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{Bmatrix} \quad (3.3)$$

onde $\{\hat{\mathbf{e}}_1 \ \hat{\mathbf{e}}_2 \ \hat{\mathbf{e}}_3\}^T$ é o vetor de base ortonormal nas coordenadas do material e $\{\hat{\mathbf{e}}_x \ \hat{\mathbf{e}}_y \ \hat{\mathbf{e}}_z\}^T$ são as componentes do mesmo vetor, porém nas coordenadas do problema. Observando a Eq. (3.3), percebe-se que as componentes da matriz dos cossenos diretores são obtidas pelo produto interno entre as componentes dos vetores ortonormais de ambos sistemas coordenados.

Considerando que $[\boldsymbol{\sigma}]$ seja o tensor de tensões e que suas componentes $\sigma_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}, \dots, \sigma_{33}$ representem o sistema de coordenadas do material e que as componentes no sistema do problema sejam $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ e τ_{yz} . Ou seja,

$$[\boldsymbol{\sigma}]_p = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \text{sim.} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\boldsymbol{\sigma}]_m = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ & \sigma_{22} & \tau_{23} \\ \text{sim.} & & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

onde *sim.* indica simetria. E ainda, aplicando a Eq. (3.3) para relacionar as tensões de um sistema coordenado com o outro, obtém-se:

$$[\boldsymbol{\sigma}]_p = [A]^T [\boldsymbol{\sigma}]_m [A] \quad (3.5a)$$

$$[\boldsymbol{\sigma}]_m = [A] [\boldsymbol{\sigma}]_p [A]^T \quad (3.5b)$$

Portanto, a Eq. (3.5a) permite computar as componentes de tensão referidas às coordenadas do laminado em termos das tensões da lâmina, enquanto que a Eq. (3.5b) faz o contrário. Realizando o produto matricial em (3.5a) e (3.5b) e colocando os tensores de tensão em notação vetorial, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & -\sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

ou simplesmente,

$$\{\sigma\}_p = [T] \{\sigma\}_m \quad (3.7)$$

A relação inversa da Eq. (3.6) é dada por:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

ou ainda,

$$\{\sigma\}_m = [R] \{\sigma\}_p \quad (3.9)$$

Assim como as tensões, as deformações também representam grandezas tensoriais. Portanto, o procedimento para transformação de coordenadas é análogo ao que foi feito para determinar as tensões, isto é, as relações expressas por (3.5) também são válidas para as deformações:

$$[\epsilon]_p = [A]^T [\epsilon]_m [A] \quad (3.10a)$$

$$[\epsilon]_m = [A] [\epsilon]_p [A]^T \quad (3.10b)$$

onde $[\epsilon]$ se refere ao tensor de deformações. Com isso, as deformações no sistema global de coordenadas têm suas componentes (ϵ_{xx} , ϵ_{yy} , ϵ_{zz} , γ_{xy} , γ_{xz} e γ_{yz}) dadas por:

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

e, finalmente, a relação inversa:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 0 & 0 & 0 & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & 0 & 0 & 0 & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.12)$$

3.4 Análise Mecânica de uma Lâmina

Para estudar o comportamento mecânico de uma lâmina, que é a estrutura básica e fundamental do laminado, duas hipóteses devem ser consideradas:

- (i) A lâmina é contínua, ou seja, não existem vazios;
- (ii) O comportamento da lâmina é linear elástico.

Com isso, o comportamento da lâmina será apresentado nas próximas seções sob os aspectos da *micromecânica* e da *macromecânica*.

3.4.1 Micromecânica de uma Lâmina

O estudo das interações microscópicas entre os elementos constituintes da lâmina é denominado *micromecânica*. Esta análise é utilizada para determinar as constantes de engenharia do material compósito e é baseada nas seguintes hipóteses:

1. União perfeita entre fibra e matriz;
2. As fibras são paralelas e uniformemente distribuídas na matriz;
3. A matriz é livre de tensões iniciais;
4. Tanto a matriz como a fibra são isotrópicas e obedecem à Lei de Hooke;
5. Os carregamentos são paralelos ou perpendiculares à direção da fibra.

Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal e o coeficiente de Poisson nas direções principais 1 – 2 da lâmina são dados por:

$$\begin{aligned}
E_1 &= E_f V_f + E_m V_m \\
E_2 &= \frac{E_f E_m}{E_f V_m + E_m V_f} \\
G_{12} &= \frac{G_f G_m}{G_f V_m + G_m V_f} \\
\nu_{12} &= \nu_f V_f + \nu_m V_m
\end{aligned} \tag{3.13a}$$

onde:

$E_f \Rightarrow$ Módulo de elasticidade longitudinal da fibra;

$E_m \Rightarrow$ Módulo de elasticidade longitudinal da matriz;

$\nu_f \Rightarrow$ Coeficiente de *Poisson* da fibra;

$\nu_m \Rightarrow$ Coeficiente de *Poisson* da matriz;

$V_f \Rightarrow$ Fração de volume da fibra;

$V_m \Rightarrow$ Fração de volume da matriz.

Os módulos de elasticidade transversal são dados por:

$$\begin{aligned}
G_f &= \frac{E_f}{2(1 + \nu_f)} \\
G_m &= \frac{E_m}{2(1 + \nu_m)}
\end{aligned} \tag{3.13b}$$

G_f e G_m representam o módulo de elasticidade transversal da fibra e da matriz, respectivamente. Outra maneira de se determinarem as constantes de engenharia E_1 , E_2 , G_{12} e ν_{12} é experimentalmente. A Fig. 3.3 mostra um ensaio de tração simples com os sensores, chamados de *strain gages*, colocados ortogonalmente entre si para avaliar tais parâmetros.

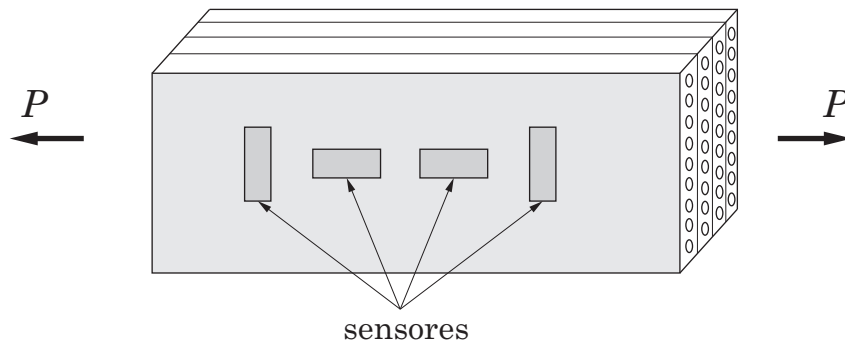


Figura 3.3: Ensaio de caracterização mecânica de um laminado.

3.4.2 Macromecânica de uma Lâmina

O termo *comportamento macromecânico*, segundo Mendonça [21], refere-se ao comportamento da lâmina apenas quando propriedades mecânicas aparentes médias são consideradas. A Fig. 3.4 mostra esse tipo de comportamento para a lâmina e para o laminado.

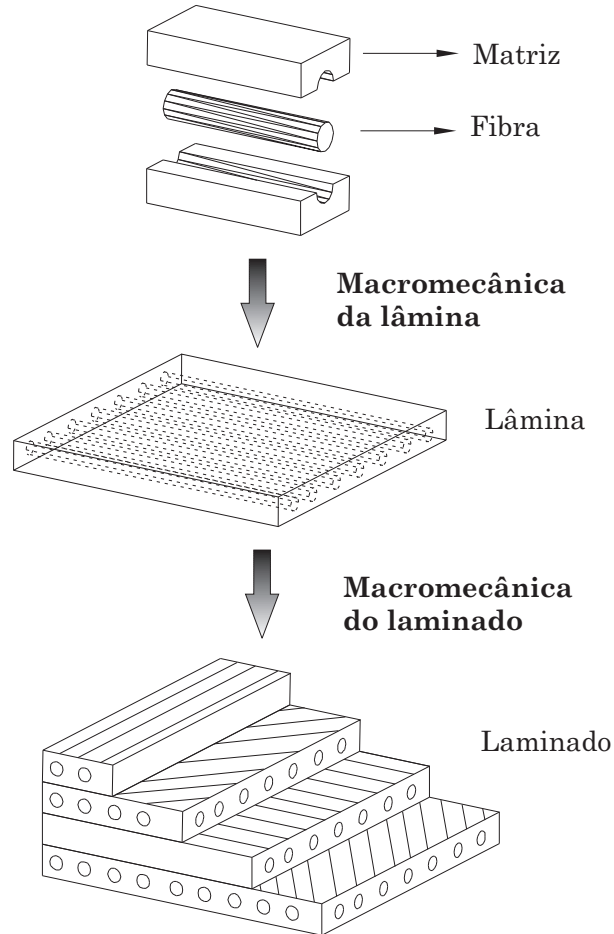


Figura 3.4: Níveis de análise de um compósito laminado.

A restrição básica da teoria é assumir um comportamento linear elástico para os materiais tratados. Portanto, a lei de Hooke generalizada é empregada para o desenvolvimento da relação tensão $\times$ deformação:

$$\{\sigma\} = [C] \{\epsilon\} \quad (3.14)$$

onde $[C]$ é a matriz constitutiva do material. Para materiais anisotrópicos a relação dada pela Eq. (3.14) fica:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ sim. & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Para materiais que possuem dois planos ortogonais de simetria de propriedades do material, existe necessariamente simetria relativa ao terceiro plano mutuamente ortogonal aos outros dois. Caso isso ocorra, o material possui tríplice simetria e é chamado de *ortotrópico* – que será o foco de estudo deste trabalho. A Eq. (3.16) mostra a relação tensão $\times$ deformação desse tipo de material:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ sim. & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

As direções principais de propriedades do material são paralelas às interseções dos três planos ortogonais de simetria do material. Com isso, um material ortotrópico possui pelo menos um sistema de coordenadas em cada ponto em que as tensões normais provocam apenas deformações normais e que as tensões cisalhantes provocam apenas deformações cisalhantes na direção do carregamento. Os coeficientes elásticos de C_{ij} na Eq. (3.16) são relacionados às constantes de engenharia E_i , G_{ij} e ν_{ij} por:

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_1 \cdot \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{\Delta}, & C_{12} &= E_1 \cdot \frac{\nu_{21} - \nu_{31}\nu_{23}}{\Delta} = E_2 \cdot \frac{\nu_{12} - \nu_{32}\nu_{13}}{\Delta} \\ C_{13} &= E_1 \cdot \frac{\nu_{31} - \nu_{21}\nu_{32}}{\Delta} = E_3 \cdot \frac{\nu_{13} - \nu_{12}\nu_{23}}{\Delta}, & C_{22} &= E_2 \cdot \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{\Delta} \\ C_{23} &= E_2 \cdot \frac{\nu_{32} - \nu_{12}\nu_{31}}{\Delta} = E_3 \cdot \frac{\nu_{23} - \nu_{21}\nu_{13}}{\Delta}, & C_{33} &= E_3 \cdot \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{\Delta} \\ C_{44} &= G_{23}, & C_{55} &= G_{13}, & C_{66} &= G_{12} \\ \Delta &= 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde E_1 , E_2 e E_3 são os módulos de elasticidade longitudinal, ou de Young nas direções principais 1 – 2 – 3; G_{12} , G_{23} e G_{31} são os módulos de elasticidade transversais nos planos 1 – 2, 2 – 3 e 3 – 1, respectivamente; e ν_{ij} são os coeficientes de Poisson obtidos da relação

entre a deformação na direção j quando um elemento diferencial de volume é carregado apenas na direção i ($\nu_{ij} = -\varepsilon_j/\varepsilon_i$), ou seja:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.18)$$

A matriz $[C]$ é não singular com nove constantes independentes o que significa que ela é inversível:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & & & & S_{55} & S_{56} \\ sim. & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.19)$$

onde $[S]$ é a matriz de flexibilidade do material. Para materiais ortotrópicos, essa relação fica simplificada por:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ sim. & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Os coeficientes de S_{ij} na Eq. (3.20) também são obtidos a partir das constantes de engenharia E_i , G_{ij} e ν_{ij} por:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1}, & S_{12} &= -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}, & S_{13} &= -\frac{\nu_{31}}{E_3} = -\frac{\nu_{13}}{E_1}, & S_{22} &= \frac{1}{E_2} \\ S_{23} &= -\frac{\nu_{32}}{E_3} = -\frac{\nu_{23}}{E_2}, & S_{33} &= \frac{1}{E_3}, & S_{44} &= \frac{1}{G_{23}}, & S_{55} &= \frac{1}{G_{31}}, & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

3.5 Relações Constitutivas no EPT

O Estado Plano de Tensões, EPT, é definido como sendo aquele em que cada ponto está sujeito às tensões num único plano, ou seja, ele ocorre em sólidos cujas dimensões na direção z são muito pequenas. O exemplo mais comum é o de uma chapa ou lâmina solicitada em seu plano médio, sem carregamento atuando perpendicularmente a

ele, como mostra a Fig. 3.5.

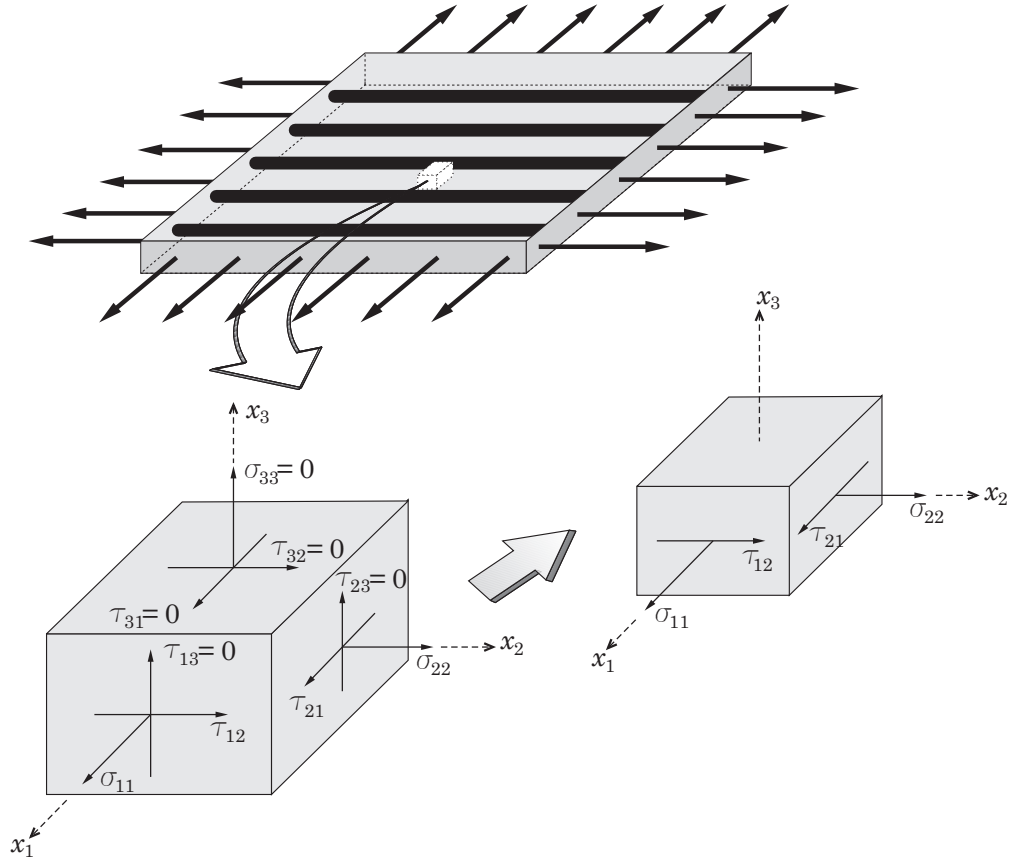


Figura 3.5: Lâmina no estado plano de tensões.

Para esse problema, as tensões σ_{11} , σ_{22} e τ_{12} são diferentes de zero. Entretanto, as tensões τ_{23} e τ_{13} são nulas na superfície média enquanto σ_{33} é nula ao longo da espessura. Apesar de $\sigma_{33}=0$, isso não implica na nulidade da deformação ε_{33} , ou seja, para uma lâmina ortotrópica:

$$\varepsilon_{33} = S_{13}\sigma_{11} + S_{23}\sigma_{22} \quad (3.22)$$

Já as condições de que $\tau_{23}=\tau_{13}=0$ implicam em:

$$\begin{aligned} \gamma_{13} &= 0 \\ \gamma_{23} &= 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Com isso, a relação deformação $\times$ tensão no estado plano de tensões se reduz à:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{12}}{E_1} & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.24)$$

A Eq. (3.24) pode ser invertida para se obter a relação tensão $\times$ deformação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

onde Q_{ij} são os termos da matriz de rigidez reduzida expressos em função das constantes de engenharia por:

$$\begin{aligned} Q_{11} &= \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{12} &= \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{22} &= \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \\ Q_{66} &= \frac{1}{S_{66}} = G_{12} \end{aligned} \quad (3.26)$$

É importante perceber que a matriz de rigidez reduzida, $[Q]$, envolve apenas quatro constantes independentes do material: E_1 , E_2 , ν_{12} e G_{12} .

Quando a tensão normal transversal é negligenciada ($\sigma_3 = 0$), mas as tensões cisalhantes transversais são consideradas ($\gamma_{13} \neq \gamma_{23} \neq 0$), a Eq. (3.25) pode ser acrescida pela seguinte relação constitutiva:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (3.27)$$

onde $Q_{44} = C_{44} = G_{23}$ e $Q_{55} = C_{55} = G_{13}$.

Como já foi visto na seção 3.3, é mais interessante para a análise trabalhar nas coordenadas globais ou do problema. Sendo assim, a relação tensão $\times$ deformação de uma lâmina ortotrópica sob o EPT nas coordenadas globais são:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.28a)$$

e,

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.28b)$$

onde os termos $\bar{Q}_{ij}$ são dados por:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{11} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{22} - 2Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{11} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66}(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \\
\bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \\
\bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \\
\bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta
\end{aligned} \tag{3.28c}$$

A matriz $[\bar{Q}]$ é chamada de matriz de rigidez transformada e está no sistema global de coordenadas. A Eq. (3.28a) define as tensões normais e de cisalhamento no plano, enquanto que a Eq. (3.28b) define as tensões cisalhantes transversais.

3.6 Tipos de Laminados

Em geral, laminados são construídos segundo determinados padrões na sequência das lâminas, propriedades mecânicas, espessuras e orientações das fibras. Nesse contexto, esta seção apresenta a terminologia relativa ao esquema de laminação e condições de simetria (simetria, assimetria e antisimetria) de um compósito laminado.

Primeiramente, a sequência de empilhamento das lâminas também chamada de *esquema de laminação* pode ser descrita como $[\alpha/\beta/\gamma/\dots/\omega]$, onde α é a orientação, em graus, das fibras da primeira camada, β é a orientação das fibras da segunda lâmina, e assim por diante (ver Fig. 3.6). Essa nomenclatura é empregada no caso das lâminas possuírem a mesma espessura. Caso isso não ocorra: $[t_1, \alpha/t_2, \beta/t_3, \gamma/\dots/t_N, \omega]$, onde t_1 se refere à espessura da primeira lâmina, t_2 à espessura da segunda camada e assim sucessivamente até a espessura da última lâmina t_N . Com isso, a numeração das camadas é feita de baixo para cima, isto é, no sentido positivo de z .

Em termos da orientação da fibra de um laminado, o ângulo é compreendido entre -90° e 90° . Quando houver apenas fibras orientadas à 0° ou 90° , o laminado é chamado de *cruzado* ou *cross-ply*. Por exemplo, $[0/90/90/0/90]$ é um laminado cruzado com cinco lâminas. Por outro lado, quando a fibra tiver qualquer orientação, inclusive a mencionada

para os laminados cruzados, o laminado pode ser classificado como *angular* ou *angle-ply*. Exemplo deste tipo de configuração é $[-15/30/90/-60]$.

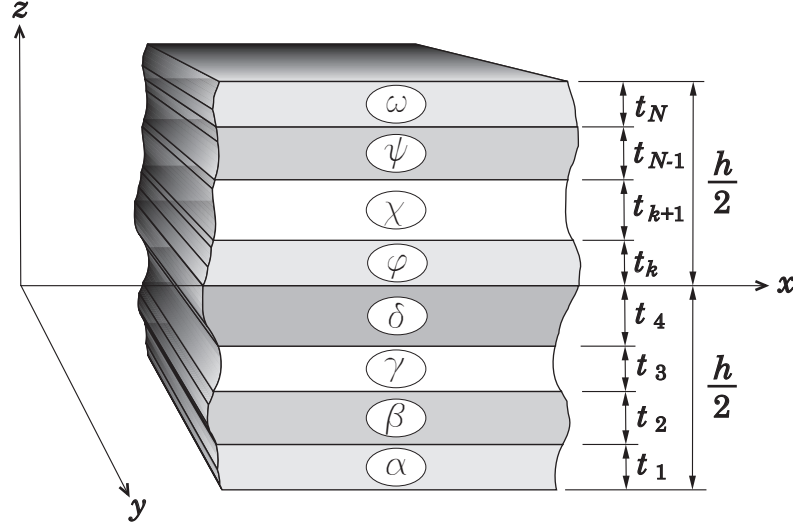


Figura 3.6: Seqüência de empilhamento de um laminado qualquer.

Quando o laminado apresentar uma disposição simétrica em relação à superfície média, o compósito é chamado de *laminado simétrico*. Com isso, a metade superior da espessura do laminado é um espelho da parte inferior. Devido à simetria, não ocorre o acoplamento de membrana, mas esse assunto será mais detalhado na seção 4.2. Para este tipo de laminado, o número de camadas pode ser ímpar ou par. Para indicar que o laminado é simétrico, utiliza-se o subíndice s após a referência dos ângulos, isto é, $[0/90/0]_s \equiv [0/90/0/0/90/0]$.

Outro tipo especial de laminado é o *anti-simétrico*. Este tipo de simetria é muito útil quando se deseja um laminado torcionado após a cura, como por exemplo, as pás de uma hélice. A característica desse tipo de laminado é apresentar sinais alternados entre as camadas, duas à duas, ou lâminas orientadas à 0° e 90° também aos pares. Isso faz com que apenas um número par de lâminas sejam conferidas aos laminados anti-simétricos. Por exemplo, $[0/90]_2 \equiv [0/90/0/90]$ ou $[45/-45]_3 \equiv [45/-45/45/-45/45/-45]$, onde o subíndice indica a quantidade de repetições do esquema mencionado. Uma vez que não ocorra simetria ou anti-simetria, o compósito é dito *assimétrico*.

As Figs. 3.7(a)–(f) apresentam os tipos mais comuns de compósitos laminados e algumas combinações de esquema de laminação. Inicialmente, as Figs. 3.7(a) e 3.7(b) se referem aos laminados assimétricos cruzados e angulares, respectivamente. Posteriormente, as Figs. 3.7(c) e 3.7(d) mostram os laminados cruzados e angulares simétricos. É importante observar que a simetria deve ocorrer na seqüência de empilhamento, nas espessuras, orientações das fibras e propriedades mecânicas. Por último, as Figs. 3.7(e) e

3.7(f) apresentam os laminados anti-simétricos cruzados e angulares, respectivamente.

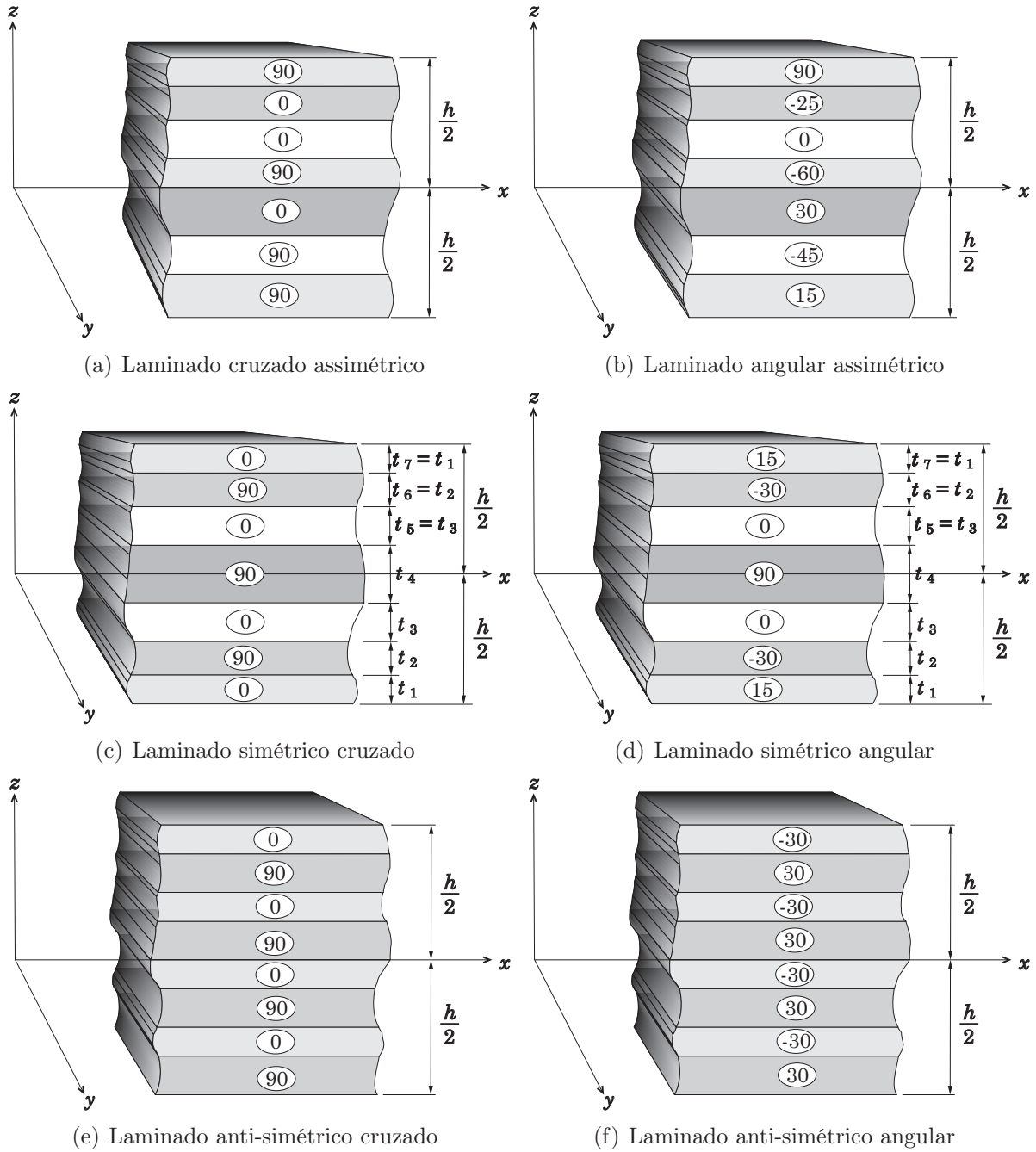


Figura 3.7: Exemplos de esquemas de laminação.

Este capítulo apresentou os principais conceitos sobre análise mecânica de uma lâmina, bem como, o seu equacionamento. Foram mostradas as transformações de coordenadas de um sistema local para o sistema global. Também foi discutido o estado plano de tensões e, finalmente, a terminologia para o estudo dos laminados foi introduzida. Com isso, para dar continuidade ao trabalho, o próximo capítulo irá abordar as principais teorias para análise de placas laminadas.

4 Teoria de Análise de Placas Laminadas

4.1 Introdução

As estruturas laminadas, como já foi descrito no Capítulo 3, são formadas pelo empilhamento de duas ou mais camadas, também chamadas de *lâminas*, de materiais compósitos sob diferentes orientações da fibra. O objetivo deste capítulo é descrever as teorias de laminados compósitos mais comumente utilizadas. Dessa forma, para um melhor entendimento desta seção sobre a análise de placas compósitas laminadas será apresentado um pequeno resumo consolidado conforme as seguintes teorias mostradas por Reddy [27]:

1. Teoria da Lâmina Equivalente, ESLT – *Equivalent Single Layer Theory* (2-D)
 - (i) Teoria Clássica de Placas Laminadas, CLPT – *Classical Laminated Plate Theory*
 - (ii) Teoria de Primeira Ordem de Mindlin, FSDT – *First-order Shear Deformation Theory*
 - (iii) Teoria de Ordem Superior, HSDT – *High-order Shear Deformation Theory*
2. Teoria da Lâmina Discreta, LWT – *Layerwise Theory* (3-D)

Por ser bidimensional, a Teoria da Lâmina Equivalente é a mais simples. O que diferencia os três modelos da ESLT é a consideração ou não dos efeitos de cisalhamento transversal. Portanto, as próximas seções irão apresentar mais detalhadamente as teorias baseadas na ESLT. Entretanto, a Teoria da Lâmina Discreta não será contemplada, principalmente, porque a formulação dos elementos finitos empregados nesta dissertação utiliza o modelo FSDT baseado no campo dos deslocamentos. Resumidamente, o que a LWT considera é a continuidade das tensões σ_{zz} , τ_{xz} e τ_{yz} nas interfaces das lâminas, além

de apresentar resultados mais precisos, principalmente, para a tensão transversal normal, σ_{zz} .

4.2 Análise via CLPT

A primeira teoria aplicada ao estudo das estruturas laminadas foi a CLPT, que é uma extensão da Teoria Clássica de Placas – CPT. Ou seja, ela é uma adaptação da Teoria de Kirchhoff para laminados, de tal maneira que obedece às mesmas hipóteses do modelo para placas:

1. O laminado consiste da união de lâminas ligadas perfeitamente entre si. A camada de resina que é utilizada para unir as camadas é fina e indeformável por cisalhamento, portanto, não é considerada na análise;
2. Seções planas, ou seja, as linhas perpendiculares à superfície média na configuração indeformada, permanecem planas e perpendiculares após a deformação, pois o laminado é considerado delgado. Isso é quantificado de maneira bastante arbitrária, variando de autor para autor, mas segundo Reddy [27]:
 - (a) Laminados delgados $\Rightarrow$ a relação do comprimento do laminado pela sua espessura, a/h , deve ser maior ou igual a 50
 - (b) Laminados semi-espessos $\Rightarrow 20 \leq a/h < 50$
 - (c) Laminados espessos $\Rightarrow a/h < 20$
3. Os segmentos normais à superfície de referência são considerados inextensíveis, portanto, de comprimentos constantes. Em outras palavras, não ocorre deformação na direção transversal da placa.

A primeira hipótese impõe a condição de que não ocorre deslizamento ou descolamento entre as lâminas além dos deslocamentos serem contínuos através das camadas. A segunda hipótese se refere à não consideração dos efeitos de cisalhamento transversal, ou seja, tanto γ_{xz} e γ_{yz} são desprezados e, por fim, a terceira hipótese implica em que o deslocamento transversal é independente da espessura e que a deformação linear, ε_{zz} , é nula. Na formulação deste modelo, em decorrência de algumas hipóteses surgem certas restrições, a saber:

1. O material de cada lâmina é linear elástico, conseqüentemente, as deformações e rotações são pequenas;

2. O modelo apresenta dois planos de simetria, ou seja, é ortotrópico.

O campo dos deslocamentos segundo as hipóteses de Kirchhoff são dados pela expressão:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

onde u_0 , v_0 , w_0 são os deslocamentos da superfície média ao longo dos eixos x , y e z , respectivamente e $\partial w_0/\partial x$ e $\partial w_0/\partial y$ são as rotações em torno de y e x , respectivamente. A Fig. 4.1 mostra as configurações indeformada e deformada conforme as hipóteses de Kirchhoff no plano xz . Como o plano de referência é o plano médio ($z = 0$), um problema que originalmente deveria ser tratado como 3D, passa a ser bidimensional.

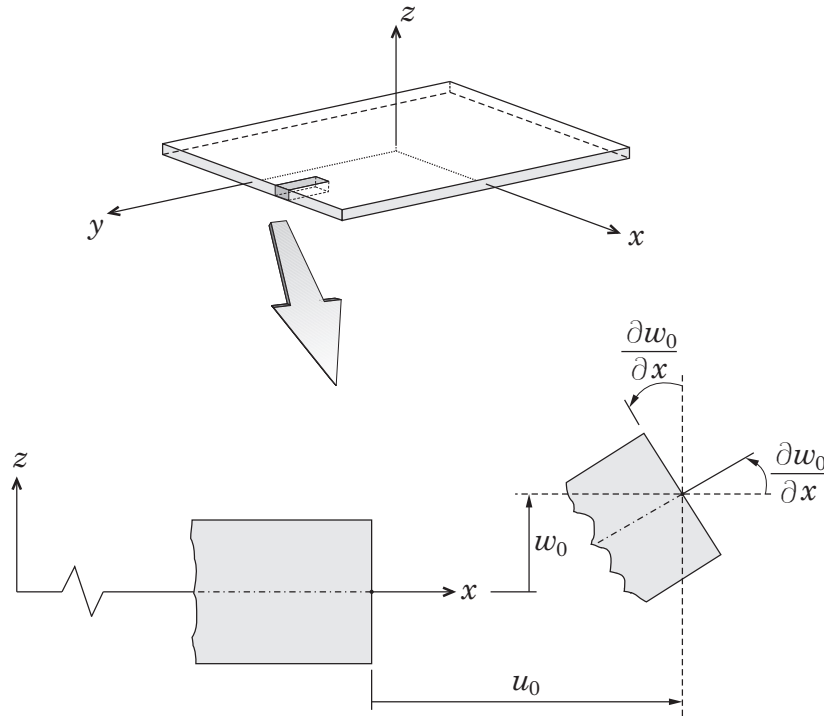


Figura 4.1: Configuração da placa deformada e indeformada segundo as hipóteses de Kirchhoff.

Conseqüentemente, o campo das deformações é dado por:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde ε_{xx} e ε_{yy} são as deformações normais no plano e γ_{xy} é a deformação cisalhante no plano, ou distorção angular no plano xy . Neste ponto, são definidas as deformações coplanares da superfície de referência como *deformações de membrana*. Essas deformações são aquelas que são independentes de z na Eq. (4.2) e se relacionam aos deslocamentos de membrana u_0 e v_0 por:

$$\left\{ \varepsilon^0 \right\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.3)$$

Os termos dependentes de z na Eq. (4.2) são deformações associadas à flexão da superfície média e são denominadas *curvaturas* e representam a derivada segunda do deslocamento transversal por:

$$\left\{ \varepsilon^1 \right\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Portanto, representa-se o vetor de deformações como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (4.5)$$

ou, na forma compacta:

$$\left\{ \varepsilon \right\} = \left\{ \varepsilon^0 \right\} + z \left\{ \varepsilon^1 \right\} \quad (4.6)$$

Conhecendo os valores dos deslocamentos de membrana (u_0 , v_0 e w_0), é possível determinar as deformações em qualquer ponto (x, y, z) da placa utilizando a Eq. (4.5).

Como na CLPT todas as deformações transversais (ε_{zz} , γ_{xz} e γ_{yz}) são nulas por definição, para um laminado formado por lâminas ortotrópicas as tensões cisalhantes transversais (τ_{xz} e τ_{yz}) também são nulas. Apesar de ε_{zz} ter valor nulo, a tensão σ_{zz} não é nula, entretanto, ela é desprezada no modelo de Kirchhoff. Com isso, aplicando a Eq. (4.5) em (3.28a) a relação tensão $\times$ deformação da k -ésima lâmina será:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \right) \quad (4.7)$$

ou simplesmente,

$$\{\sigma\}^{(k)} = [\bar{Q}]^{(k)} \left(\{\varepsilon^0\} + z \{\varepsilon^1\} \right) \quad (4.8)$$

Apesar dos valores de $\{\varepsilon^0\}$ serem constantes ao longo da espessura do laminado, os valores de $\{\varepsilon^1\}$ variam linearmente. Dessa forma, as deformações variam de maneira linear e contínua ao longo da espessura. Contudo, os valores de tensão mesmo sendo lineares, apresentam descontinuidades ao longo da espessura h do laminado, pois as propriedades elásticas variam de uma lâmina para outra conforme mostrado nas Eqs. (4.7) e (4.8). A Fig. 4.2 também mostra essa variação, além de apresentar a numeração das lâminas que geralmente é feita na análise de placas laminadas.

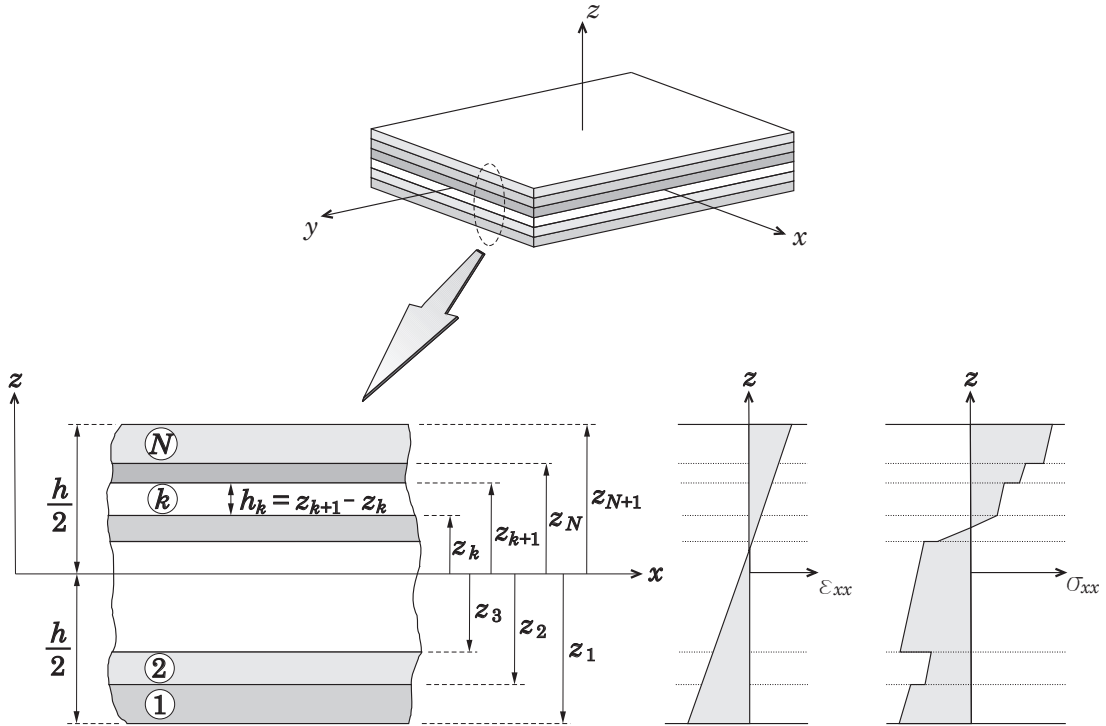


Figura 4.2: Numeração típica de um laminado com a variação de sua deformação e tensão normais ao longo da espessura segundo a CLPT.

Os valores de tensão obtidos pelas Eqs. (4.7) e (4.8) podem ser avaliados a partir das resultantes de tensão no laminado. Essas resultantes de tensão são definidas pela integração das tensões através da espessura do laminado. Dessa forma, a Eq. (4.9a) apresenta os esforços normais resultantes numa placa, enquanto a Eq. (4.9b) mostra os momentos resultantes, ou seja:

$$\{N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\} dz \quad (4.9a)$$

$$\{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\} z dz \quad (4.9b)$$

Tanto $\{N\}$ quanto $\{M\}$ são dados por unidade de comprimento da placa e suas orientações estão exibidas na Fig. 4.3.

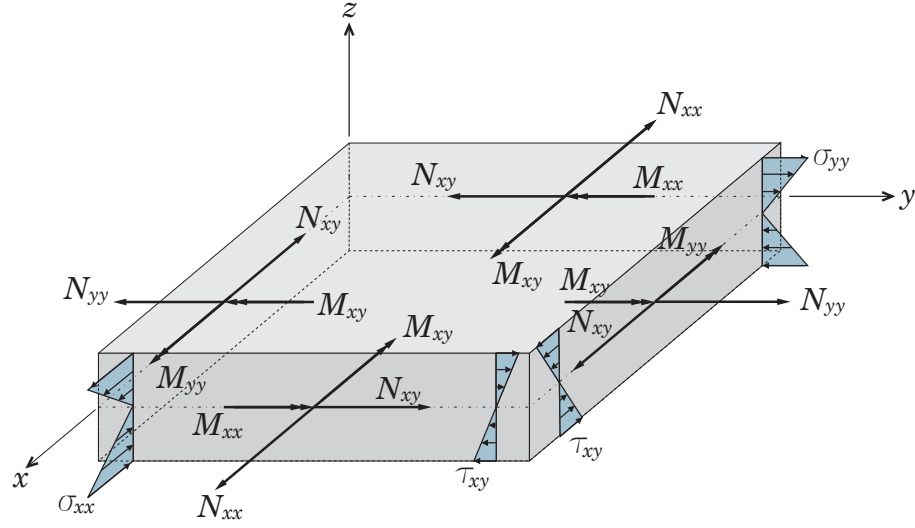


Figura 4.3: Elemento diferencial de placa sujeito à flexão com as resultantes de tensão e distribuição das tensões segundo a CLPT.

As integrais definidas pela Eq. (4.9) podem ser convertidas num somatório de integrais ao longo da espessura de cada lâmina k , ou seja:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad (4.10)$$

e,

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} z dz \quad (4.11)$$

onde z_{k+1} se refere à cota superior da lâmina e z_k é à cota inferior (ver Fig. 4.2).

Substituindo as tensões laminares dadas pelas Eqs. (4.10) e (4.11) pela relação tensão $\times$ deformação da Eq. (4.7), têm-se para os esforços normais:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \right) dz \quad (4.12)$$

Efetuando o somatório e resolvendo a integral, vem:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

Analogamente para as resultantes de momento, têm-se:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \left(\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \right) z dz \quad (4.14)$$

e finalmente,

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (4.15)$$

É possível colocar os esforços normais e momentos resultantes expressos por (4.13) e (4.15) num único vetor, isto é:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & & & & D_{22} & D_{26} \\ & & & & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (4.16)$$

ou, de maneira compacta:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^{(0)}\} \\ \{\varepsilon^{(1)}\} \end{Bmatrix} \quad (4.17)$$

onde os termos de A_{ij} , B_{ij} e D_{ij} são definidos em termos da rigidez da lâmina $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ (para $i, j = 1, 2, 6$) por:

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2) dz \quad (4.18a)$$

ou,

$$\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \\
B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \\
D_{ij} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3)
\end{aligned} \tag{4.18b}$$

A parcela da força normal resultante causada pela deformação normal é descrita na matriz $[A]$ também chamada de *matriz de rigidez extensional*. Enquanto que a matriz $[D]$, ou *matriz de rigidez à flexão*, como o próprio nome diz representa a parcela do momento resultante causado pela flexão do laminado. E por fim, o acoplamento entre os modos de deformação, isto é, a parcela da força normal resultante causada pela flexão e a parte do momento resultante causada pela deformação normal é representada pela matriz $[B]$, ou *matriz de rigidez de acoplamento extensão–flexão*. Conforme o ângulo θ formado entre a direção das fibras da lâmina e o eixo do problema, a matriz $[B]$ poderá ser nula.

4.3 Análise via FSDT

Na análise empregando a FSDT (*First-order Shear Deformation Theory*), a hipótese de Kirchhoff de que as seções normais transversais permanecem perpendiculares à superfície média após a deformação, não é considerada. Com isso, são incluídas as componentes cisalhantes. De fato, essas tensões além de não serem nulas, assumem valores importantes nas interfaces das lâminas dos materiais compósitos laminados, podendo causar a delaminação. Entretanto, a CLPT não contemplava o cálculo de tais tensões. Foi quando Mindlin [22] e Reissner [34] propuseram o estudo das tensões cisalhantes em placas isotrópicas homogêneas. Por isso, a FSDT é também conhecida como *Teoria de Primeira Ordem de Mindlin*. Posteriormente, estes estudos foram estendidos para análise de laminados por Yang [45] e Whitney [44].

Considerando que o equacionamento fundamental da FSDT é análogo ao apresentado na seção 4.2, a seguir será mostrado apenas as expressões relevantes e que diferenciam um modelo do outro. Com isso, o campo dos deslocamentos dados pela Eq. (4.1) agora fica:

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z \phi_x(x, y, t) \\
v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z \phi_y(x, y, t) \\
w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

onde u_0 , v_0 , w_0 , ϕ_x , ϕ_y são funções a serem determinadas, também chamadas de *deslocamentos generalizados*. Exatamente como na CLPT, u_0 , v_0 , w_0 são deslocamentos de um ponto qualquer na superfície de referência, ou seja, no plano $z = 0$. As rotações ϕ_x e ϕ_y podem ser expressas por:

$$\phi_x = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{e} \quad \phi_y = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4.20)$$

e indicam as rotações em torno dos eixos y e x , respectivamente. A Fig. 4.4 mostra uma dessas rotações em relação à configuração indeformada no plano xz , ou seja, em torno de y . Apesar de não aparecer na formulação, ϕ_z representa a rotação ao redor de z e será utilizada na notação *strain gradient*.

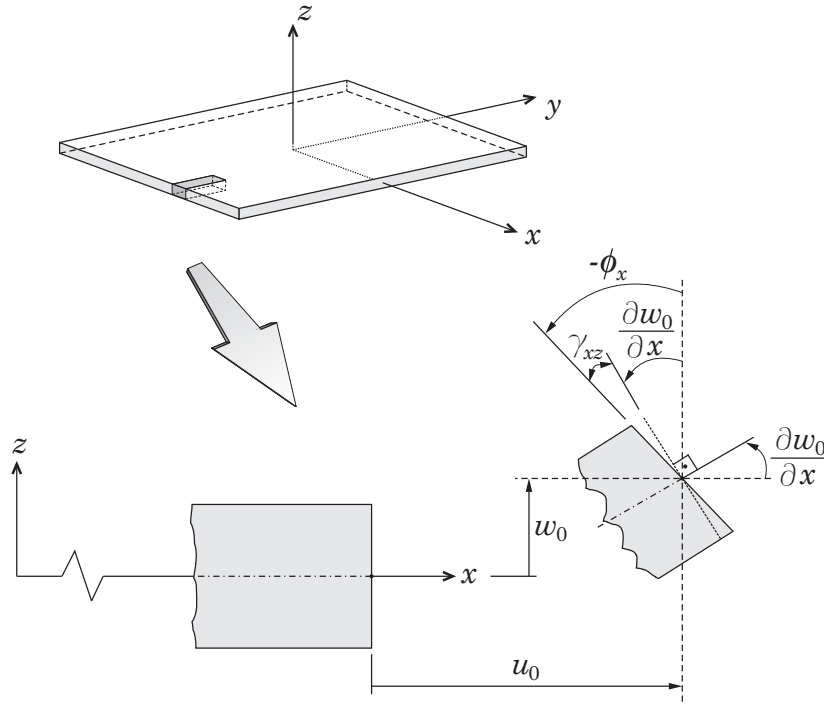


Figura 4.4: Configuração da placa deformada e indeformada segundo a Teoria de Primeira Ordem de Mindlin.

Assumindo que o material trabalhe no regime linear elástico, portanto, não sendo consideradas as parcelas de não linearidade das deformações e aplicando (4.2) em (4.19):

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.21)$$

ou, vetorialmente:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.22)$$

onde o primeiro vetor contém as deformações de membrana e o segundo as curvaturas.

Aplicando o conceito das resultantes de tensão, isto é, integrando as tensões cisalhantes em termos da espessura do laminado, como foi feito nas Eqs. (4.9a) e (4.9b), tem-se:

$$\{Q_x, Q_y\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\tau_{xz}, \tau_{yz}\} dz \quad (4.23)$$

onde $\{Q_x\}$ e $\{Q_y\}$ são chamadas de *resultantes de tensão* devido ao cisalhamento.

É importante observar na Eq. (4.22) que as deformações ε_{xx} , ε_{yy} e γ_{xy} são lineares ao longo da espessura do laminado, enquanto que γ_{xz} e γ_{yz} são constantes. Com isso, as tensões correspondentes (τ_{xz} e τ_{yz}) também serão constantes. Entretanto, sabe-se pela Teoria da Elasticidade, que a tensão cisalhante ao longo da espessura da placa varia parabolicamente. Assim sendo, a FSDT não consegue representar esta característica. Essa incoerência entre teoria e modelo numérico é solucionada por meio de emprego de fatores de correção para tensão de cisalhamento na Eq. (4.23), de tal maneira que:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad (4.24)$$

onde K é chamado de *fator de cisalhamento*. Porém, este tipo de correção não é necessária para elementos de ordem elevada, como será mostrado na seção 4.4. Muitos autores [26, 25, 1, 34, 22] preconizam e comparam tais coeficientes, avaliando a melhor aproximação. Neste trabalho, será utilizado o valor $K = 5/6$. Entretanto, muitos são os fatores que devem ser considerados para análise dessa constante em compósitos laminados, entre elas a sequência de empilhamento, a geometria do laminado, o ângulo das fibras e o tipo de carregamento. Para cargas estáticas, por exemplo, a determinação de K é mais simples que em análises dinâmicas devido à presença de forças inerciais. Reissner [34] para determinar o fator de cisalhamento, considerou a distribuição da tensão cisalhante ao longo da espessura de uma viga dada pela Resistência dos Materiais:

$$\tau_{xz}^{rm} = \frac{3Q}{2bh} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right], \quad -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \quad (4.25)$$

onde Q é o esforço cortante, b é a largura da viga e h a sua altura. A mesma tensão para vigas via FSDT é dada por:

$$\tau_{xz}^{fsdt} = \frac{Q}{bh} \quad (4.26)$$

Aplicando o conceito de energia de deformação cisalhante nas duas teorias, tem-se:

$$U_S^{rm} = \frac{1}{2G_{13}} \int_A (\tau_{xz}^{rm})^2 dA = \frac{3Q^2}{5G_{13}bh} \quad (4.27a)$$

$$U_S^{fsdt} = \frac{1}{2G_{13}} \int_A (\tau_{xz}^{fsdt})^2 dA = \frac{Q^2}{2G_{13}bh} \quad (4.27b)$$

O coeficiente de cisalhamento é obtido pela razão entre as Eqs. (4.27b) e (4.27a), isto é, $5/6$.

Retornando à Eq. (4.22) e substituindo em (3.28b), a relação tensão $\times$ deformação da k -ésima lâmina será:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Lembrando que os coeficientes de $\bar{Q}_{ij}$ foram apontados pela Eq. (3.28c), substituindo a Eq. (4.28) em (4.24) e resolvendo a integral e o somatório, vem:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

onde a rigidez extensional $[A_{ij}]$ é definida, fazendo $(i, j = 4, 5)$, por:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz \\ &= \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz \\ &= \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1} - z_k) \end{aligned} \quad (4.30)$$

E finalmente, relacionando as resultantes de tensão para a teoria de primeira ordem com os deslocamentos generalizados, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

As orientações de $\{N\}$, $\{M\}$ e $\{Q\}$ são apresentados na Fig. 4.5.

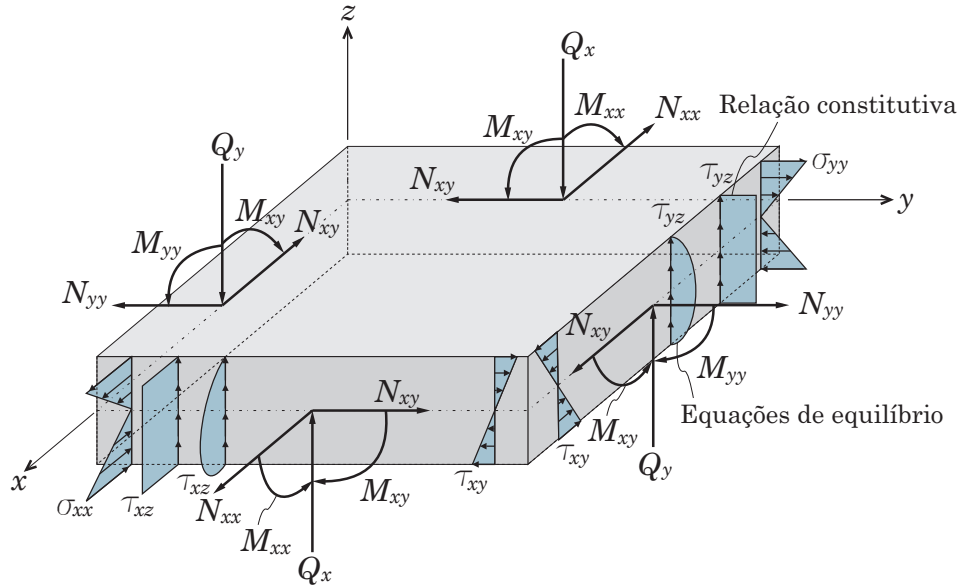


Figura 4.5: Elemento diferencial de placa sujeito à flexão com as resultantes de tensão e distribuição das tensões segundo a FSDT.

4.4 Análise via HSDT

A teoria clássica de laminados e a teoria de primeira ordem são as teorias mais simples que existem dentro da teoria da lâmina equivalente. Mesmo assim, elas mostram satisfatoriamente o comportamento mecânico para a maioria dos laminados, mas não o correto. Neste contexto, surgiu a teoria de ordem superior que é baseada nas mesmas hipóteses das teorias apresentadas nas seções 4.2 e 4.3, exceto pela expansão do polinômio do campo dos deslocamentos para ordens mais elevadas. A teoria de ordem superior descreve o comportamento mecânico do laminado de forma mais acurada e precisa, e distribui melhor as tensões ao longo da espessura do laminado, principalmente para as tensões interlaminares, além de ser desnecessária a utilização de fatores de cisalhamento.

Inicialmente, poderia se expandir o campo dos deslocamentos para um polinômio de qualquer ordem, porém, o caso mais comum é a expansão para um polinômio de terceira ordem, uma vez que não há necessidade de ordem superior a esta, pois tornaria o modelo numérico extremamente ineficiente e custoso para um ganho muito pequeno nos resultados. Além disso, a principal razão para expandir o campo dos deslocamentos cubicamente é a de se obter a variação quadrática das deformações e tensões cisalhantes através de cada lâmina. Dessa forma, a Eq. (4.34) apresenta o campo dos deslocamentos definidos pela HSDT de Reddy [27]:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z \left[\phi_x(x, y, t) - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\phi_x(x, y, t) + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z \left[\phi_y(x, y, t) - \frac{4}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \left(\phi_y(x, y, t) + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (4.34)$$

Aplicando a Eq. (4.34) para análise das deformações lineares e distorções angulares no regime linear elástico, resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} - \alpha z^3 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} - \alpha z^3 \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) - \alpha z^3 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ \gamma_{xz} &= (1 - \beta z^2) \left(\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \\ \gamma_{yz} &= (1 - \beta z^2) \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde $\alpha = 4/(3h^2)$ e $\beta = 4/h^2$. Com isso,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + z^3 \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + z^2 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

Na Eq. (4.36) o primeiro vetor contém as deformações de membrana, o segundo as curvaturas de primeira ordem e o terceiro as curvaturas de terceira ordem. Já na Eq. (4.37) as deformações de membrana estão contidas no primeiro vetor, enquanto que o segundo vetor computa as curvaturas de ordem superior. Dessa forma,

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.38a)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} = -\frac{4}{3h^2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.38b)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} = -\frac{4}{h^2} \begin{Bmatrix} \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ \phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (4.38c)$$

Assim como foi feito no equacionamento das teorias de Kichhoff e Mindlin para laminados, integrando as tensões através da espessura – Eqs. (4.9a), (4.9b) e (4.23); obtém-se as resultantes de tensão de ordem superior $\{P\}$ e $\{R\}$:

$$\{P_{xx}, P_{yy}, P_{xy}\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\} z^3 dz \quad (4.39a)$$

$$\{R_y, R_x\} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\tau_{yz}, \tau_{xz}\} z^2 dz \quad (4.39b)$$

Integrando as Eqs. (4.39a) e (4.39b), vem:

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} z^3 dz \quad (4.40)$$

e,

$$\begin{Bmatrix} R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} z^2 dz \quad (4.41)$$

Aplicando a relação tensão $\times$ deformação das Eqs. (3.28a) e (3.28b) para a k -ésima lâmina e retornado em (4.36), (4.37), (4.40) e (4.41), obtem-se:

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ E_{16} & E_{26} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ F_{16} & F_{26} & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ H_{12} & H_{22} & H_{26} \\ H_{16} & H_{26} & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

$$\begin{Bmatrix} R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{44} & D_{45} \\ D_{45} & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{44} & F_{45} \\ F_{45} & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

Retornando aos esforços resultantes de primeira ordem e somando as resultantes de ordem elevada, chega-se à:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \\ M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & E_{12} & E_{22} & E_{26} \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & E_{16} & E_{26} & E_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ & & & & D_{22} & D_{26} & F_{12} & F_{22} & F_{26} \\ & & & & & D_{66} & F_{16} & F_{26} & F_{66} \\ & & & & & & H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ & & & & & & & H_{22} & H_{26} \\ & & & & & & & & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \\ \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (4.44a)$$

e,

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \\ R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} & D_{44} & D_{45} \\ & A_{55} & D_{44} & D_{45} \\ & & F_{44} & F_{45} \\ & & & F_{45} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (4.44b)$$

As Eqs. (4.44a) e (4.44b) podem ser escritas na forma compacta como:

$$\begin{Bmatrix} \{N\} \\ \{M\} \\ \{P\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [B] & [E] \\ [B] & [D] & [F] \\ [E] & [F] & [H] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\varepsilon^{(0)}\} \\ \{\varepsilon^{(1)}\} \\ \{\varepsilon^{(3)}\} \end{Bmatrix} \quad (4.45a)$$

e,

$$\begin{Bmatrix} \{Q\} \\ \{R\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [A] & [D] \\ [D] & [F] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\gamma^{(0)}\} \\ \{\gamma^{(2)}\} \end{Bmatrix} \quad (4.45b)$$

com,

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) dz \quad (4.46a)$$

$$(A_{ij}, D_{ij}, F_{ij}) = \sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(1, z^2, z^6) dz \quad (4.46b)$$

Os termos de A_{ij} , B_{ij} e D_{ij} já foram definidos em termos da rigidez da lâmina $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ pelas Eqs. (4.18b) e (4.30). A Eq. (4.46a) é definida para $i, j = 1, 2, 6$; enquanto a Eq. (4.46b) é obtida computando $i, j = 4, 5$. Dessa forma, os outros termos das rigidezes adicionais são obtidos por:

$$\begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^4 - z_k^4) \\ F_{ij} &= \frac{1}{5} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^5 - z_k^5) \\ H_{ij} &= \frac{1}{7} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^{(k)} (z_{k+1}^7 - z_k^7) \end{aligned} \quad (4.47)$$

As matrizes $[E]$, $[F]$ e $[H]$ envolvem ordem superior à quarta através da espessura, conseqüentemente, a contribuição destes termos para a solução de laminados delgados é pequena. Até mesmo para laminados semi-espessos essa ajuda é pequena, entretanto, para laminados espessos a presença desses termos é de fundamental importância para a correta distribuição das tensões ao longo da espessura do laminado.

4.5 Comparação entre as Teorias da Lâmina Equivalente

Na tentativa de mostrar o comportamento mecânico de um laminado e, principalmente, na busca de se obter uma teoria de placa que produza uma variação correta da solução dos deslocamentos e tensões através da espessura do laminado, as teorias apresentadas nas seções 4.2, 4.3 e 4.4 são as mais empregadas para tal análise.

As teorias de primeira ordem exigem elementos com menos graus de liberdade por nó (cinco são suficientes). O modelo de Kirchhoff é o mais antigo para análise de placas. Já o modelo de Mindlin necessita do mesmo número de graus de liberdade por nó que a CLPT, mas é mais satisfatória por conseguir representar as tensões cisalhantes transversais. Além disso, a FSDT é mais facilmente implementável em elementos finitos, pois exige funções de continuidade C^0 . Entretanto, para laminados delgados, os elementos apresentam uma rigidez excessiva também conhecida como *shear locking* ou *travamento*.

Essa inconsistência numérica aparece na matriz de rigidez do elemento. Para elementos de placa, tal matriz é obtida a partir da soma de uma parcela de rigidez devida à flexão e outra devida ao cisalhamento. Com o aumento da relação a/h , ou seja, laminados delgados, a parcela devida ao cisalhamento não deve ser considerada na análise em virtude da diminuição excessiva na espessura. Entretanto, o modelo numérico considera essa parcela e isso é exatamente o oposto ao que ocorre na prática, onde apenas a parcela devida ao esforço de flexão deve ser computada. Dessa forma, o elemento apresenta aumento artificial da sua rigidez. Tal efeito pode ser amenizado, aplicando corretamente a técnica da integração reduzida ou seletiva [14], ou ainda, eliminando corretamente os termos espúrios causadores desse enrijecimento artificial empregando a notação *strain gradient*.

Dentre as inúmeras teorias de ordem superior, neste trabalho foi apresentada a teoria de ordem superior de Reddy. Essa teoria representa de forma adequada o comportamento dos deslocamentos e tensões em termos da espessura do laminado. Contudo, para o caso de laminados espessos e semi-espessos a CLPT e FSDT obtêm resultados satisfatórios e com menos esforço computacional. Além disso, é necessário implementar elementos de continuidade C^1 . Também é importante destacar que o elemento HSDT exige um número elevado de graus de liberdade por nó, sete no mínimo. O Capítulo 2 descreveu elementos com onze graus de liberdade por nó, dificultando o seu emprego.

Outras teorias de ordem superior são mais eficazes computacionalmente, pois

necessitam de elementos de continuidade C^0 . Um exemplo disso, é a teoria de ordem superior de Kant. Entretanto, empregando a teoria de Reddy, a facilidade em se obter a solução analítica de ordem elevada é maior. Além disso, como o objetivo deste trabalho é a validação de elementos de primeira ordem, procurou-se mostrar a teoria de ordem superior que está mais consolidada.

Finalmente, a Fig. 4.6 apresenta uma comparação entre as teorias até aqui explicadas.

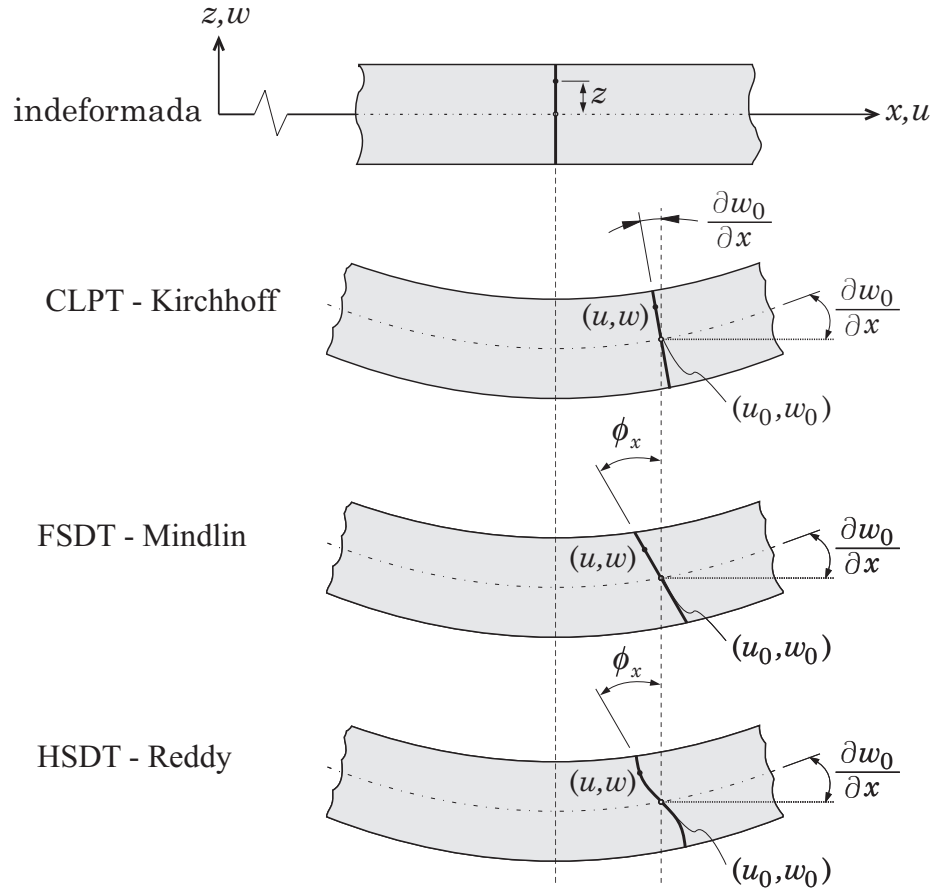


Figura 4.6: Comparação da deformação conforme as teorias clássica, primeira ordem de Mindlin e terceira ordem de Reddy.

Sendo assim, este capítulo apresentou as teorias mais empregadas na análise de materiais compósitos. Inicialmente, foram avaliadas as teorias de primeira ordem, CLPT e FSDT, bem como a descrição das suas hipóteses e de seus equacionamentos. Posteriormente, foi apresentada a teoria de ordem superior de Reddy [27] e, finalmente, realizou-se a comparação entre as teorias abordadas neste trabalho. O Capítulo 5 irá descrever os elementos finitos utilizados empregando a notação *strain gradient*.

5 A Notação *Strain Gradient* para Compósitos Laminados

5.1 Introdução

Quando um elemento finito é formulado de maneira tradicional, os deslocamentos são representados por expansões polinomiais com coeficientes a determinar. Uma forma de escrever esses coeficientes é empregando a chamada *notação strain gradient*. Esse nome é dado em virtude dos modos de deformação que podem ser representados, ou seja, movimentos de corpo rígido, deformações e as suas derivadas (ou gradientes de deformação). Essa semiografia permite visualizar os acoplamentos entre modos de deformação, bem como a existência de termos espúrios que causam o enrijecimento artificial (*locking*) inerentes às formulações tradicionais. A identificação e eliminação desses termos pode ser feita *a-priori*, gerando elementos livres de erro na modelagem. Além disso, torna o conteúdo físico das equações mais claro e transparente, portanto, fisicamente interpretável quando se tratar de derivadas de primeira e segunda ordem.

Este capítulo tem por objetivo descrever elementos finitos retangulares de 4 e 8 nós empregando a notação *strain gradient* para a análise de laminados compósitos. Esses elementos foram originalmente desenvolvidos por Abdalla [2].

5.2 Formulação dos Elementos Finitos

5.2.1 Aspectos Gerais

O aspecto central na formulação de elementos finitos via notação *strain gradient* está na determinação de um conjunto de vetores deslocamento linearmente independentes que correspondem a um conjunto específico de modos de deformação cujo elemento é capaz de representar. Esses estados de deformação devem servir como uma base linearmente independente para o conteúdo de deformação do elemento. Isso quer dizer que qualquer

distribuição geral de deformação representada pelo elemento pode ser descrita como uma combinação linear de estados de deformação bem definidos, que constituem a base da técnica da formulação *strain gradient*. Dessa forma, avaliando as expressões do campo dos deslocamentos em termos dos gradientes de deformação para cada um dos nós do elemento, pode-se obter uma relação entre os deslocamentos nodais e o vetor contendo os gradientes de deformação segundo os autores [2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 24, 36] por:

$$\{d\} = [\phi]\{\varepsilon_{sg}\} \quad (5.1)$$

onde $\{d\}$ é o vetor dos deslocamentos nodais, $[\phi]$ é a matriz que contém as coordenadas nodais e relaciona os deslocamentos do elemento finito com os possíveis estados de deformação, $\{\varepsilon_{sg}\}$, de cada elemento.

De maneira análoga, as deformações normais e as distorções angulares são relacionadas com os estados de deformação por:

$$\{\varepsilon\} = [T_{sg}]\{\varepsilon_{sg}\} \quad (5.2)$$

onde $[T_{sg}]$ é a matriz que contém as coordenadas nodais e associa o vetor de deformações $\{\varepsilon\}$ com os gradientes de deformação. Portanto, tanto a matriz $[\phi]$ da Eq. (5.1) quanto a matriz $[T_{sg}]$ da Eq. (5.2) são matrizes de transformação.

Supondo que o sistema seja conservativo, isto é, apenas forças conservativas efetuam trabalho fazendo com que a energia mecânica permaneça constante, a energia de deformação pode ser definida como:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\sigma\} \{\varepsilon\} d\Omega \quad (5.3a)$$

onde Ω é o volume do corpo. Aplicando a lei de Hooke na Eq. (5.3a) para expressar as tensões em termos das deformações, vem:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} d\Omega \quad (5.3b)$$

Mas a energia de deformação para um laminado é a soma das energias de cada lâmina k , isto é:

$$U = \sum_{k=1}^N U^{(k)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} \{\varepsilon\}^T [\bar{Q}]^{(k)} \{\varepsilon\} d\Omega_k \quad (5.4)$$

onde Ω_k é o volume de cada lâmina. Aplicando as expressões (5.1) e (5.2) na Eq. (5.4) a energia de deformação para o laminado utilizando a notação *strain gradient* será dada por:

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [\phi]^{-T} \left(\sum_{k=1}^N \int_{\Omega_k} [T_{sg}]^T [\bar{Q}]^{(k)} [T_{sg}] d\Omega_k \right) [\phi]^{-1} \{d\} \quad (5.5)$$

O termo entre parênteses da Eq. (5.5) contém as quantidades de energia associadas aos modos de deformação do elemento, e é definida por:

$$[U_M] = \int_A \left(\sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [T_{sg}]^T [\bar{Q}]^{(k)} [T_{sg}] dz_{k+1} \right) dA \quad (5.6)$$

Com isso, a Eq. (5.5) pode ser escrita na forma compacta:

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [\phi]^{-T} [U_M] [\phi]^{-1} \{d\} \quad (5.7)$$

Comparando as expressões (5.5) e (5.6), percebe-se que a integral de volume foi substituída por uma integral de área e outra ao longo da espessura do laminado.

Finalmente, lembrando que os termos da matriz de rigidez reduzida transformada da k -ésima lâmina, $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$, podem ser associados aos termos das rigidezes extensional, acoplada e flexional obtidos pelas Eqs. (4.18a) e (4.18b). Dessa forma, os coeficientes da matriz $[U_M]$ são dados por:

$$U_{M_{pq}}^A = A_{ij} \int_A f_1(x, y) dA \quad (5.8a)$$

$$U_{M_{pq}}^B = B_{ij} \int_A f_2(x, y) dA \quad (5.8b)$$

$$U_{M_{pq}}^D = D_{ij} \int_A f_3(x, y) dA \quad (5.8c)$$

onde os subíndices p e q representam a variação de 1 até o número total de graus de liberdade do elemento. Já os termos $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$ e $f_3(x, y)$ representam funções das coordenadas x e y . Essas funções são constantes ao longo da espessura do laminado, portanto, integradas sobre a área A .

Ainda, a energia de deformação do elemento pode ser relacionada à matriz de rigidez do elemento pela expressão:

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [K] \{d\} \quad (5.9)$$

onde $[K]$ é a matriz de rigidez do elemento. Avaliando as Eqs. (5.5) e (5.6) na Eq. (5.9), obtém-se:

$$[K] = [\phi]^{-T} \int_A \left(\sum_{k=1}^N \int_{z_k}^{z_{k+1}} [T_{sg}]^T [\bar{Q}]^{(k)} [T_{sg}] dz_{k+1} \right) dA [\phi]^{-1} \quad (5.10a)$$

$$= [\phi]^{-T} [U_M] [\phi]^{-1} \quad (5.10b)$$

Observando a matriz de rigidez na Eq. (5.10) e comparando com a matriz obtida pela formulação tradicional de elementos finitos, fica evidente que empregando a notação *strain gradient* é desnecessária a utilização de integração numérica para o cálculo da matriz de rigidez, conferindo a este método uma de suas principais vantagens: a capacidade de modelar um elemento de forma precisa e acurada. Vale destacar que a integração analítica de $[K]$, principalmente em laminados finos, propicia ao elemento finito modelado via notação *strain gradient* maior precisão de resultados, considerando também que os termos espúrios que provocam a rigidez artificial são facilmente removidos durante o processo de formulação.

5.2.2 Quadrilátero de 4 nós

O objetivo deste tópico é apresentar, detalhadamente, a formulação de um elemento finito *strain gradient* baseado na teoria de Mindlin para compósitos laminados conforme as hipóteses descritas na seção 4.3. Com isso, o elemento possui cinco graus de liberdade por nó, a saber: u_0 , v_0 , w_0 , ϕ_x e ϕ_y – totalizando vinte graus de liberdade por elemento, conforme mostra a Fig. 5.1.

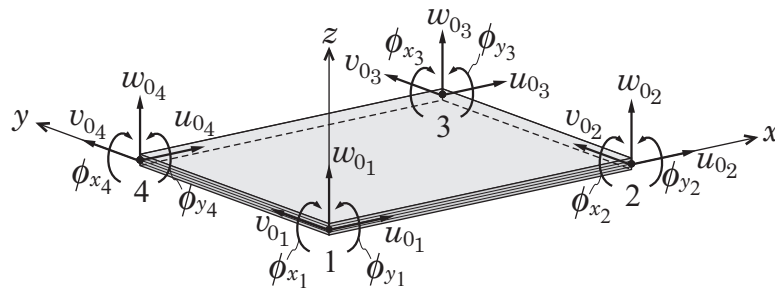


Figura 5.1: Graus de liberdade do quadrilátero de 4 nós.

Comparando o campo dos deslocamentos dados pela Eq. (4.19) e adotando a convenção de sinais mostrada na Fig. 5.1, obtém-se:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = u_0(x, y) + z \phi_x(x, y) \\ v(x, y, z) = v_0(x, y) - z \phi_y(x, y) \\ w(x, y, z) = w_0(x, y) \end{cases} \quad (5.11)$$

As rotações ϕ_x e ϕ_y para um elemento tridimensional são definidas por:

$$\phi_x = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \quad \text{e} \quad \phi_y = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (5.12)$$

Porém, no modelo de Mindlin essas rotações não dependem do deslocamento transversal w , resultando numa expressão semelhante à dada pela Eq. (4.20), ou seja:

$$\phi_x = \frac{\partial u}{\partial z} - \cancel{\frac{\partial \psi}{\partial x}} = \frac{\partial u}{\partial z} \quad \text{e} \quad \phi_y = \cancel{\frac{\partial \psi}{\partial y}} - \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial v}{\partial z} \quad (5.13)$$

Avaliando a Eq. (5.11), percebe-se que os termos u_0 , v_0 e w_0 são constantes ao longo da espessura, pois representam os deslocamentos de superfície. Portanto, suas expansões polinomiais serão em função de 1, x , y e xy . Já as rotações ϕ_x e ϕ_y apresentam linearidade em z , com isso, os seus termos serão expansões polinomiais de z , xz , yz e xyz . Dessa forma, os polinômios que descrevem o campo dos deslocamentos em (5.11) ficam:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5z + a_6xz + a_7yz + a_8xyz \\ v(x, y, z) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy + b_5z + b_6xz + b_7yz + b_8xyz \\ w(x, y, z) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy \end{cases} \quad (5.14)$$

Aplicando a expressão (5.13) e a Tab. A.2 do Apêndice A na Eq. (5.14), resulta em:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = [u]_0 + [\varepsilon_x]_0 x + \left[\frac{\gamma_{xy}}{2} - \phi_z \right]_0 y + [\varepsilon_{x,y}]_0 xy + \left[\frac{\gamma_{xz}}{2} + \phi_x \right]_0 z \\ + [\varepsilon_{x,z}]_0 xz + [\varepsilon_{x,yz}]_0 xyz + \left[\frac{\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2} \right]_0 yz \end{aligned} \quad (5.15a)$$

$$\begin{aligned} v(x, y, z) = [v]_0 + \left[\frac{\gamma_{xy}}{2} + \phi_z \right]_0 x + [\varepsilon_y]_0 y + [\varepsilon_{y,x}]_0 xy + \left[\frac{\gamma_{yz}}{2} - \phi_y \right]_0 z \\ + [\varepsilon_{y,z}]_0 yz + [\varepsilon_{y,xz}]_0 xyz + \left[\frac{\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} - \gamma_{xz,y}}{2} \right]_0 xz \end{aligned} \quad (5.15b)$$

$$w(x, y) = [w]_0 + \left[\frac{\gamma_{xz}}{2} - \phi_x \right]_0 x + \left[\frac{\gamma_{yz}}{2} + \phi_y \right]_0 y + \left[\frac{-\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2} \right]_0 xy \quad (5.15c)$$

$$\phi_x(x, y) = \left[\frac{\gamma_{xz}}{2} + \phi_x \right]_0 + [\varepsilon_{x,z}]_0 x + \left[\frac{\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2} \right]_0 y + [\varepsilon_{x,yz}]_0 xy \quad (5.15d)$$

$$\phi_y(x, y) = \left[\phi_y - \frac{\gamma_{yz}}{2} \right]_0 + \left[\frac{-\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2} \right]_0 x - [\varepsilon_{y,z}]_0 y - [\varepsilon_{y,xz}]_0 xy \quad (5.15e)$$

As partes (a) e (b) da Eq. (5.15) representam os deslocamentos no plano xy nas direções x e y , respectivamente. A Eq. (5.15c) calcula o deslocamento transversal ao plano xy , ou seja, na direção z , enquanto que as partes (d) e (e) avaliam as rotações ao redor de y e x , respectivamente. Além disso, a Eq. (5.15) contém os modos de deformação que o elemento pode representar, ou seja:

$\Rightarrow$ Movimentos de corpo rígido: $[u]_0$ $[v]_0$ $[w]_0$ $[\phi_x]_0$ $[\phi_y]_0$ $[\phi_z]_0$

$\Rightarrow$ Deformações constantes: $[\varepsilon_x]_0$ $[\varepsilon_y]_0$ $[\gamma_{xy}]_0$ $[\gamma_{xz}]_0$ $[\gamma_{yz}]_0$

$\Rightarrow$ Deformações por flexão: $[\varepsilon_{x,y}]_0$ $[\varepsilon_{x,z}]_0$ $[\varepsilon_{y,x}]_0$ $[\varepsilon_{y,z}]_0$ $[\varepsilon_{x,yz}]_0$ $[\varepsilon_{y,xz}]_0$

$\Rightarrow$ Deformações por cisalhamento: $[\gamma_{xy,z}]_0$ $[\gamma_{xz,y}]_0$ $[\gamma_{yz,x}]_0$

Esses modos de deformação constituem os graus de liberdade do elemento. Dessa forma, o vetor gradiente de deformação apresentado pela Eq. (5.1) fica:

$$\{\varepsilon_{sg}\}^T = \{[u]_0 [v]_0 [\phi_z]_0 [w]_0 [\phi_y]_0 [\phi_x]_0 [\varepsilon_x]_0 [\varepsilon_{x,y}]_0 [\varepsilon_{x,z}]_0 [\varepsilon_{x,yz}]_0 [\varepsilon_y]_0 [\varepsilon_{y,x}]_0 [\varepsilon_{y,z}]_0 [\varepsilon_{y,xz}]_0 [\gamma_{xy}]_0 [\gamma_{xy,z}]_0 [\gamma_{xz}]_0 [\gamma_{xz,y}]_0 [\gamma_{yz}]_0 [\gamma_{yz,x}]_0\} \quad (5.16)$$

e o vetor de deslocamentos nodais será dado por:

$$\{d\}^T = \{\overbrace{u_{01} v_{01} w_{01} \phi_{y1} \phi_{x1}}^{\text{Nó 1}} \overbrace{u_{02} v_{02} w_{02} \phi_{y2} \phi_{x2}}^{\text{Nó 2}} \overbrace{u_{03} v_{03} w_{03} \phi_{y3} \phi_{x3}}^{\text{Nó 3}} \overbrace{u_{04} v_{04} w_{04} \phi_{y4} \phi_{x4}}^{\text{Nó 4}}\} \quad (5.17)$$

Assim, relacionando os deslocamentos nodais e os gradientes de deformação chega-se a matriz $[\phi]$ também mostrada por (5.1). Em outras palavras, para se obter tal matriz é necessário dispor os termos em x e y da Eq. (5.15) em forma matricial até o número de nós do elemento. Ou seja, atribuir para o i -ésimo subíndice da Eq. (5.18) valores de 1 até 4, de tal maneira que o resultado obtido seja o de uma matriz de mesma ordem do número de graus de liberdade do elemento, neste caso, 20×20 . Os valores acima da matriz se referem aos graus de liberdade do nó i , enquanto que os valores à esquerda se reportam ao vetor *strain gradient* $\{\varepsilon_{sg}\}$ dado pela expressão (5.16). Tal procedimento foi realizado para melhor visualizar a obtenção e manipulação dos dados necessários para se montar a matriz $[\phi]$. Logo,

$$[\phi]^T = \begin{matrix} & u_{0_i} & v_{0_i} & w_{0_i} & \phi_{y_i} & \phi_{x_i} & \\ \begin{matrix} [u]_0 \\ [v]_0 \\ [\phi_z]_0 \\ [w_0]_0 \\ [\phi_y]_0 \\ [\phi_x]_0 \\ [\varepsilon_x]_0 \\ [\varepsilon_{x,y}]_0 \\ [\varepsilon_{x,z}]_0 \\ [\varepsilon_{x,yz}]_0 \\ [\varepsilon_y]_0 \\ [\varepsilon_{y,x}]_0 \\ [\varepsilon_{y,z}]_0 \\ [\varepsilon_{y,xz}]_0 \\ [\gamma_{xy}]_0 \\ [\gamma_{xy,z}]_0 \\ [\gamma_{xz}]_0 \\ [\gamma_{xz,y}]_0 \\ [\gamma_{yz}]_0 \\ [\gamma_{yz,x}]_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -y_i & x_i & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & y_i & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -x_i & 0 & 1 & \dots \\ x_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ x_i y_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_i & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_i y_i & \dots \\ 0 & y_i & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & x_i y_i & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -y_i & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -x_i y_i & 0 & \dots \\ \frac{y_i}{2} & \frac{x_i}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{x_i y_i}{2} & -\frac{x_i}{2} & \frac{y_i}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{x_i}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{x_i y_i}{2} & \frac{x_i}{2} & \frac{y_i}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{y_i}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{x_i y_i}{2} & -\frac{x_i}{2} & -\frac{y_i}{2} & \dots \end{bmatrix} & \end{matrix} \quad (5.18)$$

20×20

Agora, empregando a Eq. (5.15) e efetuando as respectivas derivadas a partir das Eqs. (4.21) ou (4.22) da Teoria da Elasticidade, as deformações em notação *strain gradient* ficam:

$$\varepsilon_{xx} = [\varepsilon_x]_0 + [\varepsilon_{x,y}]_0 x + [\varepsilon_{x,z}]_0 z + [\varepsilon_{x,yz}]_0 yz \quad (5.19a)$$

$$\varepsilon_{yy} = [\varepsilon_y]_0 + [\varepsilon_{y,x}]_0 y + [\varepsilon_{y,z}]_0 z + [\varepsilon_{y,xz}]_0 xz \quad (5.19b)$$

$$\gamma_{xy} = [\gamma_{xy}]_0 + [\varepsilon_{x,y}]_0 x + [\varepsilon_{y,x}]_0 y + [\gamma_{xy,z}]_0 z + [\varepsilon_{y,xz}]_0 yz + [\varepsilon_{x,yz}]_0 xz \quad (5.19c)$$

$$\gamma_{yz} = [\gamma_{yz}]_0 + [\gamma_{yz,x}]_0 x + [\varepsilon_{y,z}]_0 y + [\varepsilon_{y,xz}]_0 xy \quad (5.19d)$$

$$\gamma_{xz} = [\gamma_{xz}]_0 + [\gamma_{xz,y}]_0 y + [\varepsilon_{x,z}]_0 x + [\varepsilon_{x,yz}]_0 xy \quad (5.19e)$$

Por inspeção dessas equações de deformação, pode-se notar que os termos que constituem as deformações normais estão associados a esse tipo de deformação. Portanto, tais termos são considerados legítimos – Eqs. (5.19a) e (5.19b). Porém, ao observar as

Eqs. (5.19c), (5.19d) e (5.19e) que se referem às deformações cisalhantes, percebe-se a presença de termos relacionados aos modos normais de deformação, portanto, não pertencentes às respectivas séries de Taylor. Esses termos com primeira e segunda derivadas da deformação normal surgem na formulação devido à incompatibilidade entre os polinômios empregados para aproximar o campo dos deslocamentos do elemento.

No caso da distorção angular no plano γ_{xy} , são necessários polinômios de segunda ordem em x e y para representar o comportamento de membrana. Entretanto, isso não ocorre, surgindo termos espúrios para a deformação cisalhante no plano. Já para as distorções angulares transversais γ_{xz} e γ_{yz} , a inconsistência está na discordância do grau do polinômio que define as rotações, ϕ_x e ϕ_y , e as derivadas primeiras do deslocamento transversal $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$. Quando isso ocorre, os polinômios são chamados de *inconsistentes*.

Os termos espúrios causam a rigidez artificial (ou *locking*) do elemento e, portanto, devem ser eliminados [2, 6, 7, 8, 9, 24, 36]. A presença desses termos ilegítimos é denominada *cisalhamento parasítico*. As parcelas que não pertencem às Eqs. (5.19c), (5.19d) e (5.19e), respectivamente, são:

$$[\varepsilon_{x,y}]_0 \quad [\varepsilon_{y,x}]_0 \quad [\varepsilon_{y,xz}]_0 \quad [\varepsilon_{x,yz}]_0 \quad (5.20a)$$

$$[\varepsilon_{y,z}]_0 \quad [\varepsilon_{y,xz}]_0 \quad (5.20b)$$

$$[\varepsilon_{x,z}]_0 \quad [\varepsilon_{x,yz}]_0 \quad (5.20c)$$

Com isso, removendo os termos dados pela Eq. (5.20) na Eq. (5.19) resultam nas deformações do elemento corrigido, isto é, sem parcelas espúrias conforme:

$$\varepsilon_{xx} = [\varepsilon_x]_0 + [\varepsilon_{x,y}]_0 x + [\varepsilon_{x,z}]_0 z + [\varepsilon_{x,yz}]_0 yz \quad (5.21a)$$

$$\varepsilon_{yy} = [\varepsilon_y]_0 + [\varepsilon_{y,x}]_0 y + [\varepsilon_{y,z}]_0 z + [\varepsilon_{y,xz}]_0 xz \quad (5.21b)$$

$$\gamma_{xy} = [\gamma_{xy}]_0 + [\gamma_{xy,z}]_0 z \quad (5.21c)$$

$$\gamma_{yz} = [\gamma_{yz}]_0 + [\gamma_{yz,x}]_0 x \quad (5.21d)$$

$$\gamma_{xz} = [\gamma_{xz}]_0 + [\gamma_{xz,y}]_0 y \quad (5.21e)$$

Finalmente, é possível relacionar as deformações com o vetor de deformação *strain gradient* apresentado pela Eq. (5.2), empregando os termos dados por (5.19) e (5.21), que representam as deformações com e sem termos espúrios, respectivamente. Analogamente ao que foi feito para formulação da matriz $[\phi]$, com intuito de facilitar o entendimento do significado físico da matriz $[T_{sg}]$, os valores acima da matriz se referem às deformações normais no plano, distorções angulares transversais e distorção angular no plano, enquanto

que os valores à esquerda indicam o vetor *strain gradient* $\{\varepsilon_{sg}\}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
 [T_{sg}^{cp}]^T = & \begin{matrix} & \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{xy} \\ \begin{matrix} [u]_0 \\ [v]_0 \\ [\phi_z]_0 \\ [w]_0 \\ [\phi_y]_0 \\ [\phi_x]_0 \\ [\varepsilon_x]_0 \\ [\varepsilon_{x,y}]_0 \\ [\varepsilon_{x,z}]_0 \\ [\varepsilon_{x,yz}]_0 \\ [\varepsilon_y]_0 \\ [\varepsilon_{y,x}]_0 \\ [\varepsilon_{y,z}]_0 \\ [\varepsilon_{y,xz}]_0 \\ [\gamma_{xy}]_0 \\ [\gamma_{xy,z}]_0 \\ [\gamma_{xz}]_0 \\ [\gamma_{xz,y}]_0 \\ [\gamma_{yz}]_0 \\ [\gamma_{yz,x}]_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & x \\ z & 0 & 0 & x & 0 \\ yz & 0 & 0 & xy & xz \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & y \\ 0 & z & y & 0 & 0 \\ 0 & xz & xy & 0 & yz \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad \text{e} \quad [T_{sg}]^T = \begin{matrix} & \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{xy} \\ \begin{matrix} [u]_0 \\ [v]_0 \\ [\phi_z]_0 \\ [w]_0 \\ [\phi_y]_0 \\ [\phi_x]_0 \\ [\varepsilon_x]_0 \\ [\varepsilon_{x,y}]_0 \\ [\varepsilon_{x,z}]_0 \\ [yz]_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ yz & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & xz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.22)
 \end{aligned}$$

onde a matriz $[T_{sg}^{cp}]$ representa a matriz de transformação com o efeito do cisalhamento parasítico. A matriz $[T_{sg}]$ não possui termos espúrios, portanto, livre de erro de formulação. Vale ressaltar que a presença de tais termos é inerente ao processo de formulação do elemento, porém a sua devida identificação e remoção é assegurada empregando a notação *strain gradient*.

Assim, fica claro que a notação *strain gradient* possibilita uma análise antecipada da capacidade de modelagem de cada elemento. Com isso, garante-se uma grande vantagem ao se empregar este método para a formulação de um elemento finito.

5.2.3 Quadrilátero de 8 nós

Análoga a formulação de um elemento finito *strain gradient* retangular de 4 nós, o elemento *serendipity* possui os mesmos graus de liberdade por nó (u_0, v_0, w_0, ϕ_x e ϕ_y), totalizando quarenta graus de liberdade por elemento, conforme mostra a Fig. 5.2.

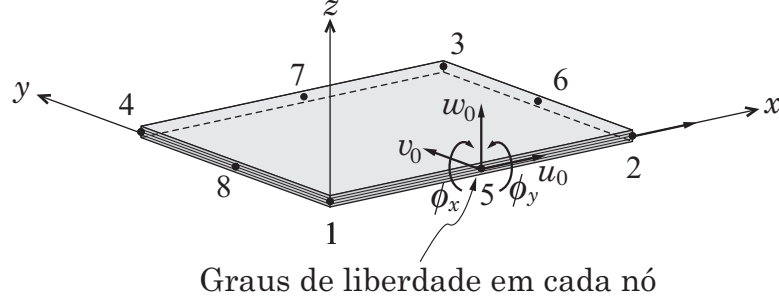


Figura 5.2: Graus de liberdade do quadrilátero de 8 nós.

Comparando o que foi realizado para se obter o campo dos deslocamentos na Eq. (5.14), para o retângulo de 8 nós a mesma expressão resulta em:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2 \\ \quad + a_9z + a_{10}xz + a_{11}yz + a_{12}xyz + a_{13}x^2z + a_{14}y^2z + a_{15}x^2yz + a_{16}xy^2z \\ v(x, y, z) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy + b_5x^2 + b_6y^2 + b_7x^2y + b_8xy^2 \\ \quad + b_9z + b_{10}xz + b_{11}yz + b_{12}xyz + b_{13}x^2z + b_{14}y^2z + b_{15}x^2yz + b_{16}xy^2z \\ w(x, y, z) = c_1 + c_2x + c_3y + c_4xy + c_5x^2 + c_6y^2 + c_7x^2y + c_8xy^2 \end{cases} \quad (5.23)$$

Nesta análise, ao observar os termos u_0, v_0 e w_0 da Eq. (5.23), percebe-se que estes são expansões polinomiais de $1, x, y, xy, x^2, y^2, x^2y$ e xy^2 , enquanto que as rotações ϕ_x e ϕ_y (lineares em z) apresentam expansões polinomiais de $z, xz, yz, xyz, x^2z, y^2z, x^2yz$ e xy^2z . Dessa forma, empregando a Tab. A.2 do Apêndice A para obter os coeficientes a_i, b_i e c_i , os polinômios que descrevem o campo dos deslocamentos na notação *strain gradient* são dados por:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & [u]_0 + [\varepsilon_x]_0 x + \left[\frac{\gamma_{xy}}{2} - \phi_z \right]_0 y + [\varepsilon_{x,x}]_0 \frac{x^2}{2} + [\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x}]_0 \frac{y^2}{2} \\ & + [\varepsilon_{x,y}]_0 xy + [\varepsilon_{x,xy}]_0 \frac{x^2y}{2} + [\varepsilon_{x,yx}]_0 \frac{xy^2}{2} + \left[\frac{\gamma_{xz}}{2} + \phi_x \right]_0 z + [\varepsilon_{x,z}]_0 xz \\ & + \left[\frac{\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2} \right]_0 yz + [\varepsilon_{x,xz}]_0 \frac{x^2z}{2} + [\gamma_{xy,yz} - \varepsilon_{y,xz}]_0 \frac{y^2z}{2} \\ & + [\varepsilon_{x,yz}]_0 xyz + [\varepsilon_{x,xyz}]_0 \frac{x^2yz}{2} + [\varepsilon_{x,yyz}]_0 \frac{xy^2z}{2} \end{aligned} \quad (5.24a)$$

$$\begin{aligned}
v(x, y, z) = & [v]_0 + \left[\frac{\gamma_{xy}}{2} + \phi_z \right]_0 x + [\varepsilon_y]_0 y + [\gamma_{xy,x} - \varepsilon_{x,y}]_0 \frac{x^2}{2} + [\varepsilon_{y,y}]_0 \frac{y^2}{2} \\
& + [\varepsilon_{y,x}]_0 xy + [\varepsilon_{y,xx}]_0 \frac{x^2 y}{2} + [\varepsilon_{y,xy}]_0 \frac{xy^2}{2} + \left[\frac{\gamma_{yz}}{2} - \phi_y \right]_0 z + [\varepsilon_{y,z}]_0 yz \\
& + \left[\frac{\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} - \gamma_{xz,y}}{2} \right]_0 xz + [\varepsilon_{y,yz}]_0 \frac{y^2 z}{2} + [\gamma_{xy,xz} - \varepsilon_{x,yz}]_0 \frac{x^2 z}{2} \\
& + [\varepsilon_{y,xz}]_0 xyz + [\varepsilon_{y,xxz}]_0 \frac{x^2 yz}{2} + [\varepsilon_{y,xyz}]_0 \frac{xy^2 z}{2}
\end{aligned} \tag{5.24b}$$

$$\begin{aligned}
w(x, y) = & [w]_0 + \left[\frac{\gamma_{xz}}{2} - \phi_x \right]_0 x + \left[\frac{\gamma_{yz}}{2} + \phi_y \right]_0 y + [\gamma_{xz,x} - \varepsilon_{x,z}]_0 \frac{x^2}{2} \\
& + \left[\frac{-\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}}{2} \right]_0 xy + [\gamma_{yz,y} - \varepsilon_{y,z}]_0 \frac{y^2}{2} \\
& + [\gamma_{xz,xy} - \varepsilon_{x,yz}]_0 \frac{x^2 y}{2} + [\gamma_{yz,xy} - \varepsilon_{y,xz}]_0 \frac{xy^2}{2}
\end{aligned} \tag{5.24c}$$

$$\begin{aligned}
\phi_x(x, y) = & \left[\frac{\gamma_{xz}}{2} + \phi_x \right]_0 + [\varepsilon_{x,z}]_0 x + [\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}]_0 \frac{y}{2} + [\varepsilon_{x,xz}]_0 \frac{x^2}{2} \\
& + [\gamma_{xy,yz} - \varepsilon_{y,xz}]_0 \frac{y^2}{2} + [\varepsilon_{x,yz}]_0 xy + [\varepsilon_{x,xyz}]_0 \frac{x^2 y}{2} + [\varepsilon_{x,yyz}]_0 \frac{xy^2}{2}
\end{aligned} \tag{5.24d}$$

$$\begin{aligned}
\phi_y(x, y) = & \left[\phi_y - \frac{\gamma_{yz}}{2} \right]_0 + [-\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y}]_0 \frac{x}{2} + [\varepsilon_{x,yz} - \gamma_{xy,xz}]_0 \frac{x^2}{2} \\
& - [\varepsilon_{y,z}]_0 y - [\varepsilon_{y,yz}]_0 \frac{y^2}{2} - [\varepsilon_{y,xz}]_0 xy - [\varepsilon_{y,xxz}]_0 \frac{x^2 y}{2} - [\varepsilon_{y,xyz}]_0 \frac{xy^2}{2}
\end{aligned} \tag{5.24e}$$

A Eq. (5.24) contém todos os modos de deformação que o elemento pode representar, a saber:

$\Rightarrow$ Movimentos de corpo rígido: $[u]_0$ $[v]_0$ $[w]_0$ $[\phi_x]_0$ $[\phi_y]_0$ $[\phi_z]_0$

$\Rightarrow$ Deformações constantes: $[\varepsilon_x]_0$ $[\varepsilon_y]_0$ $[\gamma_{xy}]_0$ $[\gamma_{xz}]_0$ $[\gamma_{yz}]_0$

$\Rightarrow$ Deformações por flexão: $[\varepsilon_{x,x}]_0$ $[\varepsilon_{x,y}]_0$ $[\varepsilon_{x,z}]_0$ $[\varepsilon_{x,xy}]_0$ $[\varepsilon_{x,xz}]_0$ $[\varepsilon_{x,yz}]_0$ $[\varepsilon_{x,yy}]_0$ $[\varepsilon_{x,xyz}]_0$
 $[\varepsilon_{x,yyz}]_0$ $[\varepsilon_{y,x}]_0$ $[\varepsilon_{y,y}]_0$ $[\varepsilon_{y,z}]_0$ $[\varepsilon_{y,xx}]_0$ $[\varepsilon_{y,xy}]_0$ $[\varepsilon_{y,xz}]_0$ $[\varepsilon_{y,yz}]_0$ $[\varepsilon_{y,xyz}]_0$ $[\varepsilon_{y,xxz}]_0$

$\Rightarrow$ Deformações por cisalhamento: $[\gamma_{xy,x}]_0$ $[\gamma_{xy,y}]_0$ $[\gamma_{xy,z}]_0$ $[\gamma_{xz,y}]_0$ $[\gamma_{xz,x}]_0$ $[\gamma_{xy,yz}]_0$
 $[\gamma_{xy,xz}]_0$ $[\gamma_{xz,xy}]_0$ $[\gamma_{yz,x}]_0$ $[\gamma_{yz,y}]_0$ $[\gamma_{yz,xy}]_0$

Além disso, o número de modos de deformação coincide com o número de graus de liberdade do elemento, conforme mostrado no item 5.2.2.

Aplicando a Teoria da Elasticidade na Eq. (5.24), obtém-se as deformações na notação *strain gradient*:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} = & [\varepsilon_x]_0 + [\varepsilon_{x,x}]_0 x + [\varepsilon_{x,y}]_0 y + [\varepsilon_{x,xy}]_0 xy + [\varepsilon_{x,yy}]_0 \frac{y^2}{2} + [\varepsilon_{x,z}]_0 z \\ & + [\varepsilon_{x,xz}]_0 xz + [\varepsilon_{x,yz}]_0 yz + [\varepsilon_{x,xyz}]_0 xyz + [\varepsilon_{x,yyz}]_0 \frac{y^2 z}{2}\end{aligned}\quad (5.25a)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{yy} = & [\varepsilon_y]_0 + [\varepsilon_{y,x}]_0 x + [\varepsilon_{y,y}]_0 y + [\varepsilon_{y,xy}]_0 \frac{x^2}{2} + [\varepsilon_{y,xy}]_0 xy + [\varepsilon_{y,z}]_0 z \\ & + [\varepsilon_{y,xz}]_0 xz + [\varepsilon_{y,yz}]_0 yz + [\varepsilon_{y,xxz}]_0 \frac{x^2 z}{2} + [\varepsilon_{y,xyz}]_0 xyz\end{aligned}\quad (5.25b)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xy} = & [\gamma_{xy}]_0 + [\gamma_{xy,x}]_0 x + [\gamma_{xy,y}]_0 y + [\gamma_{xy,z}]_0 z + [\gamma_{xy,xz}]_0 xz + [\gamma_{xy,yz}]_0 yz \\ & + [\varepsilon_{x,xy}]_0 \frac{x^2}{2} + [\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx}]_0 xy + [\varepsilon_{y,xy}]_0 \frac{y^2}{2} + [\varepsilon_{x,xyz}]_0 \frac{x^2 z}{2} \\ & + [\varepsilon_{x,yyz}]_0 xyz + [\varepsilon_{y,xxz}]_0 xyz + [\varepsilon_{y,xyz}]_0 \frac{y^2 z}{2}\end{aligned}\quad (5.25c)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{yz} = & [\gamma_{yz}]_0 + [\gamma_{yz,x}]_0 x + [\gamma_{yz,y}]_0 y + [\gamma_{yz,xy}]_0 xy + [\gamma_{yz,xz}]_0 \frac{x^2}{2} + [\gamma_{yz,xy}]_0 \frac{x^2}{2} \\ & - [\varepsilon_{x,yz}]_0 x^2 + [\varepsilon_{y,yz}]_0 \frac{y^2}{2} + [\varepsilon_{y,xxz}]_0 \frac{x^2 y}{2} + [\varepsilon_{y,xyz}]_0 \frac{xy^2}{2}\end{aligned}\quad (5.25d)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} = & [\gamma_{xz}]_0 + [\gamma_{xz,x}]_0 x + [\gamma_{xz,y}]_0 y + [\gamma_{xz,xy}]_0 xy + [\gamma_{xz,yz}]_0 \frac{y^2}{2} + [\gamma_{yz,xy}]_0 \frac{y^2}{2} \\ & + [\varepsilon_{x,xz}]_0 \frac{x^2}{2} - \varepsilon_{y,xz}]_0 y^2 + [\varepsilon_{x,xyz}]_0 \frac{x^2 y}{2} + [\varepsilon_{x,yyz}]_0 \frac{xy^2}{2}\end{aligned}\quad (5.25e)$$

Assim como no retângulo de 4 nós, inspecionando a Eq. (5.25) percebe-se que as Eqs. (5.25a) e (5.25b) contém termos associados aos respectivos tipos de deformação, dessa forma, pertencentes às séries de Taylor. Entretanto, para as deformações cisalhantes contidas em (5.25c), (5.25d) e (5.25e) surgem termos que não correspondem às respectivas deformações, portanto, espúrios. Esses termos causam o enrijecimento artificial (*locking*) do modelo e devem ser eliminados. Porém, a eliminação desses termos deve ser cuidadosa. Por exemplo, para a deformação cisalhante no plano, γ_{xy} , aparecem oito termos relacionados com deformações normais que não devem fazer parte da expansão polinomial. Contudo, as equações de compatibilidade da Teoria da Elasticidade representadas pela Eq. (5.26) devem ser obedecidas:

$$\gamma_{xy,xy} = \varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} \quad (5.26a)$$

$$\gamma_{xy,xyz} = \varepsilon_{x,yyz} + \varepsilon_{y,xxz} \quad (5.26b)$$

Dessa forma, os termos espúrios da Eq. (5.25c) são:

$$[\varepsilon_{x,xy}]_0 \quad [\varepsilon_{y,xy}]_0 \quad [\varepsilon_{x,xyz}]_0 \quad [\varepsilon_{y,xyz}]_0 \quad (5.27)$$

Analogamente para a deformação cisalhante transversal, γ_{yz} , representada pela Eq. (5.25d), aparecem quatro deformações por flexão e uma deformação cisalhante no plano $x - z$ que estão associadas aos modos de deformação do elemento. Entretanto, considerando a seguinte equação de compatibilidade:

$$\frac{1}{2}\gamma_{yz,xx} = \frac{1}{2}(\gamma_{xy,xz} + \gamma_{xz,xy}) - \varepsilon_{x,yz} \quad (5.28)$$

Os termos espúrios na Eq. (5.25d) são:

$$[\varepsilon_{y,yz}]_0 \quad [\varepsilon_{y,xxz}]_0 \quad [\varepsilon_{y,xyz}]_0 \quad (5.29)$$

Finalmente, para a Eq. (5.25e) também surgem quatro deformações por flexão e uma deformação por cisalhamento no plano $y - z$. Considerando a equação de compatibilidade:

$$\frac{1}{2}\gamma_{xz,yy} = \frac{1}{2}(\gamma_{xy,yz} + \gamma_{yz,xy}) - \varepsilon_{y,xz} \quad (5.30)$$

Para a Eq. (5.25e), os termos espúrios são:

$$[\varepsilon_{x,xz}]_0 \quad [\varepsilon_{x,xyz}]_0 \quad [\varepsilon_{x,yyz}]_0 \quad (5.31)$$

Dessa forma, as deformações sem erros de formulação são obtidas a partir da remoção dos termos dados por (5.27), (5.29) e (5.31) na Eq. (5.25), isto é:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} = & [\varepsilon_x]_0 + [\varepsilon_{x,x}]_0 x + [\varepsilon_{x,y}]_0 y + [\varepsilon_{x,xy}]_0 xy + [\varepsilon_{x,yy}]_0 \frac{y^2}{2} + [\varepsilon_{x,z}]_0 z \\ & + [\varepsilon_{x,xz}]_0 xz + [\varepsilon_{x,yz}]_0 yz + [\varepsilon_{x,xyz}]_0 xyz + [\varepsilon_{x,yyz}]_0 \frac{y^2 z}{2} \end{aligned} \quad (5.32a)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{yy} = & [\varepsilon_y]_0 + [\varepsilon_{y,x}]_0 x + [\varepsilon_{y,y}]_0 y + [\varepsilon_{y,xx}]_0 \frac{x^2}{2} + [\varepsilon_{y,xy}]_0 xy + [\varepsilon_{y,z}]_0 z \\ & + [\varepsilon_{y,xz}]_0 xz + [\varepsilon_{y,yz}]_0 yz + [\varepsilon_{y,xxz}]_0 \frac{x^2 z}{2} + [\varepsilon_{y,xyz}]_0 xyz \end{aligned} \quad (5.32b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = & [\gamma_{xy}]_0 + [\gamma_{xy,x}]_0 x + [\gamma_{xy,y}]_0 y + [\gamma_{xy,z}]_0 z + [\gamma_{xy,xz}]_0 xz + [\gamma_{xy,yz}]_0 yz \\ & + [\varepsilon_{x,yy}]_0 xy + [\varepsilon_{y,xx}]_0 xy + [\varepsilon_{x,yyz}]_0 xyz + [\varepsilon_{y,xxz}]_0 xyz \end{aligned} \quad (5.32c)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} = & [\gamma_{yz}]_0 + [\gamma_{yz,x}]_0 x + [\gamma_{yz,y}]_0 y + [\gamma_{yz,xy}]_0 xy + [\gamma_{xy,xz}]_0 \frac{x^2}{2} \\ & + [\gamma_{xz,xy}]_0 \frac{x^2}{2} - [\varepsilon_{x,yz}]_0 x^2 \end{aligned} \quad (5.32d)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} = & [\gamma_{xz}]_0 + [\gamma_{xz,x}]_0 x + [\gamma_{xz,y}]_0 y + [\gamma_{xz,xy}]_0 xy + [\gamma_{xy,yz}]_0 \frac{y^2}{2} \\ & + [\gamma_{yz,xy}]_0 \frac{y^2}{2} - \varepsilon_{y,xz}]_0 y^2 \end{aligned} \quad (5.32e)$$

Comparando com o procedimento de obtenção dos deslocamentos nodais do elemento de 4 nós, ou seja, Eq. (5.17), tem-se para o retângulo de 8 nós:

$$\{d\}^T = \left\{ \overbrace{u_{0_1} v_{0_1} w_{0_1} \phi_{y_1} \phi_{x_1}}^{\text{Nó 1}} \overbrace{u_{0_2} v_{0_2} w_{0_2} \phi_{y_2} \phi_{x_2}}^{\text{Nó 2}} \overbrace{u_{0_3} v_{0_3} w_{0_3} \phi_{y_3} \phi_{x_3}}^{\text{Nó 3}} \overbrace{u_{0_4} v_{0_4} w_{0_4} \phi_{y_4} \phi_{x_4}}^{\text{Nó 4}} \right. \\ \left. \overbrace{u_{0_5} v_{0_5} w_{0_5} \phi_{y_5} \phi_{x_5}}^{\text{Nó 5}} \overbrace{u_{0_6} v_{0_6} w_{0_6} \phi_{y_6} \phi_{x_6}}^{\text{Nó 6}} \overbrace{u_{0_7} v_{0_7} w_{0_7} \phi_{y_7} \phi_{x_7}}^{\text{Nó 7}} \overbrace{u_{0_8} v_{0_8} w_{0_8} \phi_{y_8} \phi_{x_8}}^{\text{Nó 8}} \right\} \quad (5.33)$$

Como foi apresentado pela Eq. (5.16), os modos de deformação que o elemento é capaz de representar forma o vetor *strain gradient*, ou seja:

$$\{\varepsilon_{sg}\}^T = \{[u]_0 [v]_0 [\phi_z]_0 [w]_0 [\phi_y]_0 [\phi_x]_0 [\varepsilon_x]_0 [\varepsilon_{x,x}]_0 [\varepsilon_{x,y}]_0 [\varepsilon_{x,z}]_0 [\varepsilon_{x,xy}]_0 [\varepsilon_{x,yy}]_0 \\ [\varepsilon_{x,xz}]_0 [\varepsilon_{x,yz}]_0 [\varepsilon_{x,xyz}]_0 [\varepsilon_{x,yyz}]_0 [\varepsilon_y]_0 [\varepsilon_{y,x}]_0 [\varepsilon_{y,y}]_0 [\varepsilon_{y,z}]_0 [\varepsilon_{y,xy}]_0 [\varepsilon_{y,xx}]_0 \\ [\varepsilon_{y,xz}]_0 [\varepsilon_{y,yz}]_0 [\varepsilon_{y,xyz}]_0 [\varepsilon_{y,yyz}]_0 [\gamma_{xy}]_0 [\gamma_{xy,x}]_0 [\gamma_{xy,y}]_0 [\gamma_{xy,z}]_0 [\gamma_{xy,xz}]_0 \\ [\gamma_{xy,yz}]_0 [\gamma_{xz}]_0 [\gamma_{xz,x}]_0 [\gamma_{xz,y}]_0 [\gamma_{xz,xy}]_0 [\gamma_{yz}]_0 [\gamma_{yz,x}]_0 [\gamma_{yz,y}]_0 [\gamma_{yz,xy}]_0\} \quad (5.34)$$

Assim sendo, a Eq. (5.34) apresentou ordenadamente os quarenta graus de liberdade do elemento retangular de 8 nós.

Neste ponto da formulação, é importante relacionar as Eqs. (5.33) e (5.34). Exatamente análogo ao retângulo de 4 nós, esta conexão é feita empregando a matriz $[\phi]$, descrita pela Eq. (5.35). A ordem de tal matriz é 40×40 , uma vez que representa a ordem do número de graus de liberdade do elemento. Neste caso, o subíndice i varia de 1 até 8 que é o número de nós do elemento.

Assim como foi feito no item 5.2.2, os valores acima da matriz se referem aos graus de liberdade do i -ésimo nó. Já os valores à esquerda indicam o vetor *strain gradient* $\{\varepsilon_{sg}\}$ dado pela Eq. (5.34). Com este procedimento, tanto a visualização como a obtenção e manipulação dos dados necessários para se montar a matriz $[\phi]$ são feitos de forma clara e transparente, ou seja:

$$[\phi]^T = \begin{matrix} & u_{0_i} & v_{0_i} & w_{0_i} & \phi_{y_i} & \phi_{x_i} & \dots \\ \begin{matrix} [u]_0 \\ [v]_0 \\ [\phi_z]_0 \\ [w]_0 \\ [\phi_y]_0 \\ [\phi_x]_0 \\ [\varepsilon_x]_0 \\ [\varepsilon_{x,x}]_0 \\ [\varepsilon_{x,y}]_0 \\ [\varepsilon_{x,z}]_0 \\ [\varepsilon_{x,xy}]_0 \\ [\varepsilon_{x,yy}]_0 \\ [\varepsilon_{x,xz}]_0 \\ [\varepsilon_{x,yz}]_0 \\ [\varepsilon_{x,xyz}]_0 \\ [\varepsilon_{x,yyz}]_0 \\ [\varepsilon_y]_0 \\ [\varepsilon_{y,x}]_0 \\ [\varepsilon_{y,y}]_0 \\ [\varepsilon_{y,z}]_0 \\ [\varepsilon_{y,xy}]_0 \\ [\varepsilon_{y,xx}]_0 \\ [\varepsilon_{y,xz}]_0 \\ [\varepsilon_{y,yz}]_0 \\ [\varepsilon_{y,xxz}]_0 \\ [\varepsilon_{y,xyz}]_0 \\ [\gamma_{xy}]_0 \\ [\gamma_{xy,x}]_0 \\ [\gamma_{xy,y}]_0 \\ [\gamma_{xy,z}]_0 \\ [\gamma_{xy,xz}]_0 \\ [\gamma_{xy,yz}]_0 \\ [\gamma_{xz}]_0 \\ [\gamma_{xz,x}]_0 \\ [\gamma_{xz,y}]_0 \\ [\gamma_{xz,xy}]_0 \\ [\gamma_{yz}]_0 \\ [\gamma_{yz,x}]_0 \\ [\gamma_{yz,y}]_0 \\ [\gamma_{yz,xy}]_0 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -y_i & x_i & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & y_i & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -x_i & 0 & 1 & \dots \\ x_i & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{x_i^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ x_i y_i & -\frac{x_i^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{x_i^2}{2} & 0 & x_i & \dots \\ \frac{x_i^2 y_i}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{x_i y_i^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_i^2}{2} & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{x_i^2 y_i}{2} & \frac{x_i^2}{2} & x_i y_i & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_i^2 y_i}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{x_i y_i^2}{2} & \dots \\ 0 & y_i & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{y_i^2}{2} & x_i y_i & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{y_i^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{y_i^2}{2} & -y_i & 0 & \dots \\ 0 & \frac{x_i y_i^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{x_i^2 y_i}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{x_i y_i^2}{2} & -x_i y_i & -\frac{y_i^2}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{y_i^2}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{x_i^2 y_i}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{x_i y_i^2}{2} & 0 & \dots \\ \frac{y_i}{2} & \frac{x_i}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{x_i^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \frac{y_i^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -\frac{x_i y_i}{2} & -\frac{x_i}{2} & \frac{y_i}{2} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{x_i^2}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y_i^2}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{x_i}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{x_i^2}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{x_i y_i}{2} & \frac{x_i}{2} & \frac{y_i}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{x_i^2 y_i}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{y_i}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{x_i y_i}{2} & -\frac{x_i}{2} & -\frac{y_i}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{y_i^2}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{x_i y_i^2}{2} & 0 & 0 & \dots \end{bmatrix} & \dots \end{matrix} \quad (5.35)$$

40×40

uma vez relacionados os deslocamentos nodais com o vetor *strain gradient*, pode-se rela-

cionar este último vetor com as deformações, isto é:

$$\begin{aligned}
 [T_{sg}^{cp}]^T = & \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{xy} \\ [u]_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [v]_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [\phi_z]_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [w]_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [\phi_y]_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [\phi_x]_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ [\varepsilon_x]_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ [\varepsilon_{x,x}]_0 & x & 0 & 0 & 0 \\ [\varepsilon_{x,y}]_0 & y & 0 & 0 & 0 \\ [\varepsilon_{x,z}]_0 & z & 0 & 0 & 0 \\ [\varepsilon_{x,xy}]_0 & xy & 0 & 0 & \frac{x^2}{2} \\ [\varepsilon_{x,yy}]_0 & \frac{y^2}{2} & 0 & 0 & xy \\ [\varepsilon_{x,xz}]_0 & xz & 0 & 0 & \frac{x^2}{2} \\ [\varepsilon_{x,yz}]_0 & yz & 0 & -x^2 & 0 \\ [\varepsilon_{x,xyz}]_0 & xyz & 0 & 0 & \frac{x^2y}{2} & \frac{x^2z}{2} \\ [\varepsilon_{x,yyz}]_0 & \frac{y^2z}{2} & 0 & 0 & \frac{xy^2}{2} & xyz \\ [\varepsilon_y]_0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ [\varepsilon_{y,x}]_0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ [\varepsilon_{y,y}]_0 & 0 & y & 0 & 0 & 0 \\ [\varepsilon_{y,z}]_0 & 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ [\varepsilon_{y,xy}]_0 & 0 & xy & 0 & 0 & \frac{y^2}{2} \\ [\varepsilon_{y,xx}]_0 & 0 & \frac{x^2}{2} & 0 & 0 & xy \\ [\varepsilon_{y,xz}]_0 & 0 & xz & 0 & -y^2 & 0 \\ [\varepsilon_{y,yz}]_0 & 0 & yz & \frac{y^2}{2} & 0 & 0 \\ [\varepsilon_{y,xxz}]_0 & 0 & \frac{x^2z}{2} & \frac{x^2y}{2} & 0 & xyz \\ [\varepsilon_{y,xyz}]_0 & 0 & xyz & \frac{xy^2}{2} & 0 & \frac{y^2z}{2} \\ [\gamma_{xy}]_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ [\gamma_{xy,x}]_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ [\gamma_{xy,y}]_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ [\gamma_{xy,z}]_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ [\gamma_{xy,xz}]_0 & 0 & 0 & \frac{x^2}{2} & 0 & xz \\ [\gamma_{xy,yz}]_0 & 0 & 0 & 0 & \frac{y^2}{2} & yz \\ [\gamma_{xz}]_0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ [\gamma_{xz,x}]_0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ [\gamma_{xz,y}]_0 & 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ [\gamma_{xz,xy}]_0 & 0 & 0 & \frac{x^2}{2} & xy & 0 \\ [\gamma_{yz}]_0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ [\gamma_{yz,x}]_0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ [\gamma_{yz,y}]_0 & 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ [\gamma_{yz,xy}]_0 & 0 & 0 & xy & \frac{y^2}{2} & 0 \end{bmatrix}_{40 \times 5}
 \end{aligned}
 \quad \text{e} \quad
 \begin{aligned}
 [T_{sg}]^T = & \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} & \gamma_{xz} & \gamma_{xy} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{y^2}{2} & 0 & 0 & 0 & xy \\ xz & 0 & 0 & 0 & 0 \\ yz & 0 & -x^2 & 0 & 0 \\ xyz & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{y^2z}{2} & 0 & 0 & 0 & xyz \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & xy & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x^2}{2} & 0 & 0 & xy \\ 0 & xz & 0 & -y^2 & 0 \\ 0 & yz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x^2z}{2} & 0 & 0 & xyz \\ 0 & xyz & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & \frac{x^2}{2} & 0 & xz \\ 0 & 0 & 0 & \frac{y^2}{2} & yz \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{x^2}{2} & xy & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & xy & \frac{y^2}{2} & 0 \end{bmatrix}_{40 \times 5}
 \end{aligned}
 \quad (5.36)$$

A Eq. (5.36) indica que a matriz de transformação com o efeito do cisalhamento parasítico é representada por $[T_{sg}^{cp}]$, enquanto que a matriz livre de erro de formulação é obtida por $[T_{sg}]$.

A formulação de elementos finitos empregando a notação *strain gradient* foi apresentada. Num primeiro momento, foram apontados os aspectos gerais da notação que são utilizados para a formulação de qualquer elemento. Posteriormente, os elementos que fazem parte do escopo deste trabalho foram deduzidos e apresentados, isto é, os retângulos de 4 e 8 nós, respectivamente. O próximo capítulo irá apontar os resultados numéricos pertinentes ao estudo dos materiais compósitos laminados e discuti-los.

6 Aplicações Numéricas

6.1 Introdução

Neste capítulo, os elementos cujas formulações foram descritas no capítulo anterior são aplicadas na solução de vários problemas. Os resultados produzidos comprovam as vantagens da notação *strain gradient* mencionadas. Para verificar a eficiência do método, a solução proposta neste trabalho será comparada com soluções formuladas por elementos finitos isoparamétricos e soluções analíticas.

Para análise dos resultados, será validado primeiramente o quadrilátero de 4 nós e, posteriormente, o quadrilátero de 8 nós. Os problemas são resolvidos inicialmente com os termos espúrios e, depois, com a sua eliminação. Essa comparação é feita para mostrar o efeito do enrijecimento artificial causado pelo elemento contendo os termos ilegítimos.

A implementação computacional foi desenvolvida no aplicativo LAMFEM escrito em linguagem Fortran[®]. A solução numérica para o elemento retangular de 4 nós é determinada empregando malhas uniformes: 2×2 , 4×4 , 8×8 , 16×16 e 32×32 . Para o elemento *serendipity*, utilizam-se malhas 2×2 , 4×4 , 8×8 e 16×16 , respectivamente. Os materiais utilizados para os estudos de caso estão descritos na Tab. 6.1.

Tabela 6.1: Materiais empregados nas análises numéricas.

	Material	Propriedades Elásticas
Material 1	Alumínio	$E = 75\text{GPa}$ e $\nu_{12} = 0.3$
Material 2 [†]	Grafite-epóxi	$E_1 = 25E_2$; $G_{12} = G_{13} = 0.5E_2$; $G_{23} = 0.2E_2$ e $\nu_{12} = 0.25$

[†] $E_2 = 7\text{GPa}$

Com intuito de avaliar o desempenho do modelo, foram escolhidas diferentes relações a/h para abranger todos os tipos de laminados, isto é, os espessos, semi-espessos e delgados. No caso dos laminados simplesmente apoiados (SS–1), as condições de contorno

são dadas por: em $x = 0$ e $x = a \rightarrow v_0 = w_0 = \phi_y = 0$; em $y = 0$ e $y = b \rightarrow u_0 = w_0 = \phi_x = 0$. Para os laminados (SS-2) essas condições mudam para: em $x = 0$ e $x = a \rightarrow u_0 = w_0 = \phi_y = 0$; em $y = 0$ e $y = b \rightarrow v_0 = w_0 = \phi_x = 0$.

6.2 Análise Numérica com o Quadrilátero de 4 Nós

6.2.1 Placa Isotrópica Simplesmente Apoiada

O primeiro problema a ser analisado é uma placa quadrada isotrópica simplesmente apoiada com uma carga concentrada no seu centro, conforme mostra a Fig. 6.1.

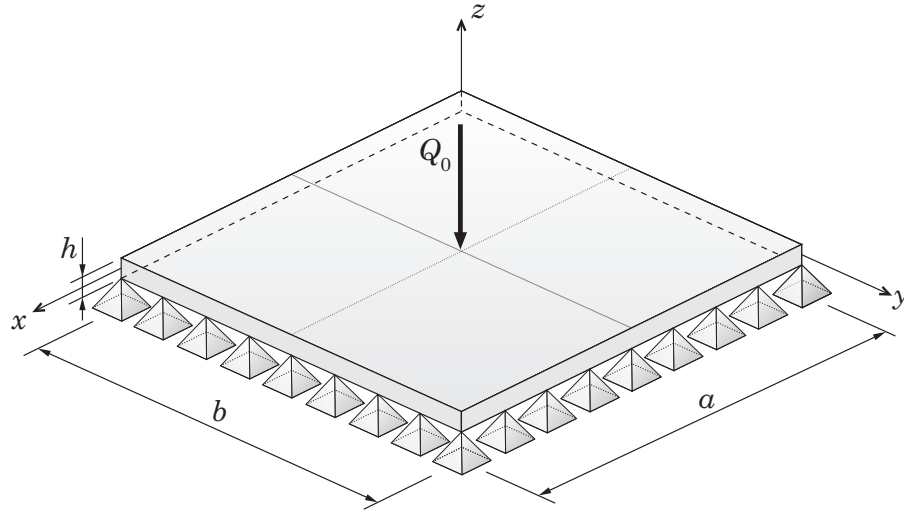


Figura 6.1: Geometria da placa isotrópica simplesmente apoiada sujeita à uma carga concentrada no seu centro.

O valor da carga concentrada Q_0 é de 10N, enquanto que $a = b = 1\text{m}$. As propriedades elásticas se referem ao material 1 da Tab. 6.1.

Nesta primeira análise, será observado apenas o comportamento do deslocamento transversal máximo, ou seja, no centro da placa. A Tab. 6.2 apresenta esses valores obtidos empregando a notação *strain gradient*, com e sem cisalhamento parasítico, e a solução analítica. A unidade utilizada é o mm.

Para a análise das placas espessas, os resultados numéricos obtidos foram pouco aceitáveis. Entretanto, vale ressaltar que para esse tipo de placa, o modelamento tradicional de elementos finitos também apresenta resultados com pouca precisão. Outro ponto importante é que com o aumento da espessura da placa, a remoção dos termos espúrios têm pouca influência no resultado final. Porém, com a diminuição da espessura, a remoção daqueles termos é de fundamental importância na acurácia do resultado. Dessa forma,

Tabela 6.2: Comparação de resultados obtidos para o deslocamento transversal, w , para uma placa isotrópica quadrada sujeita à carga concentrada.

a/h	Solução		Malha			
	analítica [†]	2×2	4×4	8×8	16×16	32×32
2	0.000024	0.000097 (0.000095)	0.000112 (0.000112)	0.000128 (0.000128)	0.000144 (0.000144)	0.000144 (0.000144)
4	0.000189	0.000348 (0.000315)	0.000381 (0.000219)	0.000414 (0.000412)	0.000447 (0.000446)	0.000447 (0.000446)
5	0.000368	0.000574 (0.000487)	0.000616 (0.000590)	0.000660 (0.000653)	0.000701 (0.000699)	0.000701 (0.000699)
10	0.002946	0.003394 (0.001869)	0.003488 (0.002869)	0.003607 (0.003419)	0.003706 (0.003656)	0.003706 (0.003656)
20	0.023570	0.024562 (0.005592)	0.024686 (0.012940)	0.025055 (0.020303)	0.025384 (0.023966)	0.025384 (0.023966)
50	0.368286	0.372085 (0.016582)	0.370535 (0.055057)	0.372085 (0.150426)	0.373837 (0.272009)	0.373837 (0.272009)
100	2.946286	2.963164 (0.034102)	2.946400 (0.123088)	2.952242 (0.429235)	2.957830 (1.188999)	2.957830 (1.188999)

[†] Ver Apêndice B.1, Eq. (B.1a)

() → Valores entre parênteses se referem aos deslocamentos com os termos espúrios

para as placas semi-espessas e delgadas, os erros foram pequenos, chegando a 0.004% para malha 4×4 com relação $a/h = 100$ sem cisalhamento parasítico e 95.822% para a mesma malha, mas com termos espúrios.

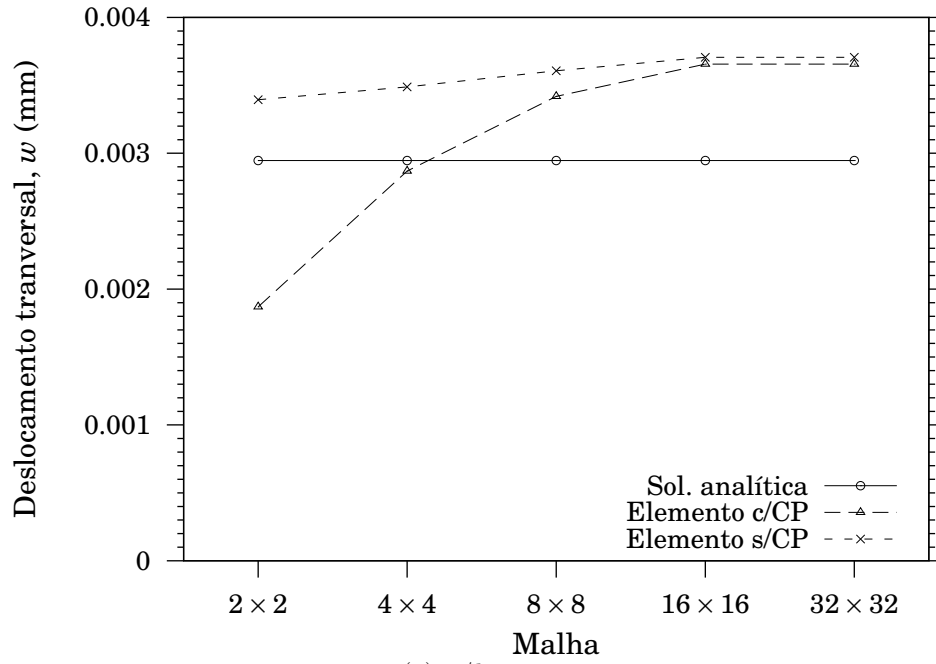
Além disso, para as placas delgadas, com o refino da malha contendo os elementos legítimos, percebe-se que a precisão é mantida, apesar da convergência não ser monotônica. Entretanto, com a presença dos termos espúrios, o resultado estabilizou para as malhas mais refinadas longe da solução analítica. Isso mostra que a remoção dos termos espúrios gera um elemento com bastante acurácia, inclusive para placas delgadas, onde o problema do *locking* causa erros acentuados em elementos em geral.

As Figs. 6.2(a) à 6.3(b) apresentam a convergência do deslocamento central, w , dos elementos com o cisalhamento parasítico, indicado por c/CP , e sem cisalhamento parasítico – s/CP ; comparados com a solução analítica.

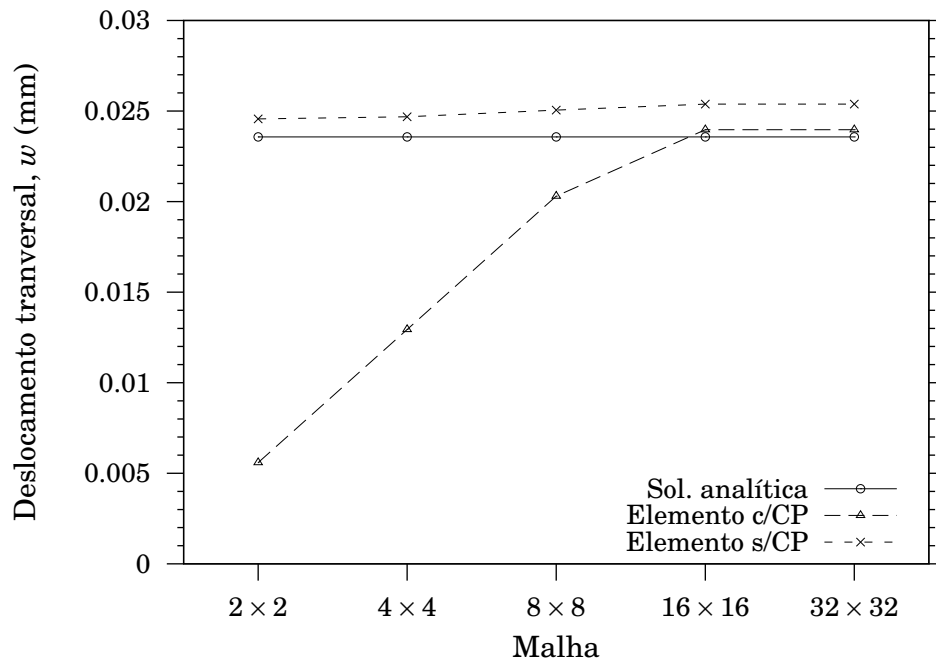
É importante notar que para as placas semi-espessa e delgada – Figs. 6.2(b), 6.3(a) e 6.3(b), respectivamente; um refino pequeno na malha (2×2), já mostrou resultados próximos ao analítico para os elementos sem cisalhamento parasítico. Já para a placa

espessa, a Fig. 6.2(a) indica que o modelo empregando a notação *strain gradient* é um tanto flexível, ou seja, os resultados convergem para uma solução acima da analítica.

Com isso, o elemento finito de 4 nós empregando a notação *strain gradient* para análise dos deslocamentos de placas foi validado para os exemplos deste trabalho.



(a) $a/h = 10$



(b) $a/h = 20$

Figura 6.2: Convergência do deslocamento transversal, w , para as relações $a/h = 10$ e 20.

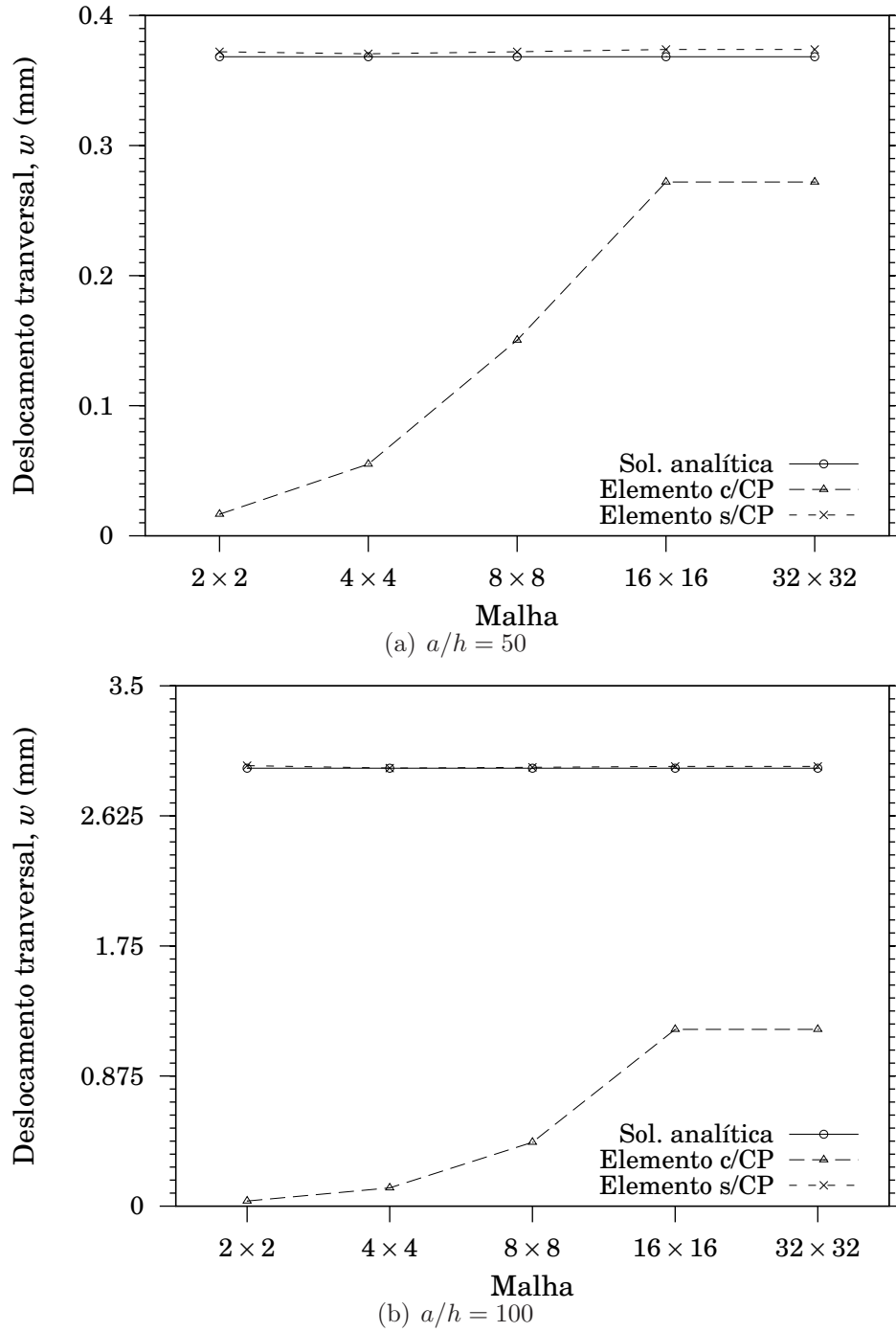


Figura 6.3: Convergência do deslocamento transversal, w , para as relações $a/h = 50$ e 100.

6.2.2 Laminado Cruzado Simplesmente Apoiado (SS-1)

O próximo exemplo corresponde a um laminado quadrado simétrico formado por lâminas de mesma espessura e sequência de empilhamento $[0/90/90/0]$. A placa está simplesmente apoiada e o carregamento considerado é o uniformemente distribuído, conforme mostra a Fig. 6.4.

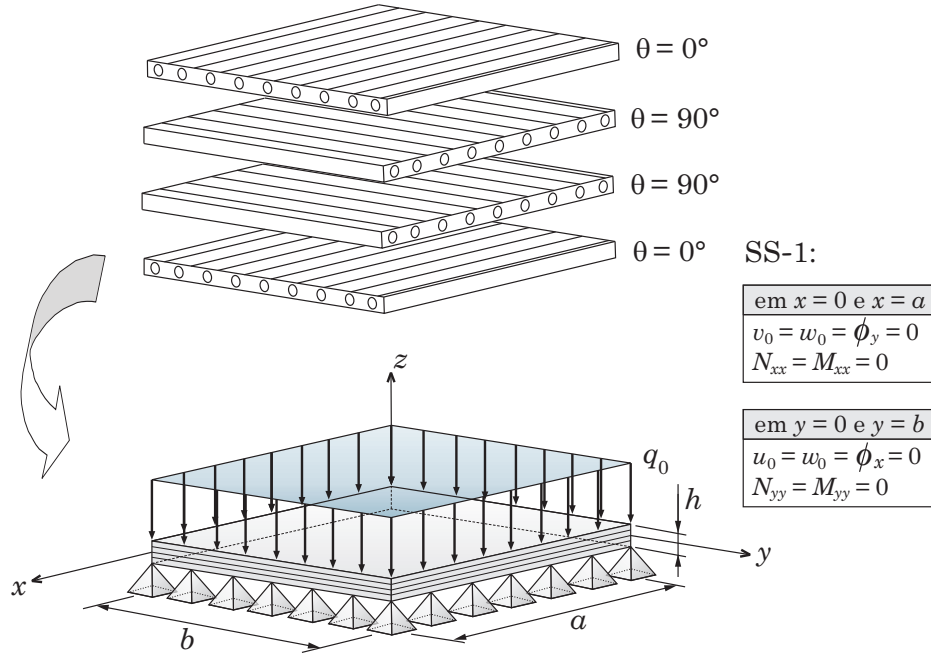


Figura 6.4: Geometria e condições de contorno do laminado $[0/90/90/0]$ simplesmente apoiado (SS-1) com carregamento uniformemente distribuído e $a/b = 1$.

Para a análise numérica, é empregado o material 2 da Tab. 6.1. A intensidade da carga é $q_0 = 10\text{N/m}^2$ e as dimensões da placa são $a = b = 1\text{m}$.

Neste exemplo, serão analisados os deslocamentos e as tensões máximas. Por isso, para simplificar a visualização dessas grandezas nos gráficos e nas tabelas, as mesmas foram adimensionalizadas conforme as relações:

$$\begin{aligned} \bar{w} = w_0 \left(\frac{E_2 h^3}{a^4 q_0} \right), \quad \bar{\sigma}_{xx} = \sigma_{xx} \left(\frac{h^2}{a^2 q_0} \right), \quad \bar{\sigma}_{yy} = \sigma_{yy} \left(\frac{h^2}{a^2 q_0} \right) \\ \bar{\tau}_{xy} = \tau_{xy} \left(\frac{h^2}{a^2 q_0} \right), \quad \bar{\tau}_{xz} = \tau_{xz} \left(\frac{h}{a q_0} \right) \quad \text{e} \quad \bar{\tau}_{yz} = \tau_{yz} \left(\frac{h}{a q_0} \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Outra vantagem em se trabalhar com grandezas adimensionais está na entrada dos dados. Por exemplo, os valores de carregamento e dimensões da placa podem ser quaisquer de tal maneira que os valores adimensionalizados permanecem os mesmos. Entretanto, é importante destacar que a localização dos deslocamentos máximos depende do tipo de carregamento e das condições de contorno. Já, para as tensões, além do padrão de carregamento e condições de contorno, o que determina a posição das tensões máximas é o esquema de laminação. Portanto, para facilitar o entendimento do posicionamento, principalmente das tensões, em cada estudo de caso serão apresentadas as coordenadas $x - y - z$ para a Eq. (6.1), quando estes valores não forem evidentes.

Com isso, a Tab. 6.3 apresenta os resultados para as diversas malhas dos deslo-

camentos e das tensões adimensionais para as relações $a/h = 10$ e 20 .

Tabela 6.3: Resultados obtidos via MEF para deslocamento e tensões adimensionais, $\bar{w}$ e $\bar{\sigma}$, para um laminado espesso e semi-espesso $[0/90/90/0]$, submetido ao carregamento uniformemente distribuído.

a/h	Fonte	$\bar{w} \times 10^2$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
10						
Solução via MEF	2×2	0.9283	0.4491	0.3777	0.1791	0.4878
		(0.6837)	(0.2846)	(0.2175)	(-0.1786)	(0.1245)
	4×4	1.0259	0.7175	0.5283	0.2044	0.6352
		(0.9237)	(0.6257)	(0.4551)	(0.0336)	(0.4671)
	8×8	1.0334	0.7537	0.5116	0.2779	0.7264
		(1.0051)	(0.7272)	(0.4954)	(0.2107)	(0.6750)
Solução analítica	16×16	1.0382	0.7656	0.5080	0.3235	0.7811
		(1.0310)	(0.7587)	(0.5042)	(0.3021)	(0.7670)
	32×32	1.0422	0.7706	0.5084	0.3526	0.8147
		(1.0404)	(0.7689)	(0.5075)	(0.3466)	(0.8110)
	Navier [†]	1.0247	0.7578	0.5005	0.3497	0.7980
		Reddy ^{††}	1.1055	0.8094	0.5436	0.4015
20						
Solução via MEF	2×2	0.6152	0.4905	0.2926	0.1448	0.5268
		(0.2453)	(0.1547)	(0.0886)	(-0.4215)	(-0.2391)
	4×4	0.7538	0.7600	0.4234	0.1703	0.6667
		(0.5136)	(0.4945)	(0.2768)	(-0.2289)	(0.1562)
	8×8	0.7684	0.7967	0.4054	0.2485	0.7536
		(0.6872)	(0.7041)	(0.3684)	(0.0467)	(0.5649)
Solução analítica	16×16	0.7740	0.8074	0.4006	0.2953	0.8061
		(0.7518)	(0.7819)	(0.3923)	(0.2218)	(0.7515)
	32×32	0.7780	0.8127	0.4005	0.3259	0.8396
		(0.7723)	(0.8062)	(0.3985)	(0.3039)	(0.8251)
	Navier [†]	0.7693	0.8045	0.3967	0.3226	0.8298
		Reddy ^{††}	0.7923	0.8178	0.4105	0.3648

[†] Solução de Navier conforme a FSDT, ver Apêndice B.2.1

^{††} Solução de Navier conforme a HSDT de Reddy, ver Apêndice B.3

() → Valores entre parênteses se referem aos elementos com termos espúrios

No estudo deste caso, as tensões normais no plano foram avaliadas nas seguintes coordenadas: $\bar{\sigma}_{xx}(a/2, b/2, h/2)$ e $\bar{\sigma}_{yy}(a/2, b/2, h/4)$. Foram utilizadas as relações constitutivas para o cálculo das tensões cisalhantes transversais. Para $\bar{\tau}_{xz}$, os valores máximos estão no ponto $(x, y) = (0, b/2)$ nas lâminas 1 e 3. Enquanto que para $\bar{\tau}_{yz}$, esses valores

foram computados no ponto $(x, y) = (a/2, 0)$ das lâminas 2 e 4.

É importante destacar que não fez parte da análise a tensão cisalhante no plano, σ_{xy} , por ser cerca de 10 vezes menor que as outras tensões, não influenciando, portanto, no dimensionamento. Além disso, foram apresentadas a solução analítica de primeira ordem de Mindlin obtida através de séries trigonométricas em função de parâmetros desconhecidos chamada de *solução de Navier* e a solução analítica de ordem superior de Reddy. A primeira é utilizada para efeito de comparação de resultados, uma vez que emprega a mesma teoria do modelo gerado pelo LAMFEM, e a segunda está presente para enriquecer a comparação e o trabalho, pois apresenta os valores próximos à solução de Navier.

Ao observar os valores obtidos para o laminado espesso, nota-se que o modelo com termos espúrios apresenta resultados mais próximos do analítico para a malha mais refinada. Entretanto, o modelo sem termos espúrios apresenta uma taxa de convergência maior. Além disso, para este modelo os resultados são satisfatórios. Esse tipo de comportamento se repete para o laminado semi-espesso.

Agora, para visualizar o problema do travamento (*locking*), a relação $a/h = 100$ foi escolhida, conforme mostra a Tab. 6.4.

Tabela 6.4: Resultados obtidos via MEF para deslocamento e tensões adimensionais, $\bar{w}$ e $\bar{\sigma}$, para um laminado delgado $[0/90/90/0]$, submetido ao carregamento uniformemente distribuído.

a/h	Fonte	$\bar{w} \times 10^2$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
100						
Solução via MEF	2×2	0.5079	0.5087	0.2564	0.1303	0.5440
		(0.0127)	(0.0095)	(0.0048)	(-0.6299)	(-0.2473)
	4×4	0.6617	0.7763	0.3814	0.1583	0.6766
		(0.0504)	(0.0559)	(0.0281)	(-0.8023)	(-0.7547)
	8×8	0.6783	0.8127	0.3632	0.2363	0.7608
		(0.1652)	(0.1938)	(0.0961)	(-0.7622)	(-0.5679)
	16×16	0.6830	0.8214	0.3581	0.2822	0.8102
		(0.3847)	(0.4590)	(0.2204)	(-0.4493)	(0.0041)
	32×32	0.6859	0.8257	0.3577	0.3082	0.8383
		(0.5756)	(0.6913)	(0.3161)	(-0.0489)	(0.5344)
Solução analítica	Navier [†]	0.6833	0.8227	0.3558	0.3137	0.8413
	Reddy ^{††}	0.6843	0.8233	0.3564	0.3524	1.0274

[†] Solução de Navier conforme a FSDT, ver Apêndice B.2.1

^{††} Solução de Navier conforme a HSDT de Reddy, ver Apêndice B.3

() → Valores entre parênteses se referem aos elementos com termos espúrios

Quando a solução via MEF é comparada com a solução analítica de Navier, percebe-se que o elemento finito utilizando a notação *strain gradient* é preciso também para a análise de tensões. Para a malha mais refinada, por exemplo, o erro para os elementos sem os termos espúrios foi de 0.35% e 0.55% para as tensões normais no plano $\bar{\sigma}_{xx}$ e $\bar{\sigma}_{yy}$, respectivamente. Já para as tensões cisalhantes transversais $\bar{\tau}_{xz}$ e $\bar{\tau}_{yz}$, o erro ficou em 1.75% e 0.36% para a mesma malha.

Como já foi mencionado no exemplo da placa isotrópica, os resultados sem termos espúrios ficam evidenciados com a diminuição da espessura do laminado. Por esse motivo, são mostrados graficamente apenas os valores referentes à Tab. 6.4, ou seja, para laminados delgados (ver Figs. 6.6 à 6.8). Em geral, os resultados mostram uma taxa de convergência pobre para os modelos com termos espúrios; enquanto que os modelos sem termos espúrios convergem mais rapidamente. As Figs. 6.5(a) e 6.6(a) apontam para a demora na convergência nas tensões normais no plano; mesmo nas malhas mais refinadas o resultado está longe da solução analítica de primeira ordem. Por outro lado, com a remoção dos termos espúrios, as Figs. 6.5(b) e 6.6(b) mostram que com um refino pequeno, 4×4 , o resultado já é satisfatório.

As Figs. 6.7(a) e 6.8(a) mostram que os termos espúrios na análise das tensões cisalhantes transversais geram resultados completamente equivocados em relação à solução analítica via FSDT. Entretanto, removendo tais termos o comportamento é completamente diferente. As Figs. 6.7(b) e 6.8(b) mostram este efeito e a concordância com a solução analítica é plena.

Com a finalidade de visualizar o efeito da deformação cisalhante transversal no deslocamento, que para a CLPT é constante (pois não são consideradas as deformações cisalhantes transversais), a Fig. 6.9(b) mostra que para relações a/h maiores que 20 tal efeito pode ser desconsiderado. Entretanto, na Fig. 6.9(a) os termos espúrios degradam a solução mesmo onde o refino é maior.

A fim de avaliar a precisão do elemento ao longo do refino da malha, a Tab. 6.5 apresenta os erros para as tensões adimensionalizadas.

Ao comparar os valores apresentados na Tab. 6.5, nota-se que a remoção dos termos espúrios faz a diferença nas malhas menos refinadas para uma relação $a/h = 10$, pois os valores dados para as malhas 8×8 , 16×16 e 32×32 são praticamente os mesmos. Porém, a partir da relação $a/h = 20$, os elementos sem o cisalhamento parasítico apresentam uma taxa de convergência mais satisfatória e rápida.

A convergência das tensões normais e cisalhantes para o laminado com relação

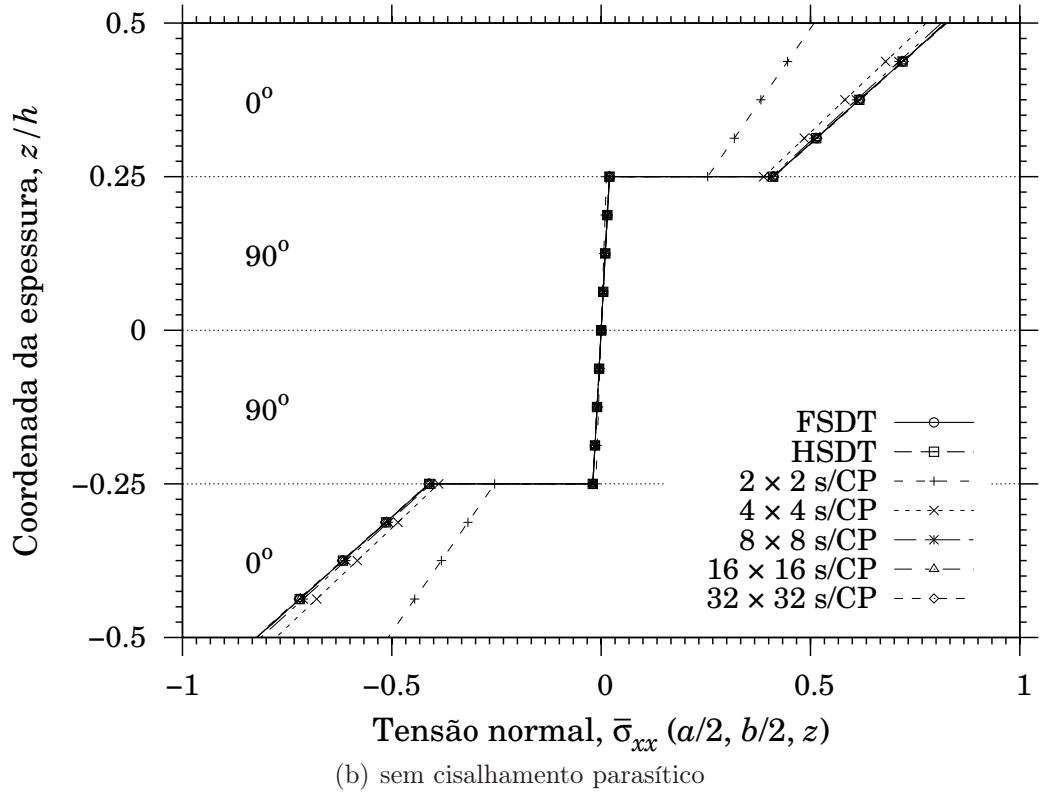
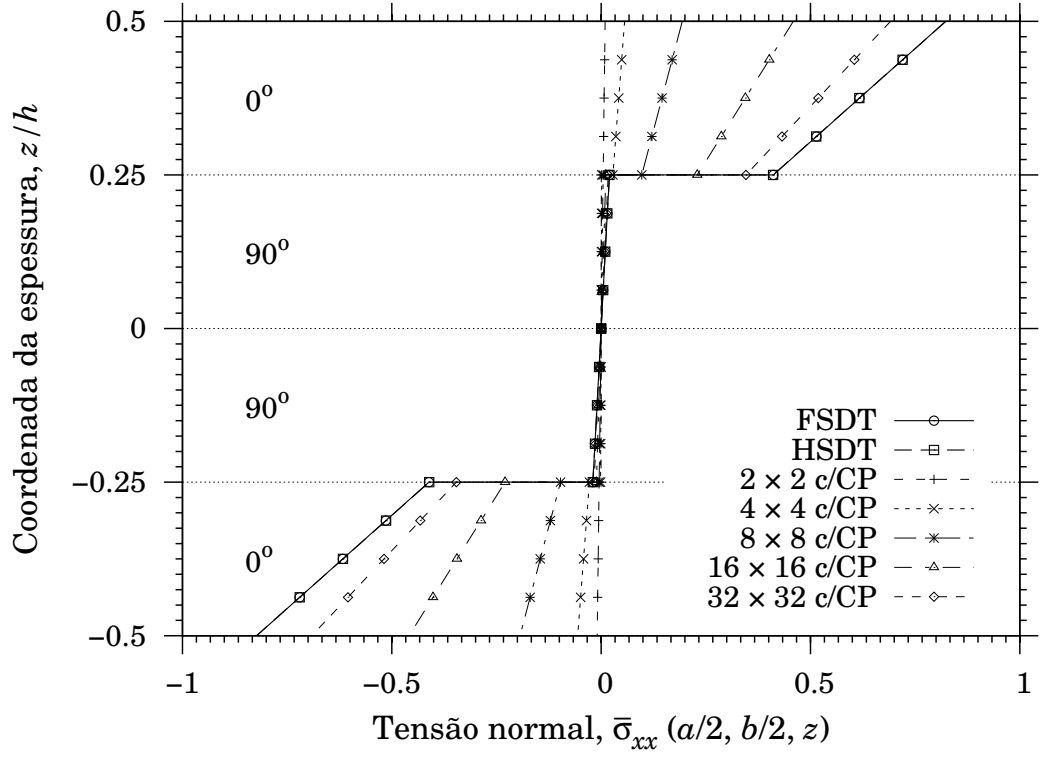
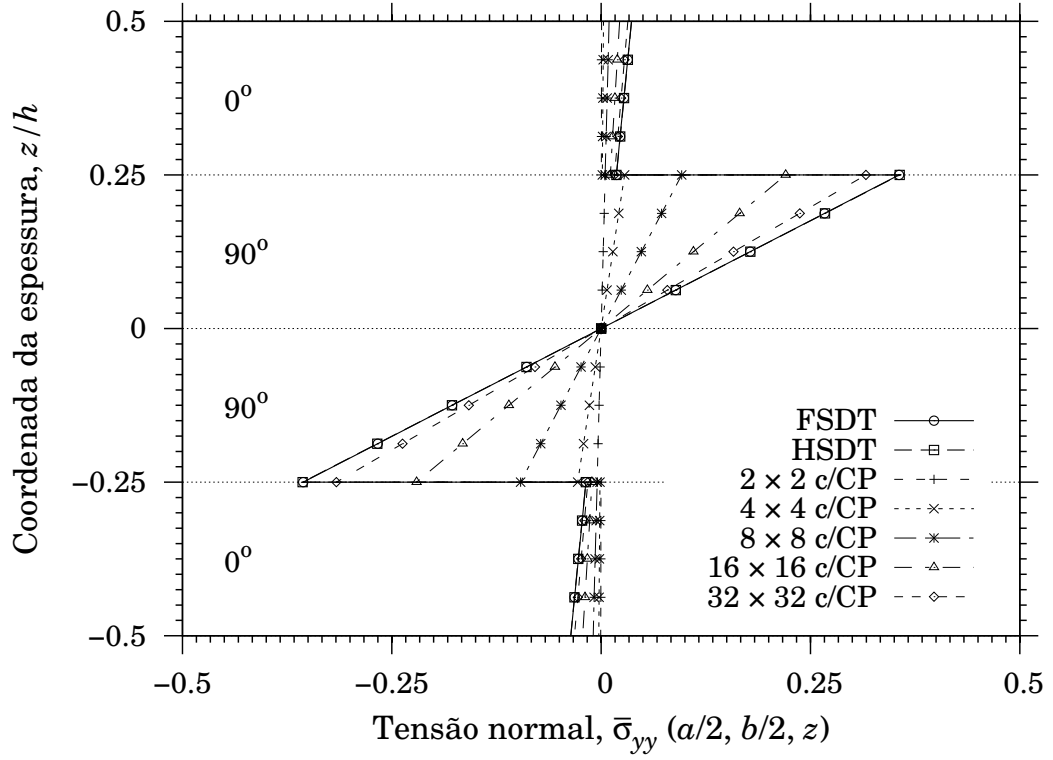
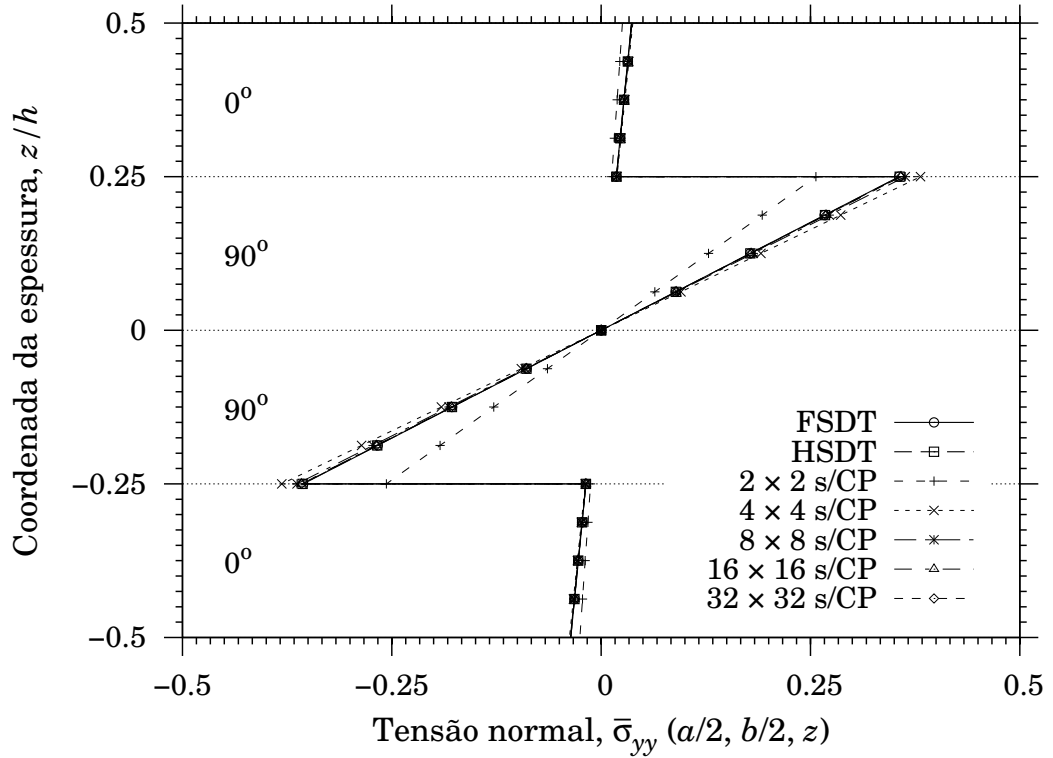


Figura 6.5: Tensões normais no plano, $\bar{\sigma}_{xx}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/90/0]$ para relação $a/h = 100$.

$a/h = 100$ podem ser visualizadas graficamente nas Figs. 6.10 e 6.11. A linha contínua representa a solução analítica de Navier, e observando o comportamento dos elementos sem



(a) com cisalhamento parasítico



(b) sem cisalhamento parasítico

Figura 6.6: Tensões normais no plano, $\bar{\sigma}_{yy}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/90/0]$ para relação $a/h = 100$.

termos espúrios, percebe-se que tal solução apresenta resultados extremamente próximos aos obtidos pela solução de Navier. Observa-se esse comportamento tanto para as tensões

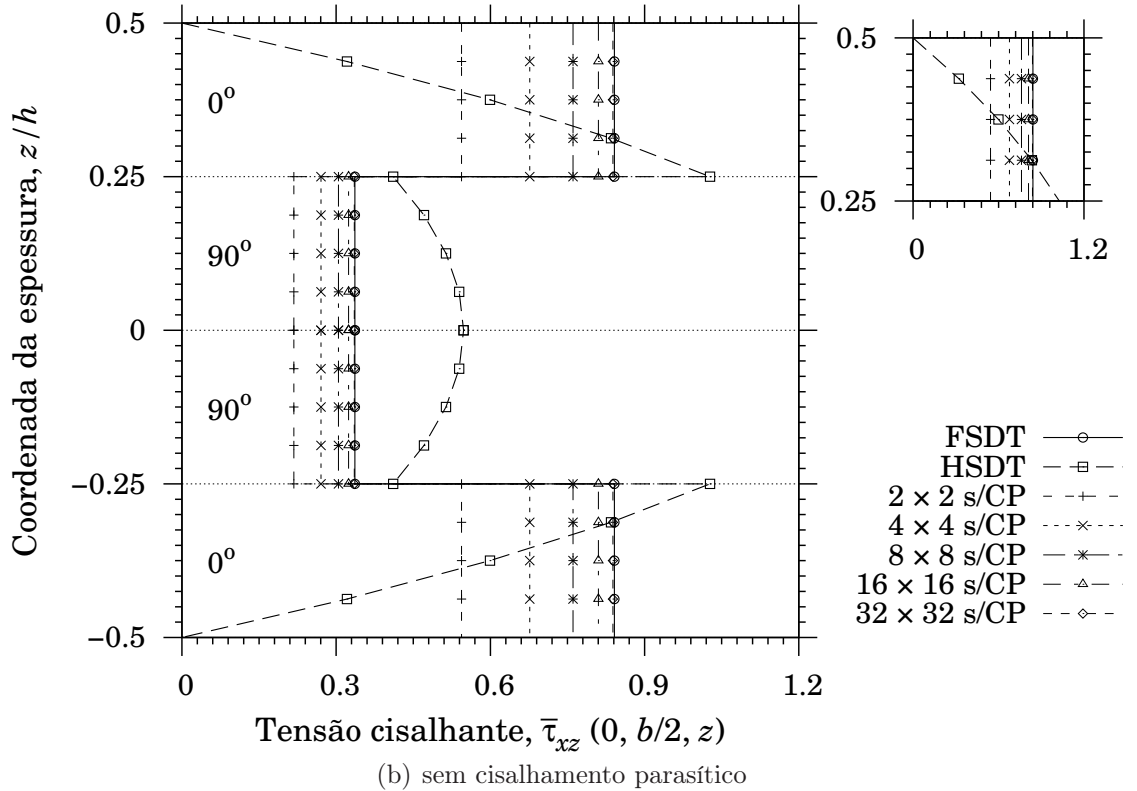
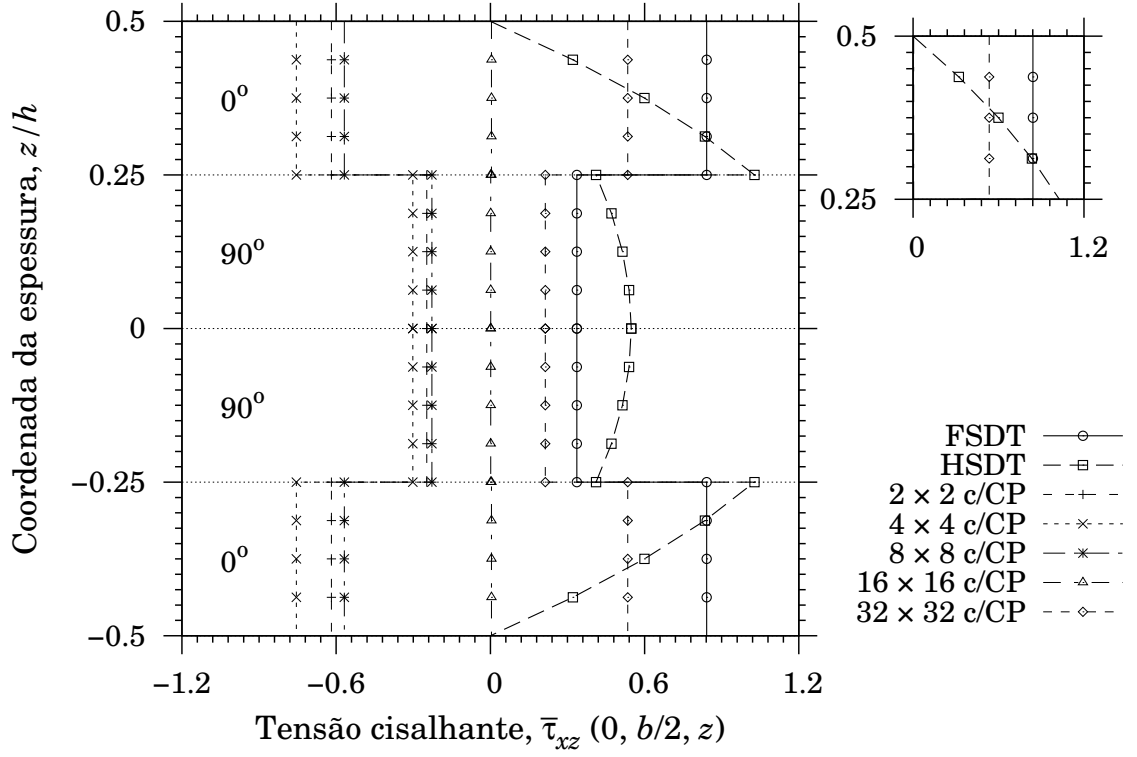


Figura 6.7: Tensões cisalhantes transversais, $\bar{\tau}_{xz}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/90/0]$ para relação $a/h = 100$.

normais quanto para as tensões cisalhantes. Por outro lado, os resultados com os termos espúrios não apresentam nenhum padrão evidente de convergência, além desses valores

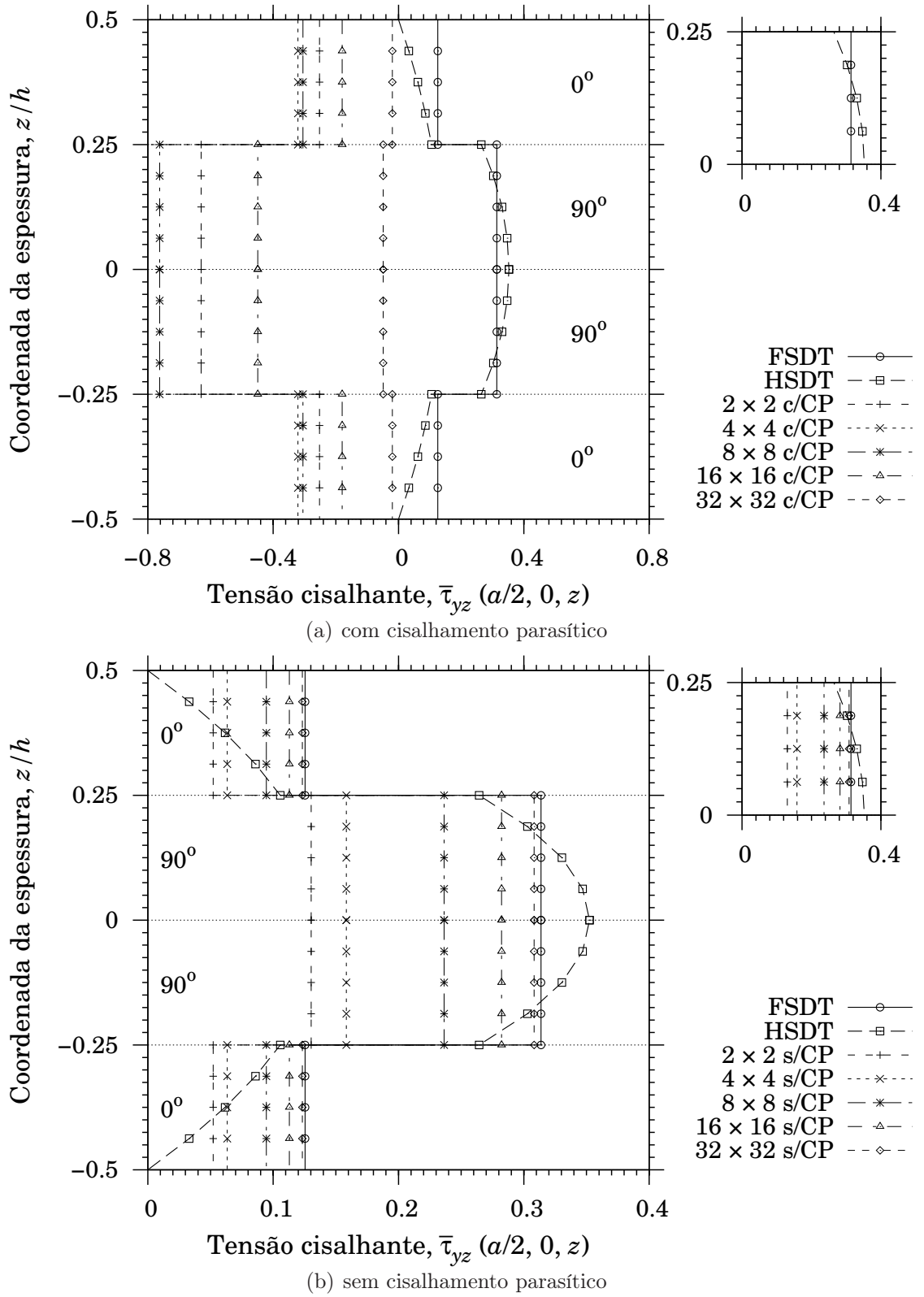
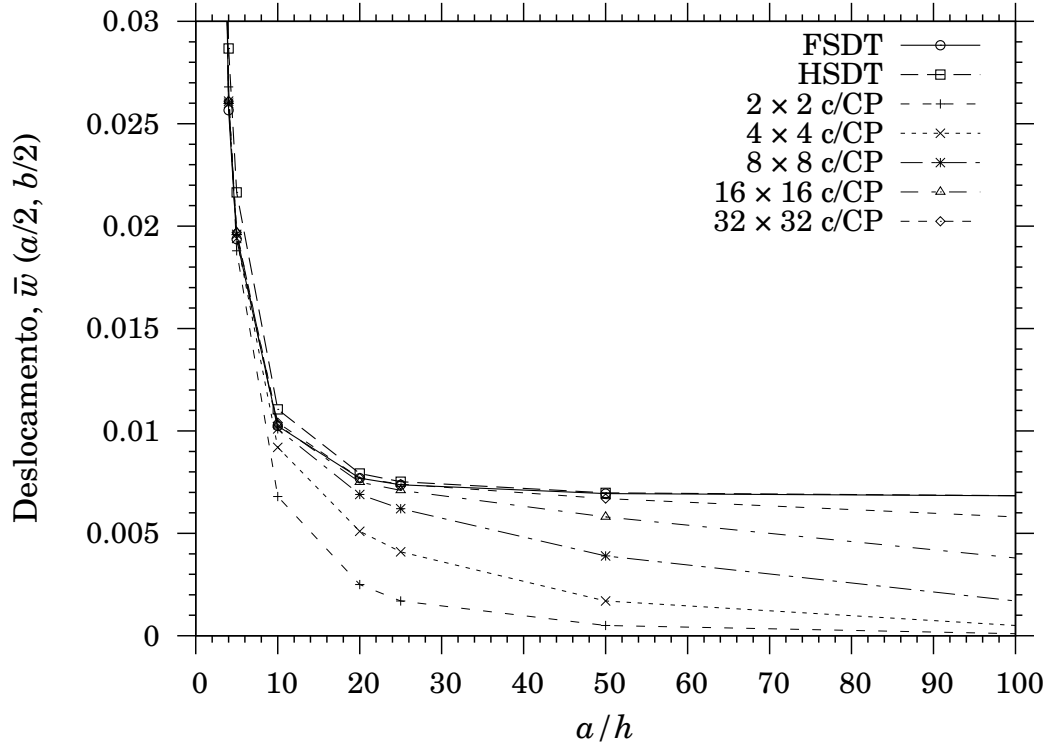
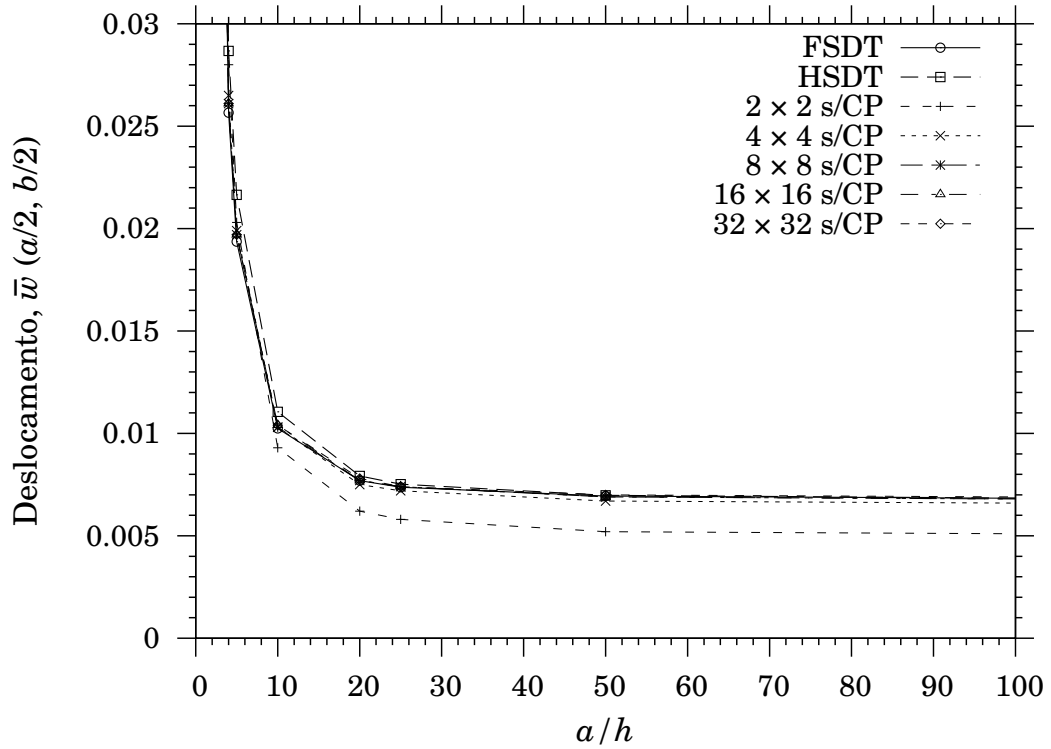


Figura 6.8: Tensões cisalhantes transversais, $\bar{\tau}_{yz}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/90/0]$ para relação $a/h = 100$.

estarem mais afastados da solução analítica, mesmo na malha mais refinada.



(a) com cisalhamento parasítico



(b) sem cisalhamento parasítico

Figura 6.9: Deslocamento transversal máximo adimensional ($\bar{w}$) *versus* razão lado-espessura (a/h) para o laminado $[0/90/90/0]$.

6.2.3 Laminado Angular Simplesmente Apoiado (SS-2)

O terceiro exemplo corresponde a um laminado anti-simétrico $[-45/45]$ quadrado com lâminas de mesma espessura e o carregamento assumido é o senoidal:

$$q(x, y) = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (6.2)$$

A Fig. 6.12 apresenta a distribuição do carregamento na placa laminada e as condições de apoio consideradas, isto é, simplesmente apoiado (SS-2). É empregado o material 2 da Tab. 6.1. A intensidade da carga é $q_0 = 10\text{N/m}^2$ e as dimensões da placa são $a = b = 1\text{m}$. Neste exemplo, as grandezas também foram adimensionalizadas segundo a Eq. (6.1).

Por se tratar de um laminado anti-simétrico, as tensões normais no plano, $\bar{\sigma}_{xx}$ e $\bar{\sigma}_{yy}$ são iguais. Isso também é válido para as tensões cisalhantes transversais, ou seja, $\bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{yz}$. É importante observar este comportamento, pois a análise numérica fica simplificada. Além disso, a tensão cisalhante no plano, $\bar{\tau}_{xy}$, será considerada nesta aplicação, uma vez que os valores obtidos para tal tensão são vistos como significativos, portanto, influenciando em análises de dimensionamento.

No estudo deste exemplo, as tensões normais e cisalhante no plano serão avaliadas no centro da placa, isto é, $\bar{\sigma}_{xx}(a/2, b/2, h/2) = \bar{\sigma}_{yy}(a/2, b/2, -h/2)$ e $\bar{\tau}_{xy}(0, 0, -h/2)$,

Tabela 6.5: Erros percentuais apresentados pelos elementos com e sem termos espúrios para as tensões adimensionais do laminado $[0/90/90/0]$ simplesmente apoiado.

a/h	Malha	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$				
10	2×2	(62.44)	40.73	(56.54)	24.52	(84.39)	38.87	(151.08)	48.78
	4×4	(17.43)	5.32	(9.06)	5.57	(41.46)	20.39	(90.38)	41.54
	8×8	(4.03)	0.54	(1.01)	2.23	(15.41)	8.97	(39.74)	20.50
	16×16	(0.12)	1.03	(0.76)	1.52	(3.87)	2.11	(13.60)	7.46
	32×32	(1.47)	1.70	(1.41)	1.60	(1.64)	2.09	(0.85)	0.84
20	2×2	(80.77)	39.02	(77.65)	26.24	(128.82)	36.52	(230.64)	55.09
	4×4	(38.53)	5.53	(30.22)	6.72	(81.18)	19.65	(170.95)	47.20
	8×8	(12.48)	0.96	(7.13)	2.20	(31.92)	9.18	(85.51)	22.96
	16×16	(2.80)	0.37	(1.11)	0.98	(9.44)	2.86	(31.25)	8.46
	32×32	(0.21)	1.03	(0.46)	0.96	(0.57)	1.18	(5.78)	1.04
100	2×2	(98.84)	38.17	(98.65)	27.94	(173.48)	35.34	(300.77)	58.46
	4×4	(93.20)	5.64	(92.10)	7.20	(189.71)	19.58	(355.74)	49.53
	8×8	(76.44)	1.22	(72.98)	2.07	(167.51)	9.56	(342.96)	24.66
	16×16	(44.21)	0.35	(38.05)	0.65	(99.50)	3.70	(243.21)	10.05
	32×32	(15.98)	0.16	(11.14)	0.55	(36.48)	0.36	(115.61)	1.75

() → Valores entre parênteses se referem aos elementos com termos espúrios

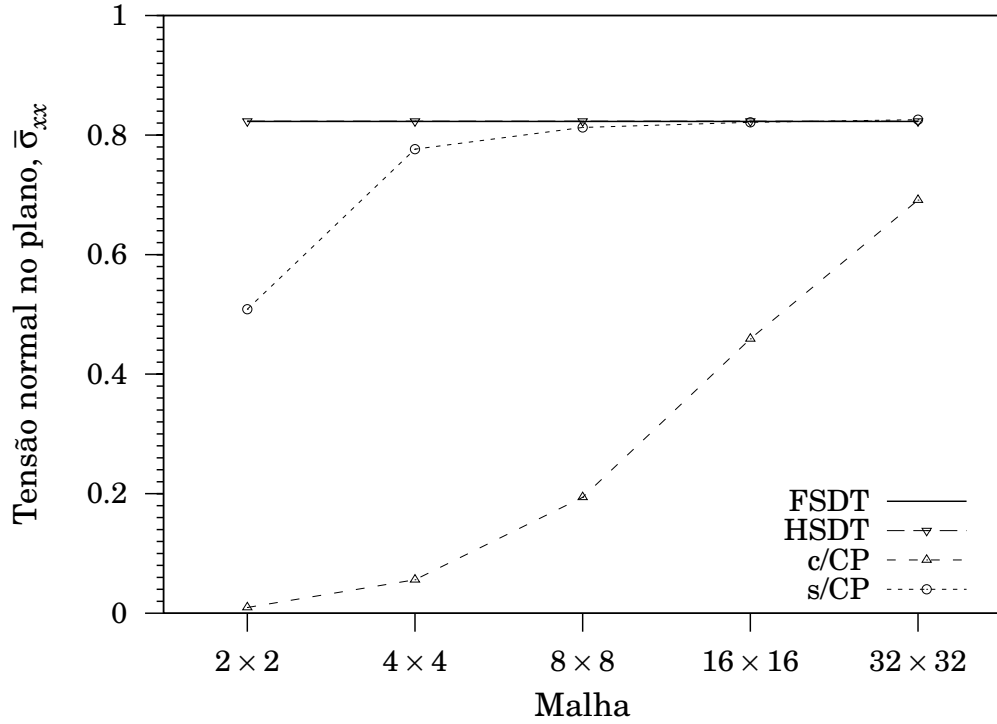
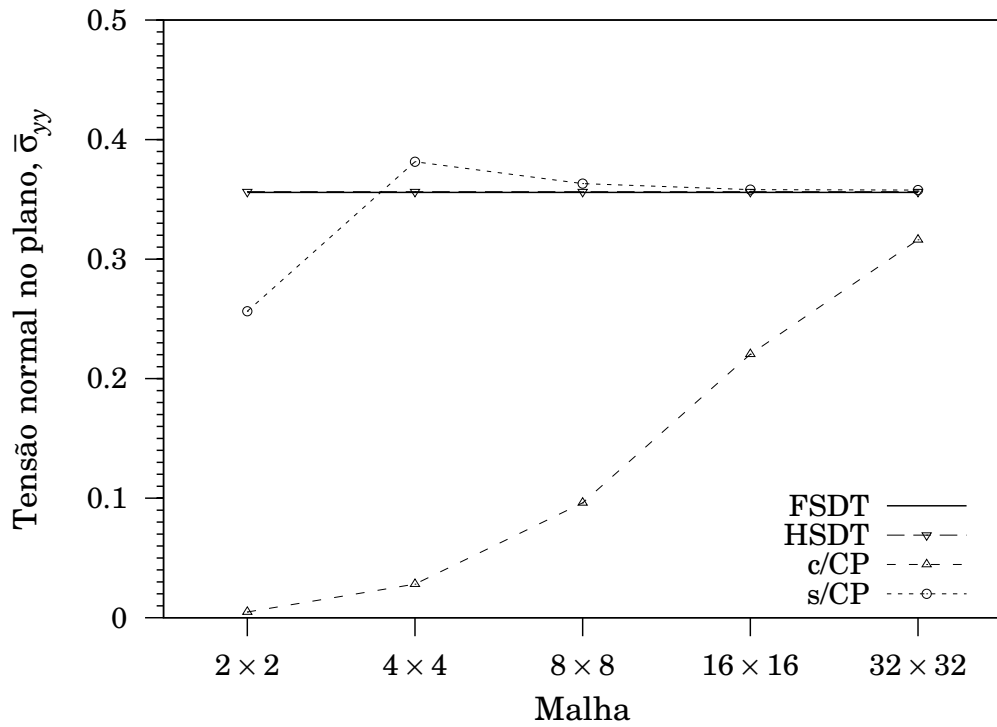
(a) Tensão normal, $\bar{\sigma}_{xx}$ (b) Tensão normal, $\bar{\sigma}_{yy}$

Figura 6.10: Convergência das tensões normais adimensionalizadas para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/90/0]$.

respectivamente. As tensões cisalhantes transversais serão calculadas no ponto médio das bordas, dessa forma, $\bar{\tau}_{xz}(0, b/2, k = 2) = \bar{\tau}_{yz}(a/2, 0, k = 1)$. Como foram escolhidos os ângulos -45° e 45° , as tensões cisalhantes serão constantes ao longo da espessura do

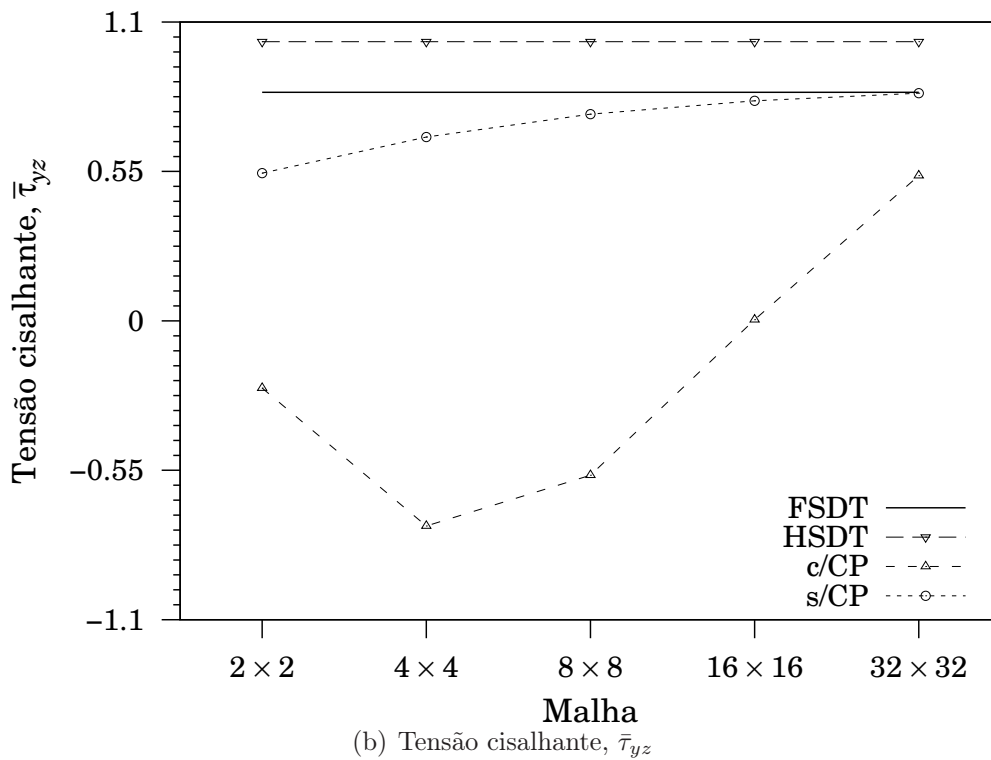
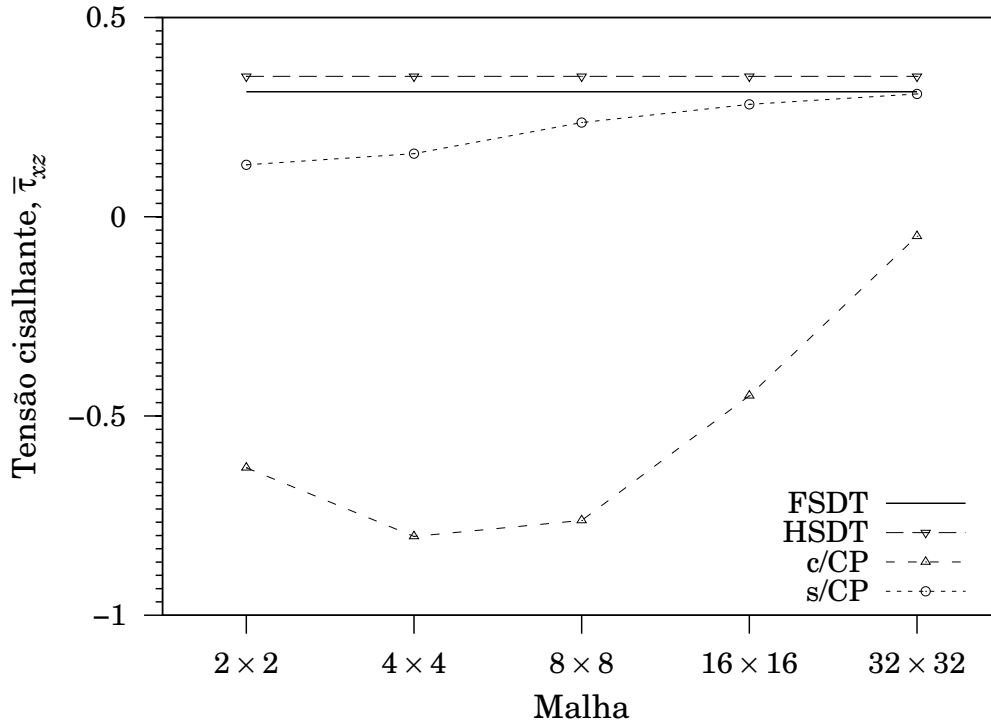


Figura 6.11: Convergência das tensões cisalhantes adimensionalizadas para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/90/0]$.

laminado. Assim como no caso anterior, as relações constitutivas serão utilizadas para o cálculo das tensões cisalhantes transversais.

A Tab. 6.6 apresenta os resultados para as diversas malhas dos deslocamentos e

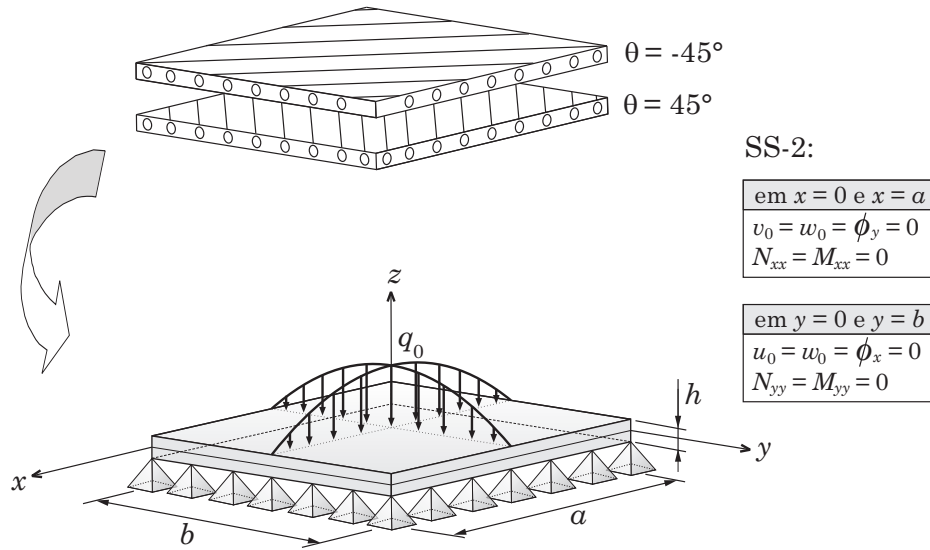


Figura 6.12: Geometria e condições de contorno do laminado $[-45/45]$ simplesmente apoiado (SS-2) com carregamento uniformemente distribuído e $a/b = 1$.

das tensões adimensionais para as relações $a/h = 10, 20$ e 100 .

Analogamente ao laminado cruzado, ao analisar os deslocamentos, percebe-se para a placa laminada espessa que a remoção dos termos espúrios têm pouca influência no resultado, principalmente com o aumento do refino. Entretanto, a taxa de convergência é maior para os elementos corrigidos.

Para visualizar graficamente os números mostrados pela Tab. 6.6 para o caso de $a/h = 100$, as Figs. 6.13(a) à 6.15(b) apresentam a distribuição das tensões ao longo da espessura do laminado.

Ao observar as Figs. 6.13(a), 6.14(a) e 6.15(a), nota-se o enrijecimento artificial (*locking*) causado pelos termos espúrios. Além disso, esta última figura mostra que o cisalhamento parasítico gera resultados totalmente inadequados. Após a devida remoção dos termos espúrios, as Figs. 6.13(b), 6.14(b) e 6.15(b) mostram boa aproximação dos resultados dos elementos *strain gradient* com a solução analítica.

Com o intuito de avaliar a precisão do elemento *strain gradient* para o deslocamento e para as tensões, as Figs. 6.16(a) à 6.17(b) apresentam a convergência para o laminado com relação $a/h = 100$. A linha contínua representa a solução analítica de Navier enquanto que as linhas tracejadas com triângulos e círculos indicam a solução com e sem termos espúrios, respectivamente.

Avaliando os erros das soluções obtidas pelos elementos corrigidos na malha mais refinada e relação $a/h = 10$, determinou-se 10.97% para o deslocamento transversal,

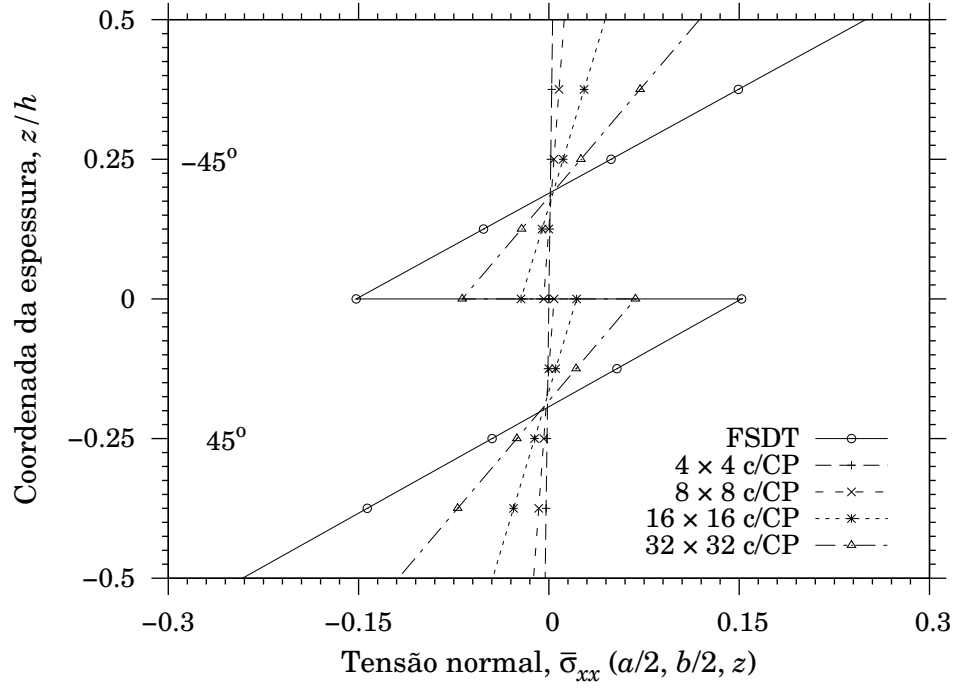
Tabela 6.6: Resultados obtidos via MEF para deslocamento e tensões adimensionais para os laminados espesso, semi-espesso e delgado $[-45/45]$ submetidos ao carregamento senoidal.

a/h	Fonte	$\bar{w} \times 10^2$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
10					
Solução via MEF	4×4	0.3906	0.1526	0.0505	0.1350
		(0.3364)	(0.0741)	(0.0713)	(0.0372)
	8×8	0.5197	0.2252	0.1851	0.1723
		(0.4712)	(0.1509)	(0.1157)	(0.1841)
	16×16	0.6366	0.2386	0.2319	0.2098
		(0.6178)	(0.2104)	(0.1241)	(0.2658)
	32×32	0.7375	0.2587	0.2386	0.2437
		(0.7314)	(0.2506)	(0.1322)	(0.2946)
Solução analítica	Navier [†]	0.8284	0.2498	0.2336	0.2728
20					
Solução via MEF	4×4	0.2460	0.1526	0.0505	0.1350
		(0.1292)	(0.0430)	(0.0414)	(-0.0917)
	8×8	0.3980	0.2314	0.1813	0.1825
		(0.2607)	(0.1061)	(0.0943)	(0.1170)
	16×16	0.4996	0.2356	0.2168	0.3319
		(0.4299)	(0.1822)	(0.1138)	(0.3545)
	32×32	0.5821	0.2548	0.2133	0.2526
		(0.5577)	(0.2380)	(0.1178)	(0.4338)
Solução analítica	Navier [†]	0.6981	0.2498	0.2336	0.2728
100					
Solução via MEF	4×4	0.1997	0.1526	0.0505	0.1350
		(0.0075)	(0.0029)	(0.0028)	(-0.2576)
	8×8	0.3590	0.2366	0.1782	0.1909
		(0.0275)	(0.0120)	(0.0131)	(-0.2618)
	16×16	0.4549	0.2324	0.1899	0.2164
		(0.1018)	(0.0443)	(0.0430)	(-0.0482)
	32×32	0.5313	0.2527	0.2055	0.2587
		(0.2687)	(0.1186)	(0.0867)	(0.8091)
Solução analítica	Navier [†]	0.6564	0.2498	0.2336	0.2728

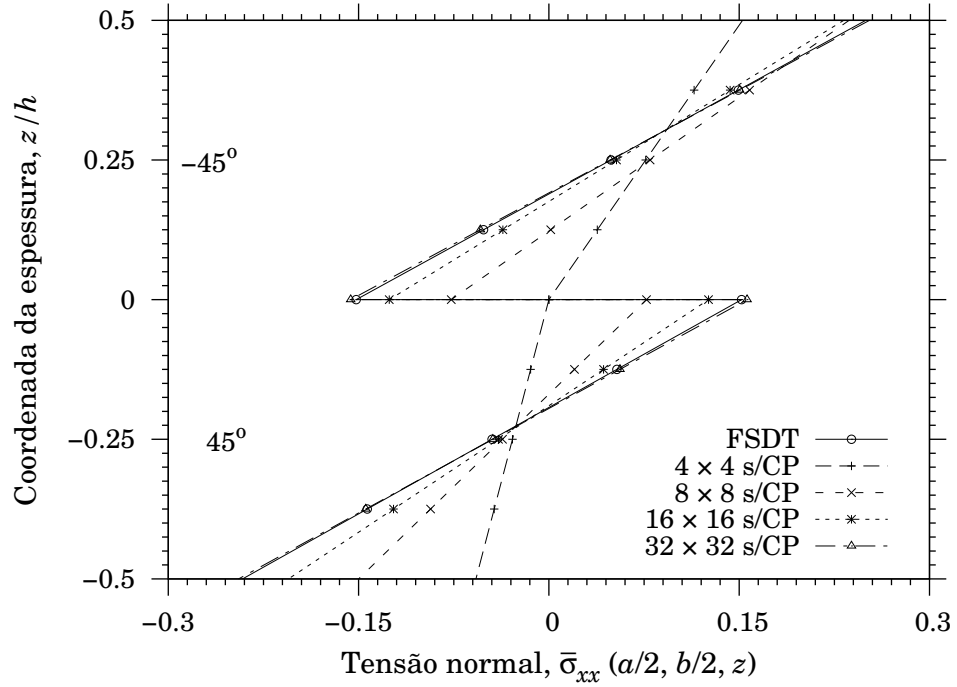
[†] Solução de Navier conforme a FSDT, ver Apêndice B.2.2

() → Valores entre parênteses se referem aos elementos com termos espúrios

enquanto que a tensão normal no plano apresentou erro de 3.56%. As tensões cisalhantes no plano e transversal assinalaram erros de 2.14% e 10.67%, respectivamente.



(a) com cisalhamento parasítico

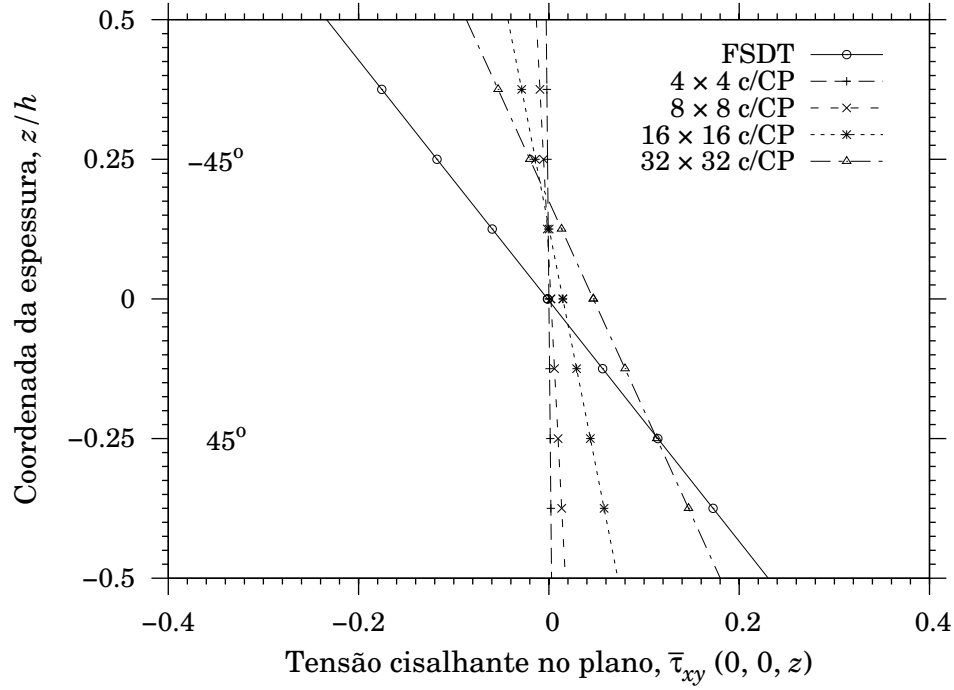


(b) sem cisalhamento parasítico

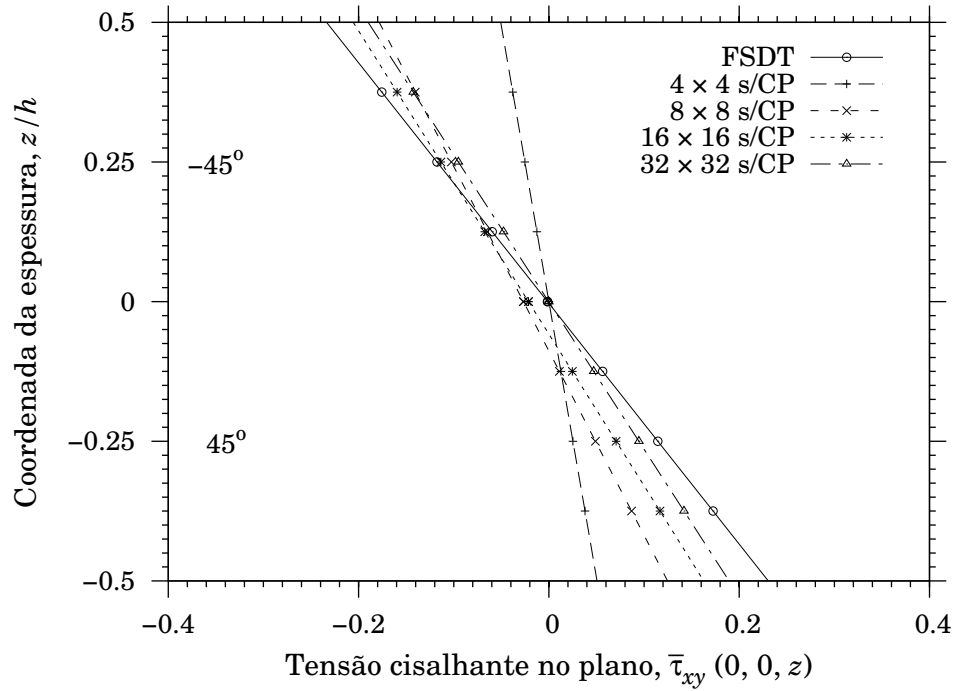
Figura 6.13: Tensões normais adimensionais máximas, $\bar{\sigma}_{xx}$, analisadas ao longo da espessura do laminado $[-45/45]$ para relação $a/h = 100$.

Para $a/h = 20$, o comportamento da convergência é semelhante. O erro gerado pelos elementos sem termos espúrios foi de 16.62% para $\bar{w}$, 2.00% para $\bar{\sigma}_{xx}$, 8.69% na tensão cisalhante no plano, $\bar{\tau}_{xy}$, e 7.40% para $\bar{\tau}_{xz}$.

Mesmo na análise do laminado delgado, onde surge o problema do *locking*, o



(a) com cisalhamento parasítico



(b) sem cisalhamento parasítico

Figura 6.14: Tensões cisalhantes adimensionais máximas, $\bar{\tau}_{xy}$, analisadas ao longo da espessura do laminado $[-45/45]$ para relação $a/h = 100$.

elemento *strain gradient* se mostrou eficiente e preciso no cálculo das tensões. Entretanto, para o deslocamento o erro computado pelo elemento sem termos espúrios aumentou para 19.06%. A tensão normal apresentou erro de 1.16%, a tensão cisalhante no plano 12.03% e a tensão cisalhante transversal 5.17%. Esses erros foram obtidos pela malha 32×32 .

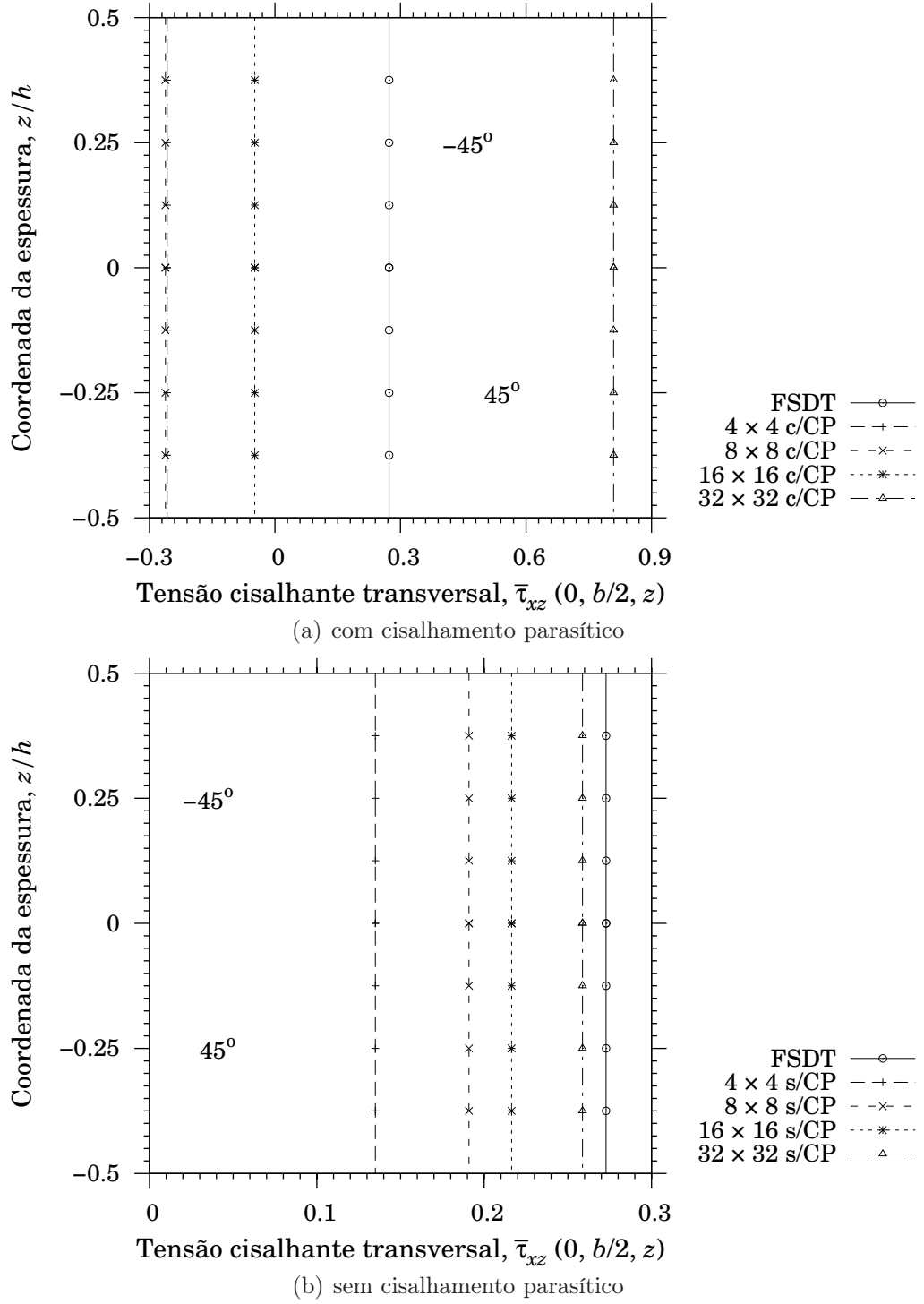


Figura 6.15: Tensões cisalhantes adimensionais máximas, $\bar{\tau}_{xz}$, analisadas ao longo da espessura do laminado $[-45/45]$ para relação $a/h = 100$.

Dessa forma, o elemento de 4 nós também foi validado para análise de tensões e deslocamentos nas placas laminadas cruzadas e angulares.

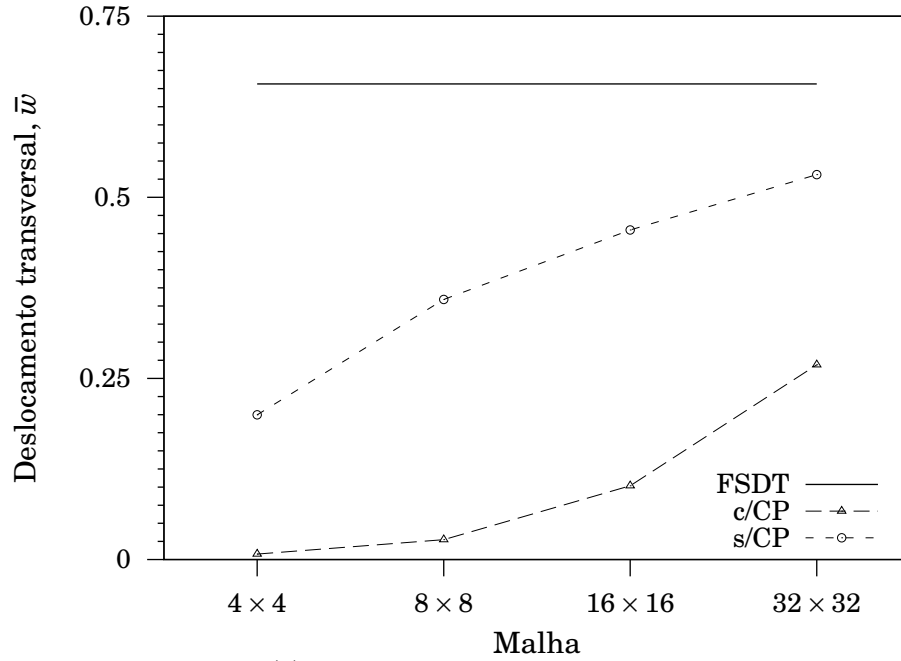
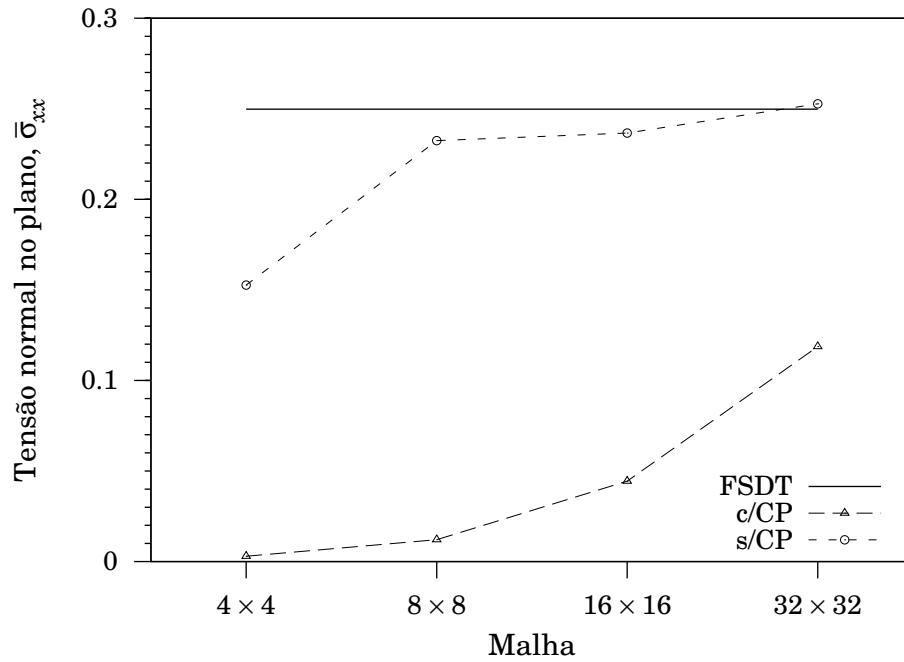
(a) Deslocamento transversal, $\bar{w}$ (b) Tensão normal, $\bar{\sigma}_{xx}$

Figura 6.16: Convergência do deslocamento transversal e das tensões normais adimensionalizadas para relação $a/h = 100$ do laminado $[-45/45]$.

6.3 Análise Numérica com o Quadrilátero de 8 Nós

6.3.1 Placa Isotrópica Apoiada nos Cantos

O primeiro problema empregando o quadrilátero de 8 nós é o de uma placa isotrópica apoiada apenas nos cantos. Esta placa corresponde ao material 1 da Tab. 6.1 e

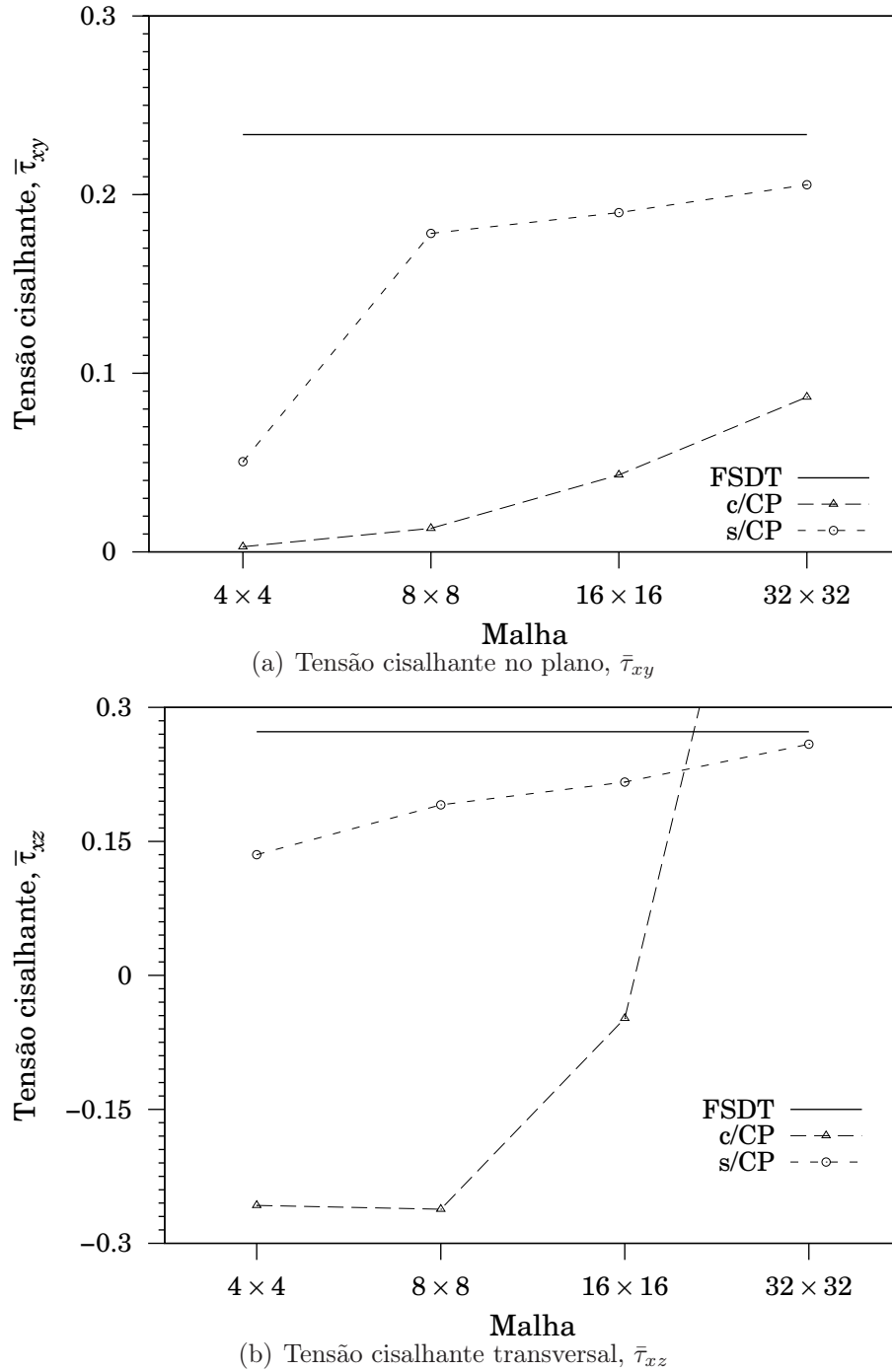


Figura 6.17: Convergência das tensões cisalhantes adimensionalizadas para relação $a/h = 100$ do laminado $[-45/45]$.

o carregamento considerado é o uniformemente distribuído em todo o domínio da placa. A Fig. 6.18 apresenta a geometria e as condições de contorno deste exemplo.

Assim como no laminado analisado no item 6.2.2, as dimensões da placa são $a = b = 1\text{m}$ e a intensidade da carga é $q_0 = 10\text{N/m}^2$.

Com intuito de avaliar o comportamento do elemento, foram escolhidas várias

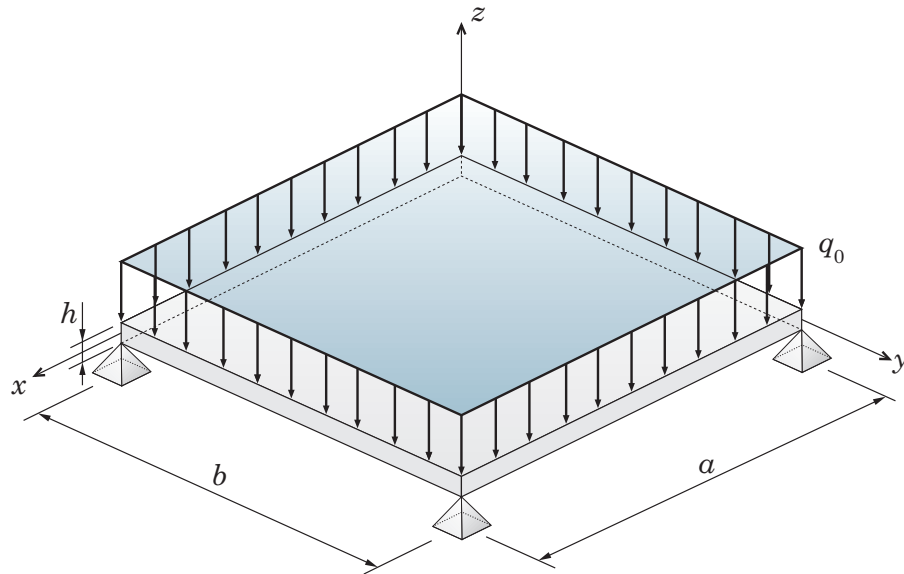


Figura 6.18: Geometria da placa isotrópica simplesmente apoiada nos cantos submetida ao carregamento uniformemente distribuído.

relações a/h , a saber: 10, 20, 50 e 100. Entretanto, é importante destacar que é para as placas mais delgadas que ocorrem incoerências nos elementos finitos isoparamétricos. Além disso, esta condição de contorno foi escolhida, pois segundo Gruttmann [13], os problemas acontecem também para as placas espessas e semi-espessas.

A Tab. 6.7 apresenta os resultados referentes à análise do deslocamento transversal adimensionalizado pela Eq. (6.1) para as diversas malhas geradas pelo elemento *strain gradient*. Esses resultados são comparados com a solução analítica para verificar a acuracidade e precisão do elemento.

Para facilitar a visualização do enrijecimento artificial causado pelo cisalhamento parasítico, as Figs. 6.19(a) à 6.19(h) mostram o comportamento do deslocamento nodal transversal do modelo com termos espúrios e após a sua remoção.

Como já era de se esperar, os elementos sem termos espúrios apresentaram coerência com a solução analítica, tanto para placas mais espessas quanto para as mais delgadas. Entretanto, quanto maior a espessura da placa, melhor foi o resultado obtido, contrariando assim, as análises que até então foram realizadas, onde os melhores resultados vinham das placas mais finas.

Este tipo de comportamento fica mais claro quando se quantificam os erros percentuais nas diversas relações a/h . Por exemplo, para $a/h = 10$, o erro apresentado pelo elemento *strain gradient* sem cisalhamento parasítico foi de 8.58% para a malha mais refinada, contra 61.0% considerando tal efeito. Entretanto nas placas delgadas, o erro

Tabela 6.7: Comparação de resultados obtidos para o deslocamento transversal adimensional, $\bar{w}$, para uma placa isotrópica quadrada apoiada nos cantos submetida ao carregamento uniformemente distribuído.

a/h	Solução		Malha		
	analítica [†]	2×2	4×4	8×8	16×16
10	6.613E-04	3.821E-04 (2.195E-05)	5.506E-04 (2.582E-04)	5.863E-04 (1.815E-04)	6.045E-04 (2.579E-04)
20	6.613E-04	3.814E-04 (8.039E-05)	5.495E-04 (1.656E-05)	6.029E-04 (4.402E-04)	6.168E-04 (5.942E-04)
50	6.613E-04	3.869E-04 (3.608E-06)	5.583E-04 (9.034E-05)	6.004E-04 (4.883E-04)	6.156E-04 (1.767E-05)
100	6.613E-04	4.039E-04 (9.056E-07)	5.855E-04 (4.235E-06)	6.460E-04 (6.506E-05)	6.538E-04 (6.418E-05)

[†] Ver Apêndice B.1, Eq. (B.2)

() → Valores entre parênteses se referem aos deslocamentos com os termos espúrios

apresentado pelo elemento corrigido diminui satisfatoriamente, ou seja, 6.91% e 1.13% para $a/h = 50$ e 100, respectivamente.

Tal fato é visualizado, graficamente, nas Figs. 6.20(a) à 6.21(b) que mostram a convergência do elemento finito formulado através da notação *strain gradient* para as quatro razões a/h .

6.3.2 Laminado Cruzado Simplesmente Apoiado (SS–1)

O próximo exemplo a ser tratado consiste de uma placa quadrada com 1m de lado, formada por três lâminas de mesma espessura, simplesmente apoiada (SS–1), submetida ao carregamento uniformemente distribuído com esquema de laminação $[0/90/0]$, conforme apresenta a Fig. 6.22. As propriedades mecânicas correspondem às do material 2 da Tab. 6.1 e a intensidade do carregamento é $q_0 = 10\text{N/m}^2$.

Todas as grandezas foram adimensionalizadas conforme a Eq. (6.1). As tensões normais no plano serão avaliadas em: $\bar{\sigma}_{xx}(a/2, b/2, h/2)$ e $\bar{\sigma}_{yy}(a/2, b/2, h/3)$. Para $\bar{\tau}_{xz}$, os valores máximos estão no ponto $(x, y) = (0, b/2)$ nas lâminas 1 e 3. Enquanto que para $\bar{\tau}_{yz}$, esses valores são computados no ponto $(x, y) = (a/2, 0)$ da lâmina 2. As relações constitutivas serão utilizadas para o cálculo das tensões cisalhantes transversais.

Os resultados de deslocamento e tensões adimensionalizadas para as diversas malhas são fornecidos pela Tab. 6.8. São avaliados os laminados espessos, semi-espessos

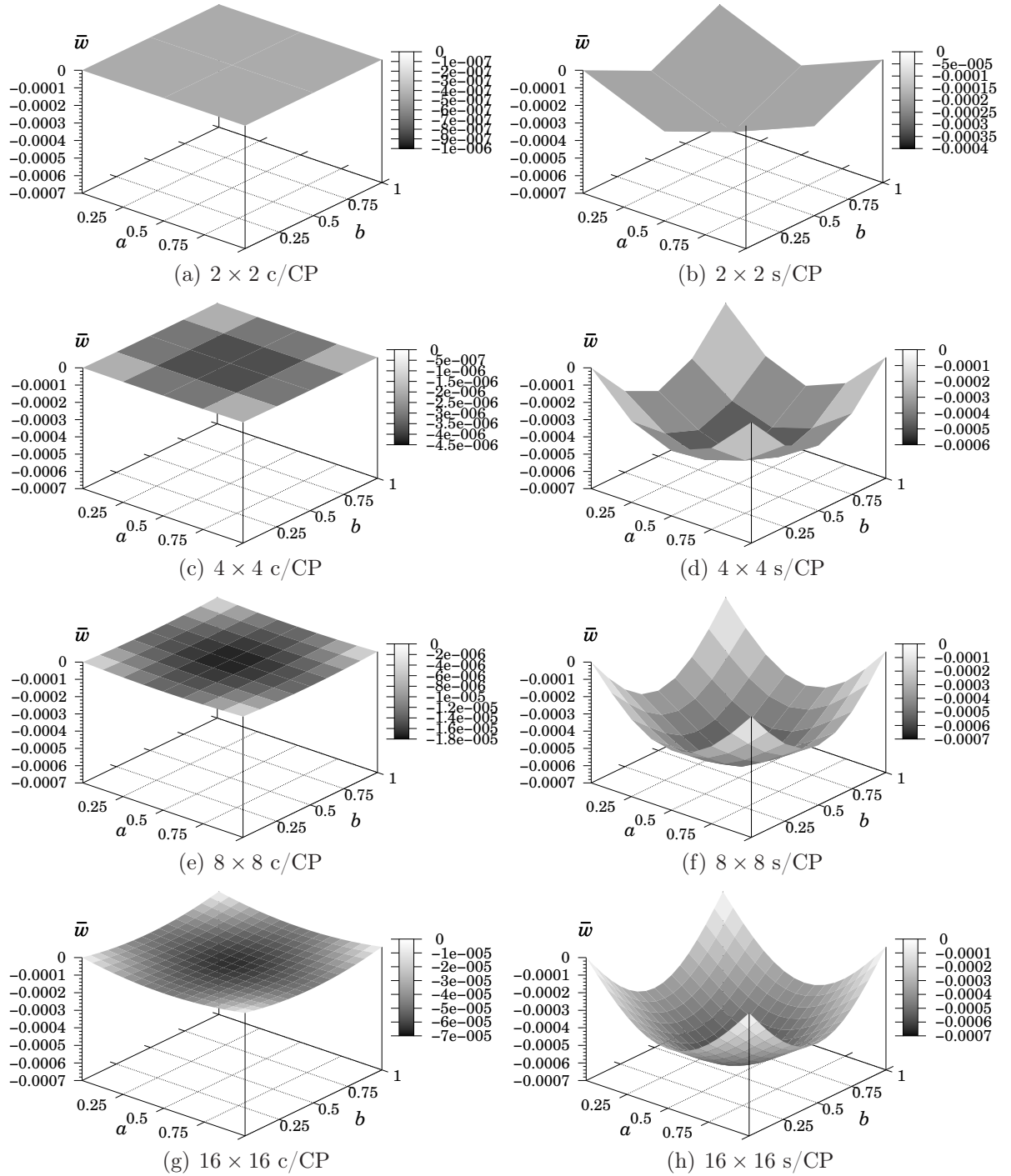


Figura 6.19: Deslocamento transversal adimensionalizado para relação $a/h = 100$.

e delgados, ou seja, as relações $a/h = 10, 20$ e 100 .

Neste exemplo, os resultados obtidos pelo modelo *strain gradient* corrigido foram precisos tanto para o deslocamento quanto para tensões. Análoga à análise do laminado cruzado usando o quadrilátero de 4 nós, para o laminado mais espesso, a remoção dos termos espúrios têm pouca influência no resultado final, principalmente, dos deslocamentos. Entretanto, os elementos corrigidos apresentam uma sutil melhora na precisão e na taxa

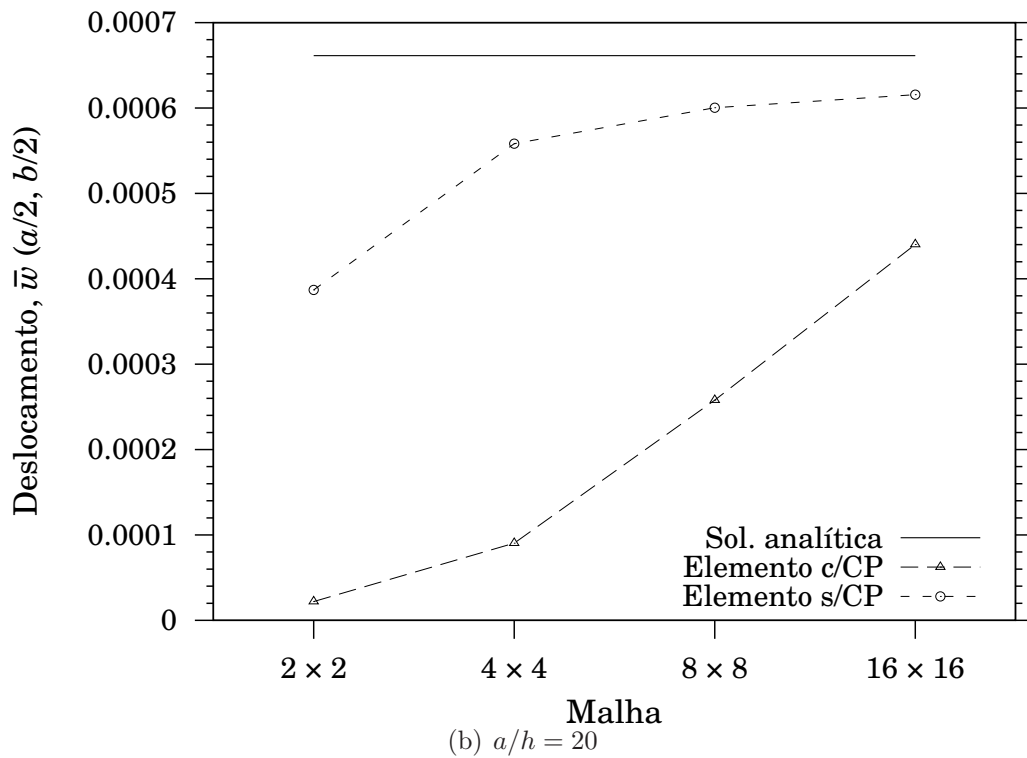
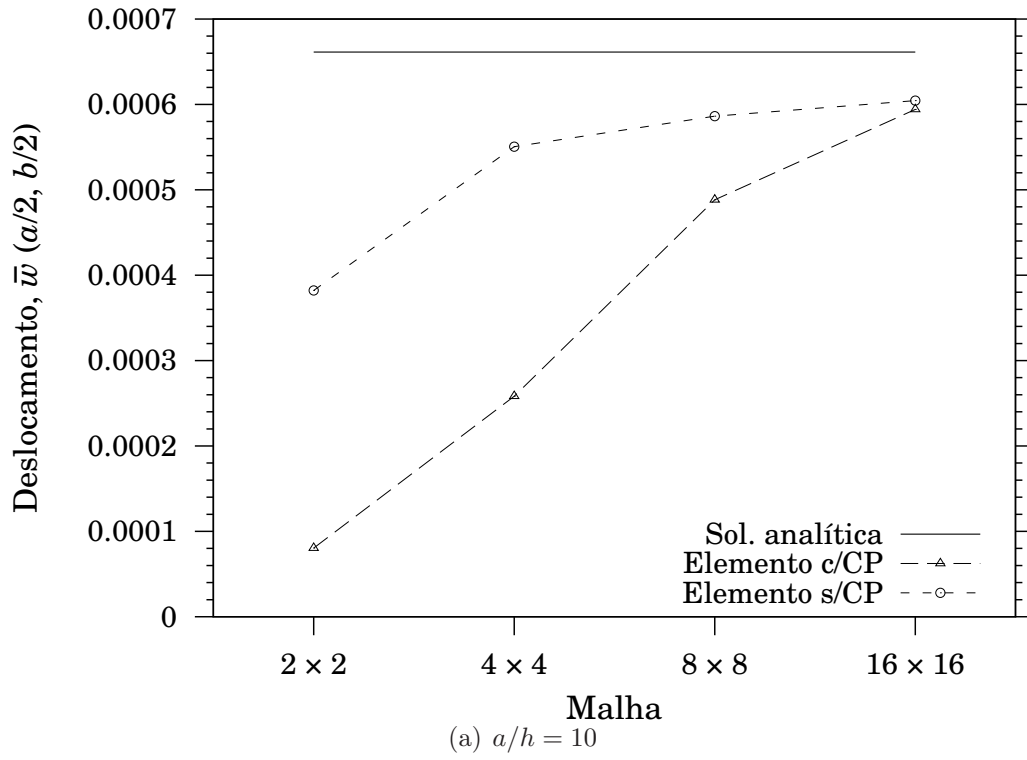


Figura 6.20: Convergência do deslocamento transversal adimensional, $\bar{w}$, para as relações $a/h = 10$ e 20 .

de convergência.

Analisando os erros na malha mais refinada da relação $a/h = 10$ para os deslocamentos e tensões adimensionalizadas, os modelos corrigidos apresentam erros de 0.36%,

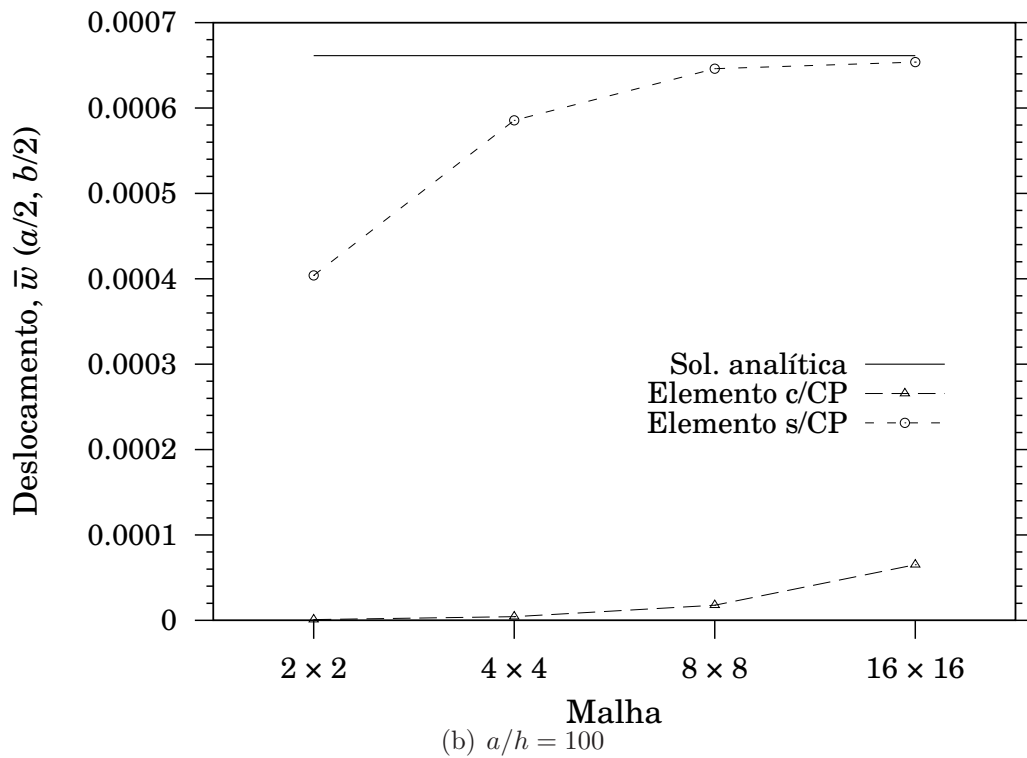
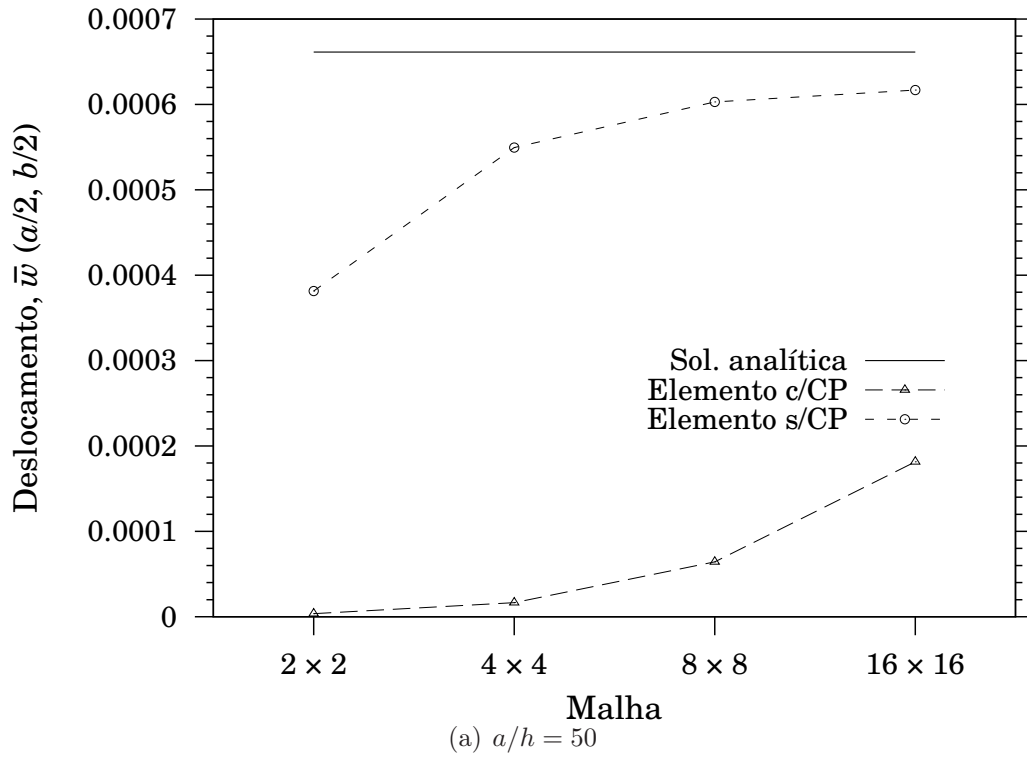


Figura 6.21: Convergência do deslocamento transversal adimensional, $\bar{w}$, para as relações $a/h = 50$ e 100 .

0.26%, 0.72%, 0.60% e 2.64% para o deslocamento transversal, tensões normais no plano, cisalhante e cisalhantes transversais, respectivamente. Os modelos sem remoção dos termos espúrios apresentam erros na mesma ordem, sendo que para $\bar{\sigma}_{yy}$ o valor é o mesmo.

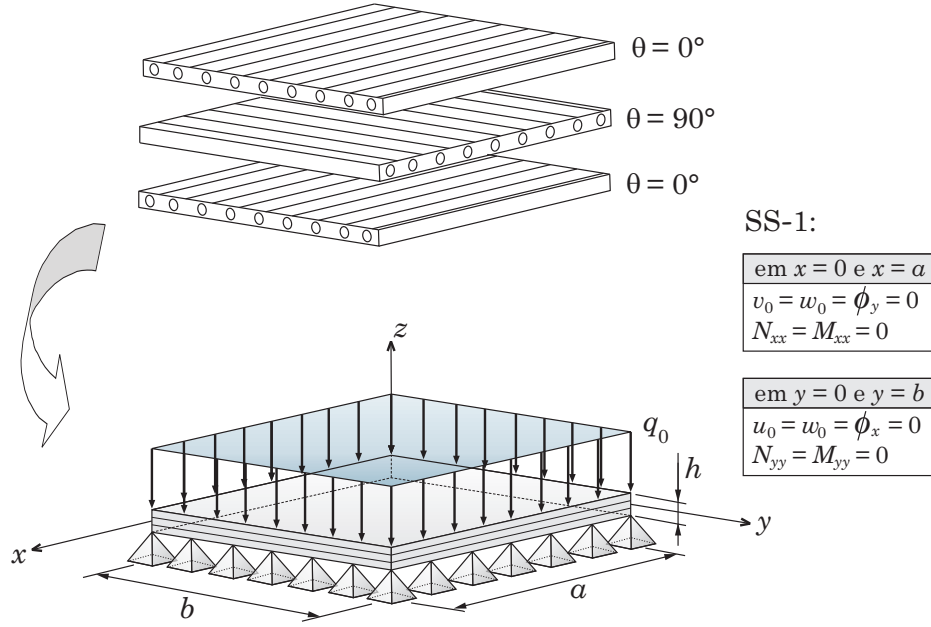


Figura 6.22: Geometria e condições de contorno do laminado $[0/90/0]$ simplesmente apoiado (SS-1) com carregamento uniformemente distribuído e $a/b = 1$.

Com a diminuição da espessura do laminado, a eliminação dos termos espúrios torna-se mais importante. Nesse caso, a remoção de tais termos é o que faz a diferença. Verificando os erros para relação $a/h = 100$, obtêm-se 0.31% ($\bar{w}$), 0.28% ($\bar{\sigma}_{xx}$), 0.78% ($\bar{\sigma}_{yy}$), 0.54% ($\bar{\tau}_{xz}$) e 3.03% ($\bar{\tau}_{yz}$) para o modelo corrigido. Sem a eliminação dos termos espúrios os erros ficam em 14.83%, 14.82%, 0.83%, 36.88% e 158.83% para $\bar{w}$, $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{yy}$, $\bar{\tau}_{xz}$ e $\bar{\tau}_{yz}$, respectivamente.

A distribuição das tensões normais no plano ao longo da espessura do laminado, para o caso de $a/h = 100$, é ilustrada nas Figs. 6.23 e 6.24. As Figs. 6.23(a) e 6.24(a) mostram o enrijecimento artificial (*locking*) causado pelo modelo contendo os termos espúrios, mesmo para a malha mais refinada. Entretanto, com a eliminação desses termos, as Figs. 6.23(b) e 6.24(b) mostram que o resultado é muito próximo da solução de Navier, inclusive para a malha 2×2 . Vale destacar que as soluções analíticas obtidas pela FSDT e HSDT são praticamente as mesmas.

A seguir, as Figs. 6.25 e 6.25 apresentam a distribuição das tensões cisalhantes transversais. Os resultados apontados pelas Figs. 6.25(a) e 6.26(a) são totalmente antagônicos com a solução analítica de primeira ordem devido ao efeito dos termos espúrios. Removendo tais termos, as Figs. 6.25(b) e 6.26(b) mostram que para uma malha 8×8 o resultado praticamente coincide com o analítico de primeira ordem. Melhorando o refino na malha, a resposta do modelo corrigido é a mesma obtida pela solução de Navier para $\bar{\tau}_{xz}$.

Tabela 6.8: Resultados obtidos via MEF para deslocamento e tensões adimensionais, $\bar{w}$ e $\bar{\sigma}$, para um laminado $[0/90/0]$, submetido ao carregamento uniformemente distribuído para as diferentes relações a/h .

a/h	Fonte	$\bar{w} \times 10^2$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
10						
Solução via MEF	2×2	1.0284	0.7256	0.3608	0.6226	0.1593
		(0.9259)	(0.6322)	(0.3130)	(0.4557)	(-0.0142)
	4×4	1.0229	0.7611	0.3209	0.6857	0.2277
		(0.9969)	(0.7356)	(0.3174)	(0.6375)	(0.1420)
	8×8	1.0232	0.7700	0.3110	0.7266	0.2746
		(1.0168)	(0.7635)	(0.3110)	(0.7137)	(0.2449)
	16×16	1.0256	0.7739	0.3094	0.7503	0.3025
		(1.0240)	(0.7723)	(0.3094)	(0.7469)	(0.2939)
Solução analítica	Navier [†]	1.0219	0.7719	0.3072	0.7548	0.3107
20						
Solução via MEF	2×2	0.7500	0.7587	0.2761	0.6455	0.1377
		(0.5130)	(0.4953)	(0.1851)	(0.1455)	(-0.2669)
	4×4	0.7548	0.7888	0.2349	0.7015	0.2067
		(0.6805)	(0.7029)	(0.2306)	(0.5258)	(-0.0343)
	8×8	0.7574	0.7968	0.2258	0.7416	0.2538
		(0.7381)	(0.7743)	(0.2289)	(0.6925)	(0.1537)
	16×16	0.7759	0.8005	0.2242	0.7651	0.2818
		(0.7549)	(0.7949)	(0.2254)	(0.7523)	(0.2504)
Solução analítica	Navier [†]	0.7572	0.7983	0.2227	0.7697	0.2902
100						
Solução via MEF	2×2	0.6576	0.7718	0.2450	0.6538	0.1315
		(0.0504)	(0.0559)	(0.0187)	(-0.7503)	(-0.8136)
	4×4	0.6660	0.7983	0.2035	0.7078	0.2002
		(0.1651)	(0.1944)	(0.0634)	(-0.5652)	(-0.8088)
	8×8	0.6694	0.8057	0.1954	0.7468	0.2475
		(0.3835)	(0.4593)	(0.1426)	(-0.0162)	(-0.5435)
	16×16	0.6718	0.8095	0.1940	0.7702	0.2756
		(0.5704)	(0.6868)	(0.1941)	(0.4888)	(-0.1672)
Solução analítica	Navier [†]	0.6697	0.8072	0.1925	0.7744	0.2842

[†] Solução de Navier conforme a FSDT, ver Apêndice B.2.1

() → Valores entre parênteses se referem aos elementos com termos espúrios

A Fig. 6.27 apresenta a convergência das tensões normais para o laminado com relação $a/h = 100$. A linha contínua representa a solução analítica de Navier segundo a

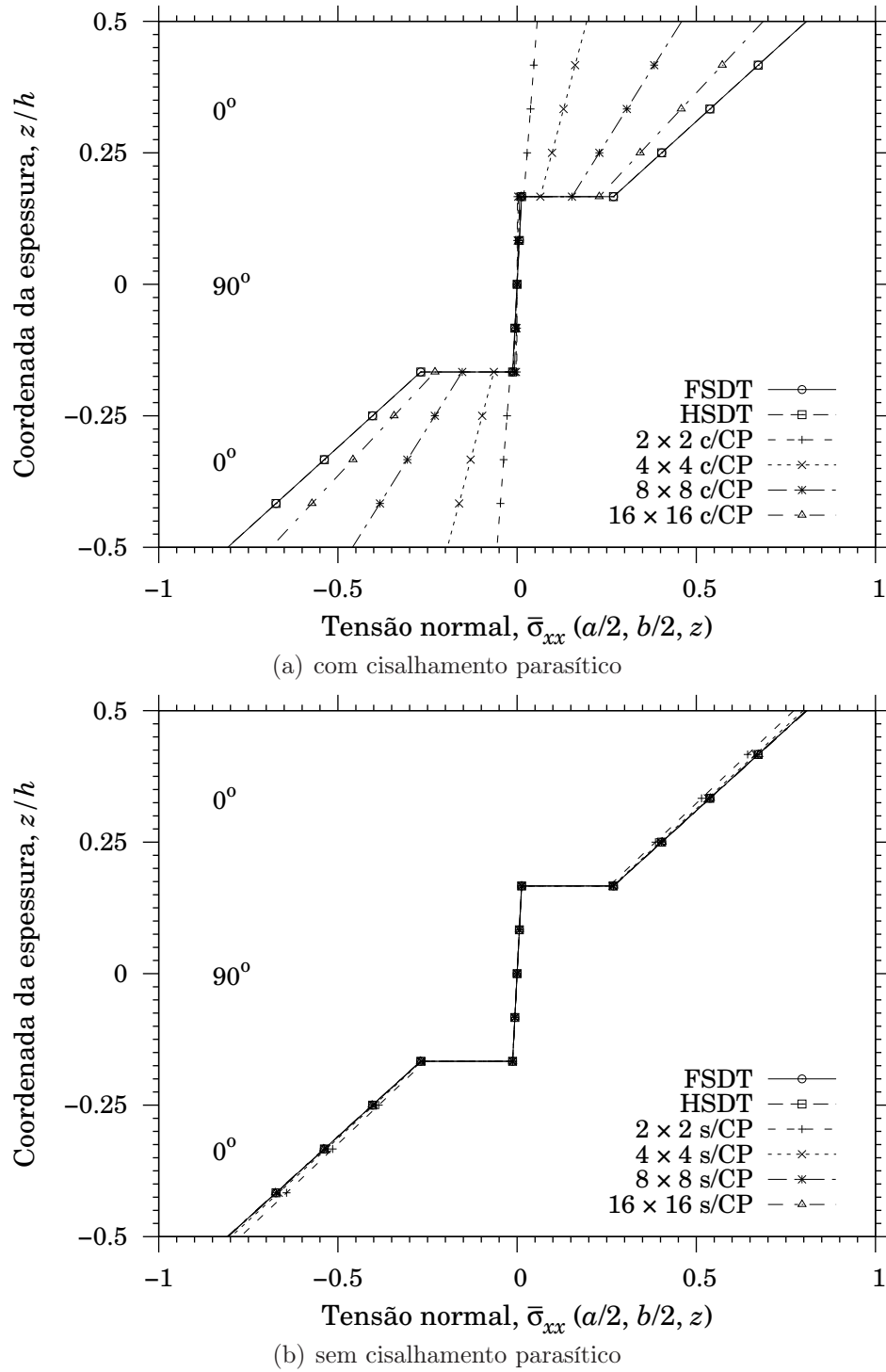


Figura 6.23: Tensões normais no plano, $\bar{\sigma}_{xx}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/0]$ para relação $a/h = 100$.

FSDT. A convergência das tensões cisalhantes transversais pode ser observada na Fig. 6.28.

Observa-se que a taxa de convergência das soluções fornecidas pelo modelo corrigido é elevada. Nota-se também que as malhas 4×4 já apresentam resultados muito próximos dos analíticos.

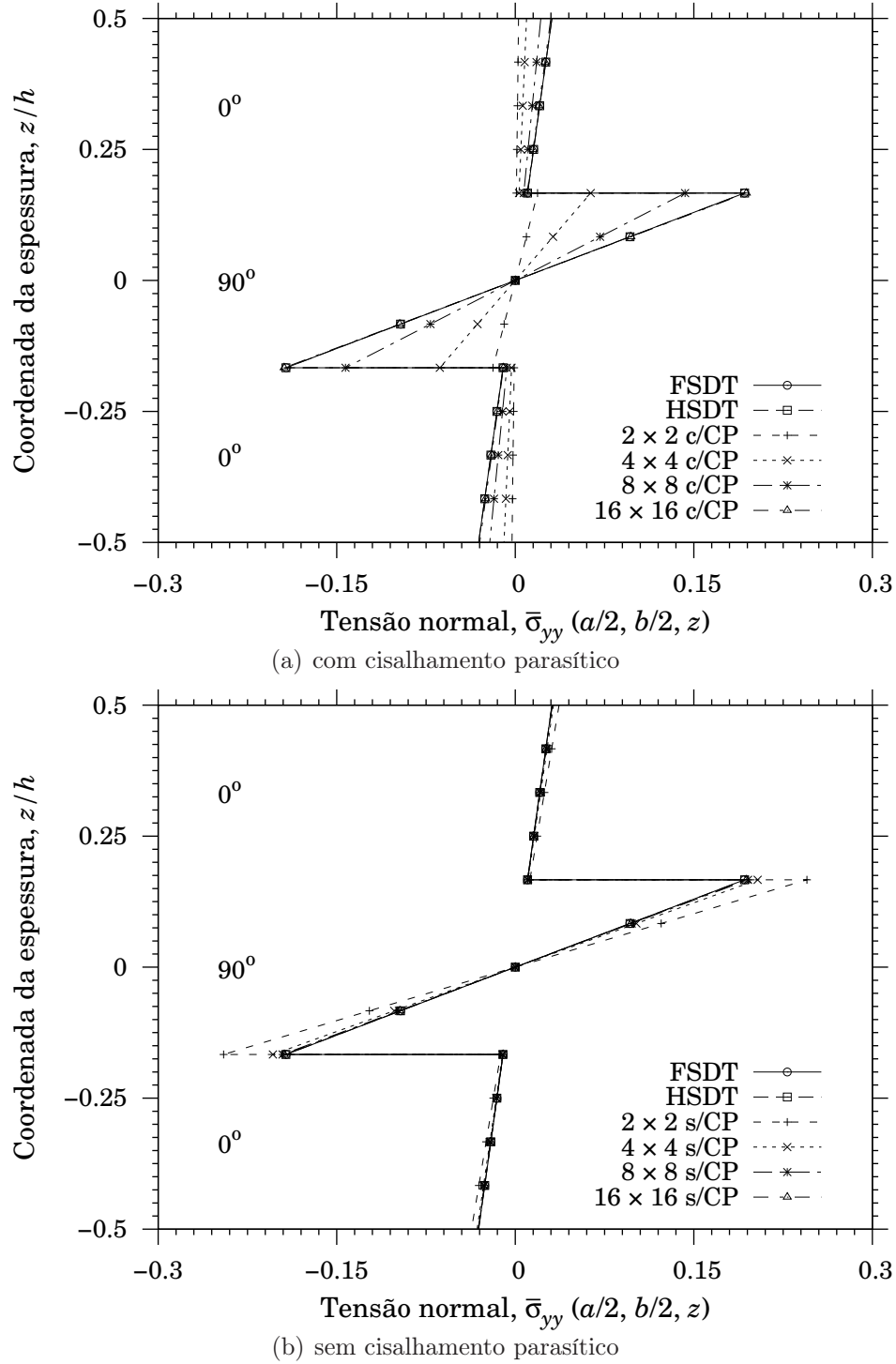


Figura 6.24: Tensões normais no plano, $\bar{\sigma}_{yy}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/0]$ para relação $a/h = 100$.

6.3.3 Laminado Angular Simplesmente Apoiado (SS-2)

A terceira aplicação utilizando o quadrilátero de 8 nós corresponde a um laminado quadrado anti-simétrico formado por 8 lâminas de mesma espessura e com o seguinte esquema de laminação: $[-45/45]_4$. O laminado está simplesmente apoiado (SS-2) sujeito

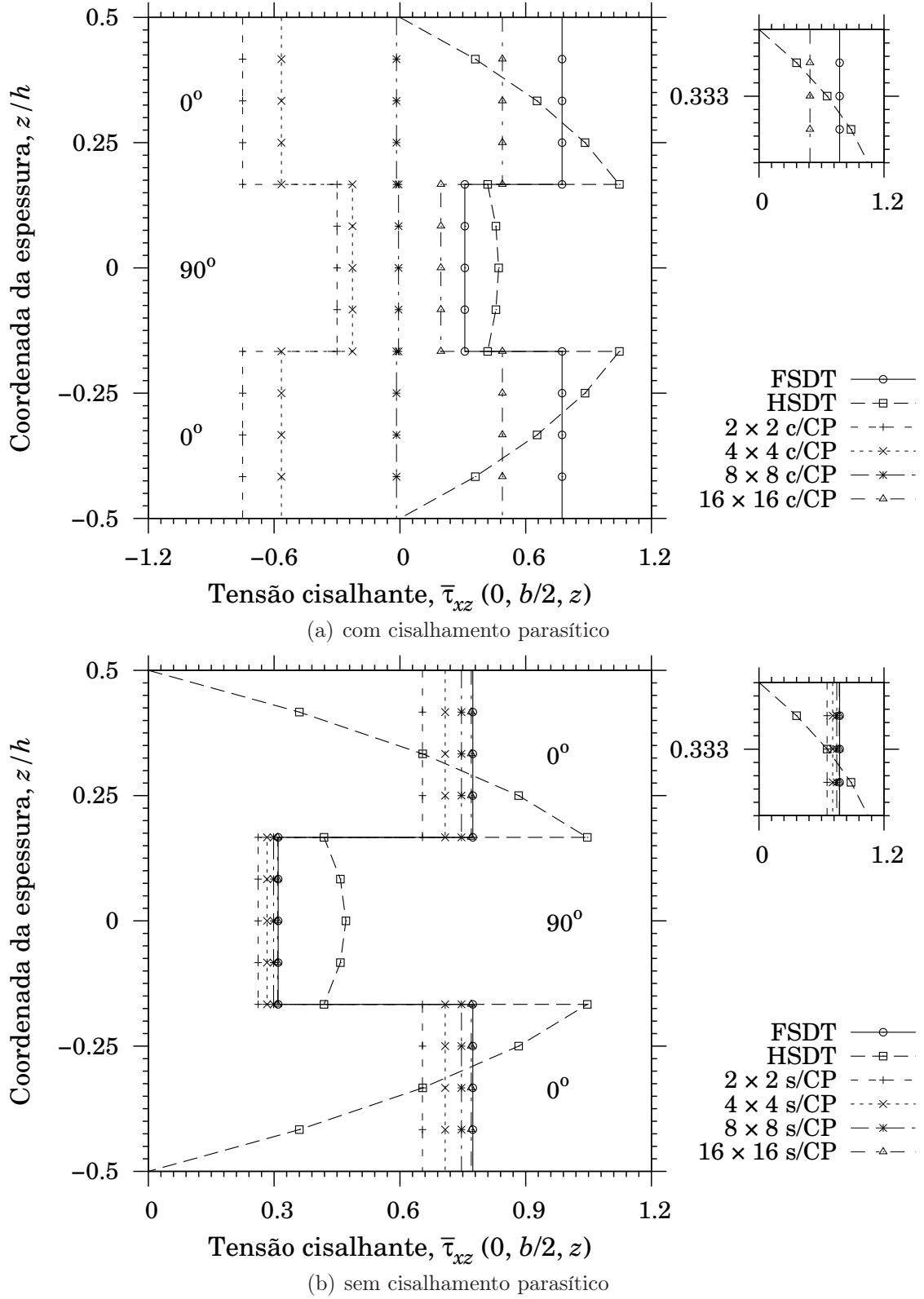


Figura 6.25: Tensões cisalhantes transversais, $\bar{\tau}_{xz}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/0]$ para relação $a/h = 100$.

a uma carga uniformemente distribuída, conforme mostra a Fig. 6.29.

É utilizado o material 2 da Tab. 6.1. A intensidade da carga é $q_0 = 10\text{N/m}^2$

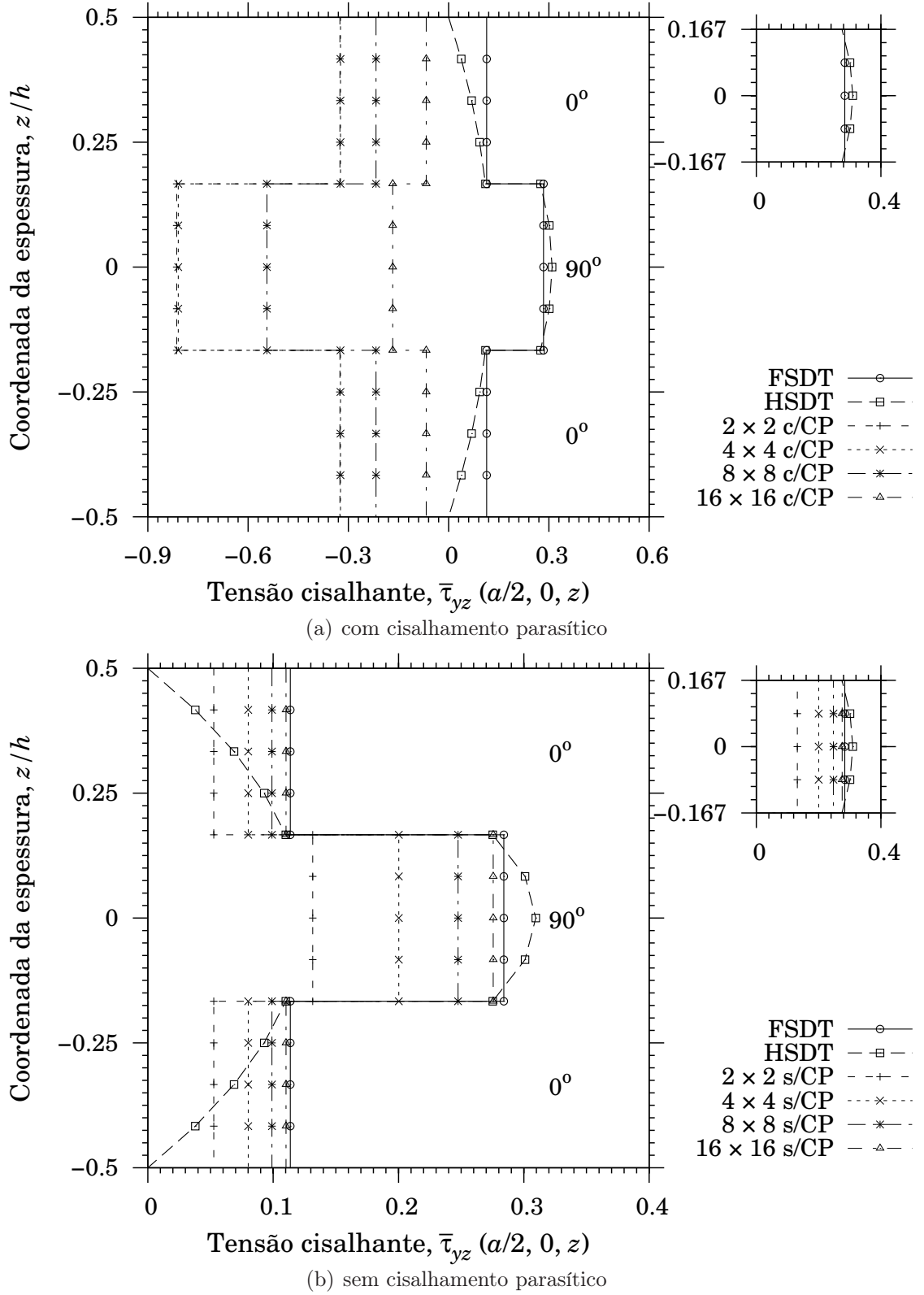


Figura 6.26: Tensões cisalhantes transversais, $\bar{\tau}_{yz}$, computadas ao longo da espessura do laminado $[0/90/0]$ para relação $a/h = 100$.

e as dimensões da placa são $a = b = 1\text{m}$. Neste exemplo, as grandezas também foram adimensionalizadas segundo a Eq. (6.1).

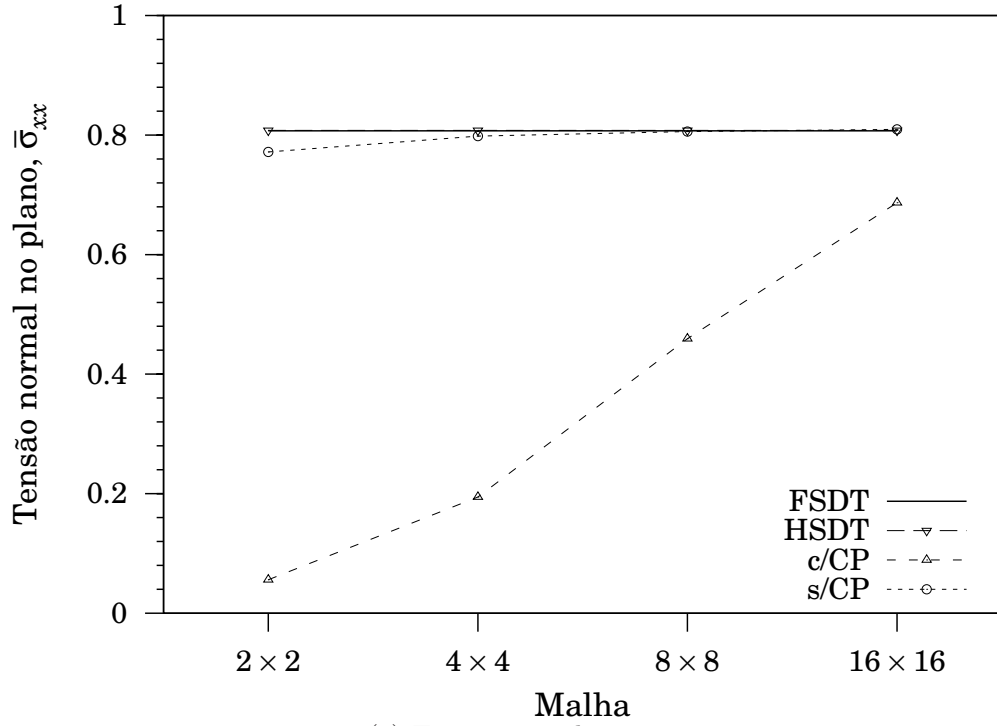
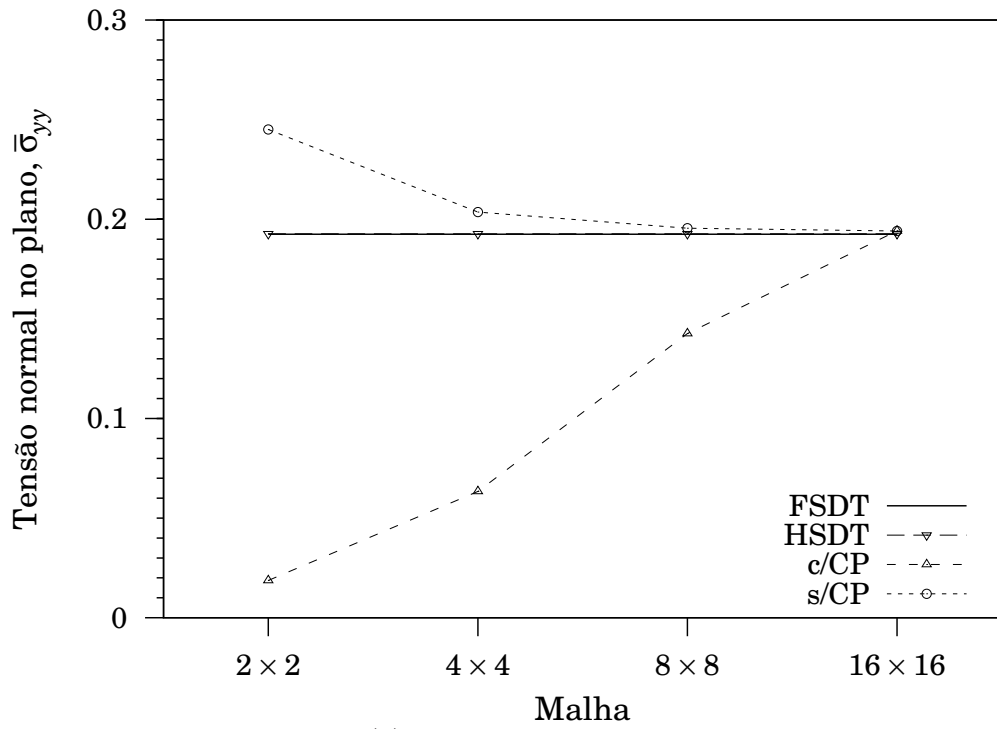
(a) Tensão normal, $\bar{\sigma}_{xx}$ (b) Tensão normal, $\bar{\sigma}_{yy}$

Figura 6.27: Convergência das tensões normais no plano adimensionalizadas para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/0]$.

Assim como no item 6.2.3, as tensões $\bar{\sigma}_{xx}$ e $\bar{\sigma}_{yy}$ são iguais. Isso também é válido para as tensões cisalhantes transversais, portanto, $\bar{\tau}_{xz} = \bar{\tau}_{yz}$. As tensões normais e cisalhante no plano serão avaliadas no centro da placa, isto é, $\bar{\sigma}_{xx}(a/2, b/2, h/2) =$

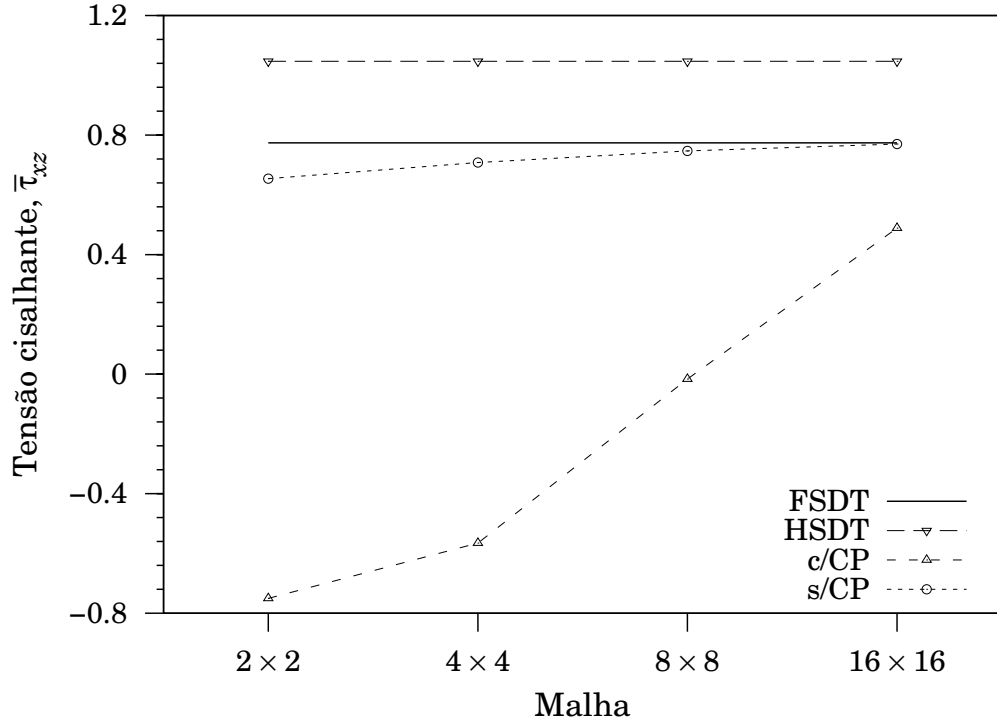
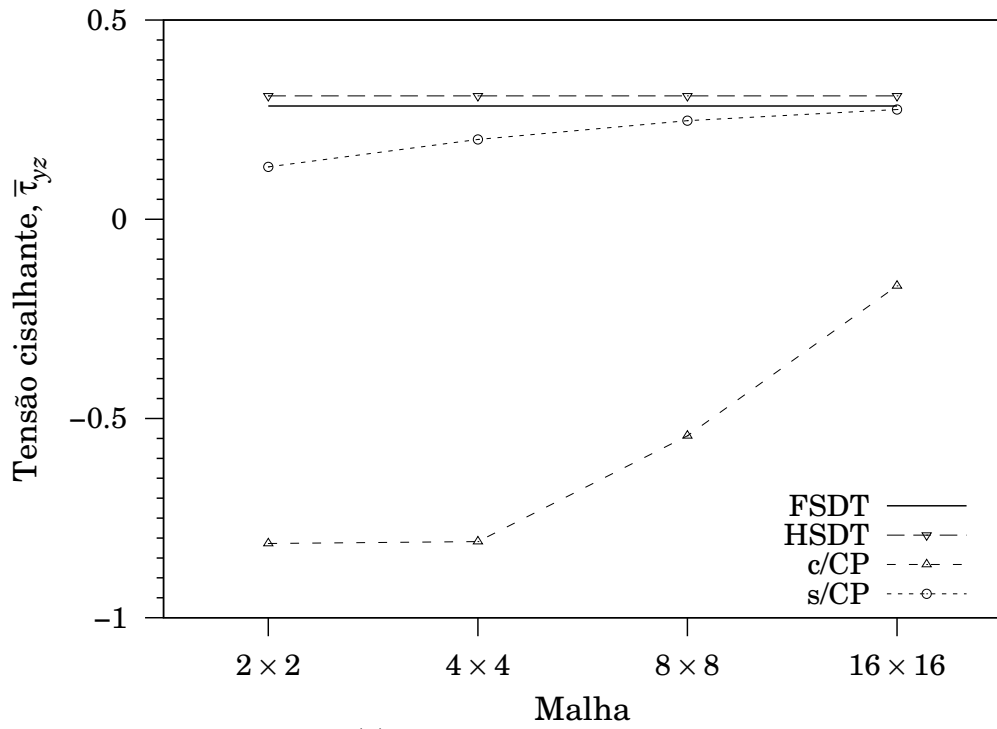
(a) Tensão cisalhante, $\bar{\tau}_{xz}$ (b) Tensão cisalhante, $\bar{\tau}_{yz}$

Figura 6.28: Convergência das tensões cisalhantes transversais adimensionalizadas para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/0]$.

$\bar{\sigma}_{yy}(a/2, b/2, -h/2)$ e $\bar{\tau}_{xy}(0, 0, -h/2)$, respectivamente. As tensões cisalhantes transversais serão calculadas no ponto médio das bordas, dessa forma, $\bar{\tau}_{xz}(0, b/2, k = 2, 4, 6, 8) = \bar{\tau}_{yz}(a/2, 0, k = 1, 3, 5, 7)$.

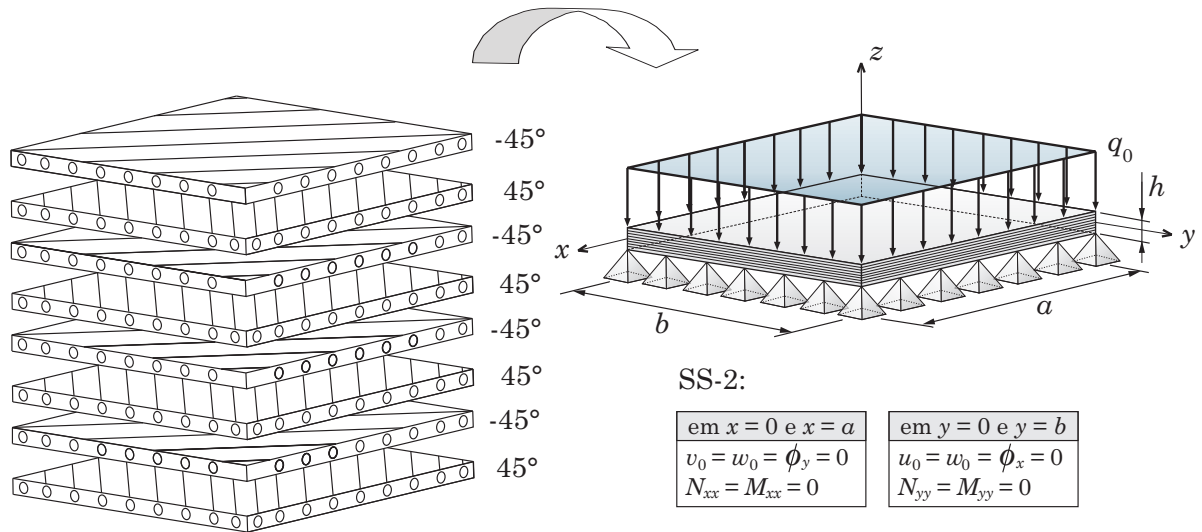


Figura 6.29: Geometria e condições de contorno do laminado $[-45/45]_4$ simplesmente apoiado (SS-2) com carregamento uniformemente distribuído e $a/b = 1$.

A Tab. 6.9 apresenta os resultados para as diversas malhas dos deslocamentos e das tensões adimensionais para as relações $a/h = 10, 20$ e 100 .

Analogamente ao laminado cruzado, ao analisar os deslocamentos, percebe-se para a placa laminada espessa que a remoção dos termos espúrios têm pouca influência no resultado, principalmente com o aumento do refino. Entretanto, a taxa de convergência é maior para os modelos corrigidos. Outro fenômeno importante relacionado à convergência está no fato do elemento sem cisalhamento parasítico convergir de cima para baixo. Esse tipo de comportamento acontece também na análise da tensão normal no plano. Já para as tensões cisalhantes, o desempenho da convergência é normal, ou seja, de baixo para cima.

O erro computado no deslocamento transversal foi de 1.04% para malha 16×16 , enquanto que a tensão normal no plano apresentou erro de 3.11%. As tensões cisalhantes no plano e transversal assinalaram erros de 8.49% e 3.03%, respectivamente. Todos esses valores se referem aos erros fornecidos pelos modelos corrigidos na malha mais refinada e relação $a/h = 10$.

Para $a/h = 20$, o comportamento da convergência é semelhante nas tensões. O erro gerado pelos elementos sem termos espúrios foi de 1.29% para $\bar{w}$, 2.82% para $\bar{\sigma}_{xx}$, 7.29% na tensão cisalhante no plano, $\bar{\tau}_{xy}$, e 3.39% para $\bar{\tau}_{xz}$. Ou seja, os resultados também são coerentes com a solução analítica para o laminado semi-espesso.

Mesmo na análise de um laminado angular delgado, onde surge o problema de *locking*, o elemento *strain gradient* se mostrou eficiente e preciso. Num refino pequeno,

Tabela 6.9: Resultados obtidos via MEF para deslocamento e as tensões adimensionais para um laminado $[-45/45]_4$ submetido ao carregamento uniformemente distribuído.

a/h	Fonte	$\bar{w} \times 10^2$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\tau}_{xy}$	$\bar{\tau}_{xz}$
10					
Solução via MEF	2×2	0.6510	0.2544	0.0842	0.2250
		(0.5541)	(0.1236)	(0.1189)	(0.0621)
	4×4	0.6463	0.2489	0.1946	0.2909
		(0.6158)	(0.2016)	(0.2258)	(0.2277)
	8×8	0.6337	0.2123	0.2453	0.3319
		(0.6263)	(0.2015)	(0.2728)	(0.3104)
	16×16	0.6318	0.2018	0.2672	0.3611
		(0.6300)	(0.1994)	(0.2909)	(0.3554)
Solução analítica	Navier [†]	0.6366	0.1957	0.2463	0.3724
20					
Solução via MEF	2×2	0.4099	0.2544	0.0842	0.2250
		(0.2153)	(0.0717)	(0.0690)	(-0.1528)
	4×4	0.4466	0.2495	0.1943	0.2927
		(0.3570)	(0.1679)	(0.1865)	(0.0847)
	8×8	0.4425	0.2128	0.2488	0.3272
		(0.4171)	(0.1940)	(0.2611)	(0.2501)
	16×16	0.4425	0.2040	0.2736	0.3561
		(0.4358)	(0.1997)	(0.2930)	(0.3349)
Solução analítica	Navier [†]	0.4483	0.1988	0.2550	0.3686
100					
Solução via MEF	2×2	0.3327	0.2544	0.0842	0.2250
		(0.0125)	(0.0049)	(0.0047)	(-0.4294)
	4×4	0.3826	0.2501	0.1939	0.2946
		(0.0479)	(0.0261)	(0.0286)	(-0.5022)
	8×8	0.3815	0.2130	0.2511	0.3248
		(0.1394)	(0.0780)	(0.0979)	(-0.3553)
	16×16	0.3821	0.2054	0.2782	0.3536
		(0.2669)	(0.1467)	(0.2039)	(-0.0067)
Solução analítica	Navier [†]	0.3883	0.2005	0.2630	0.3664

[†] Solução de Navier conforme a FSDT, ver Apêndice B.2.2

() $\rightarrow$ Valores entre parênteses se referem aos elementos com termos espúrios

4×4 , o erro computado pelo modelo sem termos espúrios foi de 1.47% para o deslocamento transversal. Com o refino, a tensão normal apresentou erro de 2.44%, a tensão cisalhante

no plano 5.78% e a tensão cisalhante transversal 3.49%. Esses erros foram obtidos pela malha 16×16 .

Para visualizar graficamente os números mostrados pela Tab. 6.9, as Figs. 6.30 e 6.32 apresentam a distribuição das tensões ao longo da espessura do laminado delgado, ou seja, com relação $a/h = 100$.

Com o intuito de avaliar o desempenho do elemento *strain gradient*, a convergência do deslocamento transversal e da tensão normal no plano para o laminado com relação $a/h = 100$ pode ser visualizada graficamente na Fig. 6.33, enquanto as tensões cisalhantes são mostradas pela Fig. 6.34. A linha contínua representa a solução analítica de Navier enquanto que as linhas tracejadas com triângulos e círculos indicam a solução com e sem termos espúrios, respectivamente.

O padrão de convergência obtido é satisfatório, principalmente para o deslocamento e para a tensão cisalhante transversal. Com isso, o elemento retangular de 8 nós também foi validado para análise de tensões e deslocamentos nos laminados cruzados e angulares.

6.4 Elemento *Strain Gradient* $\times$ Isoparamétrico

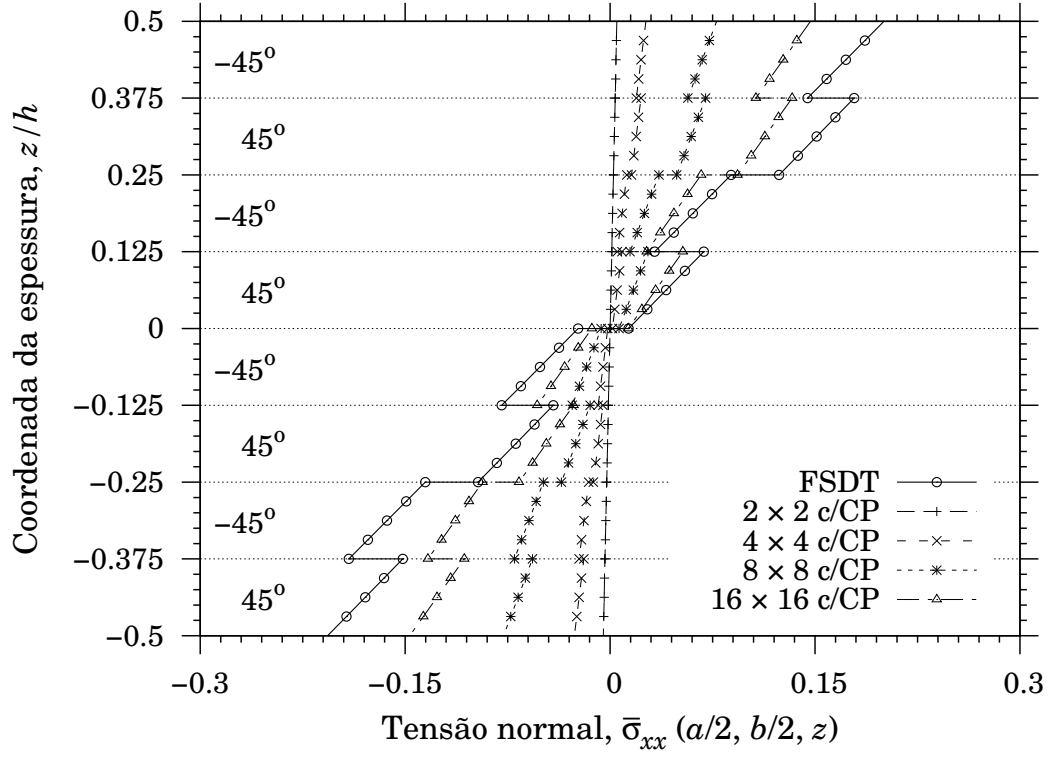
Nesta seção, será feita a comparação numérica entre os elemento finitos utilizando a notação *strain gradient* e os elementos isoparamétricos. Estes últimos, terão as tensões computadas nos pontos de Gauss empregando-se a técnica da integração completa, reduzida e seletiva [14].

Este exemplo corresponde a um laminado quadrado simétrico de mesma espessura composto de 4 lâminas $[0/90/90/0]$, simplesmente apoiadas (SS-1), ver Fig. 6.35, e o carregamento assumido é o senoidal dado pela Eq. (6.2). O material utilizado é o grafite-epóxi, portanto as suas propriedades elásticas constam do material 2 da Tab. 6.1.

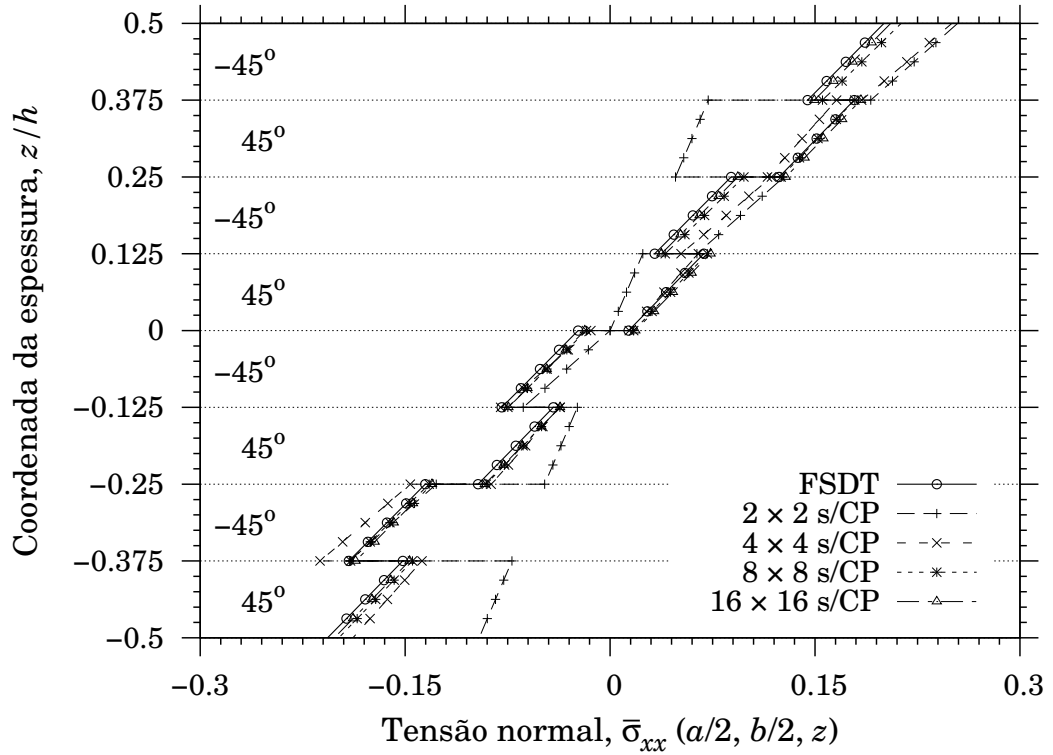
Nesta análise, serão avaliadas apenas as malhas 4×4 e 8×8 dos elementos *strain gradient*, pois são as malhas apresentadas na literatura [27] dos elementos isoparamétricos.

Com isso, a Tab. 6.10 apresenta a comparação dos resultados obtidos via MEF para o quadrilátero de 4 nós isoparamétrico e *strain gradient* para as diversas relações a/h . Na tabela, a semiografia $nQ4$ significa uma malha uniforme de ordem $n \times n$ para o elemento linear retangular de 4 nós.

Para o laminado espesso ($a/h = 10$), a análise do deslocamento mostrou que o



(a) com cisalhamento parasítico



(b) sem cisalhamento parasítico

Figura 6.30: Tensões adimensionalizadas máximas, $\bar{\sigma}_{xx}$, analisadas ao longo da espessura do laminado $[-45/45]_4$ para relação $a/h = 100$.

elemento formulado via notação *strain gradient* obteve resultados piores que os elementos isoparamétricos. Entretanto, ao examinar as tensões normais e cisalhantes, o desempenho

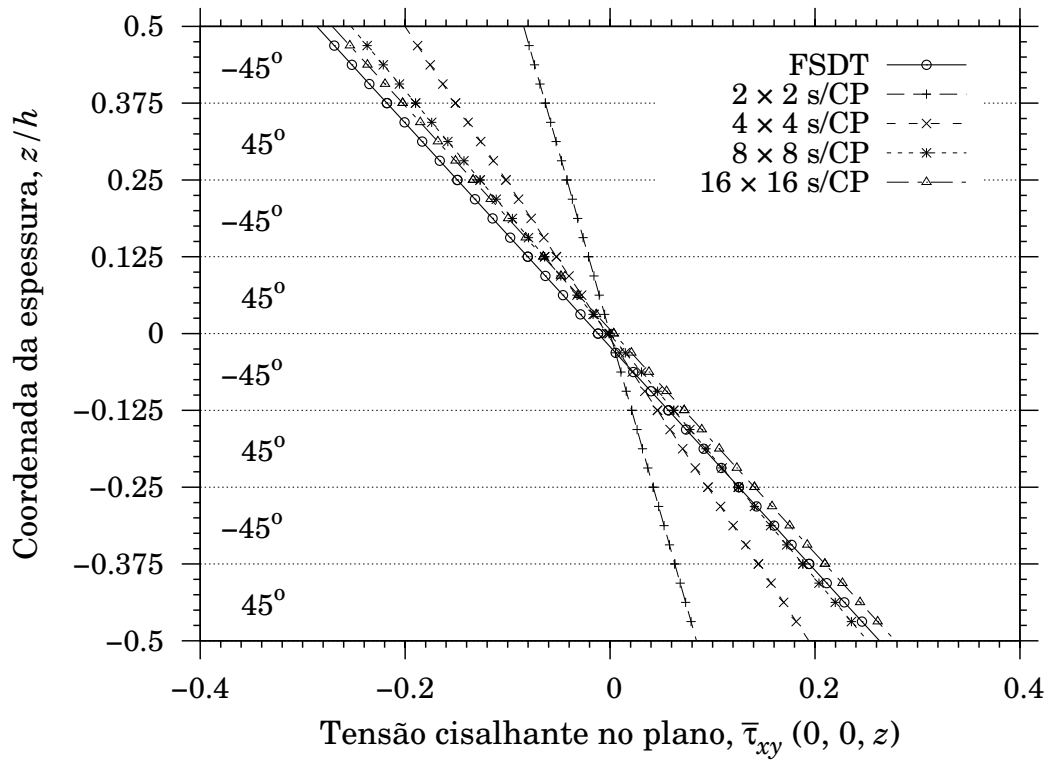
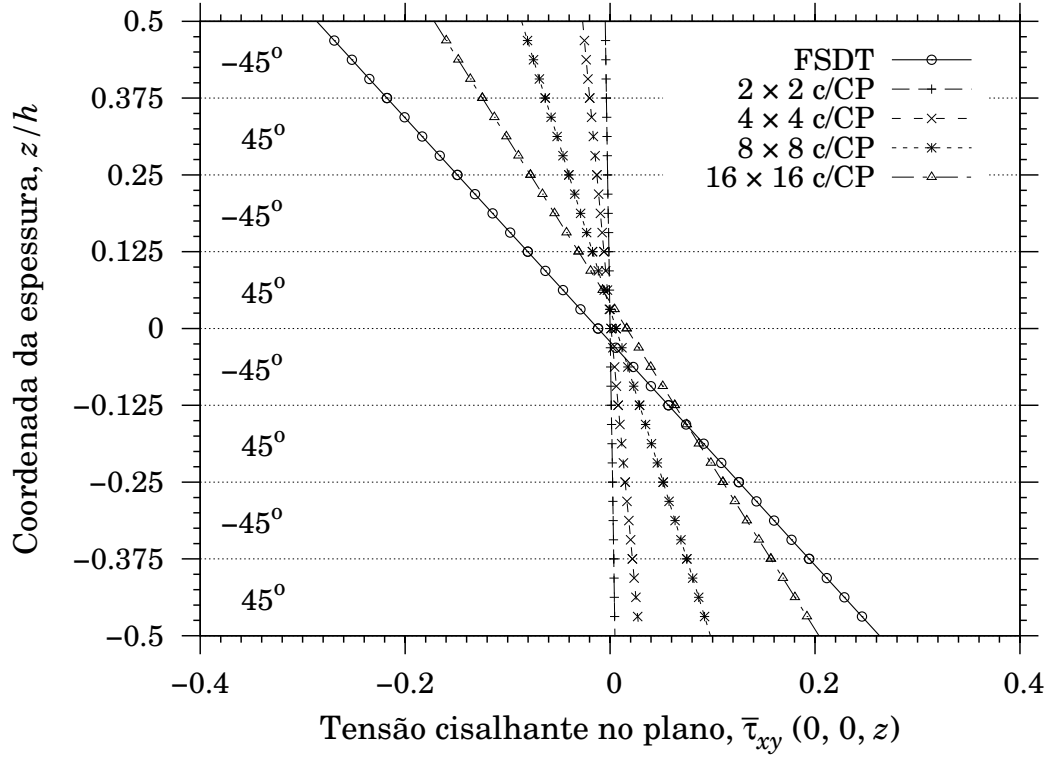


Figura 6.31: Tensões adimensionalizadas máximas, $\bar{\tau}_{xy}$, analisadas ao longo da espessura do laminado $[-45/45]_4$ para relação $a/h = 100$.

do elemento *strain gradient* (ESG) foi mais satisfatório. O erro obtido pelo ESG foi de 4.57% na malha 8×8 para $\bar{\sigma}_{xx}$, contra 9.56% do elemento obtido pela integração completa,

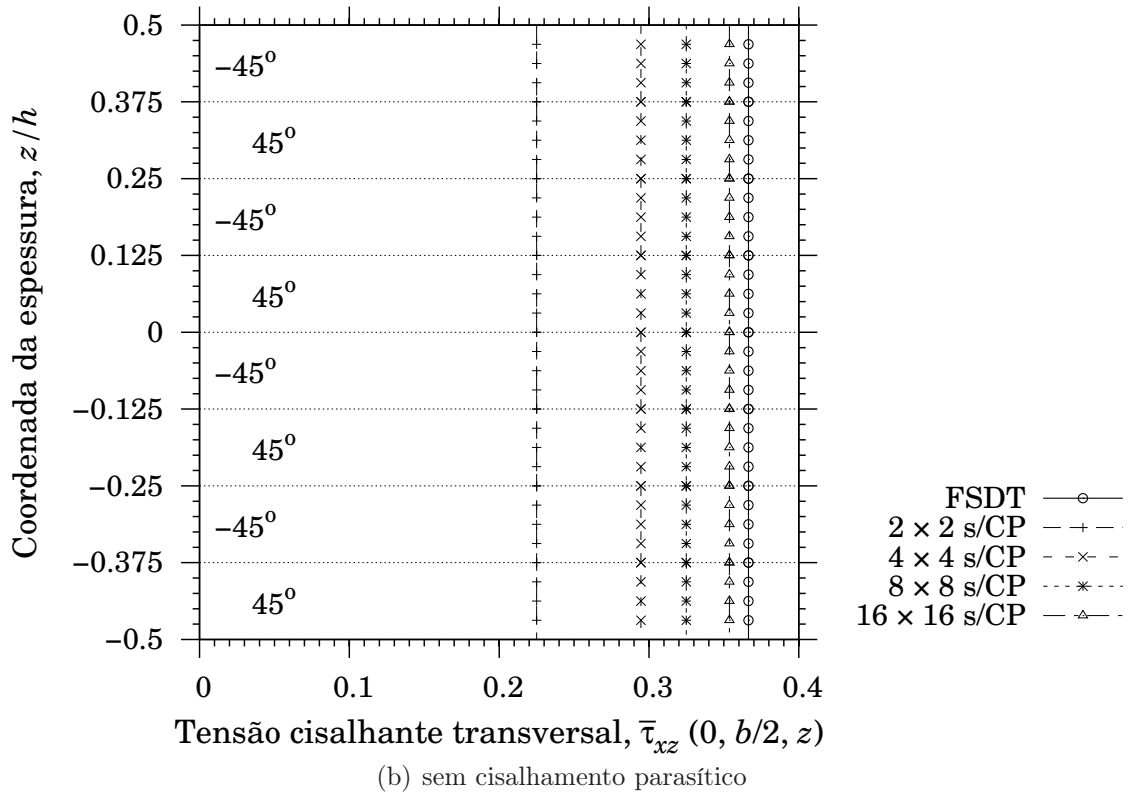
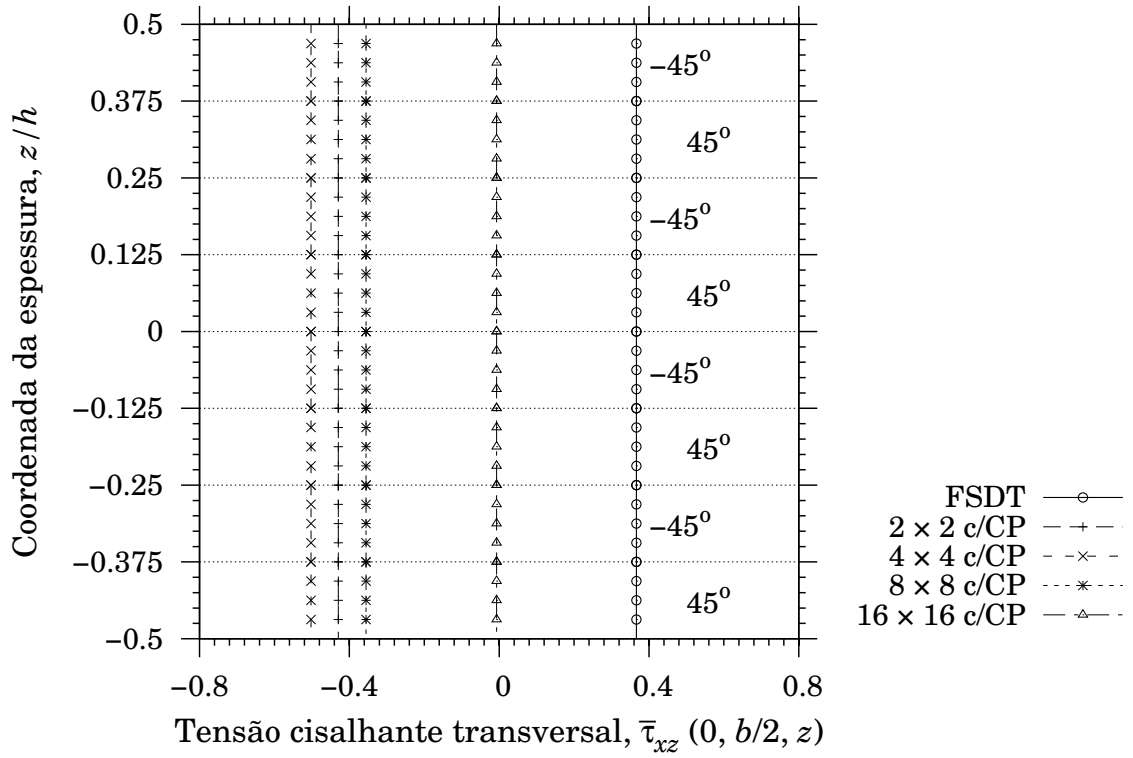


Figura 6.32: Tensões adimensionalizadas máximas, $\bar{\tau}_{xz}$, analisadas ao longo da espessura do laminado $[-45/45]_4$ para relação $a/h = 100$.

6.43% do elemento isoparamétrico com integração reduzida e 6.45% do elemento com integração seletiva. Fazendo a comparação na malha menos refinada, 4×4 , o comportamento

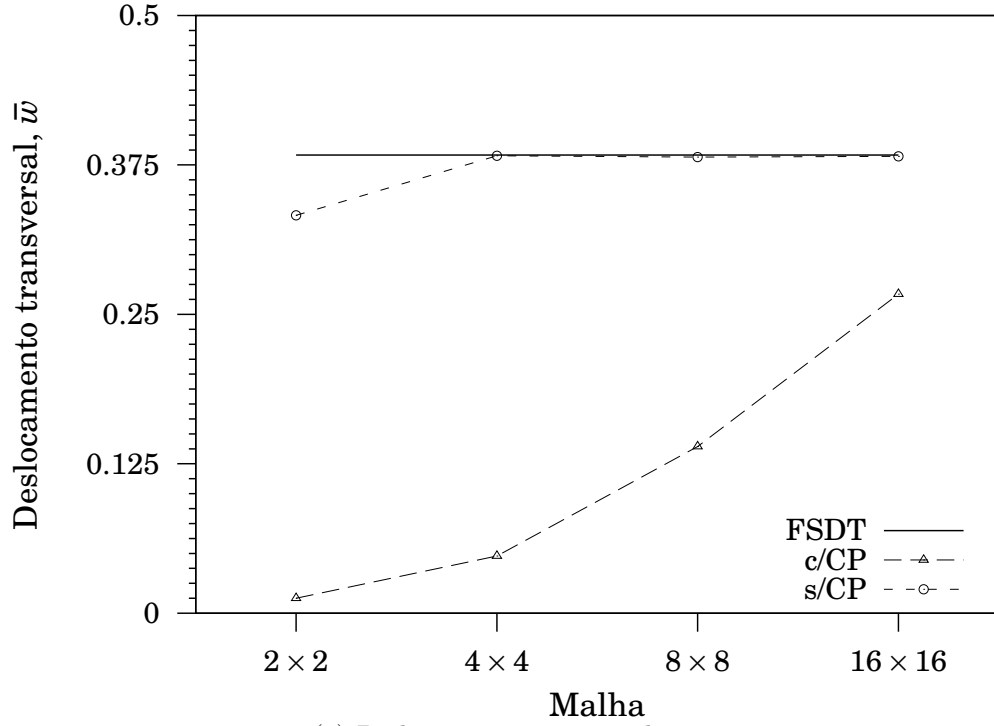
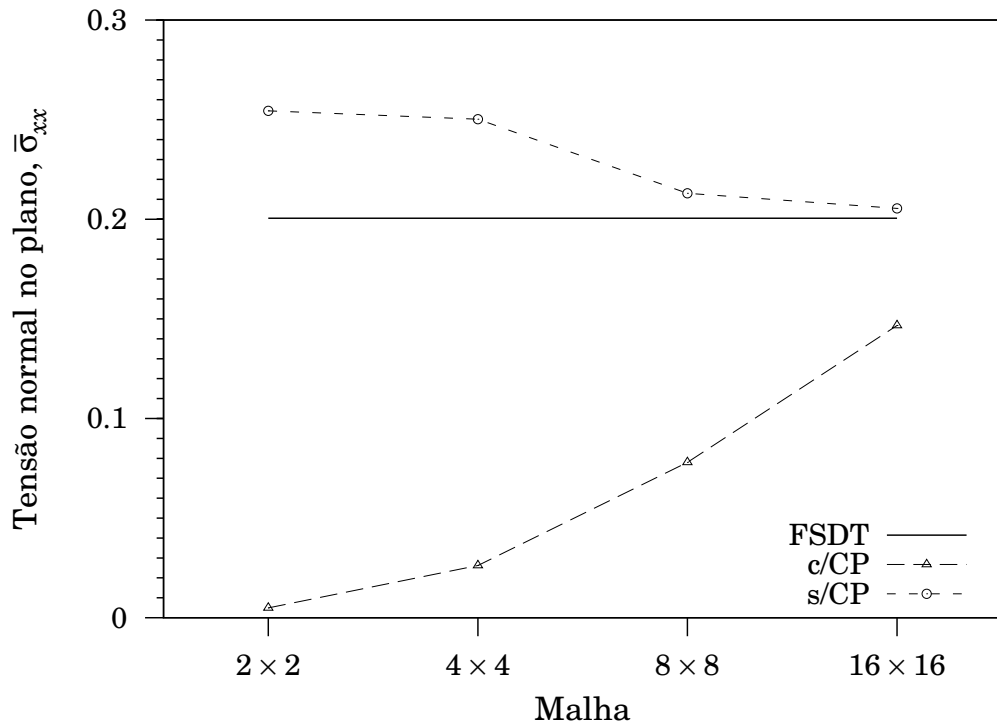
(a) Deslocamento transversal, $\bar{w}$ (b) Tensão normal, $\bar{\sigma}_{xx}$

Figura 6.33: Convergência do deslocamento transversal e da tensão normal $\bar{\sigma}_{xx}$ adimensional para relação $a/h = 100$ do laminado $[-45/45]_4$.

do ESG é ainda melhor. Os erros ficaram em 7.32%, 33.07%, 23.85% e 23.91% para os elementos *strain gradient*, isoparamétrico com integração completa, integração reduzida e integração seletiva, respectivamente.

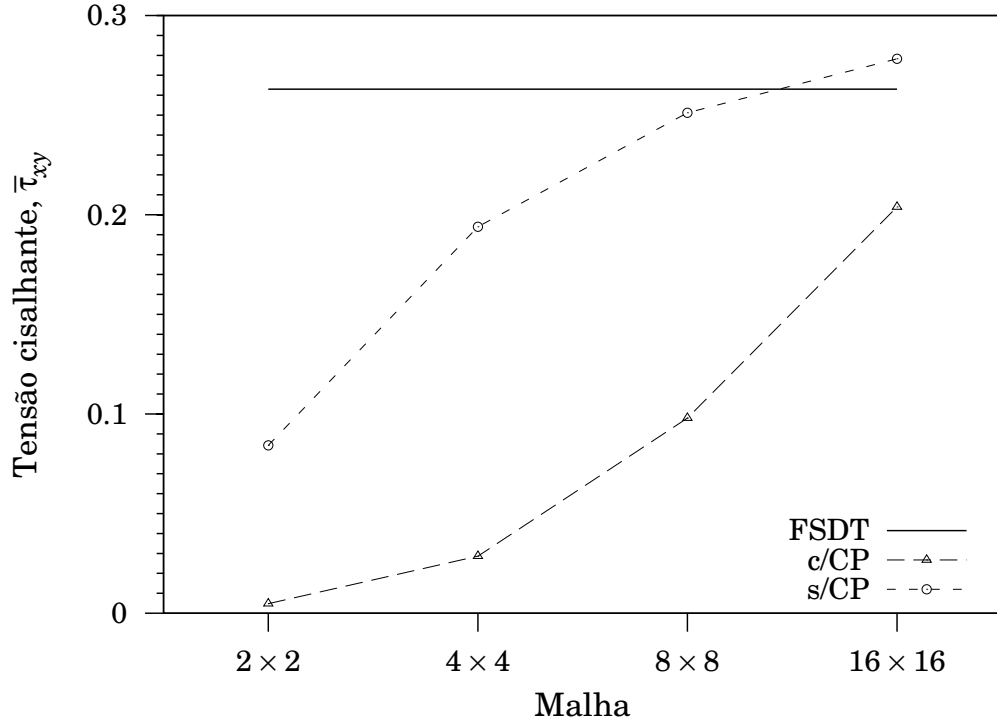
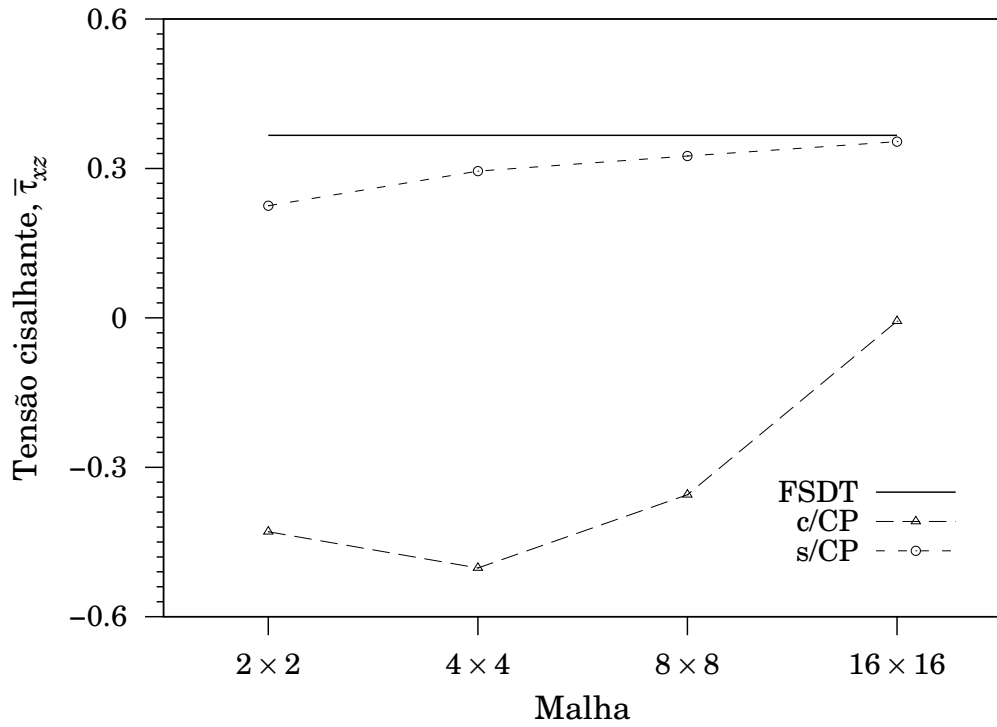
(a) Tensão cisalhante no plano, $\bar{\tau}_{xy}$ (b) Tensão cisalhante, $\bar{\tau}_{xz}$

Figura 6.34: Convergência das tensões cisalhantes adimensionais para relação $a/h = 100$ do laminado $[-45/45]_4$.

Para análise de erro nas tensões normal, $\bar{\sigma}_{yy}$, e cisalhante, $\bar{\tau}_{yz}$, mais uma vez o ESG se mostrou melhor que os elementos isoparamétricos. Entretanto, é observando a tensão cisalhante, $\bar{\tau}_{xz}$, que é possível perceber a capacidade de modelagem do elemento

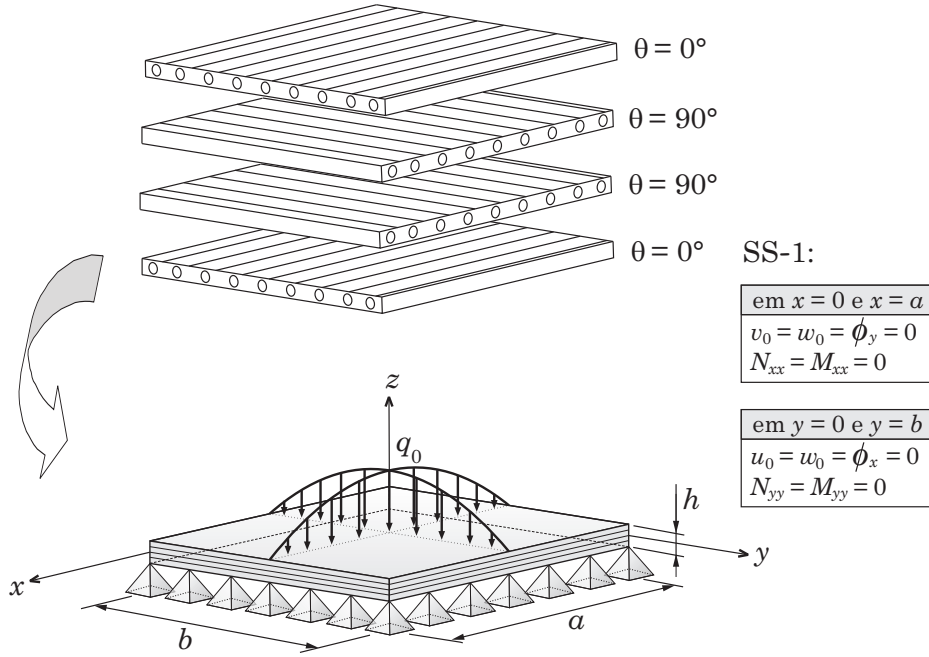


Figura 6.35: Geometria e condições de contorno do laminado quadrado $[0/90/90/0]$ simplesmente apoiado (SS-1) submetido ao carregamento senoidal.

finito *strain gradient*. O erro desse elemento nesta tensão na malha mais refinada foi de 0.24%, contra 6.71% para o elemento com integração completa, 5.28% com integração reduzida e 4.08% com integração seletiva. Isso mostra a eficiência numérica do ESG na análise de qualquer tipo de tensão.

Para a relação $a/h = 20$, os elementos *strain gradient* obtiveram resultados um pouco melhores que os apresentados para os laminados espessos, corroborando com o que foi mostrado até aqui, ou seja, os resultados melhoram com a diminuição da espessura do laminado.

Esta tendência fica mais clara ao se analisar o laminado delgado. Em contraposição ao elemento isoparamétrico, o quadrilátero de 4 nós via notação *strain gradient* mostrou que o seu comportamento não foi afetado pelo *locking*. Para $\bar{\sigma}_{xx}$, por exemplo, o erro foi de 0.07% para o ESG *versus* 77.68%, 6.26% e 6.21% dos elementos com integração completa, reduzida e seletiva, respectivamente. Esses valores se referem à malha 8×8 . Ao observar as outras tensões, os resultados obtidos via notação *strain gradient* também são melhores e, portanto, com menos erro que os elementos isoparamétricos. Além disso, nota-se que ao analisar a tensão cisalhante transversal, $\bar{\tau}_{yz}$, o elemento com integração completa nos pontos de Gauss diverge com o refino. Os erros obtidos em todas as análises, referem-se à solução analítica de Navier.

Com a finalidade de visualizar graficamente os resultados obtidos na Tab. 6.10, as

Tabela 6.10: Comparação de resultados obtidos via MEF entre os quadriláteros de 4 nós para deslocamento e tensões adimensionais ($\bar{w}$, $\bar{\sigma}$ e $\bar{\tau}$) para um laminado $[0/90/90/0]$ sujeito à carga senoidal.

a/h		Fonte	$\bar{w} \times 10^2$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
10	Solução via MEF [†]	4Q4-C	0.5901	0.3339	0.2454	0.316	0.125
		4Q4-R	0.6508	0.3799	0.2838	0.335	0.107
		4Q4-S	0.6655	0.3796	0.2882	0.353	0.114
		4Q4-SG	0.6289	0.4627	0.3376	0.391	0.122
		8Q4-C	0.6427	0.4512	0.3280	0.389	0.128
		8Q4-R	0.6599	0.4668	0.3406	0.395	0.123
		8Q4-S	0.6632	0.4667	0.3419	0.400	0.125
		8Q4-SG	0.6950	0.4761	0.3556	0.418	0.132
	Solução analítica ^{††}	Navier	0.6627	0.4989	0.3614	0.417	0.129
		Pagano	0.7370	0.5590	0.4010	0.301	0.196
20	Solução via MEF [†]	4Q4-C	0.3236	0.2645	0.1491	0.303	0.139
		4Q4-R	0.4712	0.4036	0.2289	0.353	0.089
		4Q4-S	0.4760	0.4043	0.2308	0.373	0.094
		4Q4-SG	0.4636	0.4896	0.2752	0.411	0.102
		8Q4-C	0.4346	0.4365	0.2451	0.395	0.123
		8Q4-R	0.4863	0.4940	0.2777	0.415	0.103
		8Q4-S	0.4874	0.4942	0.2782	0.420	0.105
		8Q4-SG	0.5035	0.5056	0.2868	0.440	0.109
	Solução analítica ^{††}	Navier	0.4912	0.5273	0.2956	0.437	0.109
		Pagano	0.5128	0.5430	0.3080	0.328	0.156
100	Solução via MEF [†]	4Q4-C	0.0315	0.0299	0.0151	0.230	0.211
		4Q4-R	0.4107	0.4129	0.2076	0.360	0.082
		4Q4-S	0.4120	0.4140	0.2082	0.381	0.086
		4Q4-SG	0.4081	0.4999	0.2512	0.418	0.095
		8Q4-C	0.1034	0.1203	0.0604	0.298	0.221
		8Q4-R	0.4281	0.5045	0.2535	0.422	0.098
		8Q4-S	0.4284	0.5048	0.2537	0.428	0.097
		8Q4-SG	0.4573	0.5386	0.2708	0.468	0.105
	Solução analítica ^{††}	Navier	0.4337	0.5382	0.2704	0.445	0.101
		Pagano	0.4347	0.5390	0.2710	0.339	0.139

[†] C $\rightarrow$ Integração completa; R $\rightarrow$ Integração reduzida; S $\rightarrow$ Integração seletiva; SG $\rightarrow$ Elemento *strain gradient* sem termos espúrios.

^{††} Solução de Navier $\rightarrow$ ver Apêndice B.2; Solução de Pagano $\rightarrow$ corresponde à solução da Teoria da Elasticidade 3D – ver *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis* [27].

Figs. 6.36(a) à 6.37(b) mostram o comportamento das tensões normais no plano adimensionalizadas para as malhas 4×4 e 8×8 dos elementos isoparamétrico e *strain gradient*.

Para verificar o problema do travamento, o laminado delgado com relação $a/h = 100$ foi selecionado. A linha contínua com círculos representa a solução de Navier, portanto, na malha menos refinada, o ESG apresenta resultado mais próximo ao analítico para as duas tensões. Com o refino, a resposta é ainda melhor, pois a solução analítica e a solução via notação *strain gradient* ficam sobrepostas.

Finalmente, as Figs. 6.38 e 6.39 compararam graficamente as tensões cisalhantes transversais adimensionalizadas entre os elementos isoparamétricos obtidos através da integração completa, reduzida e seletiva e o elemento *strain gradient*.

Na malha 4×4 , o resultado obtido pelo ESG para tensão cisalhante transversal, $\bar{\tau}_{xz}$, é mais próximo da solução de Navier que o elemento isoparamétrico, Fig. 6.38(a). Entretanto, ao avaliar a malha 8×8 , o elemento isoparamétrico se mostrou mais preciso que o ESG, Fig. 6.38(b).

A seguir será apresentada a comparação de resultados entre elementos de 8 nós, conforme mostra a Tab. 6.11. Análogo ao quadrilátero de 4 nós, a notação *nQ8* implica numa malha uniforme de ordem $n \times n$ para o elemento quadrático retangular de 8 nós. Vale destacar que o autor Reddy [27] apresentou apenas o resultado do elemento obtido com integração seletiva para a malha mais refinada, dificultando assim, qualquer comparação.

Diferente do quadrilátero de 4 nós, para a análise do laminado espesso e semi-espesso, o elemento *strain gradient* obteve resultados mais distantes da solução analítica que os elementos isoparamétricos na malha 4×4 . Entretanto, na malha mais refinada, os erros são praticamente os mesmos para os elementos com integração seletiva e o ESG.

Para relação $a/h = 100$, o erro para $\bar{\sigma}_{xx}$ foi de 0.07% para o ESG contra 0.71% do elemento com integração reduzida. Para a tensão normal $\bar{\sigma}_{yy}$ o erro ficou em 0.11% e 0.70% nos elementos *strain gradient* e isoparamétrico, respectivamente. Na análise das tensões cisalhantes, para $\bar{\tau}_{xz}$, o erro foi quase nulo para o ESG contra 0.90% do elemento com integração reduzida. Já para $\bar{\tau}_{yz}$, o erro foi o mesmo para ambos elementos.

Na análise do elemento *serendipity*, não será mostrada a comparação gráfica entre as tensões normais e cisalhantes, pois o elemento isoparamétrico e o ESG apresentaram valores muito próximos. Dessa forma, a curva dos gráficos de ambos os elementos ficaram sobrepostas, dispensando tal visualização.

Com isso, este capítulo apresentou as análises numéricas com o elemento *strain gradient* de 4 e 8 nós. Primeiramente, foi analisada uma placa isotrópica simplesmente apoiada sujeita à uma carga concentrada no seu centro. Em seguida, um laminado cruzado

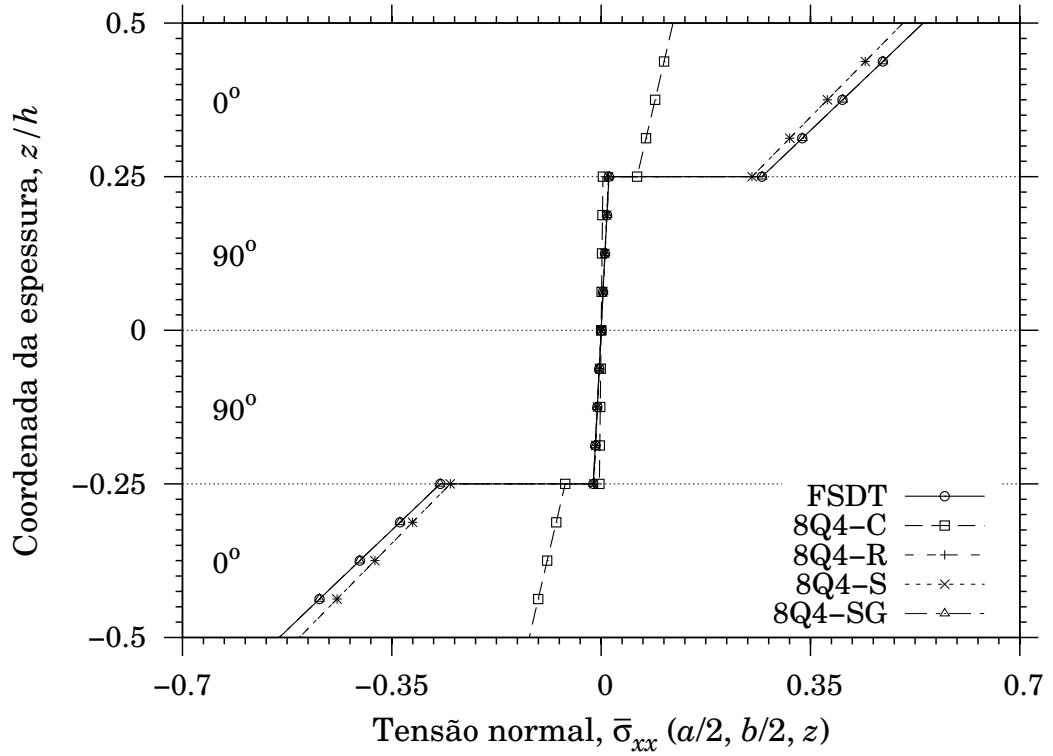
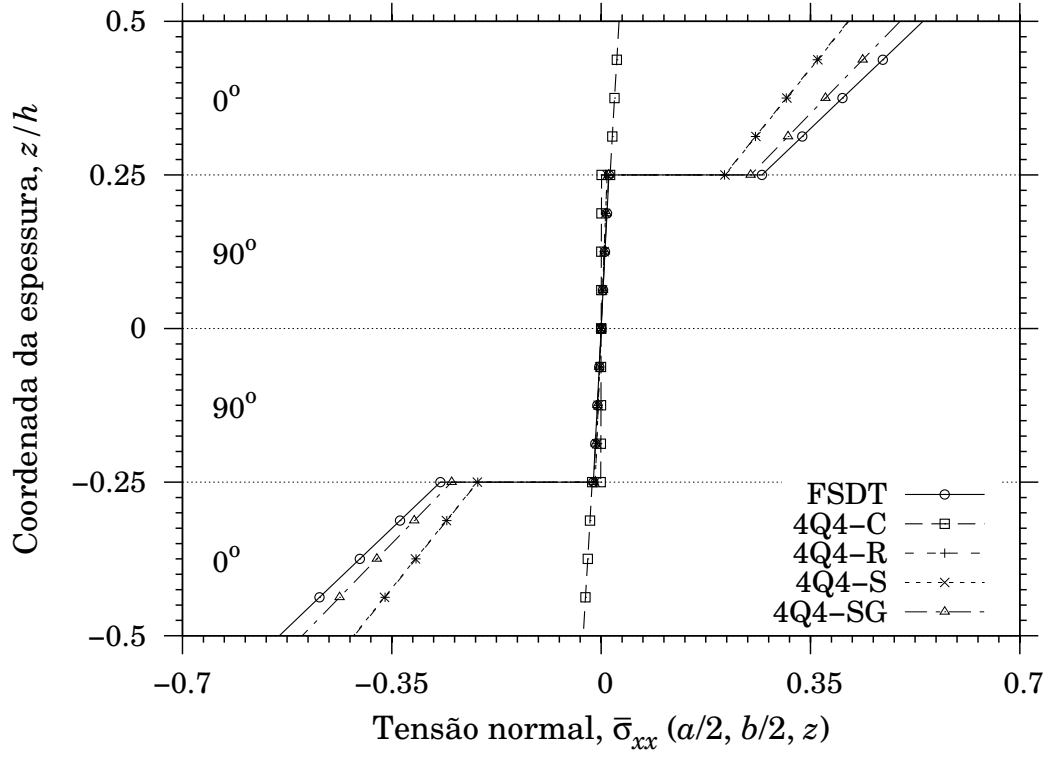


Figura 6.36: Comparação entre a tensão normal adimensionalizada $\bar{\sigma}_{xx}$ obtida via MEF para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/90/0]$ submetido ao carregamento senoidal.

simplesmente apoiado (SS-1) submetido ao carregamento uniformemente distribuído foi

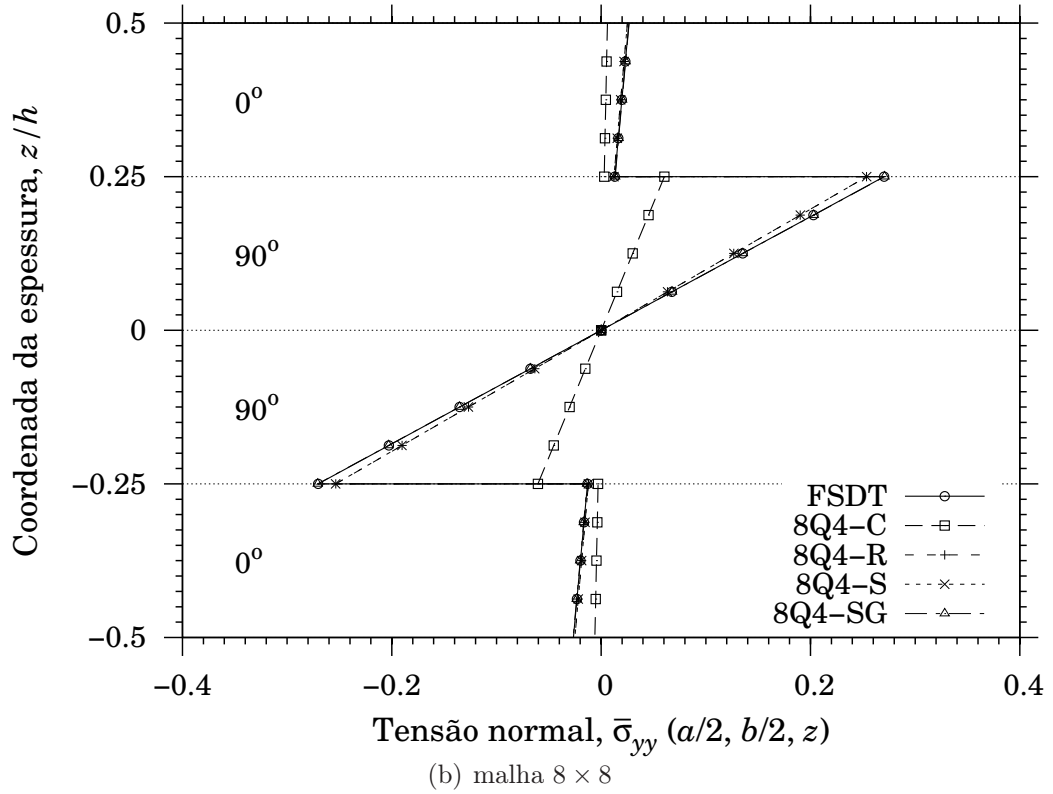
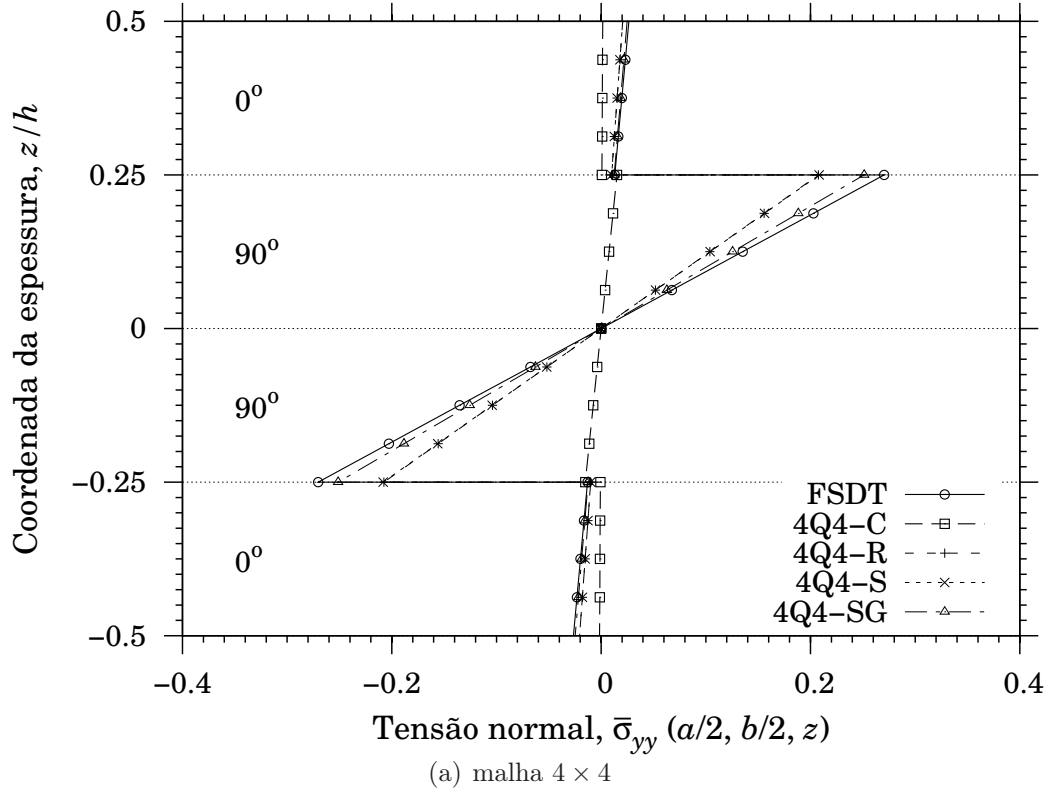


Figura 6.37: Comparação entre a tensão normal adimensionalizada $\bar{\sigma}_{yy}$ obtida via MEF para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/90/0]$ submetido ao carregamento senoidal.

estudado. Por último, foi avaliado um laminado angular anti-simétrico simplesmente

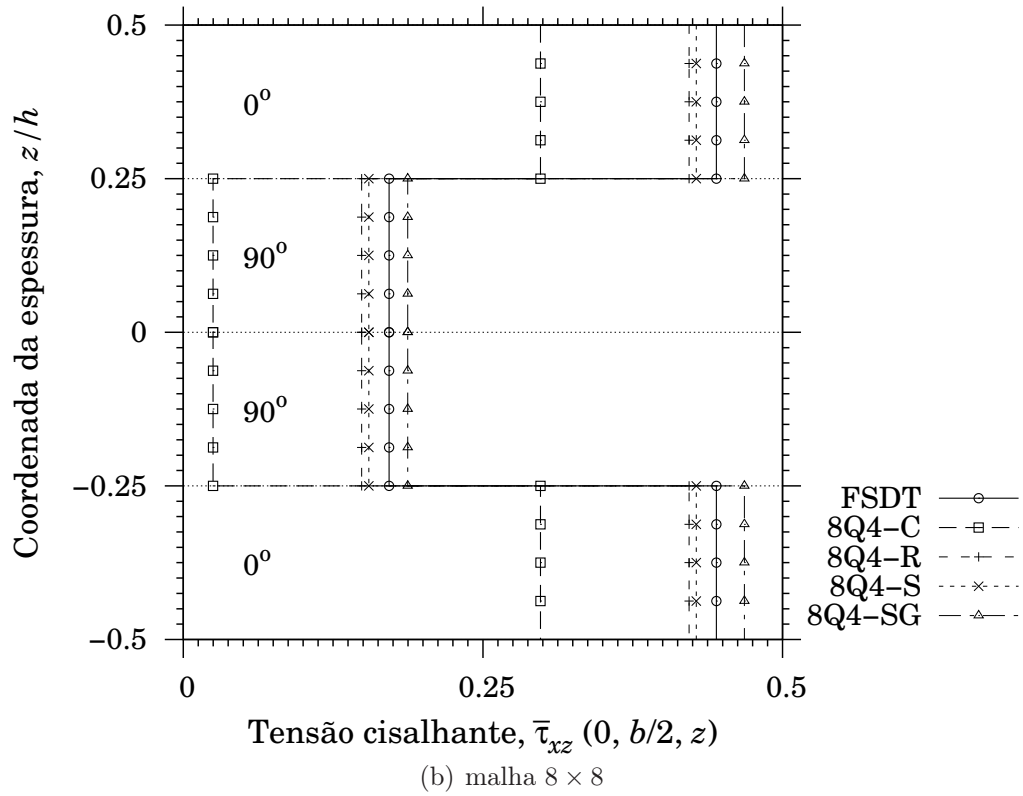
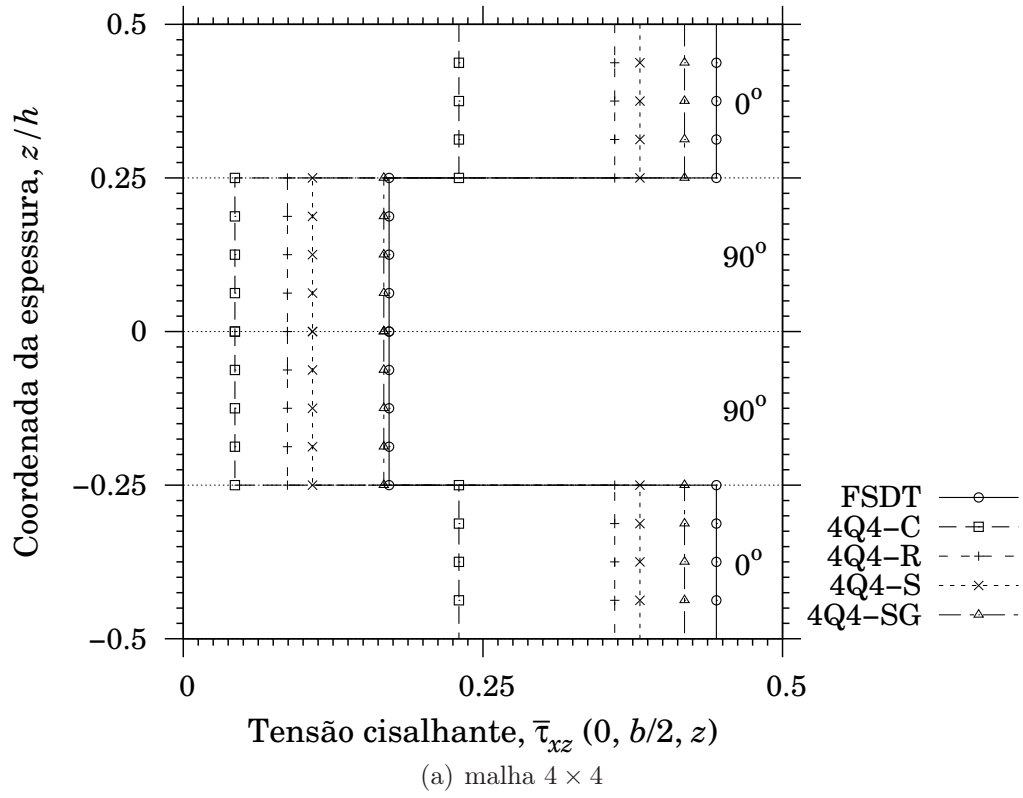


Figura 6.38: Comparação entre a tensão cisalhante adimensionalizada $\bar{\tau}_{xz}$ obtida via MEF para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/90/0]$ submetido ao carregamento senoidal.

apoiado (SS-2) sujeito ao carregamento senoidal. Essas três aplicações foram realizadas

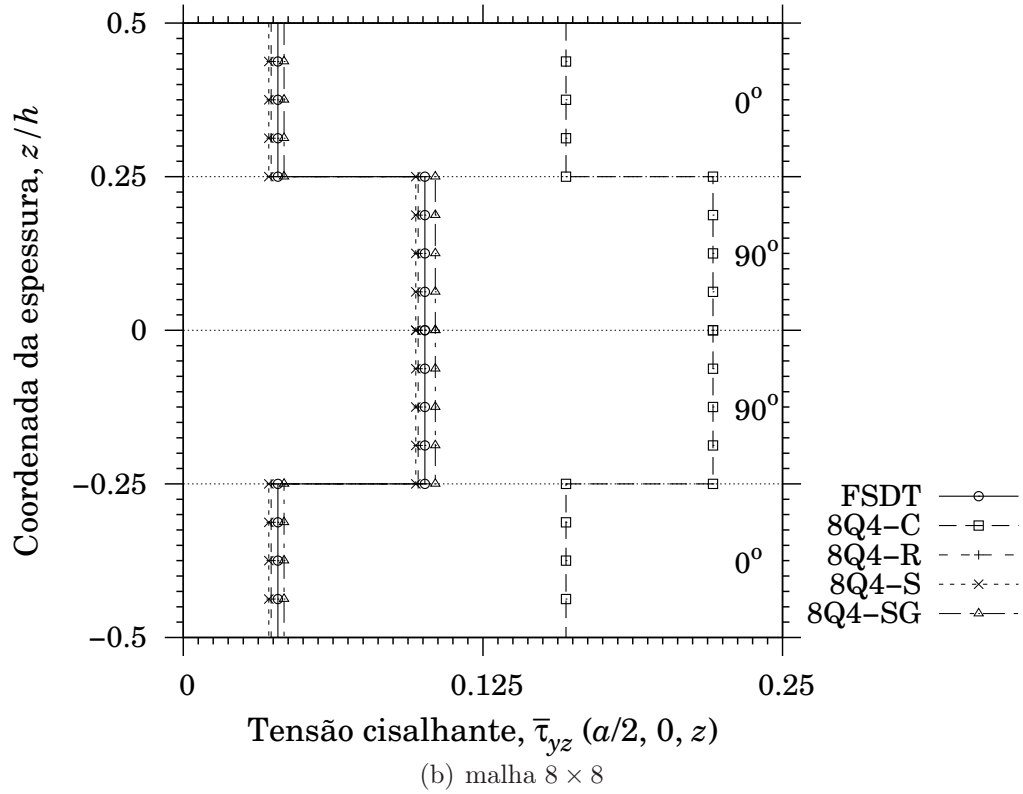
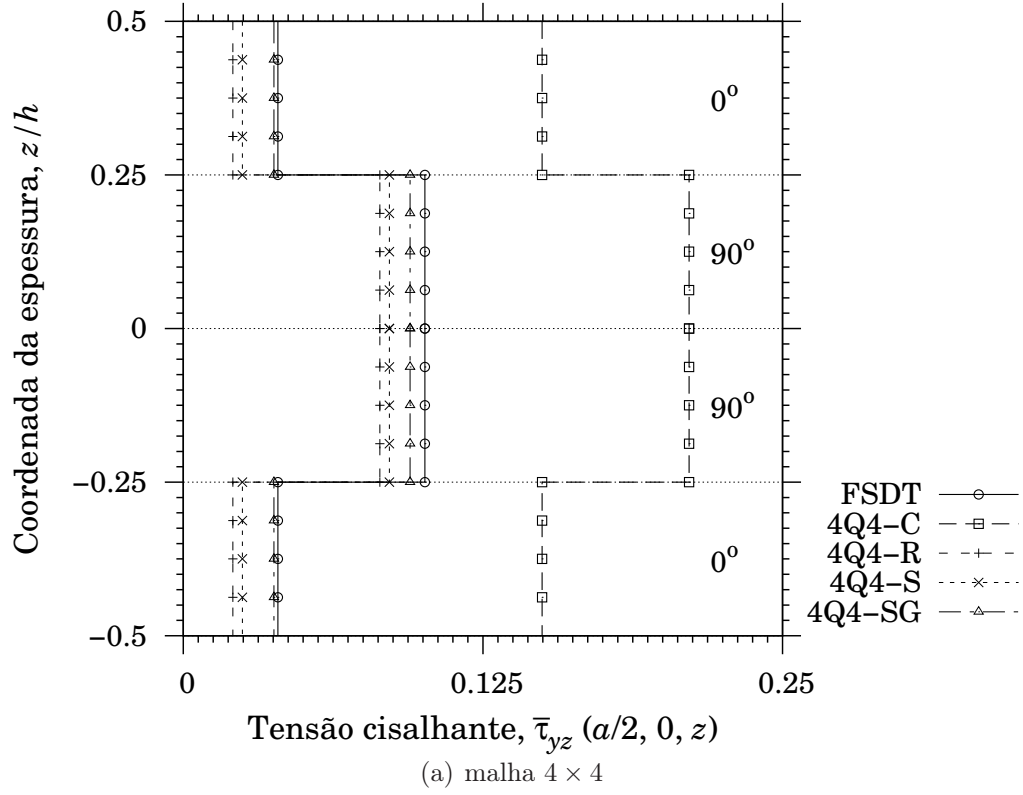


Figura 6.39: Comparação entre a tensão cisalhante adimensionalizada $\bar{\tau}_{yz}$ obtida via MEF para relação $a/h = 100$ do laminado $[0/90/90/0]$ submetido ao carregamento senoidal.

empregando o elemento retangular de 4 nós. Para validar o elemento, os resultados obtidos

Tabela 6.11: Comparação de resultados obtidos via MEF entre os quadriláteros de 8 nós para deslocamento e tensões adimensionais ($\bar{w}$, $\bar{\sigma}$ e $\bar{\tau}$) para um laminado $[0/90/90/0]$ sujeito à carga senoidal.

a/h		Fonte	$\bar{w} \times 10^2$	$\bar{\sigma}_{xx}$	$\bar{\sigma}_{yy}$	$\bar{\tau}_{xz}$	$\bar{\tau}_{yz}$
10	Solução via MEF [†]	4Q8-C	0.6605	0.4831	0.3492	0.404	0.126
		4Q8-R	0.6615	0.4842	0.3509	0.404	0.126
		4Q8-S	0.6613	0.4844	0.3509	0.405	0.126
		4Q8-SG	0.6229	0.4635	0.3356	0.381	0.118
		8Q8-S	0.6626	0.4954	0.3589	0.414	0.128
		8Q8-SG	0.6882	0.4771	0.3534	0.407	0.128
	Solução analítica ^{††}	Navier	0.6627	0.4989	0.3614	0.417	0.129
		Pagano	0.7370	0.5590	0.4010	0.301	0.196
20	Solução via MEF [†]	4Q8-C	0.4876	0.5082	0.2828	0.424	0.106
		4Q8-R	0.4901	0.5117	0.2870	0.424	0.106
		4Q8-S	0.4901	0.5120	0.2870	0.424	0.106
		4Q8-SG	0.4620	0.5344	0.2685	0.400	0.100
		8Q8-S	0.4911	0.5236	0.2936	0.434	0.108
		8Q8-SG	0.5017	0.5059	0.2861	0.429	0.106
	Solução analítica ^{††}	Navier	0.4912	0.5273	0.2956	0.437	0.109
		Pagano	0.5128	0.5430	0.3080	0.328	0.156
100	Solução via MEF [†]	4Q8-C	0.4143	0.4900	0.2435	0.430	0.100
		4Q8-R	0.4319	0.5214	0.2621	0.435	0.102
		4Q8-S	0.4319	0.5214	0.2620	0.433	0.102
		4Q8-SG	0.4080	0.5000	0.2512	0.407	0.092
		8Q8-S	0.4336	0.5344	0.2685	0.441	0.100
		8Q8-SG	0.4372	0.5386	0.2707	0.445	0.102
	Solução analítica ^{††}	Navier	0.4337	0.5382	0.2704	0.445	0.101
		Pagano	0.4347	0.5390	0.2710	0.339	0.139

[†] C $\rightarrow$ Integração completa; R $\rightarrow$ Integração reduzida; S $\rightarrow$ Integração seletiva; SG $\rightarrow$ Elemento *strain gradient* sem termos espúrios.

^{††} Solução de Navier $\rightarrow$ ver Apêndice B.2; Solução de Pagano $\rightarrow$ corresponde à solução da Teoria da Elasticidade 3D – ver *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis* [27].

utilizando a notação *strain gradient* foram comparados com a solução analítica de Navier.

Posteriormente, o quadrilátero de 8 nós foi avaliado. A primeira análise com esse elemento foi uma placa isotrópica apoiada nos cantos. Na sequência, foi avaliado um laminado cruzado simplesmente apoiado (SS–1) sujeito à uma carga uniformemente distribuída. O terceiro exemplo empregando o quadrilátero de 8 nós foi um laminado angular anti-simétrico simplesmente apoiado (SS–2) sujeito à uma carga uniforme distribuída em todo o domínio da placa. Também foram realizadas comparações com a solução analítica

de Navier com o intuito de validar o elemento.

Finalmente, com ambos elementos validados, foi realizada uma comparação entre os elementos isoparamétricos e os elementos *strain gradient*.

Sendo assim, o próximo capítulo discute as considerações finais do trabalho e norteia os próximos estudos na área de compósitos laminados empregando a notação *strain gradient*.

7 Considerações Finais

7.1 Introdução

Este trabalho mostrou uma maneira alternativa de formulação em elementos finitos, ou seja, utilizando a notação *strain gradient* para análise de compósitos laminados. Inicialmente, foi realizada uma revisão teórica e bibliográfica dos modelos utilizados no estudo das placas laminadas. Os artigos analisados contemplavam o modelo de placa delgada – Kirchhoff, o modelo de placa espessa – Mindlin e o modelo de ordem superior. Além disso, alguns elementos empregavam a notação *strain gradient*, enquanto outros foram formulados por meio de elementos isoparamétricos empregando a técnica da integração reduzida para diminuir o efeito do travamento.

Em seguida, o embasamento teórico para o devido entendimento do trabalho foi apresentado nos Capítulos 3 e 4, que mostraram os conceitos preliminares de materiais compósitos e as teorias de análise, respectivamente.

No Capítulo 5 a metodologia de implementação computacional utilizando a notação *strain gradient* foi mostrada. Foram formulados elementos retangulares de 4 e 8 nós. Foram apresentados e detalhados o desenvolvimento destes elementos e das suas respectivas matrizes.

Por último, análises numéricas com os elementos formulados foram apresentadas no Capítulo 6. Os resultados foram comparados com os obtidos analiticamente através de expansões trigonométricas em séries de Fourier. Para enfatizar o problema do *locking*, a relação $a/h = 100$ foi escolhida para demonstração gráfica dos resultados, embora diferentes espessuras tenham sido analisadas para demonstrar a precisão e a acurácia dos elementos implementados através da notação *strain gradient*. Além disso, foi realizada uma análise comparativa com elementos isoparamétricos.

A seção seguinte tem por objetivo apresentar as principais conclusões a respeito desta dissertação, bem como sugerir linhas de pesquisa para trabalhos futuros.

7.2 Conclusões

Esta dissertação propôs o modelamento de placas de compósitos laminados via elementos finitos baseado na Teoria da Lâmina Equivalente segundo o modelo de Mindlin empregando a notação *strain gradient*.

A implementação computacional dos elementos foi concluída e a validação foi feita com sucesso, de acordo com a comparação com os resultados analíticos. O elemento foi implementado em uma plataforma de software criada em Fortran[®] e utilizada pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da PUCPR chamado LAMFEM. A formulação dos elementos retangulares de 4 e 8 nós foi apresentada e detalhada.

A utilização do ambiente para formulação dos elementos, LAMFEM, permite a reutilização dos estudos desenvolvidos neste trabalho entre alunos e professores deste Programa em futuras pesquisas, contribuindo de maneira significativa para integração e sinergia entre as linhas de pesquisa que estão sendo desenvolvidas.

Um conjunto de análises numéricas foi realizado. Esse conjunto não contempla todos os tipos de carregamento e condições de contorno, mas alguns dos mais importantes encontrados na literatura. Baseado nas aplicações numéricas, as principais conclusões obtidas sobre o desempenho dos elementos finitos *strain gradient* foram:

1. Após a remoção dos termos espúrios, nenhum dos elementos apresentou problemas de *locking* em todas as condições de contorno e carregamento analisadas;
2. Ambos elementos, retângulos de 4 e 8 nós, foram capazes de representar corretamente os modos de corpo rígido e de deformação constante;
3. O cálculo das tensões mostrou que o elemento com termos espúrios foi afetado pela rigidez artificial gerada no modelo. Os termos espúrios ou de cisalhamento parasítico são responsáveis pela rigidez artificial (ou *shear locking*) do modelo. No entanto, com o emprego da notação *strain gradient*, pôde-se facilmente identificar e remover tais termos;
4. Com relação à convergência, os elementos com cisalhamento parasítico se mostraram ineficientes e com taxa de convergência pequena. Porém, ao comparar os elementos corrigidos, isto é, sem termos espúrios, os resultados foram próximos ao analítico em todas as situações de contorno e carregamento para todas as grandezas envolvidas. Genericamente, os erros não foram maiores que 9% para as malhas mais refinadas, sendo que em alguns casos o erro ficou próximo de zero. Ainda no que se refere à

convergência, alguns casos convergiram monotonicamente para os elementos corrigidos. Além disso, a taxa de convergência foi mais rápida. Para os deslocamentos, por exemplo, alguns casos analisados mostraram que para uma malha 2×2 o resultado obtido já estava satisfatório;

5. Com a comparação entre os resultados obtidos pelos elementos *strain gradient* e a solução analítica de Navier, os mesmos foram validados. Após a validação dos elementos, foram apresentadas análises comparativas entre os elementos isoparamétricos obtidos pela formulação tradicional em elementos finitos e os ESG. Mais uma vez o resultado foi satisfatório. Para o retângulo de 4 nós, ao avaliar uma mesma malha, o ESG apresentou resultados melhores que os isoparamétricos, principalmente para os laminados delgados. Isso mostra que a formulação via notação *strain gradient* é capaz de remover os modos espúrios de energia durante a formulação, deixando o elemento livre de travamento. Para os elementos isoparamétricos, o efeito do *locking* é mais evidente e a sua remoção é feita utilizando artifícios que não têm embasamento no fenômeno físico;
6. Para o retângulo de 8 nós, tanto o ESG quanto o elemento isoparamétrico apresentam resultados próximos e satisfatórios. Isso mostra que na formulação tradicional, com o enriquecimento do polinômio do campo dos deslocamentos o elemento apresenta resultados melhores. Entretanto, com a utilização da notação *strain gradient*, o elemento pode ter o polinômio mais incompleto e ainda gerar resultados satisfatórios. Esse fato é corroborado pela proximidade dos valores obtidos pelos elementos *strain gradient* de 4 e 8 nós;
7. É importante destacar que foram apresentadas e implementadas as soluções analíticas conforme as teorias de primeira ordem e de ordem superior para comparar com os resultados numéricos obtidos;
8. Por último, o emprego da notação *strain gradient* oferece algumas vantagens que foram discutidas ao longo do trabalho, mas a principal está na capacidade de identificação qualitativa do elemento durante a sua formulação. Isso faz com que o elemento gerado por esta técnica de remoção de termos espúrios seja eficaz e preciso. Muitos autores apresentam maneiras alternativas para tal solução [3, 14, 15, 19, 46]. A que foi utilizada nesta dissertação é apenas mais uma, porém a facilidade em remover os termos espúrios de energia entendendo o que acontece fisicamente no modelo é a principal vantagem em se aplicar o método apresentado nesta dissertação.

7.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

Este trabalho permitiu o conhecimento sobre a formulação de elementos de placa empregando a notação *strain gradient*. O desempenho do modelo gerado foi apresentado de maneira satisfatória. Entretanto, o modelo ficou limitado à Teoria de Primeira Ordem de Mindlin. Para dar continuidade a este trabalho, é interessante tentar empregar a técnica de formulação de um elemento de placa via notação *strain gradient* para teorias de ordem superior. Outra extensão interessante, seria o desenvolvimento e a implementação de elementos de casca. Já que para a análise de cascas ainda não foi possível obter uma formulação que permita a comprovação matemática de convergência, como é o caso das placas. E finalmente, avaliar a viabilidade do uso da notação *strain gradient* em análises não lineares.

Referências Bibliográficas

- [1] AAGAAH, M. R., MAHINFALAH, M., AND JAZAR, G. N. Linear static analysis and finite element modeling for laminated composite plates using third order shear deformation theory. *Composite Structures* 62 (2003), 27–39.
- [2] ABDALLA, J. E. *Qualitative and discretization error analysis of laminated composite plate models*. PhD thesis, Faculty of the Graduate School of the University of Colorado, 1992.
- [3] BATHE, K. J. *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1982.
- [4] BELO, I. M., ABDALLA, J. E., AND MACHADO, R. D. A locking-free laminated composite plate finite element. In *18th International Congress of Mechanical Engineering COBEM* (Ouro Preto, MG, Novembro 2005), Anais do 18th International Congress of Mechanical Engineering COBEM.
- [5] BELO, I. M., ABDALLA, J. E., AND MACHADO, R. D. Shear locking analysis in a serendipity laminated composite plate model. In *XXVI Iberian Latin–American Congress on Computational Methods in Engineering CILAMCE* (Guarapari, ES, Outubro 2005), Anais do XXVI Iberian Latin–American Congress on Computational Methods in Engineering CILAMCE (CIL 05-374).
- [6] BYRD, D. *Identification and Elimination of Errors in Finite Element Analysis*. PhD thesis, University of Colorado, Boulder, 1988.
- [7] DOW, J. O. *A Unified Approach to the Finite Element Method and Error Analysis-Procedures*. Book News Inc., Portland, USA, 1999.
- [8] DOW, J. O., AND ABDALLA, J. E. Qualitative errors in laminated composite plate models. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 37 (1994), 1215–1230.
- [9] DOW, J. O., HO, T. H., AND CABINESS, H. D. A generalized finite element evaluation procedure. *Journal of Structural Engineering, ASCE* 111, ST2 (1985), 435–452.
- [10] GANAPATHI, M., PATEL, B. P., AND LELE, A. V. Static analysis of bimodulus laminated composite plates subjected to mechanical loads using higher-order shear deformation. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 23, 11 (2004), 1159–1171.
- [11] GHUGAL, Y. M., AND SHIMPI, R. P. A review of refined shear deformation theories of isotropic and anisotropic laminated plates. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 21, 9 (2002), 775–809.

- [12] GIBSON, R. *Principles of Composite Material Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 1994.
- [13] GRUTTMANN, F., AND WAGNER, W. A linear quadrilateral shell element with fast stiffness computation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 194 (2005), 4279–4300.
- [14] HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Dover Publications, New York, USA, 2000.
- [15] HUGHES, T. J. R., AND COHEN, M. The “heterosis” finite element for plate bending. *Computers & Structures* 9 (1978), 445–450.
- [16] JONES, R. M. *Mechanics of Composite Materials*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1975.
- [17] KOLLÁR, L. P., AND SPRINGER, G. S. *Mechanics of Composite Structures*. Cambridge University Press, New York, 2003.
- [18] LO, K. H., CHRISTENSEN, R. M., AND WU, E. M. A high-order theory of plate deformation, part 2: Laminated plates. *Journal of Applied Mechanics* (1977), 669–676.
- [19] MACNEAL, R. H. A simple quadrilateral shell element. *Computer & Structures* 8 (1978), 175–183.
- [20] MAWENYA, A. S., AND DAVIES, J. D. Finite element bending analysis of multilayer plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 8 (1974), 215–225.
- [21] MENDONÇA, P. T. R. *Materiais Compostos e Estruturas Sanduíche*. Manole, Barueri – SP, 2005.
- [22] MINDLIN, R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motion of isotropic elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 18 (1951), 336–343.
- [23] PANDA, S. C., AND NATARAJAN, R. Finite element analysis of laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 14 (1979), 69–79.
- [24] PEREIRA, M. S., ABDALLA, J. E. F., AND MACHADO, R. D. The behavior of laminated composite plate models via strain gradient notation. *XXV Congresso Íbero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia* (2004).
- [25] PHAN, N. D., AND REDDY, J. N. Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 21 (1985), 2201–2219.
- [26] REDDY, J. N. On refined computational models of composite laminates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 27 (1989), 361–382.
- [27] REDDY, J. N. *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. CRC Press, Boca Raton, 1997.

- [28] REDDY, J. N., AND BOSE, P. Analysis of composite plates using various plate theories, part 1: Formulation and analytical solutions. *Structural Engineering & Mechanics*, 6 (1998), 583–612.
- [29] REDDY, J. N., AND BOSE, P. Analysis of composite plates using various plate theories. part 2: finite element model and numerical results. *Structural Engineering & Mechanics*, 6 (1998), 727–746.
- [30] REDDY, J. N., AND GARVIN, C. C. Advanced in the modelling of laminated plates. *First International Conference on computational structures technology* (1991).
- [31] REDDY, J. N., AND MIRAVETE, A. *Practical Analysis of Composite Laminates*. CRC, New York, 1995.
- [32] REDDY, J. N., AND ROBBINS, D. H. Theories and computational models for composite laminates. *Applied Mechanics Review* 47 (1994), 147–169.
- [33] REDDY, J. N., AND WANG, C. M. An overview of the relationships between solutions of the classical and shear deformation plate theories. *Composite Science & Technology* 60 (2000), 2327–2335.
- [34] REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. *Journal of Applied Mechanics* 12 (1945), 69–77.
- [35] ROLFES, R., ROHWER, K., AND BALLERSTAEDT, M. Efficient linear transverse normal stress analysis of layered composite plates. *Computers & Structures* 68 (1998), 643–652.
- [36] SCHÜNEMANN, M. Um modelo de placa para análise de compósitos laminados utilizando a notação strain gradient. Master’s thesis, Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2004.
- [37] SHIMPI, R. P., ARYA, H., AND NAIK, N. K. A higher order displacement model for the plate analysis. *Journal of Reinforced Plastics and Composites* 22, 18 (2003), 1667–1688.
- [38] SZE, K. Y., CHEN, R., AND CHEUNG, Y. K. Finite element model with continuous transverse shear stress for composite laminates in cylindrical bending. *Finite Elements in Analysis and Design* 31 (1998), 153–164.
- [39] SZILARD, R. *Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods*. Prantice Hall, New Jersey, 1974.
- [40] TESSLER, A., AND SAETHER, E. A computationally viable higher-order theory for laminated composite plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 06 (1991), 1069–1086.
- [41] VINSON, J. R., AND SIERAKOWSKI, R. L. *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*. Martinus Nijhoff, Boston, 1986.
- [42] VINSON, J. R., AND SIERAKOWSKI, R. L. *The Behavior of Structures Composed of Composite Materials*, second edition ed. Kluwer Academic Publishers, Boston, 2002.

- [43] WANG, C. M., REDDY, J. N., AND LEE, K. H. *Shear Deformable Beams and Plates: Relationships with Classical Solutions*. Elsevier, New York, 2000.
- [44] WHITNEY, J. M., AND PAGANO, N. J. Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. *Journal of Applied Mechanics* 37 (1970), 1031–1036.
- [45] YANG, P. C., NORRIS, C. H., AND STAVSKY, Y. Elastic wave propagation in heterogeneous plates. *International Journal of Solids and Structures* 26 (1964), 665–668.
- [46] ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L., AND TOO, J. M. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 3 (1971), 275–290.

APÊNDICE A – A Notação *Strain Gradient*

A.1 Tabela de Coeficientes

Como foi mencionado no item 5.2.1, a questão principal na formulação de elementos finitos utilizando a notação *strain gradient* está na determinação de um conjunto de vetores deslocamento linearmente independentes que correspondem a um conjunto específico de modos de deformação cujo elemento é capaz de representar. Em alguns elementos, como por exemplo, no retângulo de 8 nós e em outros também, as relações de compatibilidade devem ser obedecidas para a correta formulação. Dessa forma, a Tab. A.1 apresenta os coeficientes em função das deformações e a compatibilidade entre alguns modos de deformação dados pela Teoria da Elasticidade.

Tabela A.1: Coeficientes em função das deformações.

Termo	$\varepsilon_x(x, y, z)$	$\varepsilon_y(x, y, z)$	$\varepsilon_z(x, y, z)$	$\gamma_{xy}(x, y, z)$	$\gamma_{yz}(x, y, z)$	$\gamma_{xz}(x, y, z)$
1	ε_x	ε_y	ε_z	γ_{xy}	γ_{yz}	γ_{xz}
x	$\varepsilon_{x,x}$	$\varepsilon_{y,x}$	$\varepsilon_{z,x}$	$\gamma_{xy,x}$	$\gamma_{yz,x}$	$\gamma_{xz,x}$
y	$\varepsilon_{x,y}$	$\varepsilon_{y,y}$	$\varepsilon_{z,y}$	$\gamma_{xy,y}$	$\gamma_{yz,y}$	$\gamma_{xz,y}$
z	$\varepsilon_{x,z}$	$\varepsilon_{y,z}$	$\varepsilon_{z,z}$	$\gamma_{xy,z}$	$\gamma_{yz,z}$	$\gamma_{xz,z}$
x^2	$1/2\varepsilon_{x,xx}$	$1/2\varepsilon_{y,xx}$	$1/2\varepsilon_{z,xx}$	$1/2\gamma_{xy,xx}$	$1/2\gamma_{yz,xx}^\dagger$	$1/2\gamma_{xz,xx}$
xy	$\varepsilon_{x,xy}$	$\varepsilon_{y,xy}$	$\varepsilon_{z,xy}$	$\gamma_{xy,xy}^\dagger$	$\gamma_{yz,xy}$	$\gamma_{xz,xy}$
xz	$\varepsilon_{x,xz}$	$\varepsilon_{y,xz}$	$\varepsilon_{z,xz}$	$\gamma_{xy,xz}$	$\gamma_{yz,xz}$	$\gamma_{xz,xz}^\dagger$
y^2	$1/2\varepsilon_{x,yy}$	$1/2\varepsilon_{y,yy}$	$1/2\varepsilon_{z,yy}$	$1/2\gamma_{xy,yy}$	$1/2\gamma_{yz,yy}$	$1/2\gamma_{xz,yy}^\dagger$
yz	$\varepsilon_{x,yz}$	$\varepsilon_{y,yz}$	$\varepsilon_{z,yz}$	$\gamma_{xy,yz}$	$\gamma_{yz,yz}^\dagger$	$\gamma_{xz,yz}$
z^2	$1/2\varepsilon_{x,zz}$	$1/2\varepsilon_{y,zz}$	$1/2\varepsilon_{z,zz}$	$1/2\gamma_{xy,zz}^\dagger$	$1/2\gamma_{yz,zz}$	$1/2\gamma_{xz,zz}$

† Relações de compatibilidade dadas por:

$$\begin{aligned} \gamma_{xy,xy} &= \varepsilon_{x,xy} + \varepsilon_{y,xx} & \gamma_{xy,zz} &= \gamma_{xz,yz} + \gamma_{yz,xz} - 2\varepsilon_{z,xy} \\ \gamma_{yz,yz} &= \varepsilon_{y,zz} + \varepsilon_{z,yy} & \gamma_{yz,xx} &= \gamma_{xy,xz} + \gamma_{xz,xy} - 2\varepsilon_{x,yz} \\ \gamma_{xz,xz} &= \varepsilon_{x,zz} + \varepsilon_{z,xx} & \gamma_{xz,yy} &= \gamma_{xy,yz} + \gamma_{yz,xy} - 2\varepsilon_{y,xz} \end{aligned}$$

Fonte: ABDALLA, J. E. *Qualitative and discretization error analysis of laminated composite plate models*.

Tese (Doutorado) – Faculty of the Graduate School of the University of Colorado, 1992 [2].

O processo detalhado de determinação dos coeficientes para um polinômio de terceira ordem é dado pelos autores [2, 6, 7, 36], respectivamente. Neste trabalho, houve a necessidade de determinar os coeficientes até a quarta ordem. Portanto, a Tab. A.2 apresenta os coeficientes para um elemento tridimensional de até quarta ordem.

Tabela A.2: Coeficientes para um elemento 3D de quarta ordem.

i	Termo	a_i para $u(x, y, z)$	b_i para $v(x, y, z)$	c_i para $w(x, y, z)$
1	1	u	v	w
2	x	ε_x	$\gamma_{xy}/2 + \phi_z$	$\gamma_{xz}/2 - \phi_x$
3	y	$\gamma_{xy}/2 - \phi_z$	ε_y	$\gamma_{yz}/2 + \phi_y$
4	z	$\gamma_{xz}/2 + \phi_x$	$\gamma_{yz}/2 - \phi_y$	ε_z
5	x^2	$\varepsilon_{x,x}/2$	$(\gamma_{xy,x} - \varepsilon_{x,y})/2$	$(\gamma_{xz,x} - \varepsilon_{x,z})/2$
6	xy	$\varepsilon_{x,y}$	$\varepsilon_{y,x}$	$(-\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y})/2$
7	xz	$\varepsilon_{x,z}$	$(\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} - \gamma_{xz,y})/2$	$\varepsilon_{z,x}$
8	y^2	$(\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x})/2$	$\varepsilon_{y,y}/2$	$(\gamma_{yz,y} - \varepsilon_{y,z})/2$
9	yz	$(\gamma_{xy,z} - \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y})/2$	$\varepsilon_{y,z}$	$\varepsilon_{z,y}$
10	z^2	$(\gamma_{xz,z} - \varepsilon_{z,x})/2$	$(\gamma_{yz,z} - \varepsilon_{z,y})/2$	$\varepsilon_{z,z}/2$
11	x^3	$\varepsilon_{x,xx}/6$	$(\gamma_{xy,xx} - \varepsilon_{x,xy})/6$	$(\gamma_{xz,xx} - \varepsilon_{x,xz})/6$
12	x^2y	$\varepsilon_{x,xy}/2$	$\varepsilon_{y,xx}/2$	$(\gamma_{xz,xy} - \varepsilon_{x,yz})/2$
13	x^2z	$\varepsilon_{x,xz}/2$	$(\gamma_{xy,xz} - \varepsilon_{x,yz})/2$	$\varepsilon_{z,xx}/2$
14	y^3	$(\gamma_{xy,yy} - \varepsilon_{y,xy})/6$	$\varepsilon_{y,yy}/6$	$(\gamma_{yz,yy} - \varepsilon_{y,yz})/6$
15	xy^2	$\varepsilon_{x,yy}/2$	$\varepsilon_{y,xy}/2$	$(\gamma_{yz,xy} - \varepsilon_{y,xz})/2$
16	y^2z	$(\gamma_{xy,yz} - \varepsilon_{y,xz})/2$	$\varepsilon_{y,yz}/2$	$\varepsilon_{z,yy}/2$
17	z^3	$(\gamma_{xz,zz} - \varepsilon_{z,xz})/6$	$(\gamma_{yz,zz} - \varepsilon_{z,yz})/6$	$\varepsilon_{z,zz}/6$
18	xz^2	$\varepsilon_{x,zz}/2$	$(\gamma_{yz,xz} - \varepsilon_{z,xy})/2$	$\varepsilon_{z,xz}/2$
19	yz^2	$(\gamma_{xz,yz} - \varepsilon_{z,xy})/2$	$\varepsilon_{y,zz}/2$	$\varepsilon_{z,yz}/2$
20	xyz	$\varepsilon_{x,yz}$	$\varepsilon_{y,xz}$	$\varepsilon_{z,xy}$
21	x^4	$\varepsilon_{x,xxx}/24$	$(\gamma_{xy,xxx} - \varepsilon_{x,xxxy})/24$	$(\gamma_{xz,xxx} - \varepsilon_{x,xxxz})/24$
22	x^3y	$\varepsilon_{x,xxxy}/6$	$\varepsilon_{y,xxx}/6$	$(\gamma_{xz,xxxy} - \varepsilon_{x,xxyz})/6$
23	x^3z	$\varepsilon_{x,xxxz}/6$	$(\gamma_{xy,xxz} - \varepsilon_{x,xyz})/6$	$\varepsilon_{z,xxx}/6$
24	x^2y^2	$\varepsilon_{x,xyyy}/4$	$\varepsilon_{y,xxxy}/4$	$(\gamma_{xz,xyyy} - \varepsilon_{x,yyyz})/4$
25	x^2z^2	$\varepsilon_{x,xzzz}/4$	$(\gamma_{yz,xxz} - \varepsilon_{z,xxxy})/4$	$\varepsilon_{z,xxz}/4$
26	x^2yz	$\varepsilon_{x,xyz}/2$	$\varepsilon_{y,xxz}/2$	$\varepsilon_{z,xxxy}/2$
27	xy^3	$\varepsilon_{x,yyy}/6$	$\varepsilon_{y,xyy}/6$	$(\gamma_{yz,xyy} - \varepsilon_{y,xyyz})/6$
28	xz^3	$\varepsilon_{x,zzz}/6$	$(\gamma_{yz,xzz} - \varepsilon_{z,xyyz})/6$	$\varepsilon_{z,xzz}/6$
29	xy^2z	$\varepsilon_{x,yyz}/2$	$\varepsilon_{y,xyz}/2$	$\varepsilon_{z,xyy}/2$
30	xyz^2	$\varepsilon_{x,yzz}/2$	$\varepsilon_{y,xzz}/2$	$\varepsilon_{z,xyz}/2$
31	y^4	$(\gamma_{xy,yyyy} - \varepsilon_{y,xyyy})/24$	$\varepsilon_{y,yyy}/24$	$(\gamma_{yz,yyyy} - \varepsilon_{y,yyyz})/24$
32	y^3z	$(\gamma_{xy,yyz} - \varepsilon_{y,xyyz})/6$	$\varepsilon_{y,yyy}/6$	$\varepsilon_{z,yyy}/6$
33	y^2z^2	$(\gamma_{xy,yzz} - \varepsilon_{y,xzz})/4$	$\varepsilon_{y,yzz}/4$	$\varepsilon_{z,yyz}/4$
34	yz^3	$(\gamma_{xz,yzz} - \varepsilon_{z,xyyz})/6$	$\varepsilon_{y,zzz}/6$	$\varepsilon_{z,yzz}/6$
35	z^4	$(\gamma_{xz,zzz} - \varepsilon_{z,xzz})/24$	$(\gamma_{yz,zzz} - \varepsilon_{z,yzz})/24$	$\varepsilon_{z,zzz}/24$

Fonte: ABDALLA, J. E. *Qualitative and discretization error analysis of laminated composite plate models*.

Tese (Doutorado) – Faculty of the Graduate School of the University of Colorado, 1992 [2].

APÊNDICE B – Soluções Analíticas

B.1 Solução Analítica para Placas

Para o caso apresentado pela Fig. B.1, o deslocamento transversal máximo segundo Szilard [39] é dado por:

$$w(x, y) = \frac{4Q_0}{\pi^4 abD} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{m\pi\xi}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi\eta}{b}\right)}{\left[\left(\frac{m^2}{a^2}\right) + \left(\frac{n^2}{b^2}\right)\right]^2} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{B.1a})$$

onde,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (\text{B.1b})$$

Neste trabalho, m e n variaram de 1 até 71. Pois a partir deste valor, a tolerância obtida foi satisfatória.

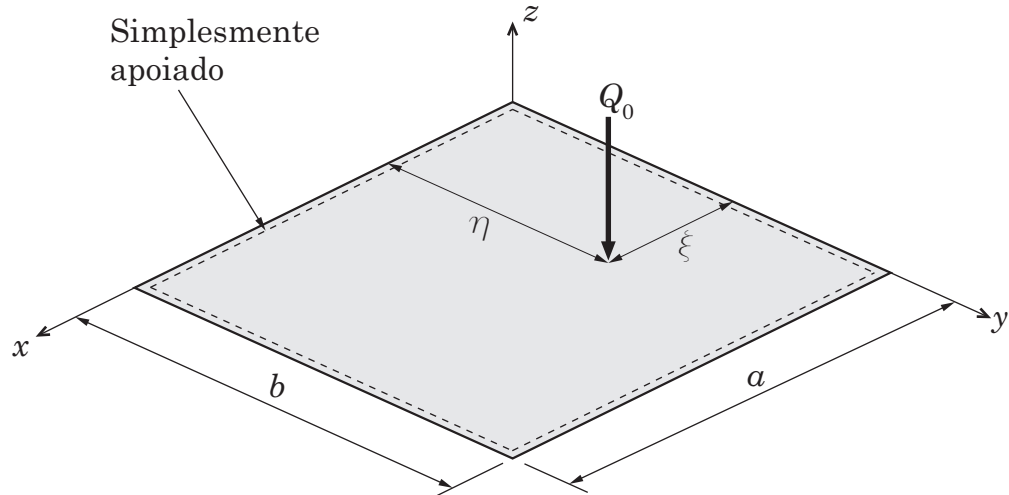


Figura B.1: Placa retangular simplesmente apoiada submetida ao carregamento concentrado.

A próxima solução analítica para os deslocamentos transversais máximos se refere ao caso apresentado pela Fig. B.2. Segundo Gruttmann [13], tal grandeza é dada por:

$$w_{centro} = \frac{q_0 a^4}{2Eh^3} [11 - 6\nu - \nu^2] \quad (\text{B.2})$$

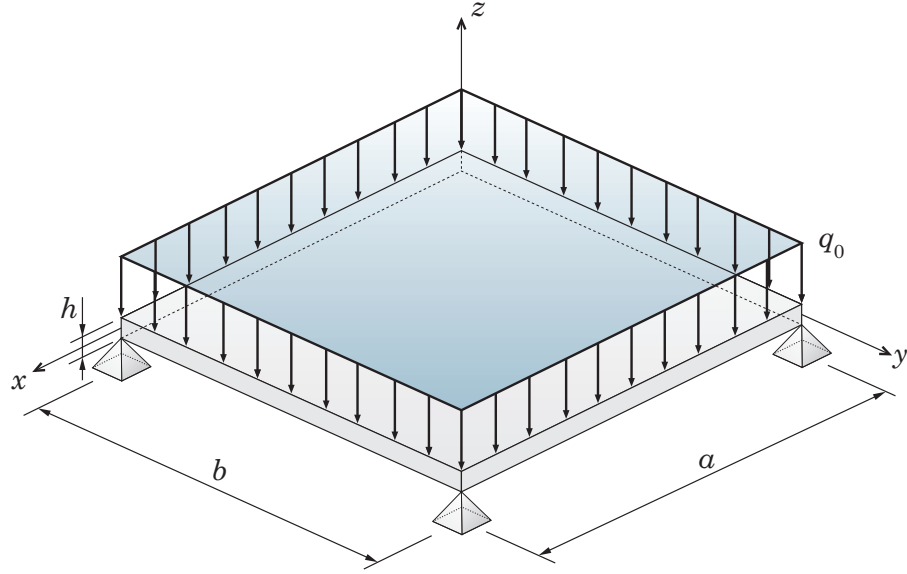


Figura B.2: Geometria da placa isotrópica simplesmente apoiada nos cantos submetida ao carregamento uniformemente distribuído.

B.2 Solução Analítica para Laminados via FSDT

Neste trabalho, foi escolhida como solução analítica a solução de Navier devido a sua aplicabilidade aos laminados retangulares simplesmente apoiados. Outras soluções consagradas, como a de Pagano, foram apenas citadas, pois tratam os casos de geometria e condições de contorno de maneira genérica.

B.2.1 Solução de Navier para Laminados Cruzados Simplesmente Apoiados (SS-1)

As condições de contorno SS-1 foram apresentadas pela Fig. 6.4 e são dadas pela teoria de primeira ordem de Mindlin por:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, 0) = 0, \quad \phi_x(x, 0) = 0, \quad u_0(x, b) = 0, \quad \phi_x(x, b) = 0 \\
 v_0(0, y) = 0, \quad \phi_y(0, y) = 0, \quad v_0(a, y) = 0, \quad \phi_y(a, y) = 0 \\
 w_0(x, 0) = 0, \quad w_0(x, b) = 0, \quad w_0(0, y) = 0, \quad w_0(a, y) = 0
 \end{aligned} \tag{B.3a}$$

$$\begin{aligned}
 N_{xx}(0, y) = 0, \quad N_{xx}(a, y) = 0, \quad N_{yy}(x, 0) = 0, \quad N_{yy}(x, b) = 0 \\
 M_{xx}(0, y) = 0, \quad M_{xx}(a, y) = 0, \quad M_{yy}(x, 0) = 0, \quad M_{yy}(x, b) = 0
 \end{aligned} \tag{B.3b}$$

As condições de contorno em (B.3) são satisfeitas por:

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \quad (\text{B.4a})$$

$$v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \quad (\text{B.4b})$$

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (\text{B.4c})$$

$$\phi_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \quad (\text{B.4d})$$

$$\phi_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \quad (\text{B.4e})$$

onde $\alpha = \frac{m\pi}{a}$ e $\beta = \frac{n\pi}{b}$.

O carregamento pode ser expandido numa série dupla de Fourier:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (\text{B.5})$$

onde,

$$Q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \alpha x \sin \beta y \, dx \, dy \quad (\text{B.6})$$

A Tab. B.1 apresenta os coeficientes de carga, Q_{mn} , para alguns casos especiais de carregamento.

Dessa forma, a solução de Navier para análise estática é obtida calculando os coeficientes (U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} e Y_{mn}) que serão utilizados para computar a solução (u_0 , v_0 , w_0 , ϕ_x e ϕ_y) da Eq. (B.4) através da matriz:

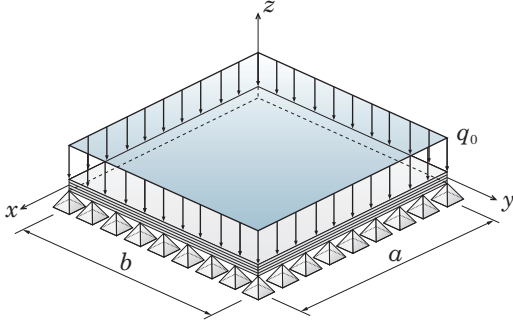
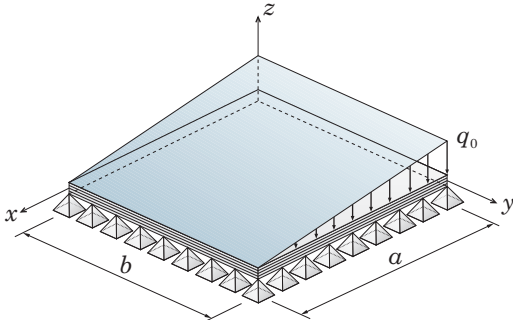
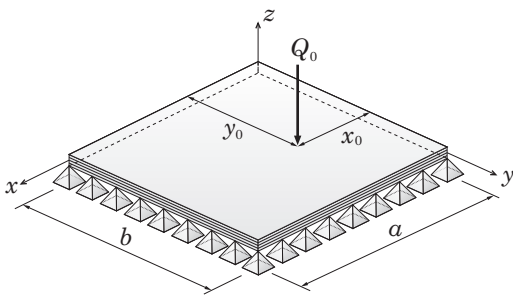
$$\begin{bmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & 0 & \hat{s}_{14} & \hat{s}_{15} \\ \hat{s}_{12} & \hat{s}_{22} & 0 & \hat{s}_{24} & \hat{s}_{25} \\ 0 & 0 & \hat{s}_{33} & \hat{s}_{34} & \hat{s}_{35} \\ \hat{s}_{14} & \hat{s}_{24} & \hat{s}_{34} & \hat{s}_{44} & \hat{s}_{45} \\ \hat{s}_{15} & \hat{s}_{25} & \hat{s}_{35} & \hat{s}_{45} & \hat{s}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.7a})$$

onde os termos $\hat{s}_{ij}$ são dados por:

$$\begin{aligned}
\hat{s}_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, & \hat{s}_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha\beta, & \hat{s}_{14} &= B_{11}\alpha^2 + B_{66}\beta^2 \\
\hat{s}_{15} &= (B_{12} + B_{66})\alpha\beta, & \hat{s}_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2, & \hat{s}_{24} &= \hat{s}_{15} \\
\hat{s}_{25} &= B_{66}\alpha^2 + B_{22}\beta^2, & \hat{s}_{33} &= K(A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2), & \hat{s}_{34} &= KA_{55}\alpha \\
\hat{s}_{35} &= KA_{44}\beta, & \hat{s}_{44} &= D_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 + KA_{55}, & \hat{s}_{45} &= (D_{12} + D_{66})\alpha\beta \\
\hat{s}_{55} &= D_{66}\alpha^2 + D_{22}\beta^2 + KA_{44}
\end{aligned} \tag{B.7b}$$

Deve-se lembrar que K é o fator de cisalhamento, e que os termos A_{ij} , B_{ij} e D_{ij} são obtidos pela Eq. (4.18b). A solução da Eq. (B.7a) pode ser adquirida empregando o

Tabela B.1: Coeficientes do carregamento dado pela expansão da série trigonométrica de Fourier empregando o método de Navier.

Carregamento $q(x, y)$	Coeficiente Q_{mn}
	$Q_{mn} = -\frac{16q_0}{\pi^2 mn}$ $(m, n = 1, 3, 5, \dots)$
	$Q_{mn} = -\frac{8q_0 \cos n\pi}{\pi^2 mn}$ $(m, n = 1, 3, 5, \dots)$
	$Q_{mn} = -\frac{4Q_0}{ab} \sin \alpha x_0 \sin \beta y_0$ $(m, n = 1, 2, 3, \dots)$

Fonte: *Theory and Analysis of Plates: Classical and Numerical Methods* [39].

método da condensação estática que consiste em dividir a matriz e os vetores dados por (B.7a) da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & [K^{12}] \\ [K^{12}]^T & [K^{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta^1\} \\ \{\Delta^2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\} \\ \{F^2\} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

onde,

$$\begin{Bmatrix} \Delta^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \Delta^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.9a})$$

$$[K^{11}] = \begin{bmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} \\ \hat{s}_{12} & \hat{s}_{22} \end{bmatrix}, \quad [K^{12}] = \begin{bmatrix} 0 & \hat{s}_{14} & \hat{s}_{15} \\ 0 & \hat{s}_{24} & \hat{s}_{25} \end{bmatrix}, \quad [K^{22}] = \begin{bmatrix} \hat{s}_{33} & \hat{s}_{34} & \hat{s}_{35} \\ \hat{s}_{34} & \hat{s}_{44} & \hat{s}_{45} \\ \hat{s}_{35} & \hat{s}_{45} & \hat{s}_{55} \end{bmatrix} \quad (\text{B.9b})$$

$$\begin{Bmatrix} F^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} F^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.9c})$$

A Eq. (B.8) representa o seguinte sistema:

$$[K^{11}] \{\Delta^1\} + [K^{12}] \{\Delta^2\} = \{F^1\} \quad (\text{B.10a})$$

$$[K^{12}]^T \{\Delta^1\} + [K^{22}] \{\Delta^2\} = \{F^2\} \quad (\text{B.10b})$$

Isolando $\{\Delta^1\}$ em (B.10a), tem-se:

$$\{\Delta^1\} = [K^{11}]^{-1} (\{F^1\} - [K^{12}] \{\Delta^2\}) \quad (\text{B.11})$$

e substituindo a Eq. (B.11) em (B.10b), vem:

$$([K^{22}] - [K^{12}]^T [K^{11}]^{-1} [K^{12}]) \{\Delta^2\} = \{F^2\} - [K^{12}]^T [K^{11}]^{-1} \{F^1\} \quad (\text{B.12a})$$

ou simplesmente,

$$[\hat{K}^{22}] \{\Delta^2\} = [\hat{F}^2] \quad (\text{B.12b})$$

onde,

$$[\hat{K}^{22}] = [K^{22}] - [K^{12}]^T [K^{11}]^{-1} [K^{12}] \quad (\text{B.12c})$$

$$[\hat{F}^2] = \{F^2\} - [K^{12}]^T [K^{11}]^{-1} \{F^1\} \quad (\text{B.12d})$$

Outra maneira de resolver a Eq. (B.7a) é utilizar a solução simbólica do pro-

grama computacional MATLAB[®]. De qualquer forma, ou resolvendo pelo método da condensação estática ou empregando o *software*, obtém-se:

$$U_{mn} = (-\hat{s}_{22}\hat{s}_{15}\hat{s}_{44}\hat{s}_{35} - \hat{s}_{22}\hat{s}_{55}\hat{s}_{14}\hat{s}_{34} + \hat{s}_{22}\hat{s}_{15}\hat{s}_{34}\hat{s}_{45} + \hat{s}_{22}\hat{s}_{14}\hat{s}_{45}\hat{s}_{35} \\ + \hat{s}_{12}\hat{s}_{25}\hat{s}_{35}\hat{s}_{44} + \hat{s}_{55}\hat{s}_{12}\hat{s}_{24}\hat{s}_{34} - \hat{s}_{14}\hat{s}_{24}\hat{s}_{25}\hat{s}_{35} - \hat{s}_{15}\hat{s}_{34}\hat{s}_{24}\hat{s}_{25} \\ - \hat{s}_{12}\hat{s}_{24}\hat{s}_{45}\hat{s}_{35} + \hat{s}_{14}\hat{s}_{34}\hat{s}_{25}^2 - \hat{s}_{12}\hat{s}_{25}\hat{s}_{34}\hat{s}_{45} + \hat{s}_{15}\hat{s}_{24}^2\hat{s}_{35}) \times (-Q_{mn})/b_{mn} \quad (\text{B.13a})$$

$$V_{mn} = (\hat{s}_{11}\hat{s}_{25}\hat{s}_{44}\hat{s}_{35} + \hat{s}_{11}\hat{s}_{55}\hat{s}_{24}\hat{s}_{34} - \hat{s}_{11}\hat{s}_{24}\hat{s}_{35}\hat{s}_{45} - \hat{s}_{11}\hat{s}_{25}\hat{s}_{45}\hat{s}_{34} \\ - \hat{s}_{12}\hat{s}_{15}\hat{s}_{35}\hat{s}_{44} + \hat{s}_{25}\hat{s}_{34}\hat{s}_{14}\hat{s}_{15} + \hat{s}_{12}\hat{s}_{14}\hat{s}_{45}\hat{s}_{35} + \hat{s}_{12}\hat{s}_{15}\hat{s}_{34}\hat{s}_{45} \\ + \hat{s}_{24}\hat{s}_{14}\hat{s}_{15}\hat{s}_{35} - \hat{s}_{55}\hat{s}_{12}\hat{s}_{14}\hat{s}_{34} - \hat{s}_{24}\hat{s}_{15}^2\hat{s}_{34} - \hat{s}_{25}\hat{s}_{14}^2\hat{s}_{35}) \times Q_{mn}/b_{mn} \quad (\text{B.13b})$$

$$W_{mn} = (\hat{s}_{11}\hat{s}_{22}\hat{s}_{44}\hat{s}_{55} - \hat{s}_{11}\hat{s}_{22}\hat{s}_{45}^2 - \hat{s}_{11}\hat{s}_{44}\hat{s}_{25}^2 - \hat{s}_{11}\hat{s}_{55}\hat{s}_{24}^2 + 2\hat{s}_{11}\hat{s}_{45}\hat{s}_{24}\hat{s}_{25} \\ - \hat{s}_{22}\hat{s}_{44}\hat{s}_{15}^2 - \hat{s}_{22}\hat{s}_{55}\hat{s}_{14}^2 + 2\hat{s}_{22}\hat{s}_{45}\hat{s}_{14}\hat{s}_{15} - \hat{s}_{44}\hat{s}_{55}\hat{s}_{12}^2 + 2\hat{s}_{44}\hat{s}_{25}\hat{s}_{12}\hat{s}_{15} \\ - 2\hat{s}_{24}\hat{s}_{25}\hat{s}_{14}\hat{s}_{15} + \hat{s}_{45}^2\hat{s}_{12}^2 - 2\hat{s}_{45}\hat{s}_{24}\hat{s}_{12}\hat{s}_{15} - 2\hat{s}_{45}\hat{s}_{12}\hat{s}_{14}\hat{s}_{25} + \hat{s}_{14}^2\hat{s}_{25}^2 \\ + 2\hat{s}_{24}\hat{s}_{12}\hat{s}_{14}\hat{s}_{55} + \hat{s}_{24}^2\hat{s}_{15}^2) \times Q_{mn}/b_{mn} \quad (\text{B.13c})$$

$$X_{mn} = (-\hat{s}_{11}\hat{s}_{22}\hat{s}_{55}\hat{s}_{34} + \hat{s}_{11}\hat{s}_{22}\hat{s}_{35}\hat{s}_{45} - \hat{s}_{11}\hat{s}_{35}\hat{s}_{24}\hat{s}_{25} + \hat{s}_{22}\hat{s}_{15}^2\hat{s}_{34} \\ - \hat{s}_{22}\hat{s}_{35}\hat{s}_{14}\hat{s}_{15} - 2\hat{s}_{25}\hat{s}_{12}\hat{s}_{15}\hat{s}_{34} + \hat{s}_{35}\hat{s}_{24}\hat{s}_{12}\hat{s}_{15} + \hat{s}_{12}^2\hat{s}_{55}\hat{s}_{34} \\ + \hat{s}_{35}\hat{s}_{12}\hat{s}_{14}\hat{s}_{25} + \hat{s}_{11}\hat{s}_{25}^2\hat{s}_{34} - \hat{s}_{35}\hat{s}_{12}^2\hat{s}_{45}) \times Q_{mn}/b_{mn} \quad (\text{B.13d})$$

$$Y_{mn} = (\hat{s}_{11}\hat{s}_{22}\hat{s}_{44}\hat{s}_{35} - \hat{s}_{11}\hat{s}_{22}\hat{s}_{34}\hat{s}_{45} + \hat{s}_{11}\hat{s}_{34}\hat{s}_{24}\hat{s}_{25} - \hat{s}_{34}\hat{s}_{24}\hat{s}_{11}\hat{s}_{15} \\ + \hat{s}_{22}\hat{s}_{34}\hat{s}_{14}\hat{s}_{15} - \hat{s}_{22}\hat{s}_{14}^2\hat{s}_{35} + 2\hat{s}_{24}\hat{s}_{12}\hat{s}_{14}\hat{s}_{35} - \hat{s}_{34}\hat{s}_{12}\hat{s}_{14}\hat{s}_{25} \\ - \hat{s}_{11}\hat{s}_{24}^2\hat{s}_{35} - \hat{s}_{44}\hat{s}_{35}\hat{s}_{12}^2 + \hat{s}_{34}\hat{s}_{14}^2\hat{s}_{45}) \times (-Q_{mn})/b_{mn} \quad (\text{B.13e})$$

onde,

$$b_{mn} = \hat{s}_{33}\hat{s}_{45}^2\hat{s}_{12}^2 + \hat{s}_{33}\hat{s}_{14}^2\hat{s}_{25}^2 + \hat{s}_{11}\hat{s}_{34}^2\hat{s}_{25}^2 + \hat{s}_{11}\hat{s}_{24}^2\hat{s}_{35}^2 + \hat{s}_{33}\hat{s}_{24}^2\hat{s}_{15}^2 + \hat{s}_{22}\hat{s}_{14}^2\hat{s}_{35}^2 \\ + \hat{s}_{44}\hat{s}_{35}^2\hat{s}_{12}^2 + \hat{s}_{22}\hat{s}_{34}^2\hat{s}_{15}^2 + \hat{s}_{55}\hat{s}_{34}^2\hat{s}_{12}^2 - 2\hat{s}_{34}^2\hat{s}_{25}\hat{s}_{12}\hat{s}_{15} - 2\hat{s}_{12}^2\hat{s}_{45}\hat{s}_{34}\hat{s}_{35} \\ - 2\hat{s}_{35}^2\hat{s}_{24}\hat{s}_{12}\hat{s}_{14} - \hat{s}_{15}^2\hat{s}_{22}\hat{s}_{33}\hat{s}_{44} - \hat{s}_{14}^2\hat{s}_{22}\hat{s}_{33}\hat{s}_{55} - \hat{s}_{45}^2\hat{s}_{11}\hat{s}_{22}\hat{s}_{33} - \hat{s}_{34}^2\hat{s}_{11}\hat{s}_{22}\hat{s}_{55} \\ - \hat{s}_{35}^2\hat{s}_{11}\hat{s}_{22}\hat{s}_{44} - \hat{s}_{25}^2\hat{s}_{11}\hat{s}_{33}\hat{s}_{44} - \hat{s}_{24}^2\hat{s}_{11}\hat{s}_{33}\hat{s}_{55} + 2\hat{s}_{34}\hat{s}_{35}\hat{s}_{24}\hat{s}_{12}\hat{s}_{15} \\ + 2\hat{s}_{34}\hat{s}_{35}\hat{s}_{12}\hat{s}_{14}\hat{s}_{25} - 2\hat{s}_{33}\hat{s}_{45}\hat{s}_{24}\hat{s}_{12}\hat{s}_{15} - \hat{s}_{12}^2\hat{s}_{33}\hat{s}_{44}\hat{s}_{55} - 2\hat{s}_{33}\hat{s}_{24}\hat{s}_{25}\hat{s}_{14}\hat{s}_{15} \\ + 2\hat{s}_{33}\hat{s}_{24}\hat{s}_{12}\hat{s}_{14}\hat{s}_{55} + 2\hat{s}_{33}\hat{s}_{44}\hat{s}_{25}\hat{s}_{12}\hat{s}_{15} - 2\hat{s}_{33}\hat{s}_{45}\hat{s}_{12}\hat{s}_{14}\hat{s}_{25} + 2\hat{s}_{22}\hat{s}_{33}\hat{s}_{45}\hat{s}_{14}\hat{s}_{15} \\ - 2\hat{s}_{22}\hat{s}_{34}\hat{s}_{35}\hat{s}_{14}\hat{s}_{15} + \hat{s}_{11}\hat{s}_{22}\hat{s}_{33}\hat{s}_{44}\hat{s}_{55} + 2\hat{s}_{11}\hat{s}_{22}\hat{s}_{45}\hat{s}_{34}\hat{s}_{35} \\ + 2\hat{s}_{11}\hat{s}_{33}\hat{s}_{45}\hat{s}_{24}\hat{s}_{25} - 2\hat{s}_{11}\hat{s}_{34}\hat{s}_{35}\hat{s}_{24}\hat{s}_{25} \quad (\text{B.13f})$$

Substituindo os valores encontrados em (B.13) na Eq. (B.4), obtém-se os deslocamentos generalizados (u_0 , v_0 , w_0 , ϕ_x e ϕ_y). Neste trabalho, o duplo somatório foi resolvido

fazendo $m, n = 1, 3, 5, \dots, 21$.

A solução de Navier para laminados cruzados utilizando a FSDT existe somente se $A_{16} = 0$, $A_{26} = 0$, $A_{45} = 0$, $B_{16} = 0$, $B_{26} = 0$, $D_{16} = 0$ e $D_{26} = 0$. Isso implica em $\bar{Q}_{16} = \bar{Q}_{26} = \bar{Q}_{45} = 0$. Dessa forma, as tensões normais e cisalhantes no plano em cada lâmina são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} (R_{mn}^{xx} + zS_{mn}^{xx}) \sin \alpha x \sin \beta y \\ (R_{mn}^{yy} + zS_{mn}^{yy}) \sin \alpha x \sin \beta y \\ (R_{mn}^{xy} + zS_{mn}^{xy}) \cos \alpha x \cos \beta y \end{Bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

onde,

$$\begin{Bmatrix} R_{mn}^{xx} \\ R_{mn}^{yy} \\ R_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha U_{mn} \\ -\beta V_{mn} \\ \beta U_{mn} + \alpha V_{mn} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{mn}^{xx} \\ S_{mn}^{yy} \\ S_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha X_{mn} \\ -\beta Y_{mn} \\ \beta X_{mn} + \alpha Y_{mn} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Empregando as relações constitutivas, as tensões cisalhantes transversais serão dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} (Y_{mn} + \beta W_{mn}) \sin \alpha x \cos \beta y \\ (X_{mn} + \alpha W_{mn}) \cos \alpha x \sin \beta y \end{Bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Portanto, desenvolvendo as Eqs. (B.14), (B.15) e (B.16), têm-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha U_{mn} + \bar{Q}_{12}^{(k)} \beta V_{mn}) \sin \alpha x \sin \beta y \\ &\quad - z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha X_{mn} + \bar{Q}_{12}^{(k)} \beta Y_{mn}) \sin \alpha x \sin \beta y \end{aligned} \quad (\text{B.17a})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{Q}_{12}^{(k)} \alpha U_{mn} + \bar{Q}_{22}^{(k)} \beta V_{mn}) \sin \alpha x \sin \beta y \\ &\quad - z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{Q}_{12}^{(k)} \alpha X_{mn} + \bar{Q}_{22}^{(k)} \beta Y_{mn}) \sin \alpha x \sin \beta y \end{aligned} \quad (\text{B.17b})$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{66}^{(k)} (\beta U_{mn} + \alpha V_{mn}) \cos \alpha x \cos \beta y \\ &\quad + z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{66}^{(k)} (\beta X_{mn} + \alpha Y_{mn}) \cos \alpha x \cos \beta y \end{aligned} \quad (\text{B.17c})$$

$$\tau_{yz}^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{44}^{(k)} (Y_{mn} + \beta W_{mn}) \sin \alpha x \cos \beta y \quad (\text{B.17d})$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{55}^{(k)} (X_{mn} + \beta W_{mn}) \cos \alpha x \sin \beta y \quad (\text{B.17e})$$

B.2.2 Solução de Navier para Laminados Angulares Simplesmente Apoiados (SS-2)

Segundo a teoria de primeira ordem de Mindlin, as condições de contorno SS-2 (Fig. 6.29) para os deslocamentos generalizados e resultantes de tensão e momento são dadas por:

$$\begin{aligned} u_0(0, y) = 0, \quad \phi_x(x, 0) = 0, \quad u_0(a, y) = 0, \quad \phi_x(x, b) = 0 \\ v_0(x, 0) = 0, \quad \phi_y(0, y) = 0, \quad v_0(x, b) = 0, \quad \phi_y(a, y) = 0 \\ w_0(x, 0) = 0, \quad w_0(x, b) = 0, \quad w_0(0, y) = 0, \quad w_0(a, y) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.18a})$$

$$\begin{aligned} N_{xy}(0, y) = 0, \quad N_{xy}(a, y) = 0, \quad N_{xy}(x, 0) = 0, \quad N_{xy}(x, b) = 0 \\ M_{xx}(0, y) = 0, \quad M_{xx}(a, y) = 0, \quad M_{yy}(x, 0) = 0, \quad M_{yy}(x, b) = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.18b})$$

A Eq. (B.18) é satisfeita por:

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \quad (\text{B.19a})$$

$$v_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \quad (\text{B.19b})$$

$$w_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \alpha x \sin \beta y \quad (\text{B.19c})$$

$$\phi_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \alpha x \sin \beta y \quad (\text{B.19d})$$

$$\phi_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \alpha x \cos \beta y \quad (\text{B.19e})$$

Para determinar os coeficientes U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} e Y_{mn} , utiliza-se a Eq. (B.13). Entretanto, os termos $\hat{s}_{ij}$ não são os mesmos apresentados por (B.7b), e sim:

$$\begin{aligned} \hat{s}_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, & \hat{s}_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha\beta, & \hat{s}_{14} &= 2B_{16}\alpha\beta \\ \hat{s}_{15} &= B_{16}\alpha^2 + B_{26}\beta^2, & \hat{s}_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2, & \hat{s}_{24} &= \hat{s}_{15} \\ \hat{s}_{25} &= 2B_{26}\alpha\beta, & \hat{s}_{33} &= K(A_{55}\alpha^2 + A_{44}\beta^2), & \hat{s}_{34} &= KA_{55}\alpha \\ \hat{s}_{35} &= KA_{44}\beta, & \hat{s}_{44} &= D_{11}\alpha^2 + D_{66}\beta^2 + KA_{55}, & \hat{s}_{45} &= (D_{12} + D_{66})\alpha\beta \\ \hat{s}_{55} &= D_{66}\alpha^2 + D_{22}\beta^2 + KA_{44} \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Nos laminados angulares, ocorre acoplamento entre os modos de deformação. Com isso, as tensões normais e cisalhantes no plano são obtidas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} (R_{mn}^{xx} g_{mn} + z S_{mn}^{xx} f_{mn}) \\ (R_{mn}^{yy} g_{mn} + z S_{mn}^{yy} f_{mn}) \\ (R_{mn}^{xy} f_{mn} + z S_{mn}^{xy} g_{mn}) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

onde,

$$\begin{Bmatrix} R_{mn}^{xx} \\ R_{mn}^{yy} \\ R_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha U_{mn} \\ \beta V_{mn} \\ -(\beta U_{mn} + \alpha V_{mn}) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{mn}^{xx} \\ S_{mn}^{yy} \\ S_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha X_{mn} \\ \beta Y_{mn} \\ -(\beta X_{mn} + \alpha Y_{mn}) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

e,

$$f_{mn} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{e} \quad g_{mn} = \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (\text{B.23})$$

As tensões cisalhantes transversais provenientes das relações constitutivas são dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} (Y_{mn} + \beta W_{mn}) \sin \alpha x \cos \beta y \\ (X_{mn} + \alpha W_{mn}) \cos \alpha x \sin \beta y \end{Bmatrix} \quad (\text{B.24})$$

Dessa forma, desenvolvendo e manipulando as Eqs. (B.22) – (B.24), chega-se à:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha U_{mn} g_{mn} + \bar{Q}_{12}^{(k)} \beta V_{mn} g_{mn} - \bar{Q}_{16}^{(k)} (\beta U_{mn} + \alpha V_{mn}) f_{mn} \right] \\ &\quad - z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha U_{mn} f_{mn} + \bar{Q}_{12}^{(k)} \beta V_{mn} f_{mn} - \bar{Q}_{16}^{(k)} (\beta U_{mn} + \alpha V_{mn}) g_{mn} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.25a})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{Q}_{12}^{(k)} \alpha U_{mn} g_{mn} + \bar{Q}_{22}^{(k)} \beta V_{mn} g_{mn} - \bar{Q}_{26}^{(k)} (\beta U_{mn} + \alpha V_{mn}) f_{mn} \right] \\ &\quad - z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{Q}_{12}^{(k)} \alpha U_{mn} f_{mn} + \bar{Q}_{22}^{(k)} \beta V_{mn} f_{mn} - \bar{Q}_{26}^{(k)} (\beta U_{mn} + \alpha V_{mn}) g_{mn} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.25b})$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(k)} &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{Q}_{16}^{(k)} \alpha U_{mn} g_{mn} + \bar{Q}_{26}^{(k)} \beta V_{mn} g_{mn} - \bar{Q}_{66}^{(k)} (\beta U_{mn} + \alpha V_{mn}) f_{mn} \right] \\ &\quad - z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{Q}_{16}^{(k)} \alpha U_{mn} f_{mn} + \bar{Q}_{26}^{(k)} \beta V_{mn} f_{mn} - \bar{Q}_{66}^{(k)} (\beta U_{mn} + \alpha V_{mn}) g_{mn} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.25c})$$

$$\tau_{yz}^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{Q}_{44}^{(k)} (Y_{mn} + \beta W_{mn}) \sin \alpha x \cos \beta y + \bar{Q}_{45}^{(k)} (X_{mn} + \alpha W_{mn}) \cos \alpha x \sin \beta y \right] \quad (\text{B.25d})$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{Q}_{45}^{(k)} (Y_{mn} + \beta W_{mn}) \sin \alpha x \cos \beta y + \bar{Q}_{55}^{(k)} (X_{mn} + \beta W_{mn}) \cos \alpha x \sin \beta y \right] \quad (\text{B.25e})$$

B.3 Solução Analítica para Laminados via HSDT

Para solução analítica de ordem superior, a implementação foi realizada apenas para os laminados cruzados simplesmente apoiados (SS-1). Com isso, as condições de contorno são as mesmas que as apresentadas pela Eq. (B.3). Portanto, os deslocamentos generalizados são os mesmos que os computados por (B.4).

Comparando com a Eq. (B.7a), a solução de Navier empregando a teoria de ordem superior de Reddy é obtida através da resolução da matriz:

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & \hat{s}_{13} & \hat{s}_{14} & \hat{s}_{15} \\ \hat{s}_{12} & \hat{s}_{22} & \hat{s}_{23} & \hat{s}_{24} & \hat{s}_{25} \\ \hat{s}_{13} & \hat{s}_{23} & \hat{s}_{33} & \hat{s}_{34} & \hat{s}_{35} \\ \hat{s}_{14} & \hat{s}_{24} & \hat{s}_{34} & \hat{s}_{44} & \hat{s}_{45} \\ \hat{s}_{15} & \hat{s}_{25} & \hat{s}_{35} & \hat{s}_{45} & \hat{s}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.26a})$$

Neste caso, os termos $\hat{s}_{ij}$ são dados por:

$$\begin{aligned} \hat{s}_{11} &= A_{11}\alpha^2 + A_{66}\beta^2, & \hat{s}_{12} &= (A_{12} + A_{66})\alpha\beta \\ \hat{s}_{13} &= -c_1 [E_{11}\alpha^2 + (E_{12} + 2E_{66})\beta^2]\alpha, & \hat{s}_{14} &= \hat{B}_{11}\alpha^2 + \hat{B}_{66}\beta^2 \\ \hat{s}_{15} &= (\hat{B}_{12} + \hat{B}_{66})\alpha\beta, & \hat{s}_{22} &= A_{66}\alpha^2 + A_{22}\beta^2, & \hat{s}_{24} &= \hat{s}_{15} \\ \hat{s}_{23} &= -c_1 [E_{22}\beta^2 + (E_{12} + 2E_{66})\alpha^2]\beta, & \hat{s}_{25} &= \hat{B}_{66}\alpha^2 + \hat{B}_{22}\beta^2 \\ \hat{s}_{33} &= \bar{A}_{55}\alpha^2 + \bar{A}_{44}\beta^2 + c_1^2 [H_{11}\alpha^4 + 2(H_{12} + 2H_{66})\alpha^2\beta^2 + H_{22}\beta^4] \\ \hat{s}_{34} &= \bar{A}_{55}\alpha - c_1 [\hat{F}_{11}\alpha^3 + (\hat{F}_{12} + 2\hat{F}_{66})\alpha\beta^2] \\ \hat{s}_{35} &= \bar{A}_{44}\beta - c_1 [\hat{F}_{22}\beta^3 + (\hat{F}_{12} + 2\hat{F}_{66})\alpha^2\beta] \\ \hat{s}_{44} &= \bar{A}_{55} + \bar{D}_{11}\alpha^2 + \bar{D}_{66}\beta^2, & \hat{s}_{45} &= (\bar{D}_{12} + \bar{D}_{66})\alpha\beta \\ \hat{s}_{55} &= \bar{A}_{44} + \bar{D}_{66}\alpha^2 + \bar{D}_{22}\beta^2 \end{aligned} \quad (\text{B.26b})$$

onde,

$$\bar{A}_{ij} = A_{ij} - 2c_2 D_{ij} + c_2^2 F_{ij} \quad (\text{B.26c})$$

$$\hat{B}_{ij} = B_{ij} - c_1 E_{ij} \quad (\text{B.26d})$$

$$\bar{D}_{ij} = D_{ij} - 2c_1 F_{ij} + c_1^2 H_{ij} \quad (\text{B.26e})$$

$$\hat{F}_{ij} = F_{ij} - c_1 H_{ij} \quad (\text{B.26f})$$

Na Eq. (B.26c) os valores de i e j valem 4 e 5; enquanto que para as partes (d), (e) e (f) os mesmos são avaliados em $i, j = 1, 2, 6$ e ainda,

$$c_1 = \frac{4}{3h^2} \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{4}{h^2} \quad (\text{B.26g})$$

Por se tratar de uma matriz 5×5 completa, a determinação dos coeficientes U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} , X_{mn} e Y_{mn} é feita empregando a solução simbólica do programa computacional MATLAB[®] na Eq. (B.26a). Entretanto, o exemplo estudado no item 6.2.2 pode ser simplificado devido à sua simetria. Com isso, os termos $\hat{s}_{11}$, $\hat{s}_{12}$, $\hat{s}_{13}$, $\hat{s}_{14}$, $\hat{s}_{15}$, $\hat{s}_{22}$, $\hat{s}_{23}$, $\hat{s}_{24}$ e $\hat{s}_{25}$ são todos nulos. Isso implica na nulidade dos coeficientes U_{mn} e V_{mn} . Dessa forma, a solução analítica fica bastante simplificada, resultando em:

$$W_{mn} = \frac{Q_{mn}}{b_{mn}} \quad (\text{B.27a})$$

$$X_{mn} = \frac{b_1}{b_0} W_{mn} \quad (\text{B.27b})$$

$$Y_{mn} = \frac{b_2}{b_0} W_{mn} \quad (\text{B.27c})$$

onde,

$$\begin{aligned} b_{mn} &= \hat{s}_{33} + \hat{s}_{34} \frac{b_1}{b_0} + \hat{s}_{35} \frac{b_2}{b_0}, & b_0 &= \hat{s}_{44} \hat{s}_{55} - \hat{s}_{45}^2 \\ b_1 &= \hat{s}_{45} \hat{s}_{35} - \hat{s}_{34} \hat{s}_{55}, & b_2 &= \hat{s}_{34} \hat{s}_{45} - \hat{s}_{44} \hat{s}_{35} \end{aligned} \quad (\text{B.27d})$$

A solução de Navier para laminados cruzados utilizando a HSDT existe somente se A_{16} , A_{26} , A_{45} , B_{16} , B_{26} , D_{16} , D_{26} , D_{45} , E_{16} , E_{26} , F_{16} , F_{26} , F_{45} , H_{16} e H_{26} forem nulos. Portanto, as tensões no plano serão dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} (zS_{mn}^{xx} + c_1 z^3 T_{mn}^{xx}) \sin \alpha x \sin \beta y \\ (zS_{mn}^{yy} + c_1 z^3 T_{mn}^{yy}) \sin \alpha x \sin \beta y \\ (zS_{mn}^{xy} + c_1 z^3 T_{mn}^{xy}) \cos \alpha x \cos \beta y \end{Bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

onde,

$$\begin{Bmatrix} S_{mn}^{xx} \\ S_{mn}^{yy} \\ S_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\alpha X_{mn} \\ -\beta Y_{mn} \\ \beta X_{mn} + \alpha Y_{mn} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} T_{mn}^{xx} \\ T_{mn}^{yy} \\ T_{mn}^{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha X_{mn} + \alpha^2 W_{mn} \\ \beta Y_{mn} + \beta^2 W_{mn} \\ -(\beta X_{mn} + \alpha Y_{mn} + 2\alpha\beta W_{mn}) \end{Bmatrix} \quad (\text{B.29})$$

As tensões cisalhantes transversais empregando as relações constitutivas do material serão dadas por:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = (1 - c_2 z^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} (Y_{mn} + \beta W_{mn}) \sin \alpha x \cos \beta y \\ (X_{mn} + \alpha W_{mn}) \cos \alpha x \sin \beta y \end{Bmatrix} \quad (\text{B.30})$$

Portanto, rearranjando os termos das Eqs. (B.28), (B.29) e (B.30), têm-se:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}^{(k)} = & -z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{Q}_{11}^{(k)} \alpha X_{mn} + \bar{Q}_{12}^{(k)} \beta Y_{mn}) \sin \alpha x \sin \beta \\ & + c_1 z^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{Q}_{11}^{(k)} (\alpha X_{mn} + \alpha^2 W_{mn}) + \bar{Q}_{12}^{(k)} (\beta Y_{mn} + \beta^2 Y_{mn}) \right] \sin \alpha x \sin \beta y \end{aligned} \quad (\text{B.31a})$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^{(k)} = & -z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{Q}_{12}^{(k)} \alpha X_{mn} + \bar{Q}_{22}^{(k)} \beta Y_{mn}) \sin \alpha x \sin \beta \\ & + c_1 z^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{Q}_{12}^{(k)} (\alpha X_{mn} + \alpha^2 W_{mn}) + \bar{Q}_{22}^{(k)} (\beta Y_{mn} + \beta^2 Y_{mn}) \right] \sin \alpha x \sin \beta y \end{aligned} \quad (\text{B.31b})$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(k)} = & z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{66}^{(k)} (\beta X_{mn} + \alpha Y_{mn}) \cos \alpha x \cos \beta \\ & - c_1 z^3 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\bar{Q}_{66}^{(k)} (\beta X_{mn} + \alpha Y_{mn}) + 2\alpha\beta W_{mn} \right] \cos \alpha x \cos \beta y \end{aligned} \quad (\text{B.31c})$$

$$\tau_{yz}^{(k)} = (1 - c_2) z^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{44}^{(k)} (Y_{mn} + \beta W_{mn}) \sin \alpha x \cos \beta \quad (\text{B.31d})$$

$$\tau_{xz}^{(k)} = (1 - c_2) z^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{55}^{(k)} (X_{mn} + \alpha W_{mn}) \cos \alpha x \sin \beta \quad (\text{B.31e})$$