

**HSU YANG SHANG**

**INTRODUÇÃO DE FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSOES NA ANÁLISE NÃO  
LINEAR VIA MEF DE SISTEMAS DE DUTOS CORROÍDOS**

**Curitiba  
2009**

**HSU YANG SHANG**

**INTRODUÇÃO DE FATORES DE CONCENTRAÇÃO DE TENSOES NA ANÁLISE NÃO  
LINEAR VIA MEF DE SISTEMA DE DUTOS CORROÍDOS**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, CCET, Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Orientador: Roberto Dalledone Machado,  
D. Eng

**Curitiba**

**2009**

## DEDICATÓRIA

Dedico aos meus pais, a minha irmã  
e a minha namorada

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus, criador meu Senhor.

Aos meus familiares, pelo apoio e amor, que são indescritíveis pelas palavras.

Ao professor Roberto Dalledone Machado, pela orientação, amizade e companheirismo.

Ao professor João Abdalla, pelas sugestões e ensinamentos que ajudaram no desenvolvimento deste trabalho.

Aos todos os professores da PUC, pelo carinho e ensinamento.

À minha namorada Gleice, pelo amor e apoio durante este importante passo da minha vida.

Aos meus amigos Daniel, Shel, David e Helena, pela amizade.

Aos meus amigos, Luis, Lincoln, Maria, Marçal e Wagner Caron, pela amizade e correção incessante nos meus erros de português.

À dona Jane, pela amizade e carinho.

À PUCPR, pela oportunidade de desenvolver trabalho de mestrado.

## SUMÁRIO

Lista de figuras.....	VII
Lista de tabelas.....	XI
Lista de símbolos.....	XII
Resumo.....	XVII
Abstract.....	XVIII
<b>1. INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 MOTIVAÇÃO.....	3
1.2 REVISÕES BIBLIOGRÁFICAS.....	7
1.3 OBJETIVOS.....	16
1.3.1 Geral.....	16
1.3.2 Específicos.....	16
1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	17
<b>2. CORROSÃO.....</b>	<b>18</b>
2.1 MECANISMO BÁSICO.....	18
2.2 MEIOS CORROSIVOS.....	19
2.2.1 Atmosfera.....	20
2.2.2 Água natural.....	21
2.2.3 Solo.....	21
2.3 FORMAS DE CORROSÃO.....	23
<b>3. MECÂNICA DO CONTÍNUO.....</b>	<b>26</b>
3.1 GRADIENTE E TENSOR DE DEFORMAÇÃO.....	28
3.2 TENSOR DE PIOLA-KIRCHHOFF.....	31
3.3 PLASTICIDADE.....	32
<b>4. FORMULAÇÃO DE ELEMENTO DE VIGA DE BERNOULLI-EULER PARA ANÁLISE DE DUTOS.....</b>	<b>38</b>
4.1 RELAÇÃO DEFORMAÇÃO – DESLOCAMENTO.....	40
4.2 DEFORMAÇÃO DO SOLO.....	43
4.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA RIGIDEZ DE SOLO.....	45
4.4 EQUAÇÃO DOS TRABALHOS VIRTUAIS.....	46
4.5 RELAÇÃO INCREMENTAL TENSÃO-DEFORMAÇÃO.....	50
4.6 EQUAÇÃO DE LAMÉ PARA SOLUÇÃO GERAL DE CILINDRO PRESSURIZADO.....	52
<b>5. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DO DUTO.....</b>	<b>57</b>
5.1 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE PÓRTICO TRIDIMENSIONAL.....	58
5.2 MATRIZES DE DEFORMAÇÃO – DESLOCAMENTO.....	62
5.3 MATRIZ DE ROTAÇÃO.....	65
5.4 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA O ELEMENTO FINITO.....	67
5.5 INTEGRAÇÃO POLAR.....	70
5.6 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.....	71
5.7 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA.....	76
<b>6. ESTUDO DO FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES.....</b>	<b>78</b>
6.1 ANÁLISE LOCAL DE DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO PARA DEFEITO SEMICIRCULAR UNIFORME EM DUTO.....	83

(a) Pressão Interna.....	83
(b) Carregamento de tração .....	87
6.2 ESTUDO DE DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO DE DUTO COM DEFEITO RETANGULAR.....	90
6.3 FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES PARA TRAÇÃO APÓS A PLASTIFICAÇÃO DO MATERIAL.....	95
6.4 FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES PARA PRESSÃO APÓS A PLASTIFICAÇÃO.....	101
6.5 APLICAÇÃO DO FCT NA EQUAÇÃO DE TRABALHO VIRTUAL – MÉTODO DE COMPENSAÇÃO DE TENSÕES.....	103
6.6 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DO MÉTODO COMPENSAÇÃO DE TENSÕES NO PROGRAMA APC3D.....	106
7. APLICAÇÕES.....	113
7.1 EXEMPLO 1 – ANÁLISE NÃO LINEAR DE UMA VIGA EM BALANÇO.....	113
7.2 EXEMPLO 2 – ANÁLISE NÃO LINEAR DE UM SISTEMA DE TUBULAÇÃO.....	115
7.3 EXEMPLO 3 – ANÁLISE NÃO LINEAR DE DUTO ENTERRADO..	118
7.4 EXEMPLO 4 – ANÁLISE NÃO LINEAR DE DUTO COM DEFEITO RETANGULAR.....	119
7.5 EXEMPLO 5 – ANÁLISE NÃO LINEAR DE DUTO COM DEFEITO SEMI CIRCULAR SUBMETIDO À FORÇA NA EXTREMIDADE.....	121
7.6 EXEMPLO 6 – ANÁLISE NÃO LINEAR DE UM SISTEMA DE TUBULAÇÃO CONTENDO CORROSÃO.....	124
8. CONCLUSÕES.....	127
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	129
ANEXO I .....	135
ANEXO II .....	138

## Lista de Figuras

Figura 1.1 Ilustração de um trecho corroído em uma linha de duto.....	2
Figura 1.2 Deformada do solo empurrado pelo duto após acidente de 2000 na Baía de Guanabara, (Cardoso, 2005).....	6
Figura 1.3 Seção do duto com fratura causada pela flambagem local da parede.....	6
Figura 1.4 As principais causas de falha. Fonte: Kermani, 1995.....	7
Figura 2.1 Mecanismo básico de corrosão. Fonte: www.abraco.org.....	18
Figura 2.2 Corrosão eletroquímica. Fonte: www.abraco.org.....	19
Figura 2.3 (a) Corrosão no duto enterrado. Fonte: www.abraco.org.....	22
Figura 2.3 (b) Múltiplas células de corrosão ao longo de tubulação enterrada Fonte: www.abraco.org.....	22
Figura 2.4 Corrosão de aço novo em contato com aço velho. Fonte: www.abraco.org.....	22
Figura 2.5 (a) Corrosão causada pela mistura de diversos solos. Fonte: www.abraco.org.....	23
Figura 2.5 (b). Corrosão do aço em contato com concreto. Fonte: www.abraco.org.....	23
Figura 2.6 Corrosão Uniforme. Fonte: www.abraco.org.....	23
Figura 2.7 Corrosão Alveolar. Fonte: www.abraco.org.....	24
Figura 2.8 Corrosão Por Pite. Fonte: www.abraco.org.....	24
Figura 2.9 Corrosão por esfoliação. Fonte: www.abraco.org.....	25
Figura 2.10 Corrosão em torno de cordão de solda. Fonte: www.abraco.org.....	25
Figura 3.1 Variação de vetores elementares na deformação do corpo (Bonet <i>et al</i> ,1997).....	29
Figura 3.2 Superfície de escoamento após carregamento no material que apresenta encruamento isotrópico. (Cardoso, 2005).....	33
Figura 3.3 Curva de tensão – deformação mostrando efeito de Bauschinger.....	33
Figura 4.1 Ilustração de característica de viga Bernoulli – Euler.....	39
Figura 4.2 Modelo de interação solo-duto (Souza,2005).....	44
Figura 4.3 Diagrama força - deformação para as molas transversais.....	46
Figura 4.4 Diagrama força - deformação para as molas longitudinais.....	46
Figura 4.5 Elemento infinitesimal de cilindro.....	52
Figura 5.1 Elemento de viga tridimensional.....	57
Figura 5.2 Representação dos ângulos do membro em função de coordenada global.....	67
Figura 5.3 Representação esquemática de integração de área na coordenada polar.....	71
Figura 5.4 Trajetória de equilíbrio de uma solução incremental e Iterativo.....	72
Figura 5.5 Trajetória de equilíbrio calculado e verdadeiro.....	73
Figura 5.6 Efeito snap-through.....	74
Figura 5.7 Efeito snap back.....	74
Figura 5.8 Relação deslocamento-carregamento.....	75
Figura 6.1. Ilustração esquemática de duto com defeito e duto íntegro submetido à pressão interna.....	78

Figura 6.2. Curvas hipotéticas de tensão no ponto A em função de pressão interna.....	79
Figura 6.3 Representação esquemática da trajetória de forças.....	80
Figura 6.4 Desvio das trajetórias de forças numa peça com entalhe.....	81
Figura 6.5 Regra de Neuber (Villar, 2002).....	82
Figura 6.6 Malha utilizada para discretizar duto com defeito tipo semicircular uniforme.....	84
Figura 6.7 Distribuição de tensão Von Mises no duto com defeito semicircular uniforme.....	84
Figura 6.8(a) Numeração dos pontos principais no defeito semicircular.....	85
Figura 6.8(b) Numeração dos pontos principais no duto íntegro.....	85
Figura 6.9(a) Ponto 1-Ponto 2.....	86
Figura 6.9(b) Ponto 3-Ponto 2.....	86
Figura 6.9(c) Ponto 4-Ponto 3.....	86
Figura 6.10(a) Variação de tensão no último incremento.....	87
Figura 6.10(b) Variação do fator de concentração de tensões no último incremento.....	87
Figura 6.11 A malha composta pelo elemento quadrangular axisimétrico. E a posição dos pontos principais.....	87
Figura 6.12 Distribuição de tensão no resultado final de análise para tração.....	87
Figura 6.13(a) Variação de tensões de ponto 1 até ponto 2.....	88
Figura 6.13(b) Variação de tensões do ponto 2 até ponto 3.....	88
Figura 6.13(c) Variação de tensões do ponto 3 até ponto 4.....	89
Figura 6.14 Variação de tensão ao longo dos pontos 1 à 4.....	89
Figura 6.15 Curva do fator de concentração de tensão em relação à distância do ponto 1.....	89
Figura 6.16 Curvas dos fatores de concentração de tensão, tangencial e longitudinal.....	90
Figura 6.17 Representação esquemática do duto com defeito retangular.	91
Figura 6.18(a) Discretização do duto com defeito retangular.....	92
Figura 6.18(b) Discretização do duto com defeito retangular.....	92
Figura 6.19 Resultado final de distribuição de tensão ao redor do defeito retangular.....	93
Figura 6.20 (a) Variação de tensões entre os pontos 1 e 2.....	93
Figura 6.20 (b) Variação de tensões entre os pontos 2 e 3.....	93
Figura 6.20 (c) Variação de tensão entre pontos 3 e 4.....	94
Figura 6.20 (d) Variação de tensão entre pontos 4 e 5.....	94
Figura 6.20 (e) Variação de tensão entre pontos 4 e 6.....	94
Figura 6.20 (f) Variação de tensão entre pontos 6 e 7.....	94
Figura 6.20 (g) Variação de tensão entre pontos 7 e 8.....	94
Figura 6.21(a) Perfil de tensão em relação a posição dos pontos 1 até 5 no último incremento de carga.....	95
Figura 6.21(b) Perfil de tensão em relação a posição dos pontos 5 até 8 no último incremento de carga.....	95
Figura 6.22(a) Curva de variação de concentração de tensões entre os pontos 1 e 5.....	95
Figura 6.22(b) Curva de variação de concentração de tensão entre os	

pontos 5 e 8.....	95
Figura 6.23. Malha gerada para simulação.....	96
Figura 6.24. Distribuição de tensão.....	97
Figura 6.25. Fator de concentração de tensões versus razão de tensões e tensão de escoamento.....	98
Figura 6.26. Fator de concentração de deformação em relação à razão de deformação e deformação de escoamento.....	99
Figura 6.27. Razão dos fatores em relação à razão das tensões.....	100
Figura 6.28. Comparação de regra de Neuber com o produto dos fatores	100
Figura 6.29(a) Tensão tangente.....	101
Figura 6.29(b) Tensão longitudinal.....	101
Figura 6.29(c) Tensão radial.....	101
Figura 6.29(d) Tensão de Von Mises.....	101
Figura 6.30 Tensões na raiz do defeito em relação aos incrementos de carga.....	102
Figura 6.31 Fator de concentração de tensão tangente em relação razão de tensões.....	103
Figura 6.32 Condições de equilíbrio para viga sem corrosão.....	105
Figura 6.33 Condições de equilíbrio não atendida na viga com defeito.....	106
Figura 6.34 Comparação de curvas de tensões calculada na raiz do defeito entre APC3D e ANSYS.....	107
Figura 6.35 Diferença relativa de tensões calculadas por APC3D e por ANSYS.....	108
Figura 6.36 Comparação de curvas de deformações de APC3D com ANSYS.....	108
Figura 6.37 Diferença relativa de deformações calculadas pelo programa APC3D e pelo ANSYS.....	109
Figura 6.38 Comparação de curvas de deslocamento de APC3D com ANSYS.....	110
Figura 6.39 Diferença relativa de deslocamentos calculados por APC3D e por ANSYS.....	110
Figura 6.40 Diferença relativa de deslocamentos calculados por APC3D e por ANSYS.....	111
Figura 7.1 Representação esquemática da estrutura e suas condições de contorno.....	113
Figura 7.2. Comparativo de deslocamento calculado por ANSYS e APC3D.....	114
Figura 7.3 Ilustração de um sistema hipotético de tubulação com as condições de contorno.....	115
Figura 7.4 Deslocamento total do P1.....	116
Figura 7.5 Deslocamento total do P2.....	116
Figura 7.6 Rotação total do P2.....	117
Figura 7.7. Representação esquemática de duto enterrado.....	118
Figura 7.8 Deslocamento vertical de cada nó de duto.....	119
Figura 7.9 Tensão de Von Mises em relação à pressão interna.....	120
Figura 7.10 Condições de contorno e a força aplicada.....	122
Figura 7.11. Discretização do modelo sólido submetido ao momento.....	122
Figura 7.12. Distribuição de tensão.....	122
Figura 7.13 Fator de concentração de tensões em relação a razão das	

tensões.....	123
Figura 7.14 Tensão de Von Mises na raiz do defeito calculado pelo ANSYS e APC3D.....	123
Figura 7.15 Sistema de tubulação com defeito tipo semi circular uniforme	124
Figura 7.15 Tensões de Von Mises no P2 para tubulação com corrosão e sem corrosão.....	125
Figura 7.16 Tensões de Von Mises no P3.....	126
Figura A1.1 Qtde. Elemento X Tensão de von Mises .....	136
Figura A1.2 (a)-(f) Distribuição de tensão de Von Mises para diferentes grau de refino na malha .....	137
Figura A2.2 Representação esquemática de malha com elemento pórtico gerada por APC3D, com elemento de corrosão .....	138

## Lista de Tabelas

Tabela 1.1 Principais acidentes com duto e tanque de armazenamento no Brasil.....	3
Tabela 6.1 Propriedades geométricas e mecânicas de duto.....	83
Tabela 6.2 Geometrias do duto simulado.....	91
Tabela 7.1 Propriedades mecânicas e geométricas da barra.....	113
Tabela 7.2 Deslocamento em y no passo 1000.....	114
Tabela 7.3 Deslocamentos nodais nos pontos P1 e P2 sem considerar pressão interna.....	117
Tabela 7.4 Tensão de Von Mises no ponto P2 sem considerar pressão interna.....	117
Tabela 7.5 Deslocamento total dos pontos P1 e P2 considerando pressão interna.....	117
Tabela 7.6 Tensão de Von Mises no P2 considerando pressão interna.....	117
Tabela 7.7 Propriedades mecânicas e geométricas do duto enterrado.....	118
Tabela A1.1 Qtde. Elemento X Tensão de VM .....	135

## Lista de Símbolos

- $K_\sigma$  - fator de concentração de tensões longitudinal.  
 $K_\epsilon$  - fator de concentração de deformações.  
 $K_\theta$  - fator de concentração de tensões tangencial.  
 $K$  - fator de concentração de tensões genérico.  
 $K_t$  - fator de concentração de tensões no regime linear elástico.  
 $\sigma$  - tensor tensão de Cauchy  
 $\sigma_{PK1}$  - primeiro tensor de Piola-Kirchhoff  
 $\sigma_{PK2}$  - segundo tensor de Piola-Kirchhoff  
 $\sigma_{\max}$  - tensão máxima.  
 $\sigma_{esc}$  - tensão de escoamento.  
 $P$  - pressão interna.  
 $S_{ij}$  - componentes da tensão desviatória de segundo tensor de Piola-Kirchhoff  
 $\sigma_{PK2ij}$  - componentes de segundo tensor de Piola-Kirchhoff  
 $\delta_{ij}$  - delta de Kronecker  
 $e_{ij}^p$  - componente da deformação plástica  
 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}'$  - deformação desviatória no tempo  $t + \Delta t$   
 ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e}^p$  - deformação plástica no tempo  $t + \Delta t$   
 $E$  - modulo de Young  
 $\nu$  - coeficiente de Poisson  
 ${}^t e_{ij}^p$  - componente da deformação plástica no tempo  $t + \Delta t$   
 ${}^{t+\Delta t} e_{ij}'$  - componente da deformação desviatória no tempo  $t + \Delta t$   
 ${}^{t+\Delta t} \sigma_m$  - tensão média no tempo  $t + \Delta t$   
 ${}^{t+\Delta t} e_m$  - deformação média no tempo  $t + \Delta t$   
 FCT - Fator de Concentração de Tensões.  
 $\mathbf{F}$  - tensor gradiente de deformação.  
 $x_1, x_2, x_3$  - Coordenadas cartesianas locais  
 $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$  - Coordenadas cartesianas globais  
 $u, v, w$  - Componentes de deslocamentos  
 ${}^t u_0, {}^t v_0, {}^t w_0$  - Componentes de deslocamentos do eixo centroidal no tempo  $t$  da configuração de referência  
 ${}^t \epsilon_{i,j}$  - Componentes do tensor de deformação de Green-Lagrange no tempo  $t$   
 ${}^t \epsilon_{x_1}$  - Componente de deformação na direção  $x_1$  (longitudinal) no tempo  $t$  da configuração de referência  
 ${}^t \epsilon_0^L$  - Deformação incremental linear axial no eixo centroidal no tempo  $t$  da configuração de referência  
 ${}^t \phi_Z^L$  - Curvatura incremental linear em  $x_3$  no tempo  $t$  da configuração de referência.  
 ${}^t \phi_Y^L$  - Curvatura incremental linear em  $x_2$  no tempo  $t$  da configuração de

- referência.
- ${}^t\theta_Z$  - Rotação incremental em torno do eixo  $x_3$  no tempo  $t$  da configuração de referência.
- ${}^t\theta_Y$  - Rotação incremental em torno do eixo  $x_2$  no tempo  $t$  da configuração de referência.
- ${}^t\varepsilon_0$  - Deformação incremental longitudinal no centróide do elemento no tempo  $t$  da configuração de referência.
- ${}^t\phi_Z$  - Curvatura incremental total em  $x_3$  no tempo  $t$  da configuração de referência.
- ${}^t\phi_Y$  - Curvatura incremental total em  $x_2$  no tempo  $t$  da configuração de referência.
- ${}^tS_{ij}$  - Componentes do tensor de tensão segundo Piola-Kirchhoff no tempo  $t$  referido à configuração no tempo 0.
- ${}^0C_{ijrs}$  - Componentes do tensor de tensão – deformação incremental no tempo  $t$  referido à configuração no tempo 0.
- ${}^0e_{ij}$  - Componentes de deformação incremental linear referido à configuração no tempo 0
- ${}^0\eta_{ij}$  - Componentes de deformação incremental não-linear referido à configuração no tempo 0
- $\lambda$  e  $\mu$  - Constantes de Lamé
- $\delta_{ij}$  - Delta de Kronecker
- $E$  - Módulo de elasticidade ou módulo de Young
- $\nu$  - Relação ou coeficiente de Poisson
- $[C^E]$  - Matriz de tensão – deformação tridimensional para materiais isotrópicos
- $d\varepsilon_{ij}$  - Componentes de deformação incremental total
- $d\varepsilon_{rs}^E$  - Componentes de deformação incremental elástica
- $d\varepsilon_{rs}^P$  - Componentes de deformação incremental plástica
- $dS_{ij}$  - Componentes de tensão incremental
- $C_{ijrs}^E$  Componentes do tensor constitutivo elástico
- ${}^tS_\theta$  - Tensão circunferencial ou tangencial constante no tempo  $t$  da configuração de referência
- ${}^tS_r$  - Tensão radial no tempo  $t$  da configuração de referência
- ${}^t\varepsilon_\theta$  - Deformação na direção circunferencial no tempo  $t$  da configuração de referência
- ${}^t\varepsilon_r$  - Deformação na direção radial no tempo  $t$  da configuração de referência
- $H'$  - Módulo de encruamento
- $E_T$  - Módulo tangente
- $G$  - Módulo de cisalhamento
- ${}^t\bar{\sigma}$  - Tensão efetiva no tempo  $t$
- ${}^t\Phi$  - Função de escoamento no tempo  $t$
- ${}^t s_{ij}$  - Componentes do tensor desviador de tensões segundo Piola-Kirchhoff no

tempo  $t$

- ${}^t S_m$  - Componentes da tensão média no tempo  $t$
- ${}^t \varepsilon'_{ij}$  - Componentes do tensor desviador de deformações no tempo  $t$
- ${}^t \varepsilon_m$  - Componentes de deformação média no tempo  $t$
- ${}^t \varepsilon_{ij}^P$  - Componentes do tensor deformação plástica no tempo  $t$
- $D_e$  - Diâmetro externo da seção transversal do duto
- $t$  - Espessura do duto
- ${}^t C^{EP}$  - Módulo elasto-plástico no tempo  $t$
- ${}^t \bar{\varepsilon}^P$  - Deformação plástica efetiva
- ${}^t \varepsilon_{\theta}^P$  - Deformação plástica na direção circunferencial no tempo  $t$  da configuração de referência
- ${}^t \varepsilon_r^P$  - Deformação plástica na direção radial no tempo  $t$  da configuração de referência
- ${}^t \varepsilon_x^P$  - Deformação plástica na direção  $x$  no tempo  $t$  da configuração de referência
- ${}^t \sigma_{esc}$  - Tensão de escoamento no tempo  $t$
- $r_i$  - Raio interno
- $r_e$  - Raio externo
- $r$  - Raio para o ponto em questão
- $\bar{D}$  - Diâmetro médio
- $S_{temp}$  - Tensão longitudinal devido à temperatura
- $\alpha$  - Coeficiente de dilatação linear
- $\Delta T$  - Variação de temperatura
- $S_p$  - Tensão longitudinal originada pela pressão interna
- ${}^t \Delta_{BS}$  - Deformação incremental da mola de solo de base no tempo  $t$
- ${}^t \Delta_{US}$  - Deformação incremental da mola de solo de levantamento no tempo  $t$
- ${}^t \Delta_{LLS}$  - Deformação incremental da mola de solo lateral esquerda no tempo  $t$
- ${}^t \Delta_{RLS}$  - Deformação incremental da mola de solo lateral direita no tempo  $t$
- ${}^t \Delta_{AS}$  - Deformação incremental da mola de solo longitudinal no tempo  $t$
- ${}^t K_{AS}$  - Constante de rigidez da mola de solo longitudinal no tempo  $t$
- ${}^t K_{BS}$  - Constante de rigidez da mola de solo de base no tempo  $t$
- ${}^t K_{US}$  - Constante de rigidez da mola de solo de levantamento no tempo  $t$
- ${}^t K_{LLS}$  - Constante de rigidez da mola de solo lateral esquerda no tempo  $t$
- ${}^t K_{RLS}$  - Constante de rigidez da mola de solo lateral direita no tempo  $t$
- ${}^t F_{BS}$  - Força incremental de compressão da mola de solo de base no tempo  $t$
- ${}^t F_{US}$  - Força incremental de compressão da mola de solo de levantamento no tempo  $t$
- ${}^t F_{LLS}$  - Força incremental de compressão da mola de solo lateral esquerda no tempo  $t$

- ${}^t F_{RLS}$  - Força incremental de compressão da mola de solo lateral direita no tempo  $t$
- ${}^t F_{YBS}$  - Força de escoamento na compressão da mola de solo de base no tempo  $t$
- ${}^t F_{YUS}$  - Força de escoamento na compressão da mola de solo de levantamento no tempo  $t$
- ${}^t F_{YLLS}$  - Força de escoamento na compressão da mola de solo lateral esquerda no tempo  $t$
- ${}^t F_{YRLS}$  - Força de escoamento na compressão da mola de solo lateral direita no tempo  $t$
- ${}^t F_{AS}$  - Força incremental da mola de solo longitudinal no tempo  $t$
- $-{}^t F_{YAS}$  - Força de escoamento na tração da mola de solo longitudinal no tempo  $t$
- ${}^t F_{YAS}$  - Força de escoamento na compressão da mola de solo longitudinal no tempo  $t$
- $K_i$  - Coeficientes de rigidez da seção transversal do duto ( $i=1,2,\dots,6$ )
- $F_{eq}$  - Força axial equivalente
- $M_{eq1}$  - Momento equivalente em relação a  $x_3$
- $M_{eq2}$  - Momento equivalente em relação a  $x_2$
- $L$  - Comprimento do elemento de viga-duto
- ${}^t \xi$  - Coordenada natural axial no tempo  $t$
- $h_i$  - Funções de interpolação ( $i=1,2,\dots,15$ )
- $[{}^t H]$  - Matriz de funções de interpolação no tempo  $t$
- $\{ {}^t u_e \}$  - Vetor de deslocamentos nodais incrementais do elemento no sistema de coordenadas locais, no tempo  $t$  da configuração de referência
- $[{}^t B^L]$  - Matriz linear de deformação-deslocamento no tempo  $t$
- $[{}^t B_1^{NL}]$  - Matriz não-linear de deformação-deslocamento no tempo  $t$
- $[{}^t B_2^{NL}]$  - Matriz não-linear de deformação-deslocamento no tempo  $t$
- $[{}^t B_3^{NL}]$  - Matriz não-linear de deformação-deslocamento no tempo  $t$
- $[{}^t B^s]$  - Matriz de deformação-deslocamento para as molas de solo no tempo  $t$
- $\eta, \beta$  - Parâmetros para definir a matriz  $[{}^t B^s]$
- $\{ {}^t \tilde{u}_e \}$  - Vetor de deslocamentos nodais incrementais do elemento no sistema de coordenadas globais, no tempo  $t$  da configuração de referência
- $[{}^t R_T]$  - Matriz de transformação para um membro de pórtico espacial no tempo  $t$
- $[{}^t ROT]$  - Matriz de rotação no tempo  $t$
- $[{}^t D^P]$  - Matriz de propriedades de material da seção transversal do duto no tempo  $t$
- $A$  - Área da seção transversal do duto
- $I_z$  - Momento de inércia em relação ao eixo  $x_3$
- $I_y$  - Momento de inércia em relação ao eixo  $x_2$

- $[{}^t F]$  - Matriz de força interna axial no tempo  $t$   
 $[{}^t M_1]$  - Matriz de momento em relação ao eixo  $x_3$  no tempo  $t$   
 $[{}^t M_2]$  - Matriz de momento em relação ao eixo  $x_2$  no tempo  $t$   
 $[{}^t K_{EP}^e]$  - Matriz de rigidez elasto – plástica do elemento no tempo  $t$   
 $[{}^t K_G^e]$  - Matriz de rigidez geométrica do elemento no tempo  $t$   
 $[{}^t K_S^e]$  - Matriz de rigidez das molas de solo do elemento o tempo  $t$   
 $[{}^t Q_P^e]$  - Vetor de forças equivalentes nos pontos nodais do elemento para o duto no tempo  $t$   
 $[{}^t Q_S^e]$  - Vetor de forças equivalentes nos pontos nodais do elemento para as molas de solo no tempo  $t$   
 $[{}^t \tilde{K}^e]$  - Matriz de rigidez transformada do elemento no sistema de coordenadas globais, no tempo  $t$   
 $\{{}^t \tilde{R}^e\}$  - Vetor de forças externas do elemento no sistema de coordenadas globais, no tempo  $t$   
 $\{{}^t \tilde{F}^e\}$  - Vetor de forças internas do elemento no sistema de coordenadas globais, no tempo  $t$   
 $\{\Delta R^{(i-1)}\}$  - Vetor de carga desbalanceado incremental na iteração  $i-1$   
 $\{\Delta U^{(i)}\}$  - Vetor de deslocamentos incremental na iteração  $i$   
 $tol$  - Tolerância de convergência

## RESUMO

O duto de aço carbono é um meio de transporte de gás e petróleo amplamente utilizado, e está sujeito a sofrer corrosão. Em geral, corrosão apresenta perfil irregular e é analisada pelos modelos de elementos finitos com geometria de simplificação. Os modelos numéricos mais utilizados são os modelos de elementos tridimensionais, sejam eles elemento de casca ou elemento sólido. Mas tanto o modelo sólido quanto o modelo casca não são indicados para analisar sistemas de tubulações, pelo fato de que esses modelos utilizam elementos com elevados grau de liberdade. Portanto, a solução do modelo do sistema de tubulações requer elevado esforço computacional. A maioria dos estudos feitos com elemento casca ou sólido são focalizados na análise local, na região próxima da corrosão. Enquanto a análise do sistema de tubulações é feita com o elemento de viga. Porém, o elemento de viga não traz na sua formulação a consideração de defeito localizado. Ou seja, existe série de dificuldades em analisar o comportamento do sistema de tubulações que apresenta corrosão localizada em qualquer membro do duto.

O objetivo deste trabalho é desenvolver uma metodologia para análise global/local do sistema de tubulações. Em outras palavras, introduzir efeito local da corrosão na análise do comportamento global do sistema de tubulações. No presente trabalho, a curva de Fator de Concentração de Tensões (FCT) foi determinada pelo programa comercial de elementos finitos, ANSYS, e inserida na formulação Lagrangeana Total de uma viga que incorpora análise não linear de tensões de deformações. Os resultados obtidos dos exemplos analisados foram comparados com os mesmos exemplos analisados com o ANSYS. O resultado desta comparação foi satisfatório.

Palavras-chave: duto corroído, elementos finitos, elemento de viga, análise local/global, fator de concentração de tensões.

## **ABSTRACT**

The carbon steel pipe is a main means widely used for oil and gas transportation, and is subject to corrosion. In general, corrosion has irregular profile and is analyzed by finite element models with simplified pattern. The most used numerical models are of three-dimensional elements, either element shell or solid element. But both the solid model and the shell model are infeasible for analyzing piping system, due to the fact that these elements have high degree of freedom. Therefore, the solution for numerical model of piping system requires high computational effort. The studies using shell or solid element are focused on local analysis, the region near the corrosion. While the analysis for piping system is made with the beam element. However, the beam element doesn't have in its formulation the consideration of localized defect. There are lots of difficulties in analyzing the behavior of the system of pipes that has localized corrosion in several members.

The objective of this work is to develop a methodology for the global / local analysis for system of pipes. In other words, introduce local effect of corrosion in the analysis of the behavior of the system of pipes. In this study, the stress concentration factor was determined by commercial finite element software, ANSYS, and inserted into the Total Lagrangeana Formulation of a beam that incorporates non-linear analysis of stress-strain. The results of the samples analyzed were compared with the same examples analyzed by ANSYS. The result of this comparison was satisfactory.

**Keywords:** corroded pipeline, finite element beam element, local / global analysis, stress concentration factor.

# 1. INTRODUÇÃO

Dutos de aço são meios amplamente empregados para o transporte de derivados petrolíferos e gases naturais, por causa da sua alta capacidade de vazão, baixo custo de fabricação e operação, em comparação com outros meios. Os dutos geralmente são feitos de aço carbono, pois este é um material que fornece alta resistência mecânica e, principalmente, é mais econômico quando comparado com outro tipo de material para a instalação em trechos de longa extensão. Atualmente no Brasil existem 15 mil km de malhas de dutos. É um número relativamente pequeno se comparado com os Estados Unidos que possuem 250 mil km de oleodutos e 550 mil km de gasodutos. Com o crescimento econômico no Brasil, a demanda por energia fez com que a malha brasileira crescesse ultimamente. A relevância deste setor tanto no cenário panorama econômico com ambiental gera a necessidade de melhor entendimento no comportamento estrutural dos dutos, a fim de permitir procedimentos mais seguros e adequados no projeto como também no aspecto de manutenção e instalação.

Dependendo do derivado transportado e do processo de fabricação, o meio ambiente que se encontra instalada a linha do duto pode haver corrosão, tal como mostra a ilustração da figura 1.1 A corrosão gera um defeito superficial e diminui a resistência da parede do duto, e o deixa susceptível à ruptura. Diante de uma ocorrência como a mencionada, a pressão interna deve ser diminuída, o que compromete a capacidade de transporte do material. A outra solução seria interromper o transporte e reparar o trecho corroído. Ambos os casos representam perda econômica. Por este motivo, muitos pesquisadores buscam uma metodologia para melhor estimar a pressão limite de transporte no duto corroído. Uma alternativa eficiente é a análise numérica via Método dos Elementos Finitos. As análises computacionais devem ser conduzidas ao estado iminente de rompimento. Porém, a corrosão gera irregularidades na superfície e introduz nas vizinhanças do defeito, concentração de tensões, que potencializam a tensão nominal e levam o material na região corroída a um nível de tensões mais elevado. Os modelos tridimensionais levam em conta este fenômeno, entretanto apenas consideram efeitos locais. Criar malha com elementos tridimensionais para toda rede do duto demanda grande esforço computacional para a solução. Logo, outra metodologia de solução deve ser

proposta para este fim. O presente trabalho propõe outra solução que envolve análise global de estrutura, mas ao mesmo tempo incorpora efeito de fator de concentração de tensão na análise. É uma tentativa de unir análise global da tubulação, utilizando elemento finito de pórtico, com a análise local de duto com corrosão, utilizando elementos 2D e 3D.

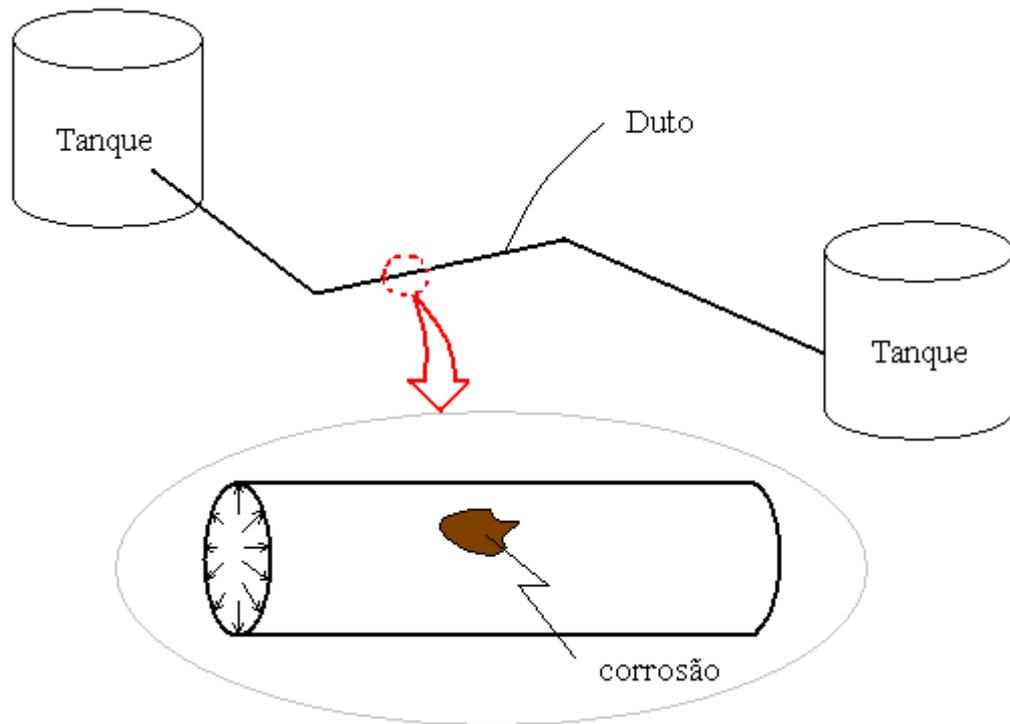


Figura 1.1 Ilustração de um trecho corroído em uma linha de duto.

O comportamento estrutural de uma linha de tubulação é complexo devido a vários fatores, tais como os esforços provenientes das cargas externas, da interação estrutura – solo circundante, de pressão interna e de possíveis flambagens locais. A consideração das cargas últimas leva a estrutura a apresentar um comportamento caracterizado pela relação não linear e sofre grandes deslocamentos. Isso promove a necessidade de uma metodologia de análise que envolve análise não linear, a fim de determinar precisamente o comportamento no estado limite do duto, que por sua vez auxilia a obter um projeto otimizado para mesmo nível de segurança.

O traçado de um oleoduto é mais variável possível. A tubulação percorre trechos enterrados, transpor obstáculos por meio de pontilhões, e acompanhar a topografia do terreno e mudando de percurso onde for necessário.

Os carregamentos atuantes sobre um duto são muito relacionados ao traçado geométrico definido ao oleoduto, à pressão interna, entre outros.

## 1.1. MOTIVAÇÃO

Duto é o meio mais importante de transporte de gás natural, petróleo e seus derivados. A instalação da linha de tubulação possui uma ampla extensão no Brasil e no mundo todo. Diariamente é responsável por transportar grande volume de gás e petróleo. Com o aumento da demanda da energia, a tendência de aumentar a instalação de linhas leva as empresas petroquímicas a dar mais a importância em manutenção e em integridade estrutural da linha, pois em caso de acidente, a perda de fluxo ou rompimento estrutural implica em prejuízo econômico e humano. Por este motivo, os setores afins investiram nos métodos de inspeção, manutenção e principalmente em métodos de avaliação da resistência mecânica residual decorrente de quaisquer causas. No Brasil, já ocorreram inúmeras acidentes com tubulações, alguns com graves prejuízos econômicos e ambientais. A tabela 1.1 traz o resumo de alguns acidentes de dutos no Brasil.

Tabela 1.1 Principais acidentes com dutos e tanques de armazenamento no Brasil.

DATA	ACIDENTE
<b>Outubro de 1983</b>	3 milhões de litros de óleo vazam de um oleoduto da Petrobrás em Bertioga.
<b>Fevereiro de 1984</b>	93 mortes e 2.500 desabrigados na explosão de um duto da Petrobrás na favela Vila Socó, Cubatão – SP.
<b>10 de março de 1997</b>	O rompimento de um duto da Petrobrás que liga a Refinaria de Duque de Caxias (RJ) ao terminal DSTE-Ilha D'Água provoca o vazamento de 2,8 milhões de óleo combustível em manguezais na Baía de Guanabara (RJ).
<b>13 de outubro de 1998</b>	Uma rachadura de cerca de um metro que liga a refinaria de São José dos Campos ao Terminal de Guararema, ambos em São Paulo, causa o vazamento de 1,5 milhão de litros de óleo combustível no rio Alambari. O duto estava há cinco anos sem manutenção. Petrobrás.
<b>18 de janeiro de 2000</b>	O rompimento de um duto da Petrobrás que liga a Refinaria Duque de Caxias ao terminal da Ilha d'Água provocou o vazamento de 1,3 milhão de óleo combustível na Baía de Guanabara. A mancha se espalhou por 40 quilômetros quadrados. Laudo da Coppe/UFRJ, divulgado em 30 de

	março, concluiu que o derrame de óleo foi causado por negligência da Petrobrás, já que as especificações do projeto original do duto não foram cumpridas.
<b>28 de janeiro de 2000</b>	Problemas em um duto da Petrobrás entre Cubatão e São Bernardo do Campo (SP), provocam o vazamento de 200 litros de óleo diluente. O vazamento foi contido na Serra do Mar antes que contaminasse os pontos de captação de água potável no rio Cubatão.
<b>16 de fevereiro de 2001</b>	Rompe mais um duto da Petrobrás, vazando 4.000 mil litros de óleo diesel no Córrego Caninana, afluente do Rio Nhundiaquara, um dos principais rios naquela região. Este vazamento trouxe grandes danos para os manguezais da região, além de contaminar toda a flora e fauna. O Ibama proibiu a pesca até o mês de março.
<b>30 de maio de 2001</b>	O rompimento de um duto da Petrobrás em Barueri em São Paulo, ocasionou o vazamento de 200 mil litros de óleo que se espalharam por três residências de luxo do Condomínio Tamboré 1 e atingiram as águas do Rio Tietê e do Córrego Cachoeirinha.
<b>14 de junho de 2002</b>	Vazamento de óleo diesel num tanque operado pela Shell no bairro Rancho Grande de Itu, no interior paulista, cerca de oito mil litros de óleo vazaram do tanque, contaminando o lençol freático, que acabou atingindo um manancial da cidade.
<b>07 de novembro de 2003</b>	Cerca de 460 litros de óleo vazaram da linha de produção da Petrobrás em Riachuelo (32 km de Aracajú), atingindo o rio Sergipe e parte da vegetação da região. A Petrobrás foi multada em R\$ 1 milhão pela Adema - Administração Estadual do Meio Ambiente.
<b>18 de fevereiro de 2004</b>	Vazamento de óleo cru poluiu o rio Guaecá e a praia de mesmo nome em São Sebastião, litoral norte de São Paulo. O acidente aconteceu no oleoduto que liga o Tebar (Terminal Almirante Barroso), em São Sebastião, à refinaria Presidente Bernardes, em Cubatão. As causas do rompimento do oleoduto são desconhecidas. Ainda não se sabe a quantidade de óleo que vazou.

Fonte: [www.ambientebrasil.com.br](http://www.ambientebrasil.com.br) (14/09/2009)

Nas encostas da Serra do Mar localizada na região costeira do sudeste brasileiro, os movimentos de massa mais frequentes são: deslizamentos lentos e deslizamentos rápidos. Existem vários oleodutos nas regiões sul e sudeste brasileiro que ligam terminais petrolíferos e refinarias instaladas no planalto ou em outros pontos da costa. Uma extensão considerável de trechos de dutos atravessa zonas de colúvio, que podem movimentar-se para cotas mais baixas, afetando não só o alinhamento, como também as tensões internas do duto. Os trechos de oleodutos

nessas encostas consistem basicamente de tubos metálicos com diâmetros entre 30 cm e 1 m, enterrados a uma profundidade de até 3 m (Souza, 2005).

Uma das encostas litorâneas do Paraná que vem apresentando desde 1995, sinais de movimentação devido a atividades da terra, situa-se no município de Guaratuba, ao longo da rodovia BR-376, próximo do km 55+800m. Essa área de instabilidade onde estão enterrados dois oleodutos (o OSPAR que liga o terminal de São Francisco do Sul (SC) à refinaria Presidente Getulio Vargas e o PASC que liga a refinaria Presidente Getúlio Vargas à Itajaí (SC)).

Acidentes com linhas de dutos localizados nestas áreas dinâmicas já ocorreram causando prejuízos financeiros e danos ao meio ambiente. Um destes acidentes ocorreu em 2001 na Serra do Mar, com o rompimento do oleoduto utilizado para o transporte de combustíveis na faixa que liga a refinaria Presidente Getúlio Vargas (REPAR), em Araucária até o porto de Paranaguá.

Em janeiro de 2000, ocorreu um acidente ambiental na Baía da Guanabara no estado de Rio de Janeiro, gerando um vazamento de cerca de 1,29 milhões de litros de óleo. O vazamento foi causado por uma fratura no duto que ligava a refinaria Duque de Caxias (REDUC) à um terminal na ilha d'agua, também na Baía de Guanabara. A fratura no duto ocorreu devido ao fenômeno de flambagem termomecânica. Tal fenômeno foi gerado pelo aquecimento e pressurização do duto, causando uma alça de deformação ao longo de um trecho na saída do canal entre a REDUC e a Baía da Guanabara. A flexão excessiva na alça de deformação propiciou as condições para a ocorrência da flambagem local da parede por excesso de deformações plásticas e conseqüente ruptura. As figuras 1.2 e 1.3 mostram a deformada do duto e a seção de fratura no duto.

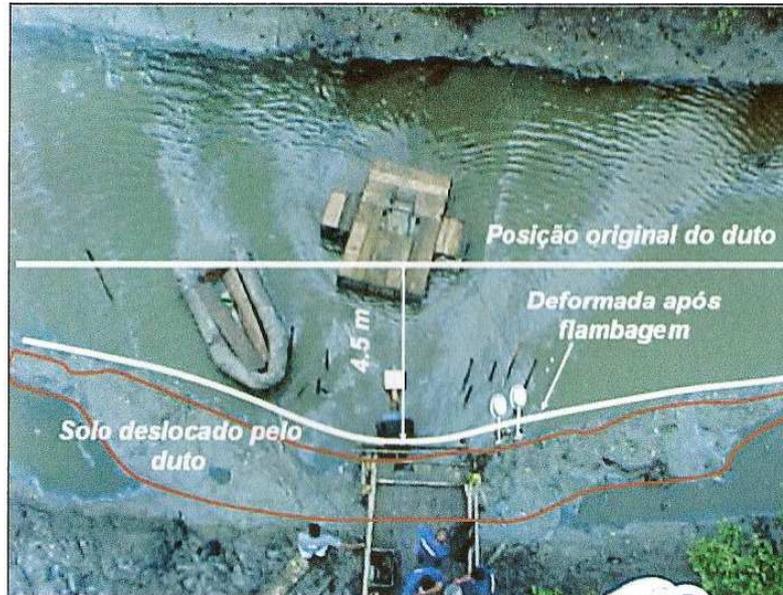


Figura 1.2 Deslocamento do solo e duto deformado após acidente de 2000 na Baía de Guanabara, (Cardoso, 2005).



Figura 1.3 Seção do duto com fratura causada pela flambagem local da parede. (Cardoso, 2005).

Alguns estudos revelam que, entre as principais causas da falha estrutural na indústria petroquímica, tal como se observa na figura 1.4, a corrosão é responsável por 33% de ocorrência.

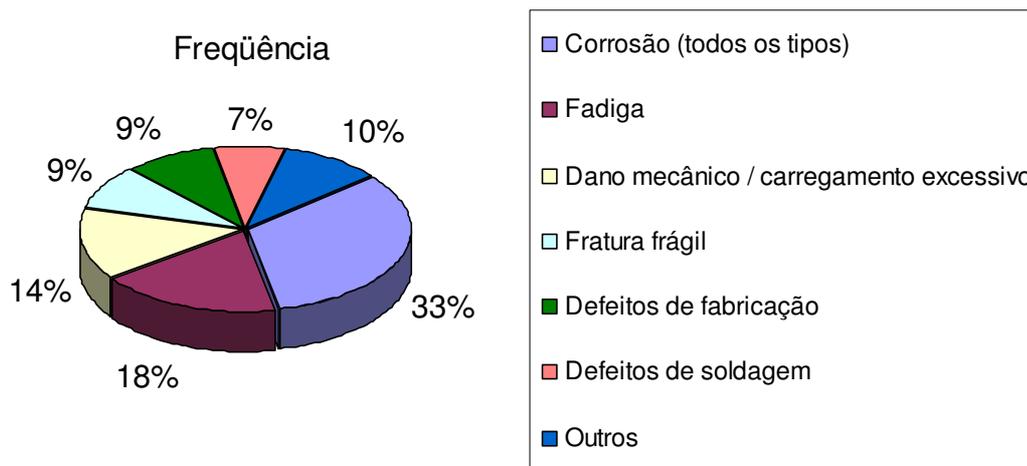


Figura 1.4 As principais causas de falha. Fonte: Kermani & HARROP, 1995.

## 1.2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Primeiramente são apresentadas revisões bibliográficas de análise local de corrosão no duto.

Valenta et al. (1994) publicaram sua pesquisa financiada pela Transgas of Prague (Czech). Esta pesquisa teve por objetivo estimar a capacidade residual de gasoduto, sujeito ao defeito corrosivo superficial e a pressão interna. Os estados limites considerados foram os estados limites de elasticidade ou colapso plástico ou fratura local na região do defeito. O gasoduto analisado experimentalmente no seu trabalho foi feito de aço termicamente processado. São os aços do tipo X65, X60 e X70 de norma DIN. Nesse trabalho, Valenta et al dividiram a corrosão superficial em duas classes: uma com redução radial e axial, e outra com redução radial, axial e circunferencial. Os dados experimentais serviram como banco de dados para desenvolvimento de métodos numéricos e analíticos. Os autores dessa pesquisa desenvolveram programa computacional, via Método dos Elementos Finitos, e adotaram duas hipóteses: A pressão alternada é insignificante comparada com a pressão média nominal e o aço do gasoduto tem a capacidade de desenvolver grande deformação plástica. O elemento finito utilizado nessa pesquisa foi um elemento sólido de 20 nós com 27 pontos de integração. A não linearidade física foi modelada com comportamento elastoplástico de Prandtl – Reusses e empregado o

método incremental modificado de Newton – Raphson. Na abordagem analítica, Valenta et al consideraram um perfil da corrosão no plano longitudinal como defeito elíptico e esférico. A formulação foi feita baseada no Princípio dos Trabalhos Virtuais. Os resultados experimentais, numéricos e analíticos, foram comparados com os valores recomendados pelo código da ASME. Os resultados mostraram que a metodologia proposta pelos autores é satisfatória.

Dando continuidade de sua pesquisa, Valenta et al (1995) realizaram um ensaio de “burst test”, ou ensaio destrutivo com dois segmentos de gasoduto com corrosão real. Um segmento com colônia de corrosão na forma de “pite”, e o outro com corrosões relativamente menos profundas, mas mais dispersas. Nesta fase de pesquisa, Valenta et al. melhoram seu programa de elementos finitos com a formulação de não linearidade geométrica e observaram a importância de inclusão deste efeito. Outro parâmetro chamado intensidade de deformação plástica acumulada também foi incluído. Os resultados das análises experimental e numérica foram comparados com critério B31G e B31G modificado.

Chouchaoui e Pick (1996) analisaram comportamento de duto com colônias de corrosão na forma de pites alinhadas longitudinalmente. O objetivo desta pesquisa era investigar a influência da interação entre esses pites sobre a resistência residual da parede de duto. A pesquisa foi desenvolvida com ensaio destrutivo e análise numérica via elementos finitos. Os autores compararam os resultados do ensaio com o critério B31G, método da área efetiva e método de 085dL. Observaram o conservadorismo desses métodos. Baseado nos dados experimentais, os autores desenvolveram modelo computacional considerando comportamento não linear física a fim de realizar estudo paramétrico.

Chen et al (1998) desenvolveram um programa matemático em conjunto com o Método dos Elementos Finitos para análise de dutos corroídos e submetidos a diversos tipos de carregamento. O objetivo desse trabalho era estimar o carregamento limite e uma tensão referencial. Como critério de escoamento, foi empregado o método de Von Mises e empregado o método gaussiano de integração. Chen et al utilizaram esta técnica para analisar um duto com corrosão em forma de pite, defeito elíptico axial, defeito elíptico circunferencial e defeito quadrático, e ainda a combinação dessas geometrias com momento, pressão interna e força axial.

Chen e Shu (2001) trabalharam juntos dando continuidade à pesquisa anterior. Chen e Shu desenvolveram um programa para estimar capacidade de transporte de duto corroído sujeito aos defeitos de diferentes configurações e combinação de carregamentos. Com esse programa, Chen e Shu analisaram as interações entre defeitos de mesmos gêneros.

Benjamin et al (2001) fizeram experiências com duto de API 5L X60, submetidos à pressão interna. Esta experiência foi financiada pelo Petrobrás com o objetivo de investigar comportamento de um duto com corrosão externa longa. A corrosão foi modelada como um defeito retangular, usinado por eletro erosão. Os resultados da análise foram comparados com os métodos de cálculo existentes, tais como: B31G, 085dL, Effetive Area e RP-F101 (DNV 99). Nesta pesquisa, os autores observaram que o método B31G é mais conservador do que os outros métodos.

Saldanha e Bucherie (2001) desenvolveram um programa chamado FEASYP (**F**ast **F**inite **E**lement **A**ssessment **S**ervice For the Integrit**Y** on Non-Cracked Corroded **P**ipelines) para atender às necessidades do Bureau Veritas de desenvolver uma metodologia para estimar pressão de ruptura num duto ou vaso pressurizado, e que tenha corrosão interna ou externa. Saldanha e Bucherie utilizaram elemento sólido de 20 nós em seu trabalho e modelaram um defeito corrosivo na forma elíptica. Adotaram um modelo de plasticidade isotrópico de Von Mises. A curva de tensão-deformação utilizado na análise para descrever o comportamento do material era a curva verdadeira. E o critério de falha é a plastificação total na direção radial da parede residual. O resultado obtido pelo programa foi comparado com método B31G, RSTRENG etc.

Dmytrakh et. al. (2001) analisaram uma peça retangular com entalhe semi-circular e a interação da mesma com o fator de concentração de tensão. Os autores deste trabalho utilizaram aço carbono de baixa resistência e mergulhou o componente no meio corrosivo que contem 3% de NaCl. Foi observado que o entalhe atuou como concentrador de tensão e ao mesmo tempo acelerador de corrosão. A fissura causada pela corrosão apareceu na raiz de entalhe. Os autores adotaram a Mecânica de Fratura e método volumétrico para estimar a tensão efetiva, quando a peça apresenta comportamento elasto-plástico na ponta da fissura. Foi desenvolvido modelo numérico com elementos quadriláteros para calcular a tensão

na região de corrosão. A análise foi estendida para carregamento cíclico e os resultados se aproximam com os da experiência.

Cronin e Pick (2002) estudaram dutos com corrosão de profundidade não uniforme e o efeito de interação entre pites de corrosões adjacentes. Eles utilizaram o método de diferença profundidade ponderada (**Weighted Depth Difference method, WDD**) para calcular pressão de ruptura. Este método interpola valor da pressão de ruptura entre o limite superior e inferior previamente estabelecido. O limite superior é a pressão de falha calculada num duto íntegro, enquanto o limite inferior é calculado considerando um duto com defeito de profundidade uniforme, mas de comprimento infinito. A formulação de WDD é baseada na tensão equivalente de Von Mises. Este método foi aplicado para análise de 40 dutos com corrosão real e mostrou boa coincidência com dados experimentais, melhor do que método B31G.

Kim et al (2002) analisaram um duto com diferentes configurações de perfil de corrosão. O objetivo da pesquisa era calcular a pressão limite de plastificação via Método dos Elementos Finitos, e comparar os resultados de análise com soluções analíticas e empíricas encontradas na literatura.

Benjamin et al (2002) desenvolveram pesquisa conduzida pelo Petrobrás com o objetivo de calcular pressão de ruptura no duto com longo defeito corrosivo. Eles utilizaram dados experimentais de ensaios de ruptura previamente obtidos no ano de 2000 para validar o modelo computacional de elementos finitos. Neste trabalho, eles compararam modelos com elementos de casca e modelos com elementos sólidos e chegaram à conclusão de que ambos os elementos mostraram resultados satisfatórios referente aos dados experimentais para o caso de dutos de paredes fina. Os elementos de casca são mais eficazes e os elementos sólidos são mais precisos. O modelo computacional foi utilizado para estudo paramétrico que envolveu duas geometrias de corrosão diferentes, uma mais comprida do que a outra. Benjamin et al mostraram que, mantendo-se a mesma profundidade e circunferência, o duto que tiver maior comprimento de corrosão implica no menor capacidade de transporte de material.

Choi et al (2003) desenvolveram solução de estado limite para gasoduto corroído de aço X65. Eles realizaram experiência com sete vasos de pressão com os defeitos retangulares usinados e que foram submetidos á pressão hidrostática interna. Eles utilizaram dados experimentais para validar o modelo de elementos

finitos com elementos sólidos de 20 nós. O modelo foi construído inicialmente para análises de defeitos retangulares. Posteriormente foi ajustada para análise de defeitos elípticos. Eles observaram que os resultados obtidos via elementos finitos estavam em boa correspondência com os dados experimentais, quando a tensão limite é estabelecida a 80% de tensão última de material para defeito retangular, e 90 % para defeito elíptico. Observaram ainda que todas as fraturas na região da corrosão eram controladas pelo mecanismo de colapso plástico. Eles compararam os resultados de elementos finitos com o método B31G, e concluíram que este método analítico é conservativo no caso de corrosão curta e rasa, mas não é contra a segurança quando a corrosão é profunda e longa.

Benjamin e Andrade (2003) analisaram, através de Método dos Elementos Finitos, um duto de aço API X60 com defeito corrosivo e profundidade não uniforme. Elementos sólidos e elementos de casca foram adotados nesta análise e o ensaio de ruptura com duas amostras foi executado. O defeito no duto foi usinado por eletro erosão. A geometria da corrosão foi modelada como dois defeitos retangulares de diferentes dimensões, sendo um dentro do outro. O ensaio foi repetido para dois dutos corroídos com diferentes geometrias de corrosão. Pelo método de B31G, as corrosões nos dois dutos pertencem ao defeito longo.

Além de estudar corrosão não uniforme, Benjamin e Andrade (2003) desenvolveram um método modificado denominado RPA (**R**ectangular **P**arabolic **A**rea) para cálculo da resistência residual de duto corroído. O método RPA foi formulado baseado nos dados experimentais. Este método foi dividido em duas partes. Análise de defeito longo e defeito curto. O critério de classificação é o mesmo parâmetro do método B31G,  $\sqrt{20 D_{ext}/t}$ , onde  $D_{ext}$  é o diâmetro externo e  $t$  é a espessura da parede. Quando o comprimento  $L$  de defeito é maior que este parâmetro, então é considerado como corrosão longa, caso contrário, corrosão curta. A intenção dos pesquisadores era apresentar método que fosse menos conservativo do que o B31G.

Kim e Son (2004) calcularam fatores de concentração de tensões para dutos com defeitos corrosivos de diferentes configurações. Foram feitas análises via Método dos Elementos Finitos. Calcularam ainda esse fator para diferentes dimensões de defeitos.

Staat (2004) analisou pressão de colapso global e local num duto e vaso cilíndrico fissurado via Método dos Elementos Finitos. Ele adotou CTOD (Crack Tip Opening Displacement) como critério de falha. Os resultados de análise foram comparados com uma equação encontrada na literatura. O autor adotou métodos de análise que consistem em dividir o duto com corrosão em fatias transversais e longitudinais. O método global foi desenvolvido considerando divisão longitudinal do duto.

ADIB et al. (2006) apresentaram estudo sobre defeito no duto induzido pelo impacto de objeto externo. O material do duto é API-X52. Os autores assumiram um defeito com entalhe elíptico na superfície externa de duto, na direção longitudinal. Aplicando pressão interna de 7 MPa no modelo numérico simulado através do MEF, foi extraída a tensão efetiva na raiz de entalhe. Os conceitos da Mecânica de Fratura foram aplicados para estimativa de falha de acordo com SINTAP foi modificado. Os autores calcularam o fator de segurança conforme o SINTAP. O diagrama de determinação de falha leva em consideração colapso plástico, fratura frágil e falha elasto-plástica. O diagrama é apresentado como uma relação entre o fator de intensidade de tensão e a tensão ou carregamento aplicado. O objetivo principal do trabalho foi associar a Mecânica de Fratura, que é apenas aplicada para defeito tipo fissura, para defeitos do trinca afiada. Foi proposta metodologia para calcular o fator de intensidade de tensão para um entalhe. Esta metodologia é chamada Método do Volume. Tal método consiste em calcular a tensão efetiva e a distância efetiva. A partir então, calcular volume de fratura na raiz de entalhe. Este volume é caracterizado por um círculo com diâmetro igual a distância efetiva.

Ramezani et al. (2006) avaliaram integridade estrutural de gasoduto X52 com único defeito de corrosão externa. Neste trabalho, Ramezani et al. utilizaram o processo SINTAP (*Structural Integrity Assessment Procedure for European Industry*) com o auxílio de NFAD (Notch-based Failure Assessment Diagram) e compararam os resultados de análise com outros métodos empíricos conhecidos. As análises foram desenvolvidas com simulações de elementos finitos tridimensionais. Um modelo elastoplástico de fratura foi adotado para analisar a distribuição de tensão ao redor de defeito. O fator de concentração de tensão foi calculado para diferentes formatos de corrosão, semi-esférico, semi-elíptico e entalhe obtulongo.

OH et al. (2007) estudaram comportamento de dutos com defeitos tipo entalhe. Eles fizeram uma análise na região corroída com critério de fratura local. Tal critério foi desenvolvido nos trabalhos anteriores e junto, foi desenvolvido também outro critério chamado critério de seção média. Esses dois métodos foram aplicados para avaliar a pressão limite num duto que apresenta defeito tipo “gouge”. Finalmente propuseram uma equação inspirada pelo *ASME boiler and pressure vessel code section XI* para corrosão tipo fissura, para determinar pressão limite de duto com defeito “gouge”.

Chiodo e Ruggieri (2008) desenvolveram um modelo bidimensional de análise de duto com diferentes defeitos foi desenvolvido. A análise é baseada em estado plano de deformação e o resultado da análise foi comparado com o obtido por experiências, realizadas pelos autores. Foram considerados dois tipos de defeitos, retangular e entalhe. A análise foi feita para diversas variações de dimensões. No caso de defeito retangular, foi considerado um raio com adoçamento de 5 mm e sem adoçamento no fundo de defeito. Eles observaram que o desenvolvimento de zonas plásticas inicia nos cantos do defeito retangular e crescimento progressivo sobre o ligamento em direção ao centro do defeito. No caso do entalhe, o desenvolvimento das zonas de tensões de Von Mises inicia na raiz do mesmo e com subsequente crescimento sobre o ligamento ao longo de um ângulo de 45°.

Em seguida, serão apresentados artigos relativos à análise estrutural. O foco desta revisão é voltado para desenvolvimento de metodologia de análise não linear geométrica e física.

Tin-Loi e Xia (1999) apresentaram uma metodologia para análise de não linearidade geométrica na treliça espacial pelo MEF. A formulação se baseia em Teorema Lagrangeano Total e deslocamento incremental finito. Esta formulação leva em consideração três fatores: análise estática, cinemática e a lei constitutiva. Um aspecto particular dessa metodologia é a preservação de dualidade estática - cinemática pelo conceito de força fictícia. O algoritmo de solução adotado desse trabalho é o método de comprimento de arco.

Rodrigues (2000) desenvolveu metodologia computacional para análise não linear geométrica e física da plataforma de exploração de petróleo. No seu trabalho,

a discretização dos elementos de pórtico tridimensional se baseia em formulação corrotacional que leva em consideração rotação finita, além dos outros fenômenos, como grandes deslocamentos e pequenas deformações. Diferentes técnicas de solução foram utilizadas, tais como: controle de deslocamento, controle de deslocamentos generalizados e comprimento de arco constante. Uma ênfase particular foi dada à análise de não linearidade física, os efeitos de imperfeições geométricas e de tensões residuais foram tratados de maneira simples.

Kim et al. (2001) desenvolveram outra metodologia, baseada em MEF, para análise não linearidade física e geométrica de pórtico metálico tridimensional. A formulação de não linearidade física inclui o efeito de rótula plástica, enquanto a formulação de não linearidade geométrica se baseia nas funções de estabilidade. O algoritmo de solução adotado é método dos deslocamentos incrementais modificado.

Magdi (2001) trabalhou na dedução da superfície de escoamento para combinação de carregamento em duto, considerando o critério de Von Mises. Magdi deduziu as fórmulas que tratam interação entre torção-cortante e flexão-axial. Em os dois casos, equações analíticas foram deduzidas e verificadas com os dados experimentais. No mesmo trabalho, Magdi estendeu a dedução para comportamento elasto-plástico em que considerou rótulas plásticas nas extremidades dos nós.

Nowzartash e Mohareb (2004) desenvolveram um elemento chamado P3D2HE para modelar duto íntegro. Este elemento é do tipo pórtico com dois nós, e cada nó com seis graus de liberdade. Tal elemento é capaz de modelar cargas tipo força axial, esforços cortantes, momento torsional, momentos de flexão e pressão interna ou externa. Os autores incorporam modelo de plasticidade na formulação. As rótulas plásticas seguem comportamento elasto-plástico perfeito e tem o comprimento zero. Os autores também utilizaram hiper superfície de escoamento como equação de escoamento. Esta equação leva em consideração os esforços internos como principais parâmetros que controlam o comportamento da equação não linear.

Fonseca et al. (2005) apresentaram elemento duto capaz de analisar problema térmico e mecânico, porém de modo desacoplado. Além disso, os autores incluíram efeito de “warping” e a ovalização na formulação. O elemento tem dois nós, 12 graus de liberdade no total. O módulo de Young varia com a temperatura. As

funções para calcular o deslocamento estão baseadas em série de Fourier para condução de temperatura.

Abbasnia e Kassimali (2005) apresentaram estudo de estrutura com grandes deformações, e empregaram o conceito da rótula plástica. Fenômenos que envolvem grandes rotações e translações foram incorporados. O comportamento do material é considerado como elasto-plástico perfeito. Mas no trabalho apresentado, não mostrou claramente detalhes sobre a formulação de grandes deformações. Os casos analisados não mostraram resultados de deformação, mas sim de deslocamentos. Não se comentou também sobre a condição de estabilidade da estrutura sujeita a flambagem, assim como cálculo de fronteira de estabilidade. Já que se trata de grandes deformações, então além de formar rótula plástica, deveria estar sujeita tanto a condição de flambagem. Os autores apresentaram outra metodologia de fazer análise de material elasto-plástico perfeito. A formulação utilizada no trabalho se baseia no equilíbrio de função de escoamento via esforços internos que, por sua vez, são calculados através de deslocamento nodal e função de estabilidade.

Almeida e Lavalí (2007) apresentaram estudo de plasticidade distribuída no elemento pórtico. Os autores formularam matriz de rigidez para a plasticidade distribuída de comprimento diferente de zero ao longo do elemento. A formulação de elemento é feita baseada na formulação co-rotacional. Assim como a formulação da matriz de rigidez de plasticidade distribuída.

Forti et al. (2007) desenvolveram uma formulação de viga 3D para análise não linear física foi desenvolvida. Foi adotada teoria de viga de *Euler-Bernoulli* e foram desprezados os efeitos de cisalhamento devido à força cortante e à torção. Neste estudo, um perfil tubular foi utilizado e autores consideraram elementos infinitesimais na seção transversal para integração numérica. O comportamento do material é elasto-plástico perfeito. O elemento empregado é de dois nós e foi introduzido na equação de energia virtual. Tal equação foi resolvida pelo método de Galerkin. Os autores utilizaram método Newton-Raphson modificado para solucionar as equações não lineares.

Em 2007, Silvestre e Camotim publicaram um trabalho utilizando teoria de viga geral para investigar modos de instabilidade geométrica num cilindro. A teoria foi desenvolvida visando aplicação para aços de perfis não ramificados. Mas tarde,

outros pesquisadores estenderam a aplicação para aços de perfis ramificados. Neste trabalho, os autores utilizaram a teoria para analisar estabilidade local e global de tubo. Ao longo do trabalho, os autores desenvolveram conjunto de equações a partir da teoria de viga geral e compararam os resultados obtidos com aqueles que são obtidos pelo programa comercial de elementos finitos. No programa de elementos finitos, foi empregado elemento de casca. E os resultados se mostraram satisfatórios.

### **1.3. OBJETIVOS**

#### **1.3.1 Geral**

Propor nova metodologia para análise de tubulações com defeitos em sua superfície, empregando elementos finitos unidimensionais de pórtico, e incorporando efeitos locais, a partir de análises com elementos tridimensionais com programa comercial.

#### **1.3.2 Específicos**

- Desenvolver um programa denominado APC3D (**A**nálise de **P**órticos **C**orroídos **3D**), no compilador *COMPAQ VISUAL FORTRAN 90*, baseado em Método dos Elementos Finitos com elemento pórtico tridimensional de 3 nós que seja capaz de efetuar análise no regime elasto-plástico bilinear e não linearidade geométrica. A formulação da equação de equilíbrio se baseia na Lagrangeana Total e adota a hipótese de viga de Euler-Bernoulli.
- Possibilitar a consideração de interação solo-estrutura na formulação.
- Elaborar uma metodologia para inclusão do fator de concentração de tensão na formulação Lagrangeana do elemento viga e incluir este fator no programa.

## **1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

Este trabalho é dividido em oito capítulos. Capítulo 1, introdução e revisão bibliográfica sobre trabalhos já realizados por outros pesquisadores. No capítulo 2, uma simples revisão do mecanismo de corrosão é apresentada. No capítulo 3, é apresentada a teoria de Euler-Bernoulli utilizada para desenvolvimento do elemento de viga e a equação do Princípio dos Trabalhos Virtuais da viga solo-duto. No capítulo 4, é apresentada a teoria de Euler-Bernoulli utilizada para desenvolvimento do elemento de viga e a equação do Princípio dos Trabalhos Virtuais da viga solo-estrutura é feita revisão teórica sobre Mecânica do Contínuo e teorias de plasticidade. No capítulo 5, é apresentada formulação do elemento de viga utilizada neste trabalho. No capítulo 6, é apresentada a análise do fator de concentração de tensões no duto submetido a tração e pressão interna. Esta análise é feita tanto no regime linear quanto após a plastificação do material. A partir das análises feitas, foi formulada metodologia de introdução do fator de concentração de tensões na equação dos Trabalhos Virtuais. No capítulo 7, apresentam-se aplicações da metodologia desenvolvida no capítulo 6 em análise de estruturas e sistema de tubulações. No capítulo 8, apresenta-se conclusões do trabalho. E por último a referência bibliográfica.

## 2. CORROSÃO

### 2.1 MECANISMO BÁSICO

Nos processos de corrosão, os metais reagem com os elementos químicos não metálicos presentes no meio,  $O_2$ , S,  $H_2S$ ,  $CO_2$  entre outros, produzindo compostos semelhantes aos encontrados na natureza, dos quais os metais foram extraídos. Logo, nestes casos a corrosão corresponde ao inverso dos processos metalúrgicos. A figura 2.1 mostra esquematicamente esta idéia.

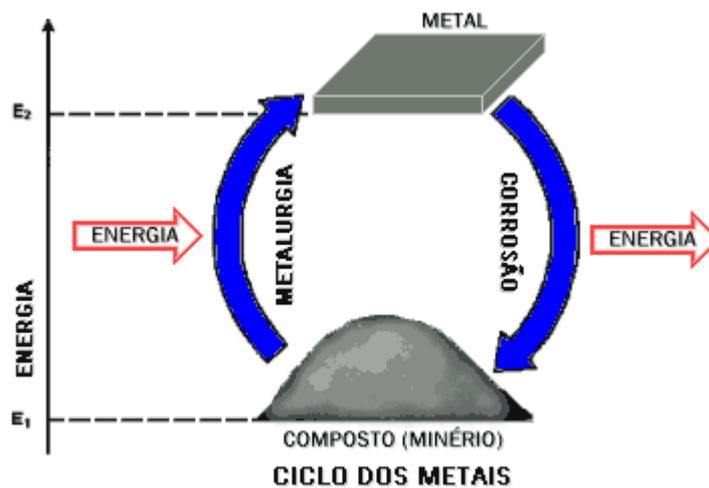


Figura 2.1 Mecanismo básico de corrosão. Fonte: [www.abraco.org](http://www.abraco.org)

Para que ocorra a corrosão, alguns fatores devem ser combinados, materiais metálicos, meio corrosivo e condições operacionais. São três principais fatores que interferem num processo corrosivo.

- Materiais metálicos: Composição química, impureza, processo de obtenção, tratamento térmico, condições de superfície, forma e metal em contato.
- Meio corrosivo: Composição química, umidade, temperatura, pressão, pH, teor de oxigênio etc.
- Condições operacionais: Solicitação mecânica, movimento relativo do material e meio de proteção contra corrosão, operação contínua ou interrompida.

Esses fatores interagem entre si, de tal forma que compõem o universo do fenômeno corrosivo e não é possível considerar um ou outro separadamente. Porém

para uma análise simplificada neste trabalho, a interação desses fatores foi desconsiderada. Outro parâmetro importante a ser considerado é a taxa de corrosão. Este parâmetro representa o quanto de material sofre de corrosão ao longo do tempo. A taxa de corrosão é diretamente proporcional à taxa do fluxo de corrente. A taxa do fluxo de corrente é afetada por diversos fatores; entre estes: resistividade do solo e a eficiência do revestimento da tubulação.

A princípio são dois os mecanismos de corrosão, químico e eletroquímico. No processo químico é necessário que uma reação química ocorra entre a superfície do sólido e o meio corrosivo. No processo eletroquímico, necessariamente na presença da água em forma líquida, alguns elementos são indispensáveis para ocorrência de corrosão. Ânodo, a superfície metálica que sofre oxidação, por conseqüência libera elétron ou íon para eletrólito e se deteriora. Cátodo, superfície metálica com redução de íon ao seu redor pelo recebimento de elétron. Eletrólito, o meio que se encontra reação eletroquímica de catodo e anodo. Assim a corrosão pode ser descrita por três processos, tal como mostra a figura 2.2.

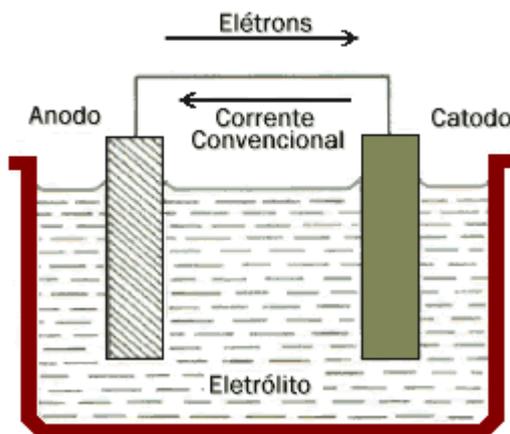


Figura 2.2 Corrosão eletroquímica. Fonte: [www.abraco.org](http://www.abraco.org)

## 2.2 MEIOS CORROSIVOS

Segundo Gentil (2003), São três meios principais que provocam corrosão: Atmosfera, água e solo.

### 2.2.1 Atmosfera

A atmosfera engloba um vasto âmbito de parâmetros físicos que se comportam como eletrólitos ou principais agentes corrosivos. Por exemplo, umidade relativa, substâncias poluentes, temperatura, vento, raio ultravioleta etc. A seguir será descrito sucintamente algum desses parâmetros que interferem de forma preponderante no processo corrosivo.

A corrosão pode ocorrer no ambiente totalmente seco. Neste caso, o processo corrosivo é causado principalmente pela oxidação lenta do metal, uma reação química pura, pois não existe película fina de líquido na superfície metálica que serve como eletrólito para transferência de elétron e produção de íon no ânodo. Numa atmosfera úmida, a velocidade de corrosão depende da umidade relativa. Abaixo de 60%, a velocidade de corrosão não apresenta crescimento apreciável. Acima de 60%, velocidade de corrosão torna-se cada vez mais acentuada.

Substâncias poluentes são partículas sólidas ou gases. Gases importantes no processo são: o gás carbônico, o ozônio, o dióxido de enxofre ou chuva ácida, os óxidos de nitrogênio, o gás sulfídrico, a amônia, o cloreto de hidrogênio, o fluoreto de hidrogênio. Esses gases normalmente têm a origem industrial. Dependendo do ambiente industrial em que a estrutura se encontra em serviço, a magnitude de corrosão pode variar conforme a concentração de cada gás.

As partículas sólidas participam do processo corrosivo quando são depositadas na superfície do metal.

- Deposição de substâncias que retêm a umidade acelerando processo corrosivo, pois aumentam o tempo de permanência da película líquida na superfície.
- Deposição de sais que são eletrólitos fortes, como sulfato de amônio  $(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4$  proveniente da reação entre amônia, óxidos de enxofre e cloreto de sódio.
- Deposição de material metálico de natureza química diferente da superfície onde está depositada. Neste caso, cria-se uma pilha de eletrodo diferente que possibilita a corrosão galvânica.
- Deposição de partículas sólidas que podem reter gases do efeito corrosivo provenientes da atmosfera.

Existem outros fatores importantes como o vento e o tempo de permanência de película líquida na superfície. A força de vento pode aumentar evaporação de líquido na superfície metálica, assim o tempo de permanência diminui. A circulação do ar num ambiente fechado pode também ser um parâmetro decisivo quanto se trata de processo corrosivo.

### **2.2.2 Água natural**

O metal, que está em contato com água, tende a sofrer corrosão, devido às substâncias químicas transportadas pela água. Sólidos em suspensão e sais são os principais contaminantes que induzem o processo corrosivo. Esses são os responsáveis pela criação de deposição sólida na superfície metálica, mecanismo semelhante de sólido poluente da atmosfera. A maior preocupação neste caso seria a água parada, pois a água corrente tem maior facilidade em remover o sólido depositado na superfície metálica pela força de arraste.

### **2.2.3 Solo**

O solo é um meio corrosivo importante pelo fato de que uma quantidade apreciável de tubos e dutos é enterrada abaixo da superfície. Os principais parâmetros físicos do mecanismo de corrosão não diferem muito dos relativos a atmosfera e água natural, tais como, umidade, pH, pressão, presença de sais, presença de lençol hídrico, sólidos ou minerais que estão em contato com o metal, e vários outros fatores.

No caso de tubulação enterrada, a célula de corrosão pode ser criada quando diferentes metais são empregados para construção de tubulação. Além disso, é provável que exista contato entre eles e que os mesmos compartilhem o mesmo eletrólito. Sob tais condições, é de esperar que exista uma diferença potencial elétrico entre eles.

Numa tubulação enterrada, os três principais elementos de célula de corrosão estão presentes na própria tubulação: anodo, catodo e o caminho elétrico metálico, tal como mostram as figura 2.3 (a)-(b)

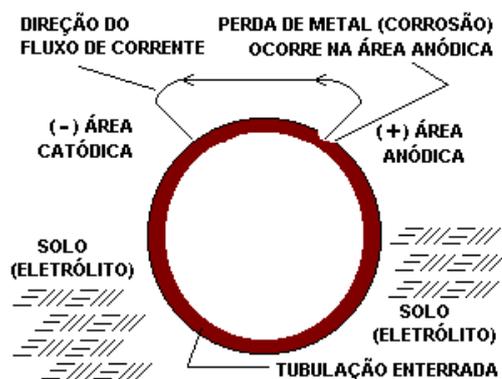


Figura 2.3 (a) Corrosão no duto enterrado.

Fonte: [www.abraco.org](http://www.abraco.org)

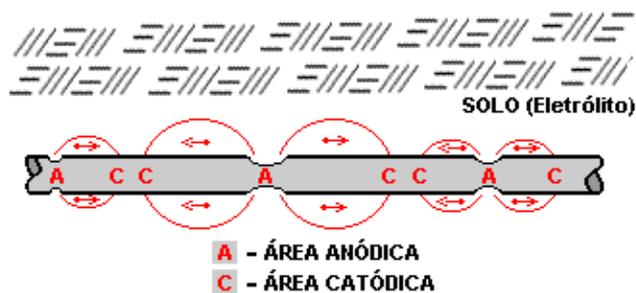


Figura 2.3 (b) Múltiplas células de corrosão ao longo de tubulação enterrada.

Fonte: [www.abraco.org](http://www.abraco.org)

Quando um trecho de tubulação é substituído por causa de corrosão por outro trecho de tubulação nova, este trecho novo é exposto às mesmas condições do solo. Seria lógico supor que trecho de tubulação novo teria vida útil igual ao da antiga. Porém a realidade é a outra. Esta nova tubulação falhará muito antes que o esperado. Pois o potencial da nova tubulação é diferente da tubulação vizinha, velha e enferrujada. Logo o aço novo é anódico e é corroído. Esta situação é mostrada pela figura 2.4.

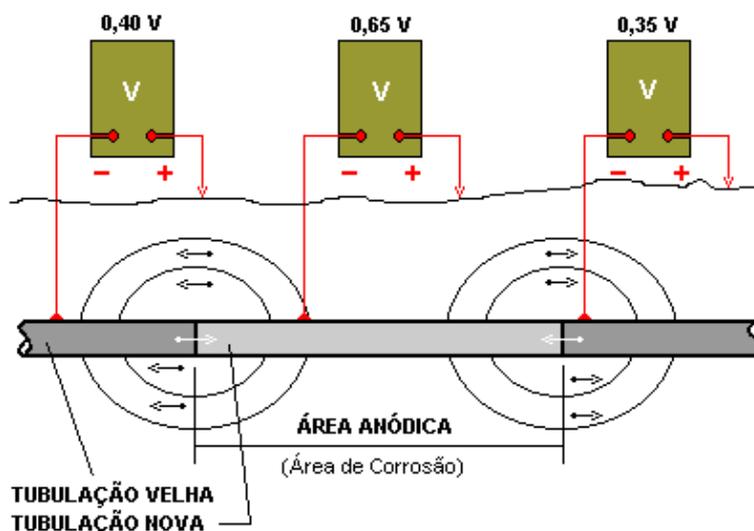


Figura 2.4 Corrosão de aço novo em contato com aço velho. Fonte:

[www.abraco.org](http://www.abraco.org)

Quando uma tubulação de aço atravessa solos heterogêneos também pode criar células de corrosão. O potencial de um metal em relação ao seu ambiente pode variar com as diferenças de composições do solo. Um exemplo do solo heterogêneo é o aço no solo versus aço no concreto. O ambiente eletrolítico do concreto (úmida e alto pH) é totalmente diferente do ambiente do solo circunvizinho, resultando assim diferenças no potencial do ambiente. Em geral, aço no solo é anódico em relação ao aço embutido no concreto. Esta situação é demonstrada pelas figuras 2.5 (a)-(b).

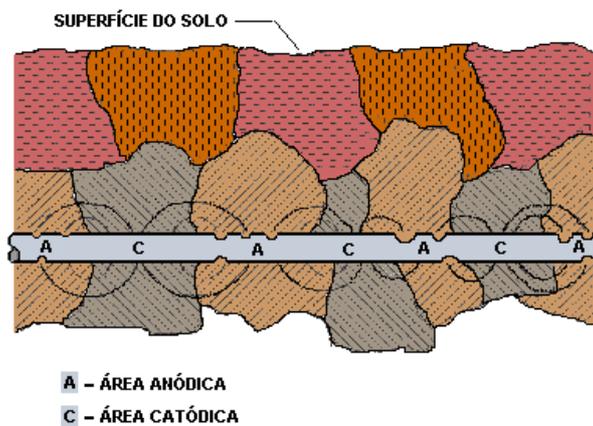


Figura 2.5 (a) Corrosão causada pela mistura de diversos solos. Fonte: [www.abraco.org](http://www.abraco.org)

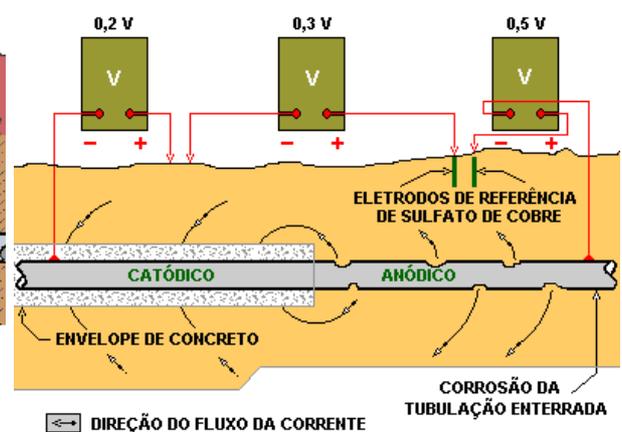


Figura 2.5 (b). Corrosão do aço em contato com concreto. Fonte: [www.abraco.org](http://www.abraco.org)

### 2.3 FORMAS DE CORROSÃO

Existem varias formas de corrosão, que se manifestam apresentando diferentes tipo de defeitos. Dentre elas, podem ser citado:

- Uniforme



Figura 2.6 Corrosão Uniforme. Fonte: [www.abraco.org](http://www.abraco.org)

A corrosão se processa em toda extensão da superfície de tal forma que ocorre perda uniforme de espessura, tal como mostra a figura 2.6.

- Por placas: A corrosão se localiza em certa região da superfície e não toda extensão.
- Alveolar: A corrosão se processa na superfície metálica na forma de alvéolo formando um fundo arredondado de profundidade geralmente menor que o seu diâmetro, tal como mostra a figura 2.7.
- Puntiforme ou por pite: A corrosão se processa em pontos ou em pequenas áreas da superfície formando um pite, que é uma cavidade com fundo anguloso e profundidade maior que o diâmetro. Como mostra a figura 2.8.

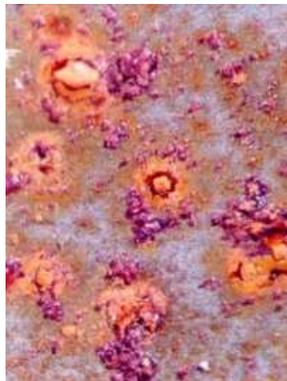


Figura 2.7 Corrosão Alveolar.  
Fonte: [www.abraco.org](http://www.abraco.org)

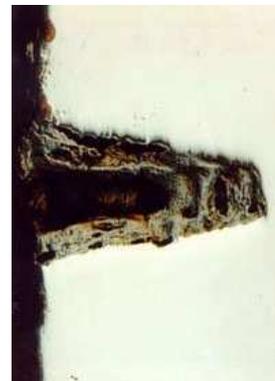


Figura 2.8 Corrosão Por Pite. Fonte:  
[www.abraco.org](http://www.abraco.org)

- Intergranular: A corrosão se processa entre os grãos de rede cristalina do material metálico, o qual perde sua propriedade mecânica e pode fraturar quando solicitado por esforços mecânicos, causando corrosão sob tensão fraturante (Stress Corrosion Cracking).
- Intragranular: A corrosão se processa nos grãos de rede cristalina do material metálico e sofre mesma consequência de corrosão intergranular.
- Filiforme: A corrosão se processa sob a forma de finos filamentos, mas não profundos, que se propagam em diferentes direções e que não se ultrapassam.
- Por esfoliação: A corrosão se processa de forma paralela à superfície metálica. A peça metálica que tiver seus grãos achatados cria condições para transformação de inclusões em plaquetas alongadas. Quando a corrosão ocorre, o processo atinge essas inclusões formando um produto corrosivo que causa a separação da camada de material metálico naquela região. Como mostra a figura 2.9.



Figura 2.9 Corrosão por esfoliação. Fonte: [www.abraco.org](http://www.abraco.org)

- Grafítica: A corrosão se processa no ferro fundido cinzento em temperatura ambiente e o ferro metálico é convertido em produtos de corrosão, restando a grafite intacta.
- Dezincificação: A corrosão se processa em ligas de cobre-zinco, observando-se o aparecimento de regiões com coloração avermelhada contrastando-se com a característica coloração amarela dos latões.
- Empolamento pelo hidrogênio: O hidrogênio atômico penetra no material metálico e, como tem pequeno volume atômico, difunde-se rapidamente formando  $H_2$  em regiões de descontinuidade como inclusões e vazios. As moléculas de  $H_2$  exercem pressão e originando a formação de bolhas.
- Em torno de cordão de solda: A corrosão se processa intergranularmente formando região de corrosão em torno de cordão de solda. Como mostra a figura 2.10.

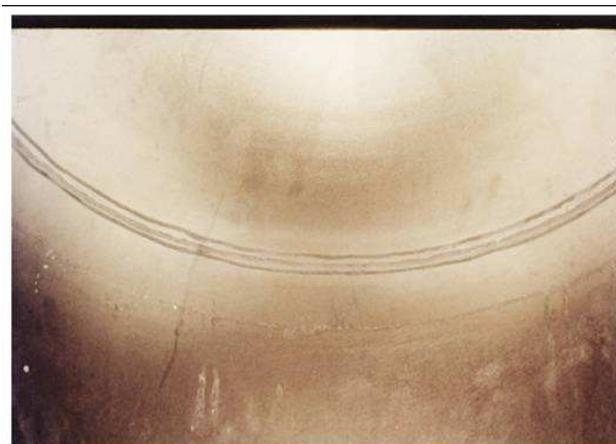


Figura 2.10 Corrosão em torno de cordão de solda. Fonte: [www.abraco.org](http://www.abraco.org)

### 3. MECÂNICA DO CONTÍNUO

Este capítulo trata-se de uma revisão teórica, baseada no Bonet & Wood, 1997, e Lai *et. al.* 1993. A Mecânica do contínuo é uma teoria geral que é utilizada tanto para análise de sólido quanto para análise de fluido. No estudo do comportamento não linear do sólido, alguns conceitos da mecânica do contínuo são imprescindíveis. Existem dois tipos de não linearidade, a geométrica e a física. Ambos podem ser tratados através dos conceitos da Mecânica do Contínuo. O comportamento do sólido é descrito pelas equações variacionais, por exemplo, do Princípio de Trabalho Virtual ou do Princípio da Energia Potencial Total Estacionária. Tais equações buscam o equilíbrio da energia interna com a energia externa geradas pelas solicitações externas. Para atingir o equilíbrio, alguns pontos dentro do corpo devem se deslocar e gerar deformações internas, que por sua vez geram tensões internas conforme as propriedades mecânicas e as relações constitutivas do material. A partir das tensões, são calculados os esforços internos para comparar com as solicitações externas e verificar as condições de equilíbrio.

A cinemática da mecânica do contínuo é o estudo de movimento e deformação sem envolver ainda os efeitos das solicitações externas, e deve ser examinada a fim de se procurar a configuração do equilíbrio da peça.

De acordo com Bathe (1996) numa análise não-linear podem-se adotar duas formas de referenciais Lagrangeanos: referencial Lagrangeano Total e referencial Lagrangeano Atualizado. As diferenças entre estes dois referenciais são apresentadas como:

- Referencial Lagrangeano Total – os deslocamentos são medidos em relação à configuração inicial deformada;
- Referencial Lagrangeano Atualizado – os deslocamentos são medidos em relação à última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental, ou seja, em relação a um referencial que é atualizado a cada incremento de carga.

A notação empregada com relação aos índices é dada da seguinte forma (Bathe, 1996):

- Índice superior esquerdo – denota a configuração na qual ocorre a variável;

- Índice inferior esquerdo – denota a configuração de referencia na qual ocorre a variável;
- Índice inferior direito – denota as componentes do vetor ou do tensor de segunda ordem;
- Índice inferior direito seguido de vírgula – denota em relação a qual variável ocorre a diferenciação.

Segundo Bathe (1996) a formulação Lagrangeana Total (L.T) é referida simplesmente como formulação Lagrangeana. Neste esquema de solução todas as variáveis estáticas e cinemáticas são referidas a configuração inicial no tempo 0.

A equação básica (equação do movimento) nesta formulação é dada por:

$$\int {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} R \quad (3.1)$$

Onde  ${}^{t+\Delta t} S_{ij}$  é o segundo tensor de tensão Piola-Kirchhoff no tempo  $t + \Delta t$  referido a configuração no tempo 0,  ${}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij}$  é o tensor de deformações de Green-Lagrange no tempo  $t + \Delta t$  referido a configuração no tempo 0 e  ${}^{t+\Delta t} R$  é o trabalho virtual externo. Esta expressão também depende em geral da área superficial e do volume do corpo sob consideração.

A equação do movimento linearizada na formulação L.T. é:

$$\int_{0V} {}_0 C_{ijrs} e_{rs} \delta_0 e_{ij} d^0 V + \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta_0 \eta_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} R - \int_{0V} {}^t S_{ij} \delta_0 e_{ij} d^0 V \quad (3.2)$$

Onde  ${}_0 C_{ijrs}$  é o tensor de tensão - deformação incremental no tempo t referido à configuração no tempo 0;  ${}^t S_{ij}$  é o tensor de tensão segundo Piola-Kirchhoff no tempo t; e  ${}_0 \eta_{ij}$ ,  ${}_0 e_{ij}$  são as deformações incrementais lineares e não-lineares referidas à configuração no tempo 0.

Em uma análise não-linear com grandes deslocamentos, a configuração do corpo altera continuamente. Portanto as tensões e deformações devem ser avaliadas independentemente do conhecimento prévio da configuração no tempo

$t + \Delta t$ . Essa condição é satisfeita com o emprego do segundo tensor de tensões Piola-Kirchhoff, e do seu conjugado, o tensor de deformações de Green-Lagrange (Bathe, 1996).

O segundo tensor de tensões Piola-Kirchhoff é invariável à ocorrência de grandes deslocamentos e grandes rotações do material, ou seja, invariável à ocorrência de grandes deslocamentos. O seu emprego permite utilizar qualquer configuração do corpo conhecida viabilizando o desenvolvimento da análise, já que a configuração no tempo  $t + \Delta t$  não é conhecida (Bathe, 1996).

### 3.1 GRADIENTE E TENSOR DE DEFORMAÇÃO

O parâmetro chave na análise não linear é o tensor gradiente de deformação  $\mathbf{F}$ , que está envolvido em todas as equações relacionando a configuração indeformada com a configuração deformada. Através do tensor gradiente de deformação, é possível a descrição das coordenadas espaciais (depois da deformação) de duas partículas vizinhas em termos das coordenadas materiais antes da deformação.

Considere-se duas partículas materiais  $Q_1$  e  $Q_2$  na vizinhança de uma partícula de material  $P$ , como mostra a figura 3.1. As posições de  $Q_1$  e  $Q_2$  em relação à  $P$  são dadas pelos vetores elementares indeformados  $d\mathbf{x}_1$  e  $d\mathbf{x}_2$ .

$$d\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_{Q_1} - \mathbf{x}_P; \quad d\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_{Q_2} - \mathbf{x}_P \quad (3.3)$$

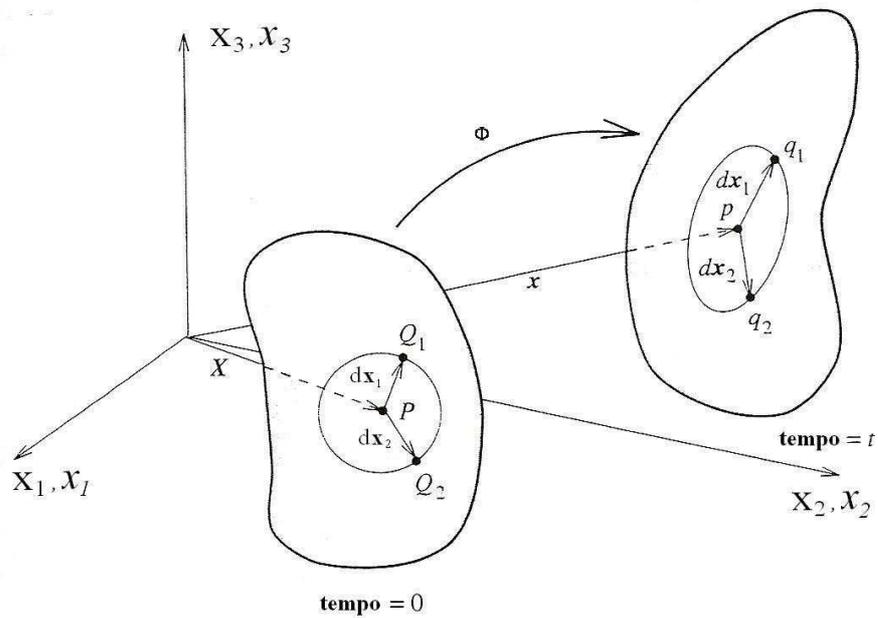


Figura 3.1 Variação de vetores elementares na deformação do corpo (Bonet et al,1997).

Após o movimento, as partículas materiais  $P$ ,  $Q_1$  e  $Q_2$  ocuparão novas coordenadas espaciais na configuração deformada ou atual.

$$\mathbf{x}_p = \Phi(\mathbf{x}_P, t); \mathbf{x}_{q_1} = \Phi(\mathbf{x}_{Q_1}, t); \mathbf{x}_{q_2} = \Phi(\mathbf{x}_{Q_2}, t) \quad (3.4)$$

Os correspondentes vetores elementares deformados são:

$$\begin{aligned} dx_1 &= \mathbf{x}_{q_1} - \mathbf{x}_p = \Phi(\mathbf{x}_p + dx_1, t) - \Phi(\mathbf{x}_p, t) \\ dx_2 &= \mathbf{x}_{q_2} - \mathbf{x}_p = \Phi(\mathbf{x}_p + dx_2, t) - \Phi(\mathbf{x}_p, t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Logo define-se tensor de gradiente de deformação  $\mathbf{F}$  como:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \Phi \quad (3.6)$$

A partir disso se define um vetor elementar na configuração deformada

$$dx_1 = \mathbf{F} dx_1 \text{ e } dx_2 = \mathbf{F} dx_2 \quad (3.7)$$

Note-se que o tensor gradiente de deformação transforma os vetores da configuração inicial em vetores na configuração atual.

Como uma medida geral de deformação, considere as variações em produtos escalares de dois vetores elementares  $dx_1$  e  $dx_2$  quando os mesmos se deformam em vetores  $d\mathbf{x}_1$  e  $d\mathbf{x}_2$ . Tais variações envolvem mudança no comprimento e variação de ângulo entre os dois vetores. Recordando a equação (3.7), os vetores espaciais escalares  $d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2$  podem ser definidos como:

$$d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{C} d\mathbf{x}_2 \quad (3.8)$$

$\mathbf{C}$  é o tensor de deformação direita de *Cauchy-Green*, que por sua vez é definido como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (3.9)$$

Note que o tensor  $\mathbf{C}$  opera junto com os vetores  $d\mathbf{x}_1$  e  $d\mathbf{x}_2$ , por conseqüência o tensor  $\mathbf{C}$  é chamado como tensor de deformação material.

Analogamente, o produto escalar de dois vetores materiais,  $dx_1$  e  $dx_2$  pode ser calculado em termos de vetores espaciais  $d\mathbf{x}_1$  e  $d\mathbf{x}_2$  via *Cauchy-Green* esquerda, tensor  $\mathbf{b}$ .

$$dx_1 \cdot dx_2 = d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{b}^{-1} d\mathbf{x}_2 \quad (3.10)$$

Onde  $\mathbf{b} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T$ .

Observe que  $\mathbf{b}^{-1}$  opera nos vetores espaciais  $d\mathbf{x}_1$  e  $d\mathbf{x}_2$ , por este motivo, o tensor  $\mathbf{b}^{-1}$  ou  $\mathbf{b}$  é chamado de tensor de deformação espacial.

A variação nos produtos escalares pode ser calculada em termo de vetores materiais  $dx_1$  e  $dx_2$ , e o tensor de deformação Lagrangeana ou Green  $\mathbf{E}$  é expresso como:

$$\frac{1}{2}(d\mathbf{x}_1 \cdot d\mathbf{x}_2 - dx_1 \cdot dx_2) = d\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{E} d\mathbf{x}_2 \quad (3.11)$$

Onde o tensor material  $\mathbf{E}$  é expresso como:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (3.12)$$

### 3.2 TENSOR DE PIOLA-KIRCHHOFF

O tensor de tensão Cauchy é calculado referenciando a configuração deformada. Porém, esta configuração não é conhecida *a priori*. Na análise numérica de um sólido, geralmente a simulação é feita incrementalmente, referenciando a uma configuração indeformada. Logo, a tensão calculada ao longo da simulação, não pode ser considerada como tensão de Cauchy. Por este motivo, foi desenvolvida outra tensão denominada como tensão de Piola-Kirchhoff para relacionar a tensão da configuração deformada com a tensão da configuração indeformada. A equação (3.13) mostra como a tensão de Cauchy é relacionada com a primeira tensão de Piola-Kirchhoff.

$$\mathbf{s}_{ij} = (\det \mathbf{F}) \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (3.13)$$

Pode ser anotado que o primeiro tensor de tensão Piola-Kirchhoff é em geral assimétrico. O tensor assimétrico apresenta dificuldades para ser solucionado. Para facilitar o tratamento numérico, foi desenvolvido outro tensor denominado como segundo tensor de Piola-Kirchhoff (Bonet & Wood, 1997):

$$\mathbf{S}_{ij} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{s}_{ij} \quad (3.14)$$

Equação (3.14) fornece a relação entre primeiro tensor de tensão Piola-Kirchhoff  $\boldsymbol{\sigma}_{PK1}$  e o Segundo tensor de tensão Piola-Kirchhoff  $\boldsymbol{\sigma}_{PK2}$ . Agora, pelas equações (3.13) e (3.14), pode ser obtido facilmente a relação entre Segundo tensor de tensão Piola-Kirchhoff e o tensor de tensão de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$ , fica:

$$\mathbf{S}_{ij} = (\det \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T \quad (3.15)$$

Pode ser anotado que o Segundo tensor de tensão Piola-Kirchhoff é sempre um tensor simétrico se o da tensão de Cauchy é simétrico.

### **3.3 PLASTICIDADE**

Em muitos problemas de engenharia, a teoria de elasticidade nem sempre descreve o comportamento real dos materiais. Especialmente em circunstâncias em que o material admite relação não linear entre tensão e deformação, ou ainda, quando ocorre plastificação. Neste caso, a tensão sofrida pelo material ultrapassa a tensão de escoamento, e quando o carregamento é removido na peça, a mesma não retornará à sua configuração original. Este fenômeno exige tratamento matemático mais complexo do que o da elasticidade. No presente trabalho, o tratamento matemático da plasticidade restringe-se aos materiais com endurecimento isotrópico.

Materiais com comportamento isotrópico são aqueles em que durante o processo de escoamento plástico, a superfície de escoamento do material se expande sem distorção e translação, como mostra a figura 3.2. Outros tipos de materiais podem apresentar comportamentos diferentes, especialmente por conta do efeito de Bauschinger. Considere-se um corpo de ensaio solicitado pela força de tração ou compressão até regime plástico. O carregamento é removido e o corpo de ensaio é carregado novamente na direção contrária até escoamento. Foi observado que a tensão de escoamento no recarregamento de direção contrária é menor do que tensão de escoamento na direção original, como mostra a figura 3.3. Este efeito de Bauschinger foi observado em metais policristalinos. Refere-se a um fenômeno direcional anisotrópico induzido pelas deformações plásticas; uma deformação plástica com um sinal contrário tende a reduzir a resistência do material quando a peça é submetida a um novo carregamento.

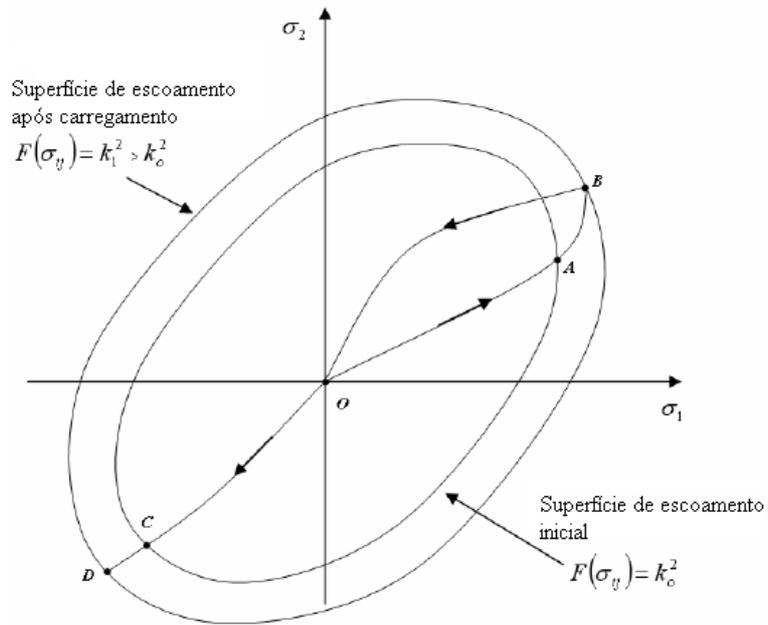


Figura 3.2 Superfície de escoamento após carregamento no material que apresenta encruamento isotrópico. (Cardoso, 2005)

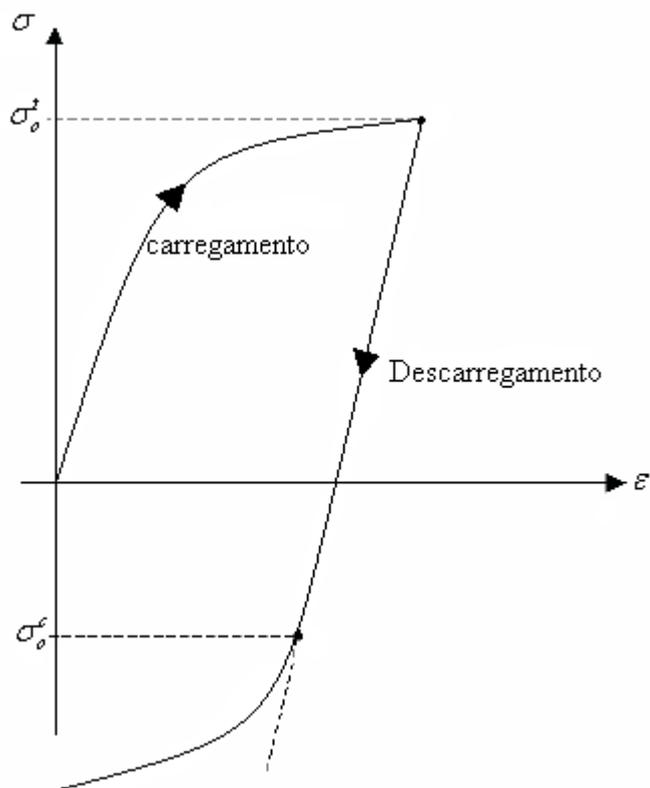


Figura 3.3 Curva de tensão – deformação mostrando efeito de Bauschinger.

Na teoria de plasticidade, é de costume decompor o tensor de tensão em duas partes:

$$\sigma_{PK2ij} = p\delta_{ij} + S_{ij} \quad (3.16)$$

sendo  $p$  é a pressão hidrostática dada por:

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (3.17)$$

e  $p\delta_{ij}$  é chamado por componente tensão hidrostática. A segunda parte  $S_{ij}$  é calculada como:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (3.18)$$

e é chamada de tensor de tensão desviatória.

As tensões desviatórias principais podem ser relacionadas com tensões principais através da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \\ S_2 &= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} \\ S_3 &= \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{aligned} \quad (3.19)$$

ou

$$S_i = \sigma_i - p \quad (3.20)$$

A plastificação do material é comandada principalmente pelas tensões desviatórias, mas não pela tensão hidrostática. Assim sendo, para calcular a expansão da superfície de escoamento para um material com endurecimento isotrópico, é necessário primeiramente calcular as tensões desviatórias.

Define-se uma função de escoamento que depende de estado de tensões e parâmetros do material. O escoamento do material ocorre quando a superfície de escoamento do material alcançar o limite de regime elástico, dados pela expressão

$F(\sigma_{ij}) = k^2(\epsilon_p)$ . Neste caso  $F$  representa a superfície do escoamento do material comandada pelo parâmetro  $k$  que está relacionado com a deformação plástica medida através de um ensaio uniaxial. No desenvolvimento da teoria de plasticidade para material isotrópico com endurecimento, as seguintes condições são necessárias:

1. Existência de uma superfície inicial de escoamento que define o limite elástico do material para um estado multiaxial das tensões.
2. Lei de endurecimento que descreva a evolução da superfície de escoamento, durante o processo de carregamento.
3. Lei de escoamento, que relaciona a função de potencial plástico com a direção e o valor da deformação plástica no espaço de tensões.

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) = F(\sigma_{ij}) - \kappa^2(\epsilon_p) \quad (3.21)$$

A reação do material é elástica quando:

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) < 0 \quad (3.22)$$

E plástico ou elástico, dependendo da condição de carregamento, quando:

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) = 0 \quad (3.23)$$

Porém, se  $f(\sigma_{ij}, \kappa) > 0$  é uma condição inadmissível. Portanto, a equação (3.23) deve ser atendida apenas durante regime plástico.

Assumindo que a lei de escoamento é aplicável durante a resposta plástica, então a função  $f(\sigma_{ij}, \kappa)$  é utilizada na lei de escoamento para obter incremento de deformação plástica.

$$de_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.24)$$

sendo  $d\lambda$  um escalar a ser determinado. A lei de endurecimento, que também depende do tipo do material, muda as variáveis em função  $f(\sigma_{ij}, \kappa)$  como uma consequência de escoamento plástico, e por consequência muda as condições de escoamento durante o regime plástico.

Neste trabalho, é considerado material metálico que apresenta comportamento não linear físico de acordo com critério de escoamento de Von Mises e endurecimento isotrópico. Em seguida é apresentada uma metodologia de solução conhecida como *método de retorno radial*. Os parâmetros como tensão desviatória e as deformações são consideradas nas direções principais.

Na plasticidade de Von Mises, as deformações plásticas volumétricas são nulas. Então é conveniente expressar a relação geral de tensão – deformação no tempo  $t + \Delta t$  na forma:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{s} = \frac{E}{1+\nu} \left( {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}' + {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^p \right) \quad (3.25)$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma_m = \frac{E}{1-2\nu} {}^{t+\Delta t}e_m \quad (3.26)$$

Onde  $\mathbf{s}$  é o vetor de tensões desviatórias com os componentes:

$${}^{t+\Delta t}s_{ij} = {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} - {}^{t+\Delta t}\sigma_m \delta_{ij} \quad (3.27)$$

${}^{t+\Delta t}\sigma_m$  é a tensão média ou tensão hidrostática.

$${}^{t+\Delta t}\sigma_m = \frac{{}^{t+\Delta t}\sigma_{ii}}{3} \quad (3.28)$$

${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'$  é o vetor de deformações desviatórias com os componentes:

$${}^{t+\Delta t}e'_{ij} = {}^{t+\Delta t}e_{ij} - {}^{t+\Delta t}e_m \delta_{ij} \quad (3.29)$$

${}^{t+\Delta t}e_m$  é a deformação média.

$${}^{t+\Delta t}e_m = \frac{{}^{t+\Delta t}e_{ii}}{3} \quad (3.30)$$

A partir das equações (3.25)-(3.30), somente desconhecidas a deformação plástica,  ${}^{t+\Delta t}e_{ij}^p$ , e tensão desviatória,  ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ .

Considerando que os componentes de tensão e deformação são conhecidos no tempo  $t$ , assim a equação (3.25) pode ser escrita pela seguinte forma:

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left( {}^{t+\Delta t}e_{ij}'' - \Delta e_{ij}^p \right) \quad (3.31)$$

onde

$${}^{t+\Delta t}e_{ij}'' = {}^{t+\Delta t}e_{ij}' - {}^t e_{ij}^p \quad (3.32)$$

A tarefa agora é calcular as tensões desviatórias e o incremento de deformação plástica sujeitos as condições de escoamento, a lei de endurecimento e a lei de escoamento.

Pelo critério de Von Mises, a condição de escoamento no tempo  $t + \Delta t$  é:

$${}^{t+\Delta t}f^{vm} = \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \cdot {}^{t+\Delta t}S_{ij} - \frac{1}{3} \left( {}^{t+\Delta t}\sigma_{esc} \right)^2 = 0 \quad (3.33)$$

Onde  ${}^{t+\Delta t}\sigma_{esc}$  é a tensão de escoamento no tempo  $t + \Delta t$ .

## 4. FORMULAÇÃO DE ELEMENTO DE VIGA DE EULER -BERNOULLI PARA ANÁLISE DE DUTOS

Neste capítulo é apresentada uma formulação do modelo solo-duto utilizado para modelagem de duto enterrado. Em termos práticos, dois tipos de modelos são utilizados para modelagem de dutos: modelos que usam elemento de casca/sólido ou modelos 1D de elemento de viga. Os elementos de casca/sólido apresentam capacidade em analisar o caso de dutos carregados, considerando a flambagem local, causas freqüentes para ruptura de duto. Para dutos com defeitos quaisquer, o modelo geométrico é, por natureza, tridimensional. A prática mais comum neste caso é modelar com elemento de casca ou mais precisamente elemento sólido. Os elementos tridimensionais são ideais para análise de efeitos locais, tais como flambagem local, plastificação na região de corrosão, ou interação de diversas colônias de defeitos. Porém, mesmo modelando um duto num trecho de comprimento limitado, os elementos de casca ou sólido requerem maior esforço computacional, por que são elementos de elevado grau de liberdade. No caso de análise de dutos com longo comprimento e que apresentam ramificações, a malha de elementos de casca/sólido não é indicada para este tipo de análise. Nestes casos, o elemento de viga é recomendado apesar da sua simplicidade. Uma das limitações é a exclusão do efeito de flambagem local. Além disso, a ovalização na seção transversal e fratura local não são inclusos. Assim, algumas hipóteses são consideradas para que a formulação do modelo de viga seja possível.

As equações de equilíbrio de viga-duto são determinadas através do princípio de trabalhos virtuais. A descrição cinemática do modelo inclui efeitos de não linearidade geométrica, devido à possibilidade de desenvolvimento de grandes deslocamentos e pequenas deformações. Tal descrição é baseada na Formulação Lagrangeana Total. O efeito de não linearidade física também é incorporado no modelo considerando que o duto teria comportamento de elasto-plástico bilinear, com endurecimento isotrópico. No caso do solo, admite-se o comportamento elasto-plástico perfeito.

Considerando um duto carregado com cargas externas e a pressão interna, o modelo de viga duto permite calcular três tipos de tensões: longitudinal, radial e tangencial. A tensão radial é a menor entre outras duas tensões. A tensão

longitudinal é calculada através da lei constitutiva do material. Em cada incremento, a deformação é calculada através das equações deduzidas pela descrição cinemática, na seção transversal de cada ponto de integração de Gauss. Devida a não linearidade física e geométrica do modelo, a variação da tensão longitudinal é calculada para cada passo de incremento. A tensão tangencial é calculada pela equação de *Lamé* com o incremento de pressão em cada passo.

No desenvolvimento do modelo matemático é considerada seguinte hipótese fundamental:

- A viga duto é formulada segundo teorema de Viga Euler-Bernoulli

A viga é caracterizada pelo suporte de cargas transversais que produzem efeitos de flexão no corpo. A flexão produz tensão de tração e compressão em cada lado de superfície. As duas superfícies são separadas pela superfície neutra de tensão nula que coincide com o eixo do centróide da viga no caso de flexão pura. A figura 4.1 ilustra esquematicamente as características de viga Euler-Bernoulli.

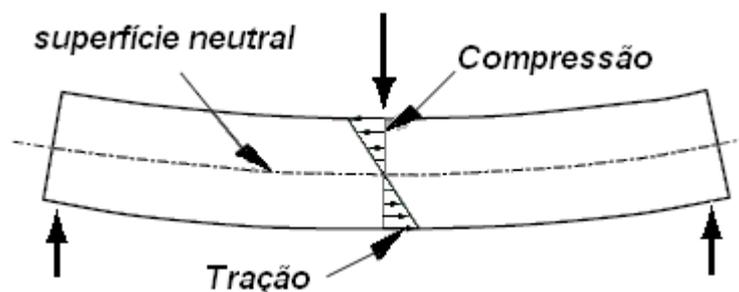


Figura 4.1 Ilustração de característica de viga Euler-Bernoulli.

Um dos modelos matemáticos mais conhecidos é a viga de Euler-Bernoulli. Em seguida são apresentadas as hipóteses:

1. A existência da linha neutra onde a viga não sofre tração nem compressão na flexão pura.
2. A seção transversal que era originalmente perpendicular ao eixo longitudinal permanece plano e perpendicular ao eixo longitudinal após a deformação.
3. A deformação de cisalhamento é excluída. Esta hipótese é justificável devido à distorção da seção transversal e o empenamento resultarem principalmente da flambagem local.

- No duto submetido à pressão interna, existem as tensões tangenciais e radiais. A tensão máxima segundo a solução de *Lamé* para cilindros de parede fina é a tangencial. Em função desta conclusão, no modelo em estudo, a tensão radial é desprezada, devido ao seu valor relativamente menor comparado com outras tensões.
- Assume-se um comportamento elasto-plástico do material com endurecimento isotrópico. A expansão de superfície de escoamento é dada de acordo com critério de Von Mises.
- O solo é simulado pela fundação tipo *Winkler*. Este modelo consiste de molas de solo elásticas idealmente plásticas, discretas, conectadas nas paredes do duto ao longo do seu eixo, nas direções transversal e longitudinal. Este modelo considera que o solo circundante ao duto pode ser dividido em partes e a reação de cada uma dessas pode ser representada por molas de solo. Porém, a interação entre as partes é negligenciada, conforme a conclusão de Mejía, 2003 (ap. ud. Souza, 2005).

#### 4.1 RELAÇÃO DEFORMAÇÃO – DESLOCAMENTO

Os deslocamentos na coordenada global do eixo centroidal são obtidos a partir dos deslocamentos incrementais.

$$\begin{aligned}
 {}^{t+\Delta t}\tilde{u}_o &= {}^t\tilde{u}_o + {}_t\tilde{u}_o \\
 {}^{t+\Delta t}\tilde{v}_o &= {}^t\tilde{v}_o + {}_t\tilde{v}_o \\
 {}^{t+\Delta t}\tilde{w}_o &= {}^t\tilde{w}_o + {}_t\tilde{w}_o
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

O deslocamento no tempo de referência  $t$  de qualquer ponto do corpo na seção transversal é calculado pelas equações abaixo:

$$\begin{aligned}
 {}_t u &= {}_t u_o - \frac{\partial {}_t v_o}{\partial {}^t x_1} x_2 + \frac{\partial {}_t w_o}{\partial {}^t x_1} x_3 \\
 {}_t v &= {}_t v_o \\
 {}_t w &= {}_t w_o
 \end{aligned}
 \tag{4.2}$$

Os deslocamentos totais acumulados nos sistemas de coordenadas globais são apresentados como:

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\tilde{u} &= {}^t\tilde{u} + {}_t\tilde{u} \\ {}^{t+\Delta t}\tilde{v} &= {}^t\tilde{v} + {}_t\tilde{v} \\ {}^{t+\Delta t}\tilde{w} &= {}^t\tilde{w} + {}_t\tilde{w} \end{aligned} \quad (4.3)$$

E o tensor de deformação Green-Lagrange é calculado levando em conta termos não lineares.

$${}^t\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( {}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j} \right) \quad (4.4)$$

Expandindo a equação (4.4) e considerando que só existe a deformação longitudinal, tem-se:

$${}^t\varepsilon_{1,1} = {}^t\varepsilon_{x_1} = \frac{1}{2} \left( {}^t u_{1,1} + {}^t u_{1,1} + {}^t u_{1,1} {}^t u_{1,1} + {}^t u_{2,1} {}^t u_{2,1} + {}^t u_{3,1} {}^t u_{3,1} \right) \quad (4.5)$$

Substituindo conjunto de equações (4.2) na equação (4.5) resulta:

$$\begin{aligned} {}^t\varepsilon_{1,1} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^t u}{\partial x_1} + \frac{\partial^t u}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial^t u}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial^t v}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial^t w}{\partial x_1} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\partial^t u_o}{\partial x_1} - \frac{\partial^t v_o}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{\partial^t w_o}{\partial^t x_1^2} x_3 + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial^t u_o}{\partial^t x_1} - \frac{\partial^t v_o}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{\partial^t w_o}{\partial^t x_1^2} x_3 \right)^2 + \left( \frac{\partial^t v_o}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial^t w_o}{\partial x_1} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\partial^t u_o}{\partial x_1} - \frac{\partial^t v_o}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{\partial^t w_o}{\partial^t x_1^2} x_3 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^t u_o}{\partial^t x_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^t u_o}{\partial^t x_1} \frac{\partial^t v_o}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^t u_o}{\partial^t x_1} \frac{\partial^t w_o}{\partial^t x_1^2} x_3 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial^t u_o}{\partial^t x_1} \frac{\partial^t v_o}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^t v_o}{\partial^t x_1^2} x_2 \right)^2 - \frac{1}{2} x_2 x_3 \frac{\partial^t v_o}{\partial^t x_1^2} \frac{\partial^t w_o}{\partial^t x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^t u_o}{\partial^t x_1} \frac{\partial^t w_o}{\partial^t x_1^2} x_3 - \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial^t v_o}{\partial^t x_1^2} \frac{\partial^t w_o}{\partial^t x_1^2} x_2 x_3 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^t w_o}{\partial^t x_1^2} x_3 \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^t v_o}{\partial^t x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^t w_o}{\partial^t x_1} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Desprezando os termos  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_2^2$ ,  $x_3^2$ , a equação (4.6) fica:

$$\begin{aligned}
{}^t \varepsilon_{1,1} = & \frac{\partial_t u_o}{\partial^t x_1} - \frac{\partial_t^2 v_o}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{\partial_t^2 w_o}{\partial^t x_1^2} x_3 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_t u_o}{\partial^t x_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial_t u_o}{\partial^t x_1} \frac{\partial_t^2 v_o}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial_t u_o}{\partial^t x_1} \frac{\partial_t^2 w_o}{\partial^t x_1^2} x_3 - \\
& - \frac{1}{2} \frac{\partial_t u_o}{\partial^t x_1} \frac{\partial_t^2 v_o}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial_t u_o}{\partial^t x_1} \frac{\partial_t^2 w_o}{\partial^t x_1^2} x_3 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_t v_o}{\partial^t x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial_t w_o}{\partial^t x_1} \right)^2
\end{aligned} \quad (4.7)$$

As parcelas da equação (4.7) podem ser tratadas como:

$${}^t \varepsilon_o^L = \frac{\partial_t u_o}{\partial^t x_1} = \frac{\partial_t u_o}{\partial^o \xi} \frac{d^o \xi}{d^o x_1} = \frac{2}{{}^o L} \frac{\partial_t u_o}{\partial^o \xi} \quad \text{deformação incremental}$$

$${}^t \phi_z^L = \frac{\partial_t^2 v_o}{\partial^t x_1^2} = \frac{4}{{}^o L^2} \frac{\partial_t^2 v_o}{\partial^o \xi^2} \quad \text{curvatura incremental em } X_3$$

$${}^t \phi_y^L = \frac{\partial_t^2 w_o}{\partial^t x_1^2} = \frac{4}{{}^o L^2} \frac{\partial_t^2 w_o}{\partial^o \xi^2} \quad \text{curvatura incremental em } X_2$$

(4.8)

$${}^t \theta_z^L = \frac{\partial_t v_o}{\partial^t x_1} = \frac{2}{{}^o L} \frac{\partial_t v_o}{\partial^o \xi} \quad \text{rotação incremental em torno do eixo } X_3$$

$${}^t \theta_y^L = \frac{\partial_t w_o}{\partial^t x_1} = \frac{2}{{}^o L} \frac{\partial_t w_o}{\partial^o \xi} \quad \text{rotação incremental em torno do eixo } X_2$$

Então substituindo conjunto de equações (4.8) na equação (4.7), fica:

$$\begin{aligned}
{}^t \varepsilon_{x_1} = & {}^t \varepsilon_o^L - {}^t \phi_z^L x_2 + {}^t \phi_y^L x_3 + \frac{1}{2} \left( {}^t \varepsilon_o^L \right)^2 - \frac{1}{2} {}^t \varepsilon_o^L {}^t \phi_z^L x_2 + \frac{1}{2} {}^t \varepsilon_o^L {}^t \phi_y^L x_3 - \frac{1}{2} {}^t \varepsilon_o^L {}^t \phi_z^L x_2 + \\
& + \frac{1}{2} {}^t \varepsilon_o^L {}^t \phi_y^L x_3 + \frac{1}{2} \left( {}^t \theta_y^L \right)^2 + \frac{1}{2} \left( {}^t \theta_z^L \right)^2
\end{aligned} \quad (4.9)$$

A equação (4.9) pode ser decomposta em duas parcelas:

$${}^t \varepsilon_{x_1} = {}^t \varepsilon_{x_1}^L + {}^t \varepsilon_{x_1}^{NL} \quad (4.10)$$

Em que

$${}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{x1}^L = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_o^L - x_{2t} \phi_z^L + x_{3t} \phi_y^L \quad (4.11)$$

$${}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{x1}^{NL} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_o^{NL} - x_{2t} \phi_z^{NL} + x_{3t} \phi_y^{NL} \quad (4.12)$$

sendo

$${}^t \boldsymbol{\varepsilon}_o^{NL} = \frac{1}{2} \left[ ({}^t \boldsymbol{\varepsilon}_o^L)^2 + ({}^t \theta_y^L)^2 + ({}^t \theta_z^L)^2 \right]; \quad {}^t \phi_z^{NL} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_o^L {}^t \phi_z^L; \quad {}^t \phi_y^{NL} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_o^L {}^t \phi_y^L \quad (4.13)$$

Fazendo:

$${}^t \boldsymbol{\varepsilon}_o = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_o^L + {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_o^{NL} \quad (4.14)$$

$${}^t \phi_z = {}^t \phi_z^L + {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_o^L {}^t \phi_z^L \quad (4.15)$$

$${}^t \phi_y = {}^t \phi_y^L + {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_o^L {}^t \phi_y^L \quad (4.16)$$

e substituindo equações (4.14), (4.15) e (4.16) na equação (4.10), resulta:

$${}^t \boldsymbol{\varepsilon}_{x1} = {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_o - x_{2t} \phi_z + x_{3t} \phi_y \quad (4.17)$$

## 4.2 DEFORMAÇÃO DO SOLO

Efeito de solo ao redor do duto é simulado por molas conectadas discretamente ao longo de duto. Um modelo conceitual é mostrado na figura 4.2. Na parede do duto são ligadas cinco séries de molas de solo discretas, que são: molas longitudinais, molas de base, molas de levantamento, molas lateral esquerda e direita. As molas são responsáveis pela restrição de deslocamentos em cada nó, nas direções u, v e w. O efeito de molas sobre o deslocamento rotacional é desprezado.

A posição relativa do duto e do solo determina as deformações nas molas. A deformação incremental das molas transversais, avaliada no sistema de coordenadas locais, é determinada observando-se o vetor de deslocamentos como:

$${}^t\Delta_{BS} = 0 \text{ e } {}^t\Delta_{US} = -{}_t v_o \text{ se } {}_t v_o > 0 \quad (4.18)$$

Ou

$${}^t\Delta_{BS} = -{}_t v_o \text{ e } {}^t\Delta_{US} = 0 \text{ se } {}_t v_o < 0 \quad (4.19)$$

Para  ${}_t w_o > 0$ , tem-se:

$${}^t\Delta_{LLS} = 0 \text{ e } {}^t\Delta_{RLS} = -{}_t w_o \quad (4.20)$$

Ou quando  ${}_t w_o < 0$ , as deformações tornam-se

$${}^t\Delta_{LLS} = -{}_t w_o \text{ e } {}^t\Delta_{RLS} = 0 \quad (4.21)$$

Nas expressões (4.19) a (4.21),  ${}^t\Delta_{BS}$ ,  ${}^t\Delta_{US}$ ,  ${}^t\Delta_{LLS}$ ,  ${}^t\Delta_{RLS}$  são as deformações da mola de encurtamento de base, de levantamento, lateral esquerda e lateral direita, respectivamente. A deformação longitudinal incremental é determinada no sistema de coordenadas locais como:

$${}^t\Delta_{AS} = -{}_t u_o \quad (4.22)$$

Onde  ${}^t\Delta_{AS}$  é a deformação de encurtamento ou de alongamento da mola.

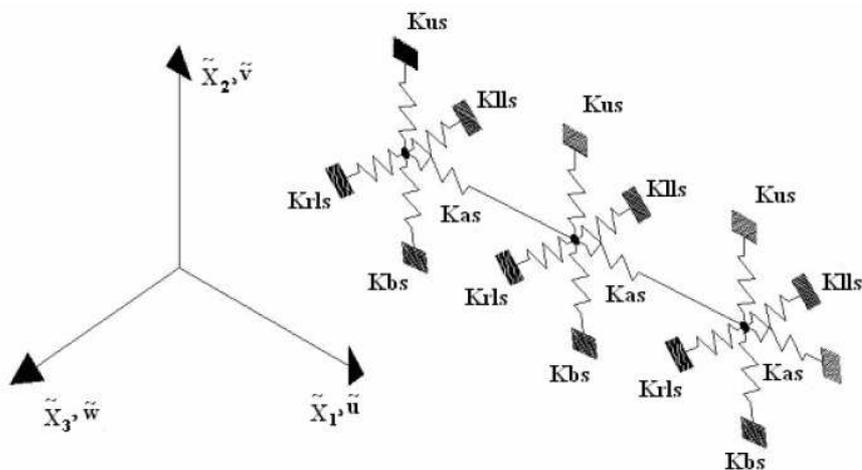


Figura 4.2 Modelo de interação solo-duto (Souza,2005).

### 4.3 RELAÇÕES CONSTITUTIVAS PARA MOLAS DE SOLO

A relação constitutiva para as molas de solo relaciona forças e deformações das mesmas. As molas transversais têm relação força - deformação supostamente elástica perfeitamente plástica na compressão e não têm capacidade para transmitirem força na tração, como ilustra a figura 4.3. Consequentemente pode haver no máximo duas molas transversais no nó (mola de base ou de levantamento; mola lateral esquerda ou lateral direita) com força não-nula. As molas longitudinais possuem o mesmo comportamento elasto - perfeitamente plástico tanto na compressão quanto na tração, como mostra a figura 4.4. A rigidez das molas é dada por  ${}^tK_{AS}$ ,  ${}^tK_{BS}$ ,  ${}^tK_{US}$ ,  ${}^tK_{LLS}$ ,  ${}^tK_{RLS}$ , para as molas: longitudinal, de base, de levantamento, lateral esquerda e lateral direita, respectivamente. As forças incrementais de compressão nas molas transversais, definidas no sistema de coordenadas locais na configuração deformada corrente, são dadas pelas seguintes expressões:

$${}^tF_{BS} = {}^tK_{BS} {}^t\Delta_{BS} \quad 0 \leq {}^tF_{BS} \leq {}^tF_{YBS} \quad (4.23)$$

$${}^tF_{US} = {}^tK_{US} {}^t\Delta_{US} \quad 0 \leq {}^tF_{US} \leq {}^tF_{YUS} \quad (4.24)$$

$${}^tF_{LLS} = {}^tK_{LLS} {}^t\Delta_{LLS} \quad 0 \leq {}^tF_{LLS} \leq {}^tF_{YLLS} \quad (4.25)$$

$${}^tF_{RLS} = {}^tK_{RLS} {}^t\Delta_{RLS} \quad 0 \leq {}^tF_{RLS} \leq {}^tF_{YRLS} \quad (4.26)$$

onde  ${}^tF_{YBS}$ ,  ${}^tF_{YUS}$ ,  ${}^tF_{YLLS}$ ,  ${}^tF_{YRLS}$  são as forças de escoamento na compressão nas molas de base, de levantamento, lateral esquerda e lateral direita, respectivamente. As forças compressivas são consideradas negativas nas molas transversais. As forças incrementais nas molas longitudinais, definidas no sistema de coordenadas locais na configuração deformada corrente, são dadas por:

$${}^tF_{AS} = {}^tK_{AS} {}^t\Delta_{AS} \quad -{}^tF_{YAS} \leq {}^tF_{AS} \leq {}^tF_{YAS} \quad (4.27)$$

onde  $-{}^tF_{YAS}$ , e  ${}^tF_{YAS}$  são as forças de escoamento na tração e na compressão nas molas longitudinais, respectivamente.

## MOLAS DE APOIO E LEVANTAMENTO

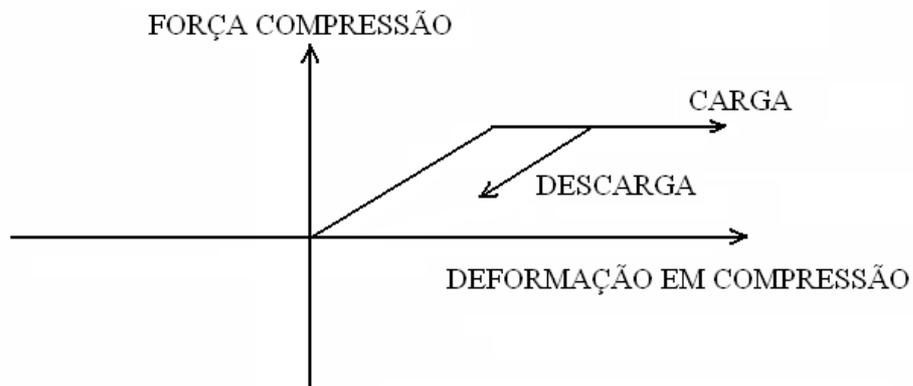


Figura 4.3 Diagrama força - deformação para as molas transversais.

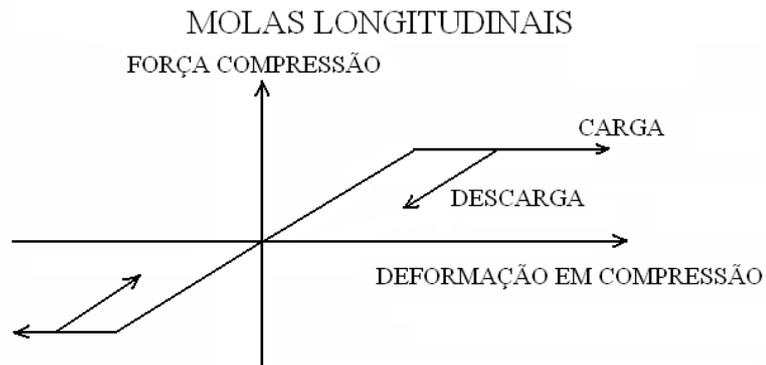


Figura 4.4 Diagrama força - deformação para as molas longitudinais.

## 4.4 EQUAÇÃO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Segundo Bathe (1996) o princípio dos deslocamentos virtuais na formulação Lagrangeana Total é dado por:

$$\int_{o_v} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} d^0V = {}^{t+\Delta t} R \quad (4.28)$$

onde o termo à esquerda representa o trabalho interno e o termo a direita é o trabalho virtual externo.

O trabalho virtual externo é dado por

$${}^{t+\Delta t}R = \int_{0V} {}^{t+\Delta t}f_i^B \delta u_i d^0V + \int_{0S_f} {}^{t+\Delta t}f_i^S \delta u_i^S d^0S \quad (4.29)$$

onde:

${}^{t+\Delta t}f_i^B$  = componentes de forças aplicadas externamente por unidade de volume no tempo  $t+\Delta t$ .

${}^{t+\Delta t}f_i^S$  = componentes de trações superficiais aplicadas externamente por unidade de superfície no tempo  $t+\Delta t$ .

${}^0S_f$  = superfície no tempo  $t+\Delta t$  sobre a qual as trações externas são aplicadas.

$\delta u_i^S = \delta u_i$  determinada sobre a superfície  ${}^0S_f$ .

Na equação (4.28) as tensões e deformações incrementais são dadas respectivamente por:

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^tS_{ij} + {}_0S_{ij} \quad (4.30)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathcal{E}_{ij} = {}^t\mathcal{E}_{ij} + {}_0\mathcal{E}_{ij} \quad (4.31)$$

O trabalho virtual pode ser obtido levando-se em conta as componentes de tensão e deformação do elemento viga-duto, conforme a equação a seguir:

$$\int_{0V} {}^{t+\Delta t}S_{x_1} \delta {}^{t+\Delta t}\mathcal{E}_{x_1} d^0V + \int_{0V} {}^{t+\Delta t}S_{\theta} \delta {}^{t+\Delta t}\mathcal{E}_{\theta} d^0V + \int_{0L} {}^{t+\Delta t}F_{AS} \delta {}^{t+\Delta t}u_0 d^0x_1 + \int_{0L} \left( {}^{t+\Delta t}F_{BS} + {}^{t+\Delta t}F_{US} \right) \delta {}^{t+\Delta t}v_0 d^0x_1 + \int_{0L} \left( {}^{t+\Delta t}F_{LLS} + {}^{t+\Delta t}F_{RLS} \right) \delta {}^{t+\Delta t}w_0 d^0x_1 = \delta {}^{t+\Delta t}W_{ext} \quad (4.32)$$

Na equação (4.32) os dois primeiros termos representam o trabalho virtual das tensões do duto e os três termos restantes é o trabalho virtual das molas do solo. O termo da parte direita é o trabalho virtual externo originado pela aplicação da carga.

As expressões para as tensões e as deformações incrementais para o duto são dadas por:

$${}^{t+\Delta t}{}_0 S_{x_1} = {}^t S_{x_1} + {}_0 S_{x_1} \quad (4.33)$$

$${}^{t+\Delta t}{}_o S_\theta = {}^t S_\theta + {}_o S_\theta \quad (4.34)$$

$$\delta^{t+\Delta t}{}_0 \varepsilon_{x_1} = \delta_0 \varepsilon_{x_1}^L + \delta_0 \varepsilon_{x_1}^{NL} \quad (4.35)$$

$$\delta^{t+\Delta t}{}_0 \varepsilon_\theta = \delta_0 \varepsilon_\theta = {}^t C_\theta \delta_0 \varepsilon_\theta \quad (4.36)$$

Com auxílio das equações (4.33)-(4.36), pode-se reescrever os dois primeiros termos da equação (4.32) como:

$$I + II = \int_{oV} \left( {}^t S_{x_1} + {}_o S_{x_1} \right) \left( \delta_0 \varepsilon_{x_1}^L + \delta_0 \varepsilon_{x_1}^{NL} \right) d^oV + \int_{oV} {}^{t+\Delta t}{}_0 S_\theta \delta_0^t \varepsilon_\theta d^oV \quad (4.37)$$

Os algarismos romanos do lado esquerdo da equação (4.37) são usados para representar os dois primeiros termos da equação (4.32). Abrindo equação (4.37), fica:

$$I + II = \int_{oV} \left( \left( {}^t S_{x_1} + {}_o S_\theta {}^t C_{\theta x_1} \right) \delta_0 \varepsilon_{x_1}^L + \left( {}^t S_{x_1} + {}_o S_\theta {}^t C_{\theta x_1} \right) \delta_0 \varepsilon_{x_1}^{NL} + {}_o S_{x_1} \delta_0 \varepsilon_{x_1}^L + {}_o S_{x_1} \delta_0 \varepsilon_{x_1}^{NL} \right) d^oV \quad (4.38)$$

Os primeiros quatro termos pertencem ao algarismo romano *I* e o restante as *II*. Utilizando as equações (4.11) e (4.12), o algarismo *I* fica:

$$I = \int_{oL} \left[ \left( {}^t S_{x_1} + {}_o S_\theta {}^t C_{\theta x_1} \right) \left( \delta_0 \varepsilon_o^L - x_2 \delta_0 \phi_z^L + x_3 \delta_0 \phi_y^L \right) + \left( {}^t S_{x_1} + {}_o S_\theta {}^t C_{\theta x_1} \right) \left( \delta_0 \varepsilon_o^{NL} - x_2 \delta_0 \phi_z^{NL} + x_3 \delta_0 \phi_y^{NL} \right) \right] d^oA d^oX \quad (4.39)$$

Rearranjando os termos:

$$I = \int_{oL} \left( {}^t F_{eq} \delta_0 \varepsilon_o^L + {}^t M_{eq2} \delta_0 \phi_z^L + {}^t M_{eq3} \delta_0 \phi_y^L \right) d^oX + \int_{oL} \left( {}^t F_{eq} \delta_0 \varepsilon_o^{NL} + {}^t M_{eq2} \delta_0 \phi_z^{NL} + {}^t M_{eq3} \delta_0 \phi_y^{NL} \right) d^oX \quad (4.40)$$

Os esforços internos totais equivalentes no tempo *t* são definidos como:

$$\begin{aligned}
{}^tF_{eq} &= \int_{oA} \left( {}^tS_{x_1} + {}^tC_{\theta x} {}^tS_{\theta} \right) d^oA \\
{}^tM_{eq2} &= - \int_{oA} \left( {}^tS_{x_1} + {}^tC_{\theta x} {}^tS_{\theta} \right) {}^o x_2 d^oA \\
{}^tM_{eq3} &= \int_{oA} \left( {}^tS_{x_1} + {}^tC_{\theta x} {}^tS_{\theta} \right) {}^o x_3 d^oA
\end{aligned} \tag{4.41}$$

O algoritmo romano *I* calcula a matriz incremental que descreve comportamento da estrutura não linear geométrico quando estrutura apresenta grande deslocamento e pequena deformação. O algoritmo romano *II* é definido como:

$$II = \int_{oV} {}^tC^{EP} {}^o \varepsilon_{x_1} \left( \delta {}^o \varepsilon_{x_1}^L + \delta {}^o \varepsilon_{x_1}^{NL} \right) d^oV \tag{4.42}$$

Este termo calcula a matriz de rigidez no tempo *t* com a matriz constitutiva variável. A não linearidade física é calculada neste termo. A matriz constitutiva será apresentada no capítulo seguinte quando é apresentada também metodologia de integração na seção transversal.

Considerando o terceiro, quarto e quinto termos da equação (4.32) e utilizando as equações (4.23)-(4.27), obtém-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
III + IV + V &= \int_{oL} \left( {}^tK_{AS} {}^o \Delta_{AS} \right) \delta {}^o u_o d^o x_1 + \int_{oL} \left( {}^tK_{BS} {}^o \Delta_{BS} + {}^tK_{US} {}^o \Delta_{US} \right) \delta {}^o v_o d^o x_1 + \\
&\int_{oL} \left( {}^tK_{LLS} {}^o \Delta_{LLS} + {}^tK_{RLS} {}^o \Delta_{RLS} \right) \delta {}^o w_o d^o x_1 + \int_{oL} {}^tF_{AS} \delta {}^o u_o d^o x_1 + \\
&\int_{oL} \left( {}^tF_{BS} + {}^tF_{US} \right) \delta {}^o v_o d^o x_1 + \int_{oL} \left( {}^tF_{BS} + {}^tF_{RLS} \right) \delta {}^o w_o d^o x_1
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Substituindo as equações (4.40)-(4.43) na equação (4.32), obtém-se a equação do trabalho virtual incremental para um elemento solo-duto que é dada por:

$$\begin{aligned}
&\int_{oL} \left( {}^tF_{eq} \delta {}^o \varepsilon_o^{NL} + {}^tM_{eq2} \delta {}^o \phi_z^{NL} + {}^tM_{eq3} \delta {}^o \phi_y^{NL} \right) d^o x + \int_{oV} {}^tC^{EP} {}^o \varepsilon_{x_1} \left( \delta {}^o \varepsilon_{x_1}^L + \delta {}^o \varepsilon_{x_1}^{NL} \right) d^o V + \\
&\int_{oL} \left( {}^tK_{AS} {}^o \Delta_{AS} \right) \delta {}^o u_o d^o x_1 + \int_{oL} \left( {}^tK_{BS} {}^o \Delta_{BS} + {}^tK_{US} {}^o \Delta_{US} \right) \delta {}^o v_o d^o x_1 + \\
&\int_{oL} \left( {}^tK_{LLS} {}^o \Delta_{LLS} + {}^tK_{RLS} {}^o \Delta_{RLS} \right) \delta {}^o w_o d^o x_1 = \delta^{t+\Delta t} W_{ext} - \\
&\int_{oL} \left( {}^tF_{eq} \delta {}^o \varepsilon_o^L + {}^tM_{eq2} \delta {}^o \phi_z^L + {}^tM_{eq3} \delta {}^o \phi_y^L \right) d^o x - \int_{oL} {}^tF_{AS} \delta {}^o u_o d^o x_1 - \\
&\int_{oL} \left( {}^tF_{BS} + {}^tF_{US} \right) \delta {}^o v_o d^o x_1 + \int_{oL} \left( {}^tF_{BS} + {}^tF_{RLS} \right) \delta {}^o w_o d^o x_1
\end{aligned} \tag{4.44}$$

## 4.5 RELAÇÃO INCREMENTAL TENSÃO-DEFORMAÇÃO

Para o elemento viga-duto, a relação incremental de tensão – deformação pode ser expressa como (Zhou & Murray, 1996, AP. UD. Souza, 2005)

$$\begin{Bmatrix} {}_o\sigma_\theta \\ {}_o\sigma_r \\ {}_o\sigma_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda' & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda' & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_o\varepsilon_\theta \\ {}_o\varepsilon_r \\ {}_o\varepsilon_x \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^tP_{\theta\theta} & {}^tP_{\theta r} & {}^tP_{\theta x} \\ {}^tP_{r\theta} & {}^tP_{rr} & {}^tP_{rx} \\ {}^tP_{x\theta} & {}^tP_{xr} & {}^tP_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_o\varepsilon_\theta \\ {}_o\varepsilon_r \\ {}_o\varepsilon_x \end{Bmatrix} \quad (4.45)$$

Onde

$$\lambda' = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.46)$$

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (4.47)$$

e

$${}^tP_{ij} = \frac{3G}{\left(1 + \frac{H'}{3G}\right) {}_o\sigma^{t-2}} {}^tS_{ij} {}^tS_{ij}, \quad i, j = \theta, r, x \quad (4.48)$$

O modulo de encruamento  $H'$  é dado por:

$$H' = \frac{EE_T}{E - E_T} \quad (4.49)$$

As tensões desviatórias podem ser calculadas, considerando tensão radial desprezível, pelas expressões como:

$${}^tS_\theta = {}^t\sigma_\theta - \left( \frac{{}^t\sigma_\theta + {}^t\sigma_r + {}^t\sigma_x}{3} \right) = {}^t\sigma_\theta - \left( \frac{{}^t\sigma_\theta + 0 + {}^t\sigma_x}{3} \right) = \frac{1}{3} (2 {}^t\sigma_\theta - {}^t\sigma_x) \quad (4.50)$$

$${}^tS_r = -\frac{1}{3} ({}^t\sigma_\theta + {}^t\sigma_x) \quad (4.51)$$

$${}^t S_x = \frac{1}{3} (2 {}^t \sigma_x - {}^t \sigma_\theta) \quad (4.52)$$

A tensão tangencial  ${}^t \sigma_\theta$  será discutida posteriormente.

Considerando que a tensão radial é nula e que a tensão tangencial é constante devido à condição de operação constante de pressão interna no duto. Logo a tensão incremental na direção tangencial é nula. Então aplicando as condições descritas, a equação (4.45) pode ser escrita como (Zhou & Murray, 1996):

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left( \begin{bmatrix} \lambda' & \lambda \\ \lambda & \lambda' \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^t P_{\theta\theta} & {}^t P_{\theta r} \\ {}^t P_{r\theta} & {}^t P_{rr} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} {}^o \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \\ {}^o \boldsymbol{\varepsilon}_r \end{Bmatrix} + \left( \begin{Bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} {}^t P_{\theta x} \\ {}^t P_{rx} \end{Bmatrix} \right) {}^o \boldsymbol{\varepsilon}_x \quad (4.53)$$

Rearranjando os termos da equação (4.53), e admitindo que exista inversa, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} {}^o \boldsymbol{\varepsilon}_\theta \\ {}^o \boldsymbol{\varepsilon}_r \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} {}^t C_{\theta x} \\ {}^t C_{rx} \end{Bmatrix} {}^o \boldsymbol{\varepsilon}_x \quad (4.54)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} {}^o C_{\theta x} \\ {}^o C_{rx} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \lambda' - {}^t P_{\theta\theta} & \lambda - {}^t P_{\theta r} \\ \lambda - {}^t P_{r\theta} & \lambda' - {}^t P_{rr} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \lambda - {}^t P_{\theta x} \\ \lambda - {}^t P_{rx} \end{Bmatrix} \quad (4.55)$$

De acordo com expressão (4.45),  ${}^t \sigma_x$  é determinada como:

$${}^t \sigma_x = (\lambda {}^o \boldsymbol{\varepsilon}_\theta + \lambda {}^o \boldsymbol{\varepsilon}_r - {}^t P_{x\theta} {}^o \boldsymbol{\varepsilon}_\theta - {}^t P_{xr} {}^o \boldsymbol{\varepsilon}_r) + \lambda' {}^o \boldsymbol{\varepsilon}_x - {}^t P_{xx} {}^o \boldsymbol{\varepsilon}_x \quad (4.56)$$

A relação constitutiva elasto-plástico incremental é obtida utilizando a expressão (4.54) na equação (4.56):

$${}^t \boldsymbol{\sigma}_x = {}^t C^{EP} {}^t \boldsymbol{\varepsilon}_x \quad (4.57)$$

onde

$${}_0C^{EP} = {}_0C_{\theta\theta}(\lambda - {}^tP_{x\theta}) + {}_0C_{rx}(\lambda - {}^tP_{xr}) + \lambda - {}^tP_{xx} \quad (4.58)$$

No caso em que os incrementos são elásticos, então  ${}_0C^{EP} = E$ .

A tensão efetiva da equação (4.48) é calculada como:

$${}^t\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} {}^tS_{ij} {}^tS_{ij}} \quad (4.59)$$

E a deformação incremental no tempo t é expressa como:

$${}^t\bar{\mathcal{E}} = \sqrt{\frac{3}{2} {}^t\mathcal{E}_{ij}^P {}^t\mathcal{E}_{ij}^P} \quad (4.60)$$

Onde as componentes da deformação incremental plástica resultam de (Zhou & Murray, 1996):

$$\begin{Bmatrix} {}^t\mathcal{E}_{\theta}^P \\ {}^t\mathcal{E}_r^P \\ {}^t\mathcal{E}_x^P \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu \\ -\nu & 1 & -\nu \\ -\nu & -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^tP_{\theta\theta} & {}^tP_{\theta r} & {}^tP_{\theta x} \\ {}^tP_{r\theta} & {}^tP_{rr} & {}^tP_{rx} \\ {}^tP_{x\theta} & {}^tP_{xr} & {}^tP_{xx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} {}_0C_{\theta\theta} \\ {}_0C_{rx} \\ 1 \end{Bmatrix} {}_0\mathcal{E}_x \quad (4.61)$$

## 4.6 EQUAÇÃO DE LAMÉ PARA SOLUÇÃO GERAL DE CILINDRO PRESSURIZADO

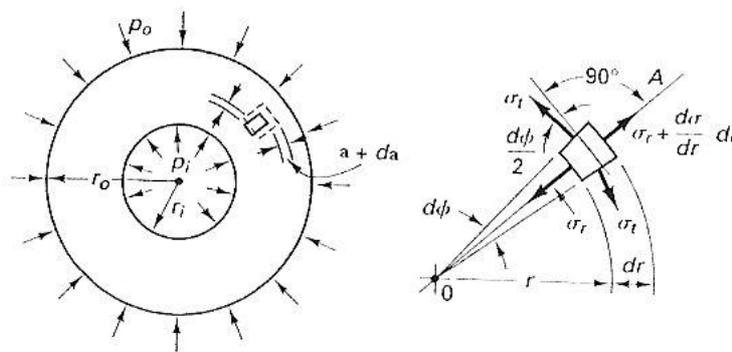


Figura 4.5 Elemento infinitesimal de cilindro

A equação geral para determinar pressão interna é conhecida como solução de Lamé. Considere que o elemento infinitesimal, conforme mostrado pela figura 4.5, duto de parede espessa, está em equilíbrio estático, logo a equação para calcular força na direção radial é nula.

$$\sigma_r r d\phi + 2\sigma_t dr \left( \frac{d\phi}{2} \right) - \left( \sigma_r + \frac{d\sigma_r}{dr} dr \right) (r + dr) d\phi = 0 \quad (4.62)$$

Desprezando termos infinitesimais de ordem superior

$$\sigma_t - \sigma_r - r \frac{d\sigma_r}{dr} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \quad (4.63)$$

Esta equação tem duas incógnitas e então precisa mais uma equação com as mesmas incógnitas para obter a solução. Esta equação será obtida introduzindo a compatibilidade geométrica de deformação e as propriedades de material.

A deformação de um elemento infinitesimal é descrita pelas suas parcelas na direção tangencial e radial. Considerando  $a$  como o deslocamento radial ou movimento da superfície cilíndrica no raio  $r$ , então  $a + (da/dr)dr$  é o deslocamento radial ou movimento da superfície vizinha no raio  $r + dr$ . Assim, a deformação na direção radial,  $\varepsilon_r$ , de um elemento infinitesimal fica:

$$\varepsilon_r = \frac{\left( a + \frac{da}{dr} dr \right) - a}{dr} = \frac{da}{dr} \quad (4.64)$$

A deformação tangencial  $\varepsilon_t$  é obtida pela subtração do comprimento de circunferência deformada no raio  $r + a$  pelo comprimento de circunferência no raio  $r$  e dividir pelo último comprimento.

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi(r + a) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{a}{r} \quad (4.65)$$

Note que as equações (4.64) e (4.65) são funções de uma única variável. A lei generalizada de Hooke pode ser expressa como:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_t - \nu\sigma_x) \quad (4.66)$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_r + \sigma_t - \nu\sigma_x)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(-\nu\sigma_r - \nu\sigma_t + \sigma_x) \quad (4.67)$$

(4.68)

Considerando na solução generalizada de cilindro, a deformação axial é restrita, então o problema se reduz ao estado plano de deformação. Então a última equação se reduz a:

$$\sigma_x = \nu(\sigma_r + \sigma_t) \quad (4.69)$$

Introduzindo a equação (4.69) em (4.66), (4.67) e resolvendo simultaneamente para  $\sigma_r$  e  $\sigma_t$ , resulta em:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[(1-\nu)\varepsilon_r + \nu\varepsilon_t] \quad (4.70)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}[\nu\varepsilon_r + (1-\nu)\varepsilon_t] \quad (4.71)$$

Essas equações introduzem as parcelas de deformação no problema para material elástico. Logo substituindo as equações de deformações (4.64) e (4.65) nas equações (4.70) e (4.71) resulta em:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ (1-\nu) \frac{da}{dr} + \nu \frac{a}{r} \right] \quad (4.72)$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1-\nu)(1-2\nu)} \left[ \nu \frac{da}{dr} + (1-\nu) \frac{a}{r} \right]$$

Substituindo o conjunto das equações (4.72) em (4.63) e simplificando resulta em equação diferencial desejada que governe o deslocamento do cilindro

$$\frac{d^2 a}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{da}{dr} - \frac{a}{r^2} = 0 \quad (4.73)$$

Esta equação é conhecida como equação de Euler na qual a solução já é conhecida:

$$a = A_1 r + A_2 r^{-1} \quad (4.74)$$

Esta solução pode ser verificada pela substituição na equação diferencial e que descreve o deslocamento na direção radial em qualquer ponto do cilindro.  $A_1$  e  $A_2$  são constantes a serem determinadas pelas condições de contorno.

Mas, para a determinação de  $A_1$  e  $A_2$ , o deslocamento radial é desconhecido tanto na superfície interna quanto na superfície externa. Porém a pressão é conhecida em ambas as superfícies e é igual à tensão radial, ou seja,  $\sigma_r(r_i) = -p_i$  e  $\sigma_r(r_o) = -p_o$ , sendo o sinal negativo indicativo de pressão compressiva. Considerando as condições descritas e substituindo a equação de deslocamento radial e sua derivada na equação (4.72), as condições de contorno resultam em:

$$\begin{aligned} \sigma_r(r_i) = -p_i &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ A_1 - (1-2\nu) \frac{A_2}{r_i^2} \right] \\ \sigma_r(r_o) = -p_o &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[ A_1 - (1-2\nu) \frac{A_2}{r_o^2} \right] \end{aligned} \quad (4.75)$$

Ao resolver simultaneamente para constantes  $A_1$  e  $A_2$ , resulta em:

$$A_1 = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad (4.76)$$

$$A_2 = \frac{(1+\nu)}{E} \frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad (4.77)$$

Essas constantes são substituídas na equação (4.74), e permitem a determinação de deslocamento radial em qualquer ponto no cilindro para pressão específica. Caso a equação (4.75) e suas derivadas sejam substituídas na equação (4.63) junto com os constantes, a solução geral para tensão radial e tangencial é obtida.

$$\sigma_r = C_1 - \frac{C_2}{r^2} \text{ e } \sigma_t = C_1 + \frac{C_2}{r^2} \quad (4.78)$$

$$C_1 = \frac{p_i r_i^2 - p_o r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \text{ e } C_2 = \frac{(p_i - p_o) r_i^2 r_o^2}{r_o^2 - r_i^2} \quad (4.79)$$

Considerando que no presente análise, somente a pressão interna está presente e que a tensão radial é desprezível comparada com tensão axial e tangencial, então a equação de solução geral para tensão tangencial é expressa como:

$${}_o\sigma_t = \frac{p_i r_i^2}{r_o^2 - r_i^2} \left( 1 + \frac{r_o^2}{r^2} \right) \quad (4.80)$$

## 5. FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DO DUTO

Neste capítulo é apresentado o elemento utilizado ao longo do trabalho e a metodologia de cálculo numérico utilizada, assim como o método de solução de comportamento não linear.

### 5.1 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE PÓRTICO TRIDIMENSIONAL

O elemento de viga tridimensional é um elemento uniaxial com capacidade para tração, compressão, flexão e torção. Este elemento consiste de um nó localizado em cada extremidade da barra e um nó localizado no centro. Cada nó da barra pode deslocar-se nas direções transversais (eixo  $X_2$  e  $X_3$ ), na direção longitudinal (eixo  $X_1$ ) e girar em torno dos eixos  $X_1$ ,  $X_2$  e  $X_3$ . Isto significa que cada nó possui 6 graus de liberdade, conforme mostra a figura 5.1.

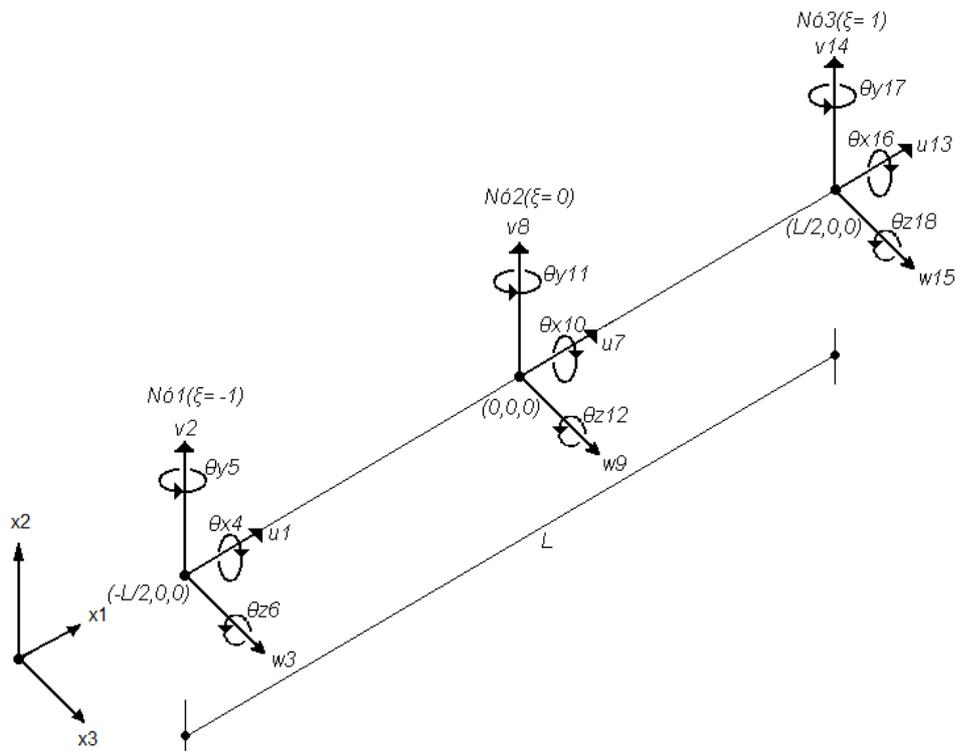


Figura 5.1 Elemento de viga tridimensional.

Individualmente será tratada a aproximação dos deslocamentos longitudinais  $u$ . Na formulação isoparamétrica o deslocamento  $u$  do elemento é interpolado da seguinte forma:

$${}^t u({}^o x_1) = h_1({}^o x_1) {}^t u_1 + h_7({}^o x_1) {}^t u_7 + h_{13}({}^o x_1) {}^t u_{13} \quad (5.1)$$

Onde  $h_1$ ,  $h_7$  e  $h_{13}$  são as funções de interpolação e  $x_1$  é a coordenada no sistema de coordenada local. A coordenada natural  ${}^o \xi$  é definida em relação ao sistema local do elemento com as condições de contorno abaixo:

$$\begin{aligned} {}^o x_1 &= -{}^o L/2 & \text{se} & \quad {}^o \xi = -1 \\ {}^o x_1 &= 0 & \text{se} & \quad {}^o \xi = 0 \\ {}^o x_1 &= {}^o L/2 & \text{se} & \quad {}^o \xi = 1 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Utilizando uma função de interpolação linear, a relação entre  $x_1$  e  ${}^o \xi$ , e derivando em função de  ${}^o \xi$ , o Jacobiano fica:

$${}^o x_1 = \frac{{}^o L}{2} {}^o \xi \Rightarrow d{}^o x_1 = \frac{{}^o L}{2} d{}^o \xi \quad (5.3)$$

Utilizando um interpolante de 2º grau e representá-lo na forma matricial, fica:

$$\begin{aligned} {}^t u({}^o x_1) &= \alpha_1 + \alpha_2 {}^o x_1 + \alpha_3 {}^o x_1^2 \\ {}^t u({}^o x_1) &= \begin{bmatrix} 1 & {}^o x_1 & {}^o x_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Aplicando as condições de contorno apresentado na figura 5.1, a equação (5.4) calculada em cada nó do elemento pode ser representada na forma matricial, como:

$$\begin{aligned} {}^t u(0) &= \alpha_1 \\ {}^t u({}^o L/2) &= \alpha_1 + \alpha_2 {}^o L/2 + \alpha_3 ({}^o L/2)^2 \\ {}^t u(-{}^o L/2) &= \alpha_1 - \alpha_2 {}^o L/2 + \alpha_3 (-{}^o L/2)^2 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} {}^t u_7 \\ {}^t u_{13} \\ {}^t u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & {}^o L/2 & {}^o L^2/4 \\ 1 & -{}^o L/2 & {}^o L^2/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

Admitindo que exista inversa, então os coeficientes da equação (5.4) podem ser representados na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & {}^oL/2 & {}^oL^2/4 \\ 1 & -{}^oL/2 & {}^oL^2/4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} {}^t u_7 \\ {}^t u_{13} \\ {}^t u_1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Substituindo equação (5.6) na equação (5.4), a função isoparamétrica do deslocamento  $u$  fica:

$${}^t u({}^o x_1) = \begin{bmatrix} 1 & {}^o x_1 & {}^o x_1^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & {}^oL/2 & {}^oL^2/4 \\ 1 & -{}^oL/2 & {}^oL^2/4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} {}^t u_7 \\ {}^t u_{13} \\ {}^t u_1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Rearranjando os termos,

$${}^t u({}^o x_1) = \begin{bmatrix} -\frac{{}^o x_1}{L} + \frac{2{}^o x_1^2}{L^2} \\ 1 - \frac{4}{L^2} {}^o x_1^2 \\ \frac{{}^o x_1}{L} + \frac{2{}^o x_1^2}{L^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^t u_1 \\ {}^t u_7 \\ {}^t u_{13} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Logo, as funções de interpolação são obtidas, assim como a sua primeira derivada:

$$\begin{aligned} h_1({}^o \xi) &= -\frac{{}^o \xi}{2} + \frac{{}^o \xi^2}{2} &\Rightarrow h_1' &= -\frac{1}{2} + {}^o \xi \\ h_7({}^o \xi) &= 1 - {}^o \xi^2 &\Rightarrow h_7' &= -2 {}^o \xi \\ h_{13}({}^o \xi) &= \frac{{}^o \xi}{2} + \frac{{}^o \xi^2}{2} &\Rightarrow h_{13}' &= \frac{1}{2} + {}^o \xi \end{aligned} \quad (5.9)$$

De maneira análoga podem-se interpolar os deslocamentos  $v$  e  $w$ . Dados os deslocamentos transversais e as rotações, os deslocamentos  $v$  e  $w$  do elemento são interpolados da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
{}^t v({}^o x_1) &= {}^t v_2 h_2 + {}^t \theta_{z6} h_6 + {}^t v_8 h_8 + {}^t \theta_{z12} h_{12} + {}^t v_{14} h_{14} + {}^t \theta_{z18} h_{18} \\
{}^t w({}^o x_1) &= {}^t w_3 h_3 + {}^t \theta_{y5} h_5 + {}^t w_9 h_9 + {}^t \theta_{y11} h_{11} + {}^t w_{15} h_{15} + {}^t \theta_{y17} h_{17}
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Repetindo o processo utilizado para calcular a função isoparamétrica de deslocamento  $u$ , então as funções de interpolação para  $v$  e  $w$  ficam:

$$\begin{aligned}
h_3 &= h_2 = \frac{1}{4} {}^o \xi^2 (3 {}^o \xi + 4) (-1 + {}^o \xi)^2 \\
h_5 &= h_6 = \frac{1}{8} {}^o \xi^2 {}^o L (1 + {}^o \xi) (-1 + {}^o \xi)^2 \\
h_9 &= h_8 = (-1 + {}^o \xi)^2 (1 + {}^o \xi)^2 \\
h_{11} &= h_{12} = \frac{1}{2} {}^o L {}^o \xi (-1 + {}^o \xi)^2 (1 + {}^o \xi)^2 \\
h_{15} &= h_{14} = -\frac{1}{4} {}^o \xi^2 (3 {}^o \xi - 4) (1 + {}^o \xi)^2 \\
h_{17} &= h_{18} = \frac{1}{8} {}^o \xi^2 {}^o L (-1 + {}^o \xi) (1 + {}^o \xi)^2
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Caso exista um momento torsor aplicado no duto, então existe a necessidade de outra função de interpolação para deslocamentos de rotação no eixo  $X_1$ . No presente trabalho desconsidera-se que exista empenamento na seção transversal de duto devido à torção e que a tensão de torção tem participação desprezível na plastificação. Por esta razão, a parcela de energia de torção será tratada separadamente.

De forma análoga que foi feita para funções de interpolação de deslocamento  $u$ , a mesma metodologia pode ser aplicada para torção. Utilizando a mesma função de interpolação de segunda ordem, tem-se:

$${}^t q = h_4 {}^t q_4 + h_{10} {}^t q_{10} + h_{16} {}^t q_{16} \tag{5.12}$$

As funções de interpolação são iguais as da função de deslocamento  $u$ :

$$\begin{aligned}
h_4({}^o\xi) &= -\frac{{}^o\xi}{2} + \frac{{}^o\xi^2}{2} \Rightarrow h_4' = -\frac{1}{2} + {}^o\xi \\
h_{10}({}^o\xi) &= 1 - {}^o\xi^2 \Rightarrow h_{10}' = -2 {}^o\xi \\
h_{16}({}^o\xi) &= \frac{{}^o\xi}{2} + \frac{{}^o\xi^2}{2} \Rightarrow h_{16}' = \frac{1}{2} + {}^o\xi
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Os deslocamentos incrementais do elemento podem ser expressos como:

$$\begin{bmatrix} {}^t u \\ {}^t v \\ {}^t w \\ {}^t q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 {}^t u_1 + h_7 {}^t u_7 + h_{13} {}^t u_{13} \\ {}^t v_2 h_2 + {}^t \theta_{z6} h_6 + {}^t v_8 h_8 + {}^t \theta_{z12} h_{12} + {}^t v_{14} h_{14} + {}^t \theta_{z18} h_{18} \\ {}^t w_3 h_3 + {}^t \theta_{y5} h_5 + {}^t w_9 h_9 + {}^t \theta_{y11} h_{11} + {}^t w_{15} h_{15} + {}^t \theta_{y17} h_{17} \\ h_4 {}^t q_4 + h_{10} {}^t q_{10} + h_{16} {}^t q_{16} \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

Como a torção tem participação desprezível na plastificação do material, e admite-se que não exista empenamento na seção transversal do duto devido a torção, então, para facilitar o cálculo, a função de interpolação de torção será retirada da equação (5.14), e será tratada separadamente. Logo, a equação (5.14) pode ser representada na sua forma matricial como:

$$\begin{Bmatrix} {}^t u \\ {}^t v \\ {}^t w \end{Bmatrix} = [{}^t H] \{ {}^t u_e \} \tag{5.15}$$

Onde

$$[{}^t H] = \begin{bmatrix} {}^t h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t h_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t h_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t h_2 & 0 & 0 & 0 & {}^t h_6 & 0 & {}^t h_8 & 0 & 0 & 0 & {}^t h_{12} & 0 & {}^t h_{14} & 0 & 0 & 0 & {}^t h_{18} \\ 0 & 0 & {}^t h_3 & 0 & {}^t h_5 & 0 & 0 & 0 & {}^t h_9 & 0 & {}^t h_{11} & 0 & 0 & 0 & {}^t h_{15} & 0 & {}^t h_{17} & 0 \end{bmatrix} \tag{5.16}$$

O vetor  $\{ {}^t u_e \}$  é o vetor de deslocamentos nodais incrementais do elemento. Existem doze componentes associadas ao deslocamento transversal, três componentes associadas ao deslocamento longitudinal, e três componentes associadas ao deslocamento rotacional no eixo  $X_1$ .

## 5.2 MATRIZES DE DEFORMAÇÃO – DESLOCAMENTO

Utilizando-se as equações definidas na seção 5.1, a deformação axial linear  ${}^t\varepsilon_o^L$  e as curvaturas lineares  ${}^t\phi_z^L$  e  ${}^t\phi_y^L$ , são obtidas:

$$\begin{Bmatrix} {}^t\varepsilon_o^L \\ {}^t\phi_z^L \\ {}^t\phi_y^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_1' {}^t u_1 + h_7' {}^t u_7 + h_{13}' {}^t u_{13} \\ {}^t v_2 h_2'' + {}^t \theta_{z6} h_6'' + {}^t v_8 h_8'' + {}^t \theta_{z12} h_{12}'' + {}^t v_{14} h_{14}'' + {}^t \theta_{z18} h_{18}'' \\ {}^t w_3 h_3'' + {}^t \theta_{y5} h_5'' + {}^t w_9 h_9'' + {}^t \theta_{y11} h_{11}'' + {}^t w_{15} h_{15}'' + {}^t \theta_{y17} h_{17}'' \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Representando na forma matricial e separando o vetor de deslocamentos, a equação (5.17) fica:

$$\begin{Bmatrix} {}^t\varepsilon_o^L \\ {}^t\phi_z^L \\ {}^t\phi_y^L \end{Bmatrix} = [{}^tB^L] \{ {}^t u_e \} \quad (5.18)$$

onde

$$[{}^tB^L] = \begin{bmatrix} \frac{2h_1'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_7'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{13}'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4h_2''}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_6''}{L^2} & 0 & \frac{4h_8''}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_{12}''}{L^2} & 0 & \frac{4h_{14}''}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_{18}''}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{4h_3''}{L^2} & 0 & \frac{4h_5''}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_9''}{L^2} & 0 & \frac{4h_{11}''}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_{15}''}{L^2} & 0 & \frac{4h_{17}''}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.19)$$

A deformação incremental axial não linear pode ser escrita utilizando-se a equação (4.13). O desenvolvimento na obtenção da expressão para a mesma é descrito na seqüência. Reescrevendo a equação (4.13):

$${}^t\varepsilon_o^{NL} = \frac{1}{2} \left[ ({}^t\varepsilon_o^L)^2 + ({}^t\theta_y^L)^2 + ({}^t\theta_z^L)^2 \right] \quad (4.13)$$

Representando na forma matricial fica:

$${}^t\varepsilon_o^{NL} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} {}^t\varepsilon_o^L & {}^t\theta_z & {}^t\theta_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^t\varepsilon_o^L \\ {}^t\theta_z \\ {}^t\theta_y \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \{ {}^t u_e \}^T [{}^tB_1^{NL}]^T [{}^tB_1^{NL}] \{ {}^t u_e \} \quad (5.20)$$

onde

$$\begin{Bmatrix} {}^t \varepsilon_o^L \\ {}^t \theta_z^L \\ {}^t \theta_y^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_1^i {}^t u_1 + h_7^i {}^t u_7 + h_{13}^i {}^t u_{13} \\ {}^t v_2 h_2^i + {}^t \theta_{z6} h_6^i + {}^t v_8 h_8^i + {}^t \theta_{z12} h_{12}^i + {}^t v_{14} h_{14}^i + {}^t \theta_{z18} h_{18}^i \\ {}^t w_3 h_3^i + {}^t \theta_{y5} h_5^i + {}^t w_9 h_9^i + {}^t \theta_{y11} h_{11}^i + {}^t w_{15} h_{15}^i + {}^t \theta_{y17} h_{17}^i \end{Bmatrix} \quad (5.21)$$

Então:

$$[{}^t B_1^{NL}] = \begin{bmatrix} \frac{2h_1^i}{^o L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_7^i}{^o L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{13}^i}{^o L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2h_2^i}{^o L} & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_6^i}{^o L} & 0 & \frac{2h_8^i}{^o L} & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{12}^i}{^o L} & 0 & \frac{2h_{14}^i}{^o L} & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{18}^i}{^o L} \\ 0 & 0 & \frac{2h_3^i}{^o L} & 0 & \frac{2h_5^i}{^o L} & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_9^i}{^o L} & 0 & \frac{2h_{11}^i}{^o L} & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{15}^i}{^o L} & 0 & \frac{2h_{17}^i}{^o L} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

A partir da equação (5.20), pode-se escrever a variação da deformação incremental não linear como:

$$\delta_0^t \varepsilon_o^{NL} = \frac{1}{2} \{ \delta_o^t u_e \}^T [{}^t B_1^{NL}]^T [{}^t B_1^{NL}] \{ {}^t u_e \} \quad (5.23)$$

A curvatura incremental não linear  ${}^t \phi_z^{NL}$  é obtida a partir da equação (4.13), resultando em:

$${}^t \phi_z^{NL} = {}^t \varepsilon_o^L {}^t \phi_z^L = \{ {}^t u_e \}^T [{}^t B^L]^T [{}^t B_2^{NL}] \{ {}^t u_e \} \quad (5.24)$$

Onde

$$[{}^t B_2^{NL}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4h_2^i}{^o L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_6^i}{^o L^2} & 0 & \frac{4h_8^i}{^o L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_{12}^i}{^o L^2} & 0 & \frac{4h_{14}^i}{^o L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_{18}^i}{^o L^2} \\ \frac{2h_1^i}{^o L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_7^i}{^o L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{13}^i}{^o L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Analogamente, a variação da curvatura incremental não linear  ${}^t \phi_y^{NL}$  é obtida através da equação:

$${}^t \phi_y^{NL} = {}^t \varepsilon_o^L {}^t \phi_y^L = \{ {}^t u_e \}^T [{}^t B^L]^T [{}^t B_3^{NL}] \{ {}^t u_e \} \quad (5.26)$$

Onde

$$[{}^tB_3^{NL}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4h_3''}{L^2} & 0 & \frac{4h_5''}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_9''}{L^2} & 0 & \frac{4h_{11}''}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_{15}''}{L^2} & 0 & \frac{4h_{17}''}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2h_1'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_7'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{13}'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

A deformação das molas de solo está definida na seção 4.2 e os deslocamentos incrementais nodais podem ser expressos como:

$$\begin{Bmatrix} {}^t\Delta_{AS} \\ {}^t\Delta_{BS} \\ {}^t\Delta_{LLS} \\ {}^t\Delta_{US} \\ {}^t\Delta_{RLS} \end{Bmatrix} = [{}^tB^S] \{ {}^t u_e \} \quad (5.28)$$

Onde

$$[{}^tB^S]^T = \begin{bmatrix} -{}^t h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^t h_2(1-\eta) & 0 & -{}^t h_2 & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t h_3(1-\beta) & 0 & -{}^t h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t h_5(1-\beta) & 0 & -{}^t h_5 \\ 0 & -{}^t h_6(1-\eta) & 0 & -{}^t h_6 & 0 \\ -{}^t h_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^t h_8(1-\eta) & 0 & -{}^t h_8 & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t h_9(1-\beta) & 0 & -{}^t h_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t h_{11}(1-\beta) & 0 & -{}^t h_{11} \\ 0 & -{}^t h_{12}(1-\eta) & 0 & -{}^t h_{12} & 0 \\ -{}^t h_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -{}^t h_{14}(1-\eta) & 0 & -{}^t h_{14} & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t h_{15}(1-\beta) & 0 & -{}^t h_{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -{}^t h_{17}(1-\beta) & 0 & -{}^t h_{17} \\ 0 & -{}^t h_{18}(1-\eta) & 0 & -{}^t h_{18} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Os parâmetros  $\eta$  e  $\beta$  utilizados na expressão acima são definidos de acordo com os deslocamentos transversais (eixos  $x_2$  e  $x_3$ ):

$$\eta = \begin{cases} 0 & \text{se } {}^t_0v < 0 \\ 1 & \text{se } {}^t_0v > 0 \end{cases} \quad (5.30)$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{se } {}^t_0w < 0 \\ 1 & \text{se } {}^t_0w > 0 \end{cases} \quad (5.31)$$

### 5.3 MATRIZ DE ROTAÇÃO

No sistema de coordenadas globais, a orientação dos membros da estrutura é descrita por um único conjunto de coordenadas. Quando as coordenadas de membro individual são expressas por sistemas de coordenadas distintos, as coordenadas são ditas locais.

Um conjunto de coordenadas pode ser usado para descrever a geometria da estrutura, as propriedades dos membros, os sistemas de forças, e as deflexões nos nós. É conveniente expressar todas as quantidades de força e deslocamentos nos nós no sistema de coordenadas globais. As propriedades e forças dos membros são mais vantajosas expressá-las em um conjunto particular próprio de coordenadas. É fundamental para a teoria das estruturas obterem transformações relacionando um conjunto de variáveis em um sistema para um conjunto equivalente num segundo sistema.

Os deslocamentos nodais incrementais do elemento no sistema local são relacionados com os deslocamentos no sistema global pela expressão:

$$\{ {}^t_0u_e \} = [\tilde{R}] \{ {}^t_0\tilde{u}_e \} \quad (5.32)$$

Onde

$\{ {}^t_0u_e \}$  = vetor de deslocamentos incrementais nodais no sistema de coordenadas local;

$\{ {}_0^t \tilde{u}_e \}$  = vetor de deslocamentos incrementais nodais no sistema de coordenadas global;

$[\tilde{R}]$  = matriz de rotação para um membro de pórtico espacial.

A matriz de transformação de rotação  $[\tilde{R}]$  para um membro de um pórtico espacial toma a seguinte forma:

$$[\tilde{R}] = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

Onde

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \text{sen} \gamma & \text{sen} \beta \text{sen} \gamma \\ -\cos \beta \text{sen} \gamma & \cos \gamma & -\text{sen} \beta \text{sen} \gamma \\ \cos \beta \text{sen} \gamma - \text{sen} \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

se  $L_{xz} < d$  então:

$$\cos \beta = 1.0$$

$$\text{sen} \beta = 0.0$$

Onde

$$d = 0,0001L_{zx}$$

Nas expressões acima,  $L_{xz}$  é a projeção do comprimento do elemento sobre o plano ZX.

A matriz de rotação  $[R]$  é expressa em função dos ângulos  $\beta$  e  $\gamma$ , conforme mostrado na figura 5.2.

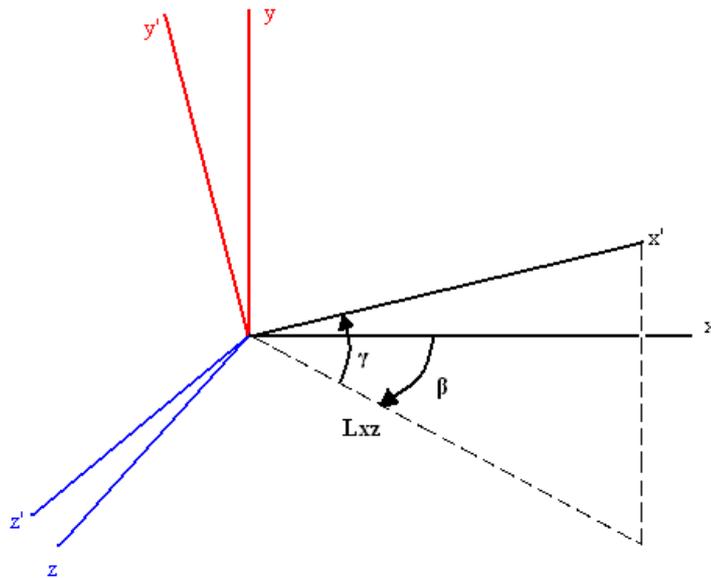


Figura 5.2 Representação dos ângulos do membro em função de coordenada global.

## 5.4 EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA O ELEMENTO FINITO

Em teoria, qualquer corpo pode ser entendido como tridimensional, porém para análise prática, muitas vezes a redução da dimensionalidade do problema é necessária. Como o caso deste trabalho, a fim de entender comportamento global da estrutura, foi utilizado elemento pórtico tridimensional.

Para materiais isotrópicos, a matriz de tensão – deformação generalizada para o elemento de pórtico é dada por:

$$[{}^t D^P] = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_2 & k_5 & k_4 \\ k_3 & k_4 & k_6 \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

Onde

$$\begin{aligned}
k_1 &= \int_{o_A} {}^t C^{EP} d^o A \\
k_2 &= \int_{o_A} -x_2 {}^t C^{EP} d^o A \\
k_3 &= \int_{o_A} x_3 {}^t C^{EP} d^o A \\
k_4 &= \int_{o_A} -x_2 x_3 {}^t C^{EP} d^o A \\
k_5 &= \int_{o_A} x_2^2 {}^t C^{EP} d^o A \\
k_6 &= \int_{o_A} x_3^2 {}^t C^{EP} d^o A
\end{aligned} \tag{5.36}$$

Os coeficientes de matriz constitutiva são calculados através de integração na coordenada polar.

A matriz de tensão – deformação para as molas do solo é:

$$[{}^t D^S] = \begin{bmatrix} {}^t K_{AS} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t K_{BS} & 0 & {}^t K_{US} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t K_{LLS} & 0 & {}^t K_{RLS} \end{bmatrix} \tag{5.37}$$

As matrizes de esforços internos são definidas como:

$$[{}^t F] = \begin{bmatrix} {}^t F_{eq} & 0 & 0 \\ 0 & {}^t F_{eq} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t F_{eq} \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

$$[{}^t M_2] = \begin{bmatrix} {}^t M_{eq2} & 0 & 0 \\ 0 & {}^t M_{eq2} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t M_{eq2} \end{bmatrix} \tag{5.39}$$

$$[{}^t M_3] = \begin{bmatrix} {}^t M_{eq3} & 0 & 0 \\ 0 & {}^t M_{eq3} & 0 \\ 0 & 0 & {}^t M_{eq3} \end{bmatrix} \tag{5.40}$$

Os valores dos esforços internos totais equivalentes são definidos por integração numérica considerando sete pontos de integração ao longo do elemento. Sendo dois pontos localizados nas extremidades, um ponto no meio do elemento e quatro pontos distribuídos uniformemente entre os nós.

A equação do trabalho virtual incremental para o elemento de viga-duto, definida na seção 4.4, resulta na equação de equilíbrio do elemento finito. Substituindo as equações (5.16), (5.19), (5.22), (5.25), (5.27), (5.29), (5.35), (5.37), (5.38), (5.39) e (5.40) na equação (4.44), resulta em:

$$\begin{aligned}
& \sum \int_{o_{LE}} \{\delta_o^t u_e\}^T [{}^t B^L]^T [{}^t D^P] [{}^t B^L] \{u_e\} d^o x_1 + \\
& \sum \int_{o_{LE}} \{\delta_o^t u_e\}^T \left( [{}^t B_1^{NL}]^T [{}^t F] [{}^t B_1^{NL}] + [{}^t B^L]^T [{}^t M_3] [{}^t B_2^{NL}] + [{}^t B^L]^T [{}^t M_2] [{}^t B_3^{NL}] \right) \{u_e\} d^o x_1 \\
& + \sum \int_{o_{LE}} \{\delta_o^t u_e\}^T [{}^t H]^T [{}^t D^S] [{}^t B^S] \{u_e\} d^o x_1 = \sum \{\delta_o^t u_e\}^T \{P_{ext}^e\} - \\
& \sum \int_{o_{LE}} \{\delta_o^t u_e\}^T [{}^t B^L]^T \left\{ \begin{array}{l} {}^t F_{eq} \\ {}^t M_{eq3} \\ {}^t M_{eq2} \end{array} \right\} d^o x_1 - \sum \int_{o_{LE}} \{\delta_o^t u_e\}^T [{}^t H]^T \left\{ \begin{array}{l} {}^t F_{AS} \\ {}^t F_{BS} + {}^t F_{US} \\ {}^t F_{LLS} + {}^t F_{RLS} \end{array} \right\} d^o x_1
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Na análise estática utilizando a formulação Lagrangeana Total, a matrizes elementares de rigidez elasto – plástica, geométrica e das molas do solo na equação anterior são dadas respectivamente por:

$$[{}^t K_{EP}^e] = \int_{o_{LE}} [{}^t B^L]^T [{}^t D^P] [{}^t B^L] d^o x_1 \tag{5.42a}$$

$$\begin{aligned}
[{}^t K_G^e] = \int_{o_{LE}} & \left( [{}^t B_1^{NL}]^T [{}^t F] [{}^t B_1^{NL}] + [{}^t B^L]^T [{}^t M_3] [{}^t B_2^{NL}] + \right. \\
& \left. [{}^t B^L]^T [{}^t M_2] [{}^t B_3^{NL}] \right) d^o x_1
\end{aligned} \tag{5.42b}$$

$$[{}^t K_S^e] = \int_{o_{LE}} [{}^t H]^T [{}^t D^S] [{}^t B^S] d^o x_1 \tag{5.42c}$$

Os vetores de esforços equivalentes nos pontos nodais elementares para o duto e as molas do solo são definidos respectivamente pelas expressões:

$$\{{}^t Q_P^e\} = \int_{o_{LE}} [{}^t B^L]^T \left\{ \begin{array}{l} {}^t F_{eq} \\ {}^t M_{eq3} \\ {}^t M_{eq2} \end{array} \right\} d^o x_1 \tag{5.43a}$$

$$\{{}^t Q_S^e\} = \int_{o_{LE}} [{}^t H]^T \left\{ \begin{array}{l} {}^t F_{AS} \\ {}^t F_{BS} + {}^t F_{US} \\ {}^t F_{LLS} + {}^t F_{RLS} \end{array} \right\} d^o x_1 \tag{5.43a}$$

Substituindo as equações (5.42) e (5.43) na equação (5.41) obtém-se:

$$\sum \{\delta_{o_e}^t u_e\}^T \left( [{}^t K_{EP}^e] + [{}^t K_G^e] + [{}^t K_S^e] \right) \{u_e\} = \sum \{\delta_{o_e}^t u_e\}^T \left( \{P_{ext}^e\} - \{Q_P^e\} - \{Q_S^e\} \right) \quad (5.44)$$

A transformação das matrizes de rigidez elementares e dos vetores elementares de cargas externas e de esforços internos equivalentes, do sistema de coordenadas locais para o sistema de coordenadas globais dão-se:

$$[{}^t \tilde{K}^e] = [{}^t R]^T \left( [{}^t K_{EP}^e] + [{}^t K_G^e] + [{}^t K_S^e] \right) [{}^t R] \quad (5.45)$$

$$\{{}^t \tilde{P}^e\} = [{}^t R]^T \{P^e\} \quad (5.46)$$

$$\{{}^t \tilde{F}^e\} = [{}^t R] \left( \{Q_P^e\} + \{Q_S^e\} \right) \quad (5.47)$$

onde a matriz  $[{}^t R]$  está definida na seção 5.3.

A equação de equilíbrio global incremental obtida usando o método de elementos finitos é:

$$[{}^t \tilde{K}] \{{}^t \tilde{u}\} = \{{}^t \tilde{P}\} - \{{}^t \tilde{F}\} \quad (5.48)$$

## 5.5 INTEGRAÇÃO POLAR

As integrações nas áreas que aparecem na equação (5.41) são feitas em coordenadas polares. No sistema de coordenadas locais, nas direções dos eixos  $X_2$  e  $X_3$ , definem-se o raio e o ângulo de circunferência.

$$\begin{aligned} x_2 &= r \operatorname{sen} \theta \\ x_3 &= r \operatorname{cos} \theta \end{aligned} \quad (5.49)$$

As representações de raio e ângulo são mostradas pela figura 5.3.

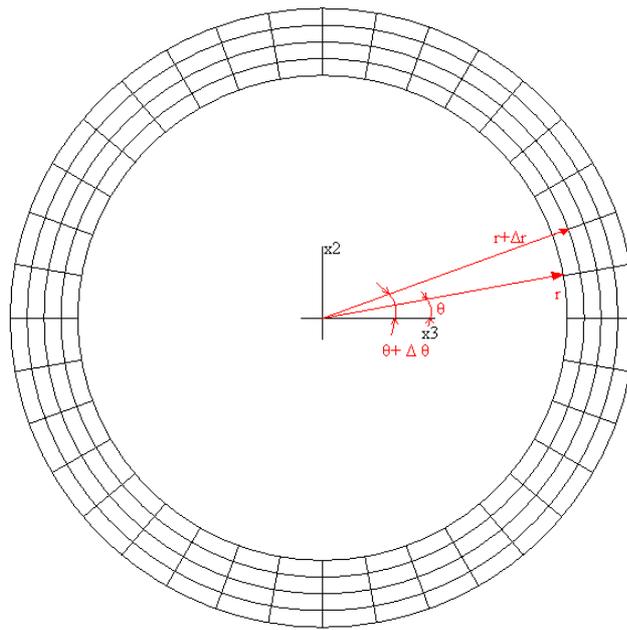


Figura 5.3 Representação esquemática de integração de área na coordenada polar.

Assim sendo, qualquer integração da área será calculada pela expressão abaixo:

$$I = \int_{\theta}^{\theta + \Delta\theta} \int_r^{r + \Delta r} f(r, \theta) r dr d\theta \quad (5.50)$$

## 5.6 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Para solucionar as equações não lineares que aparecem na análise de não linearidade geométrica e física é de prática comum utilizar o método incremental e iterativo de Newton-Raphson. Este método possibilita calcular a configuração deformada de equilíbrio da estrutura.

Uma forma de representação gráfica da resposta não linear de uma estrutura consiste no traçado de um diagrama carga-deslocamento, onde a abscissa corresponde a uma componente de deslocamento (ou rotação) de um nó selecionado, e a ordenada representa o parâmetro de carga.

Uma curva suave apresentada num diagrama carga-deslocamento é chamada de trajetória de equilíbrio, como mostra a figura 5.4. Cada ponto numa trajetória de equilíbrio representa uma configuração de equilíbrio estático.

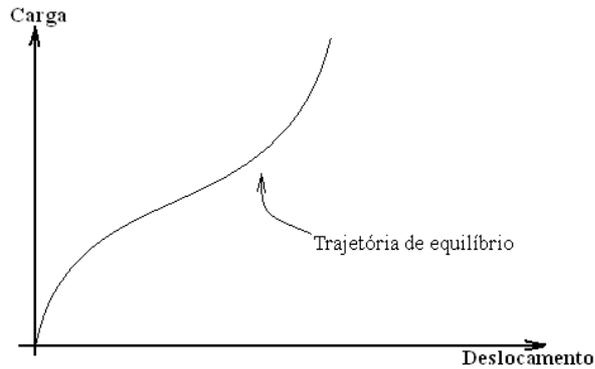


Figura 5.4 Trajetória de equilíbrio de uma solução incremental e iterativo.

A condição de equilíbrio do elemento finito consiste em se encontrar a solução das equações não lineares:

$$f(x) = \{R\} - \{F\} = 0$$

Em princípio o equilíbrio poderia ser alcançado pela estrutura impondo a carga externa total em um único passo, mas isto não é muito aplicável devido ao erro numérico que é acumulativo ao longo do processo iterativo em cada incremento. E também pelo fato de que os procedimentos iterativos frequentemente levam muitas iterações para convergir para uma solução com grandes passos de carga. Assim sendo, para garantir a exatidão da solução, é necessário pequenos incrementos de força, como mostra a figura 5.5.

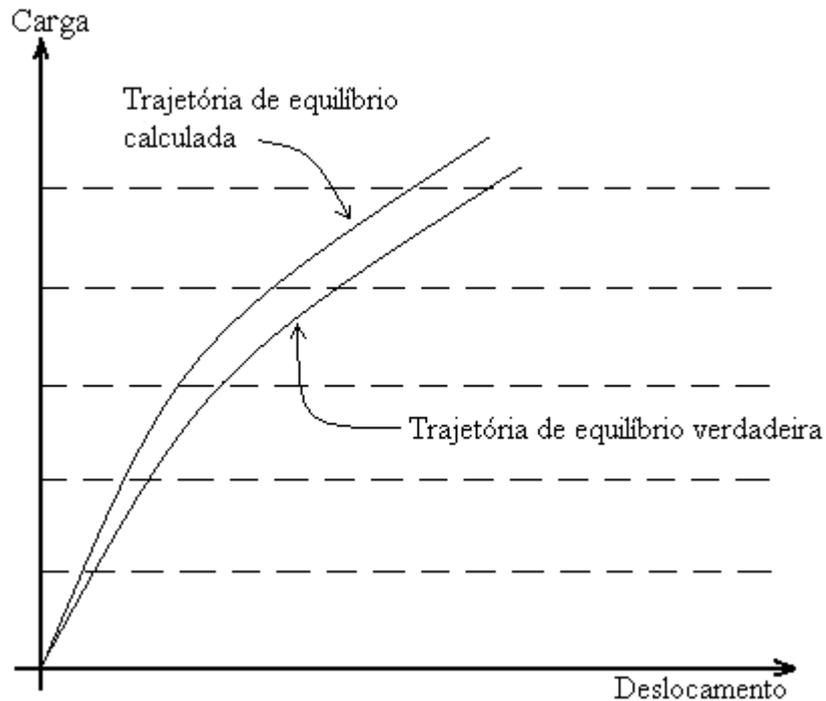


Figura 5.5 Trajetória de equilíbrio calculado e verdadeiro.

A solução de problemas não-lineares é usualmente obtida através da utilização da combinação de esquemas incrementais e iterativos. Técnicas de solução apropriadas devem ser capazes de superar os problemas numéricos associados com o comportamento não-linear. No contexto da implementação computacional, devem ter a capacidade de detectar pontos críticos, tais como pontos limites e pontos de bifurcação, e seguir a trajetória de equilíbrio além dos pontos críticos. Problemas com salto dinâmico sob controle de carga (snap-through), mostrado na figura 5.6 e salto sob controle de deslocamento (snap-back), figura 5.7, devem ser tratados por estas técnicas.

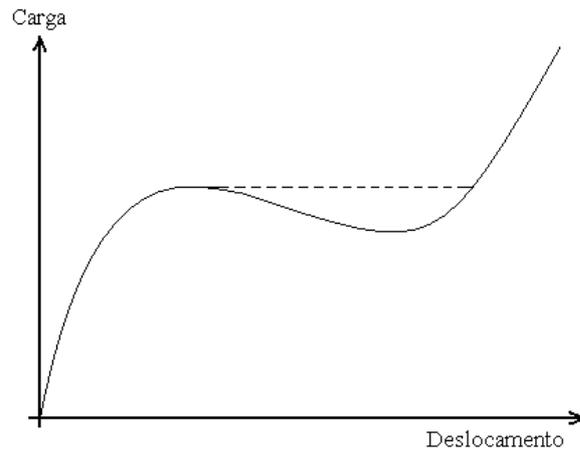


Figura 5.6 Efeito snap-through.

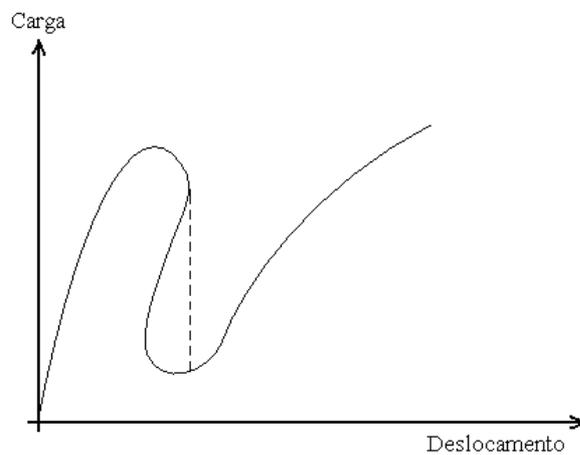


Figura 5.7 Efeito snap back.

Este trabalho adota o método de cálculo pelo incremento de força. Desse modo, considerando carga incremental, a equação de elementos finitos fica:

$$[{}^{t+\Delta t} K^{(i-1)}] \{\Delta U^{(i)}\} = \{{}^{t+\Delta t} R\} - \{{}^{t+\Delta t} F^{(i-1)}\} \quad (5.51)$$

E o vetor solução deslocamento é:

$$\{{}^{t+\Delta t} U^{(i)}\} = \{{}^{t+\Delta t} U^{(i-1)}\} + \{\Delta U^{(i)}\} \quad (5.52)$$

Desde que a análise incremental é efetuada com passos de tempo (ou de carga) de tamanho  $\Delta t$ , as condições iniciais desta iteração são:

$$[{}^{t+\Delta t} K^{(0)}] = [{}^t K] \quad (5.53)$$

$$\{{}^{t+\Delta t} F^{(0)}\} = \{{}^t F\} \quad (5.54)$$

$$\{{}^{t+\Delta t} U^{(0)}\} = \{{}^t U\} \quad (5.55)$$

Enquanto o critério de convergência não é satisfeito, a iteração continua até se obter a solução desejada do problema para determinado passo de carga ou tempo.

Uma característica deste método é que a matriz de rigidez tangente é calculada em cada iteração, motivo pelo qual o método também é referenciado como método de Newton-Raphson completo. O processo de solução para um sistema com um único grau de liberdade é ilustrado na figura 5.8. Na solução de sistemas com muitos graus de liberdade, a resposta das curvas é, em geral, até certo ponto não-homogênea e complicada.

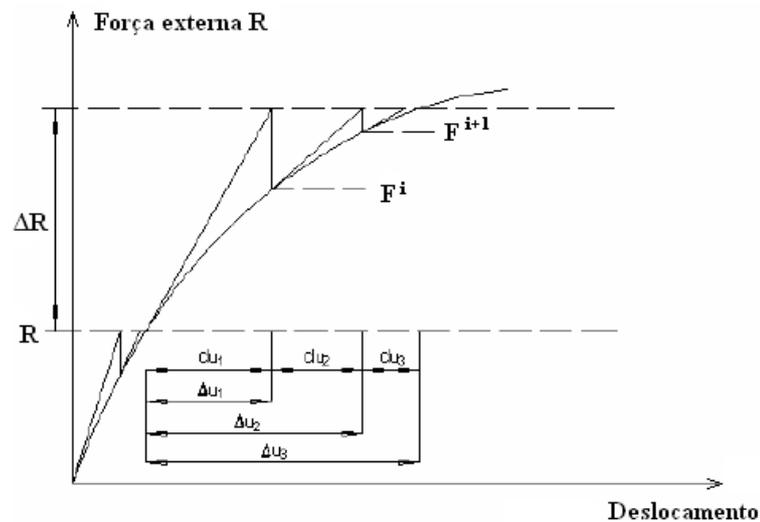


Figura 5.8 Relação deslocamento-carregamento.

O processo de Newton-Raphson apesar de apresentar eficiência na convergência de solução apresenta alguns aspectos negativos:

1. A nova matriz tangente  $[{}^{t+\Delta t} K^{(i-1)}]$  tem que ser computada em cada iteração;
2. Se a solução para as equações em (5.51) é direta, a matriz precisa ser fatorada em cada iteração;
3. Em algumas ocasiões a matriz tangente é simétrica em um estado de solução, mas assimétrica sob outros aspectos (em alguns sistemas por integrar

parâmetros de grandes rotações ou plasticidade não associada). Nestes casos uma solução assimétrica é, em geral, necessária.

## 5.7 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

A adoção de uma estratégia de solução baseada em métodos iterativos requer a utilização de um critério que estabeleça o fim do processo de iteração. Ao final de cada iteração a solução obtida deve ser analisada para avaliar se a solução convergiu dentro das tolerâncias admissíveis ou se está divergindo. Se tolerâncias muito grandes são adotadas resultados imprecisos são obtidos; tolerâncias muito apertadas requerem um esforço computacional grande e a precisão dos resultados torna-se exagerada. Um critério de convergência ineficiente pode interromper o processo de iteração por detectar uma falsa divergência da solução como também forçar a busca de uma solução inatingível. Três critérios de convergência são brevemente discutidos a seguir.

Um critério que avalia a convergência do processo iterativo em deslocamentos é dado por:

$$\frac{\|\{\Delta U^{(i)}\}\|_2}{\|\{^{t+\Delta t}U\}\|_2} \leq tol \quad (5.56)$$

onde  $tol$  é a tolerância de convergência para os deslocamentos.

Como  $\{^{t+\Delta t}U\}$  é desconhecido considera-se  $\{^{t+\Delta t}U^i\}$  como uma aproximação para  $\{^{t+\Delta t}U\}$ .

Em algumas análises, quando a convergência é avaliada utilizando a equação (5.56) com  $\{^{t+\Delta t}U^i\}$ , a solução atual pode estar longe do valor obtido. Isto pode ocorrer quando os deslocamentos mudam pouco em cada iteração, mas continuam a variar por várias iterações. Um exemplo deste comportamento é o de análise de estruturas que aumentam sua rigidez com os deslocamentos. A solução pode estar longe quando a convergência é obtida por este critério.

O segundo critério de convergência é fundamentado na norma do vetor de carga desbalanceado, dado por:

$$\left\| \left\{ {}^{t+\Delta t} R \right\} - \left\{ {}^{t+\Delta t} F^{(i)} \right\} \right\|_2 \leq tol \left\| \left\{ {}^{t+\Delta t} R \right\} - \left\{ {}^t F \right\} \right\|_2 \quad (5.57)$$

Este critério apresenta como dificuldade a não inclusão dos deslocamentos nos termos da equação (5.57). Isto pode ocorrer no caso de estruturas em plastificação com baixo módulo de encruamento. Embora os vetores de cargas desbalanceados possam ser pequenos, os deslocamentos podem estar errados.

O último critério de convergência é baseado na comparação do incremento de energia interna durante cada iteração com o incremento de energia interna inicial. A convergência é atingida quando:

$$\left\{ \Delta U^i \right\}^T \left( \left\{ {}^{t+\Delta t} R \right\} - \left\{ {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \right\} \right) \leq tol \left( \left\{ \Delta U^{(1)} \right\} \left( \left\{ {}^{t+\Delta t} R \right\} - \left\{ {}^t F \right\} \right) \right) \quad (5.58)$$

Este trabalho adota o terceiro critério de convergência por conter ambos os deslocamentos e as forças, não apresentando assim as deficiências apontadas nos outros dois critérios anteriores.

## 6. ESTUDO DO FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES

Na análise de integridade de um duto metálico corroído, deve-se levar em consideração as imperfeições geométricas. Tais imperfeições podem ser geradas pela corrosão ou pela operação de instalação, como amassamento. Na vizinhança de uma região com defeito de corrosão, a tensão atuante é ampliada dependendo do tipo de carga submetida. Este fenômeno é chamado de concentração de tensões. Na tentativa de quantificar este fenômeno de ampliação de tensão na vizinhança de um defeito, utiliza-se uma constante escalar denominado como fator de concentração de tensões.

Este fator nada mais é do que uma relação entre a tensão máxima num ponto e uma tensão de referência. O último parâmetro normalmente é adotado como sendo a tensão nominal que existiria no mesmo ponto caso não houvesse defeito, isto é, se a peça fosse íntegra. Em outras palavras, o fator de concentração de tensões é um parâmetro adimensional que relaciona a tensão verdadeira da peça com defeito com a tensão na mesma peça, porém íntegra. A figura 6.1 ilustra a situação descrita. Supondo que um trecho de duto com defeito semicircular é submetido a uma pressão interna,  $P \rightarrow 0 \sim P_u$ .

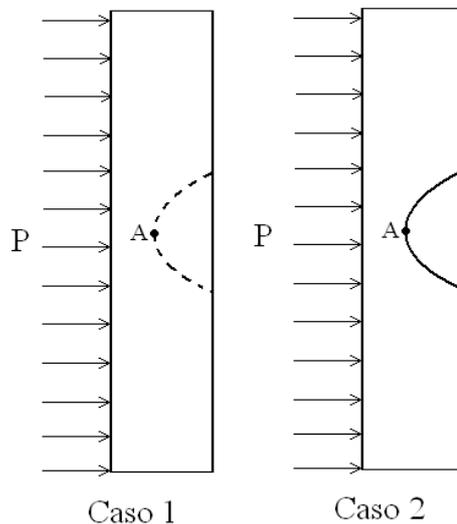


Figura 6.1. Ilustração esquemática de duto com defeito e duto íntegro submetido a pressão interna.

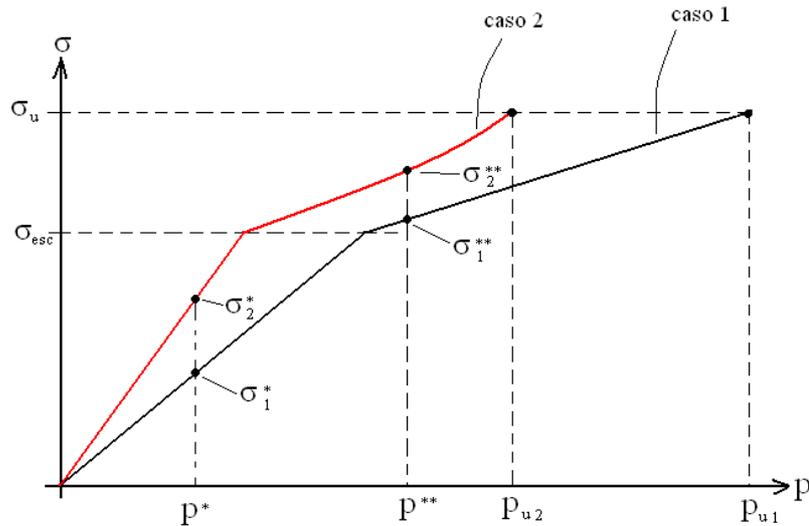


Figura 6.2. Curvas hipotéticas de tensão no ponto A em função de pressão interna.

A tensão é calculada para duto íntegro e para duto corroído respectivamente no ponto A. A evolução de tensão é acompanhada em função de pressão interna. A figura 6.2 ilustra as curvas hipotéticas de cada caso. Para uma mesma pressão  $p^*$ , a peça 1 (íntegro) terá uma tensão  $\sigma_1^* \leq \sigma_2^*$  pois  $\sigma_2^* = K_\sigma \sigma_1^*$ , onde  $\sigma_2^*$  é a tensão atuante na peça 2 (com defeito) e  $K_\sigma$  é o fator de concentração de tensões. Como  $\sigma_{esc}$  é a mesma para as duas peças, então  $p_{esc,2} \leq p_{esc,1}$ , onde  $p_{esc}$  é a pressão que produz a tensão de escoamento do material.

Tudo se passa como se o diagrama da peça 1 (sã) fosse “comprimido para a esquerda” para gerar o diagrama da peça 2 (com defeito), fazendo com que a tensão de escoamento permanecesse no mesmo valor, mas reduzindo o valor das pressões  $p_{esc}$  (que produz o escoamento) e  $p_u$ , que é a pressão última do material.

O problema de concentração de tensões devido a descontinuidades, apresenta grande importância na avaliação de integridade estrutural, especialmente quando houver encruamento de material. Considerando que o material ao redor do defeito iniciar escoamento, conseqüentemente reduz o módulo de elasticidade original. Entretanto, ao mesmo tempo, tende a minimizar a ampliação do campo de tensões e deformações provocadas ao redor destas descontinuidades. Desse modo diminui o valor máximo relativo desta tensão. A concentração de tensões está presente nas situações abaixo descritas:

1. Mudança abrupta da seção transversal, como diminuição de área ou mudança de geometria causada pela corrosão.

2. Ponto de aplicação de força externa, ou fenômeno de Saint-Venant. A distribuição tende a ser uniforme ao se afastar do ponto.
3. Descontinuidade do próprio material. Como por exemplo, inclusão de material não metálico no metálico.
4. Tensão residual causada no processo de fabricação, ou pela variação de temperatura.
5. Trinca devido a processo de usinagem, encruamento ou próprio processo de fabricação, ou produzida pelas cargas atuantes.

A fim de melhor entender o comportamento do campo de tensões e deformações ao redor de descontinuidade geométrica, será apresentada uma metodologia simples de avaliação qualitativa denominada “trajetórias de forças”. Este conceito é bastante útil quando se trata de identificar os pontos críticos de concentração de tensão numa estrutura quando a mesma é submetida ao um carregamento complexo, ou se estiver submetida a diferentes, ou indefinidas condições de contorno.

O conceito de “trajetórias de forças” se baseia no fato de que em um corpo submetido a um carregamento qualquer, se estiver em equilíbrio, então todos os esforços que são aplicados terão reações no corpo em questão, como mostra a figura 6.3. Em outras palavras, a somatória dos esforços se equivale à zero. Desse modo, o caminho percorrido por estes esforços internos dentro do corpo, desde a superfície de aplicação até a superfície de reação é conhecido como as “trajetórias de forças”.

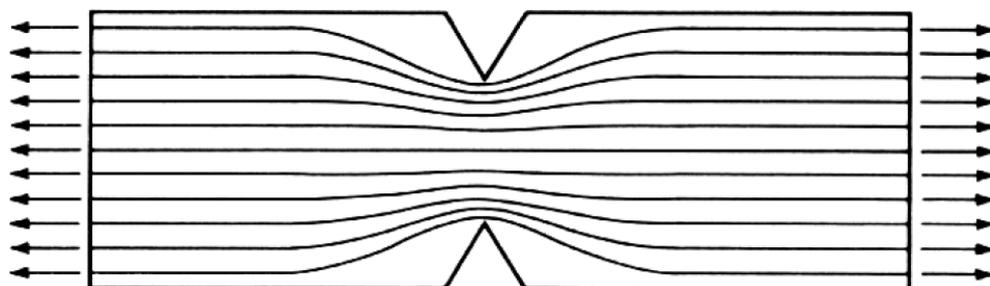


Figura 6.3 Representação esquemática da trajetória de forças.

As trajetórias de força, por definição, não podem ser interrompidas, logo, elas têm que se desviar ao se encontra uma imperfeição geométrica. Dessa forma, pode-se

pensar que, qualitativamente, as tensões e deformações na região são proporcionais à densidade de número de trajetórias de força por unidade de área no corpo. Quanto mais próximas às trajetórias de força estiverem entre si, maior a tensão atuante naquele ponto, ou seja, maior a concentração de tensão provocada por aquela imperfeição geométrica.

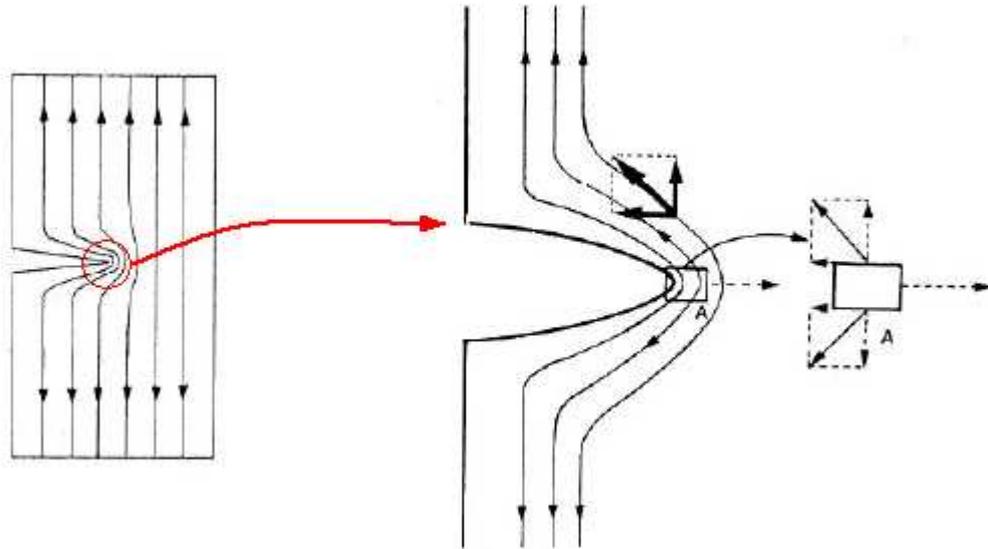


Figura 6.4 Desvio das trajetórias de forças numa peça com entalhe.

Para ilustrar melhor esta condição, observa-se na figura 6.4, peça com entalhe em “V”. Quanto menor o raio de entalhe, mais severa é a distorção provocada nas trajetórias de forças, e conseqüentemente, maior a concentração ou densidade destas linhas na ponta do entalhe, ou seja, maior a sua concentração de tensão. Portanto, pode-se concluir que cantos vivos, com raios pequenos, apresentam normalmente concentradores de tensão grandes.

Com o intuito de se diminuir a severidade dos concentradores de tensão, pode-se então suavizar a distribuição das trajetórias de forças, ou seja, diminuir a distorção dos esforços internos. Para tal, pode até mesmo em alguns casos usar de artifícios como a retirada de material para suavizar a distorção provocada às linhas de força quando comparadas à configuração original.

Um dos primeiros trabalhos voltados ao comportamento do fator de concentração de tensões quando o corpo apresenta plastificação localizada foi publicado em 1961 por Neuber (*AP. UD. Villar, 2002*). No seu trabalho, Neuber utilizou um eixo prismático simetricamente entalhado em V, e o carregamento

aplicado era torção. Foi utilizada uma lei de deformação não linear para descrever o material. De acordo com os dados experimentais, Neuber propôs a seguinte relação:

$$K_{\sigma} K_{\varepsilon} = K_t^2 \quad (6.1)$$

Onde

$K_{\sigma}$  é o fator de concentração de tensões,  $K_{\sigma} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{nom}}$

$K_{\varepsilon}$  é o fator de concentração de deformação,  $K_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{nom}}$

$K_t$  é o fator de concentração de tensão (ou de deformação) no regime elástico.

Assim,

$$K_t^2 = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{nom}} \times \frac{\varepsilon_{\max}}{\varepsilon_{nom}} \quad (6.2)$$

Pela regra de Neuber, após o escoamento o valor do fator de concentração de tensão  $K_{\sigma} = \sigma/\sigma_n$  tem que decrescer em relação ao mesmo fator no regime linear elástico  $K_t$ . E assim, passa a diferir do fator de concentração de deformação  $K_{\varepsilon} = \varepsilon/\varepsilon_n$ . Somente no caso linear elástico os três fatores são iguais.

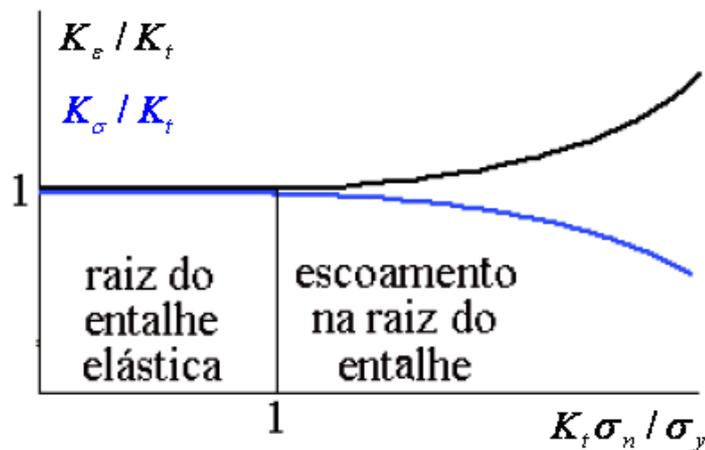


Figura 6.5 Regra de Neuber (Villar, 2002).

Para materiais dúcteis como aço, a relação  $K_\sigma / K_t$ , tem que diminuir após a plastificação na raiz das descontinuidades devido à ductilidade do material. Mas  $K_\epsilon / K_t$  deve crescer enquanto a ductilidade não se esgotar, como mostra a figura 6.5. Dessa forma, a regra de Neuber estabelece que “a média geométrica do produto entre os valores do fator de concentração de tensão e deformação é igual ao fator de concentração elástico”.

Ao final de seu trabalho, Neuber afirmou que a regra “pode ser generalizada com boa aproximação para estado de tensões bi ou triaxiais arbitrários através de uma das bem conhecidas teorias de falha”. No entanto, não foram demonstrados em seu trabalho o quão bons são os resultados para outros carregamentos.

## 6.1 ANÁLISE LOCAL DE DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO PARA DEFEITO SEMICIRCULAR UNIFORME EM DUTO.

### (c) Pressão Interna

Para melhor entender o comportamento do fator de concentração de tensões ao redor de um defeito qualquer, o presente estudo avalia sua distribuição para um defeito de corrosão uniforme, no formato semicircular. Considere-se um duto com as propriedades geométricas e mecânicas listadas na tabela 6.1.

Tabela 6.1 Propriedades geométricas e mecânicas de duto.

Diâmetro externo (mm)	762
Espessura da parede (mm)	17.5
Profundidade de corrosão	75% de espessura
Comprimento (mm)	500
Módulo de Young (MPa)	205
Módulo Tangente (MPa)	75
Tensão de escoamento (MPa)	420

Aplica-se uma pressão interna de 30MPa e a análise computacional é feita pelo ANSYS com 300 incrementos. A figura 6.6 mostra a malha de elementos finitos e uma ampliação da vista ao redor de defeito semicircular uniforme. Para reduzir o tempo de solução, foi apenas considerado um oitavo de duto. Para fins de estudo, defeito semicircular foi adotado, considerando-se uniforme para simplificar a

investigação. Assim sendo, para este instante, a distribuição de tensão é variável ao longo da direção longitudinal de duto.

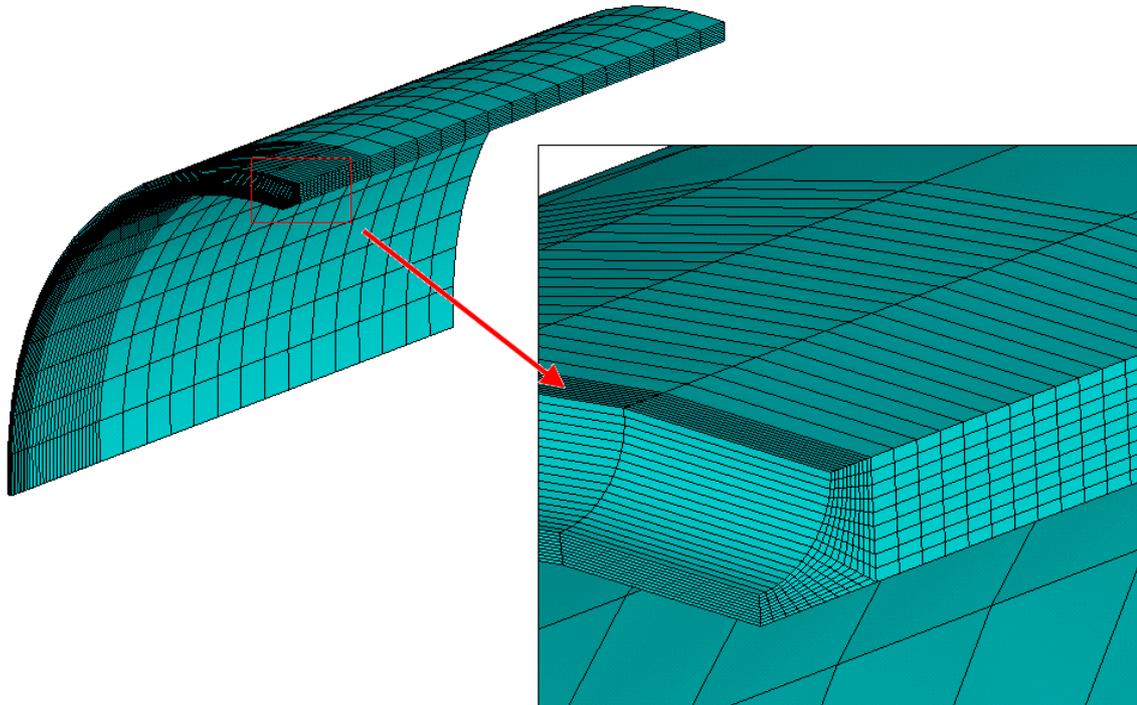


Figura 6.6 Malha utilizada para discretizar duto com defeito tipo semicircular uniforme.

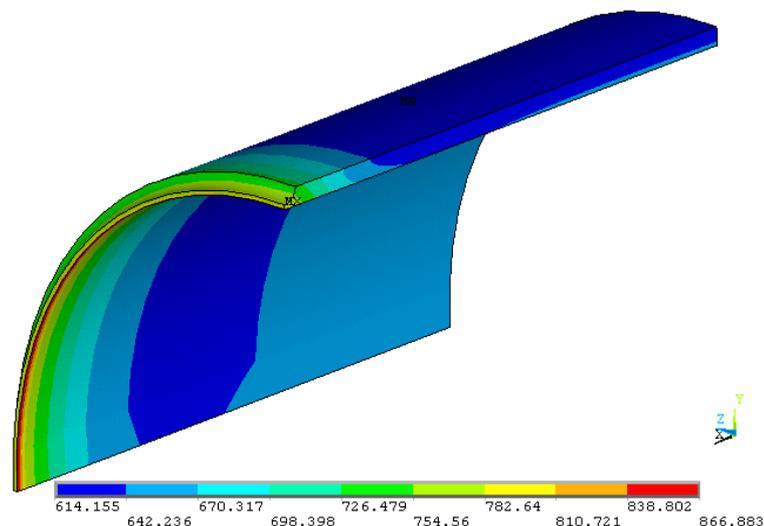


Figura 6.7 Distribuição de tensão Von Mises no duto com defeito semicircular uniforme.

Foram aplicadas condições de contorno de simetria apropriadas, ao longo dos bordos longitudinais. O duto foi considerado sem tampa nas extremidades e está impedido de deslocar na direção X. A figura 6.7 mostra a distribuição de tensão

como resultado final da análise. Observe-se que a tensão máxima neste caso aparece na parede interna de duto, ou seja, a tensão radial é relevante para este caso em particular. A tensão não varia ao longo da circunferência do duto. Para estudar a variação de tensões entre diferentes regiões do defeito, considera-se a numeração dos pontos P1 à P4 nas figuras 6.8(a)-(b).

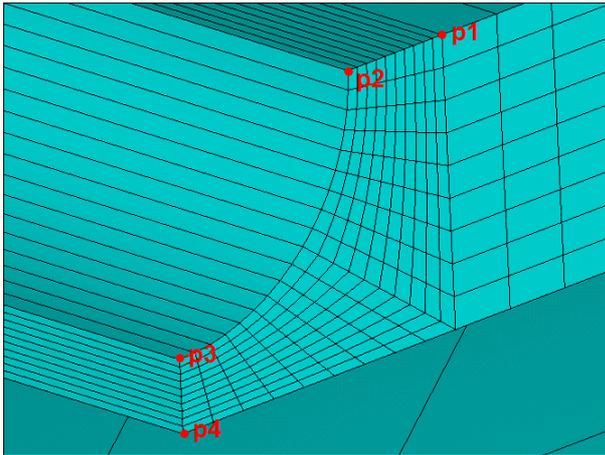


Figura 6.8(a) Numeração dos pontos principais no defeito semicircular.

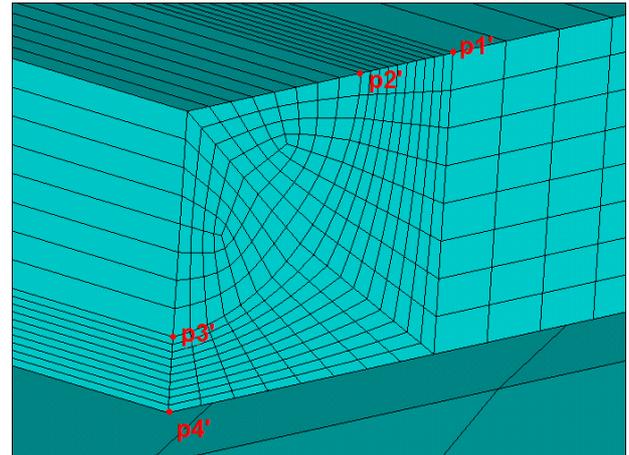


Figura 6.8(b) Numeração dos pontos principais no duto íntegro.

Observe-se no conjunto de figura 6.9(a)-(c), a variação de tensão entre os pontos P1 até P4 em relação a diferentes incrementos de pressão interna. Seguindo do ponto 1 até o ponto 2, a tensão de Von Mises não sofre variação significativa com a mudança da pressão interna. As curvas de tensão–pressão se sobrepõem aparentemente. Mas a mesma situação não se repete para região entre o ponto 2 e o ponto 3. Para nível de tensão de Von Mises menor que a tensão de escoamento, as curvas até se sobrepõem, mas quando entram no regime não linear, alguns pontos nesta região começam a ter maior crescimento de tensão do que outros pontos. Isso pode ser explicado através da presença de defeito semicircular, que gera concentração de tensão. A presença do defeito tem uma repercussão importante quando se avança do ponto 3 até ponto 4, que corresponde a porção residual de parede.

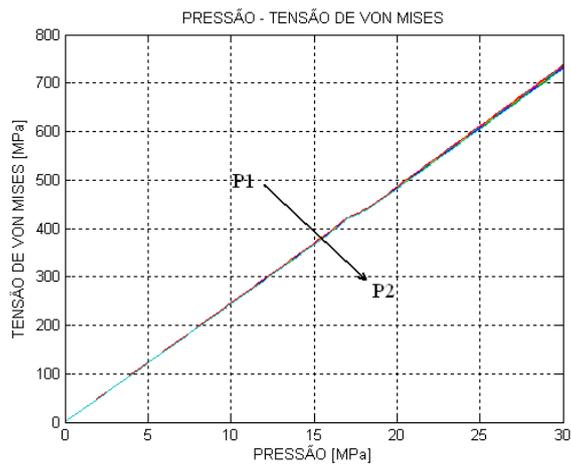


Figura 6.9(a) Ponto 1-Ponto 2

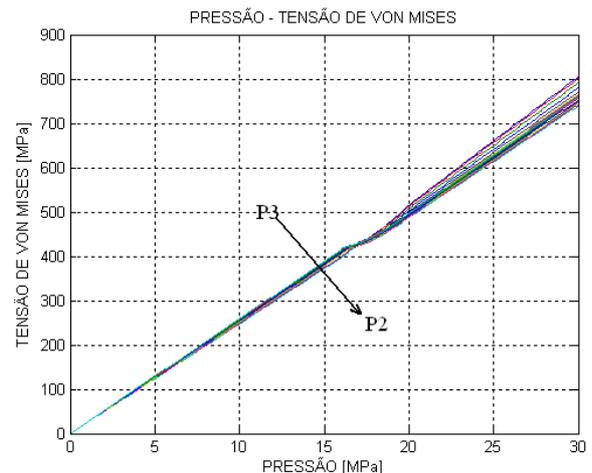


Figura 6.9(b) Ponto 3-Ponto 2.

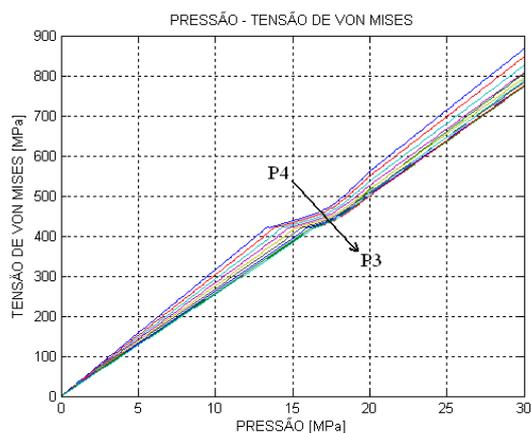


Figura 6.9(c) Ponto 4-Ponto 3.

A partir das observações nas figuras 6.9, pode-se concluir, para esta geometria em particular, que a presença de um defeito introduz perturbação na distribuição do campo de tensão pelo simples fato de haver mudança de geometria. Ou seja, a principal fonte de concentração de tensões é a variação abrupta de geometria. No caso particular de um defeito semicircular, a concentração de tensões é mais relevante ao longo da espessura residual, entre os pontos 3 e 4.

Considere um caminhamento que inicia no ponto 1 e avance até o ponto 4 na configuração final de distribuição de tensão. Observe-se que a tensão varia em posições diferentes, como mostra a figura 6.10(a), que apresenta a magnitude das tensões de Von Mises ao longo do caminho P1 até P4. A figura 6.10(b) mostra a variação do fator de concentração de tensões entre o P1 à P4.

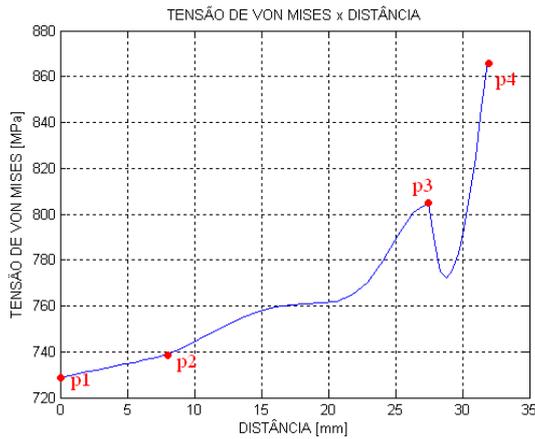


Figura 6.10(a) Variação de tensão no último incremento.

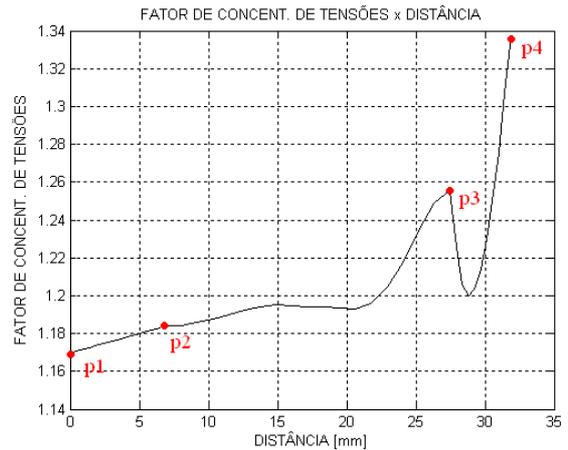


Figura 6.10(b) Variação do fator de concentração de tensões no último incremento.

#### (d) Carregamento de tração

O mesmo duto com o mesmo tipo de defeito foi submetido a um carregamento de tração numa extremidade supondo o outro bordo engastado. A carga aplicada é distribuída uniformemente na extremidade e tem a magnitude de  $100 \text{ N/mm}^2$ . A solução foi feita com 100 incrementos de carga. A malha é formada por elementos quadrangulares e axis-simétricos. A figura 6.12 mostra a distribuição de tensão no resultado final de análise. E a figura 6.11 mostra a posição de cada ponto principal que será utilizado para realizar estudo de variação de tensão.

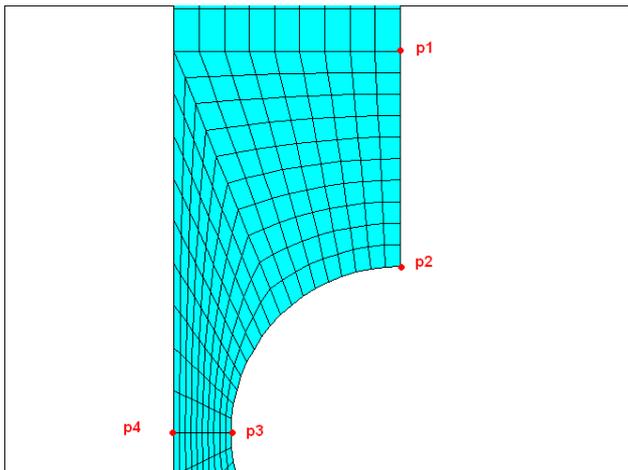


Figura 6.11 A malha composta pelo elemento quadrangular axisimétrico. E a posição dos pontos principais.

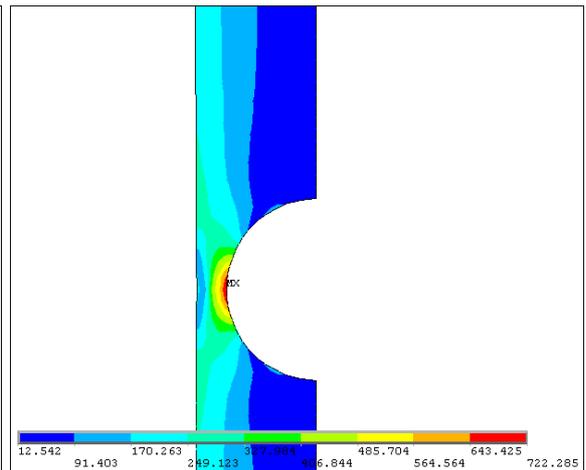


Figura 6.12 Distribuição de tensão no resultado final de análise para tração.

Observe-se que a máxima tensão ocorre na raiz do defeito, conforme mostra a figura 6.12. A mesma análise feita para verificar a variação de tensões ao

longo dos pontos P1 à P4 no duto submetido à pressão é repetida aqui. A fim de avaliar a influência do defeito na distribuição de tensão. As figuras 6.13, mostram a variação de tensões em relação aos incrementos de carga distribuída. Entre o ponto 1 e o ponto 2, a região é caracterizada por comportamento elástico mesmo no resultado final. Na região marcada entre os pontos 2 e 3, os pontos nodais mais próximos da raiz de defeito, as tensões apresentam crescimento acentuado mesmo no regime de escoamento do material. Já na figura 6.13(c), a região entre os pontos 3 e 4 é na direção radial, a perturbação é diminuída quando se aproxima do ponto 4. O ponto 3 situa na raiz do defeito, logo a sua perturbação de tensão é maior. Ao se afastar do ponto 3, esta perturbação é diminuída gradativamente até que desaparece.

Novamente considere um caminhamento que tem origem no ponto 1 e segue pelo perfil do defeito, passando pelos pontos 2, 3 e 4. É possível traçar uma curva de variação das tensões em relação à distância na configuração final de tensão, como mostra a figura 6.14. Dividindo os valores que compoñham a curva pela tensão de um ponto distante de defeito, é possível obter uma figura do fator de concentração de tensão, como mostra a figura 6.15.

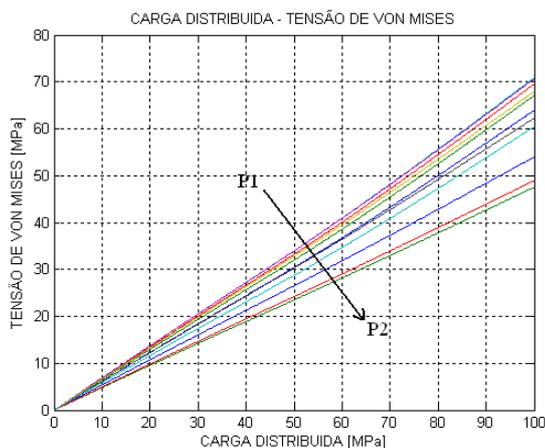


Figura 6.13(a) Variação de tensões de ponto 1 até ponto 2.

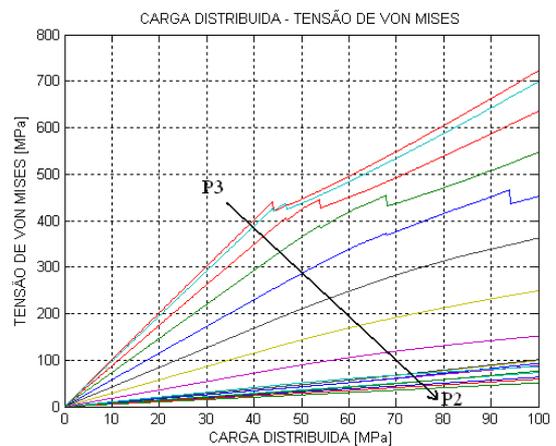


Figura 6.13(b) Variação de tensões do ponto 2 até ponto 3.

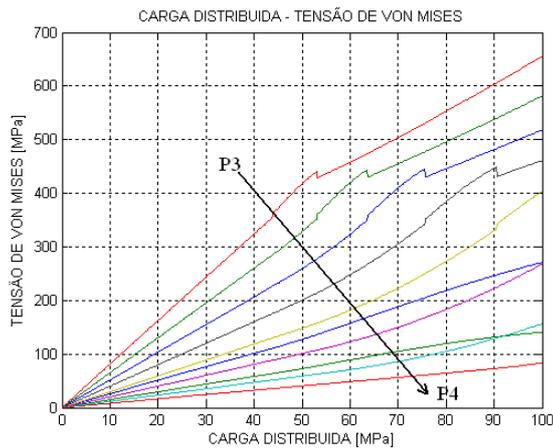


Figura 6.13(c) Variação de tensões do ponto 3 até ponto 4.

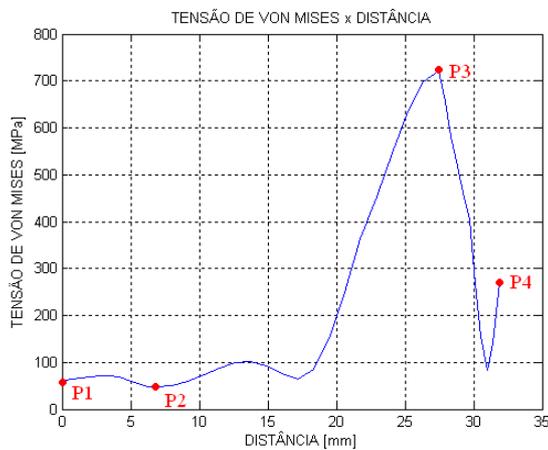


Figura 6.14 Variação de tensão ao longo dos pontos 1 à 4.

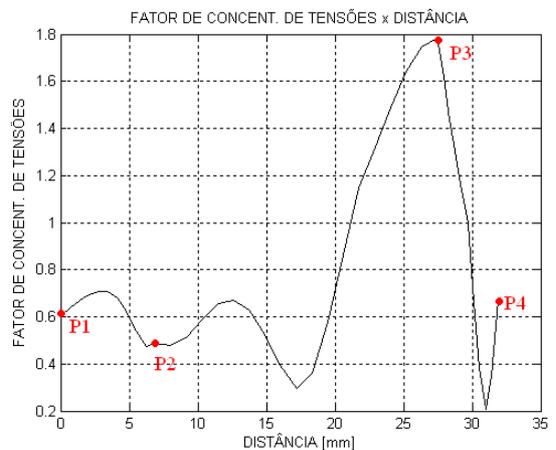


Figura 6.15 Curva do fator de concentração de tensão em relação a distância do ponto 1.

O fator de concentração de tensões na direção longitudinal devido à tração é diferente do fator de concentração de tensão gerado pela pressão interna. Para efeito de distinção, o primeiro será denominado como fator de concentração de tensão longitudinal e, o último fator de concentração de tensão tangencial. As duas curvas das figuras, 6.15 e 6.10(b) são apresentadas na figura 6.16. Observe-se que a variação do fator de concentração de tensão tangencial é menor do que o longitudinal. Em outras palavras, o fator de concentração de tensão tangencial vai potencializar a tensão, mas não na mesma magnitude que o fator de concentração de tensão longitudinal faria para mesmo ponto. Especialmente no ponto 3, que é um ponto crítico situado na raiz do defeito.

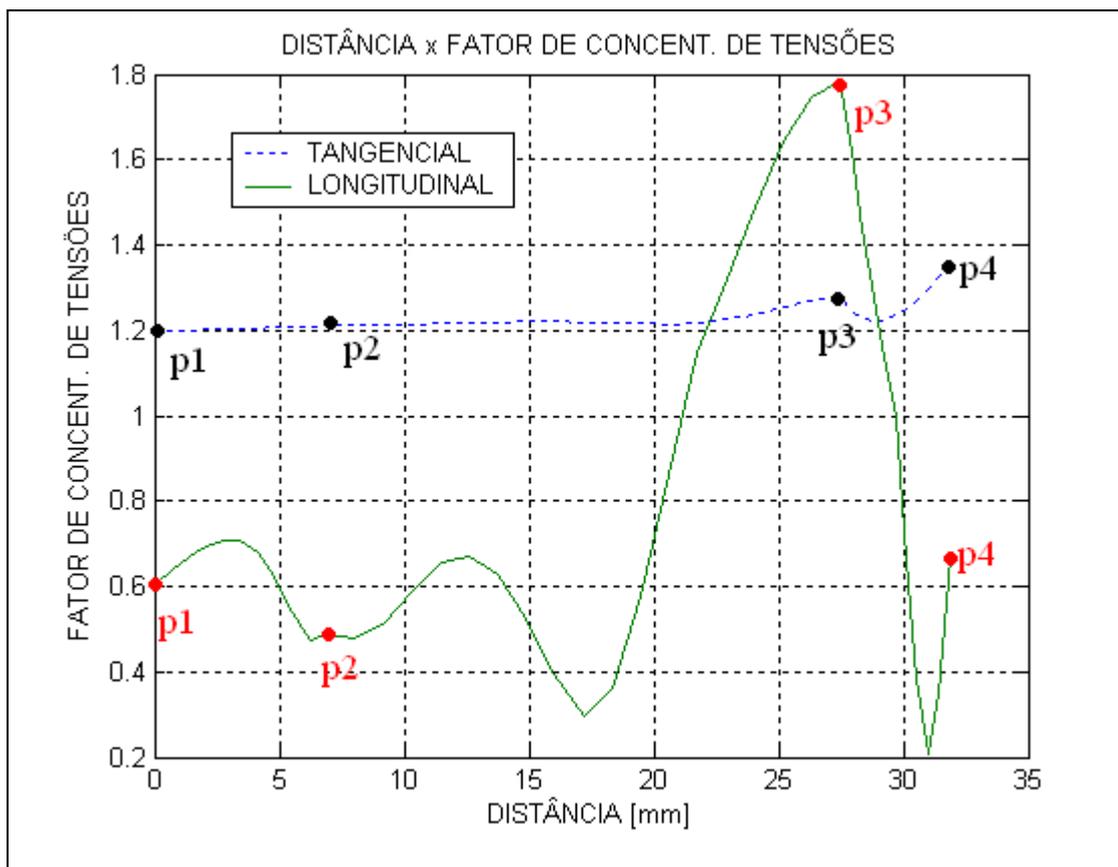


Figura 6.16 Curvas dos fatores de concentração de tensão, tangencial e longitudinal.

## 6.2 ESTUDO DE DISTRIBUIÇÃO DE TENSÃO DE DUTO COM DEFEITO RETANGULAR

Após investigar a distribuição de tensão ao redor de um defeito semicircular uniforme, o passo seguinte é estender a análise para um defeito retangular. Com este tipo de defeito, é possível investigar a variação de tensão na direção longitudinal e na direção circunferencial. Tal estudo contribuirá para entendimento do fator de concentração tensão ao redor do defeito, e por conseqüência a aplicação do fator no cálculo.

Considere-se um duto com defeito retangular conforme mostrado na figura 6.17. Suas geometrias e dimensões estão apresentadas na tabela 6.2. A mesma metodologia utilizada no estudo anterior é repetida aqui. Um quarto de duto foi considerado no estudo e as condições de contorno são aplicadas para representar condições de simetria. O duto com as mesmas propriedades geométricas foi estudado por Choi *et. al* (2003).

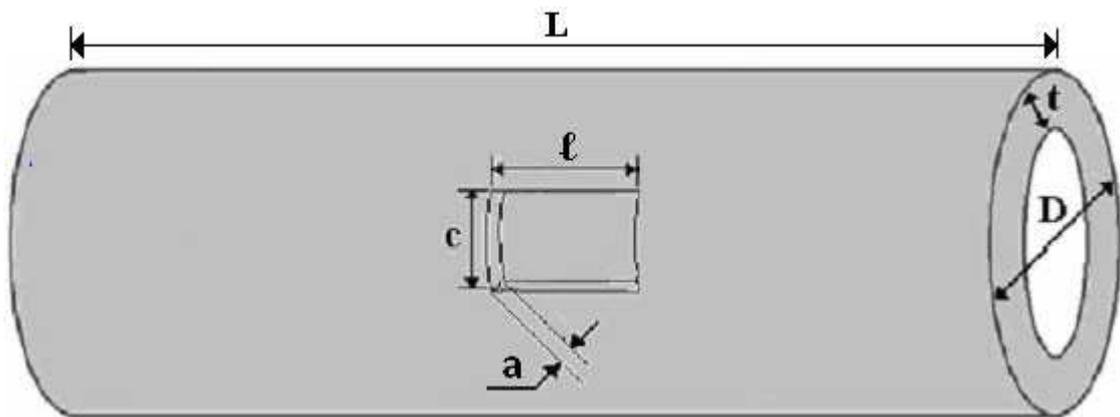


Figura 6.17 Representação esquemática do duto com defeito retangular (Choi et al 2003).

Tabela 6.2 Geometrias do duto simulado.

L (mm)	2300
Ro (mm)	381
Ri (mm)	363.5
Rm (mm)	372.25
t (mm)	17.5
c (mm)	50
ℓ (mm)	300
a (mm)	13,1 (75% de t)
Módulo de Young (GPa)	205
Módulo Tangente (MPa)	75
Tensão de Escoamento (MPa)	420

A discretização do duto sólido é representada na figura 6.18(a)-(b), com a marcação dos pontos principais. Observe-se que o defeito retangular apresentado na figura possui um raio de adoçamento nas arestas e no fundo do defeito, e não existe canto vivo. Nas análises feitas neste trabalho, foi comprovada que no canto vivo, a tensão tende a infinito, independente do refino da malha. Por este motivo, foi considerado um raio de adoçamento, equivalente a metade da profundidade do defeito (50% de a).

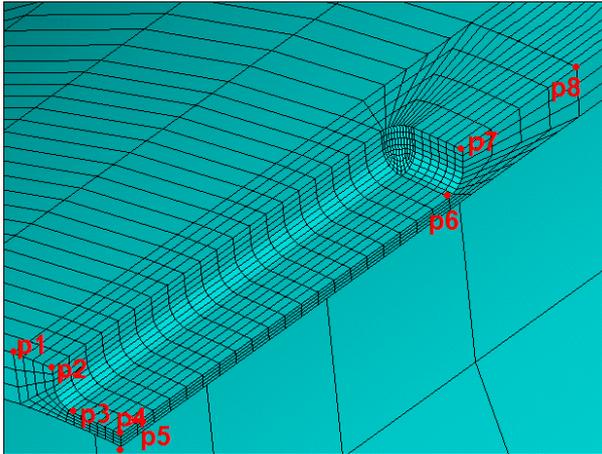


Figura 6.18(a) Discretização do duto com defeito retangular.

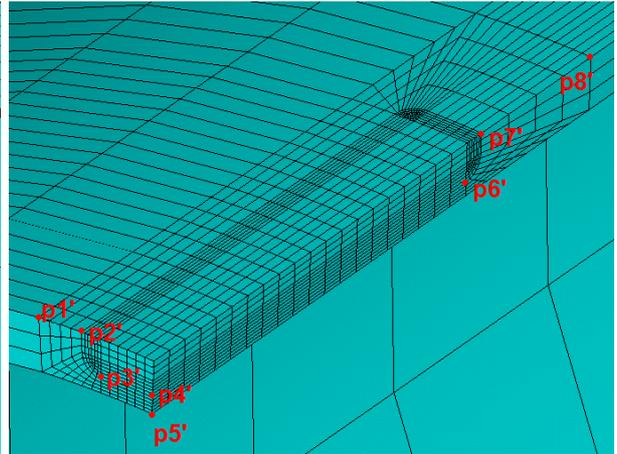


Figura 6.18(b) Discretização do duto com defeito retangular.

Uma pressão interna 6.3 MPa é aplicada e o processo de solução foi de Newton-Raphson utilizando 63 incrementos de carga. A figura 6.19 mostra a distribuição de tensões no resultado final da análise. A máxima tensão ocorre na superfície externa do defeito, próxima a aresta no fundo do defeito. Conforme a experiência de ensaio destrutivo realizado pelos outros pesquisadores, no caso de defeito retangular, a fratura inicia próxima da aresta [Choi *et. al.* (2003)].

A distribuição de tensões foi avaliada entre os pontos principais, destacado em pontos vermelhos na figura 6.18(a)-(b), e está representada na figura 6.20(a)-(g). Observe-se que a variação de tensões, em relação ao incremento de pressão interna, é bastante perturbada na figura 6.20(b). Quando se aproxima do ponto 3, a tensão aumenta mais rapidamente em comparação a seus pontos vizinhos. Como discutido anteriormente, na região do ponto 3 ocorre a maior concentração de tensões. Conforme a experiência realizada por Choi *et. al.* (2003), próxima a esta região, ocorre de fato a ruptura do duto.

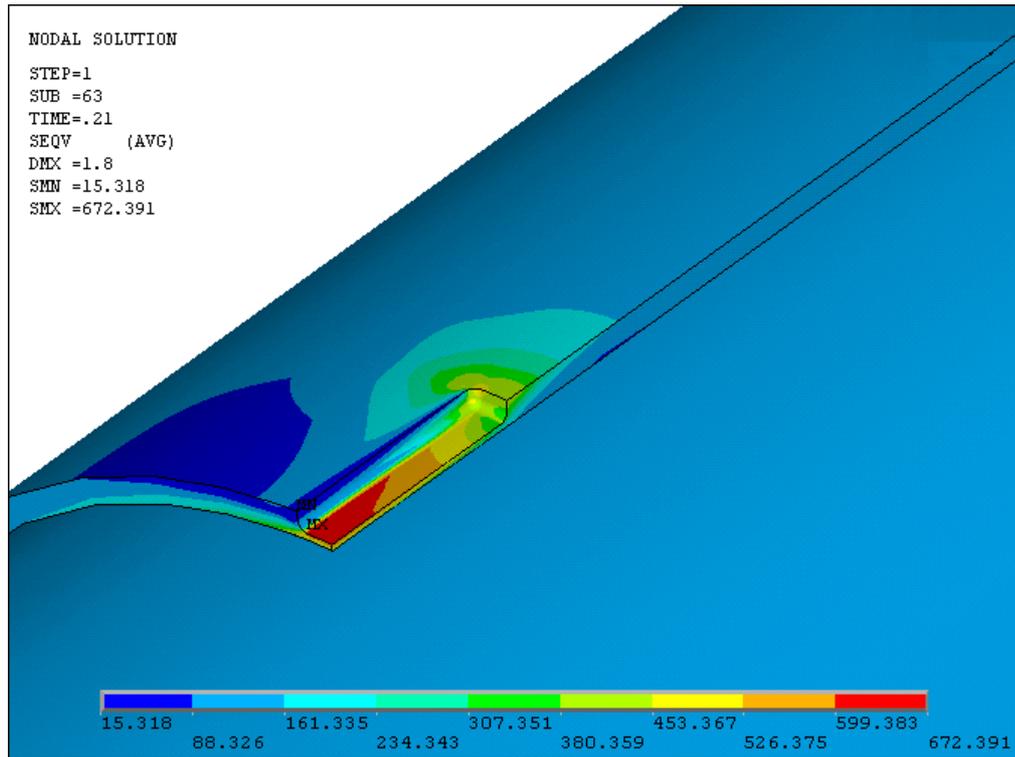


Figura 6.19 Resultado final de distribuição de tensão ao redor do defeito retangular.

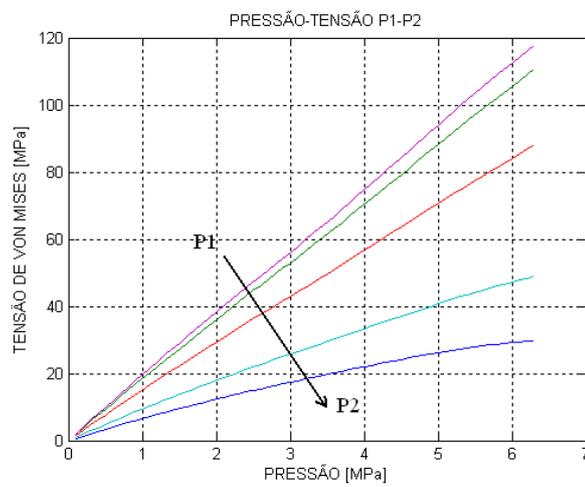


Figura 6.20 (a) Variação de tensões entre os pontos 1 e 2.

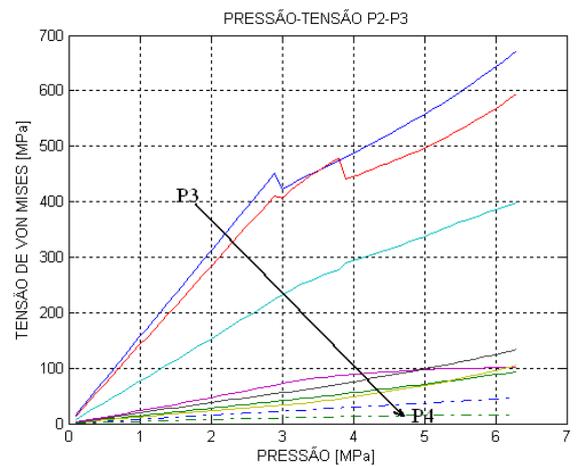


Figura 6.20 (b) Variação de tensões entre os pontos 2 e 3.

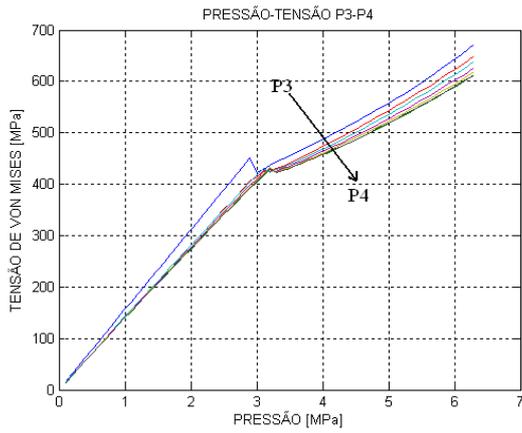


Figura 6.20 (c) Variação de tensão entre pontos 3 e 4.

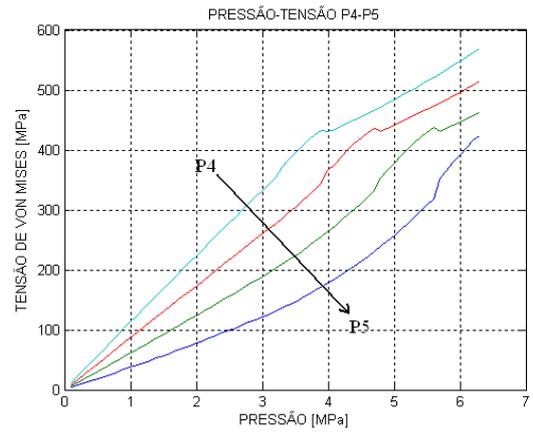


Figura 6.20 (d) Variação de tensão entre pontos 4 e 5.

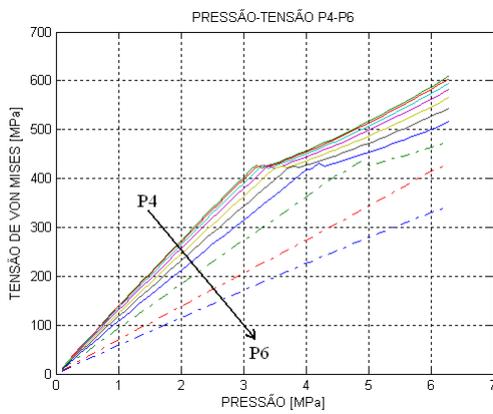


Figura 6.20 (e) Variação de tensão entre pontos 4 e 6.

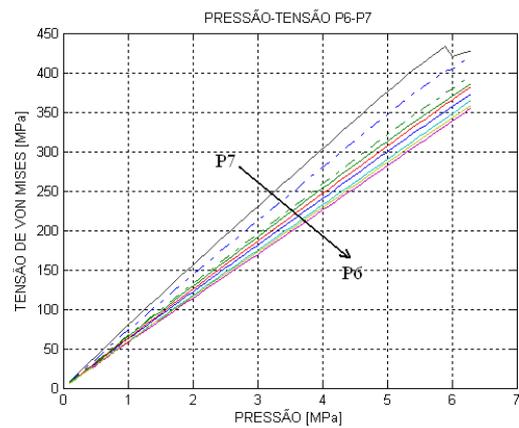


Figura 6.20 (f) Variação de tensão entre pontos 6 e 7.

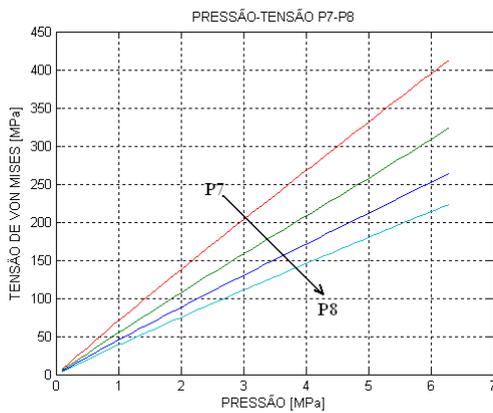


Figura 6.20 (g) Variação de tensão entre pontos 7 e 8.

Considerando-se o ponto 1 como origem, e avançando-se até ponto 5, é possível desenhar um perfil de tensões em relação a posição no resultado final da análise. É o que se mostra a figura 6.21(a)-(b).

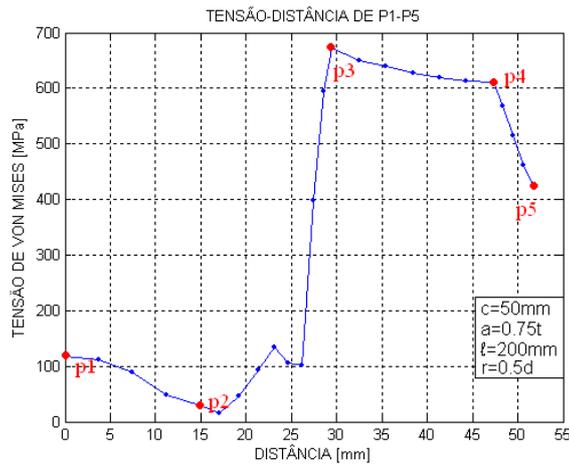


Figura 6.21(a) Perfil de tensão em relação a posição dos pontos 1 até 5 no último incremento de carga.

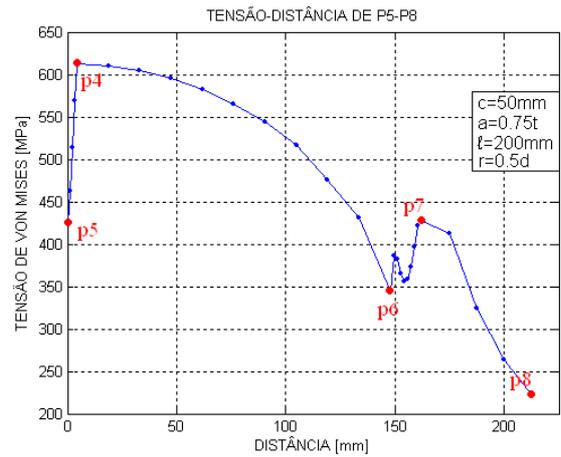


Figura 6.21(b) Perfil de tensão em relação a posição dos pontos 5 até 8 no último incremento de carga.

É possível calcular a curva do fator de concentração de tensões entre os pontos 1 e 5, e entre os pontos 5 e 8. Como mostra as figura 6.22(a)-(b).

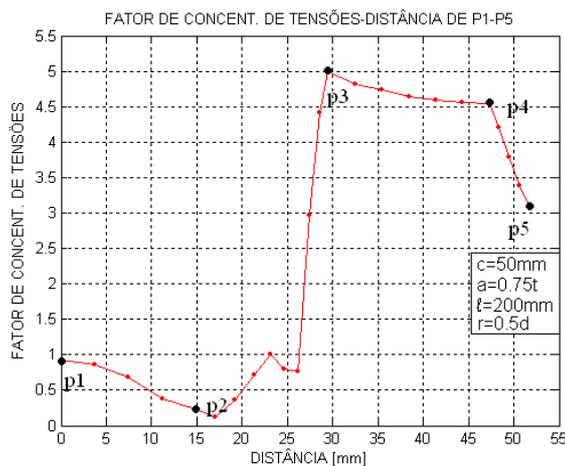


Figura 6.22(a) Curva de variação de concentração de tensões entre os pontos 1 e 5.

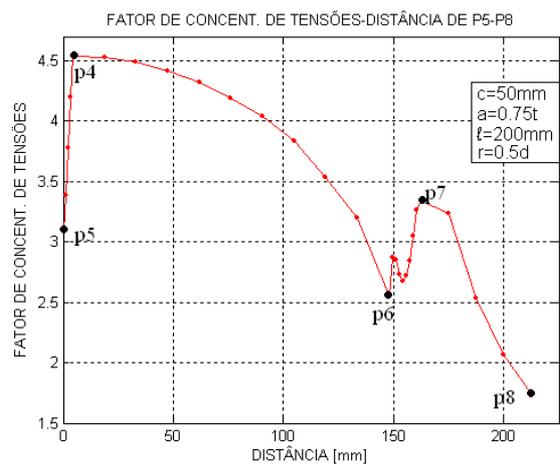


Figura 6.22(b) Curva de variação de concentração de tensão entre os pontos 5 e 8.

### 6.3 FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES PARA TRAÇÃO APÓS A PLASTIFICAÇÃO DO MATERIAL

Objetivo desta seção é estudar Fator de Concentração de Tensões (FCT) num ponto determinado e discutir como este fator se comporta durante escoamento do material.

Considere-se um duto hipotético sob tração e que tenha um defeito semicircular uniforme. As medidas deste duto são 200 mm de diâmetro externo; 190 mm de diâmetro interno; comprimento 100 mm. O defeito se posiciona no meio de duto e tem raio de 2,5 mm. Uma das extremidades é considerada engastada e na outra é aplicada uma força de 500 kN uniformemente distribuída na seção. Para fazer a análise não linear, o método de Newton-Raphson é utilizado e 50 incrementos de carga são empregados. Para modelar este problema, elementos axisimétricos foram utilizados. Desse modo, pode-se reduzir esforço computacional e por consequência diminuir o tempo gasto para solução incremental e iterativa.

O material é considerado como elasto – plástico com encruamento simples, considerando módulo de Young de 205GPa e módulo tangente 75GPa; coeficiente de Poisson 0,25. A distribuição de tensão no passo 50 é mostrada na figura 6.24.

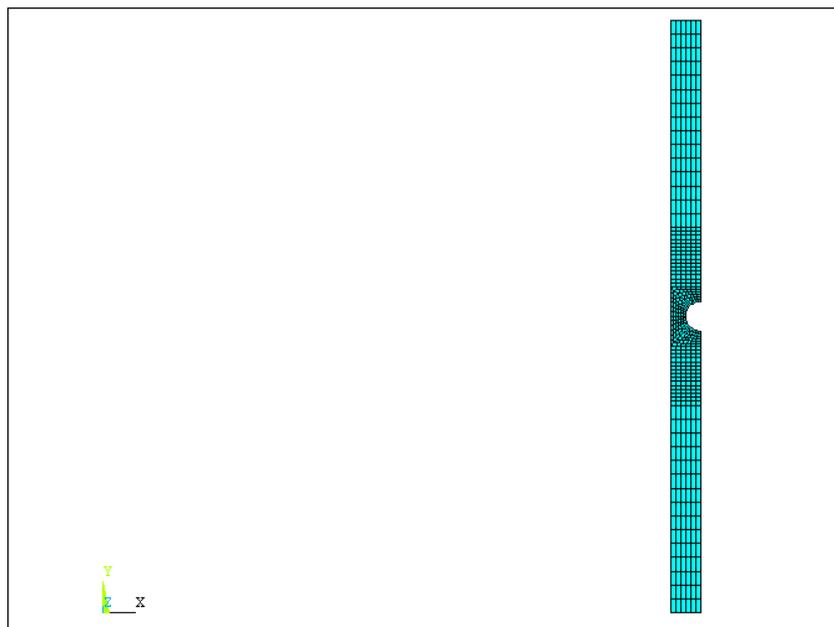


Figura 6.23. Malha gerada para simulação.

Na figura 6.23, é mostrada a malha gerada para esta simulação.

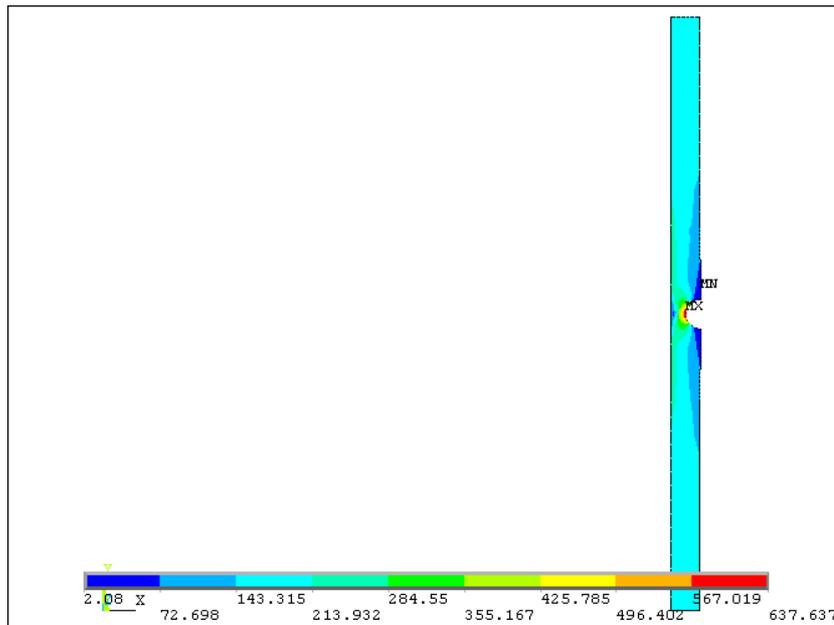


Figura 6.24. Distribuição de tensão.

Como é mostrada a figura 6.24, o ponto de maior tensão se situa na raiz do defeito esférico. Assim sendo, devido à presença de defeito geométrico, a tensão ao redor dessa região é potencializada. Comparando-se com modelo sem defeito, tal potencialização de tensão é causada pela concentração de tensões. Para acompanhar o efeito da concentração de tensões, foi extraída a curva de tensões no ponto da raiz do defeito em relação ao incremento de carga. Em seguida, foi simulado outro caso de duto com mesma dimensão e mesmo defeito no programa APC3D. Desta vez, o elemento utilizado é um elemento de viga. E a porção com defeito é simulada como uma viga com diâmetro externo reduzido. A tensão nesta viga de diâmetro externo reduzido é extraída também com relação aos incrementos de carga. Assim, dividindo a tensão máxima de ANSYS pela tensão do APC3D é possível obter a seguinte relação:

$$k_{\sigma} = \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\sigma_{nom}} \quad (6.3)$$

Para visualizar o efeito deste fator no momento de plastificação, um gráfico é gerado relacionando a tensão máxima e a tensão de escoamento, que neste caso é constante e é igual à 420MPa. O resultado é mostrado na figura 6.25. Observe-se

que, no regime linear, o fator de concentração de tensões (FCT) é praticamente constante, mas quando  $\sigma_{\max}/\sigma_{esc} > 1$ , então a tensão máxima é igual a tensão de escoamento, FCT começa a decrescer.

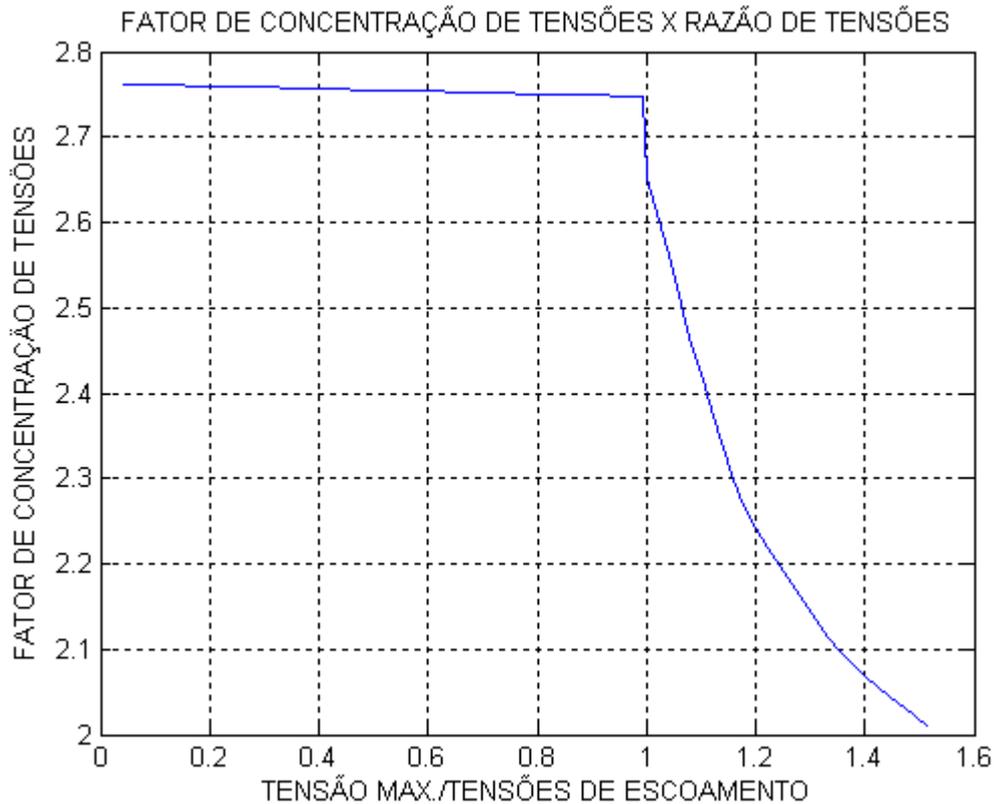


Figura 6.25. Fator de concentração de tensões versus razão de tensão e tensão de escoamento.

Uma análise análoga foi desenvolvida para as deformações. Mas diferentemente das tensões, a deformação começa a aumentar seu valor quando a tensão é mais elevada que tensão de escoamento, ou seja, quando deformação é mais elevada que deformação de escoamento, como mostra a figura 6.26.

Dividindo-se os dois fatores, de deformações e de tensões, pelo fator de concentração de tensões no regime linear, e apresentando o resultado em relação a razão de tensões e tensão de escoamento, mostra o resultado conforme a figura 6.27. Observa-se que os dois fatores têm mesmo valor quando material estiver no regime linear. Mas se diversificam quando entram no regime de escoamento, e apresentam comportamentos distintos.

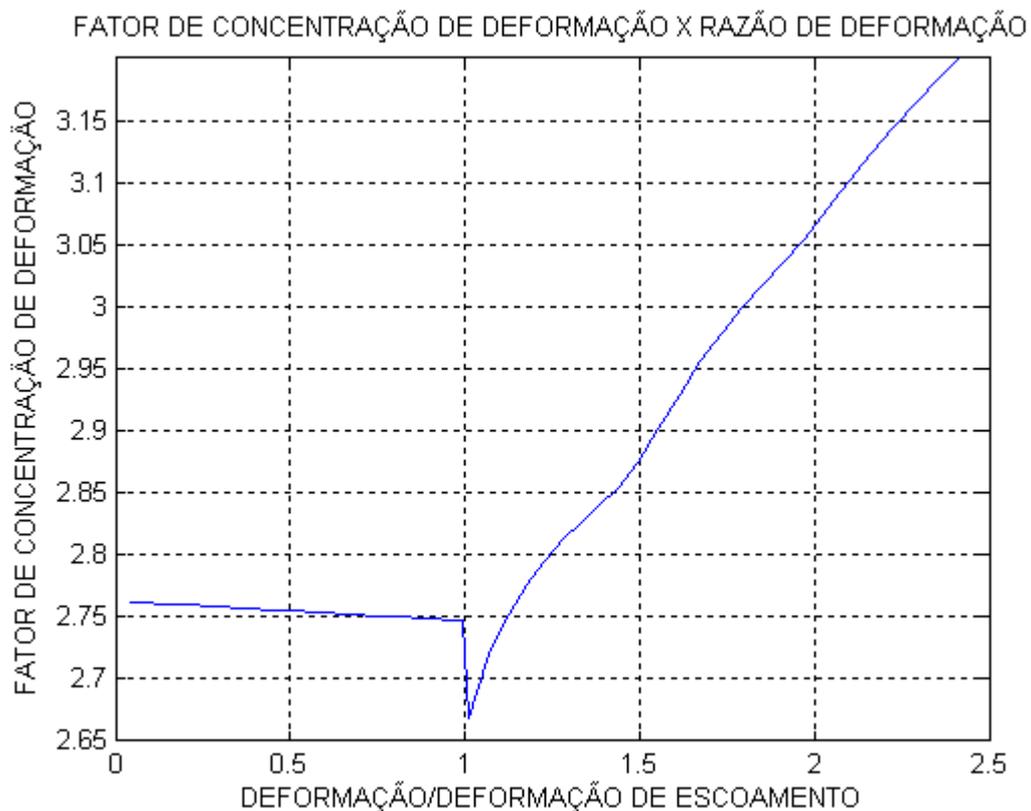


Figura 6.26. Fator de concentração de deformação em relação à razão de deformação e deformação de escoamento.

A regra de Neuber é a equação abaixo

$$k_t^2 = k_\sigma k_\epsilon \quad (6.4)$$

O fator de concentração de tensões no regime linear é igual ao produto de fatores de concentração de tensões e de deformações, mostrados pela figura 6.25 e 6.26, respectivamente. Com o intuito de verificar esta equação, foi considerado FCT no regime linear como constante e foram multiplicados os dois fatores, extraindo-se a raiz deste produto. Esta análise resultou na figura 6.28. Observe-se que o resultado está muito diferente. Concluindo, que para este material com encruamento simples e o duto com defeito semicircular submetido à tração, não se aplica regra de Neuber.

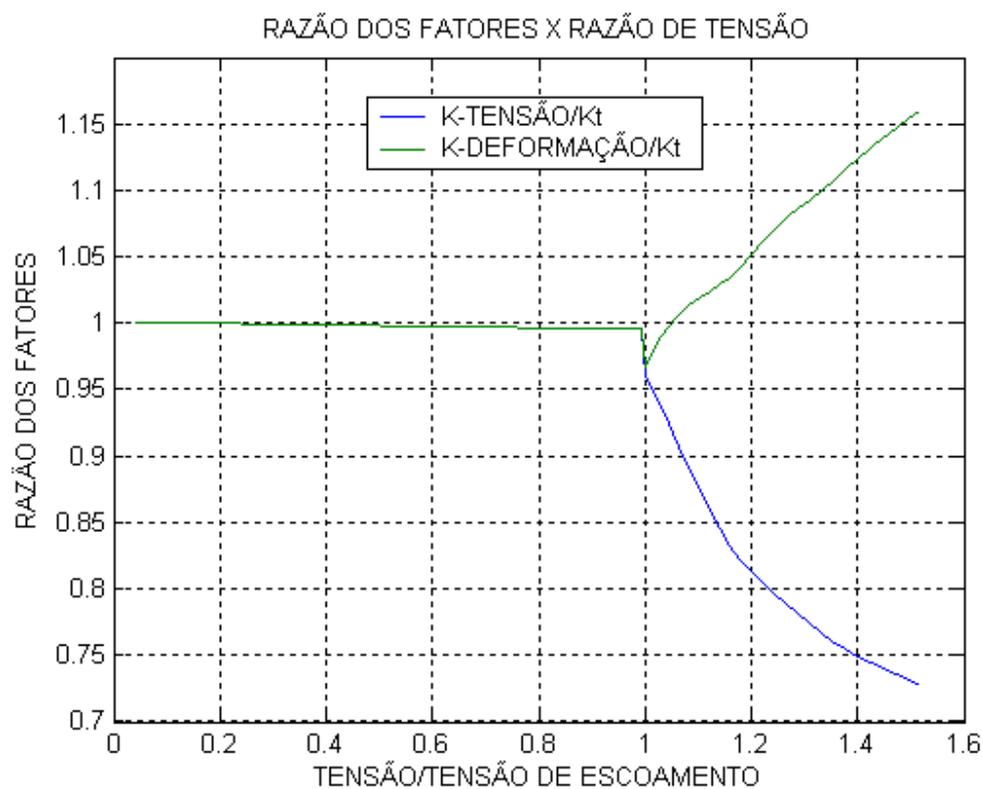


Figura 6.27. Razão dos fatores em relação à razão das tensões.

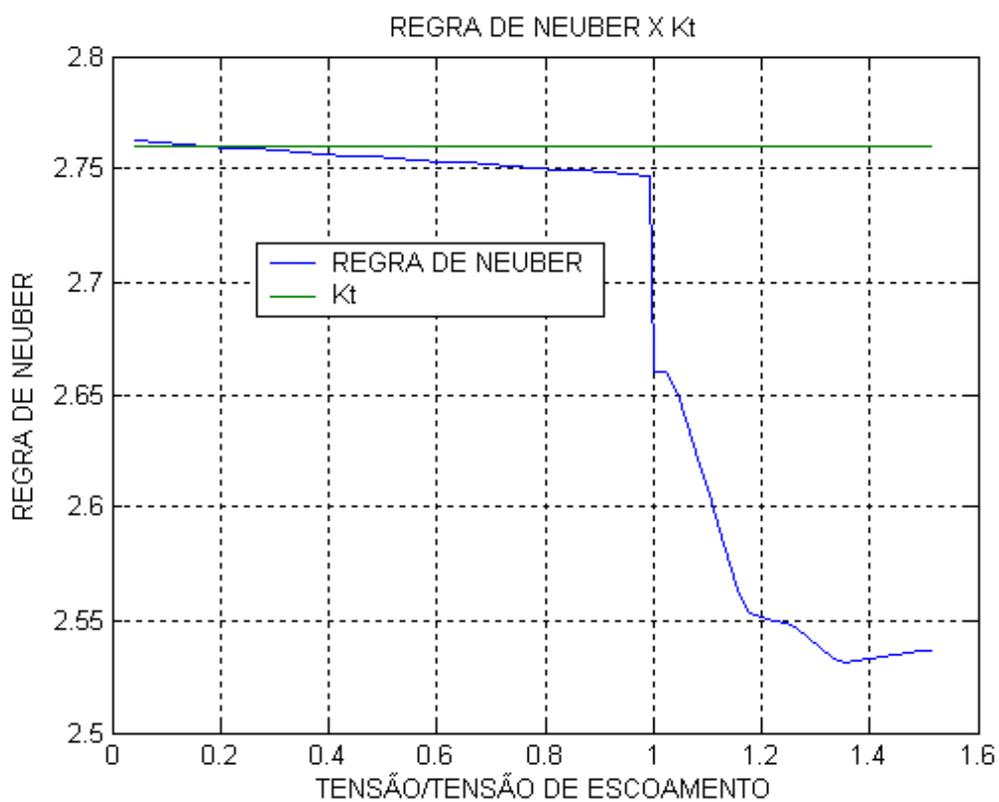


Figura 6.28. Comparação de regra de Neuber com o produto dos fatores.

## 6.4 FATOR DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES PARA PRESSÃO APÓS A PLASTIFICAÇÃO

As mesmas metodologias foram adotadas para fazer estudo do FCT no caso de duto submetido à pressão interna. Mas diferente da tração, o FCT é calculado a partir da tensão tangencial. Logo, para não haver confusão com a nomenclatura, o FCT para tensão tangencial será denominado por  $k_{\theta}$ . No caso de duto de parede fina, a tensão radial é consideravelmente pequena comparada com outras tensões, como tangencial e longitudinal. Para efeito de análise, considera-se a mesma geometria de duto e as mesmas dimensões do defeito uniforme. O duto é submetido à uma pressão interna de 25 MPa e a simulação é feita com 25 incrementos. As duas extremidades são engastadas. Os resultados da análise são apresentados na figura 6.29(a)-(d).

Como neste trabalho adota elemento de viga Euler-Bernoulli, então o mesmo não é capaz de calcular deslocamento radial e, por consequência, não é capaz de calcular tensão radial. Observa-se que a máxima tensão ocorre na raiz do defeito. Logo, para simplificar o estudo, este ponto é o único ponto de análise. O estudo não será estendido para outros pontos na vizinhança. As tensões principais e tensão de Von Mises são representadas na figura 6.30 em relação a os incrementos de carga. A partir das tensões, é possível calcular o  $k_{\theta}$  para tensão tangente em relação a razão das tensões. O resultado é representado na figura 6.29.

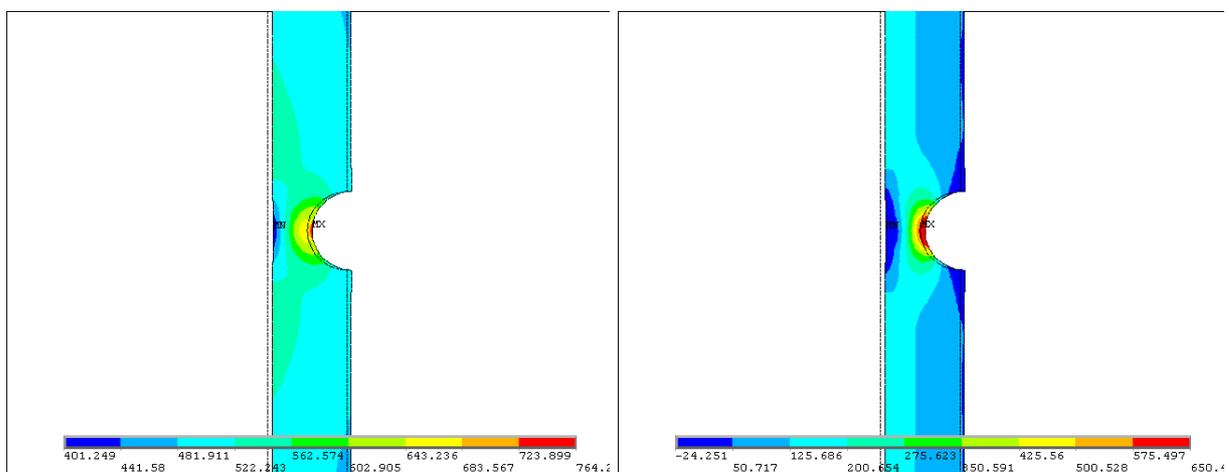


Figura 6.29(a) Tensão tangente em MPa

Figura 6.29(b) Tensão longitudinal em MPa

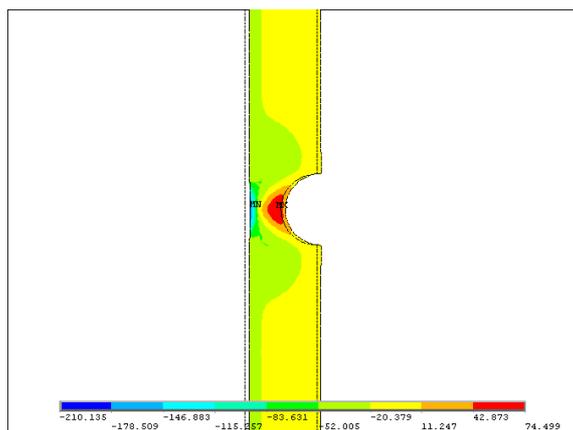


Figura 6.29(c) Tensão radial em MPa

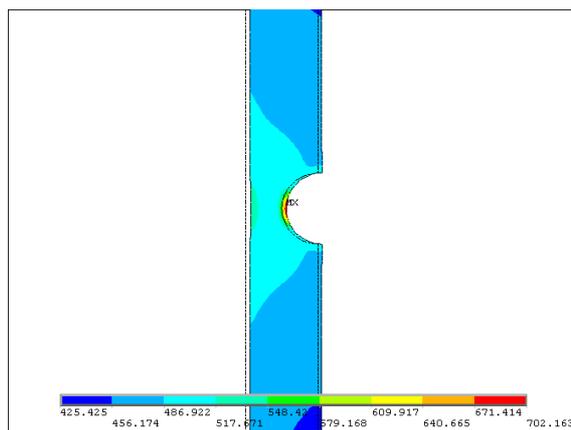


Figura 6.29(d) Tensão de Von Mises em MPa

Observe-se que quando razão das tensões é menor do que 1, o  $k_\theta$  é constante. Este fator começa a aumentar quando a razão das tensões é maior do que 1, ou seja, quando a raiz do defeito entrar em escoamento.

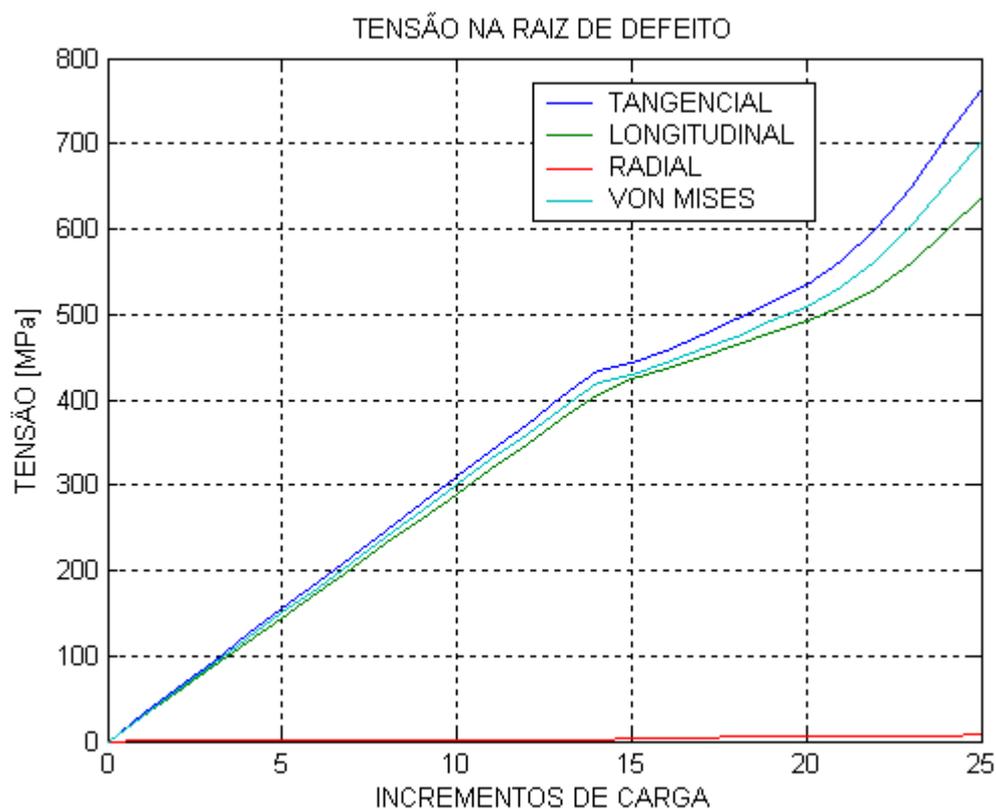


Figura 6.30 Tensões na raiz do defeito em relação aos incrementos de carga.

A mesma metodologia utilizada para extrair a curva de fator de concentração de tensões para duto submetido à tração foi utilizada para extrair a curva para a tensão tangencial. A figura 6.31 mostra esta curva.

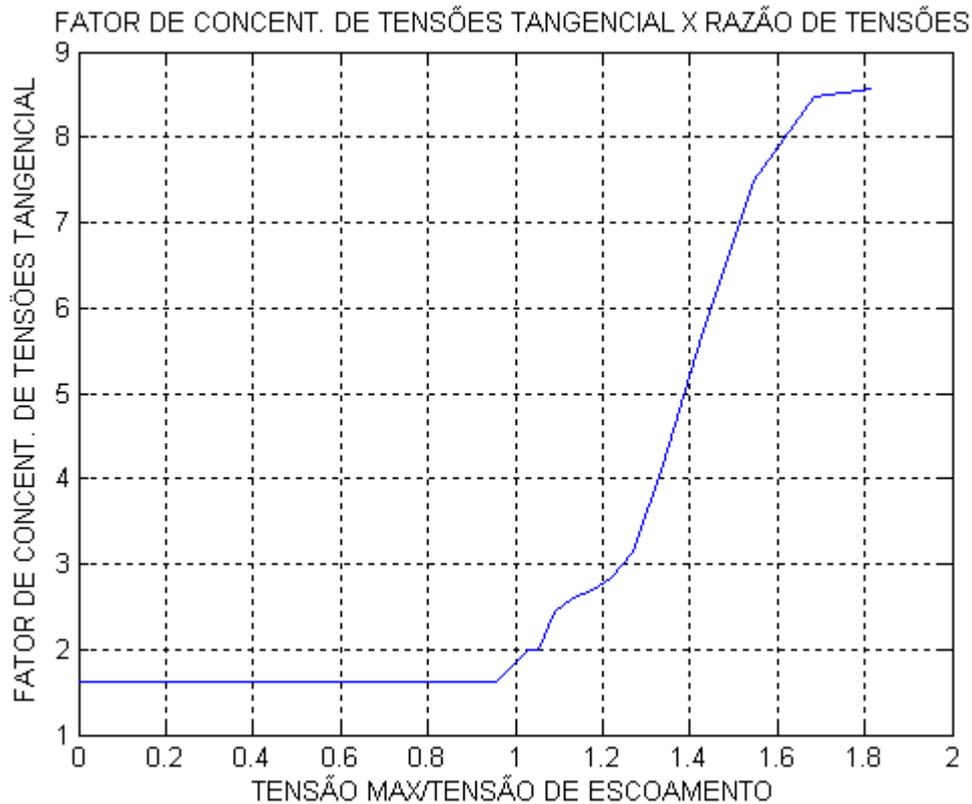


Figura 6.31 Fator de concentração de tensão tangente em relação razão de tensões.

## 6.5 APLICAÇÃO DO FCT NA EQUAÇÃO DE TRABALHO VIRTUAL – MÉTODO DE COMPENSAÇÃO DE TENSÕES

Com o intuito de aplicar o FCT em modelos de vigas, a proposta deste trabalho é inserir o FCT na equação de trabalho virtual e solucionar a equação não linear através do Método de Newton-Raphson. Para atender a este motivo, é necessária alguma manipulação algébrica. Esta seção apresenta a metodologia desenvolvida neste trabalho e também apresenta brevemente o resultado desta aplicação no programa APC3D, considerando que o FCT longitudinal e tangencial é variável no regime plástico.

Considere-se a equação do princípio dos trabalhos virtuais apresentada na 4.4 e re-escrita aqui para maior facilidade:

$$\int_{0_V} {}^{t+\Delta t} S_{x_1} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{x_1} d^0 V + \int_{0_V} {}^{t+\Delta t} S_{\theta} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{\theta} d^0 V + \int_{0_L} {}^{t+\Delta t} F_{AS} \delta {}^{t+\Delta t} u_0 d^0 x_1 + \int_{0_L} \left( {}^{t+\Delta t} F_{BS} + {}^{t+\Delta t} F_{US} \right) \delta {}^{t+\Delta t} v_0 d^0 x_1 + \int_{0_L} \left( {}^{t+\Delta t} F_{LLS} + {}^{t+\Delta t} F_{RLS} \right) \delta {}^{t+\Delta t} w_0 d^0 x_1 = \delta {}^{t+\Delta t} W_{ext} \quad (4.4)$$

Para inserir o efeito do FCT na equação do princípio dos trabalhos virtuais, considere-se inicialmente a multiplicação deste fator no incremento de tensão, apresentada na equação (6.4) e (6.5). Observe-se que quando não houver qualquer defeito na estrutura, então o FCT será igual a 1. Caso isso ocorra, então as equações (6.4) e (6.5) resultarão na equação de incremento de tensão normal apresentada anteriormente.

$${}^{t+\Delta t} S_{x_1} = {}^t S_{x_1} + k_{\sigma} S_{x_1} \rightarrow {}^{t+\Delta t} S_{x_1} = {}^t S_{x_1} + {}_o S_{x_1} + (k_{\sigma} - 1) {}_o S_{x_1} \quad (6.4)$$

$${}^{t+\Delta t} S_{\theta} = {}^t S_{\theta} + k_{\theta} S_{\theta} \rightarrow {}^{t+\Delta t} S_{\theta} = {}^t S_{\theta} + {}_o S_{\theta} + (k_{\theta} - 1) {}_o S_{\theta} \quad (6.5)$$

A partir dos estudos anteriores, pode ser concluído que o FCT é uma função da posição ao longo do elemento, da razão de tensões e da razão dos incrementos de tensões, tal Como expressa na equação (6.6). Logo, sempre é possível obter uma função representativa do FCT através de alguma interpolação. Esta metodologia é utilizada considerando que o FCT de cada ponto não interfere no cálculo do FCT de outro ponto. Esta consideração é obviamente uma simplificação.

$$k = f(X(x, r, \theta), \Delta\sigma / \Delta\sigma_{nom}, \sigma_{m\acute{a}x} / \sigma_{esc}) \quad (6.6)$$

No caso de dutos de paredes finas, pode-se desprezar a variação em  $r$ , resultando  $k = f(X(x, \theta), \Delta\sigma / \Delta\sigma_{nom}, \sigma_{m\acute{a}x} / \sigma_{esc})$ . Considerando-se uma situação particular de defeito uniforme, então  $k = f(X(x), \Delta\sigma / \Delta\sigma_{nom}, \sigma_{m\acute{a}x} / \sigma_{esc})$ .

Introduzindo as equações (6.4) e (6.5) na equação (4.32), resulta em:

$$\begin{aligned}
& \int_{0_V} \left( {}^t S_{x_1} + {}_o S_{x_1} + (k_\sigma - 1) {}_o S_{x_1} \right) \delta^{t+\Delta t} \epsilon_{x_1} d^0 V + \\
& \int_{0_V} \left( {}^t S_\theta + {}_o S_\theta + (k_\theta - 1) {}_o S_\theta \right) \delta^{t+\Delta t} \epsilon_\theta d^0 V + \int_{0_L} {}^{t+\Delta t} F_{AS} \delta^{t+\Delta t} u_0 d^0 x_1 + \\
& \int_{0_L} \left( {}^{t+\Delta t} F_{BS} + {}^{t+\Delta t} F_{US} \right) \delta^{t+\Delta t} v_0 d^0 x_1 + \int_{0_L} \left( {}^{t+\Delta t} F_{LLS} + {}^{t+\Delta t} F_{RLS} \right) \delta^{t+\Delta t} w_0 d^0 x_1 = \delta^{t+\Delta t} W_{ext}
\end{aligned} \tag{6.7}$$

Porém ao implementar esta metodologia de se multiplicar o incremento de tensão pelo FCT, a condição de equilíbrio global fica afetada e o processo não converge. Considere a condição apresentada pela figura 6.32. A condição de equilíbrio é atingida quando a somatória das forças e momentos é igual a zero. No caso do critério de convergência adotado neste trabalho, a energia interna do corpo é igual à energia externa exercida pela força externa.

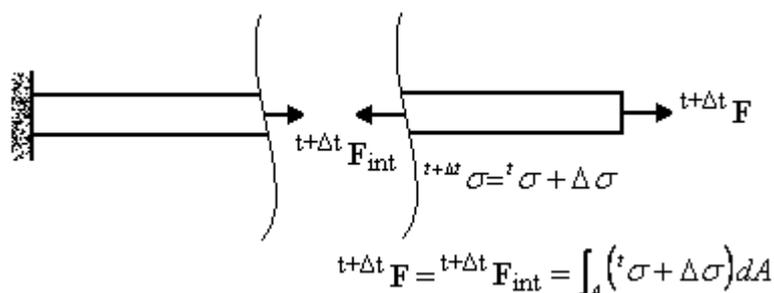


Figura 6.32 Condições de equilíbrio para viga sem corrosão.

Quando se introduz um fator artificialmente no processo multiplicando um incremento de tensão, a condição de equilíbrio não é mais satisfeita. A justificativa é que, o FCT introduz uma parcela positiva a mais no cálculo de tensão. Esta parcela é calculada pela multiplicação do incremento de tensão por um fator  $(k - 1)$ . É o que ilustra a figura 6.33. Para equilibrar a equação dos Trabalhos Virtuais e, ao mesmo tempo, atender ao critério de convergência, o intuito é eliminar esta parcela adicionada. Logo, a força interna é calculada pela equação 6.8. E a equação dos Trabalhos Virtuais (6.7) não pode ser calculada simplesmente introduzindo as equações (6.4) e (6.5), mas deve-se somar na parcela de trabalho externo a parcela da energia criada artificialmente pelo FCT, conforme mostrado pela equação (6.9). Tudo se passa como se tivesse sido acrescentado uma parcela no lado esquerdo da equação (4.32) e acrescentado a mesma parcela no lado direito da mesma equação.

Ou seja, matematicamente não há nada que tenha sido adicionada na equação (4.32). Assim sendo, critério de equilíbrio continua sendo atendido!

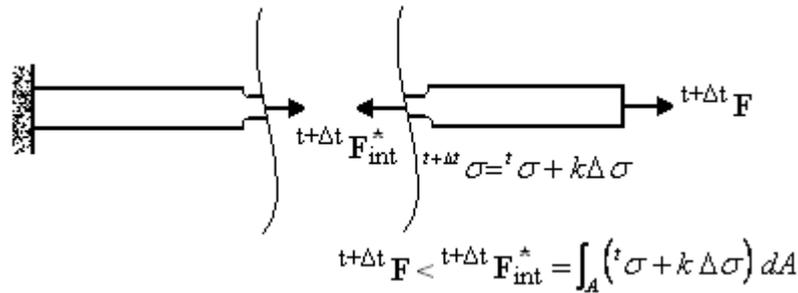


Figura 6.33 Condições de equilíbrio não atendida na viga com defeito.

$${}^{t+\Delta t} F_{int}^* = \int_A ({}^t \sigma + k \Delta \sigma) dA - \int_A (k-1) \Delta \sigma dA \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{0V} ({}^t S_{x_1} + {}_o S_{x_1} + (k_\sigma - 1) {}_o S_{x_1}) \delta^{t+\Delta t} \epsilon_{x_1} d^0 V + \\
 & \int_{0V} ({}^t S_\theta + {}_o S_\theta + (k_\theta - 1) {}_o S_\theta) \delta^{t+\Delta t} \epsilon_\theta d^0 V + \int_{0L} {}^{t+\Delta t} F_{AS} \delta^{t+\Delta t} u_0 d^0 x_1 + \\
 & \int_{0L} ({}^{t+\Delta t} F_{BS} + {}^{t+\Delta t} F_{US}) \delta^{t+\Delta t} v_0 d^0 x_1 + \int_{0L} ({}^{t+\Delta t} F_{LLS} + {}^{t+\Delta t} F_{RLS}) \delta^{t+\Delta t} w_0 d^0 x_1 = \delta^{t+\Delta t} W_{ext}^*
 \end{aligned} \quad (6.9)$$

## 6.6 ANÁLISE DA APLICAÇÃO DO MÉTODO DE COMPENSAÇÃO DE TENSÕES NO PROGRAMA APC3D

Introduzindo o FCT, ilustrado pela figura 6.25, no programa APC3D e analisando o mesmo caso de duto à tração (seção 6.3), a tensão na raiz do defeito (p3 da figura 6.11) é calculada e comparada com a mesma curva de tensões determinada pelo ANSYS. Esta comparação resulta em figura 6.34. Observe que no regime linear, o método de compensação de tensões consegue resolver o problema de tensão excedente introduzida pelo fator de concentração de tensão. Por isso, a tensão calculada por APC3D é semelhante, ou praticamente coincidente a tensão calculada por ANSYS. Mas a partir do ponto de escoamento, o cenário já não é o mesmo. A primeira suspeita é a falta de conhecimento de como o fator de concentração de

tensões está participando no processo de expansão de superfície de Von Mises, que caracteriza o comportamento de encruamento. Este trabalho não examinou as equações que descrevem a expansão da superfície de Von Mises.

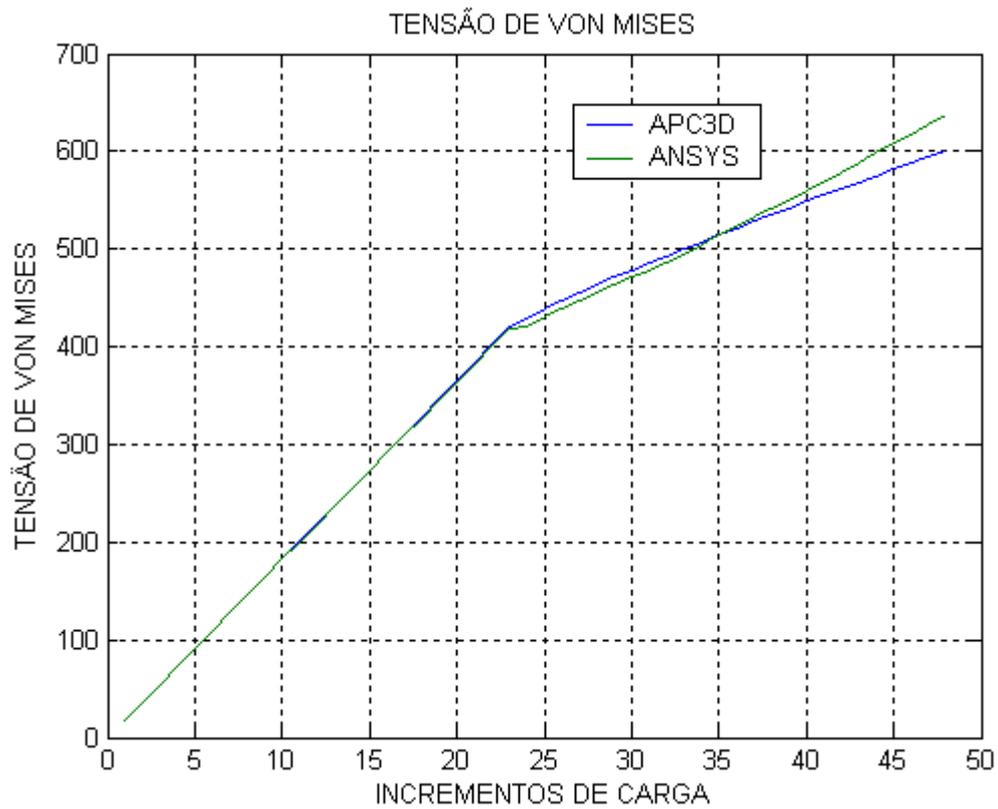


Figura 6.34. Comparação de curvas de tensões calculada na raiz do defeito entre APC3D e ANSYS.

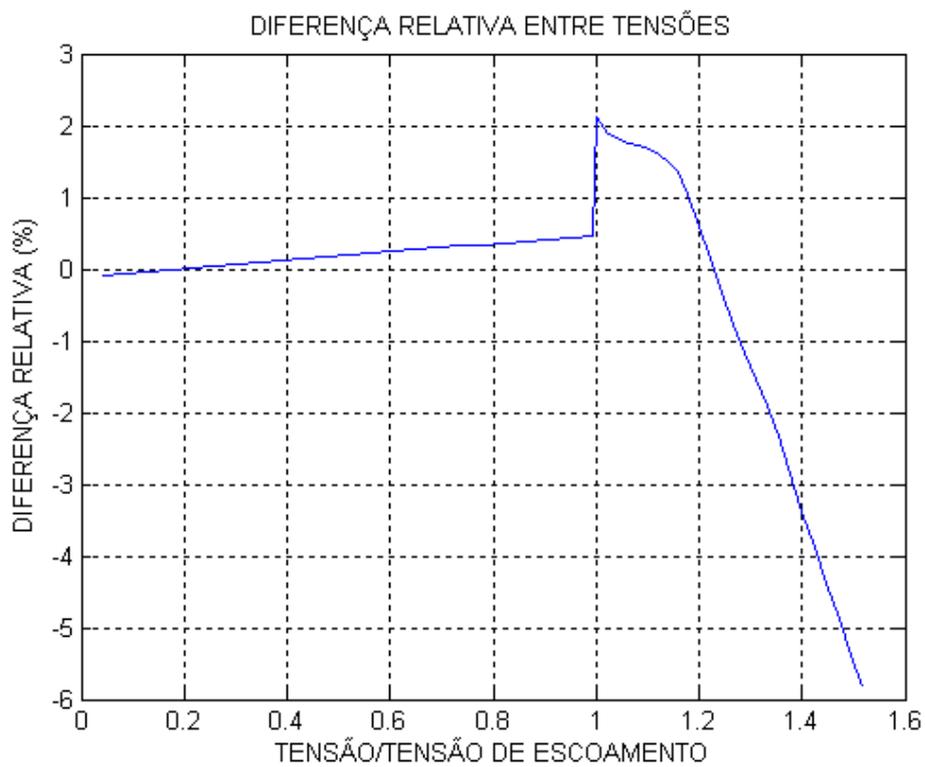


Figura 6.35 Diferença relativa de tensões calculadas por APC3D e por ANSYS.

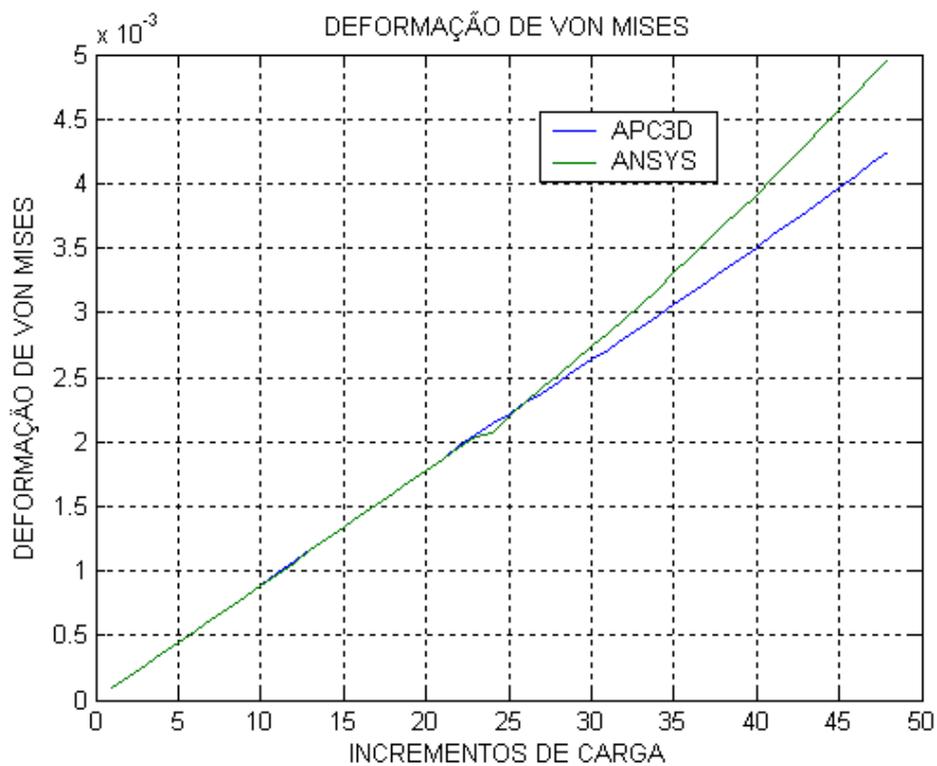


Figura 6.36 Comparação de curvas de deformações de APC3D com ANSYS.

Analogamente, a deformação calculada pelo APC3D considerando fator de concentração de deformações é comparada com ANSYS. Como mostra a figura 6.36. Neste caso, a diferença relativa é maior do que a das tensões. Os erros numéricos podem ter sido gerados pela função de interpolação utilizada para gerar função de fator de concentração de deformação. A diferença relativa para deformações é representada na figura 6.37.

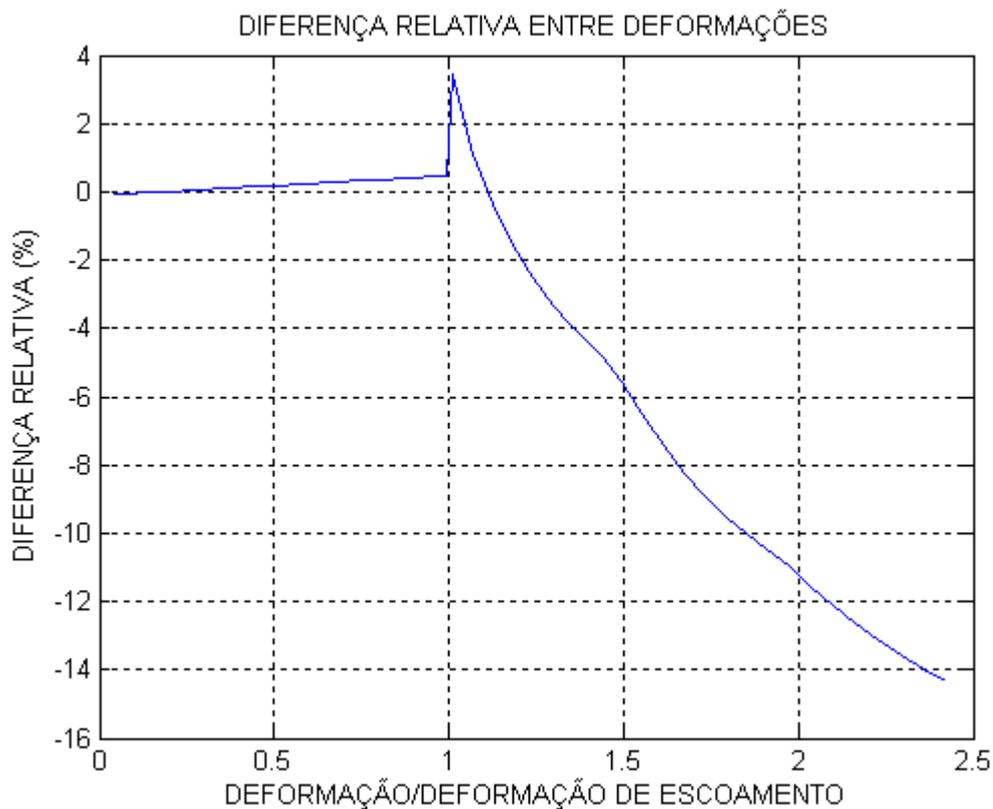


Figura 6.37 Diferença relativa de deformações calculadas pelo programa APC3D e pelo ANSYS.

Além das tensões e deformações, outro parâmetro importante como o deslocamento também deve ser analisado. Mas diferente da tensão e da deformação, o deslocamento não foi multiplicado pelo fator de concentração. Na análise feita pelo APC3D, considere-se um ponto localizado na raiz do defeito. O deslocamento deste ponto é comparado com o ponto que se localiza na mesma posição no modelo de ANSYS. Resultado desta comparação é representado na figura 6.38. E a diferença relativa desta comparação é representada na figura 6.39.

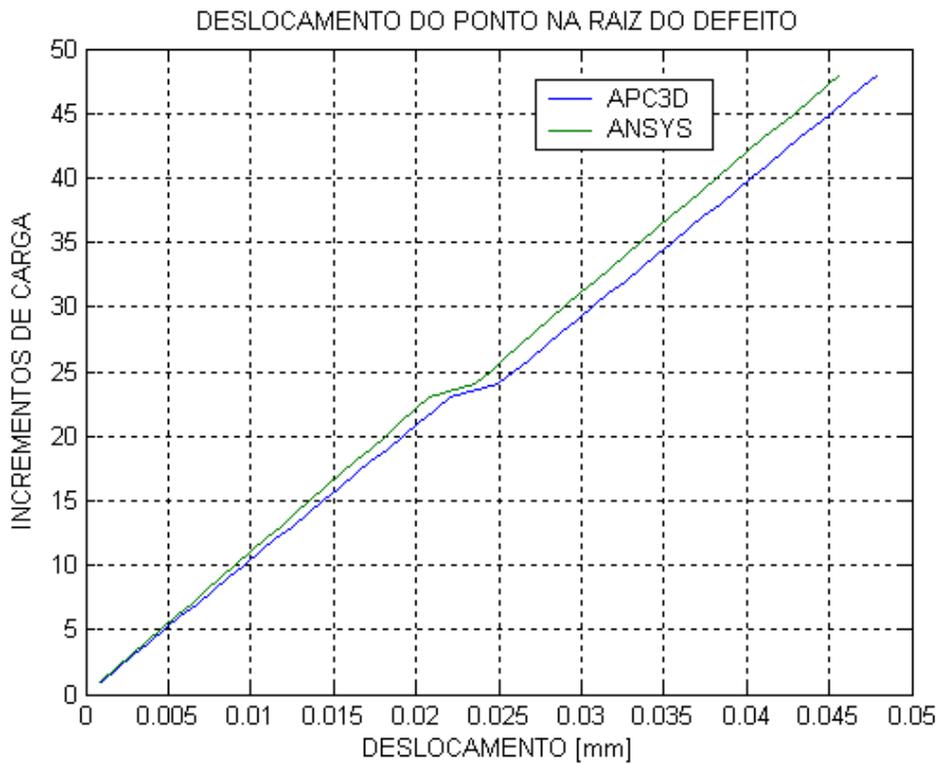


Figura 6.38 Comparação de curvas de deslocamento de APC3D com ANSYS.

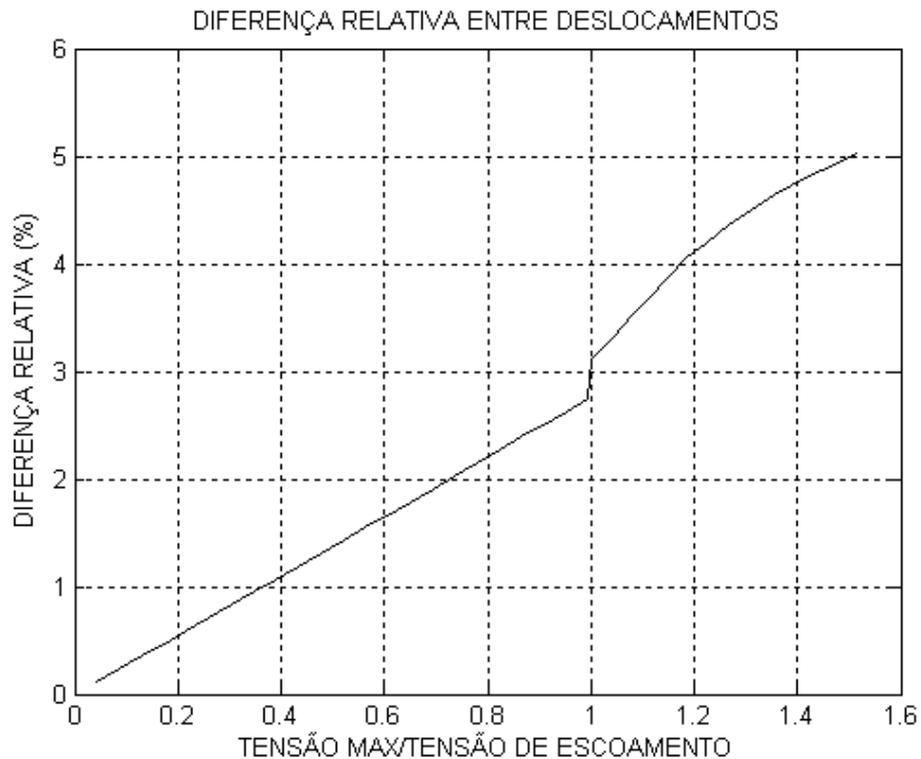


Figura 6.39 Diferença relativa de deslocamentos calculados por APC3D e por ANSYS.

A mesma metodologia de análise foi aplicada para o duto submetido à pressão interna. Foram comparados dois diferentes métodos de cálculo no APC3D,

com FCT tangencial e sem FCT tangencial. Observe-se que o resultado sem FCT tangencial está longe do resultado encontrado pelo ANSYS. Por outro lado, o método de cálculo proposta que utilizou a curva de FCT tangencial se aproxima da modelagem de ANSYS. Vale a pena ressaltar que o FCT é calculado em cada incremento, e a curva deste fator é obtida baseada na razão dos incrementos de tensões. Esta metodologia é particularmente interessante quando o comportamento da curva tensão-incremento é altamente não linear, como no caso duto submetido a pressão interna. O resultado de comparação de tensão calculada por APC3D e por ANSYS é representado na figura 6.40.

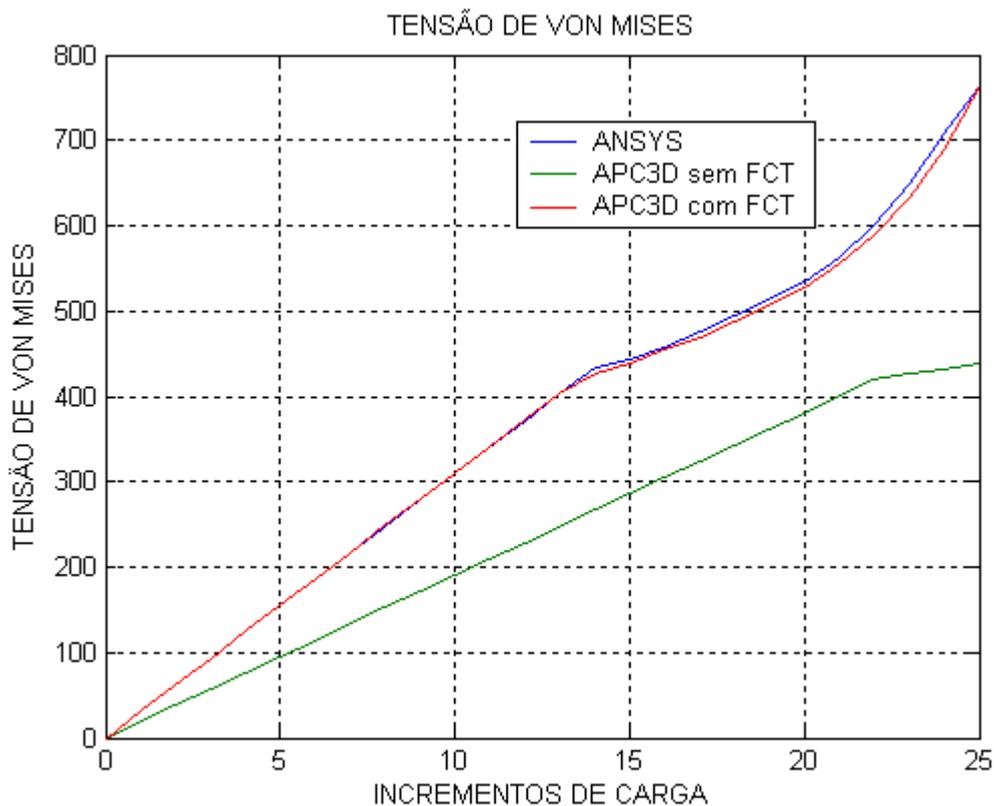


Figura 6.40 Diferença relativa de deslocamentos calculados por APC3D e por ANSYS.

A partir das análises feitas neste capítulo em aplicação da metodologia desenvolvida neste trabalho, observa-se que é possível de inserir análise local na análise global através de aplicação de FCT no programa APC3D. Tal aplicação do FCT pode reduzir o modelo constituído pelos elementos tridimensionais em modelo de elementos unidimensionais. Por conseqüência reduz o tempo da solução computacional.

Entretanto, a metodologia apresenta diversas limitações. Pelo fato de que o FCT foi introduzido artificialmente na equação dos Trabalhos Virtuais, são incorporados implicitamente erros numéricos. Tal erro é acumulado ao longo da iteração do cálculo na expansão da superfície de Von Mises, devido ao escoamento do material. Além disso, outra fonte do erro numérico é o desequilíbrio da equação dos Trabalhos virtuais devido a introdução artificial do FCT.

A solução da equação dos Trabalhos Virtuais é feita pela determinação *a priori* do deslocamento nodal. Uma vez determinado tal deslocamento, em seguida é calculada a deformação e depois o incremento da tensão. A metodologia apresentada neste trabalho pode determinar com razoável precisão a tensão potencializada no modelo do elemento de viga. Porém, a deformação e deslocamento não são calculados com mesmo nível de precisão. Tal imprecisão é causada pela dificuldade em determinar deformações e deslocamentos nodais a partir das tensões potencializadas. Esta limitação é inerente à formulação dos elementos finitos adotada neste trabalho.

## 7. APLICAÇÕES

Este capítulo apresenta as aplicações do programa APC3D na análise de estrutura sem corrosão e estrutura com corrosão. Primeiramente nos exemplos 1 a 3 são apresentadas análises não lineares de uma estrutura íntegra. Em seguida são apresentadas exemplos de análise não linear de estrutura com corrosão. Todos os exemplos são hipotéticos e foram elaborados para testar a aplicabilidade do programa APC3D. Não foi admitida nenhuma tensão última em todos os exemplos.

### 7.1 EXEMPLO 1 – ANÁLISE NÃO LINEAR DE UMA VIGA EM BALANÇO

Neste exemplo, é analisada uma viga em balanço de seção circular vazada com as propriedades mecânica e geométrica listadas na tabela 7.1. É admitido, nesta análise, comportamento não linear física da barra seguindo a curva de tensão - deformação elasto-plástico com encruamento.

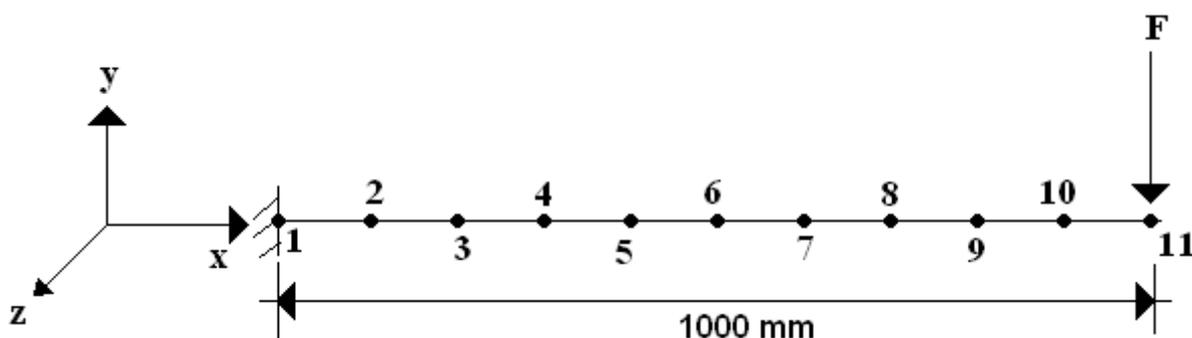


Figura 7.1 Representação esquemática da estrutura e suas condições de contorno.

Tabela 7.1 Propriedades mecânicas e geométricas da barra

Diâmetro externo (mm)	200
Diâmetro interno (mm)	190
Módulo de Young (GPa)	205
Módulo Tangente (GPa)	75
Coefficiente de Poisson	0,25
Tensão de escoamento (MPa)	420

A representação esquemática das condições de contorno e dimensões desta estrutura é mostrada pela figura 7.1. A força aplicada conforme a ilustração da figura é igual à 100 kN. A carga aplicada foi dividida em 1000 incrementos. A mesma estrutura foi modelada usando elementos lineares Beam24 de ANSYS. Foram

elaboradas as curvas de deslocamento nos nós 3, 5, 7, 9 e 11 da figura 7.1 para os dois programas e um comparativo é feito entre os resultados. Na figura 7.2 são mostradas as curvas de deslocamentos de cada nó. O modelo numérico é composto por 5 elementos na aplicação de APC3D e 20 elementos na aplicação de ANSYS, com BEAM24.

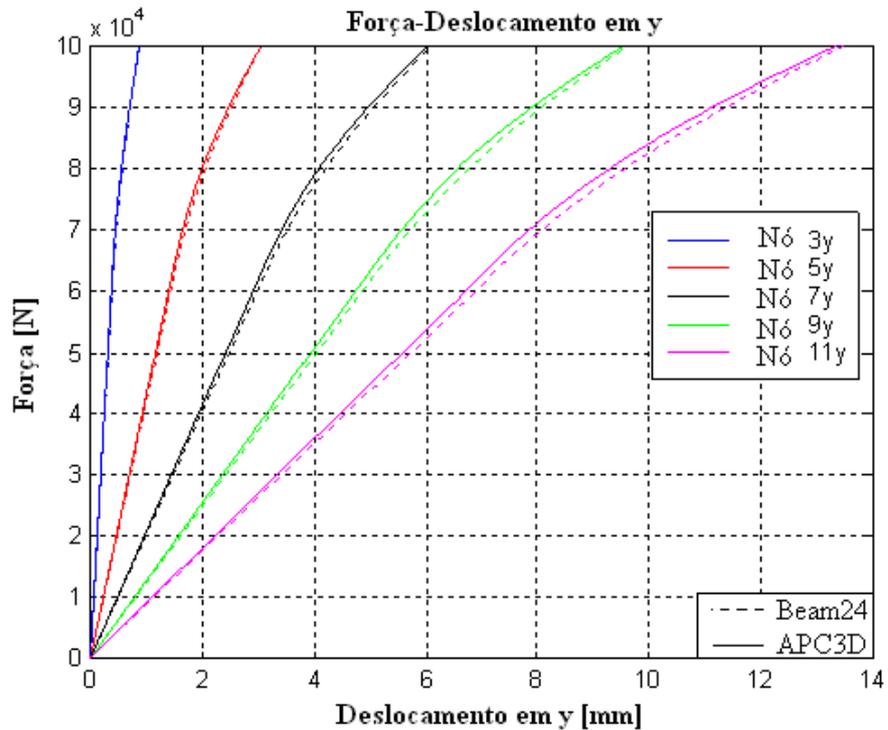


Figura 7.2. Comparativo de deslocamento calculado por ANSYS e APC3D.

Os resultados numéricos são comparados no último passo de carga. A tabela 7.2 mostra o comparativo dos deslocamentos nodais.

Tabela 7.2 Deslocamento em y no passo 1000

Nó	BEAM24	APC3D
3	-0,867785	-0,8745
5	-3,04415	-3,0409
7	-6,06403	-6,0269
9	-9,63362	-9,5495
11	-13,478	-13,3404

## 7.2 EXEMPLO 2 – ANÁLISE NÃO LINEAR DE UM SISTEMA DE TUBULAÇÃO

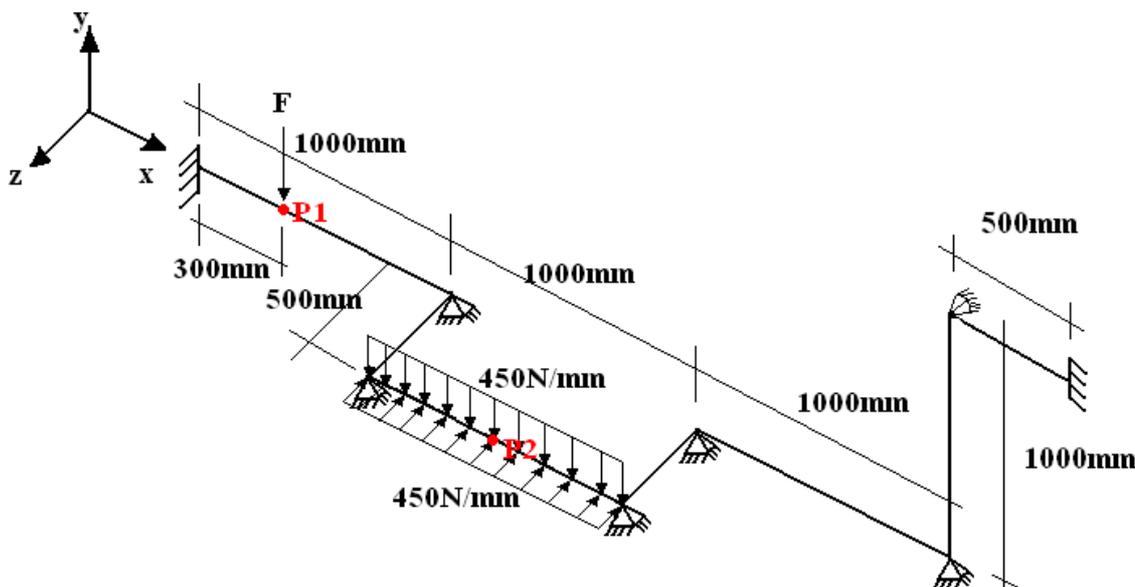


Figura 7.3 Ilustração de um sistema hipotético de tubulação com as condições de contorno.

No exemplo 2, um sistema de tubulação hipotético é analisado conforme as condições de contorno e as cargas aplicadas mostradas na figura 7.3. As propriedades mecânicas e geométricas do elemento constituinte do sistema são listadas pela tabela 7.1. O modelo numérico é composto por 55 elementos tanto na aplicação de ANSYS, utilizando BEAM24, quanto na aplicação de APC3D. Uma força de 1000N é aplicada no ponto um. Duas situações foram estudadas. A primeira sem pressão interna e a segunda com pressão interna de 20MPa. As cargas aplicadas foram divididas em 100 incrementos. Nenhum defeito de corrosão foi incluído nesta análise.

A figura 7.4 mostra o deslocamento total do P1 para as duas situações. A figura 7.5 mostra o deslocamento total do P2 e a figura 7.6 mostra a rotação total do P2. A comparação dos deslocamentos nodais no P1 e P2 no último passo e um passo escolhido aleatoriamente é mostrada pelas tabelas 7.3-7.6. Observe-se que a diferença é pequena entre ANSYS e APC3D quando nenhuma pressão interna é aplicada.

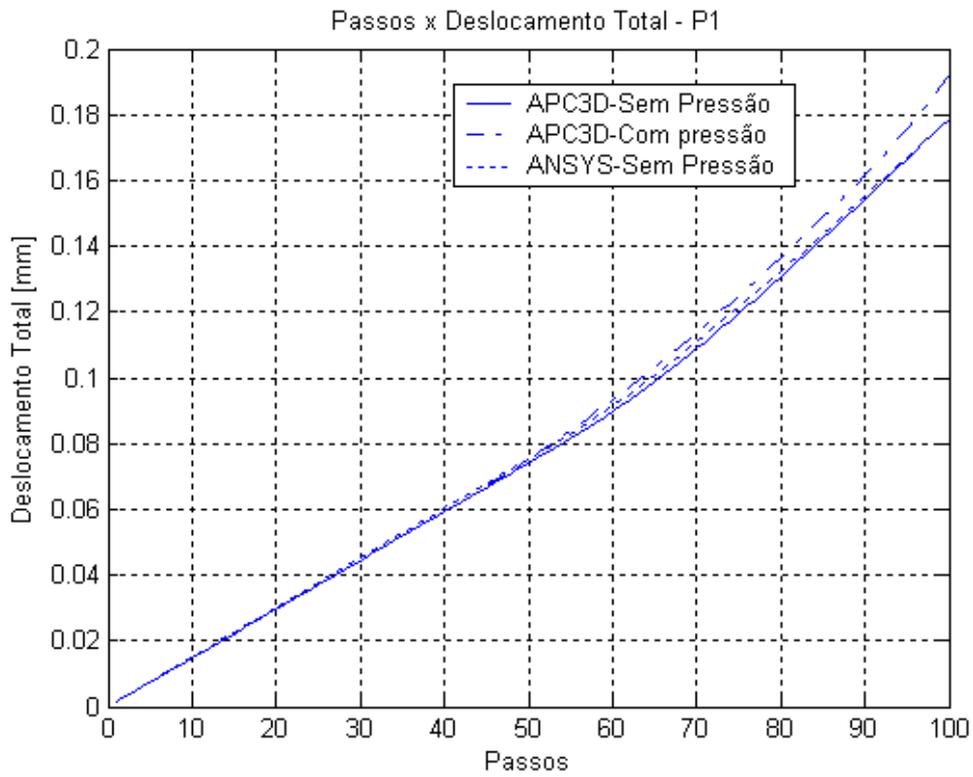


Figura 7.4 Deslocamento total do P1.

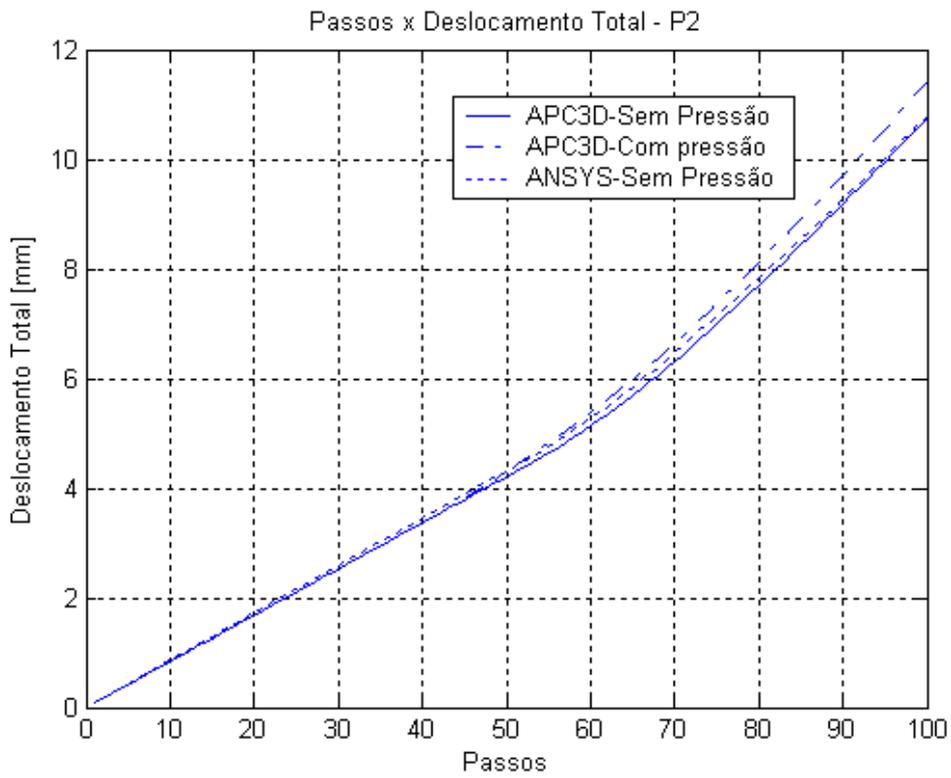


Figura 7.5 Deslocamento total do P2.

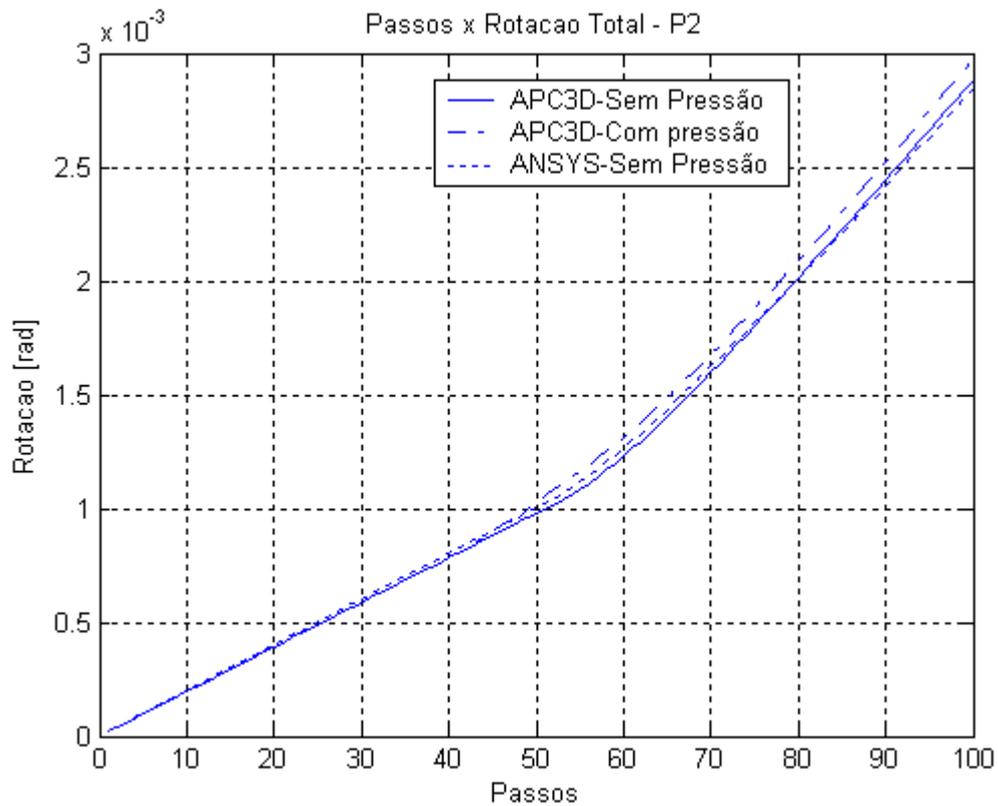


Figura 7.6 Rotação total do P2.

Tabela 7.3 Deslocamentos nodais nos pontos P1 e P2 sem considerar pressão interna

	Deslocamento total no passo 100		Deslocamento total no passo 97	
	Beam24 (mm)	APC3D (mm)	Beam24 (mm)	APC3D (mm)
P1	0,1788	0,1788	0,1716	0,1709
P2	10,8023	10,7425	10,335	10,237

Tabela 7.4 Tensão de Von Mises no ponto P2 sem considerar pressão interna.

	Tensão no P2 no passo 100		Tensão no P2 no passo 97	
	Beam24	APC3D	Beam24	APC3D
Tensão (MPa)	701,419	683,108	681,61	672,383

Tabela 7.5 Deslocamento total dos pontos P1 e P2 considerando pressão interna

	Deslocamento total no passo 100	Deslocamento total no passo 90
	APC3D (mm)	APC3D (mm)
P1	0.1921	0,1615
P2	11.409	9.7111

Tabela 7.6 Tensão de Von Mises no P2 considerando pressão interna

	Tensão no P2 no passo 100	Tensão no P2 no passo 90
	APC3D	APC3D
Tensão (MPa)	742.0574	672.044

### 7.3 EXEMPLO 3 – ANÁLISE NÃO LINEAR DE DUTO ENTERRADO

Analisa-se agora o caso de um duto enterrado e submetido ao um momento nas extremidades. A geometria, propriedade mecânica e condições de contorno são mostradas na tabela 7.7, e representação esquemática do duto é mostrada na figura 7.7. Neste exemplo, são utilizados 50 passos de incrementos. E o modelo numérico é composto por 8 elementos finitos no APC3D. O solo é modelado por meio de elementos da mola com rigidez igual a  $\frac{625EI}{L^4}$ , tanto para  $K_{us}$  quanto para  $K_{bs}$ . Neste exemplo, três situações são contempladas. A primeira é o duto sem molas, desconsiderando o efeito confinamento do solo. A segunda é o duto inteiramente enterrado abaixo do solo. E a terceira é o duto semi-enterrado, deixando metade exposta. Nesta condição, desconsidera-se o efeito das molas  $K_{us}$ . Os resultados obtidos pelo APC3D das três situações estão mostrados na figura 7.8. As mesmas situações foram analisadas pelo programa INTERA3D (Souza, 2005). Um comparativo foi feito entre resultados de APC3D e INTERA3D.

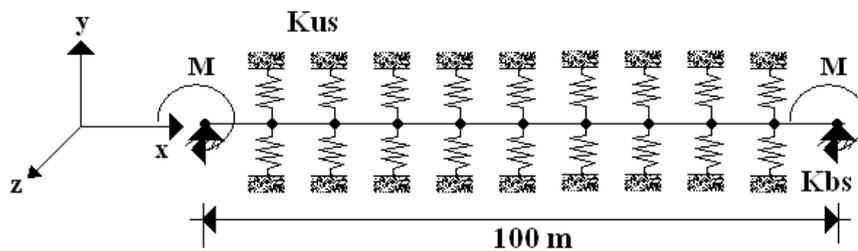


Figura 7.7. Representação esquemática de duto enterrado.

Tabela 7.7 Propriedades mecânicas e geométricas do duto enterrado

Diâmetro externo (mm)	325
Diâmetro interno (mm)	312.5
Módulo de Young (GPa)	205
Módulo Tangente (GPa)	75
Coefficiente de Poisson	0,25
Tensão de escoamento (MPa)	420
Momento	81 kN.m

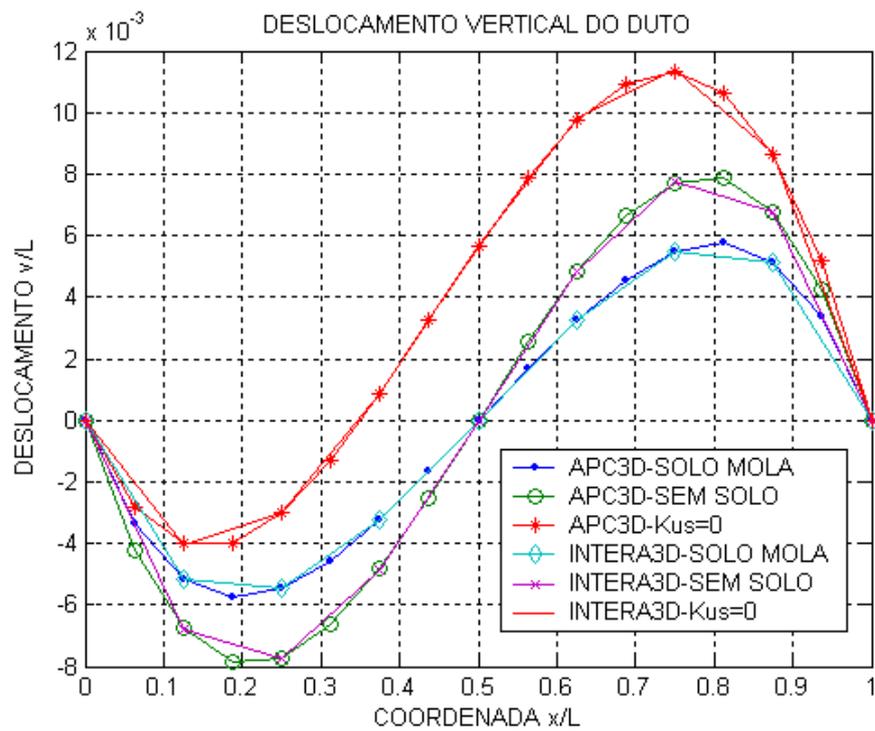


Figura 7.8 Deslocamento vertical de cada nó de duto.

#### 7.4 EXEMPLO 4 – ANÁLISE NÃO LINEAR DE DUTO COM DEFEITO RETANGULAR

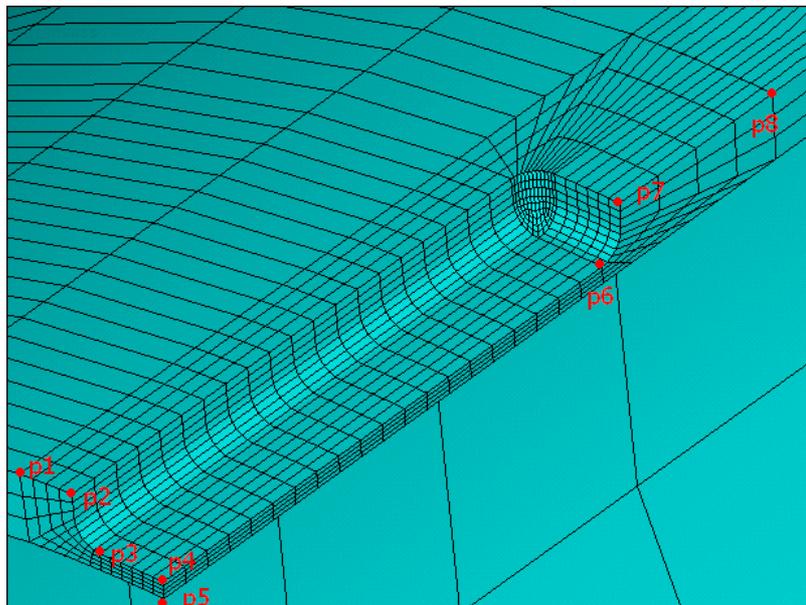


Figura 6.18 Discretização do duto com defeito retangular com adoçamento nas arestas no fundo do defeito e a localização dos pontos principais

No exemplo 4, o caso de estudo apresentado pela seção 6.2 é analisado, com as mesmas propriedades geométricas da tabela 6.2, como mostra a figura 6.18. Mas este exemplo se restringe a aplicar metodologia apresentada pelo presente trabalho a um ponto discreto no caso de um defeito retangular. Neste modelo, o ponto 4 é o ponto alvo da análise. A curva de tensão de Von Mises em relação aos passos de incremento no ponto 4 foi determinada pelo ANSYS. A partir desta curva, a função de interpolação da curva de concentração de tensão foi calculada e foi inserida no APC3D. O modelo numérico é composto por 23 elementos na aplicação de APC3D. A corrosão é modelada com um único elemento, de comprimento equivalente a comprimento da corrosão. Foi utilizado 63 incrementos de carga. Os resultados em termo de tensão de Von Mises do ponto 4 são apresentados na figura 7.9 em relação à pressão interna. Observe-se que o fator de concentração de tensão (FCT) é parâmetro importante que afeta o cálculo da tensão quando duto apresenta corrosão. Existe uma diferença significativa quando se trata da aplicação ou não do FCT.

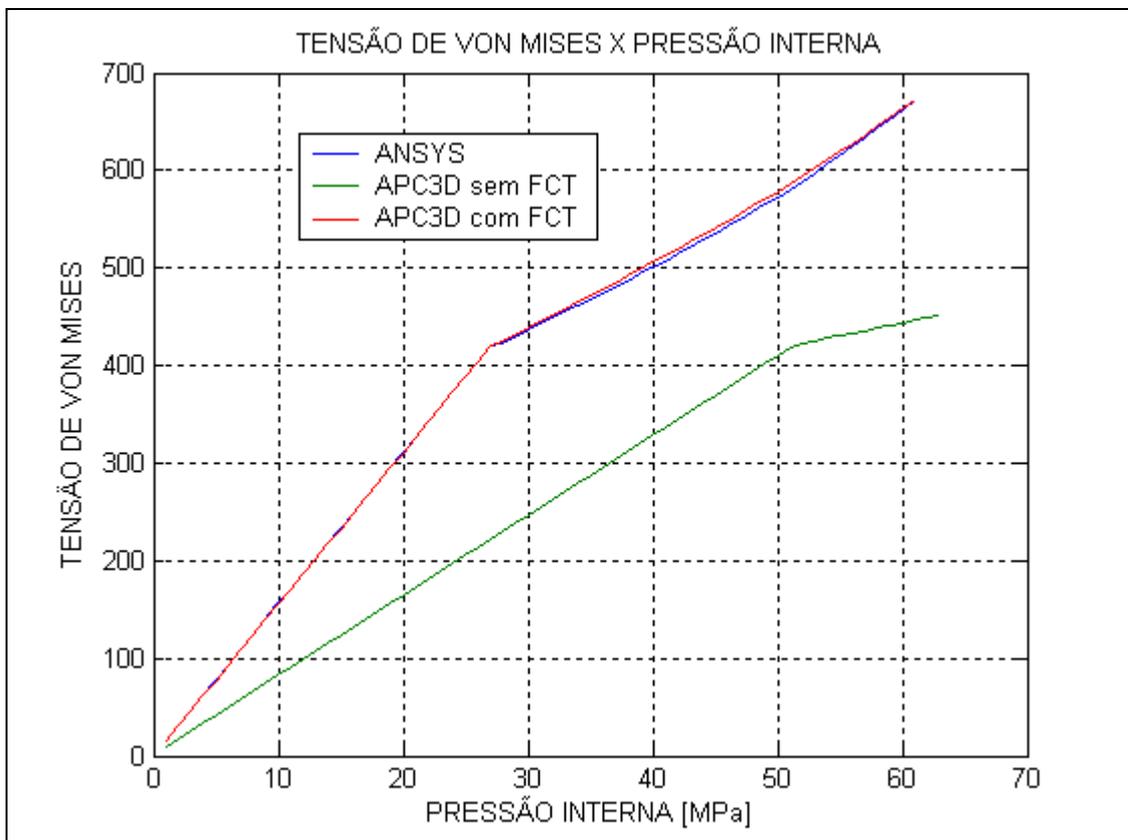


Figura 7.9 Tensão de Von Mises em relação à pressão interna.

## **7.5 EXEMPLO 5 – ANÁLISE NÃO LINEAR DE DUTO COM DEFEITO SEMI CIRCULAR SUBMETIDO À FORÇA NA EXTREMIDADE**

O exemplo 5 apresenta a aplicação da metodologia desenvolvida do presente trabalho para análise de duto submetido a força aplicada na extremidade, simulando situação da viga em balanço. Até agora, esta metodologia somente foi aplicada para tensão de tração e pressão interna. Mas não foi aplicada para tensão causada por momentos. Porém, este exemplo se limita a aplicar força numa extremidade para gerar momento ao longo do duto, e sem considerar a existência do esforço de tração. Assim sendo, a flexão é considerada com flexão pura. E a distribuição de tensão é anti-simétrica ao redor da linha neutra.

Considere-se um duto com o mesmo diâmetro externo e interno apresentados na seção 6.3, e com a mesma propriedade mecânica do material. O comprimento do duto é 500 mm e um defeito semi circular uniforme é posicionado no meio do duto. Uma força  $F$  de 38 kN é aplicada numa extremidade e a outra totalmente engastada. Formando uma viga em balanço, como mostra a figura 7.10. Apenas metade do modelo foi simulada a fim de reduzir esforço computacional. As condições de contorno foram aplicadas conforme a consideração de simetria. A figura 7.11 mostra a discretização do modelo sólido e a figura 7.12 mostra a distribuição de tensão. Foram considerados 100 passos de carga. O mesmo modelo numérico é composto por 11 elementos na aplicação de APC3D, sendo que a corrosão é modelada por um elemento.

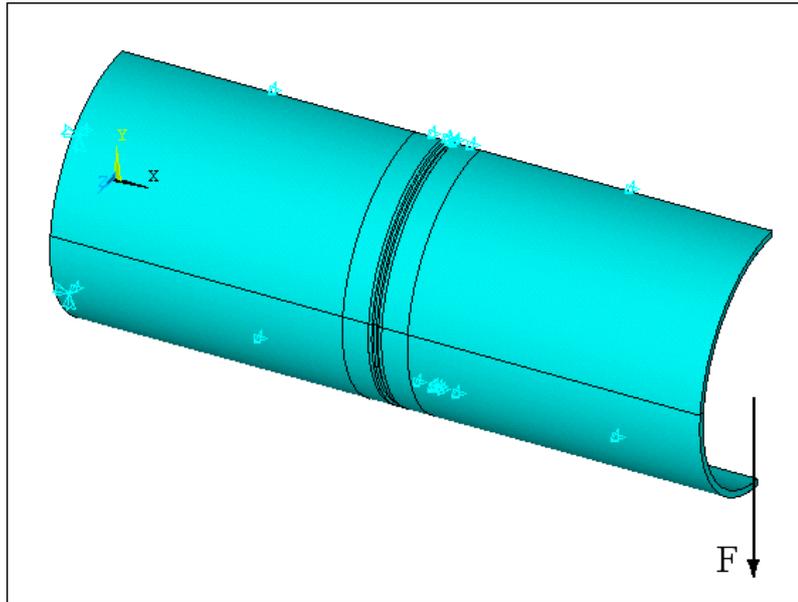


Figura 7.10 Condições de contorno e a força aplicada.

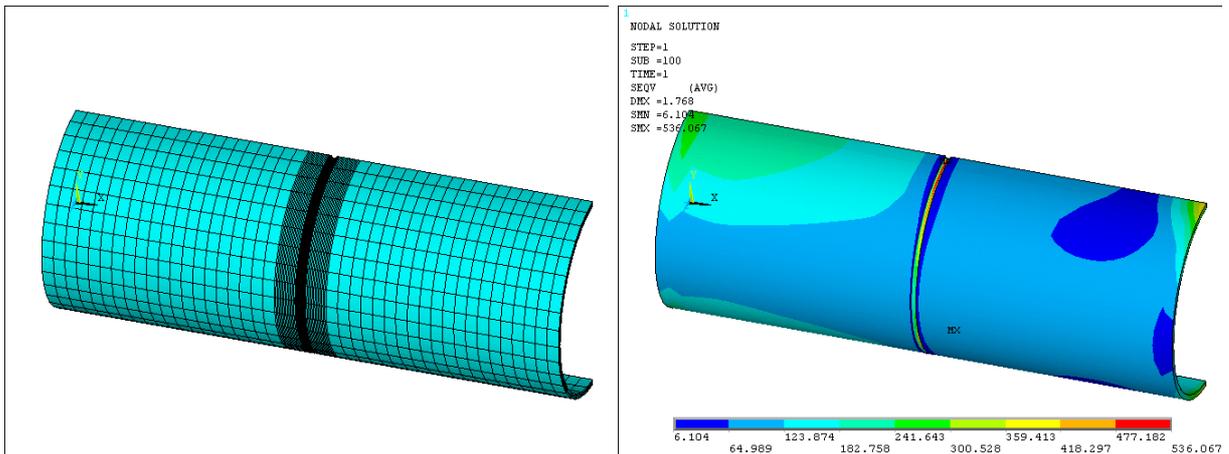


Figura 7.11. Discretização do modelo sólido submetido ao momento.

Figura 7.12. Distribuição de tensão.

A curva de tensão de Von Mises em relação a carga é extraída da raiz do defeito. A função da interpolação do fator de concentração de tensão é calculada, tal como mostra a figura 7.13. A função de concentração de tensões é inserida no APC3D. O mesmo modelo é analisado pelo APC3D considerando os efeitos de concentração de tensões e defeito semi circular. O resultado de análise em termos de tensões é apresentado na figura 7.14.

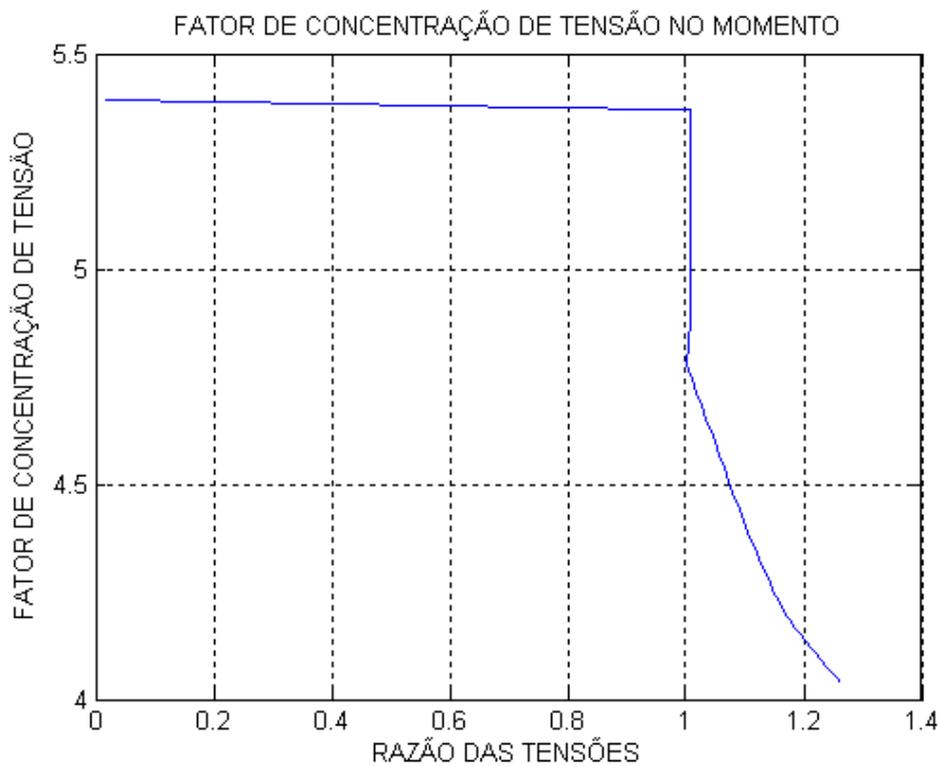


Figura 7.13 Fator de concentração de tensões em relação a razão das tensões.

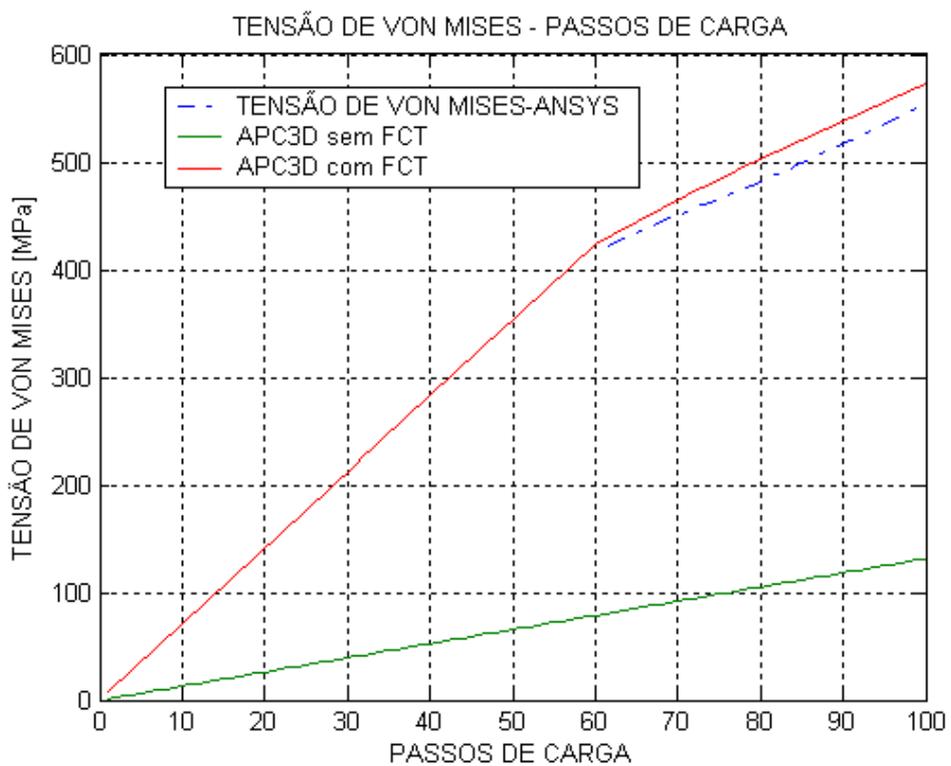


Figura 7.14 Tensão de Von Mises na raiz do defeito calculado pelo ANSYS e APC3D.

## 7.6 EXEMPLO 6 – ANÁLISE NÃO LINEAR DE UM SISTEMA DE TUBULAÇÃO CONTENDO CORROSÃO

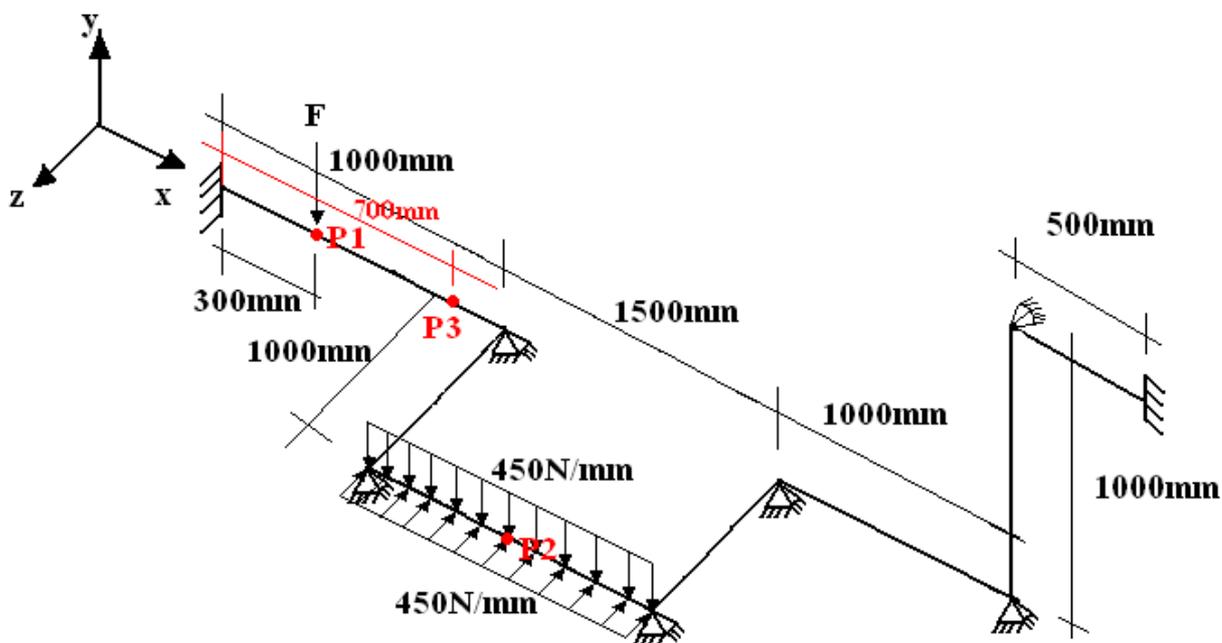


Figura 7.15. Sistema de tubulação com defeito tipo semi circular uniforme.

No exemplo 6 analisa-se o mesmo sistema de tubulação apresentado No exemplo 2. Supõe-se a existência de uma corrosão tipo semi circular (profundidade 0,5% da parede de duto) uniforme indicada pelos pontos P3 e P2, como mostra a figura 7.15. O modelo numérico é composto por 58 elementos na aplicação de APC3D, sendo que a cada corrosão é modelada com um elemento. O objetivo deste exemplo é mostrar a aplicabilidade do APC3D em analisar malha de tubulação submetida à corrosão localizada. Atualmente, os programas comerciais pelo Método dos Elementos Finitos são capazes de fazer análises de duto com corrosão considerando apenas um trecho limitado de duto por meio de modelos 3D. Mas não são capazes de levar em consideração o efeito que corrosão considerando toda malha da tubulação. O programa desenvolvido neste trabalho, APC3D, também tem suas limitações e não é capaz de estimar precisamente o efeito de corrosão em toda malha de tubulação. Mas é capaz de gerar modelo discretizado pelos elementos finitos para malha de tubulação e incluir defeito de corrosão nos pontos indicados. Isso é feito através de inserção da função de concentração de tensão previamente determinada.

As figuras 7.16 e 7.17 mostram as tensões de Von Mises nos pontos de corrosão, P2 e P3. Observe que com a metodologia apresentada neste trabalho, o programa APC3D, construído a partir de elemento linear, é capaz de identificar claramente a diferença em nível de tensão numa estrutura sem corrosão e numa estrutura com corrosão localizada.

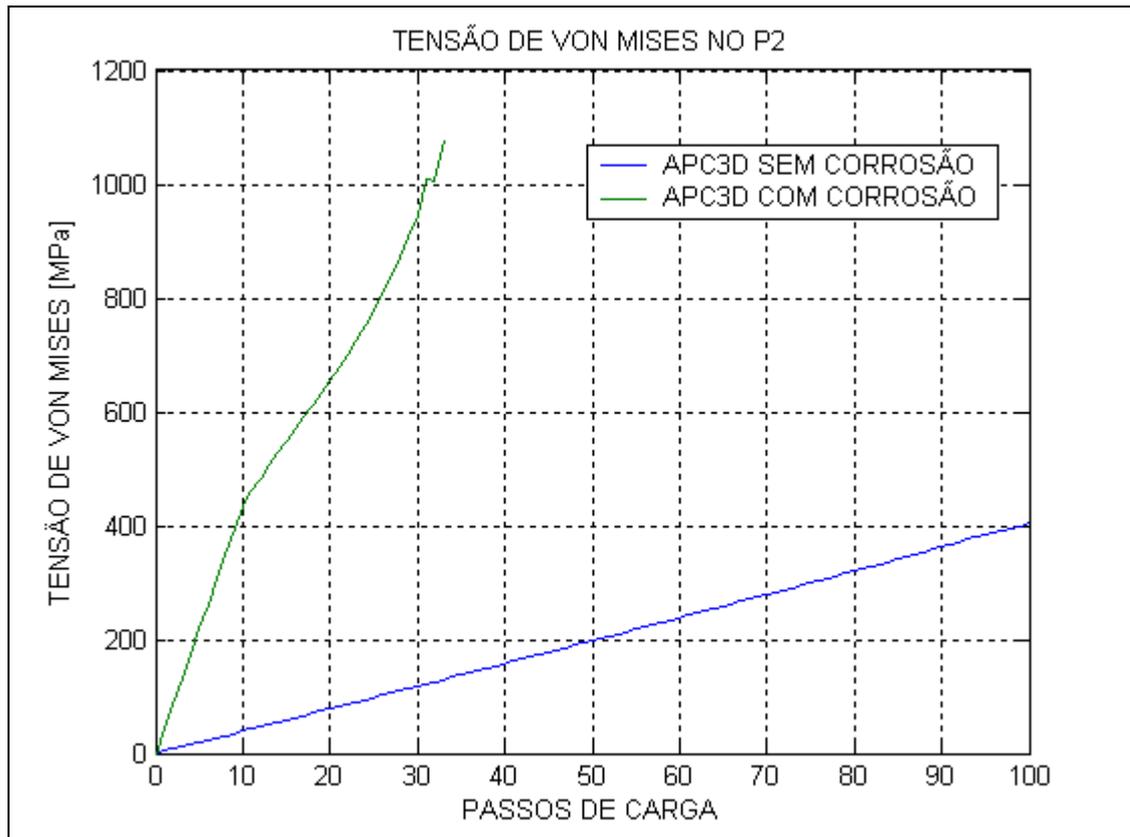


Figura 7.15 Tensões de Von Mises no P2 para tubulação com corrosão e sem corrosão.

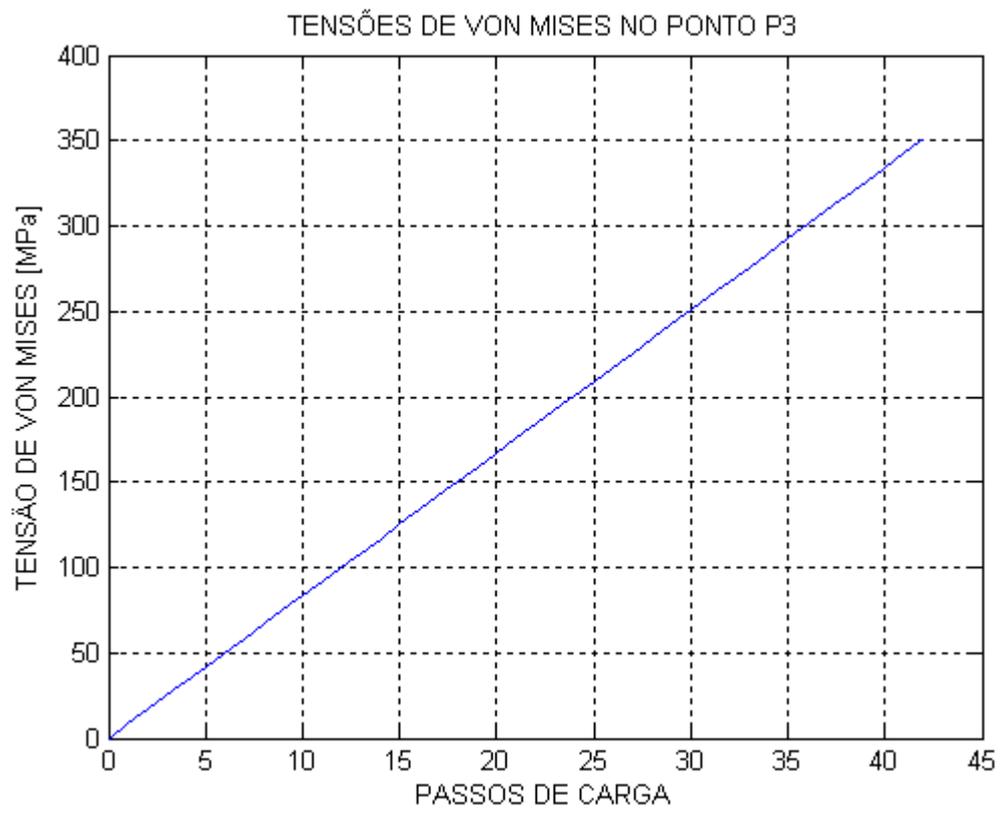


Figura 7.16 Tensões de Von Mises no P3.

## 8. CONCLUSÕES

Uma metodologia da análise estrutural de um sistema de dutos é apresentada neste trabalho através dos Métodos dos Elementos Finitos. Foi implementado um elemento quadrático de 3 nós utilizando formulação da viga Euler-Bernoulli que permite calcular através dos termos de deformação a tensão longitudinal. O elemento foi desenvolvido supondo seção circular vazada, o que permite considerar os efeitos de pressão interna. A tensão tangencial é calculada separadamente. Na formulação foi incluído também o efeito de encruamento do material. Para isto, exige-se a utilização de método iterativo e incremental de cálculo, para resolver o problema não linear. No caso, o Método de Newton-Raphson foi utilizado. Para obtenção de matriz de rigidez e do cálculo dos esforços equivalentes, foi considerada integração numérica considerando sete pontos de integração ao longo do elemento, enquanto a integração numérica na seção transversal da barra foi utilizada a integração polar.

Para os casos que não foram incluídos defeitos de corrosão, os resultados em termos de deslocamentos nodais foram comparados entre o software APC3D e ANSYS. Nesses casos, efeito de encruamento do material foi considerado. A diferença relativa entre ambos os programas é menor que 1%.

A fim de estudar efeito de fator de concentração de tensões (FCT), foram desenvolvidos estudos do duto submetido à tração e à pressão interna. O FCT é uma função dependente da geometria, da localização do ponto em análise, e principalmente é uma função da razão das tensões: tensão máxima atuante e tensão de escoamento. A última consideração foi necessária para facilitar o cálculo do FCT no programa APC3D. Para incluir a influência do defeito de corrosão no modelo, a função de interpolação do FCT foi calculada pelo ANSYS e foi introduzida no APC3D. A introdução artificial da função causou desequilíbrio na equação dos trabalhos virtuais, inconveniente contornada através das compensações de tensão. Este trabalho apresenta esta metodologia de compensação de tensão como uma ferramenta para introduzir FCT no elemento linear e não linear. O FCT era tão somente observado e calculado por elemento sólido, mas com esta nova metodologia desenvolvida por este trabalho, o FCT também pode ser incluído em elementos unidimensionais. Dessa forma, é atingido o objetivo da proposta deste

trabalho, qual seja introduzir efeito de corrosão na análise global de sistema de dutos considerando elementos de barras ou de tubos.

Os resultados desta aplicação foram apresentados em vários exemplos. Os resultados obtidos pelo APC3D foram comparados com os resultados de ANSYS. No regime linear, os resultados se mostram satisfatórios, com baixa diferença relativa. Mas ao começar o comportamento não linear, ou seja, encruamento do material, os resultados começam a se divergir entre APC3D e ANSYS. Tal divergência é o acúmulo do erro numérico no processo iterativo do cálculo durante a expansão da superfície de Von Mises e principalmente foi causada pela introdução artificial do FCT. Obviamente esta metodologia tem suas limitações. Essas limitações serão apresentadas como sugestões de trabalho futuro.

As sugestões para trabalho futuro são apresentadas a seguir:

- Aplicar a mesma metodologia para carregamento combinado;
- Estudar o efeito do FCT nas equações de não linearidade física, e especificar a participação deste fator na expansão da superfície de escoamento;
- Utilizar um elemento de duto, com os termos de deformação longitudinal, radial e tangencial para fazer análise de malha de tubulação;
- O efeito do FCT foi tratado somente no ponto de máxima tensão. Como sugestão, seria interessante criar uma função composta pelas funções do FCT nos pontos nodais ao redor do ponto de máxima tensão, e incluir tal função no APC3D.
- A integração numérica ao longo do elemento é feita nos pontos de Gauss, e em cada ponto de integração, é feita integração numérica na seção transversal. É possível tratar a corrosão como “elemento vazio” neste processo de integração numérica na seção transversal e ao longo do elemento. Isso com certeza introduzirá desequilíbrio na equação do trabalho virtual, mas este desequilíbrio pode ser compensado através de manipulação numérica.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ABBASNIA, R. & KASSIMALI, A. **Large deformation elastic-plastic analysis of space frames.** Journal of Constructional Steel Research, v. 35, p. 275-290, 1995.
2. ADIB, R., SCHMITT, C. & PLUVINAGE G. **Application of volumetric method to the assessment of damage induced by action of foreign object on gas pipes.** Strength of Materials, v. 38, No 4, 2006.
3. ALMEIDA, A. C. B. **Análise inelástica de pórticos planos considerando a plasticidade distribuída e o efeito das tensões residuais nos perfis estruturais de aço.** Dissertação de M. Eng., Pós-graduação em engenharia de estruturas, UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2006.
4. ALMEIDA, A. C. B. & LAVALL, A. C. C. **Resistência de estruturas de aço considerando a análise avançada com plasticidade distribuída e o efeito das tensões residuais.** Anais XXVIII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Porto, 2007.
5. ASME, **Manual for Determining the Remaining Strength of Corroded Pipelines – A Supplement to ASME B31 Code for Pressure Piping.** The American Society of Mechanical Engineers, New York, 1991.
6. BATHE, K. J. **Finite Element Procedures.** New Jersey, PRENTICE HALL, 1996
7. BENJAMIN, A. C., VIEIRA, R. D., FREIRE, J. F. & CASTRO, J. T. P. **Burst tests on pipeline with long external corrosion.** International Pipeline Conference, ASME 2000, v. 2, p. 793-799, 2000.
8. BENJAMIN, A. C. & ANDRADE, E. Q. **Predicting the failure pressure of pipelines containing nonuniform depth corrosion defects using the finite element method.** Proceedings of OMAE 2003, 22<sup>nd</sup> International Conference on Offshore Mechanics and Arctic Engineering, Cancun, 2003.
9. BENJAMIN, A. C. & ANDRADE, E. Q. **Modified method for the assessment of the remaining strength of corroded pipelines.** IBP413-03, Rio Pipeline Conference & Exposition 2003, Rio de Janeiro, 2003.

10. BONET, J. & WOOD R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. First edition, Cambridge University Press, 1997.
11. CARDOSO, C. O., **Metodologia para análise e projeto de dutos submarinos submetidos a altas pressões e temperaturas via aplicação do método dos elementos finitos**. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRJ, Tese de doutorado, Rio de Janeiro, 2005.
12. CHANDRUPATLA T. R.; BELEGUNDU A. D. **INTRODUCTION TO FINITE ELEMENTS IN ENGINEERING**. 1ª Edição. Unite State of America: Prentice-Hall, 1991.
13. CHEN, H. F., LIU, H. Y., CEN, Z. Z. & XU, B. Y. **Numerical analysis of limit load and reference stress of defective pipelines under multi-loading systems**. International Journal of Pressure Vessels and Piping, Beijing, v. 75, p.105-114, 1998.
14. CHEN, H. F. & SHU, D. **Simplified limit analysis of pipelines with multi-defects**. Engineering Structures, Singapore, v. 23, p. 207-213, 2001.
15. CHIODO, M. S. G. & RUGGIERI, CLAUDIO. **Previsão da pressão de falha em dutos contendo defeitos de corrosão: critérios de colapso e validação experimental**. V Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, Bahia, 2008.
16. CHOI, J. B., GOO, B. K., KIM, J. C., KIM, Y. J. & KIM, W. S. **Development of limit load solutions for corroded gas pipelines**. International Journal of Pressure Vessels and Piping, Kyonggi-do, v. 80, p. 121-128, 2003.
17. CHOUCHAOUI, B. A. & PICK R. J. **Behaviour of longitudinally aligned corrosion pits**. International Journal of Pressure Vessels and Piping, Northern Ireland, v. 67, p.17-35, 1996.
18. COOK, R. D. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. Singapore, JOHN WILEY & SONS, Second Edition, 1981.
19. CRONIN, D. S. & PICK, R. J. **Prediction of the failure pressure for complex corrosion defects**. International Journal of Pressure Vessels and Piping, Ontorio, v. 79, p. 279-287, 2002.
20. DMYTRAKH, I. M., PLUVINAGE, G. & QILAFKU, G. **On corrosion fatigue emanating from notches: stress field and electrochemistry**. Materials Science, v. 37, No. 2, 2001.

21. DINIZ, J. L. C., **Resistência de Dutos com Defeitos Usinados**, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, PUC/RIO, Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, 2002.
22. DNV, **DNV Recommended Practice – DNV–RP–F101 - Corroded Pipelines**, Det Norske Veritas, Norway, 1999.
23. FONSECA, E. M. M. & DE MELO, F. J. M. Q. & OLIVEIRA, C. A. M. **The thermal and mechanical behavior of structural steel piping systems**. International Journal of Pressure Vessels and Piping, v. 82, p. 145-153, 2005.
24. FORTI, T. L. L. & REQUENA, J. A. V. & DEVLOO, P. R. B. **Formulação de viga 3D com relação constitutiva não-linear**. Anais XXVIII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Porto, 2007.
25. GENTIL V. **Corrosão**. 4ª Edição. Brasil: LTC, 2003.
26. GUIMARÃES, A. C. B. **Avaliação simplificada da capacidade de carga de dutos corroídos**. Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Dissertação de Mestrado, UFPR, Curitiba, 2005.
27. HJELMSTAD, K. D. **Fundamentals of Structural Mechanics**. United States of America, PRENTICE HALL, 1997.
28. JUNIOR, D. B. N., BENJAMIN, A. C. & ANDRADE, E. Q. **Finite element models for the prediction of the failure pressure of pipelines with long corrosion defects**. Proceedings of IPC 2002, International Pipeline Conference, Alberta, 2002.
29. KERMANI, M. B. & HARROP, D. **The impact of corrosion on oil and gas industry**. SPE Middle East Oil Show, Bahrain, 1995.
30. KHAN, A. S. & HUANG, S. **Continuum Theory of Plasticity**. United States of America, JOHN WILEY & SONS, 1995.
31. KIEFNER, J. F. & VIETH, P. H. **A modified criterion for evaluating the remaining strength of corroded pipe**. Final Report on Project PR 3-805, Battelle Memorial Institute, Columbus, 1989.
32. KIM, Y. J., SHIM, D. J., HUH, N. S. & KIM, Y. J. **Plastic limit pressures for cracked pipes using finite element limit analyses**. International Journal of Pressure Vessels and Piping, Kyonggi-do, v. 79, p. 321-330, 2002.

33. KIM, Y. J. & SON, B. G. **Finite element based stress concentration factors for pipes with local wall thinning.** International Journal of Pressure Vessels and Piping, Kyonggi-do, v. 81, p. 897-906, 2004
34. KIM, S. E. & KIM, Y. & CHOI, S. H. **Nonlinear analysis of 3D steel frames.** Thin-Walled Structures, v. 39, p. 445-461, 2001.
35. LAI, W. M. & RUBIN, D. & KREMPL, E. **Introduction to continuum mechanics.** Great Britain, PERGAMON PRESS, Third Edition, 1993.
36. MAGDI, M. Exact yield hyper-surface for thin pipes. International Journal of Pressure Vessels and Piping, v. 78, p. 507-514, 2001.
37. MEJÍA, I. E. O. **Modelo numérico para o estudo do comportamento de dutos enterrados.** Dissertação de Mestre, Pós-graduação em Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.
38. NOWZARTASH, F. & MOHAREB, M. An elasto-plastic finite element for steel pipelines. International Journal of Pressure Vessels and Piping, v. 81, p. 919-930, 2004.
39. OH, C. K., KIM, Y. J., BAEK, J. H., KIM, Y. P. & KIM, W. S. **Ductile failure analysis of APIX65 pipes with notch-type defects using a local fracture criterion.** International Journal of Pressure Vessels and Piping, v. 84, p. 512-525, 2007.
40. RAMEZANI, H. A., JEONG, J. & PLUVINAGE, G. **Structural integrity evaluation of X52 gas pipes subjected to external corrosion defects using the SINTAP procedure.** International Journal of Pressure Vessels and Piping, v. 83, p. 420-432, 2006.
41. RAMEZANI, H. A., JEONG, J. & PLUVINAGE, G. **Structural integrity evaluation of X52 gas pipes subjected to external corrosion defects using the SINTAP procedure.** International Journal of Pressure Vessels and Piping, v. 83, p. 420-432, 2006.
42. RODRIGUES, P. F. N. **Ferramentas Numéricas para a Análise Não-Linear Física e Geométrica de Estruturas Reticuladas na Exploração de petróleo Offshore.** Tese de D.Sc., UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.
43. SALDANHA, S. & BUCHERIE, C. **Integrity of non crack like corroded pipelines submitted to internal pressure. A methodology by Bureau**

- Veritas, based upon elastic-plastic.** 3<sup>rd</sup> Seminar on Pipeline, Rio de Janeiro, IBP 09001, 2001.
44. SILVESTRE, N. & CAMOTIM, D. **Utilização da teoria generalizada de vigas na análise de estabilidade de barras com secção tubular circular.** Anais XXVIII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Porto, 2007.
  45. SOUZA, L. A. F. **Análise não linear via elementos finitos de um modelo de vigas para dutos enterrados.** Dissertação de M. Sc., Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR, Curitiba, PR, Brasil, 2005.
  46. SOUZA, R. D. **Avaliação estrutural de dutos com defeitos de corrosão reais.** Pós-graduação em Engenharia Mecânica, PUC-RIO, Dissertação de Mestrado, Rio de Janeiro, 2003.
  47. STAAT, M. **Local and global collapse pressure o longitudinally flawed pipes and cylindrical vessels.** International Journal of Pressure Vessels and Piping, Jülich, v. 82, p. 217-225, 2005.
  48. STEPHENS, D. R. & LEIS, B. N. **Material and geometry factors controlling the failure of corrosion defects in piping.** PVP, 1997.
  49. SVENSSON, N. L. **The bursting pressure of cylindrical and spherical vessels.** ASME Pressure Vessel Piping Design, 1959.
  50. TIN-LOI, F. & XIA, S. H. **Geometrically nonlinear elastic analysis of space trusses.** Structural Engineering and Mechanics, v. 7, p. 345-360, 1999.
  51. VALENTA, F., SOCHOR, M., SPANIEL, M. & MICHALEC J. **Remaining load carrying capacity of gás pipelines damaged by surface corrosion.** International Journal of Pressure Vessels and Piping, Northern Ireland, v. 59, p. 217-226, 1994.
  52. VALENTA, F., SOCHOR, M., SPANIEL, M., MICHALEC, J., RUZICKA, M. & HALAMKA, V. **Theoretical and experimental evaluation of the limit state of transit gas pipelines having corrosion defects.** International Journal of Pressure Vessels and Piping, Great Britain, v. 66, p.187-198, 1996.
  53. VALENTINI, M.D.; MACHADO, R.D.; ABDALLA FILHO, J.E., **Avaliação da Resistência Residual via Elementos Finitos de Dutos Corroídos de Diversos Materiais e Submetidos a Carregamentos Combinados.** Anais

XXVII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Belém, 2006.

54. VILLAR, M. F. **Estudo dos modelos de concentração de tensões através do auxílio de técnicas numéricas de modelagem.** Tese de M. Sc., Pós-graduação em Engenharia Aeronáutica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brasil, 2002.
55. ZHOU, Z. & MURRAY, D. W. **Pipeline beam models using stiffness property deformation relations.** Journal of Transportation Engineering, ASCE, v. 122, n.2, p. 164-172, 1996.

## ANEXO I – INFLUÊNCIA DA DISCRETIZAÇÃO NO RESULTADO FINAL

A geração da malha afeta significativamente o resultado final na análise de método numérico, especialmente o Método dos Elementos Finitos, pelo fato de que este método utiliza elementos com função de interpolação para discretizar o domínio da análise. Quanto maior o grau de refino, mais preciso será o resultado final. Porém, existe uma quantidade limite do elemento, acima do qual o aumento do refino na discretização não afeta mais o resultado final.

Segundo fator que impacta no resultado final é a configuração da malha. Especialmente para domínio que apresenta imperfeições geométricas, no caso estudo neste trabalho. Para obter resultado preciso, era necessário gerar malha com elevado grau de refino na região do defeito. Isso gera demanda significativa no esforço computacional. Para otimizar o esforço do computador, as região mais afastadas do defeito podem ser discretizadas com malha de grau de refino menor. A metodologia mais comum adotada é gerar uma malha com menor grau de refino para encontrar o ponto de concentração de tensões. Em seguida, gerar malha elevando grau de refino gradativamente até que os resultados apresentem tendência de convergência.

Em seguida, será apresentado um caso hipotético de barra com defeito semicircular uniforme para avaliar como o resultado é afetado pelo grau de refino. Considere uma barra de diâmetro externo 200 mm, diâmetro interno 190 mm, módulo de Young 205GPa, tensão de escoamento 420MPa. A barra foi discretizada pelo elemento quadrangular de 4 nós, axisimétrico. A tabela A.1 mostra a evolução da tensão conforme o aumento do grau de refino. A figura A.1 representa a tabela A.1 na forma gráfica. As figuras A.2 (a)-(f) mostram a distribuição de tensão de von Mises. Os títulos das figura estão representados em quantidade de nó por quantidade de elemento.

Tabela A1.1 Qtde. Elemento X Tensão de VM

Quantidade de nó	Quantidade de elemento	Tensão de Von Mises (MPa)
529	144	609,45
1031	300	627,294
1763	532	643,835

2455	756	653,586
6611	2100	667,237
9961	3200	672,571

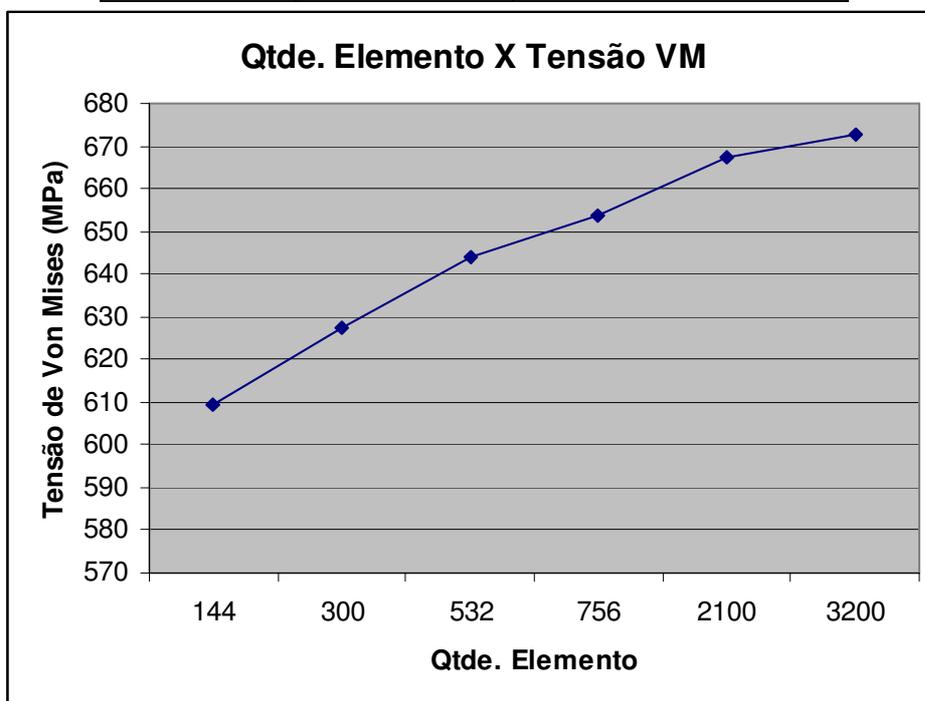
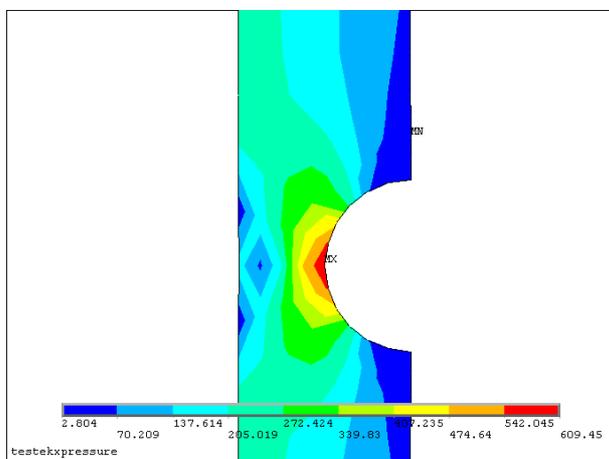
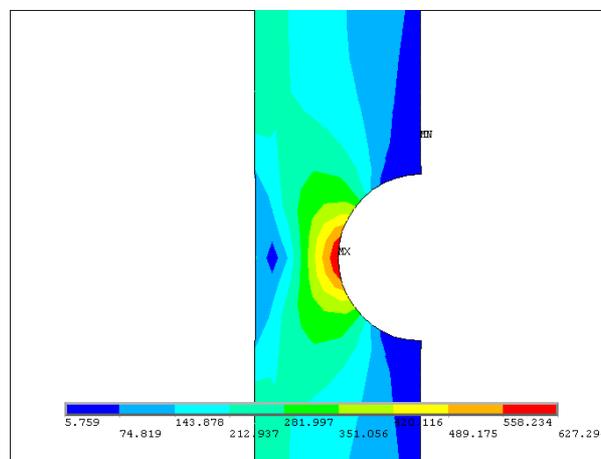


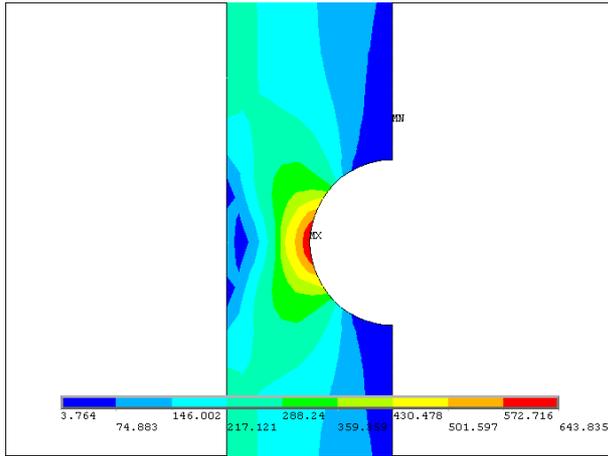
Figura A1.1 Qtde. Elemento X Tensão de von Mises



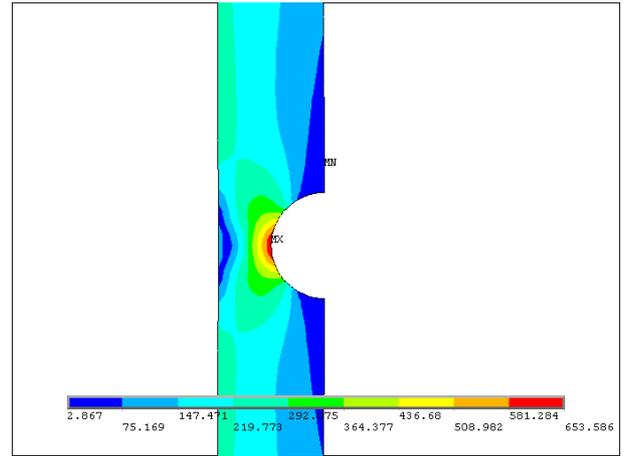
(a) 529x144



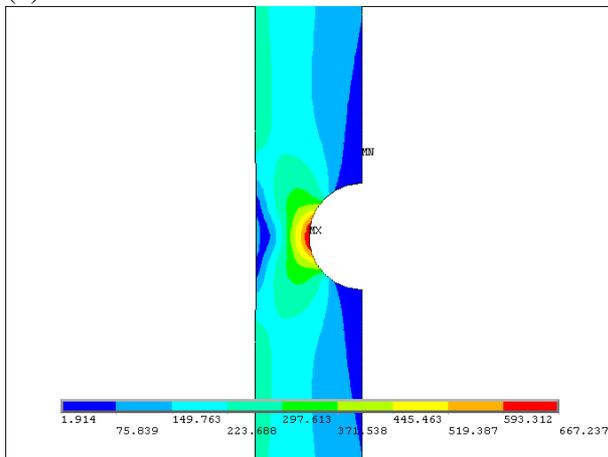
(b) 1031x300



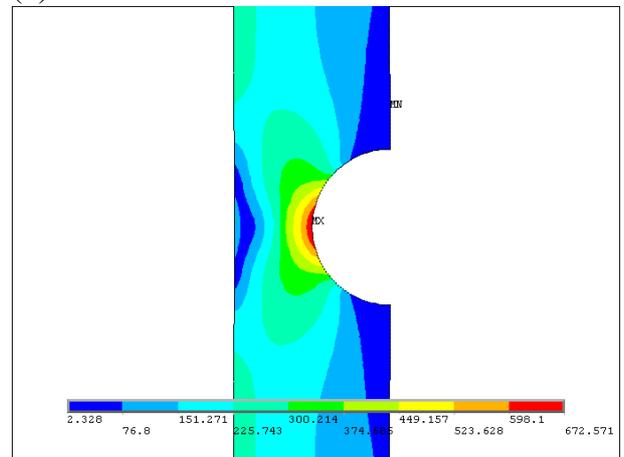
(c) 1763x532



(d) 2455x756



(e) 6611x2100



(f) 9961x3200

Figura A1.2 (a)-(f) Distribuição de tensão de Von Mises para diferentes grau de refino na malha.

## ANEXO II – GERAÇÃO DE MALHA POR APC3D

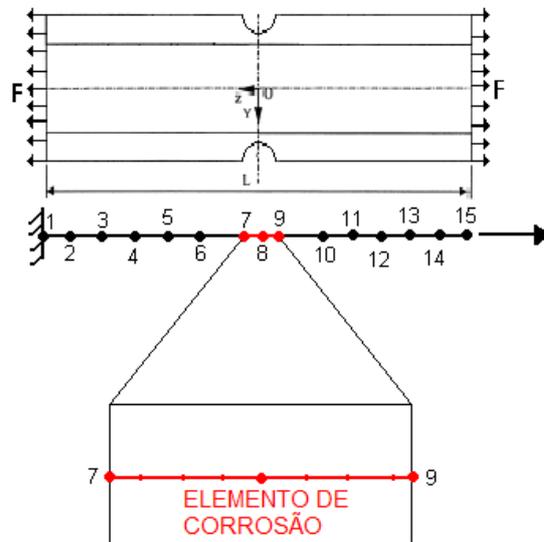


Figura A2.2 Representação esquemática de malha com elemento pórtico gerada por APC3D, com elemento de corrosão

Esta seção tem o objetivo de apresentar como uma malha com elemento pórtico é gerada por APC3D, para analisar um trecho de duto com defeito semicircular. Ao longo do desenvolvimento da metodologia apresentada por este trabalho, foi testado e validado os resultados da análise, considerando o efeito de corrosão simulado por um elemento especial. Tal elemento tem o diâmetro externo menor que elemento íntegro e é igual ao diâmetro externo da parede residual na corrosão. O comprimento deste elemento de corrosão é igual ao comprimento do defeito. Este elemento é apontado pelo usuário como sendo elemento de corrosão. Assim sendo, o programa APC3D é capaz de introduzir artificialmente o fator de concentração de tensões e efetuar a análise.