

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA  
MECÂNICA

MODELAGEM DE VIGAS DE COMPÓSITOS  
LAMINADOS USANDO ELEMENTOS FINITOS  
FORMULADOS NA NOTAÇÃO STRAIN  
GRADIENT

CURITIBA 2002

FLORENTINO AUGUSTO FAGUNDES

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Dissertação apresentada como parte do processo de obtenção do título de Mestre, do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da PUCPR, sob orientação do prof. Dr. João Elias Abdalla Filho.

CURITIBA 2002

## RESUMO

Este trabalho analisa vigas de materiais compósitos laminados via elementos finitos, formulados utilizando-se a notação *strain gradient*, que é uma notação fisicamente interpretável. A notação *strain gradient* permite avaliar as capacidades de modelagem de elementos finitos, assim como identificar e remover erros de modelagem a-priori.

Inicialmente, faz-se uma revisão bibliográfica que aborda compósitos laminados, o método dos elementos finitos e erros de modelagem em elementos finitos. Subseqüentemente, desenvolve-se a fundamentação teórica do método dos elementos finitos, de materiais compósitos laminados e da notação *strain gradient*.

A formulação de um elemento finito de dois nós (seis graus - de - liberdade) para análise de vigas de compósitos laminados com capacidade de representar deformação por cisalhamento transversal é apresentada. Através da notação *strain gradient*, identifica-se a presença de um termo espúrio na expressão para distorção angular  $\gamma_{xz}$ , ou seja, um termo de cisalhamento parasítico. A remoção desse termo corrige o elemento, permitindo a obtenção de respostas fisicamente corretas.

O elemento finito é implementado em código FORTRAN em suas duas versões, com e sem cisalhamento parasítico. Análises numéricas são realizadas visando a comparação entre soluções contaminadas pelos efeitos do cisalhamento parasítico e soluções corrigidas.

Em geral, observa-se que ambas soluções convergem para o mesmo resultado, porém a solução corrigida para cisalhamento parasítico apresenta taxa de convergência significativamente mais elevada. Destaca-se, então, o enrijecimento artificial causado pelo cisalhamento parasítico.

Nas soluções para deformação e tensão de cisalhamento transversal, observa-se que a representação gerada pelo modelo com cisalhamento parasítico é qualitativamente errônea, jamais convergindo para a solução correta, mesmo com maior refino de malha. Demonstra-se, assim, a necessidade da remoção a-priori do termo espúrio para obtenção de soluções corretas para vigas de compósitos laminados.

Palavras-chaves: Elementos Finitos, Compósitos Laminados, Notação *Strain Gradient*, Viga de Timoshenko, Análise de Vigas.

## Abstract

This work analyzes laminated composite beams using finite elements formulated in strain gradient notation, which is a physically interpretable notation. Strain Gradient notation allows for the evaluation of modeling capabilities of finite elements, as well as for the identification and elimination of modeling errors a-priori.

Initially a literature review is performed on laminated composites, on the finite element method and on finite elements modeling errors. Subsequently, fundamental aspects of the finite element method, of the mechanics of laminated composites and of strain gradient notation are presented.

A two-node (six degree-of-freedom) element for the analysis of laminated composite beams which has the capacity of modeling transverse shear deformation is presented. Through strain gradient notation, the presence of a spurious term in the transverse shear strain  $\gamma_{xz}$  is identified. This spurious term is a parasitic shear term. Its removal corrects the element, this allowing for obtaining physically correct answers.

The finite element is implemented into a FORTRAN code in its both versions, that is, with and without parasitic shear. Numerical analyses are performed with the intent to compare solutions contaminated by the effects of parasitic shear with correct solutions.

In general, it is observed that both solutions converge to the same result. However, the solution correct for parasitic shear presents a significantly higher rate of convergence. This demonstrates the artificial stiffening effect caused by parasitic shear.

It is also observed that solutions for transverse shear strain and stress generated by the model containing parasitic shear are qualitatively erroneous, and do not converge to the correct solutions even with greater level of mesh refinement. Therefore, it is demonstrated the need for removing the spurious term a-priori for obtaining correct solutions for laminated composite beam problems.

**Key words:** Finite Elements, Laminated Composites, Strain Gradient Notation, Timoshenko Beam, Beams Analysis.

## **Agradecimentos**

Tantos foram aqueles que contribuíram para a realização deste trabalho, que fica difícil nominar a todos; afinal numa vida em sociedade, estamos sempre recebendo ajuda daqueles que nos cercam.

Agradeço minha família, pela compreensão e carinho; meus colegas de turma pelo companheirismo e ajuda, meus professores pela motivação e ensinamentos, a secretaria Jane pela disposição em ajudar. Agradeço a própria PUCPR pela bolsa a mim concedida. Aos demais colegas pelo incentivo. A UPFR e a UFSC pelo uso de seus acervos.

Algumas pessoas, no entanto tiveram um grau de envolvimento maior na elaboração deste trabalho, que faço questão de nominar. Meus filhos, Lucas e Luciana e minha esposa Maria Luiza, fonte sólida de apoio e inspiração; e o professor João Elias, pela orientação segura e oportuna antes mesmo de minha matrícula no curso.

Finalmente agradeço a Deus, pois sinceramente acredito que há algo de divino na busca humana pelo conhecimento.

## Lista de Símbolos

$d$	Vetor dos deslocamentos nodais
$E$	Módulo de Elasticidade Longitudinal
$G$	Módulo de Cisalhamento Transversal
$K$	Matriz de rigidez
$q$	Rotação ao redor do eixo $y$
$p$	Rotação ao redor do eixo $x$
$u, v, w$	Deslocamentos nas direções $X, Y$ e $Z$
$A, B, D$	Submatrizes da matriz de rigidez do laminado
$U$	Energia de deformação
$U_M$	Matriz de energia de deformações
$N, M$	Vetores das resultantes de tensões (forças normais e momentos fletores)
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\epsilon$	Vetor de deformações elásticas
$\sigma$	Vetor de tensões
$\theta$	Ângulo entre coordenadas globais e materiais (orientações das fibras de cada lâmina do laminado)
$\Omega$	Volume do elemento
$\Phi$	Matriz de transformação entre coordenadas nodais e coordenadas Strain Gradient
$\epsilon_{sg}$	Vetor Gradiente de deformações
$C$	Matriz constitutiva
$\bar{Q}$	Matriz constitutiva para uma lâmina em coordenadas globais
$Q$	Matriz constitutiva para uma lâmina em coordenadas materiais
$T_{sg}$	Matriz de transformação entre gradiente de deformações e deformações elásticas
$z$	Espessura do laminado
$t$	Espessura da lâmina
$b$	Largura da viga
$h$	Espessura de uma lâmina genérica do laminado

L	Comprimento da viga
T	Matriz de transformação entre tensões/deformações do referencial global para o referencial material
m, n	elementos da matriz T
$Q_x, Q_y$	Componentes de forças cisalhantes
$A_{ij}$	Matriz de rigidez associada aos efeitos do cisalhamento transversal

# Sumário

<b>RESUMO</b>	<b>iii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>CAPÍTULO 1</b>	<b>12</b>
<b>1 INTRODUÇÃO</b>	<b>12</b>
<b>1.1 Considerações Iniciais</b>	<b>12</b>
<b>1.2 Objetivos</b>	<b>14</b>
<b>1.3 Motivação</b>	<b>14</b>
<b>1.4 Escopo do Trabalho</b>	<b>15</b>
<b>CAPÍTULO 2</b>	<b>16</b>
<b>2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>16</b>
<b>2.1 Introdução</b>	<b>16</b>
<b>2.2 Materiais Compostos</b>	<b>17</b>
<b>2.3 Compósitos Laminados</b>	<b>17</b>
2.3.1 Teorias sobre Placas	19
2.3.2 Uma teoria de ordem superior simplificada para compósitos laminados	22
<b>2.4 Soluções Via o Método dos Elementos Finitos</b>	<b>23</b>
<b>2.5 Modelagem via elementos finitos de materiais compósitos laminados</b>	<b>24</b>
<b>2.6 Modelagem via elementos finitos de vigas laminadas</b>	<b>24</b>
<b>2.7 Erros de Modelagem</b>	<b>26</b>
<b>CAPÍTULO 3</b>	<b>28</b>
<b>3 DESENVOLVIMENTOS</b>	<b>28</b>
<b>3.1 Introdução</b>	<b>28</b>
<b>3.2 Método dos Elementos Finitos</b>	<b>28</b>
<b>3.3 Materiais Compósitos</b>	<b>31</b>
<b>3.4 Compósitos Laminados</b>	<b>33</b>
3.4.1 Teoria Macromecânica de uma Lâmina	33
3.4.2 Teoria Macromecânica para Compósitos Laminados	37
3.4.3 Estruturas de Compósitos Laminados	38
<b>3.5 Notação Strain Gradient</b>	<b>43</b>
3.5.1 Desenvolvimento da Notação Strain Gradient	43

<b>CAPÍTULO 4</b>	<b>49</b>
<b>4 Elemento Finito de Viga para Compósitos Laminados</b>	<b>49</b>
<b>4.1 Introdução</b>	<b>49</b>
<b>4.2 Viga de Timoshenko</b>	<b>50</b>
<b>4.3 Formulação de uma Viga de Compósito Laminado</b>	<b>51</b>
<b>4.4 Validação do elemento</b>	<b>58</b>
4.4.1 Exemplo 1	58
4.4.2 Exemplo 2	59
4.4.3 Exemplo 3	60
4.4.4 Exemplo 4	65
4.4.5 Exemplo 5	66
4.4.6 Exemplo 6	73
4.4.7 Exemplo 7	80
<b>Capítulo 5</b>	<b>84</b>
<b>5 Conclusão</b>	<b>84</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>86</b>
<b>Anexo A</b>	<b>92</b>

## Lista de Figuras

Figura 2.1 (A) Lâmina Típica_____	18
Figura 2.1 (B) Laminado composto de três lâminas com fibras em diferentes orientações__	18
Figura 3.1 Elementos finitos_____	29
Figura 3.2 Transformação de coordenadas globais x materiais _____	34
Figura 3.3 Placa retangular típica _____	39
Figura 3.4 Direção positiva para resultantes de tensões_____	41
Figura 4.1 Elemento finito de viga _____	49
Figura 4.2 (A) Viga de Euler-Bernoulli _____	50
Figura 4.2 (B) Viga de Euler-Bernoulli _____	51
Figura 4.2 (C) Viga de Euler-Bernoulli _____	51
Figura 4.3 Viga de Timoshenko _____	51
Figura 4.4 Viga em engastada e livre _____	58
Figura 4.5 Viga laminada bi-engastada _____	59
Figura 4.6 Viga laminada engastada e livre constituída por quatro lâminas _____	60
Figura 4.7 Viga laminada engastada e livre constituída por dez lâminas_____	65
Figura 4.8 Viga laminada engastada e livre constituída por duas lâminas <i>cross ply</i> _____	67
Figura 4.9 Viga laminada engastada e livre não simétrica geral _____	74
Figura 4.10 Viga laminada engastada e livre não simétrica geral _____	81

## Lista de Tabelas

Tabela 1 Flecha máxima (W), em metros, para engastada e livre _____	58
Tabela 2 Flecha máxima (W), em metros, para viga bi-engastada _____	59
Tabela 3 Máximo deslocamento vertical (w) para viga engastada e livre <i>angle ply</i> _____	61
Tabela 4 Máximo momento resultante para viga engastada e livre (no engaste) _____	62
Tabela 5 Tensão cisalhante para viga engastada e livre _____	63
Tabela 6 Máxima força cortante ( $Q_{xz}$ ) para viga engastada e livre _____	64
Tabela 7 Tensão normal SIGMA – X obtida com malha de 4 elementos _____	65
Tabela 8 Valores de tensões calculadas para cada lâmina _____	66
Tabela 9 Máximo deslocamento vertical (w) para viga engastada e livre <i>cross ply</i> _____	68
Tabela 10 Máximo momento fletor para viga engastada e livre <i>cross ply</i> _____	69
Tabela 11 Tensão cisalhante ( $\tau_{xz}$ ) para viga engastada e livre _____	70
Tabela 12 Tensão cisalhante ao longo da viga engastada e livre <i>cross ply</i> _____	71
Tabela 13 Resultante de força cortante ao longo da viga engastada e livre <i>cross ply</i> _____	72
Tabela 14 Máximo deslocamento vertical para viga engastada e livre não simétrica geral _____	74
Tabela 15 Máximo momento resultante para viga engastada e livre _____	75
Tabela 16 Tensão cisalhante ao longo da viga engastada e livre não simétrica geral _____	77
Tabela 17 Resultante de força cortante ao longo da viga engastada e livre _____	78
Tabela 18 Tensões avaliadas num ponto fixo do laminado para diferentes malhas _____	79
Tabela 19 Máximos deslocamentos para viga laminada com carregamento axial _____	81

# CAPÍTULO 1

## 1 INTRODUÇÃO

### 1.1 Considerações Iniciais

Materiais fabricados a partir da combinação de dois ou mais materiais diferentes são chamados de materiais compostos, ou simplesmente compósitos.

Compósitos são formados a partir da combinação de diferentes materiais, em escala macroscópica, formando um novo material com propriedades mecânicas próprias, como, por exemplo, mais leves e/ou mais resistentes que os materiais homogêneos. Portanto, um material é considerado compósito somente se os diferentes materiais que o compõe forem avaliados em escala macromecânica, em contraste com os materiais homogêneos, que em escala molecular podem também ser formados por materiais diferentes. O concreto e alguns tipos de pneus são exemplos de materiais compostos. Dentre as diferentes classes de compósitos, destacam-se os compósitos laminados, pela demanda crescente nos projetos de engenharia, em especial na indústria aeronáutica. Nas mais diferentes estruturas mecânicas, é cada vez mais freqüente a utilização de compósitos laminados, em virtude das vantagens que estes materiais apresentam em comparação com materiais homogêneos.

A utilização de materiais laminados não é um privilégio do mundo contemporâneo. As lâminas de papiro, fabricadas a partir da planta do mesmo nome, desde a Antigüidade pelos egípcios, tratam-se de um exemplo de laminado. As tiras obtidas do miolo da planta, depois de esmagado por um rolo, são dispostas em camadas com fibras orientadas perpendicularmente entre si que, uma vez desidratadas num processo de prensagem, conferem igual resistência nas diferentes direções da estrutura.

O compósito laminado é uma das formas mais utilizadas de materiais compostos, e consiste no empilhamento de duas ou mais lâminas, perfeitamente ligadas entre si de forma que, idealmente, não haja movimento relativo entre elas. Uma lâmina típica é confeccionada a partir de fibras de alta resistência, orientadas nas mais diversas direções e que estão mergulhadas num meio chamado “matriz”. A função da matriz é conferir proteção às fibras e monoliticidade ao conjunto, enquanto a fibra oferece resistência à estrutura.

A estrutura mecânica resultante pode ser uma viga, uma placa ou casca, dependendo da geometria e do emprego. Além das inúmeras vantagens estruturais deste tipo de material, que possibilita ao engenheiro um dimensionamento mais racional e eficiente das solicitações mecânicas da estrutura projetada, como por exemplo, maior resistência e/ou rigidez, há outras de ordem econômica e ambiental. É o caso da fabricação de laminados de madeira para confecção de móveis, onde uma fina camada de madeira nobre, cara e escassa como a imbuia ou mogno, quase sempre extraídas de reservas naturais, reveste lâminas internas obtidas de árvores cultivadas pelo homem, mais abundantes e baratas como o pínus ou eucalipto.

Há muitas teorias para explicar o comportamento macromecânico dos compósitos laminados, entre elas cita-se aqui a Teoria Clássica de Placa Laminada, Teoria de Primeira Ordem, e Teoria de Ordem Superior (MACHADO, 1992). A Teoria Clássica de Placa Laminada despreza os efeitos cisalhantes. Já a teoria de primeira ordem inclui os efeitos cisalhantes na análise, e seu nome advém da ordem dos polinômios (lineares) que descreve o campo de deslocamentos. Nas chamadas teorias de ordem superior, o campo de deslocamentos é expandido por polinômios de ordem superior.

Para analisar numericamente os resultados das diferentes teorias, torna-se indispensável uma ferramenta matemática eficiente. Para analisar problemas complexos da prática da engenharia e obter resultados com grau de acuracidade elevado, empregam-se métodos numérico-computacionais. O mais utilizado dentre esses é o método dos elementos finitos – MEF (HUEBNER, 1995), que é amplamente aceito pela comunidade científica, e também nos meios comerciais, para soluções aproximadas de problemas de engenharia. O método dos elementos finitos tem sido largamente empregado em pesquisa e análise de compósitos, tal como se menciona em (YUAN, 1989), (ROCHE & ACCORSI, 1998), (KRAWCZUK et al, 2000).

O estudo dos materiais compósitos laminados concentrou-se inicialmente em estruturas do tipo placas e chapas. Os trabalhos sobre vigas eram, até algum tempo, escassos na literatura, (VINSON & SIERAKAWSKI, 1986). Embora a literatura sobre análise de vigas de compósitos laminados atualmente já seja extensa, (ROCHE et al, 1998), (ABDALLA, & MACHADO, 1999), (ABDALLA, et al, 2000), existe espaço para novas pesquisas que deverão trazer mais luz à compreensão do comportamento de compostos laminados.

## 1.2 Objetivos

O objetivo desta dissertação é detalhar o desenvolvimento do elemento finito de viga para análise de compósitos laminados proposto por Abdalla e Machado (ABDALLA & MACHADO, 1999), e demonstrar, na medida do possível, sua aplicabilidade. Vários problemas são modelados empregando o elemento, produzindo resultados para deslocamentos, deformações e tensões.

Como o elemento é formulado através da notação *Strain Gradient*, que é fisicamente interpretável, a presença de um termo espúrio na expressão para a distorção angular  $\gamma_{xz}$  é identificada. Também é objetivo deste trabalho investigar largamente os efeitos deletérios deste termo espúrio, interpretado como um termo de cisalhamento parasítico. O enrijecimento artificial (erro qualitativo) é demonstrado nos vários problemas analisados. A presença de erros qualitativos na representação da deformação e tensão de cisalhamento transversal é explorada com a devida amplitude.

## 1.3 Motivação

O método dos elementos finitos tem sido largamente empregado na análise de estruturas, gerando resultados que servem de subsídio importante na fase de dimensionamento. Na área de compósitos laminados, as pesquisas buscam a definição e validação de elemento que possam modelar estrutura adequadamente, gerando resultados com níveis de precisão aceitáveis.

Os trabalhos de (DOW & BYRD, 1988), (DOW & ABDALLA, 1994) mostram que durante a formulação de elementos finitos em geral, erros de modelagem contaminam as expressões polinomiais, causando enrijecimento artificial. Particularmente, em placas de compósitos laminados, (ABDALLA, 1995), termos espúrios causam também representações incorretas das deformações. Portanto, elementos finitos para compósitos laminados apresentam erros qualitativos, além do enrijecimento artificial.

Trabalhos recentes, (ABDALLA, et al 2000), (ABDALLA, et al, 2002) mostram erros qualitativos presentes também em elementos de viga. Assim, uma investigação mais

aprofundada deve ser realizada a fim de se compreender o fenômeno e buscar uma validação desse tipo de elemento.

## **1.4 Escopo do Trabalho**

A análise macromecânica da viga laminada, objeto desta dissertação, considera apenas carregamentos mecânicos e estáticos, sendo, portanto desconsiderados efeitos térmicos, de umidade, bem como vibrações. As análises serão limitadas ao regime elástico, não havendo considerações quanto à plasticidade, nem a fenômenos como fratura ou delaminação. Será utilizada a teoria de viga de Timoshenko, e o elemento finito será formulado utilizando-se a notação *Strain Gradient*, que possibilita a identificação e remoção de termos espúrios a-priori. A implementação do elemento será feita em um programa em linguagem Fortran. A validação do modelo se fará através do confronto com dados encontrados na literatura, bem como com valores obtidos analiticamente.

Em termos de estrutura, esta dissertação está distribuída em cinco capítulos, a saber. 1) Introdução, 2) Revisão bibliográfica, 3) Fundamentação teórica, 4) Análise, e 5) Conclusão.

A revisão bibliográfica tem como objetivo mostrar a evolução histórica e a situação atual do assunto pesquisado. A fundamentação teórica oferece a sustentação científica ao trabalho, mostrando as diferentes teorias existentes para o assunto em questão. A análise mostra os resultados numéricos encontrados, resultados estes que validam a teoria. A conclusão mostra a eficiência da modelagem proposta, bem como sugere novas pesquisas para melhorar os resultados obtidos neste trabalho.

## **CAPÍTULO 2**

### **2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

#### **2.1 Introdução**

Movida por necessidades econômicas em otimizar resultados ou viabilizar projetos, a indústria contemporânea confiou à engenharia a busca por novas soluções que pudessem melhorar o desempenho de estruturas mecânicas no que diz respeito, por exemplo, à resistência e rigidez nas diferentes direções, leveza, durabilidade, entre outras características. Este desafio levou os engenheiros a conceber novos materiais a partir de dois ou mais materiais homogêneos, denominados compósitos. Dentre os compósitos, destacam-se os laminados, que são formados a partir de duas ou mais lâminas perfeitamente coladas umas nas outras de forma a haver solidarização estrutural.

Neste capítulo serão abordadas as diferentes teorias existentes para análise de compósitos laminados, cada uma cumprindo finalidades específicas de análise. Será abordado também o método dos elementos finitos, ferramenta numérica adotada para análise dos resultados teóricos deste trabalho. A questão dos erros de modelagem é também tratada neste capítulo, onde se procura mostrar que tais erros são inerentes à formulação do elemento, e, portanto, presentes na análise.

Esta revisão bibliográfica pretende mostrar em que estado se encontra o assunto em estudo, e será feito na próxima seção. A revisão bibliográfica se inicia pela classificação dos diferentes tipos de compósitos, bem como descrevendo sua presença nos diferentes períodos da história da humanidade, passando pelo início das análises científicas dos compósitos laminados, chegando até os dias atuais, onde teorias recentes explicam comportamentos antes não considerados dos materiais em questão.

Como este trabalho aborda a análise de vigas de compósitos laminados via o método dos elementos finitos, o método será brevemente descrito, assim como o desenvolvimento analítico da viga de Timoshenko. O modelo de viga de Timoshenko é empregado por ser importante a consideração das deformações de cisalhamento transversal.

## **2.2 Materiais Compostos**

Um compósito laminado pode receber diferentes denominações em funções de sua geometria, forças atuantes e aplicações mecânicas. Placas, chapas e vigas, são exemplos de estruturas confeccionadas pelo empilhamento de lâminas de materiais compostos. Esta seção procura familiarizar o leitor com o assunto, primeiro diferenciando materiais compostos dos homogêneos, depois descrevendo um material laminado típico, para em seguida focar na questão da viga laminada, objetivo deste trabalho.

Um material é considerado composto se for concebido a partir de dois ou mais materiais diferentes, avaliados em escala macroscópica, portanto heterogêneos, (JONES, 1975). Vários povos da Antigüidade já conheciam as vantagens de se combinar materiais para suprir diferentes necessidades. Talvez tenham buscado inspiração na natureza. Algumas árvores, por exemplo, desenvolvem fibras em direções diferentes em alguns pontos do lenho.

Do ponto de vista científico, os compósitos passaram a ser utilizados a partir do início do século vinte, tendo no concreto armado o principal exemplo. Mas foi por volta de 1950 que a utilização dos compósitos ganhou escala, devido ao avanço da indústria aeronáutica.

## **2.3 Compósitos Laminados**

Os esforços iniciados na metade do século passado em busca de materiais avançados, continuam ainda hoje, pois se percebe que, do lado científico, há muito ainda a pesquisar, e do lado econômico, uma demanda crescente a suprir.

Estruturas mecânicas laminadas são as formas mais utilizadas de materiais compostos, e consistem no empilhamento de duas ou mais lâminas, perfeitamente coladas, conforme ilustra a figura 2.1. Uma lâmina típica é confeccionada a partir de fibras de alta resistência, orientadas nas mais diversas direções, posicionadas adequadamente num meio chamado matriz. A função da matriz é conferir proteção às fibras e unidade ao conjunto, enquanto a fibra oferece resistência à estrutura.

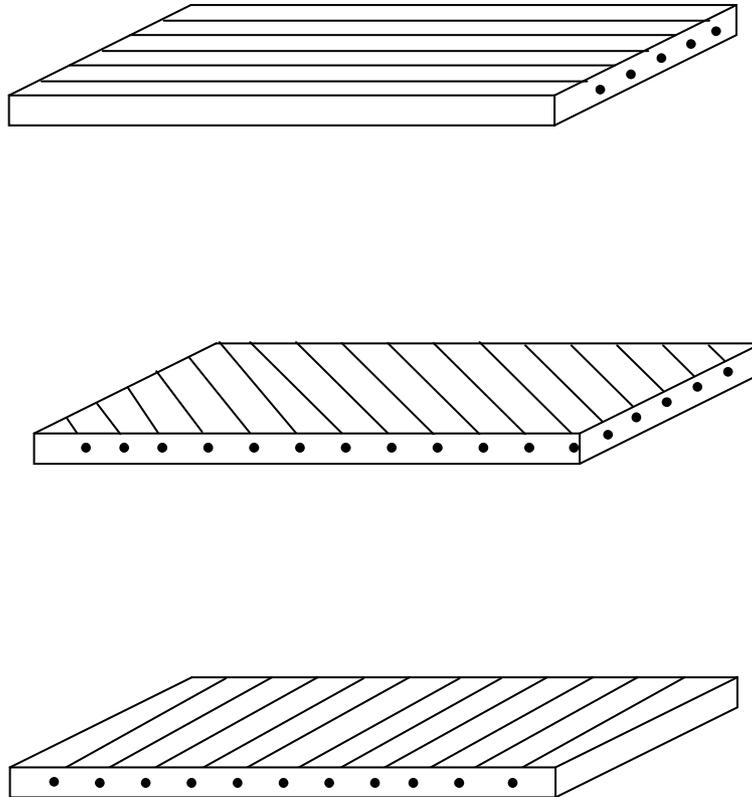


Figura 2.1 (A): Lâminas típicas de um laminado

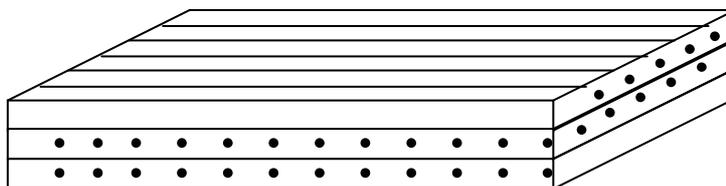


Figura 2.1 (B) Laminado composto de três lâminas com fibras em diferentes orientações.

A necessidade de compreensão do comportamento mecânico dos materiais laminados fez surgir diversas teorias, das quais algumas serão relatadas sucintamente adiante. Importante

registrar que tantas teorias se fazem necessárias porque nenhuma delas é capaz de isoladamente representar perfeitamente o comportamento mecânico dos laminados. Além disso, cada teoria cumpre uma finalidade específica no estudo de algum aspecto particular de um laminado. Por exemplo, se o objetivo é avaliar o laminado como uma única estrutura homogênea, não há necessidade de depreender esforços com uma teoria refinada, que considera as contribuições individuais de cada lâmina. Apesar do objetivo deste trabalho ser a análise de uma viga laminada, algumas teorias e trabalhos citados fazem referência ao termo Placa. Isto acontece em razão da literatura sobre compósitos laminados trazer inicialmente uma quantidade maior de estudos sobre este tipo de estrutura. Trabalhos sobre vigas laminadas eram até algum tempo escassos. Embora algumas teorias de compósitos laminados estejam colocadas em termos de uma placa, servem também para vigas laminadas.

### **2.3.1 Teorias sobre Placas**

Alguns dos primeiros e mais importantes trabalhos publicados sobre placas são o de Reissner, (REISSNER, 1945), seguido pelo de Mindlin (MINDLIN, 1951). Reissner trabalhou com expansões de campos de tensões, enquanto Mindlin atuou com campo de deslocamentos. Ambos adotaram coeficientes de correção do cisalhamento constante, sendo  $5/6$ , (aproximadamente 0,83) para os trabalhos de Reissner, e  $\pi^2/12$  (aproximadamente 0,82) para os estudos de Mindlin. Outro pioneiro no estudo em questão foi Kirchhoff. Mindlin considera em sua teoria as deformações transversais causadas pela deformação de cisalhamento transversal. Importante registrar que os trabalhos citados neste parágrafo foram desenvolvidos para o caso de placas homogêneas.

Muitas das teorias sobre placas (laminadas ou não) são citadas através de siglas, que transmitem (em inglês) suas características principais. Algumas delas serão relacionadas a seguir, segundo Machado (MACHADO, 1992).

CPT – “Classical Plate Theory” – Teoria Clássica de Placas, baseada no modelo de Kirchhoff.

CST - “Constante Shear-Angle Deformation Theory” - Teoria do ângulo de Cisalhamento Constante, baseada nos modelos de Reissner/Mindlin.

CLPT – “Classical Laminated Plate Theory” – Teoria clássica de Placa Laminada. Corresponde a CPT para o caso de placas laminadas.

FSDT – “First Order Shear Deformation Theory” – Teoria de Primeira Ordem. Corresponde a CST para o caso de laminados. O campo de deslocamentos varia linearmente ao longo da espessura.

HSST – “High Order Shear Deformation Theory” - Teoria de Ordem Superior ou Teoria Refinada. Engloba a FSDT, uma vez que o campo de deslocamentos é expandido por polinômios de ordem superior.

LCST – “Layer-wise Constant Shear Angle Theory” – Teoria do ângulo de cisalhamento constante para lâmina discreta. Corresponde a CST, porém aplicada a cada lâmina individualmente.

GLPT – “Generalized Layer-wise Plate Theory” – Teoria generalizada de placa por lâmina discreta. É um caso particular da LCST.

Segundo Reddy (REDDY, 1989), as teorias de placas laminadas podem se agrupadas em três categorias:

- a) Teorias tridimensionais (3 – D), que têm como base a Mecânica do Contínuo e da Elasticidade;
- b) Teorias de Camada Simples Equivalente - (ESL) - “Equivalent Single Layer”;
- c) Teorias do Tipo Camada ou Lâmina Discreta - (LW) – “Layerwise”.

As teorias tridimensionais consideram a geometria de uma placa, não necessariamente laminada, tal como ela é, ou seja, tridimensional. Em termos práticos as soluções através destas teorias são limitadas a poucos casos devido a complexidade de análise.

As teorias de camadas simples equivalentes (ESL) são formulações específicas para laminados, consideram a placa bi-dimensional, e encerram as três suposições seguintes. Cada

lâmina é elástica; o laminado é considerado como uma única placa homogênea, e está submetido a um estado plano de tensões.

O grupo de teorias do tipo Camada ou Lâmina discreta é também conhecido como Multi-lâmina. Nestas teorias o laminado é considerado tal como é: constituído por lâminas individuais empilhadas. Aqui o ângulo de rotação da normal varia de lâmina para lâmina, e o campo de tensões interlaminares é precisamente representado.

Os trabalhos de Pagano e Whitney, (PAGANO, 1969), (WHITNEY & PAGANO, 1970), que se baseiam na Elasticidade 3 – D, são constantemente lembrados como de grande importância para determinar soluções analíticas para certos tipos de placas ortotrópicas laminadas.

A mais simples das teorias classificadas por Reddy na categoria (ELS) é a Teoria Clássica de Placa Laminada – (CLPT). Trabalhos como o de Yang, Norris e Stavsky (1966), figuram como pioneiros na modelagem da referida teoria. Trabalhos de Pagano (PAGANO, 1969) e Whitney & Pagano (WHITNEY & PAGANO, 1970) sugeriram a não utilização dessa teoria para laminados, em virtude da mesma desprezar os efeitos cisalhantes. Na verdade, a própria CPT é restrita para o caso de placas de pequena espessura.

A teoria de primeira ordem FSDT inclui os efeitos cisalhantes na análise, e seu nome advém da ordem dos polinômios (lineares) que descrevem o campo de deslocamento. Interessante destacar que foi a teoria CPT que possibilitou o surgimento da teoria FSDT.

As chamadas teorias de ordem superior – HSST – tiveram início a partir de trabalhos de Whitney & Pagano (WHITNEY & PAGANO, 1970).

Dentre muitos nomes que contribuíram com as teorias do tipo camada, cita-se os pesquisadores Reissner (REISSNER, 1984), e Reddy (REDDY, 1989).

Cho (CHO et al., 1997) classificam as teorias sobre laminados em três categorias: teorias da camada simples equivalente, teorias do tipo camada, e teorias zig-zag. A diferença em relação à classificação de Reddy, é a introdução de uma nova categoria de teorias sobre laminados, denominada de “zig-zag”, que por sua vez se divide em duas sub categorias, conforme descrito a seguir.

FZZT – “first order zig-zag theory” – teoria zig-zag de primeira ordem, desenvolvida por DiSciuva (DISCIUVA, 1985). Nesta teoria os deslocamentos no plano do laminado são lineares e contínuos ao longo da espessura; e o total de graus de liberdade é apenas cinco, independente do número de camadas. Segundo Cho (CHO et al., 1997), esta teoria tem demonstrado acurácia em muitos casos, especialmente para laminados simétricos.

HZZT – “higher-order zig-zag theory” - teoria zig-zag de ordem superior. Dentre aqueles que contribuíram para esta teoria, aparecem os nomes de Cho (CHO & PARMETER, 1993), Averill (AVERILL & YIP, 1996), entre outros. Nesta teoria, foram corrigidos alguns problemas verificados na teoria FZZT, como por exemplo, ineficácia para laminados não simétricos.

### **2.3.2 Uma teoria de ordem superior simplificada para compósitos laminados**

A teoria de ordem superior simplificada, proposta por Reddy, (REDDY, 1984) considera a deformação cisalhante do laminado, mantendo o número de variáveis dependentes desconhecida igual ao caso de primeira ordem. Uma nova teoria para laminados se justifica em virtude da teoria clássica tornar-se ineficiente quando a razão do módulo de cisalhamento transversal é muito grande (em torno de 25 a 40), em vez de 2,6 para um típico material isotrópico, (REDDY, 1984). Esta não foi a primeira teoria a considerar a deformação cisalhante numa placa, outras teorias foram publicadas antes, que serviram de base para o trabalho de Reddy. A ineficiência destas teorias anteriores, por exemplo, Reissner-Mindlin, residem no fato de que é introduzida uma variável adicional desconhecida na teoria linear, com uma força adicional ao longo da espessura. Estas teorias de deformações cisalhantes não satisfazem as condições de contorno para a tensão cisalhante na base e no topo da placa, que deveria ser nula, e com valores diferentes de zero para qualquer outra parte ao longo de sua espessura. Por conta disto, faz-se necessário a introdução de um fator de correção de cisalhamento ao longo da espessura do laminado.

A teoria de Reddy, além de considerar a deformação transversal cisalhante, considera ainda que a mesma varia parabolicamente ao longo da espessura do laminado, não havendo assim necessidade de introdução do fator de correção de cisalhamento para o cálculo das

tensões cisalhantes transversais. Reddy afirma que as teorias que se baseiam em equações de equilíbrio de primeira ordem como as de Levinson, (LEVINSON, 1980) e Murthy, (MURTHY, 1981) são inconsistentes porque o campo de deslocamentos usado é derivado a partir do princípio dos deslocamentos virtuais. Reddy afirma ainda que a forma correta das equações diferenciais e condições de contorno para qualquer teoria de campo de deslocamento não são conhecidas sem o uso do princípio dos trabalhos virtuais.

Assim a teoria de Reddy se diferencia em dois aspectos daquelas por ele citadas Primeiro, ao considerar na derivação tanto campos de deslocamentos, como equações de equilíbrio, e segundo, por desenvolver seu trabalho para compósito laminado anisotrópico.

## **2.4 Soluções Via o Método dos Elementos Finitos**

Surgido nos anos 50 do século passado, o Método dos Elementos Finitos é um dos mais difundido para a obtenção de soluções aproximadas para problemas de valor de contorno. De uma forma simplificada, o MEF, consiste em subdividir o domínio do meio contínuo numa quantidade finita de subdomínios. Cada subdomínio é considerado um elemento finito que, uma vez conectado aos outros através dos chamados pontos nodais, formam uma malha, cobrindo todo o domínio do contínuo. Não é difícil imaginar que estes elementos podem assumir diferentes “tamanhos” e geometrias, (ZIENKIEWICZ & TAYLOR, 1989).

Mesmo não havendo a menor pretensão de se fazer aqui uma revisão bibliográfica do MEF, citam-se alguns autores que entre outros, contribuíram para o desenvolvimento do método. Bathe (BATHE, 1996) relaciona alguns nomes conforme segue: (COURANT, 1943), que trabalhou a questão matemática do método; (SYNGE, 1957), efetuou aplicação do método à física; e (ARGYRIS, 1965), um dos pioneiros em utilizar o MEF na engenharia. Noor (NOOR, 1991) publicou uma coletânea de bibliografias de livros e monografias sobre Elementos Finitos.

## **2.5 Modelagem via elementos finitos de materiais compósitos laminados**

São inúmeros os trabalhos publicados sobre aplicações de Elementos Finitos para solução de laminados, de forma que seria impraticável revisá-los todos neste trabalho. Assim, alguns autores são relacionados, cujos trabalhos foram importantes para esta pesquisa. O assunto rendeu inclusive algumas teses de doutorado, (BYRD, 1988), (ABDALLA, 1992), e uma infinidade de artigos.

Tenek (TENEK, 1998) analisa, via elementos finitos, estruturas laminadas como placas, cascas e vigas.

Muitos artigos exploraram um tipo especial de elemento finito triangular, denominado de DST - “Discrete Shear Triangle”, elemento de três nós, com três graus de liberdade em cada nó. A característica importante desta formulação, é que o elemento é livre do fenômeno conhecido por travamento ou “locking” de cisalhamento transversal. Lardeur e Batoz (LARDEUR & BATOZ, 1989) foram os responsáveis pela formulação consagrada.

Abdalla publicou uma série de artigos nos últimos dez anos, sobre análise de placas e vigas tendo sempre como característica específica a notação fisicamente interpretável *Strain Gradient* (ABDALLA & DOW, 1994), (ABDALLA, 1995), (ABDALLA & MACHADO, 1999), (ABDALLA et. al., 2002).

## **2.6 Modelagem via elementos finitos de vigas laminadas**

Existem três métodos para resolução de problemas referentes a laminados, ou mais especificamente, vigas laminadas, a saber: teoria clássica da elasticidade, extensão da mecânica dos materiais, e aproximação variacional. (YUAN, 1989).

Um novo elemento finito para vigas de compósito laminado, desenvolvido por YUAN, considera graus de liberdade referente à rotação para cada lâmina, mas não considera graus de liberdade adicional para deslocamentos axial e transversal, além daqueles necessários para uma única lâmina. O presente elemento inclui deformações cisalhantes, mas não considera escorregamento interfacial, nem delaminação. Pode ser usado em vigas curtas

contendo muitas lâminas. Na medida que a quantidade de lâminas aumenta, basta acrescentar apenas graus de liberdade de rotação, não sendo necessário adicionar graus de liberdade axial ou lateral. Isto permite aplicações para vigas com muitas lâminas diferentes sem acréscimo no número de variáveis.

YUAN utiliza uma expressão cúbica para o deslocamento lateral ( $v$ ), e expressão quadrática para o deslocamento axial ( $u$ ) e rotação ( $q$ ), numa seção perpendicular ao eixo  $z$ , conforme as funções de forma.

$$u = a_1 + a_2z + a_3z^2 \quad (2.1)$$

$$v = a_4 + a_5z + a_6z^2 + a_7z^3 \quad (2.2)$$

$$q = a_8 + a_9z + a_{10}z^2 \quad (2.3)$$

Para uma lâmina, o elemento possui cinco nós, sendo dois nas extremidades do elemento, dois pontos interiores, e um quinto ponto (também interior) no meio do elemento. Apenas os dois nós das extremidades do elemento possuem graus de liberdade referentes ao deslocamento axial, lateral e rotação. Os dois nós interiores possuem apenas deslocamentos lateral, e o nó central representa deslocamento axial e rotação. Uma característica do modelo proposto por YUAN, é que o nó não está geometricamente determinado por meio de um ponto. Uma viga composta de  $n$  lâminas possui  $3n + 7$  graus de liberdade.

Entre outros autores que publicaram trabalhos sobre elementos finitos para análise de uma viga laminada aparecem os nomes seguintes, Campos (CAMPOS et al, 1999) e Abdalla (ABDALLA & MACHADO, 1999).

Campos et al propõe um elemento finito linear, com três nós e oito graus de liberdade para análise estática e dinâmica de vigas laminadas ortotrópicas. Para deslocamento axial utiliza elemento hermitiano de primeira ordem, e para deslocamentos vertical e rotação utiliza um elemento lagrangeano de segunda ordem. Uma malha com  $n$  elementos possui  $5n + 3$  graus de liberdade. A equação (2.4) mostra o vetor deslocamento nodal  $\mathbf{d}$ , onde os subscritos denotam os nós do elemento. O elemento desenvolvido por Campos é capaz de

descrever flexão, cisalhamento e deformação normal, bem como inclui efeitos inerciais para problemas planos. A equação (2.4) apresenta os graus de liberdade do elemento proposto por Campos.

$$\{ \mathbf{d} \} = \{ u_1 \quad w_1 \quad q_1 \quad q_2 \quad u_2 \quad u_3 \quad w_3 \quad q_3 \}^T \quad (2.4)$$

Abdalla et al desenvolve um elemento de viga de Timoshenko com dois nós e seis graus de liberdade, a saber: deslocamento axial, deslocamento vertical e rotação, utilizando a notação fisicamente interpretável *Strain Gradient*. Termos espúrios inerentes a formulação são eliminados a priori. A equação (2.5) mostra o vetor  $\mathbf{d}$  de deslocamentos nodais, onde os sub-escritos representam os nós do elemento.

$$\{ \mathbf{d} \} = \{ u_1 \quad w_1 \quad q_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad q_2 \}^T \quad (2.5)$$

Este trabalho procura validar o elemento proposto por Abdalla, de modo que se adota a teoria proposta por ele. A escolha do elemento proposto por Abdalla em detrimento de outras teorias de ordem superior, é que o objetivo do trabalho é evidenciar os efeitos do cisalhamento parasítico, quando a análise é feita com e sem termos espúrios. Efeitos estes perfeitamente evidenciados através do elemento desenvolvido por Abdalla.

## 2.7 Erros de Modelagem

Uma importante preocupação na comunidade de pesquisadores e usuários do método dos elementos finitos já há várias décadas é a eliminação ou redução de erros de modelagem, que podem ser erros inerentes à formulação de certos elementos finitos ou erros devidos à falhas na discretização de um determinado problema (BYRD, 1988). Erros inerentes à formulação surgem naturalmente e estão associados aos polinômios adotados como funções aproximadoras. A causa imediata é o emprego de polinômios incompletos e também de polinômios cujas ordens sejam inconsistentes com a teoria do problema que está sendo

modelado (ABDALLA, 1992). Como exemplo típico, cita-se o caso do quadrilátero de quatro nós para análise de problemas planos. Em malhas compostas por este elemento, ocorre o fenômeno de enrijecimento artificial causado por termos espúrios de cisalhamento parasítico. Sendo o enrijecimento artificial uma deficiência na magnitude dos resultados fornecidos, fica classificado como erro quantitativo. Erros quantitativos são geralmente reduzidos quase integralmente pelo refino de malha.

O cisalhamento parasítico se manifesta pela presença de termos de deformação normal nas expressões de distorção angular de elementos finitos formulados à partir de polinômios incompletos. O enrijecimento artificial ocorre pelo aumento de energia de deformação associada à distorção angular durante a flexão (DOW & BYRD, 1988). Em quadriláteros de quatro nós, este tipo de erro pode ser resolvido através da subintegração da matriz de rigidez (ZIENKIEWICZ & TAYLOR, 1989). No entanto, em quadriláteros de oito nós, a subintegração corrige os efeitos de cisalhamento parasítico, porém introduz modos de energia de deformação nula através da não integração de termos essenciais na modelagem. Através deste erro, modos de deformação fisicamente legítimos não podem ser reproduzidos pelo elemento (DOW & ABDALLA, 1994).

Na análise de compósitos laminados, além de erros quantitativos, ou enrijecimento artificial, cisalhamento parasítico também causa erros na forma de algumas soluções, assim como na direção de deslocamentos e deformações. Este tipo de erro, portanto, é classificado como erro qualitativo

Erro qualitativo foi definido originalmente no contexto da análise de placas de compósitos laminados (ABDALLA, 1992), onde observou-se que nem sempre podem ser removidos pelo refino de malha. Ao contrário, verificou-se que erros qualitativos podem ser aumentados pelo refino de malha. Posteriormente, verificou-se a presença de erros qualitativos na análise de vigas de compósitos laminados (ABDALLA & MACHADO, 1999). No presente trabalho, esse assunto é investigado com mais profundidade.

## CAPÍTULO 3

### 3 DESENVOLVIMENTOS

#### 3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é propiciar o referencial teórico necessário ao bom entendimento deste trabalho, a saber: 1) elementos finitos; 2) materiais compósitos laminados, especificamente placas e vigas e 3) notação *Strain Gradient*.

Cada um dos três itens enumerados serão devidamente teorizados; para, em seguida, se acrescentarem algumas considerações de ordem prática específica para este trabalho. Em relação aos laminados, uma teoria será eleita para análise no próximo capítulo. Quanto aos elementos finitos haverá a descrição da formulação adotada. A notação *Strain Gradient* será exemplificada através do estudo de uma placa. Julga-se importante esta ilustração preliminar da notação *Strain Gradient* porque se acredita que um exemplo adicional ajudará na compreensão do leitor não familiarizado com a notação, que é ainda pouco divulgada.

#### 3.2 Método dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é uma técnica de análise numérica para obtenção de soluções aproximadas em problemas de valor de contorno, sendo aplicado a uma grande variedade de problemas de engenharia. Uma das primeiras publicações sobre MEF ilustra sua aplicação na análise de tensões em estruturas aeronáuticas, mas sua utilização estendeu-se rapidamente para outros campos da engenharia, (HUEBNER, 1995).

O MEF consiste em dividir (discretizar) o domínio de solução do contínuo em uma quantidade finita de subdomínios simples, denominados elementos finitos. Estes elementos são representados matematicamente quase sempre por expansões polinomiais, denominadas funções de forma do elemento. O conjunto destes elementos, que podem assumir as mais variadas formas, é denominado malha. A solução global é obtida pelo somatório das soluções locais de cada elemento.

Um elemento finito pode ser unidimensional, bidimensional, ou tridimensional. A figura 3.1, abaixo, ilustra alguns tipos de elementos finitos. Da esquerda para a direita: unidimensional de dois nós, triangular de três nós, quadrilátero de nove nós, e tridimensional de oito nós. Uma classe especial de elementos finitos, denominados isoparamétricos, permite grandes distorções geométricas, inclusive com curvamento de lados.

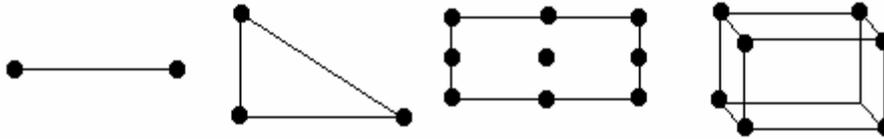


Figura 3.1 Elementos finitos

A fundamentação do método dos elementos finitos conta com três etapas distintas: sua concepção matemática, aplicações em análise física, e sua utilização na engenharia.

A formulação matemática do MEF surgiu, por volta de 1943, do interesse em solucionar problemas de valor de contorno. Mais precisamente buscava-se solução aproximada para limites inferior e superior em problemas de autovalores. Já os físicos buscavam funções aproximadas para representar funções do contínuo. Os engenheiros por sua vez, estavam preocupados com a análise de tensões em estruturas, por volta da primeira metade dos anos 50 (HUEBNER, 1995).

Na segunda metade dos anos de 1960, o método dos elementos finitos estava consolidado como uma ferramenta eficaz na análise de estruturas, (OLIVEIRA, 1971 a,b). Hoje o MEF é largamente empregado em diversos ramos da engenharia, principalmente nas engenharias civil, mecânica e aeroespacial. Atualmente, as pesquisas do método concentram-se em problemas não lineares em geral, plasticidade estática e dinâmica, modelamento micro e macromecânico de materiais, entre eles os compósitos, para citar algumas áreas, (TENEK & ARGYRIS, 1998).

A eficácia do MEF depende de se conceber uma boa formulação para o problema a ser analisado, já que o mesmo jamais dará mais informações que aquelas contidas no modelo matemático (BATHE, 1996).

Uma vez escolhido um modelo, resta verificar se o mesmo converge para a solução correta quando se refina a malha do elemento. Para que haja convergência com o refino da malha, as três condições seguintes precisam ser observadas.

- 1) Os elementos podem ser tão pequenos que cada ponto do domínio da solução possa sempre estar dentro de um elemento.
- 2) Toda malha prévia possa estar contida nas malhas refinadas
- 3) A interpolação das funções de forma podem manter-se imutáveis durante o processo de refinamento de malha (*HUEBNER, 1995*).

A acurácia da solução de um problema via Elementos Finitos pode ser verificada de duas formas. Constatada a partir da convergência de um problema cuja solução correta seja conhecida. A desvantagem deste procedimento é que o mesmo exige que se conheça a solução do problema. Outra maneira é conhecida como análise de erro a - posteriori, e que utiliza apenas a solução via elementos finitos para determinar a acurácia da solução (*BYRD, 1988*), (*HUEBNER, 1995*).

Alguns tipos de elementos produzem erros de modelagem quando se analisam seus campos de deslocamentos e campos de deformações. Dentre esses elementos problemáticos, cita-se o quadrilátero de quatro nós, que causa a não unicidade das representações de deformações em consequência de suas funções aproximadoras para deslocamentos serem incompletas (*DOW & ABDALLA, 1994*).

A incompletude dos polinômios aproximadores dos campos de deslocamentos dos quadriláteros causa deficiência de modelagem denominada cisalhamento parasítico. Essa deficiência se manifesta pela presença de termos de deformação normal presentes nas expressões de distorção angular dos quadriláteros. Esses termos espúrios causam enrijecimento artificial do modelo pelo aumento da energia de deformação associada à distorção angular quando ocorre a flexão. Esse aumento é indevido do ponto de vista físico, e, portanto, é denominado cisalhamento parasítico. Em quadriláteros de 4 nós este tipo de erro pode ser resolvido através da redução da ordem de integração, (*ZIENKIEWICZ and TAYLOR, 1989*).

Em quadriláteros de 8 nós a redução da ordem de integração corrige os efeitos do cisalhamento parasítico, mas introduz-se outro tipo de erro, conhecido *por* modos espúrios de energia. O emprego da notação *Strain Gradient* garante a remoção dos termos espúrios sem introduzir outras deficiências, (DOW & ABDALLA, 1994). A notação *Strain Gradient* será descrita posteriormente neste capítulo.

O elemento finito de viga descrito no capítulo quatro é formulado em notação *Strain Gradient*.

### **3.3 Materiais Compósitos**

A grande demanda mundial por materiais que cumpram diferentes exigências como, por exemplo, serem ao mesmo tempo resistentes e leves, duráveis e baratos exigiu dos engenheiros, mais acentuadamente nos últimos cinquenta anos, o desenvolvimento de novas soluções.

Os materiais fabricados a partir da combinação de dois ou mais materiais diferentes são chamados de materiais compósitos. Dentre os materiais compósitos, existem os laminados que devido suas características mecânicas são largamente utilizados na indústria. Apenas para citar dois exemplos, materiais compósitos são utilizados na confecção de varas para pesca, e em componentes da indústria aeronáutica.

Compósitos são formados a partir da combinação de diferentes materiais, em escala macroscópica, formando um novo material com propriedades mecânicas próprias. Uma classe importante é a dos compósitos fibrosos obtidos pela impregnação de fibras de um determinado material em uma matriz de um outro material. Se lâminas reforçadas com fibras forem ligadas entre si através de empilhamento, obtém-se um tipo de compósito largamente utilizado denominado compósito laminado reforçado com fibras, ou simplesmente compósitos laminados. Assim, tornam-se praticamente ilimitadas as combinações possíveis para se produzir um material compósito, possibilitando ao projetista criar materiais com características mecânicas apropriadas a cada necessidade específica.

No Egito antigo, percebeu-se que os tijolos adquiriam maior integridade estrutural se fosse adicionado palha cortada ao barro. Os guerreiros Samurais do Japão também conheciam

as vantagens de se fabricar espadas a partir de laminados metálicos (VINSON & SIERAKOWSKI, 1986), (JONES, 1975).

A própria natureza utiliza-se de compósitos quando necessita otimizar as propriedades mecânicas de certas estruturas. Cita-se como exemplo o estômago humano, cuja parede é composta por camadas distintas de tecido nas quais os músculos possuem orientações transversais (NETTER, 1998).

Dentre outras vantagens dos materiais compósitos cita-se a redução de peso, aumento da resistência e/ou rigidez, o desempenho, durabilidade, isolamento térmico, condutividade térmica, manutenção das estruturas. Conclui-se daí que os compósitos são úteis em praticamente todos os ramos da manufatura, em especial nas indústrias aeronáutica e aeroespacial, pela necessidade de materiais leves e resistentes ao mesmo tempo. A superioridade dos compósitos em relação aos materiais homogêneos abre novos campos de trabalho para os engenheiros que, além de selecionar materiais, passam a ter a função de projetá-los de acordo com os requisitos específicos de cada necessidade (JONES, 1975).

A primeira aeronave a utilizar material compósito foi o Boeing 707, que possuía em torno de dois por cento de fibra de vidro. A partir daí outros aviões passaram a utilizar maior porcentagem de material composto em sua fuselagem, e a previsão para este século 21 é que os aviões contenham mais de 65% de compósitos avançados (TENEK & ARGYRIS, 1998).

Em relação à estrutura, os compósitos são estudados em três níveis distintos. Nível básico ou elementar no qual é considerada a constituição atômica dos compósitos. Nível microestrutural onde se considera a disposição molecular do material. Os compósitos são estudados, nestes dois níveis, pela ciência dos materiais. O terceiro nível é o macroestrutural onde interessa ao pesquisador apenas o comportamento mecânico do material, sem preocupar-se com sua constituição molecular (VINSON & SIERAKOWSKI, 1986).

Neste trabalho considera-se o compósito apenas no terceiro nível citado acima, ou seja, o nível macroestrutural. O que interessa aqui é apenas o elemento estrutural resultante, constituindo estruturas mecânicas diversas como vigas, placas, cascas, etc.

Do ponto de vista macroestrutural, os compósitos são classificados em fibrosos, particulados, laminares, e floculados, que são constituídos respectivamente por fibras, partículas, lâminas e flocos.

Dos materiais compósitos descritos no parágrafo anterior, um dos mais importantes, do ponto de vista das aplicações, são os compósitos fibrosos. Consegue-se com tais materiais combinar alta resistência e/ou rigidez, e leveza. Os compósitos fibrosos são, do ponto de vista da aplicação das fibras, classificados em compósitos de aplicação simples e aplicações múltiplas. Considera-se compósito de aplicação simples aquele no qual as fibras ou reforços são aplicados em ângulos específicos num meio chamado matriz, constituído de um material diferente das fibras, e em geral de espessura fina, denominada lâmina pré-impregnada. Os compósitos fibrosos de aplicação múltipla são formados pelo empilhamento de duas ou mais lâminas, perfeitamente coladas uma nas outras, formando o que se chama de laminado (VINSON & SIERAKOWSKI, 1986).

### **3.4 Compósitos Laminados**

Como foi descrito na seção anterior, o laminado é um tipo particular de compósito, formado pelo empilhamento de pelo menos duas lâminas pré - impregnadas de um material de reforço denominado fibra, de forma que não haja escorregamento entre as lâminas. A orientação angular das fibras pode variar em cada lâmina, possibilitando que se obtenham as propriedades mecânicas desejadas nas diferentes direções do material, como, por exemplo, resistência e/ou rigidez. As lâminas quando empilhadas convenientemente formam componentes estruturais, com propriedades mecânicas especiais. Do ponto de vista da macromecânica, um material laminado é considerado homogêneo, comportando-se como se fosse constituído de uma única lâmina equivalente.

#### **3.4.1 Teoria Macromecânica de uma Lâmina**

Rigorosamente, um material laminado pode ser caracterizado, num primeiro momento, para efeito de estudo de suas relações constitutivas, como um material anisotrópico. Materiais anisotrópicos são aqueles que apresentam características mecânicas direcionais, como por exemplo, a madeira. A relação entre tensão e deformação é dada pela lei de Hooke generalizada, e expressa através da equação:

$$\sigma = C \varepsilon \quad (3.1)$$

onde  $\sigma$  é o vetor de tensões,  $C$  a matriz constitutiva do material e  $\varepsilon$  o vetor de deformações (JONES, 1975).

Na prática, cada lâmina pode ser constituída de um material diferente, assim como possuir orientações específicas para suas fibras, afetando em ambos os casos as propriedades materiais da matriz constitutiva. Supondo, uma lâmina em formato retangular de lados  $a$  e  $b$  cujas fibras têm uma orientação de um ângulo  $\theta$  em relação ao lado  $a$ , medidos no sentido anti-horário. Esta estrutura terá propriedades mecânicas diferentes, se avaliadas em direções distintas. Por exemplo, como avaliar as tensões do material citado, na direção paralela ao lado  $a$ ? Esta questão exige que se faça uma transformação de coordenadas entre as coordenadas materiais da lâmina e as coordenadas globais  $x$ , e  $y$  que seria inclusive um referencial único para todo o laminado, conforme, mostra a figura 3.2.

A equação (3.2) transforma as tensões ou deformações do referencial global para o referencial material, através da matriz de transformação  $[T]$ , definida pela equação (3.3).

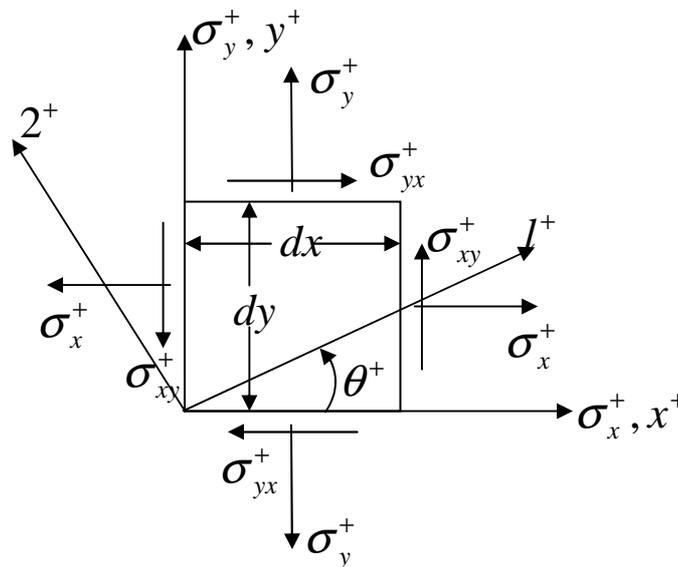


Figura 3.2 - Transformação entre Coordenadas Globais e Materiais

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \quad e \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2mn \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2mn \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -mn & mn & 0 & 0 & 0 & (m^2 - n^2) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Os elementos  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  da matriz de transformação  $[T]$ , são respectivamente  $\cos \theta$  e  $\sin \theta$ , sendo  $\theta$  o ângulo formado pelo eixo da coordenada global, e o eixo da coordenada material, considerando o sentido anti-horário.

Resolvendo as equações (3.2) para as coordenadas globais, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad e \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (3.4)$$

Apresenta-se a seguir a lei de Hooke, que relaciona tensão e deformação, para uma lâmina, em termos das coordenadas materiais.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.5)$$

onde

$$Q_{11} = E_{11}(1 - \nu_{23}\nu_{32})/\Delta, \quad Q_{22} = E_{22}(1 - \nu_{31}\nu_{13})/\Delta$$

$$Q_{33} = E_{33}(1 - \nu_{12}\nu_{21})/\Delta, \quad Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12}$$

$$Q_{12} = (\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})E_{11}/\Delta = (\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13})E_{22}/\Delta$$

$$Q_{13} = (\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})E_{11}/\Delta = (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23})E_{22}/\Delta$$

$$Q_{23} = (\nu_{32} + \nu_{12}\nu_{31})E_{22}/\Delta = (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13})E_{33}/\Delta$$

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}$$

Sendo que  $E_{ij}$  e  $G_{ij}$  são módulos de elasticidade, longitudinais e transversais respectivamente, e  $\nu_{ij}$  coeficientes de Poisson.

A matriz  $[Q]$  da equação (3.5) é a mesma matriz  $[C]$  da equação (3.1), sendo que a notação conforme a equação (3.5) é amplamente utilizada para materiais compósitos, (VINSON & SIERAKOWSKI, 1986).

Resolvendo a equação (3.5) para as coordenadas globais, tem-se

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & 2\bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & 2\bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & 2\bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{Q}_{44} & 2\bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\bar{Q}_{45} & 2\bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & 2\bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.6)$$

onde,

$$[\bar{Q}] = [T]^{-1}[Q][T]$$

ou, mais explicitamente,

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ \bar{Q}_{13} &= Q_{13}m^2 + Q_{23}n^2 \\ \bar{Q}_{16} &= -mn^3Q_{22} + m^3nQ_{11} - mn(m^2 - n^2)(Q_{12} + Q_{66}) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ \bar{Q}_{23} &= n^2Q_{13} + m^2Q_{23} \\ \bar{Q}_{33} &= Q_{33} \\ \bar{Q}_{26} &= -m^3nQ_{22} + mn^3Q_{11} + mn(m^2 - n^2)(Q_{12} + 2Q_{66}) \\ \bar{Q}_{36} &= (Q_{13} - Q_{23})mn \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \\ \bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44})mn \\ \bar{Q}_{55} &= Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2 \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12})m^2n^2 + Q_{66}(m^2 - n^2)^2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.4.2 Teoria Macromecânica para Compósitos Laminados

A teoria macromecânica do laminado adotado neste trabalho é baseada em quatro hipóteses, a seguir indicadas.

a) Seções planas normais à superfície média do laminado permanecem planas, mas não necessariamente normais após ou durante uma flexão.

b) As lâminas estão perfeitamente coladas, de modo que não há deslizamento de uma lâmina sobre outra. Isto permite que se avalie o laminado como se o mesmo fosse composto de um material homogêneo, embora com características especiais, como por exemplo, a diferença de tensões entre as lâminas.

c) As componentes de tensão e deformação normais à superfície média do laminado são muito pequenas, portanto consideradas desprezíveis. Isto significa que o interior do laminado se encontra sob um estado plano de tensões.

d) A superfície média do laminado é extensível, caracterizando comportamento de membrana. (JONES, 1975).

Neste trabalho é adotada a função de ajuste  $f(z)$ , para compensar o fato de que as tensões não são contínuas nas interfaces das lâminas. A referida função é descrita com mais detalhes na próxima seção.

### 3.4.3 Estruturas de Compósitos Laminados

A placa retangular laminada, (ver figura 3.3), é uma estrutura plana de lados **a** e **b** e espessura **h**, pequena em relação a **a** e **b**, formada por pelo menos duas lâminas perfeitamente coladas de modo que não haja qualquer escorregamento entre as mesmas. Quando a placa é submetida a um carregamento transversal, ocorrem deformações e deslocamentos transversais constantes ao longo da espessura, e tensões que variam de lâmina para lâmina. Uma placa está sujeita ainda a rotações  $p$  e  $q$  em relação aos eixos coordenados  $x$  e  $y$ , respectivamente.

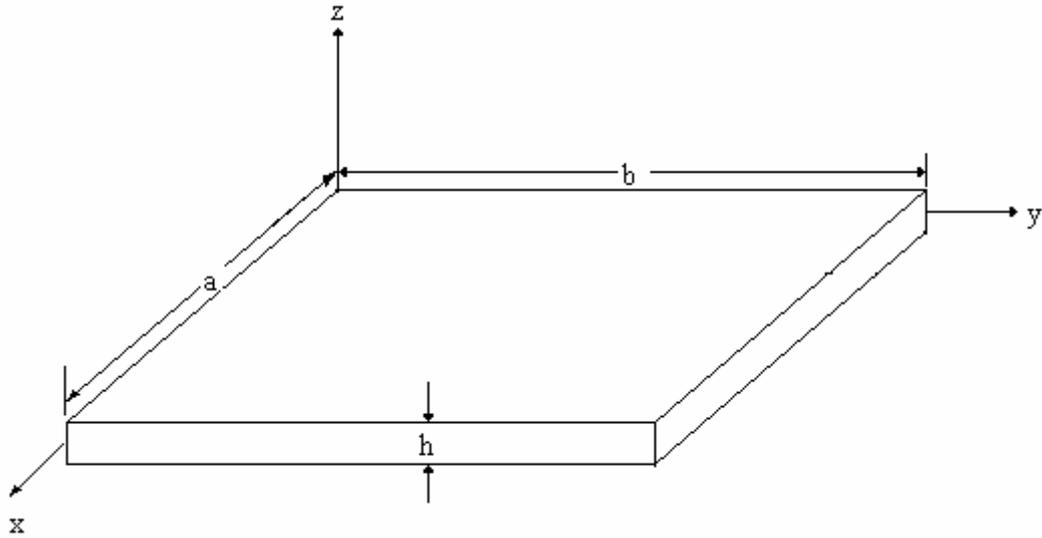


Figura 3.3 Placa retangular típica

As componentes de deslocamentos que a placa pode desenvolver são  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$  nas direções  $x$  e  $y$  do plano, e a componente de deslocamento normal  $w(x, y)$  na direção da espessura da placa (JONES, 1975).

As relações cinemáticas de uma placa retangular laminada são as seguintes (VINSON & SIERAKOWSKI, 1986).

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) + z q(x, y) \quad (3.8)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) + z p(x, y) \quad (3.9)$$

$$w(x, y) = w(x, y) \quad (3.10)$$

$$p(x, y) = -\frac{\partial v(x, y, z)}{\partial z} \quad (3.11)$$

$$q(x, y) = -\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} \quad (3.12)$$

onde  $u_0$  e  $v_0$  são deslocamentos da superfície média em seu próprio plano, que geram as deformações de membrana do laminado. Os termos  $p$  e  $q$  são as rotações em relação aos eixos  $x$  e  $y$  respectivamente, e  $z$  é a altura da placa.

A expressão 3.13, (VINSON & SIERAKOWSKI, 1986) representa o vetor de deformação de uma lâmina típica.

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_{x0} + zk_x \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{y0} + zk_y \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{yz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xz} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_{xy0} + k_{xy}z \end{Bmatrix}_k \quad (3.13)$$

onde as curvaturas são dadas pelas expressões abaixo

$$k_x = \frac{\partial q}{\partial x}, \quad k_y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad k_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (3.14)$$

Observa-se que não existe a componente de deformação  $\boldsymbol{\varepsilon}_{z0}$ , no vetor de deformações em (3.13), pois a teoria clássica das placas considera desprezível a altura  $h$  da estrutura. Assim o deslocamento vertical é  $w = w(x, y)$ , ou seja é função de  $x$  e  $y$  apenas. Logo  $\boldsymbol{\varepsilon}_{z0}$ , que seria a derivada parcial de  $w$  em relação a variável  $z$ , é igual a zero, (VINSON & SIERAKOWSKI, 1986).

Como as tensões variam de lâmina para lâmina do laminado, os cálculos destas tensões teriam que ser efetuados para cada lâmina, e cada um destes resultados teria de ser analisado a fim de identificarem os pontos críticos. Como isto acarreta um custo computacional muito elevado, e o laminado pode ser considerado como uma placa de uma única lâmina com propriedades especiais, pode-se utilizar as resultantes de tensões que agem na superfície média do laminado, no lugar das próprias tensões. A vantagem desta abordagem é que as resultantes de tensões precisam ser calculadas apenas uma vez, independente do número de lâminas da placa.

A placa laminada possui três resultantes de tensões, **N**, **Q** e **M** que são respectivamente forças existentes no plano do laminado, forças cisalhantes e momentos, por unidade de comprimento, como mostra a figura 3.4.

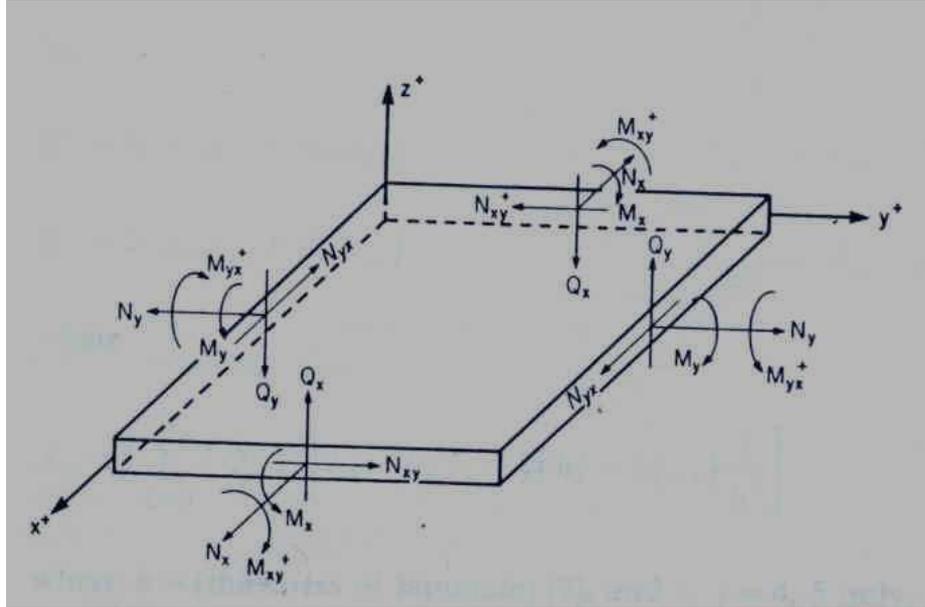


Figura 3.4. Direções positivas para resultantes de tensões.

Para uma lâmina, pode-se classificar as resultantes simplesmente em forças e momentos, por unidade de comprimento, e expressá-las matematicamente conforme segue.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3.15)$$

onde o intervalo de integração é a espessura da lâmina.

Para o laminado, os vetores  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  ; estão expressos nas equações seguintes.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3.16a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3.16b)$$

onde  $n$  é o número de lâminas que compõe o laminado. Levando-se na equação (3.16) a relação constitutiva (lei de Hooke), dada por (3.6),

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{Q} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{K=1}^n \int_{h_{K-1}}^{h_K} \begin{bmatrix} \bar{Q} \\ \bar{Q} \\ \bar{Q} \end{bmatrix}_k \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3.17)$$

onde  $\bar{Q}$  é a matriz de rigidez para cada lâmina.

As forças normais  $\mathbf{N}$  são dadas simbolicamente através da equação (3.18).

$$\{\mathbf{N}\} = [\mathbf{A}] \{\varepsilon_0\} + [\mathbf{B}] \{\mathbf{k}\} \quad (3.18)$$

onde  $[\mathbf{A}]$  é a matriz de rigidez extensional, e  $[\mathbf{B}]$  a matriz de acoplamento de rigidez extensional e de flexão.

O vetor  $\mathbf{M}$  é calculado através da equação (3.17), e o resultado aparece na equação abaixo.

$$\{\mathbf{M}\} = [\mathbf{B}] \{\varepsilon_0\} + [\mathbf{D}] \{\mathbf{k}\} \quad (3.19)$$

onde  $[\mathbf{D}]$  é a matriz de rigidez a flexão.

Para se determinarem as componentes de forças cisalhantes, faz-se necessário a inclusão de uma função de ajuste  $f(z)$ , expressa através da equação (3.20), onde  $z$  é a espessura do laminado, uma vez que se considera que a tensão cisalhante se distribui parabolicamente ao longo da espessura do laminado. Isto se faz necessário para compensar o fato de que as tensões não são contínuas nas interfaces das lâminas, (VINSON & SIERAKOWSKI, 1986). A função em questão é utilizada na expressão (3.23).

$$f(z) = 5/4[1 - (z/(h/2))^2] \quad (3.20)$$

As componentes de forças cisalhantes são calculadas individualmente, conforme segue

$$Q_x = 2(A_{55} \varepsilon_{xz} + A_{45} \varepsilon_{yz}) \quad (3.21)$$

$$Q_y = 2(A_{45} \varepsilon_{xz} + A_{44} \varepsilon_{yz}) \quad (3.22)$$

onde

$$A_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{K=1}^n (\bar{Q}_{ij})_K [h_K - h_{K-1} - \frac{4}{3}(h_K^3 - h_{K-1}^3)] \frac{1}{h^2} \quad i, j = 4, 5 \quad (3.23)$$

A equação (3.23) (VINSON & SIERAKOWSKI, 1986) expressa a rigidez associada aos efeitos do cisalhamento transversal, e considera a distribuição parabólica da resultante de tensões cisalhantes. O termo  $h$  é a espessura do laminado, e os índices  $i$  e  $j$  assumem apenas os valores 4 e 5, como pode ser observado nas expressões (3.21) e (3.22).

### 3.5 Notação Strain Gradient

Elementos Finitos são normalmente formulados por meio de expansões polinomiais, onde os coeficientes destes polinômios não possuem significados físicos aparentes.

A notação Strain Gradient fornece uma interpretação física para os coeficientes da expansão polinomial. Esta notação foi desenvolvida por John O. Dow, professor da University of Colorado at Boulder, que apresentou seus resultados pela primeira vez na 24ª conferência de Estruturas, Dinâmica Estrutural e Materiais, em Nevada, Estado Unidos, no ano de 1983, através do trabalho intitulado “*An Equivalent Continuum Representation of Structures Composed of Repeated Elements*”.

No Brasil, a notação Strain Gradient vem sendo divulgada pelo professor João Elias Abdalla, da PUCPR, que a utilizou em seu trabalho de doutoramento (ABDALLA, 1992), orientado por Dow.

Neste capítulo, a notação Strain Gradient é demonstrada através da formulação de um quadrilátero de quatro nós, onde se pode confirmar a interpretabilidade física dos coeficientes da expansão polinomial, bem como identificar outros elementos físicos na matriz de rigidez  $[K]$ .

#### 3.5.1 Desenvolvimento da Notação Strain Gradient

A notação Strain Gradient será descrita nesta seção através da formulação de um quadrilátero de 4 nós para análise do estado plano. O campo de deslocamentos para este elemento é:

$$u(x,y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (3.24)$$

$$v(x,y) = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy \quad (3.25)$$

Avaliando as equações (3.24) e (3.25) na origem do elemento, temos:

$$u(0,0) = a_1 \quad (3.26)$$

$$v(0,0) = b_1 \quad (3.27)$$

onde (3.26) e (3.27) são movimentos de corpo rígido avaliados na origem.

As deformações normais são obtidas através das derivadas primeiras de **u** e **v**:

$$\epsilon_x(x,y) = a_2 + a_4y \quad (3.28)$$

$$\epsilon_y(x,y) = b_3 + b_4x \quad (3.29)$$

As equações (3.28) e (3.29) quando avaliadas na origem resultam em:

$$\epsilon_x(0,0) = a_2 \quad \epsilon_y(0,0) = b_3 \quad (3.30)$$

A rotação no plano e a distorção angular são dadas, respectivamente, pelas expressões abaixo:

$$r(x,y) = \frac{1}{2}(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y) = \frac{1}{2}(b_2 - a_3 - a_4x + b_4y) \quad (3.31)$$

$$\gamma(x,y) = (\partial u/\partial y + \partial v/\partial x) = a_3 + a_4x + b_2 + b_4y \quad (3.32)$$

Avaliando-se as expressões (3.31) e (3.32) na origem, resulta em:

$$r(0,0) = \frac{1}{2}(b_2 - a_3) \quad (3.33)$$

$$\gamma(0,0) = a_3 + b_2 \quad (3.34)$$

Resolvendo (3.33) e (3.34) para os coeficientes, obtém-se:

$$a_3 = [\gamma_{xy}/2 - r]_0 \quad b_2 = [\gamma_{xy}/2 + r]_0 \quad (3.35)$$

Calculando as derivadas  $\epsilon_{x,y}$  e  $\epsilon_{y,x}$ , denominadas gradiente de deformações, encontra-se  $a_4$  e  $b_4$ :

$$\epsilon_{x,y} = a_4 \quad \epsilon_{y,x} = b_4 \quad (3.36)$$

Assim, foram determinados os conteúdos físicos de todos os coeficientes das expansões de deslocamento **u** e **v**.

Exprimem-se agora os deslocamentos do meio contínuo em termos das grandezas físicas a eles associados:

$$u(x,y) = [u]_0 + [\epsilon_x]_0 x + [\gamma_{xy}/2 - r]_0 y + [\epsilon_{x,y}]_0 xy \quad (3.37)$$

$$v(x,y) = [v]_0 + [\gamma_{xy}/2 + r]_0 x + [\epsilon_y]_0 y + [\epsilon_{y,x}]_0 xy \quad (3.38)$$

Torna-se oportuno registrar aqui nesta seção outra vantagem da notação *Strain Gradient*, que é a questão da análise de convergência. Os requerimentos básicos para que haja a convergência do método dos elementos finitos são que os polinômios possuam movimentos de corpo rígido e deformações constantes. Estas condições tornam se explícitas quando se aplica a notação *Strain Gradient* às expressões de deslocamentos (ABDALLA, 1995).

As expansões polinomiais para as deformações elásticas são dadas por:

$$\epsilon_x(x,y) = [\epsilon_x]_0 + [\epsilon_{x,y}]_0 y \quad (3.39)$$

$$\epsilon_y(x,y) = [\epsilon_y]_0 + [\epsilon_{y,x}]_0 x \quad (3.40)$$

$$\gamma_{xy}(x,y) = [\gamma_{xy}]_0 + [\epsilon_{x,y}]_0 x + [\epsilon_{y,x}]_0 y \quad (3.41)$$

A expressão (3.41) apresenta dois termos,  $[\epsilon_{x,y}]_0$  e  $[\epsilon_{y,x}]_0$ , que não pertencem a expansão em série de Taylor da distorção angular  $\gamma_{xy}$ . Portanto são termos espúrios naquela expressão. A causa do aparecimento destes termos é que as expansões polinomiais do quadrilátero de quatro nós são incompletas. Estes termos espúrios são denominados por cisalhamento parasítico e são responsáveis pelo fenômeno de enrijecimento artificial. A identificação destes termos espúrios, na fase de formulação do elemento, só é possível devido à notação *Strain Gradient*.

Pode-se remover os termos espúrios da expressão da distorção angular  $\gamma_{xy}$  porque os estados de deformação representados pela notação *Strain Gradient* formam uma base linearmente independente.

Eliminando-se o erro da expressão (3.41), tem-se:

$$\gamma_{xy}(x,y) = [\gamma_{xy}]_0 \quad (3.42)$$

O próximo passo é obter uma relação entre os deslocamentos nodais e a base Strain Gradient que governa as deformações do elemento:

$$\mathbf{d} = \Phi \boldsymbol{\varepsilon}_{sg} \quad (3.43)$$

onde  $\mathbf{d}$  é o vetor dos deslocamentos nodais,  $\Phi$  é a matriz de transformação entre as coordenadas nodais e as coordenadas Strain Gradient. A matriz  $\Phi$  contém os vetores linearmente independentes que representam matematicamente o deslocamento ou deformação do elemento finito associado a cada Strain Gradient presente em  $\boldsymbol{\varepsilon}_{sg}$ .

A seguir descreve-se cada componente da equação (3.43):

$$\{\mathbf{d}\} = \{u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4\}^T \quad (3.44)$$

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}_{sg}\} = \{[u]_0 \quad [v]_0 \quad [q]_0 \quad [\varepsilon_x]_0 \quad [\gamma_{xy}]_0 \quad [\varepsilon_y]_0 \quad [\varepsilon_{x,y}]_0 \quad [\varepsilon_{y,x}]_0\}^T \quad (3.45)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & 0 & x_1 y_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_1 & 0 & y_1 & 0 & x_1 y_1 \\ 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & 0 & x_2 y_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 & 0 & y_2 & 0 & x_2 y_2 \\ 1 & 0 & x_3 & 0 & y_3 & 0 & x_3 y_3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_3 & 0 & y_3 & 0 & x_3 y_3 \\ 1 & 0 & x_4 & 0 & y_4 & 0 & x_4 y_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & x_4 & 0 & y_4 & 0 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

As deformações elásticas do contínuo estão associadas a base de Strain Gradient por meio de uma matriz de transformação  $T_{sg}$ , obtida através da derivada da matriz  $\Phi$ , onde as linhas são respectivamente  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$ , e  $\gamma_{xy}$ . A expressão que representa tal relação é:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = T_{sg} \boldsymbol{\varepsilon}_{sg} \quad (3.47)$$

onde

$$T_{sg} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & x_1 & y_1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

A energia de deformação na notação Strain Gradient é obtida através da expressão seguinte (ADBALLA, 1997).

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} d^T \Phi^{-T} T_{sg}^T C T_{sg} \Phi^{-1} d \, d\Omega \quad (3.49)$$

onde  $\Omega$ , é o volume do contínuo e  $C$  a matriz constitutiva do material

A Matriz  $\Phi$  sempre poderá ser invertida por conter vetores linearmente independentes (ABDALLA, 1997).

Como os estados de deformação que o elemento representa independem de seu volume, reescreve-se a expressão (3.49) conforme segue:

$$U = \frac{1}{2} d^T \Phi^{-T} U_M \Phi^{-1} d \quad (3.50)$$

onde

$$U_M = \frac{1}{2} \int_{\Omega} T_{sg}^T C T_{sg} \, d\Omega, \quad (3.51)$$

A expressão (3.51) é conhecida como matriz de energia de deformação, e contém as quantidades de energia associadas aos modos de deformação do elemento. Cada termo da diagonal principal representa a quantidade de energia contida no elemento submetido à deformação pura associada ao Strain Gradient correspondente. Ou seja, quantificam a energia de deformação associada a cada modo separadamente. Os termos fora da diagonal principal quantificam a energia de deformação associada ao acoplamento de dois modos de deformação, associados a dois Strain Gradient distintos.

A seguir apresenta-se a matriz resultante da expressão  $T_{sg}^T C T_{sg}$ :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \nu & y_1 & x_1 y_1 \\ 0 & 0 & 0 & A & A & 0 & x_1 A & y_1 A \\ 0 & 0 & 0 & A & A & 0 & x_1 A & y_1 A \\ 0 & 0 & \nu & 0 & 0 & 1 & y_1 \nu & x_1 \\ 0 & 0 & y_1 & x_1 A & x_1 A & y_1 \nu & AB+C & x_1 y_1 (\nu + A) \\ 0 & 0 & x_1 \nu & y_1 A & y_1 A & x_1 & x_1 y_1 (\nu + A) & AC+B \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

onde  $A = (1-\nu)/2$ ,  $B = x_1^2$   $C = y_1^2$

Por conveniência de notação, define-se a matriz (3.52) pela letra P. Assim, a expressão (3.51), passa a ter o formato:

$$U_M = \frac{1}{2} E/(1 - \nu^2) \int_{\Omega} P \, d\Omega \quad (3.53)$$

A energia de deformação está associada à matriz de rigidez, e pode ser expressa por meio da expressão:

$$U = \frac{1}{2} d^T K d \quad (3.54)$$

Chega-se finalmente na matriz de rigidez, expressa conforme segue:

$$K = \Phi^{-T} U_M \Phi^{-1} \quad (3.55)$$

Através da expressão (3.55) deduz-se a matriz de rigidez de qualquer elemento finito. (ABDALLA, 1997).

## CAPÍTULO 4

### 4 Elemento Finito de Viga para Compósitos Laminados

#### 4.1 Introdução

Este capítulo descreve um elemento finito para análise de vigas de compósitos laminados baseado na notação *Strain Gradient*, (ABDALLA, 1999). A presença de um termo espúrio responsável por cisalhamento parasítico será demonstrada. Os efeitos de cisalhamento parasítico serão demonstrados na análise de vigas através da comparação de modelos com e sem o termo espúrio. A ocorrência de um erro qualitativo no cálculo das tensões de cisalhamento transversal será demonstrada, assim como a magnitude deste erro com o aumento do refino da malha.

O elemento finito desenvolvido possui dois nós e seis graus de liberdade; a saber: deslocamento axial ( $u$ ), deslocamento transversal ( $w$ ), e rotação ( $q$ ); conforme figura 4.1.

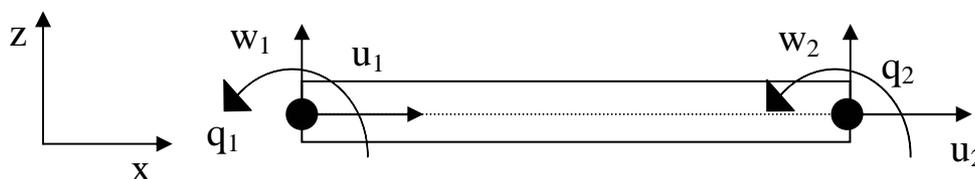


Figura 4.1 Elemento finito de viga.

O elemento é baseado nas hipóteses de viga de Timoshenko descritas anteriormente por ser importante a representação da distorção angular através da espessura do laminado. Essas hipóteses são as seguintes: 1) Seções planas normais à superfície média da viga, permanecem planas, mas não necessariamente normais após a flexão; 2) As lâminas que compõem a estrutura estão perfeitamente coladas, de forma que não há escorregamento entre elas. Isto implica que o comportamento do laminado pode ser definido pelo comportamento de sua superfície média, e, 3) As componentes de tensão normal à superfície média da viga

são desprezíveis, e, portanto ignoradas. Isto significa que o interior da viga laminada está sob estado plano de tensões (ABDALLA et al, 1999).

## 4.2 Viga de Timoshenko

A teoria de viga de Timoshenko tem como base a teoria clássica de viga, ou viga de – Euler-Bernoulli, que por sua vez baseia-se em cinco hipóteses básicas: 1) a seção transversal da viga tem um plano longitudinal de simetria, figura 4.2 (A); 2) o carregamento aplicado atua sobre o plano longitudinal de simetria; 3) uma seção plana originariamente perpendicular ao eixo da viga permanece plana e perpendicular ao eixo da viga após uma deformação, figura 4.2 (B); 4) não ocorre deformação no plano da seção transversal, figura 4.2 (A); e 5) Um elemento de linha  $dx$  da viga, sofre deslocamentos axial  $u(x)$  na direção  $x$ , e  $w(x)$  na direção  $z$ , e sofre uma rotação no plano  $xz$ , que é a derivada de  $w$  em relação a  $x$ , figura 4.2 (C).

A partir das hipóteses citadas no parágrafo anterior, observa-se que a teoria clássica de viga não considera o efeito da deformação de cisalhamento, efeito este que nem sempre pode ser desprezado.

A diferença entre a teoria clássica de viga e a viga de Timoshenko está na terceira hipótese. Na viga de Timoshenko, uma seção plana originariamente perpendicular ao eixo da viga permanece plana após uma deformação, mas não perpendicular como na teoria clássica, ver segmento  $A' C'$  da figura 4.3. Ou seja, a teoria de viga de Timoshenko, considera as deformações de flexão e de cisalhamento. Assim, esta teoria é que mais se aproxima da realidade, e, portanto considerada neste trabalho.

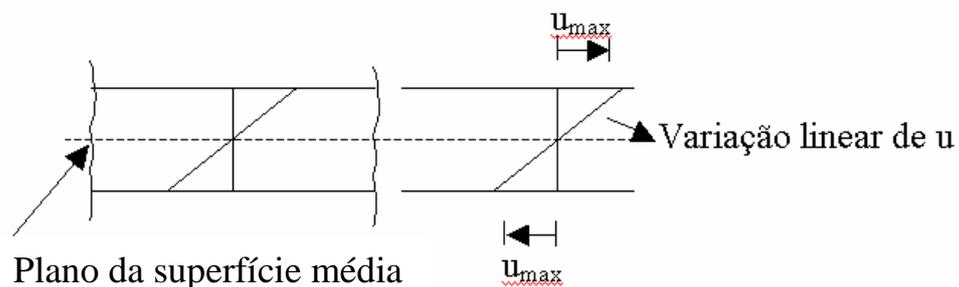


Figura 4.2 (A) Viga de Euler-Bernoulli: variação linear do deslocamento normal

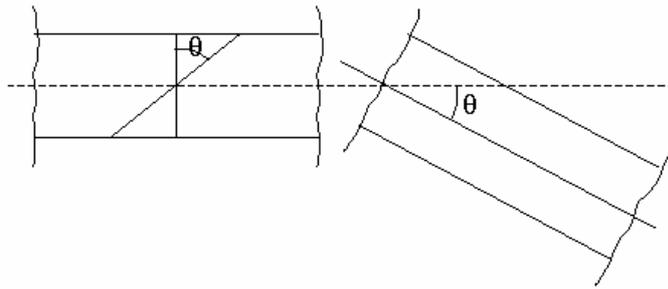


Figura 4.2 (B) Viga de Euler-Bernoulli: rotação

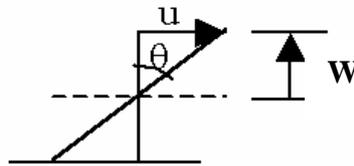


Figura 4.2 (C) Viga de Euler-Bernoulli

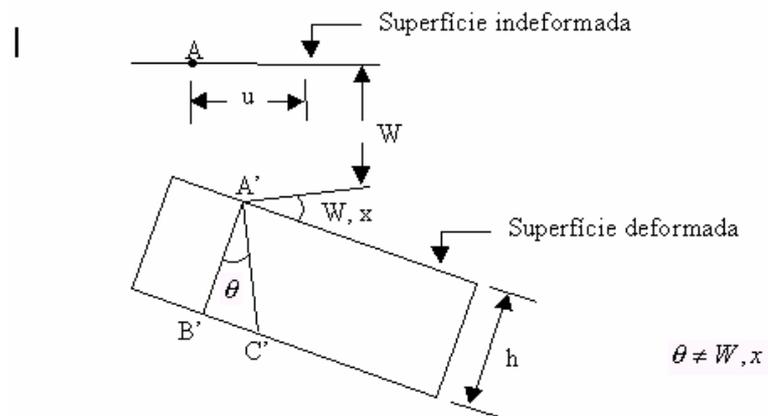


Figura 4.3 Viga de Timoshenko

### 4.3 Formulação de uma Viga de Compósito Laminado

A formulação tratada nesta seção está baseada na viga de Timoshenko.

O campo de deslocamentos de uma viga, baseada na teoria de Timoshenko, contém o deslocamento axial  $u(x, z)$ , deslocamento transversal  $w(x)$ , e a rotação  $q(x)$ , determinados conforme segue

$$u(x,z) = u_0(x) + zq(x) \quad (4.1)$$

$$W(x) = w_0(x) \quad (4.2)$$

onde,

$u_0(x)$  é o deslocamento axial na superfície média da viga laminada, e  $w_0(x)$  é o deslocamento vertical da superfície média, e

$q(x)$  é a rotação da superfície média, em relação ao eixo  $y$ .

O campo de deslocamentos pode ser determinado através de expansões polinomiais. No caso específico deste trabalho, a interpolação proposta é  $u(x,z)$  linear em  $x$  e  $z$ , e  $w(x)$  e  $q(x)$  lineares em  $x$ . Tais expansões são expressas conforme segue

$$u_0(x) = a_0 + a_1x \quad (4.3)$$

$$w(x) = b_0 + b_1x \quad (4.4)$$

$$q(x) = \frac{\partial u(x, z)}{\partial z} \quad (4.5)$$

$$u(x,z) = c_0z + c_1xz \quad (4.6)$$

Avaliando a equação (4.3) na origem, que pertence ao domínio da função, obtém-se o movimento de corpo rígido, para translação horizontal,

$$u_0 = a_0$$

Valendo-se de uma tabela para coeficientes de funções de deslocamentos, (ABDALLA, 1992), conforme anexo A, escrevem-se as equações acima em termos do gradiente de deformações

$$u_0(x) = [u_0] + [\epsilon_x]_0x \quad (4.7)$$

$$w(x) = [w_0] + [\gamma_{xz}/2 - q]_0x \quad (4.8)$$

$$u(x,z) = [q + \gamma_{xz}/2]_0 z + [\epsilon_{x,z}]_0 xz \quad (4.9)$$

$$q(x) = [q + \gamma_{xz}/2]_0 + [\epsilon_{x,z}]_0 x \quad (4.10)$$

Assim, determinam-se os conteúdos físicos dos coeficientes das expansões polinomiais dos deslocamentos  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$ . O vetor cujas componentes são os coeficientes das equações (4.3) a (4.5), denomina-se gradiente de deformações, que contém os modos de deformações mecânicas que o elemento pode assumir, e é definido conforme segue

$$\{\epsilon_{sg}\} = \{[u]_0 \quad [w]_0 \quad [q]_0 \quad [\epsilon_x]_0 \quad [\gamma_{xz}]_0 \quad [\epsilon_{x,z}]_0\}^T \quad (4.11)$$

O subíndice “ 0” refere-se à avaliação das quantidades cinemáticas em uma origem pré-definida. Ou seja, as expressões em série de Taylor são avaliadas na origem do elemento finito, definindo assim os coeficientes de seus polinômios.

Os elementos do vetor gradiente de deformações em (4.11) podem ser agrupados conforme seus modos de deformação mecânica, permitindo uma melhor análise sobre se o elemento satisfaz algumas condições básicas, como, por exemplo, possuir movimento de corpo rígido e deformações constante (critérios de convergência).

$[u]_0 \quad [w]_0 \quad [q]_0$  movimentos de corpo rígido;

$[\epsilon_x]_0 \quad [\gamma_{xz}]_0$  deformações constantes;

$[\epsilon_{x,z}]_0$  deformação de flexão;

O próximo passo é avaliar as expansões definidas pela equação (4.7) a (4.10), para cada nó do elemento finito, a fim de obter uma relação entre os deslocamentos nodais e a base dos gradientes de deformação que descreve as deformações do elemento. Para isso, é necessária uma matriz de transformação entre as coordenadas nodais e as coordenadas dos gradientes de deformações, definida através da letra  $\phi$ . A referida relação é expressa através da equação.

$$\{d\} = [\phi]\{\epsilon_{sg}\} \quad (4.12a)$$

onde

$$\{d\} = \{u_1 \quad w_1 \quad q_1 \quad w_2 \quad q_2 \quad u_2\}^T \quad (4.12b)$$

e

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x_1 & 0 & x_1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & x_1 \\ 1 & 0 & 0 & x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x_2 & 0 & x_2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & x_2 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

onde  $x_1$  e  $x_2$  são as coordenadas nodais do elemento.

Calculando-se agora, as deformações elásticas,  $\epsilon_x$ , e  $\gamma_{xz}$ , a partir das equações (4.8) e (4.9), têm-se as seguintes expansões polinomiais.

$$\epsilon_x = \partial u / \partial x = [\epsilon_x]_0 + [\epsilon_{x,z}]_0 z \quad (4.14)$$

$$\gamma_{xz} = \partial u / \partial z + dw / dx = [\gamma_{xz}]_0 + [\epsilon_{x,z}]_0 x \quad (4.15)$$

A equação (4.14) contém apenas termos legítimos da expansão em Taylor. No entanto a equação (4.15) contém o termo  $\epsilon_{x,z}$ , que é estranho à expansão em série de Taylor da distorção angular  $\gamma_{xz}$ . O termo  $\epsilon_{x,z}$  representa a variação da deformação normal ao longo da altura da viga. Portanto, é o gradiente de deformação que está associado à flexão. Este modo de deformação é ativado em qualquer situação de flexão da barra, o que inevitavelmente irá contribuir não só para o valor de  $\epsilon_x$ , mas também para o valor de  $\gamma_{xz}$ . Assim,  $\epsilon_{x,z}$  é um termo espúrio em  $\gamma_{xz}$ , sendo assim denominado de cisalhamento parasítico. Este termo espúrio é responsável pelo enrijecimento artificial do elemento finito e, como será demonstrado na sequência, por um erro de natureza qualitativa. A causa do surgimento deste termo é a utilização de polinômios incompletos como funções aproximadoras do elemento. O termo espúrio deve ser removido a-priori, de modo a corrigir o elemento finito. Assim,  $\gamma_{xz}$  fica expresso por

$$\gamma_{xz} = [\gamma_{xz}]_0 \quad (4.16)$$

e o vetor de deformações elásticas

$$\{ \varepsilon \} = \{ [\varepsilon_x]_0 + [\varepsilon_{x,z}]_0 z \quad [\gamma_{xz}]_0 \}^T \quad (4.17)$$

O vetor de deformações elásticas  $\{ \varepsilon \}$ , está relacionado com o gradiente de deformações  $\{ \varepsilon_{sg} \}$ , através da matriz de transformação  $[T_{sg}]$ , conforme segue

$$\{ \varepsilon \} = [T_{sg}] \{ \varepsilon_{sg} \}, \quad (4.18)$$

onde

$$[T_{sg}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Eliminando-se o termo espúrio da equação (4.19),  $T_{26} = x$ , a matriz  $[T_{sg}]$  passa a ter a seguinte configuração

$$[T_{sg}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Resolvendo-se a equação (4.18) para  $\varepsilon_{sg}$ , e substituindo-se o resultado na equação (4.12 a), encontra-se o vetor de deformações  $\{ \varepsilon \}$

$$\{ \varepsilon \} = [T_{sg}] [\phi]^{-1} \{ d \} \quad (4.21)$$

A energia de deformação da viga laminada é igual ao somatório da energia de deformação de cada lâmina, e expressa através da equação

$$U = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \{ \varepsilon \}^T [Q]_k \{ \varepsilon \}_k d\Omega_k \quad (4.22)$$

onde  $k$  representa uma lâmina qualquer do laminado,  $Q_k$ , é a matriz constitutiva da lâmina  $k$ ,  $\Omega_k$  o volume desta lâmina genérica e  $\{ \varepsilon \}_k$  o vetor de deformações para a lâmina  $k$ .

A energia de deformação para o laminado, na notação *Strain Gradient*, é obtida através da combinação das equações anteriores, e expressa conforme abaixo (ABDALLA, 1992).

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [\Phi]^{-T} \left( \sum_{k=1}^n \int_{\Omega_k} [T_{SG}]^T [Q]_k [T_{SG}] d\Omega_k \right) [\Phi]^{-1} \{d\} \quad (4.23)$$

A parte da equação (4.23) que está entre parênteses é conhecida como matriz de energia de deformações, definida por  $U_M$ , onde os elementos de sua diagonal principal contém os modos de deformação puros do laminado, e os demais elementos da matriz contém as quantidades de energia associadas ao acoplamento de modos de deformação

$$U_M = \int_{\Omega} [T_{sg}]^T [Q]_k [T_{sg}] d\Omega_k \quad (4.24)$$

Para a viga, a matriz  $[Q]$ , referente a uma lâmina genérica  $k$ , é definida conforme segue

$$[Q]_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

onde,

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11}m^4 + 2(C_{12} + 2C_{66})m^2n^2 + C_{22}n^4 \\ Q_{55} &= C_{55}m^2 + C_{44}n^2, \end{aligned} \quad (4.26)$$

onde  $C_{ij}$  é a matriz constitutiva da lâmina  $k$ ,  $m = \cos \theta$ ,  $n = \sin \theta$ , e  $\theta$  é o ângulo das fibras da lâmina em questão, medido no sentido anti-horário. A seguir, o detalhamento dos elementos da matriz  $C_{ij}$  que aparecem nas equações acima.

$$\begin{aligned} C_{11} &= E_{11}(1-v_{23}-v_{32})/\Delta, & C_{12} &= E_{11}(v_{21}+v_{31}v_{23})/\Delta, \\ C_{44} &= G_{23} & C_{22} &= E_{22}(1-v_{31}v_{13})/\Delta, \\ C_{55} &= G_{13} & C_{66} &= G_{12}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\Delta = 1 - v_{12}v_{21} - v_{23}v_{32} - v_{31}v_{13} - 2v_{21}v_{32}v_{13}$$

sendo  $E_{ij}$  módulos de elasticidade longitudinais, e  $v_{ij}$ , coeficientes de Poisson,  $i, j = 1, 2, 3$  (VINSON & SIERAKOWSKI, 1986).

A seguir, os elementos não nulos da matriz  $U_M$  definida pela equação (4.24), calculados para uma única lâmina, através do triplo produto da matrizes seguido do cálculo da integral de volume sem e com termos espúrios respectivamente.

$$U(4,4) = Q(1,1)*H*BL$$

$$U(5,5) = = Q(5,5)*H*BL \quad (4.28)$$

$$U(6,6) = Q(1,1)*H^3*BL/3.0$$

$$U(4,4) = Q(1,1)*H*BL$$

$$U(5,5) = = Q(5,5)*H*BL \quad (4.29)$$

$$U(6,6) = Q(1,1)*H^3*BL/3.0 + Q(5,5)*H*BL^3/12.0$$

onde

$$BL = (YU-YL)*(XU-XL)$$

$$H = (ZU-ZL)$$

$$H^3 = (ZU*ZU*ZU-ZL*ZL*ZL)$$

Sendo,

(YU-YL) a largura da viga laminada;

(XU-XL) o comprimento da viga laminada;

(ZU-ZL) a espessura da viga laminada.

Observa-se que as equações (4.28) e (4.29) se diferenciam pelo elemento U(6,6), pois na última expressão aparece o termo espúrio  $Q(5,5)*H*BL^3/12.0$ .

A matriz de rigidez para o laminado, calculada a partir da notação *Strain Gradient* é,

$$[ K ] = [ \phi ]^{-T} [ U ] [ \phi ]^{-1} \quad (4.30)$$

onde [U] é a matriz de energia de deformações, definida pela equação (4.24) e [  $\phi$  ] é a matriz de transformação entre as coordenadas nodais e as coordenadas *Strain Gradient*.

## 4.4 Validação do elemento

Nesta seção alguns resultados numéricos são apresentados, procurando-se demonstrar a acurácia do modelo em questão, ora comparando-se resultados obtidos com valores analíticos, ora analisando-se graficamente dados que confirmam expectativas teóricas. É também objetivo evidenciar a rápida convergência numérica quando a formulação está livre de termos espúrios. Os efeitos dos termos espúrios são também evidenciados nesta seção.

### 4.4.1 Exemplo 1

O primeiro problema analisado é o de uma viga laminada engastada e livre, constituída de duas lâminas de material idêntico, com propriedades mecânicas e dimensões conforme segue.  $E_1 = 14,5 \times 10^4$  MPa,  $G_{12} = 4,5 \times 10^3$  MPa,  $\theta = 0^\circ$ ,  $\nu_{12} = 0,21$ ,  $\nu_{21} = 0,017$ ; comprimento  $L = 4$  m, largura  $b = 0,1$  m, espessura  $t = 0,2$  m. Uma força transversal de 10,0 N é aplicada na extremidade livre da viga. Ver figura 4.

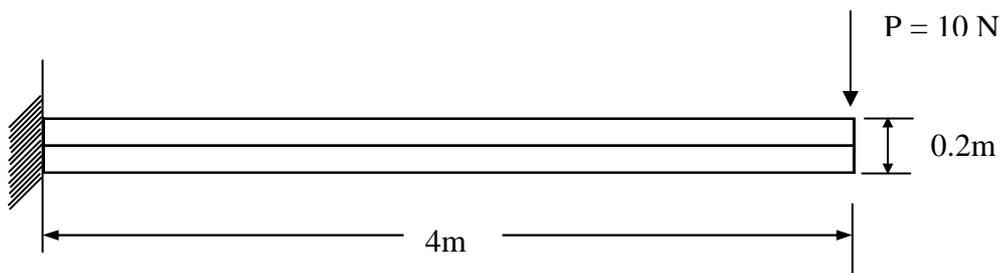


Figura 4.4 Viga em cantiléver

A tabela 1 compara a flecha máxima calculada analiticamente, através da expressão  $W = -(PL^3)/(3EI)$ , e o resultado obtido via Elementos Finitos, com malha de 128 elementos.

Tabela 1, Flecha máxima (W), em metros, para viga em cantiléver.

W		
Analítico	Elementos Finitos	Diferença (%)
$2,2069 \times 10^{-5}$	$2,2271 \times 10^{-5}$	0,91

## 4.4.2 Exemplo 2

Aqui a viga considerada é idêntica ao caso anterior, exceto pela posição da carga e condições de contorno. A carga de 10,0 N está aplicada no meio da viga bi-engastada. A tabela 2 compara a flecha máxima calculada analiticamente através da equação  $W = - (PL^3)/(192EI)$ , e o resultado obtido via elementos finitos, assim como o gráfico 1 demonstra a variação do deslocamento ao longo do comprimento da viga, gráfico este que foi gerado a partir dos dados obtidos via elementos finitos.

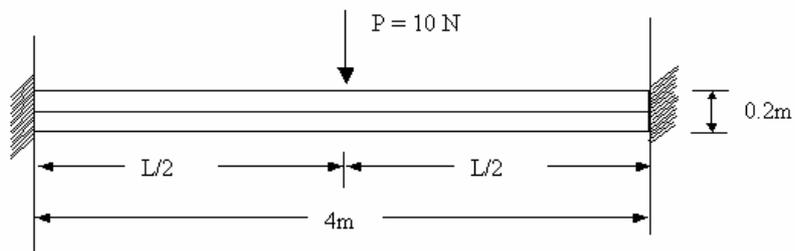


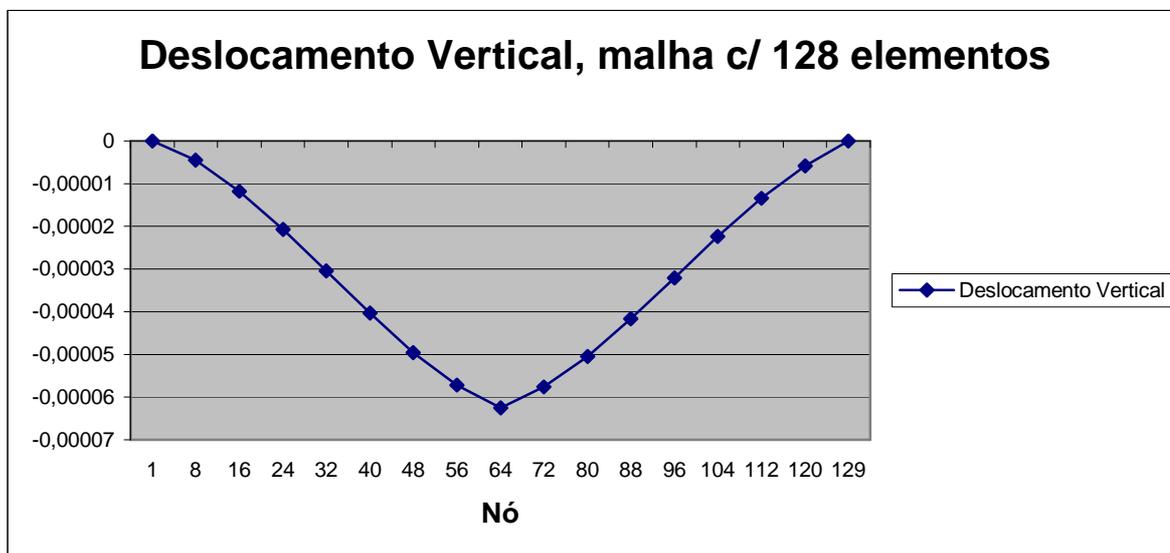
Figura 4.5 Viga laminada bi-engastada.

Tabela 2, Flecha máxima (W), em metros, para viga bi-engastada.

W		
Analítico	Elementos Finitos	Diferença.(%)
$-6,2545 \times 10^{-5}$	$-6,2539 \times 10^{-5}$	0,01

Da comparação entre os resultados analíticos e àqueles obtidos via elementos finitos para os dois problemas anteriores, se conclui que a formulação proposta é válida para estes casos. Mais adiante neste capítulo, serão mostrados valores calculados via elementos finitos que coincidem exatamente com resultados analíticos. O gráfico 1, confirma expectativa teórica para o problema da viga bi-engastada submetida a um carregamento estático representado por uma força aplicada em L/2.

Gráfico 1: Deslocamento transversal da viga bi-engastada, com carga concentrada aplicada no centro do vão.



### 4.4.3 Exemplo 3

O problema agora considerado consiste numa viga com 1.000,0 mm de comprimento, 10,0 mm de altura, e 5,0 mm de base; engastada e livre, constituída por quatro lâminas de grafite-epoxy, com empilhamento denominado *angle ply*, ou seja, orientação das fibras  $+\alpha/-\alpha$ , e propriedades mecânicas conforme segue:  $E_{11} = 2,89 \times 10^5$  MPa,  $E_{22} = 6,06 \times 10^3$  MPa,  $E_{33} = 6,06 \times 10^3$  MPa,  $G_{ij} = 4,134 \times 10^3$  MPa,  $\nu_{ij} = 0,31$ ,  $\theta = [+30^\circ, -30^\circ, +30^\circ, -30^\circ]$ . Uma força vertical de 1,0 N é aplicada na extremidade livre da viga. Uma análise de convergência é realizada e os resultados obtidos estão tabelados abaixo, comparando os modelos com e sem cisalhamento parasítico.

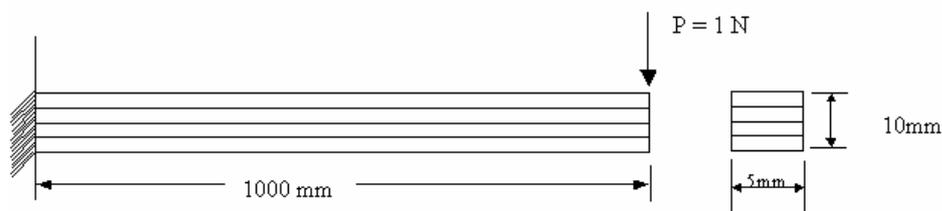
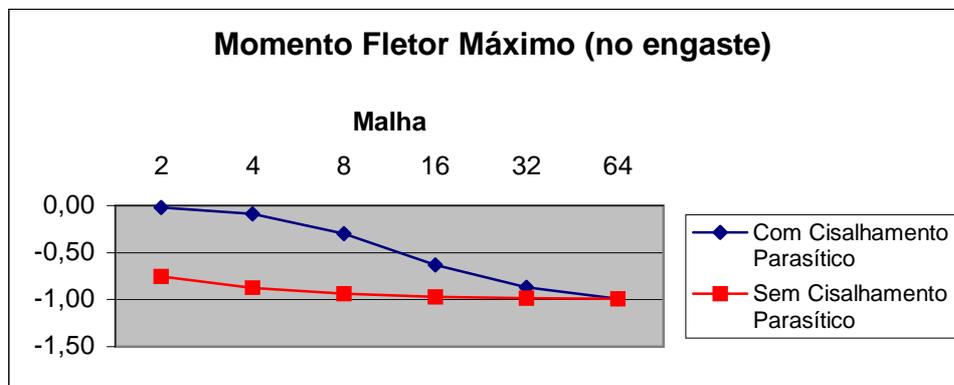


Figura 4.6 Viga laminada engastada e livre constituída por 4 lâminas.

Tabela 3 – Máximo deslocamento vertical (w), para viga engastada e livre, *Angle Ply*.

Malha	Com cisalhamento parasítico	Sem cisalhamento parasítico	Diferença (%)
2 elementos	$-0,10686 \times 10^1$	$-0,35689 \times 10^2$	3.239,79
4 elementos	$-0,39424 \times 10^1$	$-0,37470 \times 10^2$	850,44
8 elementos	$-0,12031 \times 10^2$	$-0,37915 \times 10^2$	215,14
16 elementos	$-0,24702 \times 10^2$	$-0,38027 \times 10^2$	53,94
32 elementos	$-0,33530 \times 10^2$	$-0,38055 \times 10^2$	13,50
64 elementos	$-0,36819 \times 10^2$	$-0,38062 \times 10^2$	3,38
128 elementos	$-0,37745 \times 10^2$	$-0,38063 \times 10^2$	0,84
1024 elementos	$-0,38059 \times 10^2$	$-0,38064 \times 10^2$	0,01

Gráfico 2, Máximo Momento Fletor para viga engastada e livre



O gráfico 2 evidencia a necessidade de um esforço computacional maior para análise do momento fletor, quando este é avaliado com termos espúrios na formulação do elemento.

A tabela 3 mostra uma rápida convergência para o máximo deslocamento vertical da viga, quando este é avaliado sem os efeitos do cisalhamento parasítico. Com cisalhamento parasítico a convergência é sensivelmente mais lenta, exigindo maior esforço computacional. A diferença entre as eficiências de ambos os modelos é quantificada pela diferença percentual, mostrada na quarta coluna da tabela 3. Observa-se que são necessários 64 elementos para que o modelo com cisalhamento parasítico forneça resultados aceitáveis. Esta análise mostra claramente o efeito de enrijecimento artificial causado pelo cisalhamento parasítico.

Tabela 4 – Máximo Momento resultante para viga engastada e livre (no engaste)

Malha	Com cisalhamento parasítico	Sem cisalhamento parasítico	Diferença (%)
2 elementos	-.21056E+02	-.75000E+03	3.461,93
4 elementos	-.90626E+02	-.87500E+03	865,51
8 elementos	-.29633E+03	-.93750E+03	216,37
16 elementos	-.62868E+03	-.96875E+03	54,09
32 elementos	-.86711E+03	-.98438E+03	13,52
64 elementos	-.95974E+03	-.99219E+03	3,38

A tabela 4 mostra valores de momento fletor máximo (no engaste) para as diferentes malhas. O efeito do cisalhamento parasítico se faz aparente, uma vez que os modelos contendo o termo espúrio apresentam convergência lenta. O gráfico 2 ilustra claramente esse comportamento, mostrando que o modelo com cisalhamento parasítico converge com malha de 64 elementos. Importante registrar a importância da notação *Strain Gradient* para se eliminar a divergência dos resultados através do refino de malha.

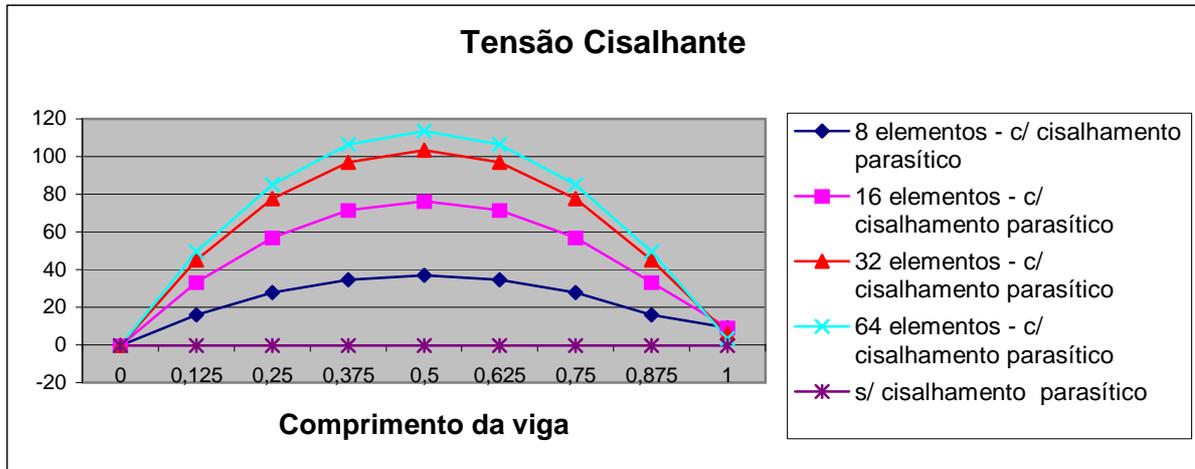
A tabela 5, mostra a divergência de resultados obtidos para a tensão cisalhante ao longo da viga laminada, quando a análise é efetuada com cisalhamento parasítico. O gráfico 3 evidencia a natureza qualitativa dos erros verificados na tensão cisalhante com cisalhamento parasítico, avaliada ao longo do comprimento da viga. Como se observa, ao contrário do erro quantitativo, o erro qualitativo não é minimizado com o refino. Isto ocorre por tratar-se de erro inerente a formulação do elemento, erro este que o refino de malha, além de não eliminar, maximiza. Deve ser observado também que quando a análise é realizada com elementos sem cisalhamento parasítico, a solução é correta, pois coincide com a solução analítica.

O erro na solução da tensão de cisalhamento é denominado qualitativo porque consiste de uma representação errônea da solução na sua forma. A representação devida ao cisalhamento parasítico é parabólica quando a solução correta é constante ao longo da viga. Este resultado demonstra a necessidade de se remover o termo espúrio da formulação do elemento uma vez que não se consegue corrigir a solução numérica através do refino de malha.

Tabela 5, Tensão Cisalhante para viga engastada e livre.

Tensão Cisalhante (malha com 16 elementos)		
Nó	Com Cisalhamento Parasítico	Sem Cisalhamento Parasítico
1	-0,28356	-0,28356
2	17,634	-0,28356
3	33,163	-0,28356
4	46,303	-0,28356
5	57,054	-0,28356
6	65,415	-0,28356
7	71,388	-0,28356
8	74,972	-0,28356
9	76,166	-0,28356
10	74,972	-0,28356
11	71,388	-0,28356
12	65,415	-0,28356
13	57,054	-0,28356
14	46,303	-0,28356
15	33,163	-0,28356
16	17,634	-0,28356
17	9,2727	-0,28356

Gráfico 3 tensão Cisalhante, com e sem cisalhamento parasítico



A tabela 6 mostra divergência nos resultados da força cortante  $Q_{xz}$  para viga engastada e livre, com e sem cisalhamento parasítico. Como se observa, a divergência aumenta com o refino, do que se conclui tratar-se de erro inerente à formulação, denominado erro qualitativo, erro este não eliminado por meio de refino. O comportamento da força cortante  $Q_{xz}$  é análogo ao da tensão de cisalhamento  $\tau_{xz}$  descrito anteriormente.

Tabela 6 – Máxima Força Cortante ( $Q_{xz}$ ) para viga engastada e livre

Malha	Com cisalhamento parasítico	Sem cisalhamento parasítico
2 elementos	$1,0663 \times 10^1$	$-1.0 \times 10^0$
4 elementos	$4,2028 \times 10^1$	$-1.0 \times 10^0$
8 elementos	$1,3031 \times 10^2$	$-1.0 \times 10^0$
16 elementos	$2,6860 \times 10^2$	$-1.0 \times 10^0$
32 elementos	$3,6495 \times 10^2$	$-1.0 \times 10^0$
64 elementos	$4,0085 \times 10^2$	$-1.0 \times 10^0$

A Tabela 7 mostra uma divergência significativa na análise da tensão normal  $\sigma_x$ , quando os dados são comparados sem e com cisalhamento parasítico, para uma malha de 4 elementos.

Tabela 7: Tensão normal SIGMA-X, obtida com malha de 4 elementos

Nó	Lâmina	Com Cisalhamento	Sem Cisalhamento
1	1	.21724E+01	20975E+02
1	2	-.13585E-02	-.13116E-01
1	3	-.21802E+01	-.21050E+02
1	4	-.43417E+01	-.41919E+02
2	1	.18621E+01	.17979E+02
2	2	-.11644E-02	-.11242E-01
2	3	-.18688E+01	-.18043E+02
2	4	-.37215E+01	-.35931E+02
3	1	.12414E+01	.11986E+02
3	2	-.77628E-03	-.74950E-02
3	3	-.12458E+01	-.12029E+02
3	4	-.24810E+01	-.23954E+02
4	1	.62070E+00	.59929E+01
4	2	-.38814E-03	-.37475E-02
4	3	-.62292E+00	-.60143E+01
4	4	-.12405E+01	-.11977E+02
5	1	.31035E+00	.29964E+01
5	2	-.19407E-03	-.18737E-02
5	3	-.31146E+00	-.30071E+01
5	4	-.62024E+00	-.59885E+01

#### 4.4.4 Exemplo 4

O problema agora avaliado é idêntico ao exemplo 3, exceto pela quantidade de lâminas, agora em número de 10.

A tabela 8 mostra os valores das tensões, num ponto fixo do laminado, (no engaste), calculadas sem os efeitos do cisalhamento parasítico. O gráfico 4 mostra aquilo que era de se esperar, ou seja, a tensão normal se distribui linearmente ao longo da espessura do laminado.

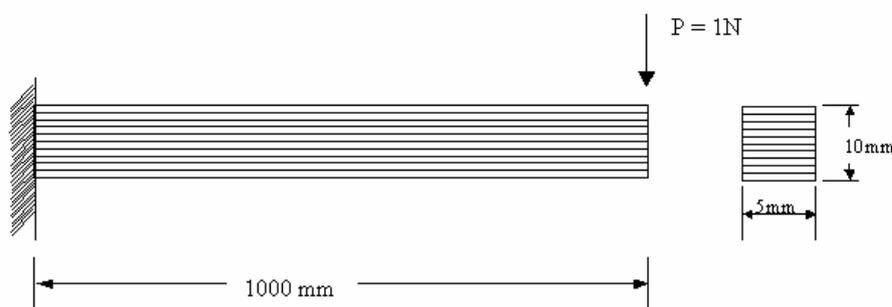
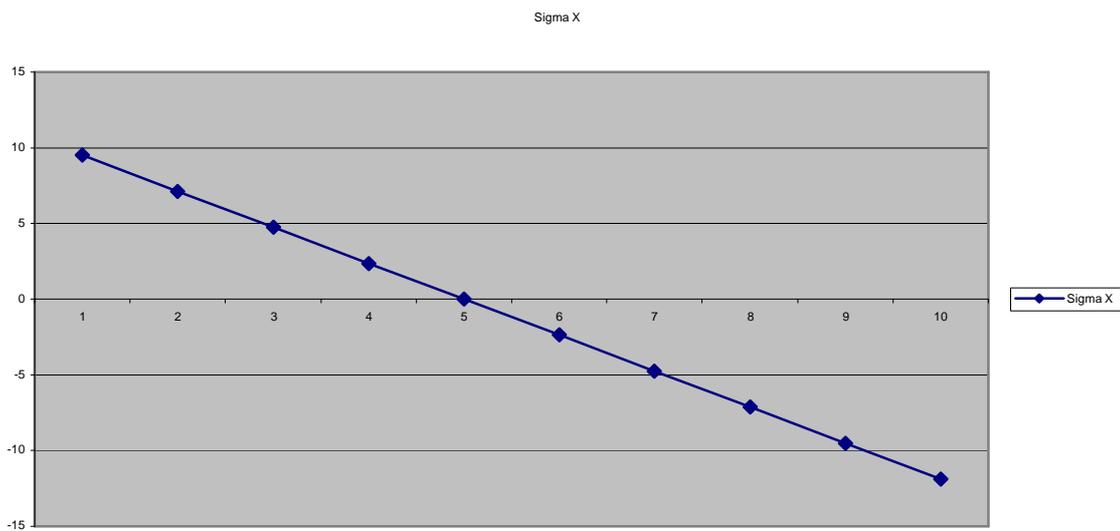


Figura 4.7 Viga laminada engastada e livre constituída por dez lâminas

Tabela 8, Valores de tensões calculadas para cada lâmina

Lâmina	Sigma X	Sigma Z	Tau XZ
1	.95342E+01	.96986E+01	-.51282E+00
2	.71387E+01	.72665E+01	-.51282E+00
3	.47591E+01	.48504E+01	-.51282E+00
4	.23796E+01	.24344E+01	-.51282E+00
5	-.49498E-15	.18264E-01	-.51282E+00
6	-.23796E+01	-.23978E+01	-.51282E+00
7	-.47671E+01	-.48219E+01	-.51282E+00
8	-.71387E+01	-.72300E+01	-.51282E+00
9	-.95342E+01	-.96620E+01	-.51282E+00
10	-.11898E+02	-.12062E+02	-.51282E+00

Gráfico 4 Tensão normal calculada para cada lâmina do laminado



#### 4.4.5 Exemplo 5

O problema aqui considerado consiste numa viga com 1.000,0 mm de comprimento, 10,0 mm de altura, e 5,0 mm de base; engastada e livre, constituída por quatro lâminas de grafite-epoxy, com empilhamento e propriedades mecânicas conforme segue:  $E_{11} = 2,89 \times 10^5$  MPa,  $E_{22} = 6,06 \times 10^3$  MPa,  $E_{33} = 6,06 \times 10^3$  MPa,  $G_{ij} = 4,134 \times 10^3$  MPa,  $\nu_{ij} = 0,31$ ,  $\theta = [0^0, 90^0, 0^0, 90^0]$  (cross ply). Uma força vertical de 1,0 N é aplicada na extremidade livre da viga.

Ou seja, é o exemplo 3, exceto pelo empilhamento  $2(0^0, 90^0)$  é denominado *cross ply* pela literatura (TENEK, 1998).

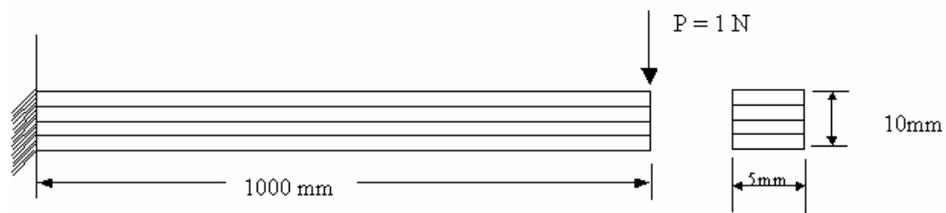


Figura 4.8 Viga laminada engastada e livre constituída por duas lâminas *cross ply*

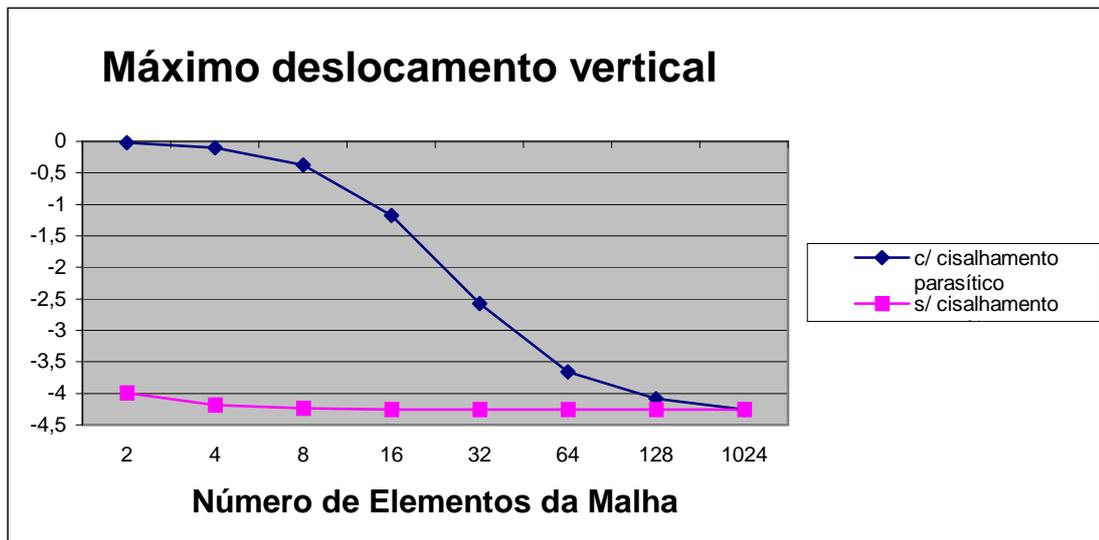
A quarta coluna da tabela 9 mostra a diferença no cálculo do máximo deslocamento transversal para uma viga laminada *cross ply*, quando a análise é feita com e sem cisalhamento parasítico. A diferença torna-se aceitável somente quando o refino é grande, com esforço computacional enorme.

O gráfico 5 mostra que a convergência para o máximo deslocamento vertical da viga laminada para análise feita com e sem cisalhamento parasítico somente acontece quando o refino ultrapassa uma centena de elementos.

Tabela 9 Máximo deslocamento vertical (w) para viga engastada e livre. (*cross ply*)

Malha	Com cisalhamento parasítico	Sem cisalhamento parasítico	Diferença (%)
2 elementos	$-1,0761 \times 10^0$	$-4,8544 \times 10^1$	4.411,52
4 elementos	$-4,0518 \times 10^0$	$-5,0968 \times 10^1$	1.157,91
8 elementos	$-1,3126 \times 10^1$	$-5,1574 \times 10^1$	292,91
16 elementos	$-2,9822 \times 10^1$	$-5,1725 \times 10^1$	73,45
32 elementos	$-4,3728 \times 10^1$	$-5,1763 \times 10^1$	18,38
64 elementos	$-4,9498 \times 10^1$	$-5,1772 \times 10^1$	4,59
128 elementos	$-5,1187 \times 10^1$	$-5,1775 \times 10^1$	1,15
1024 elementos	$-5,1766 \times 10^1$	$-5,1776 \times 10^1$	0,02

Gráfico 5, Máximo deslocamento vertical, viga engastada e livre, empilhamento *Cross Ply*.

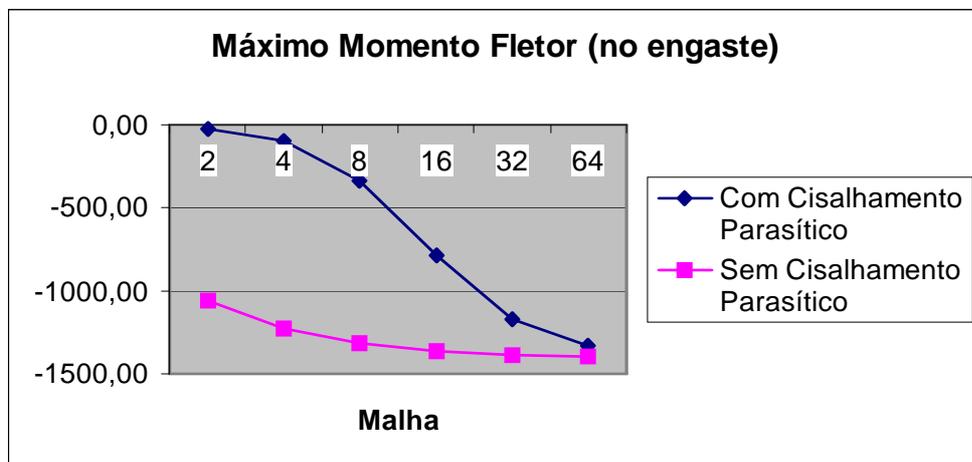


A tabela 10 mostra que a diferença do máximo momento fletor quando a análise é feita sem e com cisalhamento parasítico é maior ainda para um empilhamento *cross ply* que para o empilhamento *angle ply*. O gráfico 6 evidencia a diferença constatada na tabela 10, onde a convergência acontece somente quando o refino chega a 64 elementos

Tabela 10 Máximo momento resultante para viga engastada e livre (*cross ply*)

Malha	Com cisalhamento parasítico	Sem cisalhamento parasítico	Diferença (%)
2 elementos	$-2,1926 \times 10^1$	$-1,0550 \times 10^3$	4.711,64
4 elementos	$-9,6317 \times 10^1$	$-1,2308 \times 10^3$	1.177,86
8 elementos	$-3,3430 \times 10^2$	$-1,3187 \times 10^3$	294,47
16 elementos	$-7,8487 \times 10^2$	$-1,3626 \times 10^3$	73,61
32 elementos	$-8,6711 \times 10^2$	$-1,3846 \times 10^3$	59,68
64 elementos	$-1,3342 \times 10^3$	$-1,3956 \times 10^3$	4,60

Gráfico 6, Máximo momento fletor para viga engastada e livre (*cross ply*)



A tabela 11 mostra os efeitos do cisalhamento parasítico na análise da tensão cisalhante avaliada ao longo do comprimento da viga laminada, onde o refino de malha se mostra ineficiente, por tratar-se de erro qualitativo, erro este inerente a formulação do elemento, e, portanto não minimizado através do refino.

Tabela 11, Tensão cisalhante ( $\tau_{xz}$ ) para viga engastada e livre

Malha (Nó)	Com Cisalhamento Parasítico	Sem Cisalhamento Parasítico
1 (Apoio)	$-0,28356 \times 10^0$	$-0,28356 \times 10^0$
2	$1,7497 \times 10^1$	$-0,28356 \times 10^0$
3	$3,0198 \times 10^1$	$-0,28356 \times 10^0$
4	$3,7819 \times 10^1$	$-0,28356 \times 10^0$
5	$4,0359 \times 10^1$	$-0,28356 \times 10^0$
6	$3,7819 \times 10^1$	$-0,28356 \times 10^0$
7	$3,0198 \times 10^1$	$-0,28356 \times 10^0$
8	$1,7497 \times 10^1$	$-0,28356 \times 10^0$
9 (Extremidade Livre)	$9,8770 \times 10^0$	$-0,28356 \times 10^0$

A tabela 12 e o gráfico 7 mostram os valores para a tensão cisalhante ao longo do comprimento da viga laminada *cross ply*, avaliados para diferentes malhas com cisalhamento parasítico; e o valor constante, independente do refino, quando a tensão cisalhante é avaliada sem cisalhamento parasítico. Tal qual o exemplo.3, o gráfico 7 mostra a natureza qualitativa do erro no cálculo da tensão cisalhante, quando esta é avaliada com o cisalhamento parasítico. O gráfico mostra que ao contrário do erro quantitativo que pode ser minimizado com esforços numéricos computacionais, o erro qualitativo tende a aumentar com o refino.

Tabela 12, Tensão cisalhante ao longo da viga engastada e livre (*cross ply*)

Tensão Cisalhante $\tau_{xz}$					
Posição (m)	8 elementos c/ cisalhamento parasítico.	16 elementos c/ cisalhamento parasítico.	32 elementos c/ cisalhamento parasítico.	64 elementos c/ cisalhamento parasítico.	s/ cisalhamento parasítico
0	-0,28356	-0,28356	-0,28356	-0,28356	-0,28356
0,125	17,497	40,116	58,953	66,77	-0,28356
0,25	30,197	68,972	101,27	114,67	-0,28356
0,375	37,819	86,286	126,65	143,4	-0,28356
0,5	40,359	92,057	135,12	152,98	-0,28356
0,625	37,819	86,286	126,65	143,4	-0,28356
0,75	30,198	68,972	101,27	114,67	-0,28356
0,875	17,497	40,116	58,953	66,77	-0,28356
1	9,877	11,259	8,1789	4,506	-0,28356

Gráfico 7, Tensão cisalhante ao longo do comprimento da viga (*cross ply*)

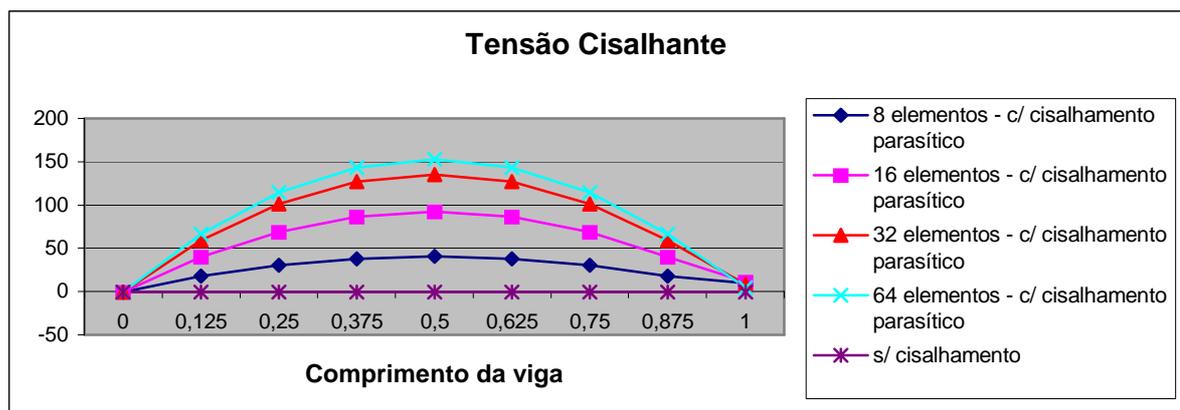


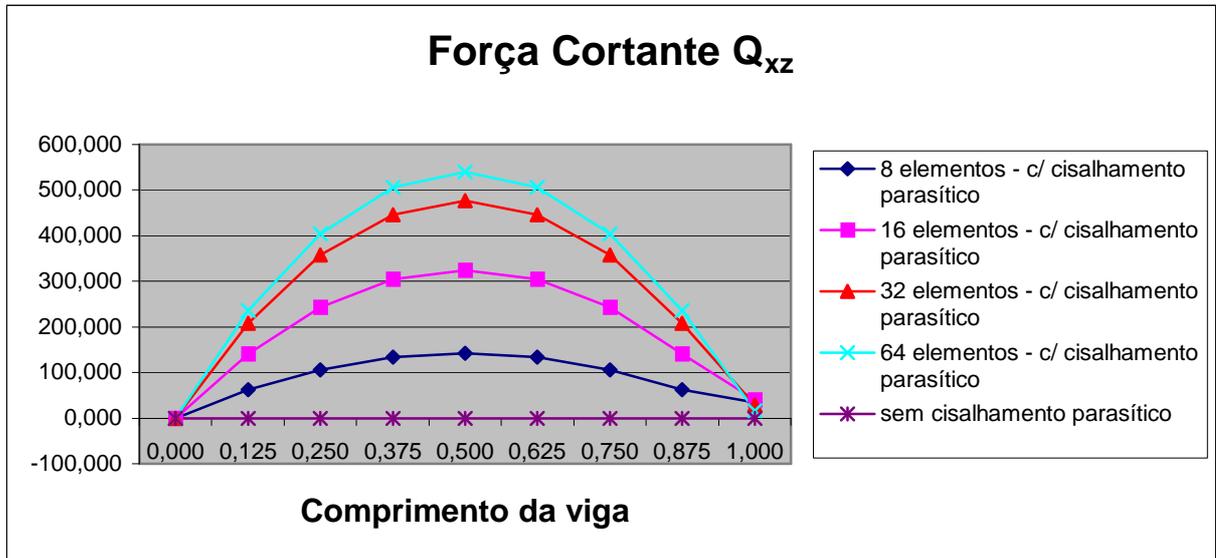
Tabela 13, Resultante de força cortante ao longo da viga engastada e livre (*cross ply*).

RESULTANTE DE FORÇA CORTANTE $Q_{xz}$					
Posição (m)	8 elementos c/ cisalhamento	16 elementos c/ cisalhamento	32 elementos c/ cisalhamento	64 elementos c/ cisalhamento	s/ cisalhamento
0,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000	-1,000
0,125	61,705	141,470	207,900	235,470	-1,000
0,250	106,490	243,230	357,120	404,370	-1,000
0,375	133,370	304,290	446,650	505,720	-1,000
0,500	142,330	324,640	476,490	539,500	-1,000
0,625	133,370	304,290	446,650	505,720	-1,000
0,750	106,490	243,230	357,120	404,370	-1,000
0,875	61,705	141,470	207,900	235,470	-1,000
1,000	34,831	39,705	28,843	15,891	-1,000

A tabela 13 mostra os valores da força cortante  $Q_{xz}$ , avaliada num mesmo ponto ao longo do comprimento do laminado, para malha de 8, 16, 32 e 64 elementos, quando a análise é feita com cisalhamento parasítico; e o valor constante, independente do refino, obtido sem cisalhamento parasítico. Observa-se que o valor para a força cortante  $Q_{xz}$ , obtida sem os efeitos do cisalhamento parasítico coincide com a expectativa analítica, que seria de  $-1,0$ .

O gráfico 8 mostra a existência de erro qualitativo para a força cortante  $Q_{xz}$  ao longo do comprimento da viga laminada *cross ply*, quando esta é avaliada com cisalhamento parasítico. O gráfico mostra que o erro qualitativo tende a aumentar com o refino, atingindo a maior diferença na metade do comprimento da viga.

Gráfico 8, Resultante de força cortante  $Q_{xz}$  ao longo do comprimento da viga



#### 4.4.6 Exemplo 6

O problema analisado nesta seção consiste de uma viga laminada não simétrica geral. Um laminado não simétrico geral pode possuir todas as formas de acoplamento possíveis. As propriedades mecânicas, dimensões e orientações são as seguintes. Lâmina 1:  $E_x = 2,5E+07$  psi,  $E_y = 1,0E+06$  psi,  $E_z = 2,5E+07$  psi,  $\nu_{yz} = 0,25$ ,  $\nu_{xz} = 0,25$ ,  $\nu_{xy} = 0,25$ ,  $G_{xy} = 2,0E+05$  psi,  $G_{xz} = 5,0 E+05$  psi,  $G_{yz} = 5,0E+05$  psi,  $\theta = 30^0$ ,  $t = 0,10$  polegadas. Lâmina 2:  $E_x = 1,92E+07$  psi,  $E_y = 1,56E+06$  psi,  $E_z = 1,92E+07$  psi  $\nu_{yz} = 0,30$ ,  $\nu_{xz} = 0,30$ ,  $\nu_{xy} = 0,30$ ,  $G_{xy} = 5,23E+05$  psi,  $G_{xz} = 8,2E+05$  psi,  $G_{yz} = 8,2E+05$  psi,  $\theta = 30^0$ ,  $t = 0,12$  polegadas. A dimensão da base da viga é de 1,0 polegada, e seu comprimento é de 20,0 polegadas. Uma força vertical de 5,0 lbs é aplicada na extremidade livre da viga engastada e livre. A seguir são apresentados resultados obtidos via elementos finitos.

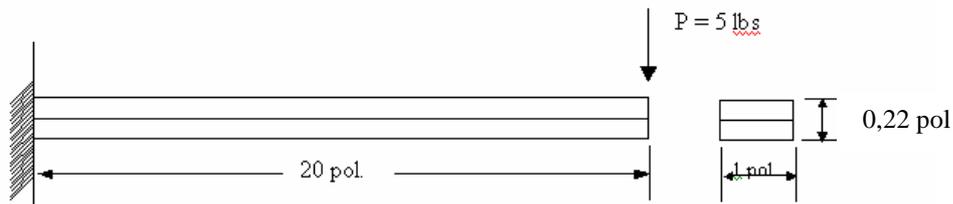


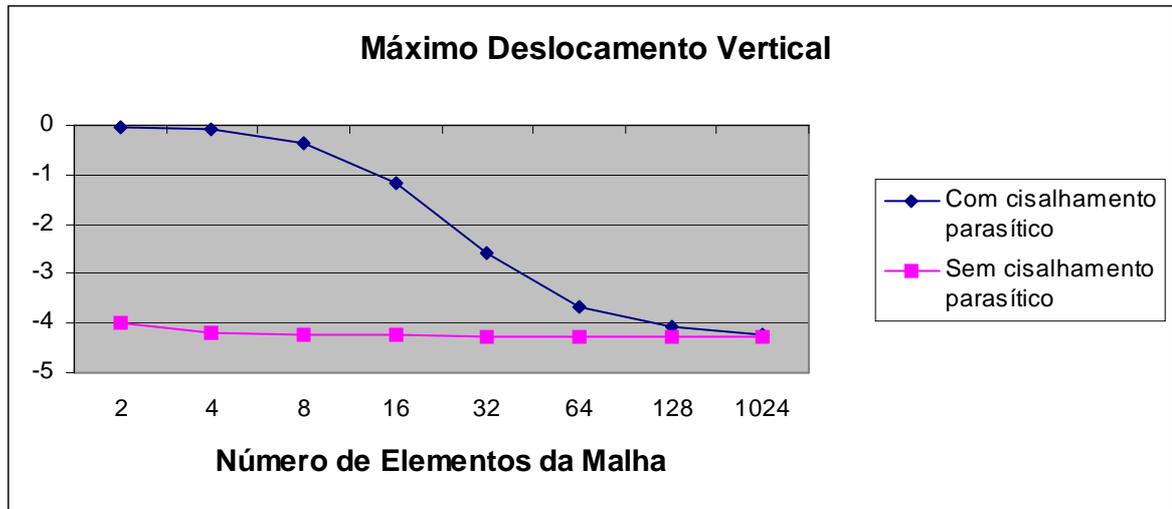
Figura 4.9 Viga laminada engastada e livre não simétrica geral

A tabela 14 compara os valores do máximo deslocamento vertical de uma viga laminada não simétrica geral, para várias malhas, avaliados com e sem cisalhamento parasítico. Observa-se que a convergência só acontece quando o refino atinge uma malha acima de mil elementos. O gráfico 9 mostra a lenta convergência para o máximo deslocamento vertical de uma viga laminada não simétrica geral, engastada e livre, submetida a uma força concentrada na extremidade livre da viga; quando a análise é feita com cisalhamento parasítico, em comparação à análise efetuada sem cisalhamento parasítico.

Tabela 14, Máximo deslocamento vertical ( $w$ ), para viga engastada e livre (não simétrica geral)

Malha	Com cisalhamento parasítico	Sem cisalhamento parasítico	Diferença (%)
2 elementos	$-2,5310 \times 10^{-2}$	$-3,9903 \times 10^0$	15.665,71
4 elementos	$-9,9464 \times 10^{-2}$	$-4,1897 \times 10^0$	4.112,28
8 elementos	$-3,7179 \times 10^{-1}$	$-4,2396 \times 10^0$	1.040,32
16 elementos	$-1,1784 \times 10^0$	$-4,2520 \times 10^0$	260,83
32 elementos	$-2,5748 \times 10^0$	$-4,2551 \times 10^0$	65,26
64 elementos	$-3,6589 \times 10^0$	$-4,2559 \times 10^0$	16,32
128 elementos	$-4,0893 \times 10^0$	$-4,2561 \times 10^0$	4,08
1024 elementos	$-4,2535 \times 10^0$	$-4,2562 \times 10^0$	0,06

Gráfico 9, Máximo deslocamento vertical, viga engastada e livre, empilhamento *não simétrico geral*.

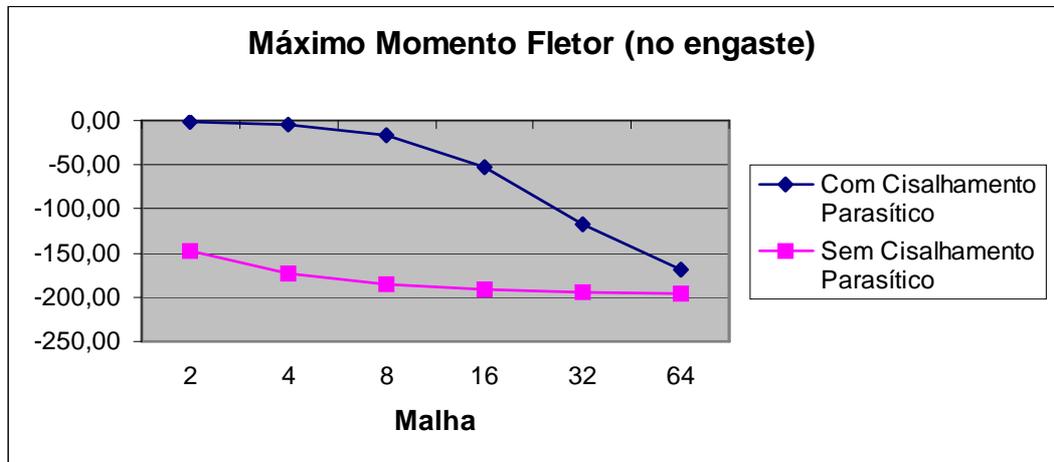


A tabela 15 mostra uma diferença acentuada para o máximo momento resultante de uma viga laminada não simétrica geral, quando a análise é efetuada com e sem cisalhamento parasítico. Os dados da coluna **Diferença** da tabela em questão são maiores que aqueles obtidos para um laminado *cross ply*, conforme a tabela 10. Gráfico 10 mostra a rápida convergência do valor do máximo momento fletor para uma viga laminada não simétrica geral, quando a análise é feita sem os efeitos do cisalhamento parasítico; em contraste com os resultados obtidos quando o elemento finito contém os termos espúrios responsáveis pelos efeitos do cisalhamento parasítico.

Tabela 15, Máximo momento resultante para viga engastada e livre

Malha	Com cisalhamento parasítico	Sem cisalhamento parasítico	Diferença (%)
2 elementos	$-8,8821 \times 10^{-1}$	$-1,4834 \times 10^2$	16.601,00
4 elementos	$-4,0444 \times 10^0$	$-1,7306 \times 10^2$	4.179,00
8 elementos	$-1,6198 \times 10^1$	$-1,8543 \times 10^2$	1.044,77
16 elementos	$-5,3048 \times 10^1$	$-1,9161 \times 10^2$	261,20
32 elementos	$-1,1779 \times 10^2$	$-1,9470 \times 10^2$	65,29
64 elementos	$-1,6870 \times 10^2$	$-1,9624 \times 10^2$	16,32

Gráfico 10, Máximo momento resultante.



A tabela 16 e o gráfico 11 mostram a tensão cisalhante com cisalhamento parasítico avaliada para um mesmo ponto ao longo do comprimento da viga laminada não simétrica geral, para cada lâmina e diferentes malhas, em contraste com a tensão cisalhante constante para uma mesma lâmina quando a análise é feita sem os efeitos do cisalhamento parasítico.

Tabela 16, Tensão cisalhante ao longo da viga engastada e livre – Laminado não simétrico geral.

Tensão Cisalhante $\tau_{xz}$										
Posição (m)	8 elementos c/ cisalhamento parasítico.		16 elementos c/ cisalhamento parasítico.		32 elementos c/ cisalhamento parasítico.		64 elementos c/ cisalhamento parasítico.		s/ cisalhamento parasítico	
	Lâmina 1	Lâmina 2	Lâmina 1	Lâmina 2	Lâmina 1	Lâmina 2	Lâmina 1	Lâmina 2	Lâmina 1	Lâmina 2
0	-33,803	-59,314	-33,803	-59,314	-33,803	-59,314	-33,803	-59,314	-33,803	-59,314
0,125	2.557,6	4.487,8	8.179,4	14.352,2	17.913,0	31.432,0	25.469,0	44.690,0	-33,803	-59,314
0,25	4.408,6	7.735,8	14.046,0	24.647,0	30.732,0	53.926,0	43.685,0	76.654,0	-33,803	-59,314
0,375	5.519,2	9.684,5	17.566,0	30.823,0	38.424,0	67.422,0	54.615,0	95.833,0	-33,803	-59,314
0,5	5.889,4	10.334,0	18.739,0	32.882,0	40.987,0	71.921,0	58.258,0	102.230,0	-33,803	-59,314
0,625	5.519,2	9.684,5	17.566,0	30.823,0	38.424,0	67.422,0	54.615,0	95.833,0	-33,803	-59,314
0,75	4.408,6	7.735,8	14.046,0	24.647,0	30.732,0	53.926,0	43.685,0	76.654,0	-33,803	-59,314
	2.557,6	4.487,8	8.179,4	14.352,0	17.913,0	31.432,0	25.469,0	44.690,0	-33,803	-59,314
1	1.447,0	2.539,0	2.312,8	4.058,3	2.530,0	4.439,4	1.787,8	3.137,1	-33,803	-59,314

Gráfico 11 - Tensão cisalhante da lâmina 2, a partir dos dados da tabela 16

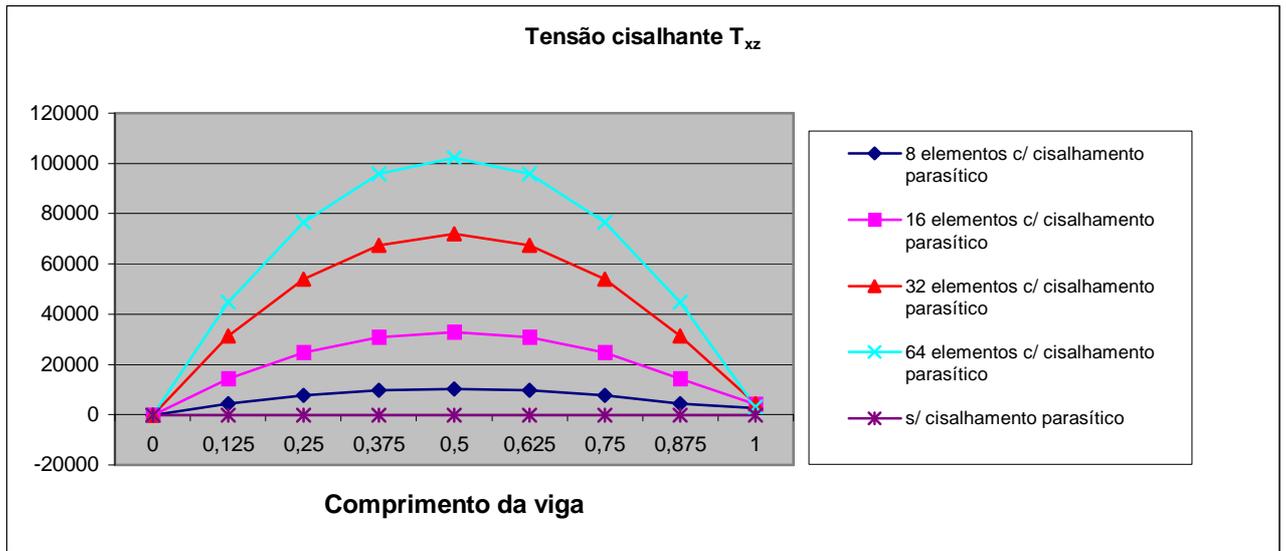


Tabela 17 - Resultante de força cortante ao longo da viga engastada e livre.

RESULTANTE DE FORÇA CORTANTE $Q_{xz}$					
Posição (m)	8 elementos c/ Cisalhamento Parasítico	16 elementos c/ Cisalhamento Parasítico	32 elementos c/ Cisalhamento parasítico	64 elementos c/ Cisalhamento Parasítico	s/ Cisalhamento parasítico
0,000	-5,0000	-5,0000	-5,0000	-5,0000	-5,0000
0,125	378,31	1.209,9	2.649,6	3.767,3	-5,0000
0,250	652,11	2.077,6	4.545,88	6.461,8	-5,0000
0,375	816,38	2.598,3	5.683,5	8.078,4	-5,0000
0,500	871,14	2.771,9	6.062,7	8.617,3	-5,0000
0,625	816,38	2.598,3	5.683,5	8.078,4	-5,0000
0,750	652,11	2.077,6	4.545,8	6.461,8	-5,0000
0,875	378,31	1.209,9	2.649,6	3.767,3	-5,0000
1,000	214,04	3.42,11	3.74,23	2.64,45	-5,0000

O gráfico 12 confirma uma vez mais a distribuição parabólica da resultante de força cortante ao longo do comprimento da viga quando da análise é efetuada com cisalhamento parasítico, demonstrando que para uma viga laminada não simétrica geral também se observa erro qualitativo na análise da referida força.

Gráfico 12, Resultante de força cortante com e sem cisalhamento parasítico.

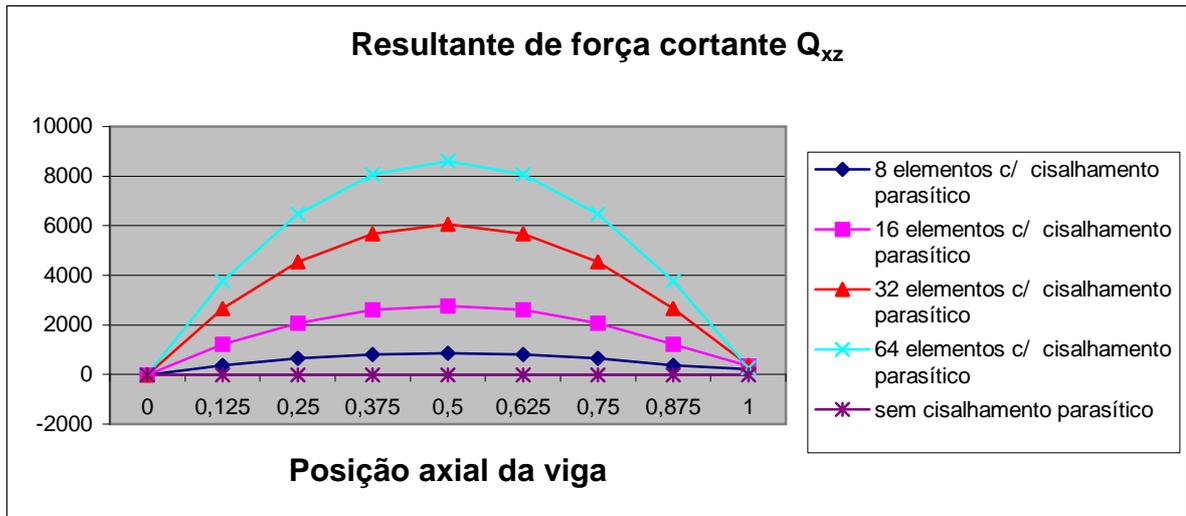


Tabela 18 - tensões avaliadas num ponto fixo do laminado para diferentes malhas.

Tensões avaliadas no meio do vão, da lâmina 2 do laminado geral não simétrico					
		Tensão normal Sigma X		Tensão cisalhante $\tau_{xz}$	
Nó	Malha	C/ cisalhamento parasítico	S/ cisalhamento parasítico	C/ cisalhamento parasítico	S/ cisalhamento parasítico
2	2	-23,154	-3.893,88	648,22	-59,314
3	4	-90,995	-3.893,88	2.721,2	-59,314
5	8	-340,13	-3.893,88	10.334,0	-59,314
9	16	-1.078,0	-3.893,88	32.882,0	-59,314
16	32	-2.355,6	-3.893,88	71.921,0	-59,314
33	64	-3.347,3	-3.893,88	102.230,0	-59,314

Gráfico 13, tensão normal Sigma X, a partir dos dados da Tabela 21.

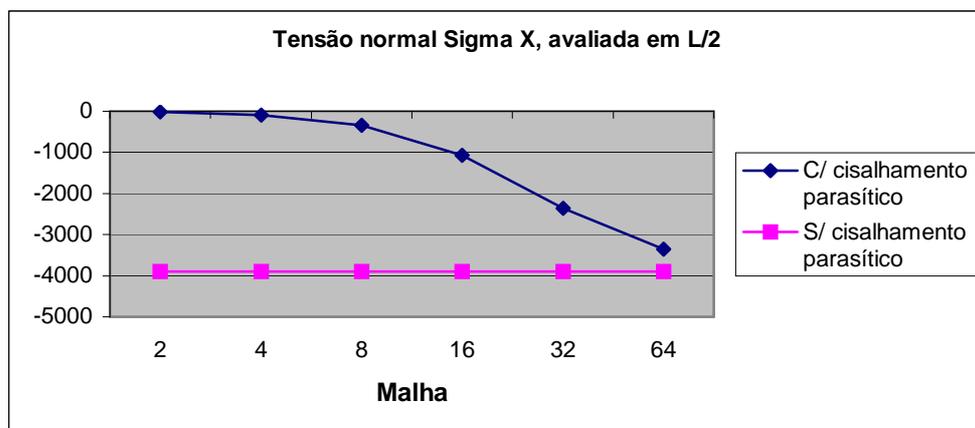
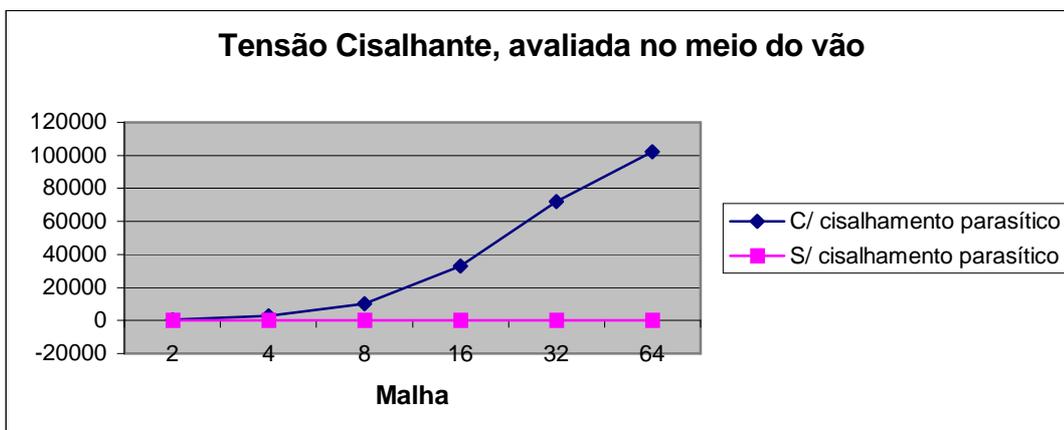


Gráfico 14, tensão Cisalhante  $\tau_{xz}$ , a partir dos dados da Tabela 18



Como mostra a tabela 18, e o gráfico 13 evidencia, a tensão normal Sigma X calculada com e sem cisalhamento parasítico converge para um mesmo resultado. O mesmo não ocorre com a tensão cisalhante  $\tau_{xz}$ , gráfico 14, para a qual não se verifica convergência. Isto já era de se esperar, uma vez que na formulação do elemento foi encontrado (e removido) termo espúrio apenas nas componentes de deformação cisalhante. Aqui também se verifica erro qualitativo na análise da tensão cisalhante com cisalhamento parasítico, erro este não minimizado através do refino.

#### 4.4.7 Exemplo 7

O problema analisado nesta seção consiste de uma viga laminada não simétrica geral. As propriedades mecânicas, dimensões e orientações são as seguintes. Lâmina 1:  $E_x = 2,5E+07$  psi,  $E_y = 1,0E+06$  psi,  $E_z = 2,5E+07$  psi,  $\nu_{yz} = 0,25$ ,  $\nu_{xz} = 0,25$ ,  $\nu_{xy} = 0,25$ ,  $G_{xy} = 2,0E+05$  psi,  $G_{xz} = 5,0E+05$  psi,  $G_{yz} = 5,0E+05$  psi,  $\theta = 30^\circ$ ,  $t = 0,10$  polegadas. Lâmina 2:  $E_x = 1,92E+07$  psi,  $E_y = 1,56E+06$  psi,  $E_z = 1,92E+07$  psi,  $\nu_{yz} = 0,30$ ,  $\nu_{xz} = 0,30$ ,  $\nu_{xy} = 0,30$ ,  $G_{xy} = 5,23E+05$  psi,  $G_{xz} = 8,2E+05$  psi,  $G_{yz} = 8,2E+05$  psi,  $\theta = 30^\circ$ ,  $t = 0,12$  polegadas. A dimensão da base da viga é de 1,0 polegada, e seu comprimento é de 20,0 polegadas. Uma força axial de 10,0 lbs é aplicada na extremidade livre da viga engastada e livre. Ou seja, este problema difere do 4.3.6 apenas em relação ao carregamento. A seguir resultados obtidos via elementos finitos.

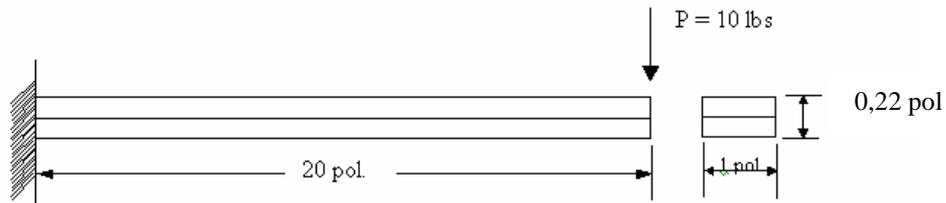


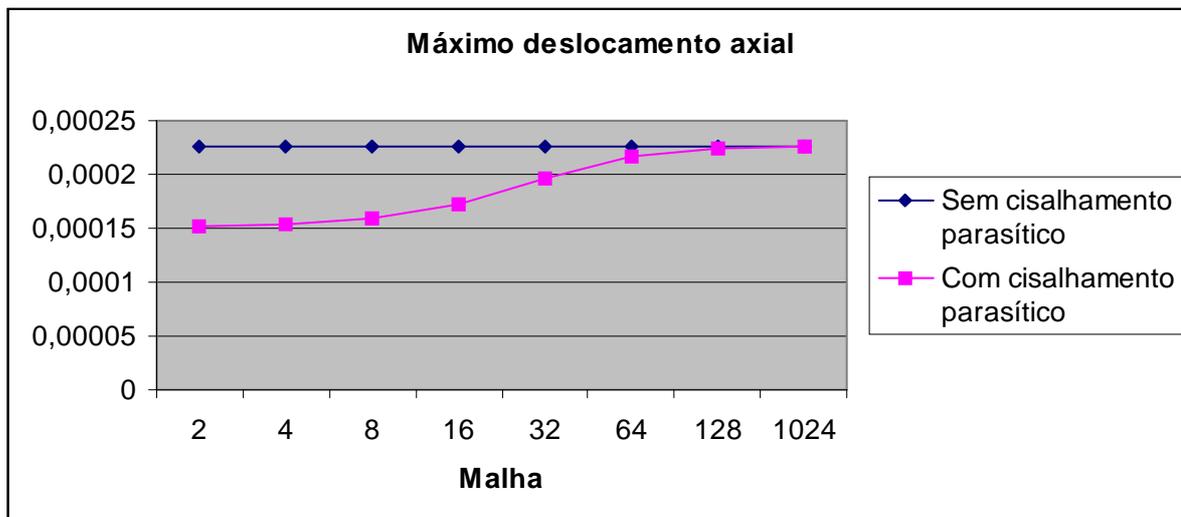
Figura 4.10 Viga laminada engastada e livre não simétrica geral

Tabela 19 Máximos deslocamentos para viga laminada geral não simétrica, com carregamento axial.

Malha	Sem cisalhamento parasítico		Com cisalhamento parasítico	
	Deslocamento axial	Deslocamento vertical	Deslocamento axial	Deslocamento vertical
2	0,00022624	0,021775	0,00015239	0,00012948
4	0,00022624	0,021775	0,00015369	0,00050886
8	0,00022624	0,021775	0,00015844	0,0019021
16	0,00022624	0,021775	0,00017252	0,0060285
32	0,00022624	0,021775	0,00019689	0,013173
64	0,00022624	0,021775	0,00021582	0,018719
128	0,00022624	0,021775	0,00022333	0,020921
1024	0,00022624	0,021775	0,0002262	0,021761

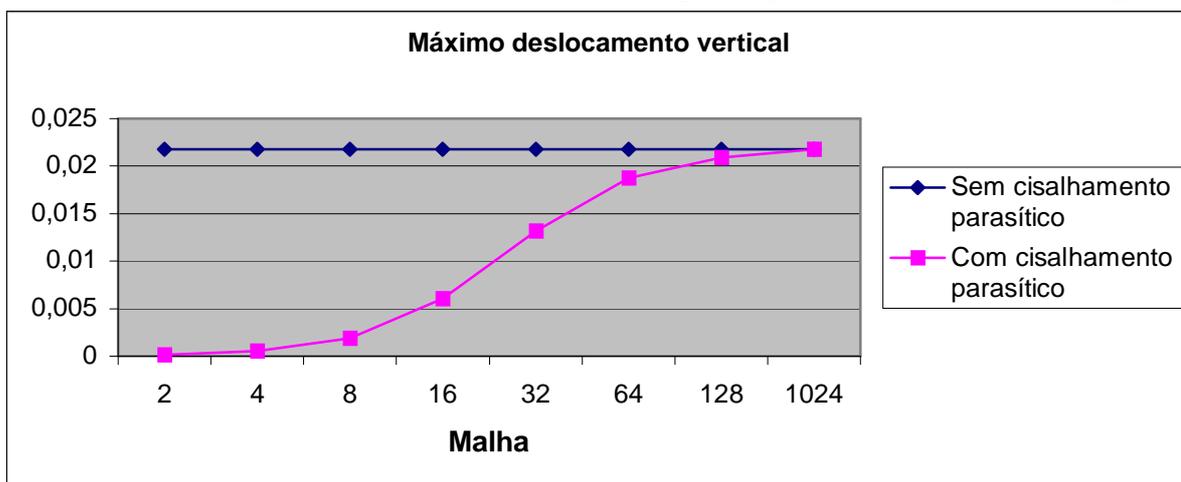
Além da rápida convergência dos dados quando a análise é feita sem os efeitos do cisalhamento parasítico, a tabela 19 mostra os efeitos de acoplamento para o laminado geral não simétrico, engastada e livre, onde se observa inclusive um deslocamento vertical maior que o axial, para a viga laminada submetida a uma força axial.

Gráfico 15, Máximos deslocamentos axial para viga laminada não simétrica geral.



O gráfico 15 mostra o esforço computacional necessário para que haja convergência dos resultados do máximo deslocamento axial para a viga laminada não simétrica geral, engastada e livre, submetida a uma carga axial na extremidade livre da viga, quando os resultados são analisados com cisalhamento parasítico; em comparação aos dados sem cisalhamento parasítico.

Gráfico 16, Máximo deslocamento vertical para viga laminada não simétrica geral.



O gráfico 16, além de mostrar uma vez mais o esforço computacional necessário para que haja convergência dos valores quando a análise é feita com cisalhamento parasítico; evidencia a existência de deslocamento vertical para uma viga laminada não

simétrica geral, engastada e livre, quando esta é submetida a um carregamento axial na extremidade livre, ilustrando a presença de acoplamento entre flexão e deformação axial.

## Capítulo 5

### 5 Conclusão

Este trabalho apresenta a formulação e implementação de um elemento finito de viga para análise de compósitos laminados. Utiliza-se a notação *Strain Gradient*, que é uma notação fisicamente interpretável. Através dessa notação, é possível determinar as características de modelagem do elemento a-priori. Erros de modelagem, inerentes ao processo de formulação, são identificados e reconhecidos como cisalhamento parasítico. Os termos espúrios são removidos facilmente, uma vez que foram precisamente identificados. O elemento foi implementado nas duas versões, com e sem os termos espúrios causadores de cisalhamento parasítico.

Vários laminados são analisados usando modelos com e sem cisalhamento parasítico. Na comparação dos resultados, observa-se que de modo geral o modelo com cisalhamento parasítico converge lentamente devido ao fenômeno de enrijecimento artificial. No entanto, o modelo corrigido mostra-se bastante eficiente, convergindo rapidamente.

Um resultado bastante interessante é identificado nas análises. O modelo contendo o termo espúrio faz uma representação errônea do comportamento de forças e tensões de cisalhamento. Apresenta-se como uma distribuição parabólica ao longo do comprimento da viga quando a solução correta ou é constante ou linear, dependendo do carregamento aplicado. Este erro é classificado como um erro qualitativo, pois, além de errôneo numericamente, apresenta distribuições segundo leis de variação não condizentes com o comportamento físico.

Ao contrário do que seria esperado, o erro na distribuição dos parâmetros de cisalhamento não é atenuado ou removido com o refino de malha. Surpreendentemente, o refino maximiza esse efeito. Portanto, conclui-se que é necessário remover o termo espúrio a-priori para garantir resultados corretos em qualquer análise. Esta conclusão valoriza o emprego da notação *Strain Gradiente*; outras notações largamente utilizadas não conseguem

indicar termos espúrios precisamente, exigindo que artifícios numéricos, como subintegração sejam aplicados para remoção de erros, nem sempre com sucesso absoluto.

Finalmente, pode-se concluir que o elemento finito apresentado é uma contribuição importante na área de análise de compósitos laminados, resguardando as limitações da teoria macromecânica adotada.

Sugestões para trabalhos futuros:

- 1) Desenvolver um elemento finito de viga tridimensional para analisar compósitos laminados que possa representar deformações importantes que não ocorrem no modelo bidimensional.
- 2) Utilizar uma teoria macromecânica mais sofisticada, de modo que fenômenos localizados como delaminação e trincas possam ser moldados.
- 3) Aplicar polinômios de ordem mais elevadas para representar a deformação associada ao cisalhamento conforme outros autores (REDDY, 19884), (LO, 1977), usando a notação *Strain Gradient*.

## Referências Bibliográficas

ABDALLA Fº, João E.. Qualitative and Discretization Error Analysis of Laminated Composite Plate Models, Ph.D. Thesis, Universty of Colorado, Boulder, CO: 1992.

ABDALLA Fº, João E. and Dow, J. O An Error Analysis Approach for Laminated Composite Plate Finite Element Models. Computer & Structures Vol. 52 pp 611 – 616: 1994.

ABDALLA Fº, João E. Elemento Finito Simples para Análise de Placas Laminadas de Material Composto. XVI CILAMCE – Congresso Ibero Latino – Americano de Métodos Computacionais para Engenharia .pp353 – 362: 1995.

ABDALLA Fº, João E. Uma Notação Fisicamente Interpretável para Elementos Finitos. XVIII CILAMCE – Congresso Ibero Latino – Americano de Métodos Computacionais para Engenharia. Brasília: Universidade de Brasília. Vol. III: 1997.

ABDALLA Fº, João E And MACHADO, R. D. Formulation Aspects of a Laminated Composite Timoshenko Beam. XX CILAMCE - Congresso Ibero Latino – Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, São Paulo, pp 244.1-244.11: 1999.

ABDALLA Fº, João E. and CHAMECKI, M. and MACHADO, R. D. A Timoshenko Beam Finite Element for Analyzing Laminated Composites XXI CILAMCE - Congresso Ibero Latino – Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, Rio de Janeiro: 2000.

ABDALLA Fº João E. and FAGUNDES, F. A . and MACHADO, R. D. Effects of Parasitic Shear in the Representation of the Mechanical Behavior of Laminated Composites. Mecânica Computacional Vol. XXI, pp. 2025-2039.S.R. Idelsohn. V.E. Sonzogni and A. Cardona (Eds.) Santa Fe - Paraná, Argentina, October: 2002.

ARGYRIS, J. H. Continua and Discontinua. Proceedings, Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Peterson A. F. B., Ohio, pp. 11 – 189, Oct.: 1965.

AVERILL, R. C. and YIP, Y. C. An efficient thick beam theory and finite element model with zig-zag sublaminates approximations.AIAA J. Vol 34 pp 1627 – 1632:. 1996.

BATHE, Klaus-.Jürgen. Finite Element Procedures Prentice-Hall: New Jersey: 1996

BEER, Ferdinand Pierre e JOHNSTON, E. Russel. Resistência dos Materiais. Makron Books: São Paulo: 1995.

BORESI, Arthur Peter & Ken P. Chong Elasticity in Engineering Mechanics. Englewood Cliffs-Prentice Hall: 1987.

BOSE, P. and REDDY, J.N. Analysis of composite plates using various plate theories Part 1 Formulation and analytical solutions. Structural Engineering and Mechanics, vol 6 No 6,pp 583 – 612: 1998.

BOSE, P. and REDDY, J.N. Analysis of composite plates using various plate theories Part 2 Finite element model and numerical results. Structural Engineering and Mechanics, vol 6 No 7, pp 727 – 746: 1998.

BYRD, D. E. Identification and Elimination of Errors in Finite Element Analysis, Ph.D. Thesis, University of Colorado, Boulder, CO: 1988.

CAMPOS, Anderson D. and KURBAN, Amir E. A.. and SORIANO, humberto L. A Numerical Formulation for Analysis of Orthotropic Laminated Beams XX CILAMCE - Congresso Ibero Latino – Americano de Métodos Computacionais para Engenharia, São Paulo, pp 125.1 – 125.13: 1999.

CHATTERJEE, S. N. and KULKARNI, S. V. Shear Correction Factors for Laminated Plates. AIAA JOURNAL Vol. 17 No 5, pp 498 – 499. May: 1979.

CHO, M. and PARMETER, R. R. Efficient Higher Order Composite Plate Theory for General Lamination Configurations. AIAA J. Vol. 31 pp 1299 – 1306: 1993.

CHO, Y. B. and AVERILL, R. C. An improved theory and finite-element model for laminated composite and sandwich beams using first-order zig-zag sublaminar approximations. Composite Structures vol. 37 No. 3/4 pp. 281 – 298: 1997.

CORTINEZ, Víctor H. and PIOVAN, M. T. and ROSSI, R. E. A Consistent derivation of the Timoshenko's Beam Theory. Structural Engineering and Mechanics, vol 7 No 5, pp 527 – 532: 1999.

COURANT, R. Variational Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 49, pp. 1 – 23: 1943.

DISCIUVA, M. Development of an Anisotropic Multi-layered Shear Deformable Rectangular Plate element. Comput. Struct. Vol. 21. pp 789 – 796: 1985.

DOW, J. O. and HUYER, S. A. An Equivalent Continuum Analysis Procedure for Proposed Space Station Lattice Structures AIAA/ASME/ASCE/AHS 28<sup>th</sup> Structures, Structural Dynamics and Materials Conference, Part 1, pp 1 – 7, Monterey, CA, May 13 – 16: 1987

DOW, J. O., Ho, T. H. , and CABINESS, H.,D., A Generalized Finite Element Evaluation Procedure, ASCE Journal of Structural Engineering, vol. 111, No. 2, , pp. 435-452 Feb.: 1985.

DOW, J. O., and CABINESS, H.,D, and Ho, T.H., A Linear Strain Element with Curved Edges, ASCE Journal of Structural Engineering, vol. 112, No. 4, pp. 692-708 April: 1986.

DOW, J. O and BYRD, D. E. The Identification and Elimination of Artificial Stiffening Errors in Finite Elements. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 26, pp 743 – 762: 1988.

DOW, J. O., and ABDALLA F<sup>o</sup> João E. Qualitative Errors in Laminated Composite Plate Models. International Journal for Numerical Methods in Engineering. Vol. 37, pp 1215- 1230: 1994.

FRATERNALI, F. Energy release rates for delamination of composite beams. Theoretical and applied fracture mechanics. Vol. 25. pp. 225 – 232: 1996.

GANAPATHI, M. and PATEL, B. P. and SARAVANAN, J. and TOURATIER, M. Shear flexible curved spline beam element for static analysis. Finite Elements in Analysis and Design. Vol. 32. pp 181 – 202: 1999.

GANAPATHI, M and MAKHECHA, D. P. Free vibration analysis of multi-layered composite laminates based on an accurate higher-order theory. Composites Part B, Vol. 32 pp 535 – 543: 2001.

GOMES, André L. de Souza e outros. Aplicativo para Escolha de Sequência de Empilhamento em Estruturas de Compósito Laminado. IV SIMEC – Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, Uberlândia MG, pp 611 – 618: 2000.

GUEDES, R. M. and MORAIS, J.J. L. And MARQUES, A. T. And CARDON, A. H. Prediction of long-term behaviour of composite materials. Computers and Structures 76. pp 183 – 194: 2000.

HUEBNER, Kenneth; Earl A . Thorton & Ted. G. Byron. The Finite Element Method for Engineers. 3Ed New York: John Wiley & Sons: 1995.

JONES, R. M. Mechanics of Composite Materials. Hemisphere Publishing CO. New York: 1975.

KAISER, Clemens. Experimental Analysis of Bending-Torsion-Coupled Composite I – Beams. ICCE/7. Seventh Annual international Conference on Composites Engineering pp 407 – 408 .Denver Co:July: 2000.

KRAWCZUK, M. and ZAK, A. and OSTACHOWICZ, W. Elastic beam finite element with a transverse elasto-plastic crack. Finite Elements In Analysis And Design, Vol. 34 pp 61 – 73: 2000.

LAM, S.S.E. and ZOU, G.P. Higher-order shear deformable finite strip for the flexure analysis of composite laminates. Engineering Structures. Vol. 23, pp 198 – 206 February: 2001.

LARDEUR, P. and BATOZ, J. L. Composite Plate Analysis Using A New Discrete Shear Triangular Finite Element. Int. J. Num. Meth. Engng., 27, pp. 343 – 359: 1989.

LEVINSON, M. An Accurate Simple Theory of the Statics and Dynamics of Elastic Plates. Mechanics Research Communications, vol. 7, pp. 343 – 350: 1980.

LO, K. H. and CHRISTENSEN, R. M. and WU, E. M. A High-Order Theory of Plate Deformation. Part 1: Homogeneous Plates. Journal of Applied Mechanics. pp 663 – 668: December 1977.

LO, K. H. and CHRISTENSEN, R. M. and WU, E. M. A High-Order Theory of Plate Deformation. Part 2: Laminated Plates. Journal of Applied Mechanics.. pp 669 – 676 December: 1977.

MACHADO, Roberto D. Desenvolvimento do Método Modificado da Função de Green Local para a Solução de Placas laminadas de Materiais Compostos Tese de Doutorado. UFSC: Florianópolis: 1992.

MAWENYA, A. S. and DAVIES, J. D. Finite Element Bending Analysis of Mult Layer Plates International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 8 pp 215 – 225: 1974.

MENEZES, F. A . and DEVLOO, P. R. B. Elementos Finitos Adaptativos Aplicados ao Cálculo de Cascas de Material Composto. Computational Methods in engineering'99. pp 235.1 – 235.24: 1999.

MICROSOFT CORPORATION. Fortran Powerstation Programmer's Guide.USA: 1995.

MICROSOFT CORPORATION. Fortran Powerstation Reference.USA: 1995

MINDLIN, R. D. Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates. Journal of Appl. Mech., 31 38: 1951.

MITCHELL, J. A . and REDDY, J. N. A hierarchical iterative procedure for the analysis of composite laminates. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. vol. 181 pp. 237 – 260 2000.

MORTENSEN, F. and THOMSEN, O. T. A simple approach for the analysis of embedded ply drops in composite and sandwich laminates. Composites Science and Technology, Vol. 59 pp 1213 - 1226: 1999.

MUKHERJEE, S. and REDDY, J. N. and KRISHNAMOORTHY, C. S. Convergence properties and derivative extraction of the superconvergent Timoshenko beam finite element. Computer methods in applied mechanics and engineering. vol. 190 pp. 3475 – 3500 2001.

MURTHY, M. V. V. An Improved Transverse Shear Deformation Theory for Laminated Anisotropic Plates. NASA Technical Paper 1903, Nov.: 1981.

NETTER, Frank H. Atlas de Anatomia Humana. Editora Artes Médicas. Porto Alegre:1998.

NOOR, A. K. Bibliography of Books and Monographs on Finite Element Technology. Applied Mechanics Reviews, Vol. 44, No. 6 pp. 307 – 317, June: 1991.

- OLIVEIRA, Eduardo R. A. Completeness and Convergence in the Finite Element Method Laboratório Nacional de Engenharia Civil. Memória 373. Lisboa: 1971 a. .
- OLIVEIRA, Eduardo R. A. Theoretical Foundations of the Finite Element Method Laboratório Nacional de Engenharia Civil. Memória 384. Lisboa: 1971 b .
- OZDIL, F. and CARLSSON, L.. A. Beam analysis of angle-ply laminate DCB specimens. Composites Science and Technology. Vol. 59 pp. 305 – 315: 1999.
- PAGANO, N. J. Exact solutions for Composite Laminates in Cylindrical Bending. Journal of Composite Materials. Vol. 3 pp 398 – 411: 1969.
- REDDY, J. N. A simple higher-order theory for laminated composite plates. Journal of Applied Mechanics. vol. 51 pp 745 –752. December: 1984.
- REDDY, J. N On Refined Computational Models of Composite Laminates International Journal of Numerical Methods in Engineering Vol. 27 pp 361 – 382: 1989.
- REDDY, J. N. On locking-free shear deformable beam finite elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. vol. 149 pp. 113 – 132: 1997.
- REDDY, J. N. and WANG, C.M. An overview of the relationships between solutions of the classical and shear deformation plate theories. Journal of Composites Science and Technology. vol. 60 pp. 2327 – 2335: 2000.
- REISSNER, E The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. J. Appl. Mech., 12, 69 – 77: 1945.
- ROBERT D. Cook, David S. Malkus & Michael E. Plesha. Concepts and Applications of Finite Element Analysis. 3 Ed. New York: John Wiley & Sons: 1989.
- ROCHE, C. H. and ACCORSI, M. L. A new finite element for global modeling of delaminations in laminated beams. Finite Elements in Analysis and Design. Vol. 31. pp. 165 – 177: 1998.
- SALARI, M. R. and SPACONE, E. Finite element formulations of one-dimensional elements with bond-slip. Engineering Structures. Vol. 23, pp 815 – 826: 2001.
- SHIMPI, R. P. and AINAPURE, A . V. A beam finite element based on layerwise trigonometric shear deformation theory. Journal of Composite Structures. vol. 53,. pp 153 – 162: 2001.
- SINGH, G. and RAO, G. V. A discussion on simple third-order theories and elasticity approaches for flexure of laminated plates. Structural Engineering and Mechanics. vol. 3 No 2, pp 121 – 133: 1995.

SYNGE, J. L. The Hypercircle in Mathematical Physics. Cambridge University Press, London: 1957.

TENEK, Lazarus T. and ARGYRIS, J. Finite Element Analysis for Composite Structures Kluwer Academic Publishers: Dordrecht: 1998.

TESSLER, A. and SAETHER, E. A Computationally Viable Higher-Order Theory for Laminated Composite Plates. International Journal for numerical Methods in Engineering. pp. 1069 – 1086: 1991.

TSAI, S. W. And HAHN, H. T. Introduction to Composite Materials. Technomic Publishing Company. Lancaster, Pennsylvania: 1980.

VINSON, J. R. and SIERAKOWSKI, R.L., The Behavior of Structures Composed Composite Materials, Martinus Nijhoff Publishers, Boston: 1986.

WANG, C.M. and LIM, G. T. and Reddy, J. N. and LEE, K. H. Relationships between bending solutions of Reissner and Mindlin plate theories. Engineering Structures. vol.23 pp. 838 – 849: 2001.

WHITNEY, J. M. and LEISSA, A. W. Analysis of Heterogeneous Anisotropic Plates. Journal of Applied Mechanics. pp 261 – 266: 1969.

WHITNEY, J. M. and PAGANO, N. J. Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates. Journal of Applied Mechanics. pp 1031 – 1036: 1970.

YUAN, Fuh G. and MILLER, Robert E. A New Finite Element for Laminated Composite Beams. Computers & Structures Vol. 31 No 5 pp. 737 – 745: 1989.

ZIENKIEWICZ, O. C. and TAYLOR, R. L. The Finite Element Method, Vol. 1 McGraw-Hill Book Company. London: 1989.

ZIVKOVIC, M. and KOJIC, M. and SLAVKOVIC, R. and GRUJOVIE, N. A general beam finite element with deformable cross-section. Computer methods in applied mechanics and engineering. vol. 190 pp. 2651 – 2680: 2001.

## Anexo A

### COEFICIENTES DE STRAIN GRADIENTS

Para polinômio de até terceira ordem

ORDEM	TERMO	a <sub>i</sub> para u(x,y,z)	b <sub>i</sub> para v(x,y,z)	c <sub>i</sub> para w(x,y,z)
0	1	$u_{rb}$	$V_{rb}$	$w$
1	X Y Z	$\epsilon_x$ $\gamma_{xy}/2 - r_{rb}$ $q + \gamma_{xz}/2$	$\gamma_{xy}/2 + r_{rb}$ $\epsilon_y$ $\gamma_{yz}/2 - p$	$\gamma_{xy}/2 - q$ $\gamma_{yz}/2 + p$ $\epsilon_z$
2	X <sup>2</sup> Xy XZ Y <sup>2</sup> YZ Z <sup>2</sup>	$1/2 \epsilon_{x,x}$ $\epsilon_{x,y}$ $\epsilon_{x,z}$ $1/2 (\gamma_{xy,x} - \epsilon_{y,x})$	$1/2 (\gamma_{xy,x} - \epsilon_{x,y})$ $\epsilon_{y,x}$ $(\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} - \gamma_{xz,y})/2$ $1/2 \epsilon_{y,y}$	$(\gamma_{xz,x} - \epsilon_{x,z})/2$ $(-\gamma_{xy,z} + \gamma_{yz,x} + \gamma_{xz,y})/2$ $\epsilon_{z,x}$ $(\gamma_{yz,y} - \epsilon_{y,z})/2$
3	X <sup>3</sup> X <sup>2</sup> y Xy <sup>2</sup> Y <sup>3</sup>	$1/6 \epsilon_{x,xx}$ $1/2 \epsilon_{x,xy}$ $1/2 \epsilon_{x,yy}$ $1/6 (\gamma_{xy,yy} - \epsilon_{y,xy})$	$1/6 (\gamma_{xy,xx} - \epsilon_{x,xy})$ $1/2 \epsilon_{y,xx}$ $1/2 \epsilon_{y,xy}$ $1/6 \epsilon_{y,yy}$	$(\gamma_{xz,xx} - \epsilon_{x,xz})/6$ $(\gamma_{xz,xy} - \epsilon_{x,yz})/2$ $(\gamma_{yz,xy} - \epsilon_{y,xz})/2$ $(\gamma_{yz,yy} - \epsilon_{y,yz})/6$