Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica
Curso: Doutorado em Engenharia Mecânica
Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos Computacional

MODELAGEM TRIDIMENSIONAL DA INTERAÇÃO DINÂMICA ENTRE VEÍCULO E PONTE FERROVIÁRIA CONSIDERANDO CONTATO RODA-TRILHO, IRREGULARIDADES DA VIA E VARIAÇÃO DA VELOCIDADE

Curitiba
2011

Fernando Luiz Martinechen Beghetto

MODELAGEM TRIDIMENSIONAL DA INTERAÇÃO DINÂMICA ENTRE VEÍCULO E PONTE FERROVIÁRIA CONSIDERANDO CONTATO RODA-TRILHO, IRREGULARIDADES DA VIA E VARIAÇÃO DA VELOCIDADE

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica.

Orientador: **Prof. João Elias Abdalla Filho, Ph. D.**

Curitiba
2011

RESUMO

O estudo da interação dinâmica tridimensional entre veículo e ponte ferroviária considerando a mecânica de contato entre as rodas e os trilhos, frente à variação de velocidade e a presença das irregularidades da via é realizado através de análises numéricas computacionais. O modelo tridimensional do veículo ferroviário é composto pela associação de corpos rígidos conectados a sistemas de suspensões. As vinte e cinco equações de movimento do veículo são obtidas através do equilíbrio dinâmico. As irregularidades da via são representadas através de funções harmônicas. O modelo de contato mecânico entre as rodas e os trilhos é embasado nas teorias de *Hertz* e de *Kalker*. Considera-se no modelo de contato mecânico a variação do coeficiente de atrito entre rodas e trilhos em função da velocidade, e das condições de contaminações entre as superfícies em contato. No modelo de saturação do contato baseando-se na lei do atrito de *Coulomb*, é inserido o modelo de *Vermeulen* e *Johnson*, restringindo-se as forças tangenciais de contato e o momento de rotação *spin* das rodas segundo um polinômio cúbico, de modo a contemplar as não linearidades geométricas devido aos perfis das rodas e dos trilhos, bem como, os limites de aderência no contato entre rodas e trilhos. A estrutura da ponte ferroviária em concreto é predominantemente formada por duas vigas simétricas, paralelas, e bi-apoiadas, as quais são representadas no modelo numérico computacional, por elementos finitos de pórtico tridimensional embasados na teoria de *Euler-Bernoulli*. No amortecimento estrutural é usado o método de *Rayleigh*. Os esforços provenientes do tráfego do veículo são transmitidos aos trilhos da ponte através da mecânica do contato entre as rodas e os trilhos. O modelo de composição ferroviária é obtido através da associação de veículos. As equações de movimento dos sistemas estruturais são integradas numericamente utilizando-se o método de *Newmark*. Todos estes modelos matemáticos são implementados no software MATLAB[1]. Referentes ao estudo do comportamento dinâmico do veículo ferroviário, e ao estudo do contato mecânico entre rodas e trilhos são apresentadas: a análise modal do veículo; a análise de vibração forçada do veículo nas condições de ressonância, sob diferentes condições de velocidade e irregularidades da via; a análise dinâmica do contato entre as rodas e os trilhos; e a análise dos deslizamentos e da perda de contato entre as rodas e os trilhos, combinando-se os modelos de irregularidades da via, variando-se a velocidade do veículo, e considerando-se os trilhos contaminados com óleo. Referentes ao estudo da ponte ferroviária são apresentadas: a análise modal da ponte; e a análise de vibração forçada na ponte produzida pelo tráfego do veículo ferroviário, e da composição Trem Unidade Elétrico (TUE), sob diferentes condições de velocidade e irregularidades da via, abordando-se as condições de ressonância da ponte produzidas pelo tráfego tanto do veículo ferroviário quanto da composição TUE. Os resultados obtidos nas análises numéricas são interpretados e analisados.

Palavras-chave: Veículo Ferroviário, Ponte Ferroviária, Contato Mecânico, Irregularidades da Via, Método dos Elementos Finitos.

[1] MATLAB: *Matrix Laboratory*, *software* comercial criado por *Cleve Moler* na década de 1970. (GRIFFITHS, D. F. 1996).

ABSTRACT

The study of three-dimensional interaction between vehicle and railway bridge considering the contact mechanic between wheels and rails due to speed and track irregularities variation is realized through computational numerical analyses. The three-dimensional railway vehicle model is composed of an association of rigid bodies connected in suspension systems. The twenty five equations of motion of vehicle are obtained through dynamic equilibrium. The railway track irregularities are represented by harmonic functions. The mechanic contact between wheels and rails model is based on *Hertz* and *Kalker* theories. In this model are considered friction coefficient variation with respect to speed and contact surfaces contamination. In the contact saturation based on *Coulomb's* friction law is introduced the *Vermeulen* and *Johnson*'s model which restrict the tangential contact forces and spin rotation moments of wheels with a cubic polynomial to contemplate the geometric nonlinearities due to wheels and rails contours, and also the adhesion limit contact between wheels and rails. The railway bridge structure in concrete is composed by two symmetric parallel simply supported beams, which are represented in numeric computational model with three-dimensional frame elements based on the *Euler-Bernoulli* assumption. In the structural damping is used the *Rayleigh*'s method. The vehicle traffic loads are transmitted to bridge's rails through contact mechanic between wheels and rails. The railway composition model is obtained by the vehicle's association. The equations of motion of structural systems are numerically integrated using *Newmark's* method. All theses models are implemented in MATLAB software. With respect to the dynamic behavior of railway vehicle and the mechanic contact between wheels and rails are presented: the railway vehicle modal analysis; the railway vehicle forcing vibration analysis in resonances conditions due to speed and track irregularities variation; the dynamic analysis of contact between wheels and rails; and the slip analysis and loss contact between wheels and rails considering speed and track irregularities variation, and also the rail's contact surfaces contaminated with oil. With respect to the dynamic behavior of railway bridge are presented: the railway bridge modal analysis; and the railway bridge forcing vibration analysis due to vehicle and composition traffic considering speed and track irregularities variation and also on the bridge's resonances conditions. The results obtained in numerical analyses are interpreted and analyzed.

Keywords: Railway Vehicle, Railway Bridge, Mechanic Contact, Track Irregularities, Finite Element Method.

Dedico este trabalho aos meus amados pais (Luiz Carlos & Anita),
e amados irmãos (João Luiz, Abraão Luiz e Luiz Carlos Filho).

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus por ter me concedido saúde, sanidade, proteção e perseverança para a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus amados pais Luiz Carlos e Anita por terem me oferecido todas as condições necessárias para a execução deste trabalho, e sempre me incentivarem.

Agradeço aos meus amados irmãos João Luiz, Abraão Luiz e Luiz Carlos Filho por conviverem comigo durante os momentos mais difíceis e sempre me apoiarem.

Agradeço ao Professor João Elias Abdalla Filho por ter me orientado na dissertação de mestrado, e também nesta tese de doutorado.

Agradeço também aos professores do PPGEM/PUCPR, Renato Barbieri, Nilson Barbieri, Roberto Dalledone Machado e Viviana Cocco Mariani pelo conhecimento transmitido nas aulas, e as orientações fornecidas durante o curso.

Agradeço a CAPES pelo suporte financeiro através da concessão da BOLSA CAPES II.

Agradeço aos colegas professores do DACOC/UTFPR, pelo convívio e companheirismo.

Agradeço também aos colegas Ivan Moura Belo, Ricardo José Bertin e Luiz Carlos Winikes pelo companheirismo e incentivo.

Agradeço a Jane por sua presteza na realização de grandes favores e pelos cafezinhos.

Enfim, agradeço a todos que estiveram ligados direta e indiretamente a este trabalho, e aqueles que conviveram comigo durante a execução deste, o meu humilde:

Muito obrigado, e que Deus abençoe a todos!

"*Deixarei contudo que o pouco que aprendi seja conhecido, de modo que alguém melhor do que eu possa adivinhar a verdade, provando e refutando meus erros com seu trabalho. Isso me dará prazer, pois terei sido um meio para trazer à luz a verdade*".

Albrecht Dürer

SUMÁRIO

RESUMO.....3
ABSTRACT.....4
SUMÁRIO.....8
LISTA DE FIGURAS.....11
LISTA DE TABELAS.....16
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS.....17
LISTA DE SÍMBOLOS.....19

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO.....27

1.1 Apresentação.....27
1.2 Motivação.....27
1.3 Objetivo.....28
1.4 Metodologia.....28
1.5 Conteúdo do trabalho.....29

CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....31

2.1 Revisão bibliográfica.....31

CAPÍTULO 3 – MODELOS MATEMÁTICOS.....48

3.1 Modelo tridimensional de veículo ferroviário.....49
3.1.1 Deslocamentos das suspensões.....52
3.1.1.1 Equações dos deslocamentos verticais das suspensões primárias.....54
3.1.1.2 Equações dos deslocamentos verticais das suspensões secundárias.....54
3.1.1.3 Equações dos deslocamentos das ligações laterais.....55
3.1.1.4 Equações dos deslocamentos das ligações rotacionais.....55
3.1.2 Irregularidades da via.....56
3.1.2.1 Irregularidades verticais.....57
3.1.2.2 Irregularidades laterais.....58
3.1.2.3 Irregularidades rotacionais.....61
3.1.3 Forças nas suspensões e ligações.....61
3.1.3.1 Forças nas suspensões primárias.....61
3.1.3.2 Forças nas suspensões secundárias.....62
3.1.3.3 Forças nas ligações laterais.....62
3.1.3.4 Forças nas ligações rotacionais.....62
3.1.4 Equações de movimento.....62
3.1.4.1 Equações de movimento do carro.....63
3.1.4.1.1 Translação vertical do carro (*bouncing*).....63
3.1.4.1.2 Rotação no eixo longitudinal do carro (*rolling*).....63
3.1.4.1.3 Rotação no eixo transversal do carro (*pitching*).....63
3.1.4.2 Equações de movimento do truque dianteiro.....64
3.1.4.2.1 Translação vertical do truque dianteiro (*bouncing*).....64
3.1.4.2.2 Rotação no eixo longitudinal do truque dianteiro (*rolling*).....64
3.1.4.2.3 Rotação no eixo transversal do truque dianteiro (*pitching*).....64
3.1.4.3 Equações de movimento do truque traseiro.....65

3.1.4.3.1 Translação vertical do truque traseiro (*bouncing*).....65
3.1.4.3.2 Rotação no eixo longitudinal do truque traseiro (*rolling*).....65
3.1.4.3.3 Rotação no eixo transversal do truque traseiro (*pitching*).....66
3.1.4.4 Equações de movimento do eixo 1.....66
3.1.4.4.1 Translação vertical do eixo 1 (*bouncing*).....66
3.1.4.4.2 Translação lateral do eixo 1 (*lateral*).....66
3.1.4.4.3 Rotação no eixo horizontal do eixo 1 (*rolling*).....67
3.1.4.4.4 Rotação no eixo vertical do eixo 1 (*yawing*).....67
3.1.4.5 Equações de movimento do eixo 2.....67
3.1.4.5.1 Translação vertical do eixo 2 (*bouncing*).....67
3.1.4.5.2 Translação lateral do eixo 2 (*lateral*).....68
3.1.4.5.3 Rotação no eixo horizontal do eixo 2 (*rolling*).....68
3.1.4.5.4 Rotação no eixo vertical do eixo 2 (*yawing*).....68
3.1.4.6 Equações de movimento do eixo 3.....68
3.1.4.6.1 Translação vertical do eixo 3 (*bouncing*).....69
3.1.4.6.2 Translação lateral do eixo 3 (*lateral*).....69
3.1.4.6.3 Rotação no eixo horizontal do eixo 3 (*rolling*).....69
3.1.4.6.4 Rotação no eixo vertical do eixo 3 (*yawing*).....69
3.1.4.7 Equações de movimento do eixo 4.....70
3.1.4.7.1 Translação vertical do eixo 4 (*bouncing*).....70
3.1.4.7.2 Translação lateral do eixo 4 (*lateral*).....70
3.1.4.7.3 Rotação no eixo horizontal do eixo 4 (*rolling*).....70
3.1.4.7.4 Rotação no eixo vertical do eixo 4 (*yawing*).....71
3.2 Modelo de contato entre rodas e trilhos.....71
3.2.1 Teoria do contato de *Hertz*.....72
3.2.1.1 Teoria do contato de *Hertz* entre roda e trilho.....76
3.2.1.1.1 Tensões de contato *Hertziano* entre roda e trilho.....76
3.2.1.1.2 Coeficiente de atrito entre roda e trilho.....81
3.2.2 Teoria linear de *Kalker* do contato entre roda e trilho.....82
3.2.2.1 Escorregamentos.....90
3.2.2.2 Forças de contato.....93
3.2.2.2.1 Saturação do contato.....95
3.3 Modelos de elementos finitos.....97
3.3.1 Elemento finito de barra submetido à força axial.....98
3.3.2 Elemento finito de barra submetido à torção.....103
3.3.3 Teoria de viga de *Euler-Bernoulli*.....107
3.3.3.1 Elemento finito de viga.....110
3.3.4 Elemento finito de pórtico tridimensional.....114
3.4 Modelo da ponte ferroviária.....115
3.4.1 Modelo da ponte ferroviária em elementos finitos.....118
3.4.2 Sistema equivalente: transferência dos trilhos para as vigas.....122
3.4.3 Distribuição das forças do veículo na estrutura da ponte.....124

CAPÍTULO 4 – ANÁLISES NUMÉRICAS.....127

4.1 Metodologia de análise.....127
4.2 Análise dinâmica do veículo.....129
4.2.1 Análise modal do veículo.....129
4.2.2 Análise de vibração forçada nas condições de ressonância do veículo.....138
4.2.3 Análise dinâmica do contato entre as rodas e os trilhos.....157

4.2.4 Análise dos deslizamentos e da perda de contato entre as rodas e os trilhos.....168
4.3 Análise dinâmica da ponte.....172
4.3.1 Análise modal da ponte.....172
4.3.2 Análise de vibração forçada na ponte produzida pelo veículo ferroviário.....181
4.3.3 Análise de vibração forçada na ponte produzida pela composição TUE.....201

CAPÍTULO 5 – CONSIDERAÇÕES FINAIS.....215

5.1 Resumo e conclusões.....215
5.2 Sugestões para trabalhos futuros.....221

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....223
APÊNDICE A.....233
APÊNDICE B.....244
APÊNDICE C.....256
APÊNDICE D.....261
APÊNDICE E.....262

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Fluxograma do algoritmo numérico computacional.....48
Figura 2 – Modelo tridimensional de veículo ferroviário.....50
Figura 3 – Graus de liberdade do modelo tridimensional de veículo ferroviário.....51
Figura 4 – Geometria das suspensões, das ligações e graus de liberdade.....53
Figura 5 – Geometria das irregularidades da via.....56
Figura 6 – Pontos de contato entre as rodas e os trilhos.....56
Figura 7 – Modelo de irregularidades verticais da via.....57
Figura 8 – Jogo da via.....58
Figura 9 – Modelo de irregularidades laterais da via.....58
Figura 10 – Movimento plano do rodeiro na via.....60
Figura 11 – Determinação da amplitude *AR*.....60
Figura 12 – *Heinrich Rudolf Hertz* (1857 – 1894).....72
Figura 13 – Área de contato entre duas lentes cilíndricas iguais.....72
Figura 14 – Corpos elásticos em contato mecânico.....73
Figura 15 – Distribuição de pressões na superfície de contato.....74
Figura 16 – Contato entre roda e trilho: raios principais de curvatura.....76
Figura 17 – Pontos da elipse de contato.....77
Figura 18 – Tensões principais na origem.....78
Figura 19 – Tensões principais na superfície da elipse de contato.....78
Figura 20 – Decomposição das forças em relação à conicidade e a rotação dos eixos.....79
Figura 21 – Coeficiente de atrito dinâmico entre a roda e o trilho.....81
Figura 22 – *Joost J. Kalker* (1933 – 2006).....82
Figura 23 – Aderência e escorregamento na superfície elíptica de contato.....83
Figura 24 – Distribuição das tensões na elipse de contato segundo *Kalker*.....84
Figura 25 – Movimento da roda sobre o trilho e convenções.....85
Figura 26 – Vetor posição (***r***) do ponto (*P*) e suas convenções.....85
Figura 27 – Vetor velocidade (***v***) do ponto (*P*) e suas convenções.....86
Figura 28 – Vetor aceleração (***a***) do ponto (*P*) e suas convenções.....86
Figura 29 – Variação do raio de rotação da roda.....87
Figura 30 – Rodeiro em curva.....88
Figura 31 – Casos de contato entre roda e trilho.....89
Figura 32 – Velocidades translacionais e circunferenciais da roda.....89

Figura 33 – Componente (ω_z) devido à conicidade (δ).....90
Figura 34 – Movimentos do rodeiro no plano horizontal.....91
Figura 35 – Formatos das áreas de contato segundo *Kalker*.....93
Figura 36 – Contato roda-trilho, rigidez, forças, e escorregamentos segundo *Kalker*.....94
Figura 37 – Comparação entre e Lei de *Coulomb* e o modelo de *Vermeulen* e *Johnson*.....96
Figura 38 – Relação entre a força tangencial ajustada e o escorregamento.....97
Figura 39 – Elemento finito de barra.....98
Figura 40 – Funções de forma para o elemento finito de barra.....99
Figura 41 – Elemento finito de barra submetido à torção.....103
Figura 42 – Viga submetida ao carregamento transversal uniformemente distribuído.....108
Figura 43 – Distribuição das tensões axiais na secção da viga.....108
Figura 44 – Configuração deformada da viga flexionada.....109
Figura 45 – Elemento finito de viga e seus graus de liberdade.....110
Figura 46 – Representação das funções cúbicas de *Hermite*.....111
Figura 47 – Elemento finito de pórtico tridimensional e seus graus de liberdade.....114
Figura 48 – Secção transversal da ponte ferroviária e suas dimensões.....116
Figura 49 – Planta da ponte ferroviária e suas dimensões.....117
Figura 50 – Corte AA da ponte ferroviária e suas dimensões.....117
Figura 51 – Vista longitudinal da ponte ferroviária e suas dimensões.....117
Figura 52 – Secções 0-7 da ponte ferroviária e suas dimensões.....118
Figura 53 – Secções 8-12 da ponte ferroviária e suas dimensões.....118
Figura 54 – Modelo em elementos finitos de pórtico tridimensional.....119
Figura 55 – Secções transversais da viga e suas dimensões.....119
Figura 56 – Modos naturais de vibração de uma viga bi-apoiada.....121
Figura 57 – Secção transversal da ponte e suas respectivas excentricidades.....122
Figura 58 – Sistema de forças e momentos do veículo aplicado nos trilhos.....123
Figura 59 – Sistema equivalente de forças e momentos nas vigas.....123
Figura 60 – Atualização das forças em cada elemento finito.....125
Figura 61 – Tempo de processamento.....128
Figura 62 – 1º modo de vibração do veículo ferroviário.....133
Figura 63 – 2º modo de vibração do veículo ferroviário.....133
Figura 64 – 3º modo de vibração do veículo ferroviário.....134
Figura 65 – 4º modo de vibração do veículo ferroviário.....134
Figura 66 – 5º modo de vibração do veículo ferroviário.....135

Figura 67 – 6º modo de vibração do veículo ferroviário.....135
Figura 68 – 7º modo de vibração do veículo ferroviário.....136
Figura 69 – 8º modo de vibração do veículo ferroviário.....136
Figura 70 – 9º modo de vibração do veículo ferroviário.....137
Figura 71 – 10º modo de vibração do veículo ferroviário.....137
Figura 72 – Deslocamento lateral dos eixos 1, 2, 3, e 4.....141
Figura 73 – Veículo e comprimento de irregularidade vertical.....142
Figura 74 – Deslocamento vertical do carro e dos truques na condição de ressonância.....142
Figura 75 – Deslocamento vertical dos eixos na condição de ressonância.....143
Figura 76 – Deslocamento vertical do carro, do truque dianteiro, e do eixo 1.....143
Figura 77 – Aceleração vertical do carro (*bouncing*).....144
Figura 78 – Veículo e comprimento de irregularidade vertical.....145
Figura 79 – Deslocamento da rotação (*pitching*) do carro na condição de ressonância.....145
Figura 80 – Aceleração de rotação (*pitching*) do carro.....146
Figura 81 – Veículo e modelo de irregularidade vertical.....146
Figura 82 – Deslocamento da rotação (*rolling*) do carro, e dos truques.....147
Figura 83 – Deslocamento da rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4.....147
Figura 84 – Deslocamento da rotação (*yawing*) dos eixos 1, 2, 3, e 4.....148
Figura 85 – Deslocamento da rotação (*rolling*) do carro, e dos truques.....149
Figura 86 – Deslocamento da rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4.....150
Figura 87 – Aceleração de rotação (*rolling*) do carro.....150
Figura 88 – Veículo e modelo de irregularidade vertical.....151
Figura 89 – Deslocamento da rotação (*pitching*) dos truques dianteiro e traseiro.....151
Figura 90 – Deslocamento vertical dos eixos 1, 2, 3, e 4.....152
Figura 91 – Deslocamento vertical dos truques dianteiro e traseiro.....153
Figura 92 – Deslocamento vertical dos eixos 1, 2, 3, e 4.....153
Figura 93 – Deslocamento da rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4.....154
Figura 94 – Deslocamento da rotação (*rolling*) dos truques dianteiro e traseiro.....155
Figura 95 – Deslocamento da rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4.....155
Figura 96 – Dimensões dos semi-eixos da elipse de contato.....158
Figura 97 – Área da elipse de contato.....158
Figura 98 – Tensões de compressão nas direções principais no ponto $P_0 = (0,0,0)$.....159
Figura 99 – Tensões cisalhantes nos pontos $P_a = (a,0,0)$ e $P_b = (0,b,0)$.....160
Figura 100 – Escorregamentos longitudinal e transversal.....161

Figura 101 – Forças tangenciais de contato saturadas.....162
Figura 102 – Escorregamento de rotação *spin*.....163
Figura 103 – Momento de rotação *spin* saturado.....163
Figura 104 – Escorregamentos e forças tangenciais na direção longitudinal.....164
Figura 105 – Escorregamentos longitudinais das rodas 1 e 2.....164
Figura 106 – Forças tangenciais na direção longitudinal das rodas 1 e 2.....165
Figura 107 – Escorregamentos e forças tangenciais na direção lateral.....165
Figura 108 – Forças tangenciais na direção lateral das rodas 1 e 2.....166
Figura 109 – Interpretação dos escorregamentos e momentos de rotação *spin*.....166
Figura 110 – Momentos de rotação *spin* saturados para as rodas 1 e 2.....166
Figura 111 – 1º Modo de vibração das vigas.....175
Figura 112 – 2º Modo de vibração das vigas.....176
Figura 113 – 3º Modo de vibração das vigas.....176
Figura 114 – 4º Modo de vibração das vigas.....176
Figura 115 – 5º Modo de vibração das vigas.....177
Figura 116 – 6º Modo de vibração das vigas.....177
Figura 117 – Três primeiros modos de flexão vertical da viga.....178
Figura 118 – Três primeiros modos de flexão lateral da viga.....179
Figura 119 – Três primeiros modos de torção da viga.....179
Figura 120 – Três primeiros modos longitudinais.....180
Figura 121 – Posição dos centros de gravidade das vigas.....183
Figura 122 – Posicionamento do veículo em relação à ponte.....184
Figura 123 – Deslocamento vertical no centro da ponte.....185
Figura 124 – Deslocamento lateral no centro da ponte.....186
Figura 125 – Deslocamento de torção no centro da ponte.....186
Figura 126 – Declividades da flexão vertical (ψ) no centro da ponte.....187
Figura 127 – Declividades da flexão lateral (θ) no centro da ponte.....188
Figura 128 – Deslocamento vertical no centro da ponte.....189
Figura 129 – Deslocamento lateral no centro da ponte.....189
Figura 130 – Deslocamento de torção no centro da ponte.....190
Figura 131 – Declividades da flexão vertical (ψ) no centro da ponte.....191
Figura 132 – Declividades da flexão lateral (θ) no centro da ponte.....191
Figura 133 – Deslocamento longitudinal no centro da ponte.....192

Figura 134 – Deslocamento longitudinal no centro da ponte.....194
Figura 135 – Deslocamento vertical no centro da ponte.....195
Figura 136 – Aceleração vertical no centro da ponte.....196
Figura 137 – Deslocamento lateral no centro da ponte.....197
Figura 138 – Aceleração lateral no centro da ponte.....198
Figura 139 – Deslocamento de torção no centro da ponte.....199
Figura 140 – Deslocamento longitudinal no centro da ponte.....200
Figura 141 – Composições TUE trafegando sobre a ponte ferroviária.....201
Figura 142 – Distâncias longitudinais das composições TUE.....201
Figura 143 – Deslocamento vertical no centro da ponte.....203
Figura 144 – Instante de amplificação das respostas dinâmicas na ponte.....203
Figura 145 – Deslocamento lateral no centro da ponte.....204
Figura 146 – Deslocamento de torção no centro da ponte.....205
Figura 147 – Declividades da flexão vertical (ψ) no centro da ponte.....206
Figura 148 – Declividades da flexão lateral (θ) no centro da ponte.....207
Figura 149 – Deslocamento longitudinal no centro da ponte.....208
Figura 150 – Deslocamento vertical no centro da ponte.....209
Figura 151 – Aceleração vertical no centro da ponte.....210
Figura 152 – Deslocamento lateral no centro da ponte.....211
Figura 153 – Aceleração lateral no centro da ponte.....211
Figura 154 – Deslocamento de torção no centro da ponte.....212
Figura 155 – Deslocamento longitudinal no centro da ponte.....213

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Descrição dos graus de liberdade do veículo ferroviário.....51
Tabela 2 – Descrição das propriedades do veículo ferroviário.....52
Tabela 3 – Descrição das distâncias, cotas, e trilhos do veículo ferroviário.....52
Tabela 4 – Deslocamentos das suspensões.....53
Tabela 5 – Coeficientes (m) e (n) em função de (θ).....75
Tabela 6 – Coeficientes de atrito entre roda e trilho.....81
Tabela 7 – Coeficientes de rigidez de contato segundo *Kalker*.....95
Tabela 8 – Propriedades dinâmicas dos componentes do veículo ferroviário.....131
Tabela 9 – Propriedades dinâmicas dos sistemas de suspensões e ligações.....131
Tabela 10 – Distâncias geométricas.....131
Tabela 11 – Freqüências naturais, períodos, e razões de amortecimento do veículo.....132
Tabela 12 – Modos naturais de vibração normalizados.....132
Tabela 13 – Fatores de amplificação das respostas dinâmicas para o veículo.....139
Tabela 14 – Valores das irregularidades utilizados nas condições de ressonância.....140
Tabela 15 – Velocidades ressonantes para as respostas dinâmicas do veículo.....140
Tabela 16 – Propriedades geométricas e materiais das rodas e dos trilhos.....157
Tabela 17 – Valores utilizados para análise dos deslizamentos e da perda de contato.....168
Tabela 18 – Propriedades geométricas e materiais das secções transversais.....174
Tabela 19 – Freqüências naturais, períodos naturais, e razões de amortecimento da viga.....175
Tabela 20 – Valores utilizados para análise de vibração forçada na ponte.....181
Tabela 21 – Fatores de amplificação das respostas dinâmicas para a ponte.....182
Tabela 22 – Velocidades do veículo para as respostas dinâmicas ressonantes da ponte.....183

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AAR: *Association of American Railroads*.
ALL: América Latina Logística Sociedade Anônima.
ANPF: Associação Nacional de Preservação Ferroviária.
ANTF: Associação Nacional dos Transportadores Ferroviários.
AREA: *American Railway Engineering Association*.
ASTM: *American Society for Testing Materials*.
B: Forno de Aço *Bessemer*.
BIRD: Banco Internacional para Reconstrução e Desenvolvimento.
BR: Brasil.
CBR: Índice de Suporte Califórnia
CBTU: Companhia Brasileira de Trens Urbanos.
CFN: Companhia Ferroviária do Nordeste Sociedade Anônima.
Cia.: Companhia.
CIC: Cidade Industrial de Curitiba.
CNT: Confederação Nacional do Transporte.
CONTACT: *Program developed by J. J. Kalker*.
CPTM: Companhia Paulista de Trens Metropolitanos.
CSN: Companhia Siderúrgica Nacional.
CVRD: Companhia Vale do Rio Doce.
DNIT: Departamento Nacional de Infraestrutura Terrestre.
E: Forno de Aço Elétrico.
EF: Estrada de Ferro.
EFA: Estrada de Ferro Amapá.
EFC: Estrada de Ferro Carajás.
EFJ: Estrada de Ferro Jarí
EFT: Estrada de Ferro Trombetas.
EFVM: Estrada de Ferro Vitória a Minas.
EMD: *Electro Motive Diesel*.
Engefer: Empresa de Engenharia Ferroviária.
ERRI:*European Rail Research Institute*.
EUROCODE 1: *European Committee for Standardization*.
FASTSIM: *Program developed by J. J. Kalker*.
FCA: Ferrovia Centro – Atlântica Sociedade Anônima.
Fepasa: Ferrovia Paulistana Sociedade Anônima.
FERROBAN: Ferrovias Bandeirantes Sociedade Anônima.
FERROESTE: Ferrovia estadual do Oeste do Paraná.
FERRONORTE: Ferrovia do Norte.
FERROPAR: Ferrovia Paraná.
FORTRAN: *Formula Translation*.
FTC: Ferrovia Tereza Cristina.

GE: *General Electric*.
GM: *General motors.*
GMC: *General Motors Company*.
GNV: Gás Natural Veicular.
HRB: *Highway Research Board*.
IAPF: *Instrucción de acciones a considerar en el proyecto de puentes de ferrocarril.*
IG: Índice de Grupo.
IP: Índice de Plasticidade.
IPPUC: Instituto de Pesquisa e Planejamento Urbano de Curitiba.
L: Modelo de somente irregularidades laterais na via.
LL: Limite de Liquidez.
LR: Modelo combinado de irregularidades laterais e rotacionais na via.
M: Forno de Aço *Martin*.
MATLAB: *Matrix Laboratory*.
MRRM: Composição formada por carros motor (M) e carros reboque (R).
MRRMMRRM: Composição formada por carros motor (M) e carros reboque (R).
MRS: Empresa de Logística Sociedade Anônima.
NBR: Norma Brasileira.
NFS: *Nonconforming Flat Shell*.
NOVOESTE: Ferrovia NOVOESTE Sociedade Anônima.
PDTU: Plano Diretor de Transportes Urbanos.
PITU: Plano Integrado de Transportes Urbanos.
R: Modelo de somente irregularidades rotacionais na via.
RC: Resfriamento Controlado.
RFFSA: Rede Ferroviária Federal Sociedade Anônima.
RMRJ: Região Metropolitana do Rio de Janeiro.
SI: Modelo sem irregularidades na via.
SM: Forno de Aço *Siemens-Martin*.
SR: Superintendência Regional.
SuperVia: Concessionária de Transporte Ferroviário Sociedade Anônima.
T: Forno de Aço *Thomas*.
TAV: Trem de Alta Velocidade.
TGV: *Le train de grande vitesse*.
TR: Trilho ferroviário de fabricação brasileira.
TUE: Trem Unidade Elétrico.
URBS: Urbanização de Curitiba Sociedade Anônima.
V: Modelo de somente irregularidades verticais na via.
VALEC: Ferrovia Norte-Sul.
VL: Modelo combinado de irregularidades verticais e laterais na via.
VLR: Modelo combinado de irregularidades verticais, laterais e rotacionais na via.
VLT: Veículo Leve sobre Trilhos.
VR: Modelo combinado de irregularidades verticais e rotacionais na via.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\sum$: Somatório.
($'$): Primeira derivada com relação à x.
($''$): Segunda derivada com relação à x.
($\dot{}$): Derivada em relação ao tempo.
($\ddot{}$): Segunda derivada em relação ao tempo.
$\{\}^T$: Vetor transposto.
$\int$: Integral simples.
$\iint$: Integral dupla.

ESCALARES

$2a$: Distância longitudinal dos centros dos truques.
$2b$: Distância longitudinal dos centros dos eixos.
$2c$: Distância transversal dos centros dos eixos.
A: Área de aderência (*adhesion*). Área de secção transversal.
a: Semi-eixo maior do contorno elíptico da superfície de contato.
A_A: Área de secção transversal próximo ao apoio.
α_B: Parâmetro do método de *Rayleigh*.
A_C: Área de secção transversal central.
A_i: Constantes das equações de curvatura de um corpo elástico, para i = 1,2,3.
A_L: Amplitude da onda senoidal da irregularidade lateral.
A_{LE}: Amplitude da onda senoidal da irregularidade lateral onde trafegam as rodas pares.
A_{LO}: Amplitude da onda senoidal da irregularidade lateral onde trafegam as rodas ímpares.
A_R: Amplitude da onda senoidal da irregularidade rotacional.
A_V: Amplitude da onda senoidal da irregularidade vertical.
A_{VE}: Amplitude da onda senoidal da irregularidade vertical onde trafegam as rodas pares.
A_{VO}: Amplitude da onda senoidal da irregularidade vertical onde trafegam as rodas ímpares.
β: Parâmetro para o cálculo das tensões cisalhantes.
b: Semi-eixo menor do contorno elíptico da superfície de contato.
b_0: Distância do ponto de contato da roda com o trilho até o centro do eixo (meia bitola).
β_B: Parâmetro do método de *Rayleigh*.
B_i: Constantes das equações de curvatura de um corpo elástico, para i = 1,2,3.
C_{11}: Coeficiente da rigidez de contato de *Kalker*.
C_{22}: Coeficiente da rigidez de contato de *Kalker*.
C_{23}: Coeficiente da rigidez de contato de *Kalker*.
C_{33}: Coeficiente da rigidez de contato de *Kalker*.
c_d: Distância do centro de massa do rodeiro ao ponto de contato da roda direita no trilho.

c_e: Distância do centro de massa do rodeiro ao ponto de contato da roda esquerda no trilho.
C_H: Amortecimento da ligação horizontal do truque.
C_i: Cabos de protensão com cordoalhas, para i = 1,2,3,...,8.
C_L: Amortecimento da ligação lateral do truque.
C_P: Amortecimento da suspensão primária.
C_S: Amortecimento da suspensão secundária.
δ: Conicidade das rodas. Variação.
∂: Derivada parcial.
d: Derivada. Espessura da alma das vigas.
D: Diâmetro da roda.
Δt: Passo de tempo.
dt: Variação infinitesimal do tempo, diferencial no tempo.
$d\Omega$: Diferencial no domínio volumétrico.
δW_{nc}: Variação do trabalho produzido pelas forças não conservativas.
dx: Infinitésimo da direção x.
dy: Infinitésimo da direção y.
dz: Infinitésimo da direção z.
ε: Deformação relativa axial.
E: Módulo de elasticidade, ou módulo de *Young*. Região de escorregamento no contato.
e: Parâmetro para o cálculo das tensões cisalhantes.
e_y: Excentricidade vertical dos trilhos em relação às vigas.
e_z: Excentricidade lateral dos trilhos em relação às vigas.
ϕ: Ângulo de rotação. Diâmetro dos drenos da ponte.
$\phi_n(x)$: Modos naturais de vibração.
F_T: Força tangencial à superfície de contato entre a roda e o trilho.
F_x: Força de contato longitudinal.
F_y: Força de contato lateral.
γ: Distorção angular.
P e Q: Centro de gravidade das vigas que compõem a ponte ferroviária.
G: Módulo de cisalhamento, ou módulo de elasticidade transversal.
G_r: Módulo de cisalhamento, ou módulo de elasticidade transversal do trilho.
G_w: Módulo de cisalhamento, ou módulo de elasticidade transversal da roda.
$h1$: Altura entre o trilho e o centro de eixo da roda.
$h2$: Altura entre o centro de eixo da roda e o centro do truque.
$h3$: Altura entre o centro do truque e o centro do carro.
I: Momento de inércia da secção transversal.
I_P: Momento de inércia de massa polar.
$IPCB$: Momento de inércia de massa da rotação no eixo transversal do carro.
$IPFB$: Momento de inércia de massa da rotação no eixo transversal do truque dianteiro.
$IPRB$: Momento de inércia de massa da rotação no eixo transversal do truque traseiro.
$IRCB$: Momento de inércia de massa da rotação no eixo longitudinal do carro.
$IRFB$: Momento de inércia de massa da rotação no eixo longitudinal do truque dianteiro.
$IRRB$: Momento de inércia de massa da rotação no eixo longitudinal do truque traseiro.
IRW: Momento de inércia de massa da rotação no eixo transversal do eixo com rodas.

I_Y: Momento de inércia da secção transversal em relação ao plano (*xz*).
I_{YA}: Momento de inércia da secção transversal em relação ao plano (*xz*) próximo ao apoio.
I_{YC}: Momento de inércia da secção transversal em relação ao plano (*xz*) na secção central.
IYW: Momento de inércia de massa da rotação no eixo vertical do eixo com rodas.
I_Z: Momento de inércia da secção transversal em relação ao plano (*xy*).
I_{ZA}: Momento de inércia da secção transversal em relação ao plano (*xy*) próximo ao apoio.
I_{ZC}: Momento de inércia da secção transversal em relação ao plano (*xy*) na secção central.
J: Momento de inércia de área polar.
J_A: Momento de inércia de área polar na secção próxima ao apoio.
J_C: Momento de inércia de área polar na secção central.
K_H: Rigidez da ligação horizontal do truque.
k_i: Constante de propriedades materiais dos corpos elásticos em contato, para i = 1,2.
K_L: Rigidez da ligação lateral do truque.
K_P: Rigidez da suspensão primária.
K_S: Rigidez da suspensão secundária.
K_x: Rigidez de contato longitudinal.
K_y: Rigidez de contato lateral.
L: Comprimento do elemento finito.
L_b: Comprimento da viga.
l_L: Comprimento da onda senoidal da irregularidade lateral e rotacional.
l_{LE}: Comprimento da onda da irregularidade lateral onde trafegam as rodas pares.
l_{LO}: Comprimento da onda da irregularidade lateral onde trafegam as rodas ímpares.
l_V: Comprimento da onda senoidal da irregularidade vertical.
l_{VE}: Comprimento da onda da irregularidade vertical onde trafegam as rodas pares.
l_{VO}: Comprimento da onda da irregularidade vertical onde trafegam as rodas ímpares.
L_W: Comprimento de onda da oscilação de *hunting*.
μ: Coeficiente de atrito entre a roda e o trilho.
m: Constante de propriedades geométricas dos corpos em contato.
M: Ponto do corpo elástico.
μ_0: Coeficiente de atrito entre a roda e o trilho para as condições de contaminação do trilho.
MCB: Massa do carro.
MFB: Massa do truque dianteiro.
MRB: Massa do truque traseiro.
m_u: Massa unitária da viga por unidade de comprimento.
m_{uA}: Massa unitária da viga por unidade de comprimento na secção próxima ao apoio.
m_{uC}: Massa unitária da viga por unidade de comprimento na secção central.
MW: Massa do eixo com rodas acopladas.
M_z*: Momento de rotação *spin* saturada.
M_z: Momento de rotação *spin*.
ν: Coeficiente de *Poisson*.
n: Constante de propriedades geométricas dos corpos em contato.
N: Força normal à superfície de contato. Ponto do corpo elástico.
ν_r: Coeficiente de *Poisson* do material do trilho.
ν_w: Coeficiente de *Poisson* do material da roda.

O: Origem do sistema coordenado (xyz).
P: Carga vertical que comprime os corpos elásticos.
π: Constante numérica (3,14159265358979323846264338327 95...).
Π: Energia potencial total da viga.
P: Ponto na superfície de rolamento da roda.
P_0: Ponto central da elipse de contato de coordenadas (0,0,0).
P_a: Ponto da elipse de contato de coordenadas (a,0,0).
P_b: Ponto da elipse de contato de coordenadas (0,b,0).
P_{Wi}: Pontos de contato entre as rodas e os trilhos, para i = 1,2,3,...,8.
$q(x,t)$: Carregamento transversal uniformemente distribuído.
θ: Ângulo de rotação. Posição angular da roda.
q: Distribuição de pressões na superfície elíptica de contato.
$q_{MÁX.}$: Máxima pressão na superfície elíptica de contato.
ρ: Massa específica.
r: Raio polar da secção transversal.
r_0: Raio de rolamento central.
r_d: Raio de rolamento da roda direita.
r_e: Raio de rolamento da roda esquerda.
R_E: Trilho onde trafegam as rodas pares.
R_i: Raio principal de curvatura de um corpo elástico, para i = 1,2.
R'_i: Raio principal de curvatura de um corpo elástico, para i = 1,2.
R_O: Trilho onde trafegam as rodas ímpares.
S: Área de escorregamento (*slip*).
σ: Tensão normal.
σ_x: Tensão principal na elipse de contato na direção x. Tensão normal na direção x.
σ_y: Tensão principal na elipse de contato na direção y. Tensão normal na direção y.
σ_z: Tensão principal na elipse de contato na direção z. Tensão normal na direção z.
T: Energia cinética do elemento finito.
t: Tempo.
τ: Tensão cisalhante.
τ_a: Tensão de cisalhamento no ponto P_a.
τ_b: Tensão de cisalhamento no ponto P_b.
u: Translação axial.
ν: Coeficiente de Poisson.
V: Energia potencial de deformação do elemento finito.
v: Velocidade do veículo. Translação axial.
v_{cx}: Velocidade circunferencial da roda na direção x.
v_{cxd}: Velocidade circunferencial da roda direita na direção x.
v_{cxe}: Velocidade circunferencial da roda esquerda na direção x.
v_{cy}: Velocidade circunferencial da roda na direção y.
v_{cyd}: Velocidade circunferencial da roda direita na direção y.
v_{cye}: Velocidade circunferencial da roda esquerda na direção y.
v_{tx}: Velocidade translacional da roda na direção x.
v_{ty}: Velocidade translacional da roda na direção y.

Ω: Domínio volumétrico da integração.
w: Translação axial.
W_{nc}: Trabalho das forças não conservativas.
ω_z: Componente da velocidade angular da roda na direção z.
ξ_{spin}: Escorregamento de rotação *spin*.
ξ_{spind}: Escorregamento de rotação *spin* da roda direita.
ξ_{spine}: Escorregamento de rotação *spin* da roda esquerda.
ξ_x: Escorregamento na direção x.
ξ_{xd}: Escorregamento na direção x da roda direita.
ξ_{xe}: Escorregamento na direção x da roda esquerda.
ξ_y: Escorregamento na direção y.
ξ_{yd}: Escorregamento na direção y da roda direita.
ξ_{ye}: Escorregamento na direção y da roda esquerda.
y: Altura em relação à linha neutra.
ψ: Ângulo entre os planos normais das superfícies de curvatura. Ângulo de rotação.
ε_x: Deformação relativa axial em relação ao eixo x.
ζ_b: Razão de amortecimento da estrutura.
ω: Freqüência angular da oscilação de *hunting*.
ω_{nb1}: Primeira freqüência natural de vibração.
ω_{nb2}: Segunda freqüência natural de vibração.
ω_{nbn}: Freqüências naturais de vibração.

VETORES

ϕ_V: Modos de vibração natural do veículo ferroviário.
$\{F_B(t)\}$: Vetor de forças externas aplicadas à viga.
$\{U_B\}$: Vetor de deslocamentos da viga.
α: Aceleração angular da roda.
BCB: Translação vertical do carro (*bouncing*).
BFB: Translação vertical do truque dianteiro (*bouncing*).
BRB: Translação vertical do truque traseiro (*bouncing*).
*BW*1: Translação vertical do eixo 1 (*bouncing*).
*BW*2: Translação vertical do eixo 2 (*bouncing*).
*BW*3: Translação vertical do eixo 3 (*bouncing*).
*BW*4: Translação vertical do eixo 4 (*bouncing*).
$\psi_i(x)$: Funções de forma ou funções de interpolação.
c_i: Condições de contorno essenciais.
δ_{Li}: Deslocamento lateral do eixo i para i = 1,2,3,...,4.
δ_{Pi}: Deslocamento da suspensão primária i para i = 1,2,3,...,8.
$d\theta$: Deslocamento angular da roda.
δ_{Ri}: Deslocamento rotacional do eixo i para i = 1,2,3,...,4.
δ_{Si}: Deslocamento da suspensão secundária i para i = 1,2,3,...,4.
f_{dvi}: Freqüências naturais cíclicas amortecidas do veículo ferroviário.

f_{dbi}: Freqüências naturais cíclicas amortecidas da ponte ferroviária.
FHR_E: Forças horizontais no trilho onde trafegam as rodas pares.
FHR_O: Forças horizontais no trilho onde trafegam as rodas ímpares.
f_{Ii}: Freqüências cíclicas das irregularidades da via.
F_{Li}: Forças nas ligações laterais i para i = 1,2,3,...,4.
FLR_E: Forças laterais no trilho onde trafegam as rodas pares.
FLR_O: Forças laterais no trilho onde trafegam as rodas ímpares.
f_{nvi}: Freqüências naturais cíclicas do veículo ferroviário.
f_{nbi}: Freqüências naturais cíclicas da ponte ferroviária.
F_{Pi}: Forças nas suspensões primárias i para i = 1,2,3,...,8.
$F_{Reativasi}$: Forças reativas do veículo distribuídas em cada roda i para i = 1,2,3,...,8.
F_{Ri}: Forças nas ligações rotacionais i para i = 1,2,3,...,4.
F_{Si}: Forças nas suspensões secundárias i para i = 1,2,3,...,4.
FVR_E: Forças verticais no trilho onde trafegam as rodas pares.
FVR_O: Forças verticais no trilho onde trafegam as rodas ímpares.
$F_x{}^*{}_i$: Força de contato longitudinal saturada para as rodas i = 1,2,3,...,8.
$F_y{}^*{}_i$: Força de contato lateral saturada para as rodas i = 1,2,3,...,8.
$H_i(x)$: Funções de forma, funções coordenadas, funções de interpolação cúbica de *Hermite*.
$\boldsymbol{i}$: Vetor unitário de base na direção do eixo coordenado x, com coordenadas (1,0,0).
I_{Li}: Irregularidade lateral da via analisada no eixo i para i = 1,2,3,...,4.
I_{Ri}: Irregularidade rotacional da via analisada no eixo i para i = 1,2,3,...,4.
I_{Vi}: Irregularidade vertical da via analisada na roda i para i = 1,2,3,...,8.
$\boldsymbol{j}$: Vetor unitário de base na direção do eixo coordenado y, com coordenadas (0,1,0).
$\boldsymbol{k}$: Vetor unitário de base na direção do eixo coordenado z, com coordenadas (0,0,1).
L: Comprimento do elemento finito.
l_{Ii}: Comprimentos das irregularidades da via.
$LW1$: Translação lateral do eixo 1 (*lateral*).
$LW2$: Translação lateral do eixo 2 (*lateral*).
$LW3$: Translação lateral do eixo 3 (*lateral*).
$LW4$: Translação lateral do eixo 4 (*lateral*).
L_{Wi}: Forças laterais do veículo distribuídas em cada roda i para i = 1,2,3,...,8.
MSR_E: Momentos de rotação de *spin* no trilho onde trafegam as rodas pares.
MSR_O: Momentos de rotação de *spin* no trilho onde trafegam as rodas ímpares.
$M_z{}^*{}_i$: Momento de rotação *spin* saturada para as rodas i = 1,2,3,...,8.
N_{Wi}: Forças normais ao plano de contato distribuídas em cada roda i para i = 1,2,3,...,8.
PCB: Rotação no eixo transversal do carro (*pitching*).
PFB: Rotação no eixo transversal do truque dianteiro (*pitching*).
p_i: Esforços nodais.
PRB: Rotação no eixo transversal do truque traseiro (*pitching*).
$\theta_i(t)$: Campo de rotação no nó i para i = 1,2.
q_i: Coordenadas generalizadas, graus de liberdade.
Q_i: Forças não conservativas.
$\boldsymbol{r}$: Vetor posição do ponto P na roda.
R_{AVi}: Fatores de amplificação das respostas dinâmicas de aceleração do veiculo ferroviário.

R_{ABi}: Fatores de amplificação das respostas dinâmicas de aceleração da ponte ferroviária.
RCB: Rotação no eixo longitudinal do carro (*rolling*).
R_{DVi}: Fatores de amplificação das respostas dinâmicas de deslocamento do veiculo ferroviário.
R_{DBi}: Fatores de amplificação das respostas dinâmicas de deslocamento da ponte ferroviária.
RFB: Rotação no eixo longitudinal do truque dianteiro (*rolling*).
$\boldsymbol{r_i}$: Raios de rolamento da roda.
RRB: Rotação no eixo longitudinal do truque traseiro (*rolling*).
R_{VVi}: Fatores de amplificação das respostas dinâmicas de velocidade do veiculo ferroviário.
R_{VBi}: Fatores de amplificação das respostas dinâmicas de velocidade da ponte ferroviária.
*RW*1: Rotação no eixo transversal do eixo 1 (*rolling*).
*RW*2: Rotação no eixo transversal do eixo 2 (*rolling*).
*RW*3: Rotação no eixo transversal do eixo 3 (*rolling*).
*RW*4: Rotação no eixo transversal do eixo 4 (*rolling*).
T_{dvi}: Períodos de vibração natural amortecidos do veículo ferroviário.
T_{dbi}: Períodos de vibração natural amortecidos da ponte ferroviária.
Tnvi: Períodos de vibração natural do veículo ferroviário.
Tnbi: Períodos de vibração natural da ponte ferroviária.
$u(x,t)$: Campo de deslocamento axial.
$u_i(t)$: Campo de deslocamento axial no nó i para $i = 1,2$.
U_V: Vetor de deslocamentos do veículo.
$\boldsymbol{u_y}$: Translação do rodeiro transversal à via.
$\boldsymbol{v_0}$: Média aritmética normalizada das velocidades circunferencial e translacional do rodeiro.
$\boldsymbol{v_c}$: Velocidade circunferencial da roda.
V_{RVAi}: Velocidades ressonantes do veículo para as respostas dinâmicas de aceleração.
V_{RVDi}: Velocidades ressonantes do veículo para as respostas dinâmicas de deslocamento.
V_{RVVi}: Velocidades ressonantes do veículo para as respostas dinâmicas de velocidade.
V_{RBAi}: Velocidades ressonantes da ponte para as respostas dinâmicas de aceleração.
V_{RBDi}: Velocidades ressonantes da ponte para as respostas dinâmicas de deslocamento.
V_{RBVi}: Velocidades ressonantes da ponte para as respostas dinâmicas de velocidade.
$\boldsymbol{v_t}$: Velocidade translacional da roda.
V_{Wi}: Forças verticais do veículo distribuídas em cada roda i para $i = 1,2,3,...,8$.
$\boldsymbol{\omega}$: Velocidade angular da roda.
ω_{dbi}: Freqüências naturais circulares amortecidas da ponte ferroviária.
ω_{dvi}: Freqüências naturais circulares amortecidas do veículo ferroviário.
$w_i(x,t)$: Graus de liberdade do elemento finito de viga $i = 1,2,3,...,4$.
ω_{Ii}: Freqüências circulares das irregularidades da via.
ω_{nbi}: Freqüências naturais circulares da ponte ferroviária.
ω_{nvi}: Freqüências naturais circulares do veículo ferroviário.
x: Coordenada local do elemento finito (abscissa).
$\boldsymbol{\xi}$: Vetor de escorregamentos.
*YW*1: Rotação no eixo vertical do eixo 1 (*yawing*).
*YW*2: Rotação no eixo vertical do eixo 2 (*yawing*).
*YW*3: Rotação no eixo vertical do eixo 3 (*yawing*).
*YW*4: Rotação no eixo vertical do eixo 4 (*yawing*).

z_1: Equação de curvatura de um corpo elástico.
z_2: Equação de curvatura de um corpo elástico.
ζ_{bi}: Razões de amortecimento da ponte ferroviária.
ζ_{vi}: Razões de amortecimento do veículo ferroviário.
$\theta(x,t)$: Campo de rotação.
$\{U_T(t)\}$: Vetor de deslocamento da composição ferroviária (trem).

MATRIZES

$[C]$: Matriz de campo de deslocamentos.
$[C_B]$: Matriz de amortecimento da viga.
$[C_V]$: Matriz de amortecimento do veículo.
$[D]$: Matriz constitutiva, ou matriz material.
$[\Phi_V]$: Matriz modal do veículo ferroviário.
$[k]$: Matriz de rigidez do elemento finito.
$[K_B]$: Matriz de rigidez da viga.
$[K_V]$: Matriz de rigidez do veículo.
$[m]$: Matriz de massa do elemento finito.
$[M_B]$: Matriz de massa da viga.
$[M_V]$: Matriz de massa do veículo.
$[\Omega_V]$: Matriz espectral do veículo ferroviário.
k_{ij}: Matriz de rigidez do elemento finito.
m_{ij}: Matriz de massa do elemento finito.
$[\Phi_B]$: Matriz modal da ponte ferroviária.
$[\Omega_B]$: Matriz espectral da ponte ferroviária.
$[M_T]$: Matriz de massa da composição ferroviária (trem).
$[C_T]$: Matriz de amortecimento da composição ferroviária (trem).
$[K_T]$: Matriz de rigidez da composição ferroviária (trem).

CAPÍTULO 1
INTRODUÇÃO

1.1 Apresentação

Neste capítulo introdutório apresenta-se a motivação para a realização deste trabalho, o objetivo a ser atingido, a metodologia a ser empregada, e o conteúdo do trabalho.

1.2 Motivação

O transporte ferroviário está diretamente ligado ao progresso e ao desenvolvimento econômico do país, seja pelo transporte de cargas, ou pelo transporte de passageiros. O modal ferroviário no Brasil para o transporte de cargas é caracterizado, especialmente, pela capacidade de transportar grandes volumes, com elevada eficiência energética, principalmente em deslocamentos a médias e grandes distâncias. Apresenta também, comparados ao modal rodoviário, maior segurança, com menores índices de acidentes, e menor incidência de furtos e roubos de cargas, bem como, menores desperdícios. As cargas típicas a serem transportadas no Brasil são: produtos siderúrgicos; grãos; minério de ferro; cimento e cal; adubos e fertilizantes; derivados de petróleo; calcário; carvão mineral e clínquer; contêineres; etc. (ANTT, 2010).

Nos grandes centros urbanos, e em suas regiões metropolitanas, os sistemas ferroviários e metroviários destinados ao transporte de passageiros destacam-se pela capacidade em relação ao número de passageiros a serem transportados, comparando-se aos demais meios de transporte de massa. Pode-se citar as capitais brasileiras em que existem estes sistemas de transportes: Fortaleza; Natal; João Pessoa; Recife; Maceió; Salvador; Brasília; Belo Horizonte; Rio de Janeiro; São Paulo; e Porto Alegre. Em São Paulo, por exemplo, a Companhia Paulista de Trens Metropolitanos, a CPTM, transporta atualmente cerca de 2,12 milhões de passageiros por dia útil, e no Rio de Janeiro, a SuperVia Concessionária de Transporte Ferroviário S.A., transporta 1 milhão de passageiros por dia útil. (CBTU, 2010), (CPTM, 2011), (SUPERVIA, 2011).

Atualmente, a malha ferroviária nacional totaliza cerca de 29.706 km, concentrando-se nas regiões Sul, Sudeste e Nordeste, atendendo parte do Centro-Oeste e Norte do país. A demanda pela reforma, reestruturação, e ampliação dos atuais sistemas ferroviários de

transporte de cargas, estão associadas ao crescimento da exploração, produção, e transporte dos *commodities*. Por outro lado, os grandes centros urbanos, e regiões metropolitanas estão sendo reestruturados por conta dos eventos esportivos internacionais da Copa do Mundo de 2014 no Brasil, e das Olimpíadas de 2016 no Rio de Janeiro. Estas reformas incluem os sistemas ferroviários e metroviários de transportes de passageiros, especialmente nas cidades sedes da Copa do Mundo. (ANTT, 2010), (COPA2014, 2011).

O eixo formado pelos três centros urbanos do Rio de Janeiro, São Paulo e Campinas, define o mais importante corredor de transporte do país, concentrando 33% do Produto Interno Bruto, e 20% da população. O serviço de transporte ferroviário de passageiros, por um sistema de trens de alta velocidade, o TAV Brasil, pretende interligar estes centros urbanos. (TAVBRASIL, 2010).

Em Curitiba, tendo em vista o crescimento da demanda de passageiros do atual sistema de transporte coletivo, técnicos elaboraram estudos preliminares para a implantação de um sistema de metrô no Eixo Norte-Sul da cidade. (METROCURITIBA, 2010).

Observa-se que o setor de transporte ferroviário do país está recebendo novos investimentos, frente às suas novas demandas.

No projeto de uma ferrovia, as obras de arte especiais como pontes, elevados e viadutos são imprescindíveis para a transposição de obstáculos físicos como cursos de águas, vales, depressões de terreno, outras vias, etc. Estas estruturas devem ser devidamente projetadas e executadas para atender com segurança, resistência e durabilidade, às solicitações impostas pelo tráfego das composições ferroviárias. Desta forma, o presente trabalho realiza uma modelagem matemática numérica computacional da interação dinâmica tridimensional entre um veículo e uma ponte ferroviária.

1.3 Objetivo

O objetivo deste trabalho é estudar a interação dinâmica tridimensional entre veículo e ponte ferroviária considerando a mecânica de contato entre as rodas e os trilhos, frente à variação da velocidade e a presença das irregularidades da via.

1.4 Metodologia

Desenvolve-se o modelo tridimensional de veículo ferroviário através da associação de corpos rígidos interconectados a sistemas de suspensões. Determinam-se as equações dos

deslocamentos das suspensões, baseando-se nos movimentos dos graus de liberdade do veículo. Representam-se as irregularidades da via através de funções harmônicas. Obtêm-se as equações de movimento do veículo ferroviário através do equilíbrio dinâmico. Desenvolve-se o modelo de contato mecânico entre as rodas e os trilhos embasado nas teorias de *Hertz* e de *Kalker*. Considera-se no modelo de contato mecânico a variação do coeficiente de atrito entre rodas e trilhos em função da velocidade, e das condições de contaminações entre as superfícies em contato. Insere-se no modelo de saturação do contato baseando-se na lei do atrito de *Coulomb*, o modelo de *Vermeulen* e *Johnson*, restringindo-se as forças tangenciais de contato e o momento de rotação *spin* segundo um polinômio cúbico, de modo a contemplar as não linearidades geométricas devido aos perfis das rodas e dos trilhos, bem como, os limites de aderência no contato entre rodas e trilhos.

A estrutura da ponte ferroviária em concreto prótendido é predominantemente formada por duas vigas simétricas, paralelas, e bi-apoiadas, as quais são representadas no modelo matemático numérico, por elementos finitos de pórtico tridimensional. O amortecimento estrutural é concebido utilizando-se o método de *Rayleigh*. Os esforços provenientes do tráfego do veículo são transmitidos aos trilhos da ponte através da mecânica do contato. A transferência dos esforços aplicados nos trilhos para os centros de gravidade das vigas é feita através do princípio da transmissibilidade, e do sistema equivalente força-binário. O modelo de composição ferroviária é obtido através da associação dos veículos. A distribuição das forças dos veículos na estrutura da ponte, e a atualização das forças em cada elemento finito é realizada mediante as funções de forma (funções de interpolação).

As equações de movimento dos sistemas estruturais são integradas numericamente utilizando-se o método de *Newmark* com aceleração média, o qual é incondicionalmente estável. E o sistema linear de equações é resolvido através do método da eliminação de *Gauss*. Todos os respectivos modelos matemáticos são implementados no software MATLAB.Os resultados obtidos nas análises numéricas são interpretados, comparados, e discutidos.

1.5 Conteúdo do trabalho

Este trabalho é composto por cinco capítulos, a saber: Capítulo1 – Introdução; Capítulo 2 – Revisão bibliográfica; Capítulo 3 – Modelos matemáticos; Capítulo 4 – Análises numéricas; Capítulo 5 – Considerações finais.

No presente Capítulo 1, é apresentada a introdução deste trabalho com a motivação, o objetivo, a metodologia, e o conteúdo do trabalho.

O Capítulo 2 apresenta uma revisão bibliográfica envolvendo o problema de interação dinâmica entre veículos ferroviários e estruturas como pontes e a via férrea.

O Capítulo 3 apresenta os modelos matemáticos que compõem este trabalho, a saber: o modelo tridimensional de veículo ferroviário; os modelos matemáticos das irregularidades da via; o modelo de contato mecânico entre rodas e trilhos embasado nas teorias de *Hertz* e de *Kalker*; a variação do coeficiente de atrito entre rodas e trilhos com a velocidade e as condições de contaminações entre as superfícies; o modelo de saturação do contato das forças tangenciais e dos momentos de *spin*; a formulação energética dos elementos finitos de barra, de viga e de pórtico tridimensional para a modelagem da ponte; a ponte ferroviária e seu respectivo modelo em elementos finitos; o sistema equivalente força-binário, que transfere os pontos de aplicação das forças, dos trilhos para os centros de gravidade das vigas; a distribuição das forças do veículo na estrutura da ponte; e a atualização das forças em cada elemento finito.

O Capítulo 4 apresenta as análises numéricas. Quanto ao comportamento dinâmico do veículo ferroviário são realizadas: a análise modal do veículo; a análise de vibração forçada do veículo nas condições de ressonância, sob diferentes condições de velocidade e irregularidades da via; a análise dinâmica do contato entre as rodas e os trilhos estudando-se as dimensões das regiões de contato, as tensões, os escorregamentos, as forças tangenciais, e os momentos de rotação de *spin*; e a análise dos deslizamentos e da perda de contato entre as rodas e os trilhos, através de oito casos distintos, combinando-se os modelos de irregularidades da via, variando-se a velocidade do veículo, e considerando-se os trilhos contaminados com óleo.

Quanto ao comportamento dinâmico da ponte ferroviária são realizadas: a análise modal; e a análise de vibração forçada na ponte produzida pelo tráfego do veículo ferroviário, e da composição, sob diferentes condições de velocidade e irregularidades via, abordando-se as condições de ressonância da ponte produzidas pelo tráfego tanto do veículo ferroviário quanto da composição.

O Capítulo 5 encerra este trabalho apresentando um resumo do que foi realizado e as conclusões que foram obtidas, além de sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 2
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta uma revisão bibliográfica de trabalhos envolvendo o problema de interação dinâmica entre veículos ferroviários e estruturas como pontes e a via férrea. Este tema é estudado por pesquisadores de todo o mundo, sendo aqui apresentado trabalhos publicados em mais de 25 países. Modelos matemáticos de representação das estruturas são empregados nas análises numéricas. Alguns trabalhos envolvem análises experimentais, em campo ou em laboratório com modelos em tamanhos reais e também reduzidos. Os trabalhos são dispostos em ordem cronológica, e os mais relevantes ao tema são descritos de maneira resumida e as conclusões obtidas são apresentadas.

2.1 Revisão bibliográfica

O problema de interação dinâmica entre veículos e pontes é considerado um dos mais antigos da dinâmica estrutural. Os primeiros trabalhos desenvolvidos reportam ao ano de 1849 na Inglaterra onde o engenheiro civil *Willis* e o matemático *Stokes* estudaram as causas do rompimento e da queda da ponte ferroviária *Chester* no ano de 1847. Este foi o primeiro caso de colapso em uma ponte ferroviária na história. (MELCER, 2007).

Com os trabalhos de *Krylov* em 1905, e *Timoshenko* em 1908, dá-se início a uma série de soluções para o problema com vários tipos de condições de contorno e de carregamento. Os respectivos modelos de veículos, desenvolvidos naquela época, limitavam-se apenas a representar o problema bidimensionalmente. As equações de movimento eram desenvolvidas através de equações diferenciais, e resolvidas numericamente por métodos de integração passo a passo. (MELCER, 2007).

Ao longo de décadas, com o computador digital, através da dinâmica de multi-corpos, e do método dos elementos finitos, possibilitou-se o desenvolvimento de novos modelos numéricos abordando diferentes situações para os problemas da dinâmica estrutural.

Em 1967, *Joost J. Kalker* publicou na Universidade de Tecnologia de *Delft* nos Países Baixos sua tese de doutorado intitulada "*On The Rolling Contact of two Elastic Bodies in the Presence of dry Friction*". Suas maiores contribuições deste trabalho ao meio ferroviário foram a quantificação das forças de escorregamento (*creep forces*), e a teoria linear do contato entre roda e trilho. (KALKER, 1967).

Em 1975, (ZAMPIERI, 1975) fez um estudo analítico de um veículo sobre trilhos. Trata-se da modelagem de um veículo ferroviário convencional na qual se determinam o grau de estabilidade para as excitações impulsivas e harmônicas.

Em 1983, (RODRIGUES FILHO, 1983) estudou a estabilidade dinâmica de veículos ferroviários através da simulação do comportamento de uma locomotiva. Neste trabalho foi estudado o comportamento dinâmico dos veículos ferroviários com particular interesse sobre o movimento lateral.

Em 1987, (LOPES JÚNIOR, 1987) estudou a resposta dinâmica de uma locomotiva a excitações devidas a irregularidades da via. Neste trabalho foi estudado o comportamento dinâmico de uma locomotiva representada por um modelo com trinta e nove graus de liberdade.

Em 1989, (OLIVEIRA, 1989) determinou os níveis de tensões na lateral de um truque ferroviário. Neste trabalho foram realizadas análises numéricas computacionais através do método dos elementos finitos nas barras laterais de um truque ferroviário do tipo *ride control* modelo *Barber*. Também foram realizados estudos experimentais em ensaios de campo e de laboratório com extensômetros determinando os pontos críticos da estrutura.

Em 1990, (KALKER, 1990) estudou o contato mecânico de rolamento entre corpos partindo-se da teoria de *Hertz*, e usando a teoria da elasticidade linear. Na saturação das forças tangenciais de contato entre os corpos é utilizado o modelo desenvolvido por *Vermeulen* e *Johnson*. Neste trabalho também é apresentada a teoria simplificada do contato de rolamento, bem como a teoria variacional para o problema de contato. O problema é ilustrado através do algoritmo CONTACT, desenvolvido por *Kalker*, e os resultados obtidos são comentados.

Em 1993, (BARBOSA, 1993) realizou um estudo da dinâmica longitudinal de um trem de carga modelando-o através da associação de corpos rígidos conectados aos aparelhos de choque e de tração. Também em 1993, (VILLA, 1993) estudou o comportamento dinâmico na inscrição de um veículo ferroviário em curva.

Em 1994, (CAI; RAYMOND; IGWEMEZIE, 1994) estudaram as forças de contato obtidas através da interação dinâmica vertical entre roda-trilho e a via. Neste trabalho foi utilizada a teoria de *Hertz* para simular o contato entre a roda e o trilho. Também em 1994, (CRUZ, 1994) estudou o comportamento dinâmico de pontes ferroviárias em vias de tráfego de alta velocidade. Neste trabalho são analisados o comportamento estrutural da ponte, e o conforto dos passageiros, mediante as variações dos parâmetros da rigidez e da massa da ponte, da rigidez da composição, do vão da ponte, das irregularidades da via, e do tamanho da composição.

Em 1995, (CALÇADA, 1995) estudou os efeitos dinâmicos em pontes resultantes do tráfego ferroviário a alta velocidade. Na primeira aplicação foi estudado o comportamento dinâmico de uma ponte de concreto armado protendida submetida aos efeitos da passagem de uma composição formada por duas locomotivas e treze carros de passageiros. Na segunda aplicação foram estudados os efeitos dinâmicos na transição entre aterro-estrutura.

Em 1997, (BHASKAR et al., 1997) realizaram a modelagem dinâmica para análise de estabilidade entre roda-trilho através da teoria do contato associada à conformidade entre os perfis da roda e do trilho. No trabalho de (CLAUS; SCHIEHLEN, 1997) realizou-se uma modelagem, e uma simulação experimental em um truque ferroviário determinando-se suas características dinâmicas associadas às vibrações provenientes da via.

Os autores (DELGADO; SANTOS, 1997) propuseram a modelagem da interação dinâmica entre ponte e trens de alta velocidade. No modelo, a ponte de vão único é considerada como uma viga reta simplesmente apoiada com rigidez uniforme ao longo de todo o seu comprimento. Esta estrutura é então modelada com elementos finitos de viga. No problema sem interação dinâmica, o trem é representado por uma carga constante que se move com velocidade constante ao longo da extensão da viga. No modelo com interação dinâmica, os efeitos inerciais da massa móvel são considerados. Desta maneira, o trem passa a ser representado por um sistema móvel de massa-mola.

Na análise das respostas da viga, são considerados quatro modelos de representação da equação de movimento, que são: estático; dinâmico sem interação; dinâmico com interação; e dinâmico com interação e amortecimento. O amortecimento é assumido usando-se o método de *Rayleigh*. Os deslocamentos verticais obtidos no centro do vão da viga são discutidos.

As respostas obtidas no modelo dinâmico sem interação são maiores que as apresentadas no modelo estático, pois é considerada a contribuição da massa da viga na equação de movimento. O modelo dinâmico com interação apresentou respostas maiores que as obtidas no modelo dinâmico sem interação e também foi observado um atraso nas respostas dinâmicas em relação ao tempo. Isto se deve aos efeitos da massa móvel, que contribuem para o acréscimo dos deslocamentos, e para o acréscimo do período de vibração da estrutura. Nas respostas do modelo dinâmico com interação e amortecimento, observou-se uma redução das amplitudes dos deslocamentos. A rigidez da mola no sistema de massa suspensa também foi analisada, e observou-se que seu acréscimo contribui para o aumento das respostas dinâmicas da viga. Isto é, quão mais rígida a mola, maiores são as respostas dinâmicas na ponte.

Ainda em 1997, o estudo de (YANG; YAU; HSU, 1997) investiga a vibração de vigas simples produzidas por trens de alta velocidade. A viga reta simplesmente apoiada está sujeita

à ação de uma série de cargas concentradas com intervalos uniformes movendo-se com velocidade constante. Os modos de vibração da viga são representados por funções harmônicas. É apresentado então um estudo paramétrico onde variam-se: as velocidades do veículo, os seus comprimentos, e os comprimentos dos vãos das vigas. Observa-se um aumento do impacto produzido pelo veículo nas vigas de vãos curtos. São identificadas as condições de ressonância e apresentadas as velocidades onde ocorrem o fenômeno.

Uma solução numérica é empregada para estudar o comportamento das respostas dinâmicas da viga. Desta maneira analisam-se os efeitos das massas móveis, as quais representam o trem, e os efeitos do amortecimento estrutural da viga. São utilizados elementos finitos de viga para a representação da estrutura. Para o amortecimento, emprega-se o método de *Rayleigh*. O sistema de equações é integrado numericamente utilizando-se o método de *Newmark*. Concluiu-se que as massas móveis tendem a alongar o período de vibração da viga. O amortecimento contribui para a redução das amplitudes de deslocamentos da viga, principalmente nas condições ressonantes.

Em 1998, (AHMED; HARBI, 1998) estudaram as vibrações torsionais e longitudinais de uma ponte suspensa submetida às forças aerodinâmicas. Também no ano de 1998, os autores (DIETZ; KNOTHE; KORTÜM, 1998) estudaram a fadiga em truques ferroviários através de simulações com modelos probabilísticos.

Em 1999, (BARBOSA, 1999) apresentou sua tese de doutorado aplicando a dinâmica de multicorpos em veículos guiados. Neste trabalho foram realizadas análises dinâmicas no domínio do tempo e também da freqüência, e os resultados obtidos foram comparados com resultados publicados por outros autores apresentando-se boa concordância.

Através da simulação da interação dinâmica entre veículo ferroviário e a via férrea, (GUIMARÃES, 1999) analisou as solicitações dinâmicas na via férrea. Em (JASCHINSKI et al., 1999), utilizou-se uma ponte rolante para estudar a dinâmica de um veículo ferroviário em tamanho real. Em (MARTINS, 1999), realizou-se a simulação da frenagem de um trem unitário de carga, que é um trem formado por uma grande quantidade de vagões com as mesmas características.

Ainda no ano de 1999, no estudo de (SOPHIANOPOULOS; MICHALTSOS, 1999) é apresentada a formulação e as técnicas de solução para a vibração combinada lateral-torsional de vigas sujeitas aos carregamentos veiculares. A viga reta é considerada como simplesmente apoiada com seção transversal simétrica e rigidez constante ao longo de todo seu comprimento. O carregamento veicular é representado por um sistema de massa suspensa conectada por uma mola a uma massa não suspensa. Este sistema move-se com velocidade

constante ao longo da extensão da viga apresentando-se uma excentricidade em relação ao eixo de simetria vertical da seção transversal da viga, produzindo-se, desta forma, uma torção lateral. Além das vibrações verticais, foram estudadas as vibrações laterais e torsionais que estão associadas à excentricidade do carregamento. Os deslocamentos verticais, laterais e torsionais da viga são representados por séries harmônicas. São apresentadas então as equações de movimento que regem o problema e as técnicas de solução para vibração livre e para vibração forçada.

Em 2000, (CARLBOM, 2000) estudou a dinâmica de veículos ferroviários de passageiros submetidos às excitações provenientes das irregularidades da via férrea. Os autores (CLAUS; SCHIEHLEN, 2000) apresentaram uma proposta de um truque ferroviário composto por eixos acoplados às rodas com suspensões internas pneumáticas e de borracha.

Em (MICHALTSOS, 2000) estudaram-se os parâmetros que afetam as respostas dinâmicas das pontes leves de aço. Estabeleceram-se critérios para a escolha de modelos de veículos conforme os comprimentos dos vãos das pontes. Os efeitos de curvatura das pontes foram abordados e parametrizados no estudo. As irregularidades da via foram consideradas, bem como, suas influências em pontes de vãos curtos e pontes de vãos longos. Concluiu-se que para análise numérica em pontes de vãos longos é preferível utilizar os modelos de veículos que são representados por um único eixo. Para pontes com vãos curtos, onde o efeito do impacto é maior, recomendou-se a utilização de modelos de veículos mais completos, principalmente aqueles que apresentam a modelagem dos sistemas de suspensões.

Em, (PFAFFINGER, 2000) estudaram-se as freqüências de vibração e os modos de vibração de uma linha férrea através de modelos numéricos e análises experimentais.

Ainda em 2000, no trabalho de (SANTOS, 2000), foi analisado o contato entre roda e trilho avaliando-se sua influência na vida em serviço das rodas ferroviárias. Para estudar a escamação superficial das rodas (*shelling*), foram determinadas as tensões no contato entre a roda e o trilho através da teoria de *Hertz*, e do método dos elementos finitos, utilizando-se a metodologia de *Kalker* para as forças tangenciais do contato. De posse das tensões de contato, e da dureza superficial da roda, a vida útil das rodas foi estimada baseando-se nos estudos do modelo de *Buckingham*. Foram utilizados no trabalho: o movimento em tangente do rodeiro, as rodas classe C com diâmetro de 38’’ (965 mm), e o trilho padrão TR-57.

Em 2001, os autores (BRACCIALI; CIUFFI; PICCIOLI, 2001) apresentaram uma solução numérica do sistema de equações diferenciais com derivadas parciais que governa a dinâmica vertical de um binário ferroviário.

Um elemento de ponte-via-veículo para investigar a interação entre um trem, a estrutura que suporta os trilhos, e a ponte, foi proposto por (CHENG; AU; CHEUNG, 2001). O trem é modelado como uma série de veículos com dois graus de liberdade na locação de seus eixos. Cada eixo consiste em uma massa suspensa interconectada a uma massa não suspensa por um conjunto de mola-amortecedor. Os trilhos e a plataforma da ponte são modelados como vigas elásticas lineares de *Euler-Bernoulli*, (modelo bidimensional). As propriedades de rigidez e de amortecimento dos dormentes são representadas respectivamente por uma série de molas e de amortecedores. As equações de movimento são montadas em um único sistema matricial, que pode ser integrado numericamente com o emprego do método de *Newmark* ou outro similar de integração no tempo passo a passo.

Com os resultados dos exemplos, observou-se que a escolha dos modelos discreto ou contínuo para a representação dos dormentes não apresentou variações nas respostas dinâmicas da ponte. Obteve-se uma redução das amplitudes dinâmicas quando inserido o amortecimento de *Rayleigh* na estrutura, principalmente nas condições de ressonância.

O autor (CHRISTIANSEN, 2001) estudou a dinâmica de um veículo ferroviário em uma ferrovia com irregularidades laterais. Em seu modelo de veículo foram consideradas 16 equações diferenciais de movimento. A interação entre roda e trilho foi concebida através de modelos que consideram a geometria de contato, compreendendo as forças de atrito e as forças de deslizamento atuantes na área de contato. As irregularidades laterais da via foram modeladas através de funções harmônicas senoidais. Também utilizaram-se modelos estatísticos baseados em medições experimentais. A análise modal do veículo foi realizada, e determinaram-se as freqüências naturais e os respectivos modos naturais de vibração, bem como as velocidades críticas para cada modelo de irregularidade utilizado.

Observou-se grande correlação entre o movimento lateral dos eixos e as irregularidades laterais dos trilhos. A inclusão de graus de liberdade verticais no modelo de veículo ferroviário possibilitou o cálculo das forças dinâmicas verticais. As oscilações apresentadas durante as análises numéricas mostraram, na maioria dos casos, serem simétricas. As oscilações assimétricas ocorreram em casos onde as excitações externas provenientes das irregularidades apresentam-se fora do ângulo de fase.

Em (FRÝBA, 2001), apresentaram-se estudos em relação aos efeitos provocados pelas irregularidades em pontes para trens de alta velocidade. Utilizou-se o modelo de série de cargas concentradas com intervalos uniformes movendo-se com velocidade constante. Estas cargas percorrem toda extensão da viga reta simplesmente apoiada. Observou-se que nas pontes de vãos médios e curtos ocorrem vibrações excessivas similares ao fenômeno da

ressonância. E para velocidades acima de 200 km/h o efeito é ainda mais intenso. Constatou-se neste estudo que as vibrações ressonantes geram desconfortos aos passageiros, menores condições de segurança, possibilidade de descarrilamento dos veículos, e a desestabilização do lastro da ferrovia. Observou-se ainda que as amplitudes das vibrações ressonantes são diretamente proporcionais ao quadrado da velocidade do veículo e ao comprimento do vão da ponte, e inversamente proporcionais ao amortecimento da ponte, ao comprimento do veículo, e a rigidez da ponte.

Ainda no ano de 2001, no trabalho de (ISHIDA; BAN, 2001) realizou-se uma modelagem das rodas com achatamento localizado e seus efeitos de vibração na linha férrea. Este achatamento localizado, ou mossa, é causado pelo desgaste não uniforme das rodas que ocorre quando há seu travamento no processo de frenagem.

Em 2002, (BUREIKA; SUBAČIUS, 2002) desenvolveram um modelo matemático da interação dinâmica entre um eixo com rodas acopladas (rodeiro), e a via férrea.

Os autores (CHEN; TAN; BERGMAN, 2002) estudaram os efeitos da flexibilidade dos apoios na vibração de vigas sujeitas a um carregamento móvel oscilante (sistema massa-mola). Os apoios das vigas foram modelados como molas elásticas lineares. Através das análises numéricas, concluiu-se que a flexibilidade dos apoios das vigas geralmente contribui para o aumento das respostas dinâmicas, da força de interação dinâmica e da força que produz o cisalhamento. Estes efeitos são mais intensos nas estruturas de vãos curtos por serem mais acentuados os impactos produzidos pelas cargas móveis.

Os autores (GOICOLEA et al., 2002) estudaram os métodos de análise dinâmica para as pontes ferroviárias contidos no código espanhol (*Instrucción de acciones a considerar en el proyecto de puentes de ferrocarril - IAPF*) e no código europeu (*EUROCODE 1: European Committee for Standardization: prEN 1991-2: EUROCODE 1 - Actions on structures, Part 2: Traffic loads on bridges, 2002*). Foram exibidos: o método do fator de impacto; a análise dinâmica com cargas móveis; o método dos elementos finitos; a análise dinâmica com interação entre veículo e estrutura; e os modelos baseados em séries harmônicas. Cada método analítico foi acompanhado por análises experimentais para verificar o nível de precisão dos resultados. Foram analisadas as classes dos trens de alta velocidade empregados na Europa e propostos seus respectivos modelos matemáticos. Possibilitou-se também realizar o estudo do comportamento dinâmico dos veículos.

Alguns avanços na análise de pontes ferroviárias de vãos curtos para trens de alta velocidade foram propostos por (MUSEROS et al., 2002), através de uma revisão das normas do *ERRI* (*European Rail Research Institute*). Estudaram-se os efeitos da distribuição das

forças através dos dormentes e do lastro. Estes efeitos, ao serem considerados nos modelos, mostraram uma redução dos deslocamentos e das acelerações das pontes utilizadas nos exemplos. Isto ocorre devido à absorção de energia nos dormentes e no lastro.

Os autores (PARK; PARK; 2002) propuseram um modelo para análise dinâmica de um veículo movendo-se em uma viga flexível. O modelo utilizado é a viga de *Euler-Bernoulli*, apresentada sobre uma fundação viscoelástica. O princípio de *Hamilton* é aplicado para obter as equações verticais e laterais de movimento. Várias condições de suporte são consideradas na fundação da viga. Foram comparados os resultados do modelo de uma massa móvel com a solução exata de uma carga móvel. Foi estudada a velocidade de movimento do veículo, a magnitude da carga móvel, e o número de elementos finitos utilizados, ou seja, o refino do modelo. Resultados acurados podem ser obtidos utilizando-se um número de elementos finitos para a viga flexível maior que quatro. Para condições de baixa velocidade, os resultados obtidos com o modelo são similares aos encontrados na solução exata. Mas para condições de alta velocidade, ocorre certa diferença, produzida pelo efeito inercial da massa móvel do veículo.

Os autores (POPOV et al., 2002) determinaram o coeficiente de atrito existente entre o contato roda e trilho como função do carregamento e dos parâmetros materiais.

Em 2002, (ROMERO, 2002) estudou a interação veículo-estrutura e os efeitos de ressonância em pontes isostáticas ferroviárias para linhas de alta velocidade. Foi realizada uma revisão dos trabalhos mais relevantes sobre o assunto, bem como, suas hipóteses e suas respectivas formulações matemáticas. Concluiu-se que os métodos matemáticos baseados no uso do coeficiente de impacto são incapazes de representar o fenômeno de ressonância, e, portanto, não são válidos para o dimensionamento de pontes isostáticas em linhas de alta velocidade. Este fenômeno pode aparecer em determinadas velocidades de tráfego do trem causando o aumento significativo dos deslocamentos provocando a vibração excessiva da estrutura, podendo levá-la a uma situação de colapso. Desta maneira, torna-se necessário o emprego de um modelo mais realístico que considere a interação entre o veículo e a estrutura.

Os autores (SONG; BIONDINI; BERGMAN, 2002) estudaram os efeitos das superfícies de irregularidades na resposta dinâmica do sistema de interação veículo-ponte. Os autores (WU; THOMPSON, 2002) elaboraram um memorando técnico tratando do problema de interação não-linear entre roda e trilho com acoplamento vertical e lateral. Ainda em 2002, (XIA, 2002) realizou uma modelagem dinâmica de um truque ferroviário de três peças destinado ao transporte de cargas.

Em 2003, (CORREA, 2003), apresentou estudos referentes às vibrações em pontes ferroviárias produzidas pela passagem de um trem eletrificado utilizado no Brasil para o transporte coletivo urbano. O carregamento dinâmico foi representado por vários modelos, entre eles forças concentradas, sistema de massa-mola-amortecedor, e veículos com dois e seis graus de liberdade. O elemento de pórtico plano foi utilizado na modelagem da ponte e dos trilhos. Os dormentes foram modelados como sistema de mola-amortecedor, ou seja, elementos viscoelásticos. Foram apresentados os modelos de interação dinâmica entre trem-trilho-estrutura, considerando-se alguns tipos de irregularidades geométricas dos trilhos e também das rodas.

Os modelos apresentados foram comparados entre si, e observaram-se melhores resultados no modelo de interação dinâmica que utiliza o veículo com seis graus de liberdade. Observou-se também que os trens trafegam em uma faixa de velocidade segura, afastada da condição de ressonância da ponte analisada.

Os autores (HEIDEN et al., 2003), estudaram, através de um modelo matemático, os efeitos dinâmicos em uma ponte ferroviária sob ação de um trem de alta velocidade. O autor (HOFFMANN, 2003) estudou o atrito seco nos elementos dos sistemas de suspensões e o impacto dinâmico em veículos ferroviários. O autor (IWNICKI, 2003) realizou um estudo das forças atuantes no contato entre roda e trilho. Em (JAMES, 2003), realizou-se uma análise do tráfego de cargas em pontes ferroviárias. Os autores (KUMARAN; MENON; NAIR, 2003) realizaram um estudo dos dormentes de concreto na ferrovia e suas respectivas respostas dinâmicas associadas à interação com um veículo ferroviário.

Com o intuito de aperfeiçoar o sistema de suspensões primárias dos veículos ferroviários, (MOHAN, 2003) apresentou seus estudos. Utilizaram-se vários modelos numéricos de modo a estudar a estabilidade lateral, os limites de ciclos de carregamento e as velocidades críticas para vários parâmetros de rigidez e de amortecimento das suspensões primárias e secundárias. Concluiu-se que a velocidade crítica do veículo ferroviário é proporcional ao inverso da raiz quadrada da conicidade das rodas. A velocidade crítica é mais sensível à rigidez da suspensão primária que ao amortecimento da suspensão primária. Todavia, a velocidade crítica pode ser controlada por um sistema ativo ou semi-ativo de rigidez das suspensões primárias laterais e longitudinais.

Os autores (PEARSON; GOODALL, 2003), estudaram o sistema de controle de estabilidade de um veículo ferroviário de alta velocidade. O pesquisador (POLACH, 2003), estudou a estabilidade de um truque de locomotiva com eixos interconectados, em situações de curvas.

Um modelo de análise tridimensional em elementos finitos para a interação entre pontes e trens de alta velocidade foi proposto por (SONG; NOH; CHOI, 2003). A plataforma da ponte é modelada por elementos finitos *NFS* (*nonconforming flat shell*). Os trilhos e os dormentes são modelados com elementos finitos de viga. O lastro é modelado por uma série de molas elásticas lineares, (fundação elástica).

A disposição da estrutura da via é apresentada da seguinte maneira: os trilhos são apoiados transversalmente aos dormentes, os quais se apóiam sobre o lastro, que fica confinado e disposto sobre a plataforma da ponte. O modelo de trem utilizado é o de alta velocidade com vagões articulados e tem 38 graus de liberdade. Utiliza-se a formulação energética lagrangeana para obter as equações de movimento do sistema veículo-ponte.

Nos exemplos são consideradas as irregularidades laterais e verticais da via. O amortecimento da ponte é assumido usando-se o método de *Rayleigh*. O sistema matricial de equações diferenciais é integrado numericamente através do método de *Newmark*. As respostas numéricas das deflexões verticais no centro do vão da ponte apresentaram grande correspondência com os valores obtidos experimentalmente. Observou-se um aumento das respostas dinâmicas quando o trem trafega com velocidades próximas aos 300 km/h.

Uma análise dinâmica de uma ponte ferroviária para trens de alta velocidade foi apresentada por (XIA; ZHANG; DE ROECK, 2003). A ponte em concreto protendido estudada é a *St. Antoine Bridge* que pertence à linha entre as cidades de Paris e Bruxelas. O trem articulado de alta velocidade estudado é o *Thalys*, utilizado na Europa para o transporte de passageiros. O trem é composto por uma locomotiva, um carro de transição, seis carros normais articulados, um carro de transição e outra locomotiva, (estrutura simétrica). A composição totaliza 10 veículos, 13 truques e 26 eixos. Do segundo ao nono, os veículos são articulados entre si e tratados como um grupo. Este grupo que compreende 8 veículos e 9 truques pode ser modelado como 17 corpos rígidos com 85 graus de liberdade. Com os 30 graus de liberdade das duas locomotivas, (15 em cada), o modelo completo totaliza 115 graus de liberdade.

A ponte é modelada com elementos finitos tridimensionais, e para o amortecimento é utilizado o método de *Rayleigh*. Através do equilíbrio dinâmico são determinadas as equações de movimento do sistema. O sistema matricial de equações diferenciais é integrado numericamente através do método de *Newmark*. Foram também realizadas análises experimentais na ponte, e verificou-se que as respostas dos deslocamentos e das acelerações no centro de seu vão apresentam boa correlação com os valores obtidos através da modelagem numérica.

O autor (CHEN, 2004), estudou o desempenho dinâmico de pontes e veículos sobre a ação de ventos fortes. Em (DAMME; ZASTRAU, 2004), apresentou-se uma modelagem via elementos finitos para o contato entre roda e trilho. Os pesquisadores (IWNICKI; WICKENS, 2004), validaram através de um modelo computacional, um modelo reduzido de uma ponte rolante acoplado a um veículo ferroviário em escala de (1/5).

Os autores (LAW et al., 2004), apresentaram uma técnica de identificação das cargas dos eixos do veículo usando o método dos elementos finitos. O modelo de veículo apresenta quatro graus de liberdade e suas equações de movimento são obtidas usando a formulação energética lagrangeana. A ponte é modelada com elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*. O amortecimento é assumido usando-se o método de *Rayleigh*. A técnica se inicia através da medição de deformações da estrutura com auxílio de extensômetros. Os erros obtidos nas medições são minimizados pelo método dos mínimos quadrados. De posse das deformações, obtêm-se os deslocamentos através da teoria da elasticidade. Com os deslocamentos e o carregamento nodal, são obtidas as cargas dos eixos do veículo. O método mostrou eficiência através de simulações numéricas e experimentais com modelos reduzidos.

Ainda em 2004, uma análise modal, experimental e analítica de uma ponte de aço em arco, foi realizada por (REN; ZHAO; HARIK, 2004). A ponte rodoviária sobre o rio *Tennessee* localiza-se entre as cidades de *Marshall* e *Livingston* no oeste do estado de *Kentucky* nos EUA. A ponte possui nove vãos simétricos que totalizam 643 metros de extensão. A análise é realizada somente no vão central, onde se localiza a estrutura em arco com o comprimento de 163 metros.

Através de acelerômetros devidamente localizados, instalados e calibrados, são realizadas as medições. Paralelamente é concebido um modelo numérico computacional utilizando-se o método dos elementos finitos. As barras pertencentes ao arco são modeladas por elementos finitos de pórtico espacial com 12 graus de liberdade. Os pilares tipo parede e a plataforma da ponte são modelados com elementos finitos de placas. Para o amortecimento utiliza-se o método de *Rayleigh*. Os resultados medidos são processados e comparados aos obtidos pelo modelo numérico computacional. Concluiu-se que o modelo numérico computacional apresenta boas aproximações e pode ser empregado em análises onde a estrutura seja submetida a esforços provocados por veículos, ventos, terremotos, etc.

Em 2005, (BENCAT; PAPÁN, 2005) realizaram uma análise dinâmica experimental na ponte ferroviária *Ruzin*. Os autores (CEPEDA; CASTILLO, 2005), elaboraram o informe técnico relativo à análise dinâmica de estruturas submetidas a ações de trens de alta velocidade. A resposta dinâmica de uma ponte ferroviária durante a passagem de um trem de

alta velocidade e a ocorrência simultânea de um terremoto foi estudada por (HEIDEN et al., 2005). Os pesquisadores (KAROUMI; WIBERG; LILJENCRANTZ, 2005), realizaram através de instrumentação em uma ponte ferroviária, o monitoramento para estudar o tráfego de cargas e seus respectivos efeitos dinâmicos na ponte ferroviária.

Um elemento de interação entre veículo-via-ponte considerando o balanço do veículo (*pitching motion*), foi proposto por (LOU, 2005). O veículo é modelado com dois eixos com sistemas de massa-mola-amortecedor e totaliza quatro graus de liberdade. Os trilhos e a plataforma da ponte são modelados com elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*, (modelo bidimensional). Entre os elementos de vigas está presente um sistema de mola-amortecedor contínuo que representa uma fundação viscoelástica contínua. A formulação das equações de movimento do elemento de interação entre veículo-via-ponte é obtida através do princípio de *Hamilton*. Para o amortecimento assumiu-se o método de *Rayleigh*.

Nas análises numéricas foram estudados os efeitos da velocidade do veículo, a presença da estrutura de fundação da via, e das irregularidades. Concluiu-se que os efeitos da estrutura de fundação da via são significativos para o deslocamento vertical e aceleração vertical do corpo do veículo, bem como, as forças de contato entre os eixos e a via. Os efeitos de rotação, deslocamento vertical, e aceleração vertical do veículo no centro do vão da ponte, quando considerada a estrutura da via, são insignificantes. As respostas dinâmicas tais como aceleração vertical e aceleração de rotação do corpo do veículo são significantes quando considerada as irregularidades na via. Também apresentaram significância as forças de contato entre os eixos e a via, os deslocamentos e as acelerações verticais dos trilhos e da ponte no centro do vão.

Os pesquisadores (MUSEROS; ALARCÓN, 2005), estudaram a influência do segundo modo de vibração na resposta dinâmica de pontes ferroviárias de alta velocidade na presença de ressonância. Em (POLACH, 2005), estudou-se a influência da geometria de contato entre roda e trilho no limite de estabilidade do veículo ferroviário. Ainda no ano de 2005, (SEMPREBONE, 2005), realizou um estudo teórico sobre o desgaste em trilhos ferroviários.

Em 2006, (ALMEIDA, 2006) realizou uma análise das forças de contato entre roda e trilho, e estudou o comportamento dinâmico de um rodeiro ferroviário.

Os efeitos dinâmicos em um modelo de veículo e um modelo de ponte ferroviária diante da variação de velocidade e irregularidades verticais da via foram estudados por (BEGHETTO, 2006). O modelo de veículo é composto pela associação de corpos rígidos conectados em sistemas de suspensões. As nove equações de movimento deste modelo são obtidas através do equilíbrio de forças e de momentos, ou seja, equilíbrio dinâmico. No

modelo de ponte ferroviária são usados os elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*. O método de *Rayleigh* é usado para definir o amortecimento estrutural. As irregularidades verticais da via são representadas por funções harmônicas senoidais. Inicialmente são estudadas as respostas dinâmicas do veículo considerando-se a variação de velocidade e das irregularidades da via. Posteriormente é estudado o comportamento dinâmico da ponte ferroviária considerando-se a variação de velocidade e das irregularidades da via. As equações de movimento de ambos os sistemas são integradas numericamente usando o método de *Newmark*. Todos os modelos matemáticos foram implementados no *software* MATLAB.

Na análise do veículo, os máximos deslocamentos e as máximas acelerações ocorreram em situações de baixa velocidade do veículo e máximas amplitudes de irregularidades verticais da via. Em geral, os deslocamentos e as acelerações obtidos são relativamente pequenos não comprometendo as condições de segurança e trafegabilidade do veículo. Na análise da ponte, os máximos deslocamentos no centro do vão ocorrem em situações de máximas amplitudes de irregularidades verticais da via e próximas à velocidade de 30 km/h, onde ocorre a ressonância da ponte para o caso estudado.

Em (BEGHETTO; ABDALLA FILHO, 2006), propôs-se um modelo de interação dinâmica entre veículo e ponte ferroviária. Na tese de (HANDOKO, 2006), investigou-se a dinâmica dos vagões ferroviários submetidos à tração e à frenagem. Em (HERWIG, 2006), estudou-se a influência do efeito dinâmico das cargas no acréscimo da fadiga em pontes de concreto. O autor (HOFFMANN, 2006) em sua tese, estudou a dinâmica dos vagões ferroviários de dois eixos utilizados na Europa para o transporte de cargas. Os autores (POPPRATH et al., 2006), realizaram uma análise modal experimental de um vagão de metrô em modelo reduzido, em escala de aproximadamente (1/10).

Em 2007, (BEGHETTO; ABDALLA FILHO, 2007), estudaram as respostas dinâmicas entre veículo e ponte ferroviária sujeitos às variações de velocidade e irregularidades verticais da via. Em (BANIMAHD; WOODWARD, 2007) estudaram o comportamento do veículo ferroviário durante a passagem pela transição entre o lastro e uma base rígida da via ferroviária através de modelagem tridimensional em elementos finitos. O autor (CHAAR, 2007), estudou a flexibilidade estrutural do eixo e a flexibilidade da via na interação dinâmica entre veículo ferroviário e a via. O autor (CONSOLI, 2007), realizou uma análise do comportamento dinâmico lateral de um veículo ferroviário. Os autores (CRUCEANU; SPIROIU; DUMITRIU, 2007) estudaram os parâmetros relativos às suspensões verticais nos truques ferroviários de carros de passageiros. Os autores (DI MINO; DI LIBERTO, 2007), propuseram um modelo de interação dinâmica entre um veículo ferroviário e a via férrea. Os

autores (POMBO; AMBRÓSIO; SILVA, 2007), propuseram um modelo para o estudo do problema de contato entre roda e trilho da dinâmica ferroviária.

No trabalho de (RIGUEIRO, 2007), avaliaram-se os efeitos dinâmicos em pontes de pequeno e médio vãos para o tráfego de trens de alta velocidade. Os autores (RUGE; BIRK, 2007) estudaram as forças longitudinais em trilhos continuamente soldados em pontes ferroviárias produzidas pela interação dinâmica não linear entre a via férrea e a ponte.

Ainda em 2007, as respostas dinâmicas de uma ponte ferroviária suspensa sob o movimento de um trem foi proposta por (XIA et al., 2007). O modelo de trem é composto por oito carros de passageiros. Cada veículo é composto por um vagão, dois truques e quatro eixos. As conexões entre os corpos rígidos são feitas por molas lineares elásticas e amortecedores viscosos lineares. Cada vagão possui cinco graus de liberdade, duas translações e três rotações. Cada truque possui cinco graus de liberdade, duas translações e três rotações. E cada eixo possui três graus de liberdade, duas translações e uma rotação. O veículo totaliza 27 graus de liberdade.

A ponte ferroviária suspensa é modelada por elementos finitos tridimensionais. As irregularidades verticais, laterais e torsionais da via foram medidas e empregadas para gerar a excitação do trem na ponte, no modelo numérico computacional. Para reduzir o número de graus de liberdade do sistema acoplado ponte-trem empregou-se a técnica da superposição modal considerando-se as irregularidades da via.

As respostas dinâmicas para a ponte obtidas numericamente foram comparadas com estudos experimentais e os resultados apresentaram grandes correlações. As respostas dinâmicas apresentadas pela ponte durante a passagem do trem são relativamente pequenas, e os efeitos de seus movimentos são insignificantes na trafegabilidade do trem.

Em 2008, (CORREA, 2008) em sua tese de doutorado, realizou um estudo relativo ao controle das vibrações provenientes da interação dinâmica entre trens-trilhos-dormentes-estrutura de aço de pontes ferroviárias. Neste trabalho, foram realizados estudos numéricos computacionais e estudos experimentais em uma ponte ferroviária, de modo a estabelecer um sistema alternativo para atenuação das vibrações através de atenuadores viscoelásticos.

Os autores (DAILYDKA et al., 2008) propuseram a modelagem matemática da interação entre a roda e o trilho. O autor (FERREIRA, 2008), estudou o comportamento dinâmico em pontes ferroviárias para trens de alta velocidade, constituídas por vigas pré-fabricadas. Em (LORIEUX, 2008), estudou-se a vibração induzida por um trem em uma ponte de vão único formada por material compósito de concreto e aço. O autor (PEREIRA, 2008), estudou o comportamento dinâmico de pontes ferroviárias para o tráfego de alta velocidade propondo

suas especificações para o projeto de estruturas. Ainda no ano de 2008, em um simpósio sobre mecânica do contato, em tributo ao professor *J. J. Kalker*, (PIOTROWSKI, 2008) resolveu com auxílio do algoritmo *FASTSIM*, desenvolvido por *J. J. Kalker*, o problema das forças tangenciais de contato com escorregamento dependente do atrito.

Em 2009, (BEGHETTO; ABDALLA FILHO, 2009), estudaram as respostas dinâmicas de uma ponte ferroviária produzida pelo tráfego de uma composição ferroviária. Neste trabalho, foram associados dez veículos para formar a composição ferroviária, sendo cada veículo capaz de representar nove graus de liberdade. A ponte foi modelada com elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*. Também foram consideradas as irregularidades da via e os efeitos devido à variação da velocidade da composição.

Em (LIU; DE ROECK; LOMBAERT, 2009) estudaram os efeitos da interação dinâmica entre trem e ponte na resposta dinâmica da ponte durante a passagem do trem. Os autores (LU et al., 2009), propuseram um algoritmo para estudar as vibrações randômicas não estacionárias produzidas pela interação entre veículo e ponte ferroviária. Os pesquisadores (POMBO et al., 2009), estudaram a evolução do desgaste em rodas ferroviárias e sua influência no comportamento dinâmico dos veículos ferroviários. Os autores (QU et al., 2009), estudaram um controle inteligente para reduzir as respostas dinâmicas de vibrações longitudinais em pontes ferroviárias produzidas pela frenagem do trem. Em (RUGE, et al., 2009), foi estudada a interação dinâmica longitudinal entre a via férrea e uma ponte ferroviária. Em (SUN; ZHANG; ZHANG, 2009), usando o método dos elementos finitos, foram realizadas análises para estudar o contato entre roda e trilho em um trecho da via férrea em curva.

Em (ZAAZAA; SCHWAB, 2009), foi realizada uma revisão sobre as teorias de contato entre roda e trilho de *J. J. Kalker* e suas implementações em códigos computacionais. Neste trabalho são descritas a teoria linear, a teoria das faixas, a teoria empírica, a teoria simplificada, e a teoria exata de contato de rolamento tridimensional. Dentre as rotinas computacionais desenvolvidas por *Kalker*, destaca-se *CONTACT* e *FASTSIM*, amplamente utilizadas em aplicações no meio ferroviário em todo mundo.

Em 2010, (BEGHETTO; ABDALLA FILHO, 2010), realizaram a modelagem da interação entre veículo e ponte ferroviária para a obtenção de suas respostas dinâmicas. Neste trabalho, foram estudadas as respostas dinâmicas nas situações de ressonância do veículo, e também da ponte ferroviária, considerando-se as irregularidades da via. No trabalho de (PIERINGER; KROPP, 2010), utilizou-se um modelo de interação entre roda e trilho no domínio do tempo para altas freqüências incluindo o atrito tangencial entre os corpos. A

comparação com o modelo de contacto da rotina *CONTACT*, desenvolvida por *Kalker*, para o caso quase estático, mostrou que a implementação do modelo de contacto está correta.

Uma determinação do fator de impacto dinâmico em pontes ferroviárias metálicas considerando o efeito simultâneo da velocidade do veículo e a razão entre a distância dos eixos e o vão da ponte foi proposta no trabalho de (HAMIDI; DANSHJOO, 2010). De acordo com os resultados obtidos concluiu-se que os fatores de impactos dinâmicos são diferentes em três diferentes faixas de velocidade (abaixo de 180 km/h, entre 180 km/h e 300 km/h, e acima de 300 km/h). Os resultados mostraram que a velocidade da composição contribui para a amplificação dos fatores de impacto dinâmico. Por outro lado, um valor grande entre a razão da distância entre os eixos e o vão da ponte, contribuem para um coeficiente de impacto dinâmico menor.

Em (COSTA et al., 2010), estudou-se a influência do solo nas respostas dinâmicas não lineares das ferrovias de alta velocidade. No trabalho de (XU et al., 2010), realizou-se a análise de tensões e de acelerações utilizando-se o método da superposição modal em um veículo ferroviário acoplado a uma ponte de vão longo. Em (AMBRÓSIO, 2010) estudou a cinemática de um trem para o projeto dos componentes de um veículo ferroviário. Em (MARTÍNEZ-RODRIGO; LAVADO; MUSEROS, 2010) estudou-se as vibrações transversais existentes nas pontes ferroviárias sob as condições de ressonância em configurações de pontes de uma e de duas vias.

Ainda em 2010, no trabalho de (SHIN et al., 2010), estudou-se a redução da vibração em pontes ferroviárias para o tráfego de alta velocidade através do ajuste de comprimento dos veículos. Utilizando-se de um modelo experimental em escala de (1/100), verificou-se a redução da vibração produzida pela excitação fora de fase do veículo devido a sua variação de seu comprimento.

Em 2011, (BEGHETTO; ABDALLA FILHO, 2011), estudaram a modelagem de um sistema veículo-ponte ferroviária considerando as irregularidades da via. Os autores (TORSTENSSON; NIELSEN; BAEZA, 2011) estudaram a interação dinâmica entre trem e a via férrea em veículos de alta velocidade considerando-se a dinâmica dos eixos e a rotação das rodas na modelagem. No trabalho de (MAZILU; DUMITRIU; TUDORACHE, 2011), estudou-se o limite de estabilidade da via considerando-se a interação dinâmica entre uma massa móvel.

No presente capítulo, observou-se que ao longo dos trabalhos, principalmente os relacionados com a interação dinâmica entre veículo e estrutura, os modelos matemáticos evoluem em relação ao número de graus de liberdade que são capazes de representar. Esta

tendência torna os modelos mais realísticos e as análises numéricas mais precisas. As análises experimentais vêm mostrando esta realidade através da validação dos modelos numéricos.

Também observou-se que a interação dinâmica das estruturas dos veículos ferroviários com a via férrea, ou com uma ponte ferroviária por exemplo, se dá através do contato entre as rodas e os trilhos. Desta forma, o contato mecânico entre roda e trilho vem sendo amplamente estudado em todo o mundo. Pois através das forças provenientes deste contato que se realiza a interação dinâmica entre as estruturas em questão.

No presente trabalho é realizado uma modelagem tridimensional da interação dinâmica entre veículo e ponte ferroviária considerando a mecânica de contato entre as rodas e os trilhos, frente à variação da velocidade e a presença das irregularidades da via.

Com a presente modelagem é possível determinar: o comportamento dinâmico de um veículo ferroviário mediante sua vibração produzida pelas irregularidades verticais, laterais e rotacionais da via; as dimensões das regiões de contato entre rodas e trilhos, as tensões no contato, os microescorregamentos (*creeps*), as forças tangenciais no contato, e os momentos de rotação de *spin* no contato; os deslizamentos e a perda de contato entre as rodas e os trilhos, considerando-se as irregularidades da via, a variação de velocidade, e a contaminação dos trilhos com óleo.

Também é possível determinar com a modelagem deste trabalho: o comportamento dinâmico da ponte ferroviária produzida pelo tráfego do veículo ferroviário, e da composição, sob diferentes condições de velocidade e irregularidades via.

No próximo capítulo, será apresentado: o modelo tridimensional de um veículo ferroviário; os modelos matemáticos das irregularidades verticais, laterais e rotacionais da via; o modelo de contato entre rodas e trilhos embasado nas teorias de *Hertz* e de *Kalker*; a formulação energética dos elementos finitos de barra, de viga e de pórtico tridimensional para a modelagem da ponte; a ponte ferroviária e seu respectivo modelo em elementos finitos; a distribuição dos esforços do veículo na ponte; e o modelo de interação dinâmica entre o veículo e a ponte ferroviária.

CAPÍTULO 3
MODELOS MATEMÁTICOS

Este capítulo apresenta os modelos matemáticos que compõem este trabalho. De modo a unir estes modelos em um único algoritmo numérico computacional, e também para organizar os objetivos deste trabalho elaborou-se o seguinte fluxograma apresentado na Figura 1:

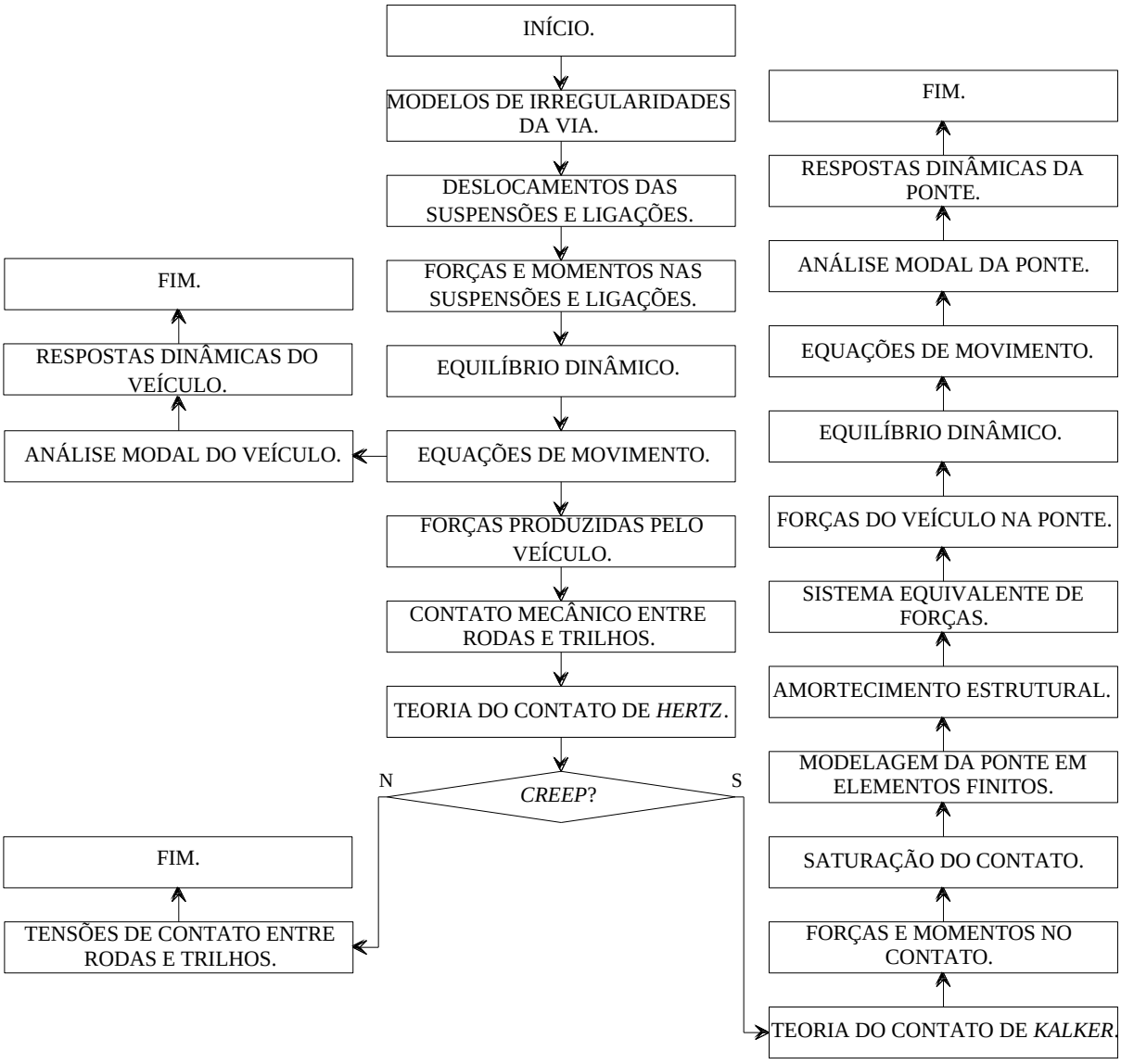


Figura 1 – Fluxograma do algoritmo numérico computacional.
Fonte: Autor.

No modelo tridimensional do veículo ferroviário são descritos seus componentes, suas características físicas e geométricas, seus graus de liberdade, bem como é apresentada a formulação que determina as equações de movimento. Ainda neste capítulo são apresentados: os modelos matemáticos das irregularidades verticais, laterais, e rotacionais da via; o modelo

de contato mecânico entre rodas e trilhos embasado nas teorias de *Hertz* e de *Kalker*; a variação do coeficiente de atrito entre rodas e trilhos com a velocidade e as condições de contaminações; o modelo de saturação do contato das forças tangenciais e dos momentos de *spin*; a formulação energética dos elementos finitos de barra, de viga e de pórtico tridimensional para a modelagem da ponte; a ponte ferroviária e seu respectivo modelo em elementos finitos; o sistema equivalente de forças, que transfere os pontos de aplicação das forças, dos trilhos para os centros de gravidade das vigas; a distribuição das forças do veículo na estrutura da ponte; e a atualização das forças em cada elemento finito.

3.1 Modelo tridimensional de veículo ferroviário

O modelo tridimensional de veículo ferroviário é desenvolvido através da associação de corpos rígidos interconectados a sistemas de suspensões. Estes corpos rígidos possuem massas homogêneas e momentos de inércia de massa. Compõem o modelo um carro, um truque dianteiro, um truque traseiro, suspensões primárias, suspensões secundárias e quatro eixos com rodas acopladas. Estas e outras características dos componentes das estradas de ferro, dos carros e dos vagões são descritas em detalhes nos Apêndices A e B.

As suspensões primárias são mais rígidas comparadas às secundárias e agem entre os eixos e os truques. As suspensões secundárias agem verticalmente entre os truques e o corpo do carro. Cada sistema de suspensão é formado por mola elástica linear e amortecedor viscoso linear. A rigidez do truque em suas ligações com os eixos com rodas acopladas (rodeiros), também é representada no modelo através de molas e amortecedores. O modelo de veículo totaliza 25 graus de liberdade.

No modelo, admite-se que as rodas são indeformáveis e não possuem irregularidades locais, (ou mossas). Os efeitos da variação da temperatura nos materiais são desconsiderados, inclusive na condição de atrito entre as superfícies das rodas e dos trilhos. As ações externas como chuva, vento, sismo e terremoto não são consideradas no modelo. A Figura 2 mostra o modelo tridimensional de veículo ferroviário.

Na Figura 2, são mostrados: o carro, o truque dianteiro, o truque traseiro, os eixos com suas rodas acopladas (rodeiros), as suspensões primárias e secundárias com suas molas e amortecedores, a rigidez e o amortecimento das ligações dos truques. Também são mostrados os graus de liberdade com suas respectivas convenções, a posição de cada centro de massa em cada corpo rígido, as distâncias, e as cotas (alturas).

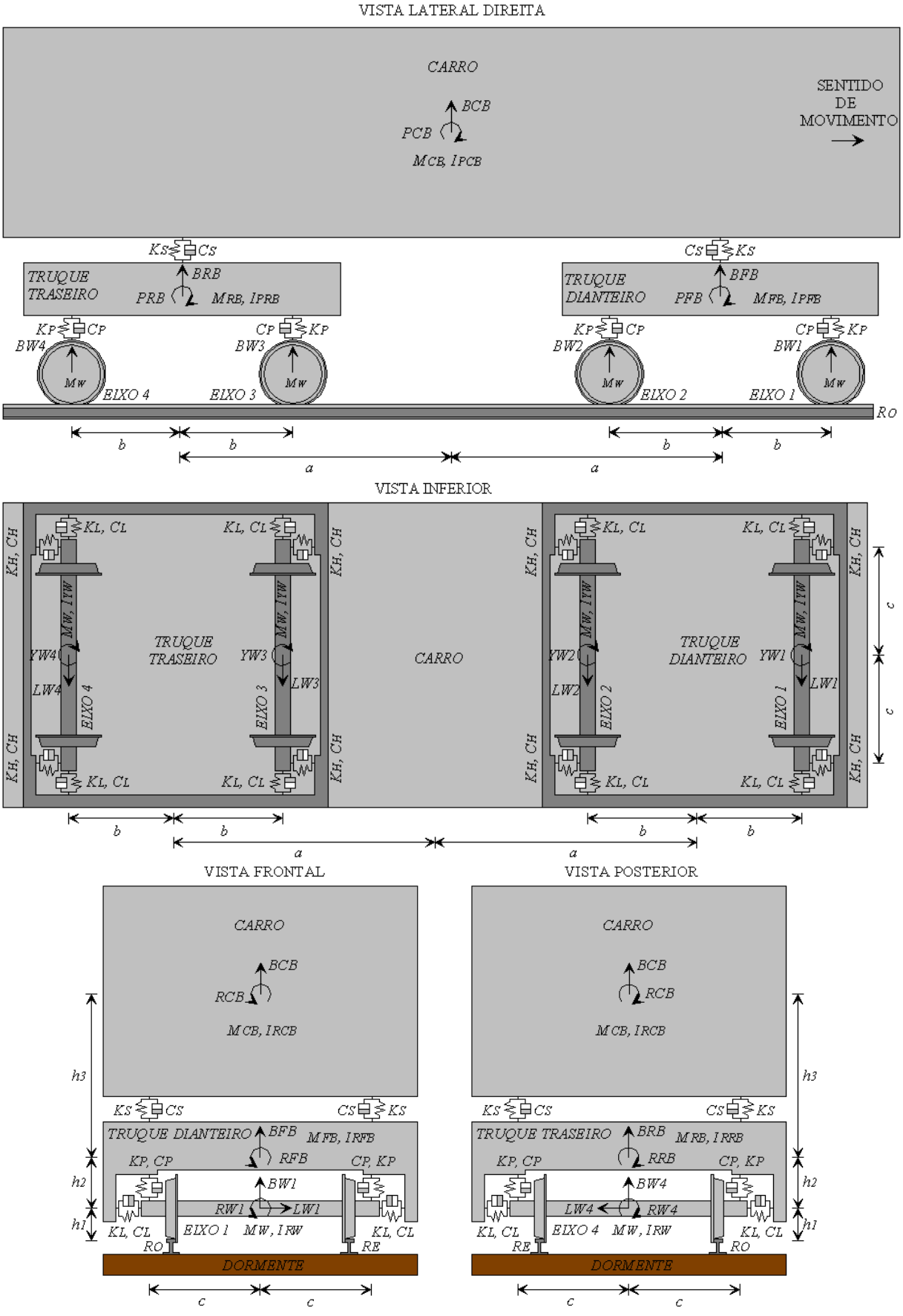


Figura 2 – Modelo tridimensional de veículo ferroviário.
Fonte: Autor.

A Figura 3 mostra os graus de liberdade do modelo tridimensional de veículo ferroviário, e a descrição é apresentada na Tabela 1.

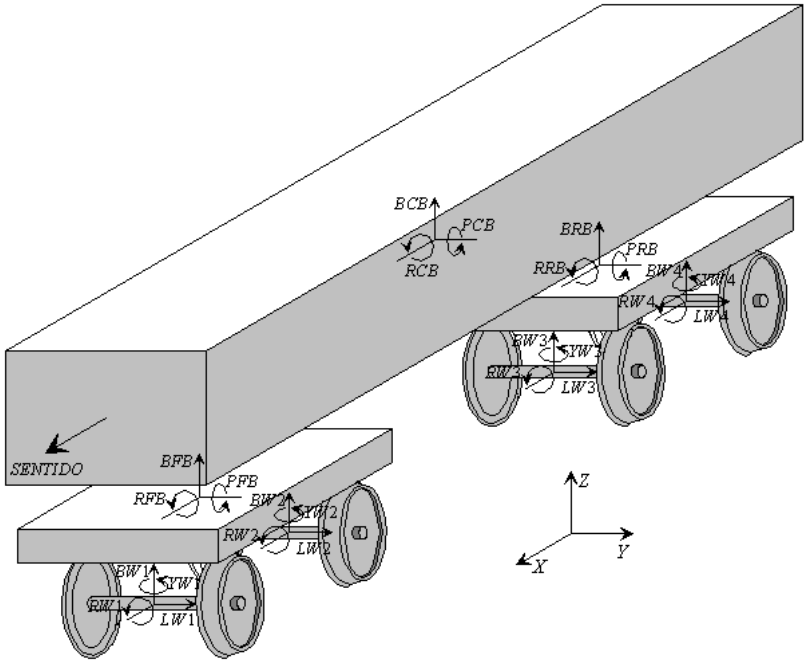


Figura 3 – Graus de liberdade do modelo tridimensional de veículo ferroviário.
Fonte: Autor.

Tabela 1 – Descrição dos graus de liberdade do veículo ferroviário.

GRAUS DE LIBERDADE DO VEÍCULO FERROVIÁRIO		
CORPOS RÍGIDOS	**SÍMBOLOS**	**DESCRIÇÃO**
CARRO	***BCB***	Translação vertical do carro (*bouncing*).
	RCB	Rotação no eixo longitudinal do carro (*rolling*).
	PCB	Rotação no eixo transversal do carro (*pitching*).
TRUQUE DIANTEIRO	***BFB***	Translação vertical do truque dianteiro (*bouncing*).
	RFB	Rotação no eixo longitudinal do truque dianteiro (*rolling*).
	PFB	Rotação no eixo transversal do truque dianteiro (*pitching*).
TRUQUE TRASEIRO	***BRB***	Translação vertical do truque traseiro (*bouncing*).
	RRB	Rotação no eixo longitudinal do truque traseiro (*rolling*).
	PRB	Rotação no eixo transversal do truque traseiro (*pitching*).
EIXO 1	***BW1***	Translação vertical do eixo 1 (*bouncing*).
	LW1	Translação lateral do eixo 1 (*lateral*).
	RW1	Rotação no eixo horizontal do eixo 1 (*rolling*).
	YW1	Rotação no eixo vertical do eixo 1 (*yawing*).
EIXO 2	***BW2***	Translação vertical do eixo 2 (*bouncing*).
	LW2	Translação lateral do eixo 2 (*lateral*).
	RW2	Rotação no eixo horizontal do eixo 2 (*rolling*).
	YW2	Rotação no eixo vertical do eixo 2 (*yawing*).
EIXO 3	***BW3***	Translação vertical do eixo 3 (*bouncing*).
	LW3	Translação lateral do eixo 3 (*lateral*).
	RW3	Rotação no eixo horizontal do eixo 3 (*rolling*).
	YW3	Rotação no eixo vertical do eixo 3 (*yawing*).
EIXO 4	***BW4***	Translação vertical do eixo 4 (*bouncing*).
	LW4	Translação lateral do eixo 4 (*lateral*).
	RW4	Rotação no eixo horizontal do eixo 4 (*rolling*).
	YW4	Rotação no eixo vertical do eixo 4 (*yawing*).

Fonte: Autor.

A descrição das propriedades do veículo ferroviário é apresentada na Tabela 2.

Tabela 2 – Descrição das propriedades do veículo ferroviário.

PROPRIEDADES DO VEÍCULO FERROVIÁRIO	
SÍMBOLOS	**DESCRIÇÃO**
M_{CB}	Massa do carro.
M_{FB}	Massa do truque dianteiro.
M_{RB}	Massa do truque traseiro.
M_W	Massa do eixo com rodas acopladas.
I_{RCB}	Momento de inércia de massa da rotação no eixo longitudinal do carro (*rolling*).
I_{PCB}	Momento de inércia de massa da rotação no eixo transversal do carro (*pitching*).
I_{RFB}	Momento de inércia de massa da rotação no eixo longitudinal do truque dianteiro (*rolling*).
I_{PFB}	Momento de inércia de massa da rotação no eixo transversal do truque dianteiro (*pitching*).
I_{RRB}	Momento de inércia de massa da rotação no eixo longitudinal do truque traseiro (*rolling*).
I_{PRB}	Momento de inércia de massa da rotação no eixo transversal do truque traseiro (*pitching*).
I_{RW}	Momento de inércia de massa da rotação no eixo horizontal do eixo com rodas (*rolling*).
I_{YW}	Momento de inércia de massa da rotação no eixo vertical do eixo com rodas (*yawing*).
K_P	Rigidez vertical da suspensão primária.
C_P	Amortecimento vertical da suspensão primária.
K_S	Rigidez vertical da suspensão secundária.
C_S	Amortecimento vertical da suspensão secundária.
K_L	Rigidez lateral do truque.
C_L	Amortecimento lateral do truque.
K_H	Rigidez horizontal do truque.
C_H	Amortecimento horizontal do truque.

Fonte: Autor.

A descrição das distâncias e cotas, bem como dos trilhos são apresentadas na Tabela 3.

Tabela 3 – Descrição das distâncias, cotas, e trilhos do veículo ferroviário.

DISTÂNCIAS, COTAS, E TRILHOS	
SÍMBOLOS	**DESCRIÇÃO**
$2a$	Distância longitudinal dos centros dos truques.
$2b$	Distância longitudinal dos centros dos eixos.
$2c$	Distância transversal dos centros dos eixos.
h_1	Altura entre o trilho e o centro de eixo da roda.
h_2	Altura entre o centro de eixo da roda e o centro do truque.
h_3	Altura entre o centro do truque e o centro do carro.
R_O	Trilho onde trafegam as rodas ímpares.
R_E	Trilho onde trafegam as rodas pares.

Fonte: Autor.

3.1.1 Deslocamentos das suspensões

Os deslocamentos das suspensões primárias, das suspensões secundárias, e das ligações (lateral e rotacional) dos truques com os rodeiros, são determinados mediante a contribuição dos graus de liberdade de movimento do veículo. Os deslocamentos relacionados à rotação do eixo com rodas acopladas, são obtidos pela combinação de dois deslocamentos no plano horizontal, opostos e combinados. A Figura 4 indica a geometria das suspensões, das ligações,

e os graus de liberdade, e suas respectivas convenções. Os sistemas de eixos coordenados estão dispostos nos centros de massas dos corpos rígidos: do carro, do truque dianteiro, do truque traseiro e dos eixos com rodas acopladas. As setas indicam o sentido positivo dos graus de liberdade de movimento do veículo, bem como o sentido positivo dos deslocamentos das suspensões e das ligações. A descrição destes é apresentada na Tabela 4.

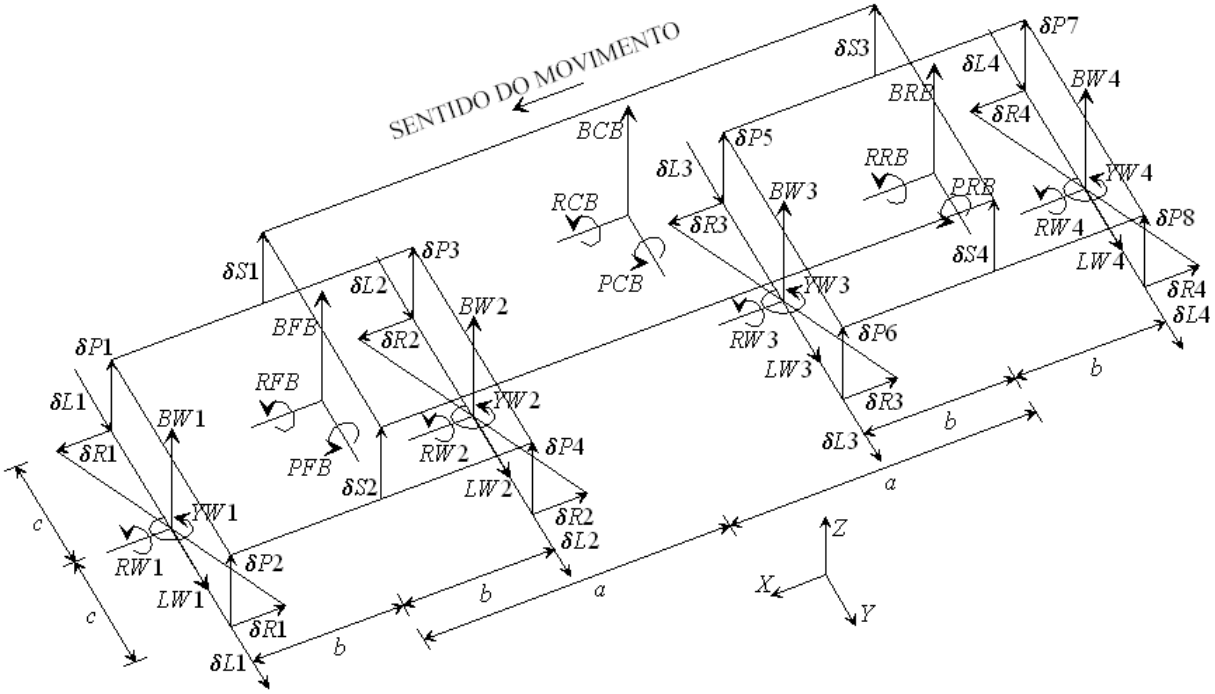


Figura 4 – Geometria das suspensões, das ligações e graus de liberdade.
Fonte: Autor.

Tabela 4 – Deslocamentos das suspensões e ligações.

DESLOCAMENTOS DAS SUSPENSÕES E LIGAÇÕES		
SUSPENSÕES E LIGAÇÕES	**SÍMBOLOS**	**DESCRIÇÃO**
SUSPENSÕES PRIMÁRIAS	**δPi para i = 1,2,3,...,8**	Deslocamento vertical i.
SUSPENSÕES SECUNDÁRIAS	**δSi para i = 1,2,3,...,4**	Deslocamento vertical i.
LIGAÇÕES LATERAIS	**δLi para i = 1,2,3,...,4**	Deslocamento lateral do eixo i.
LIGAÇÕES ROTACIONAIS	**δRi para i = 1,2,3,...,4**	Deslocamento rotacional do eixo i.

Fonte: Autor.

As equações dos deslocamentos das suspensões e ligações no domínio do tempo são determinadas através das contribuições dos graus de liberdade do veículo. Desta maneira são apresentadas as equações dos deslocamentos das suspensões.

3.1.1.1 Equações dos deslocamentos verticais das suspensões primárias

A equação do deslocamento vertical da suspensão primária 1 no domínio do tempo (δ_{P1}), por exemplo, é obtida pela translação vertical do truque dianteiro (*BFB*), pela rotação no eixo longitudinal do truque dianteiro (*RFB*), associada à distância (*c*), pela rotação no eixo transversal do truque dianteiro (*PFB*), associada à distância (*b*), pela translação vertical do eixo 1 (*BW*1), pela rotação no eixo transversal do eixo 1 (*RW*1), associada à distância (*c*), e pela irregularidade vertical da via analisada na roda 1 (I_{V1}). As demais equações dos deslocamentos verticais das suspensões primárias no domínio do tempo são obtidas de maneira análoga, assim tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta_{P1}(t) &= BFB(t) - c\cdot\sin(RFB(t)) - b\cdot\sin(PFB(t)) - BW1(t) + c\cdot\sin(RW1(t)) - I_{V1}(t)\\
\delta_{P2}(t) &= BFB(t) + c\cdot\sin(RFB(t)) - b\cdot\sin(PFB(t)) - BW1(t) - c\cdot\sin(RW1(t)) - I_{V2}(t)\\
\delta_{P3}(t) &= BFB(t) - c\cdot\sin(RFB(t)) + b\cdot\sin(PFB(t)) - BW2(t) + c\cdot\sin(RW2(t)) - I_{V3}(t)\\
\delta_{P4}(t) &= BFB(t) + c\cdot\sin(RFB(t)) + b\cdot\sin(PFB(t)) - BW2(t) - c\cdot\sin(RW2(t)) - I_{V4}(t)\\
\delta_{P5}(t) &= BRB(t) - c\cdot\sin(RRB(t)) - b\cdot\sin(PRB(t)) - BW3(t) + c\cdot\sin(RW3(t)) - I_{V5}(t)\\
\delta_{P6}(t) &= BRB(t) + c\cdot\sin(RRB(t)) - b\cdot\sin(PRB(t)) - BW3(t) - c\cdot\sin(RW3(t)) - I_{V6}(t)\\
\delta_{P7}(t) &= BRB(t) - c\cdot\sin(RRB(t)) + b\cdot\sin(PRB(t)) - BW4(t) + c\cdot\sin(RW4(t)) - I_{V7}(t)\\
\delta_{P8}(t) &= BRB(t) + c\cdot\sin(RRB(t)) + b\cdot\sin(PRB(t)) - BW4(t) - c\cdot\sin(RW4(t)) - I_{V8}(t).
\end{aligned} \tag{1}$$

3.1.1.2 Equações dos deslocamentos verticais das suspensões secundárias

A equação do deslocamento vertical da suspensão secundária 1 no domínio do tempo (δ_{S1}), por exemplo, é obtida pela translação vertical do carro (*BCB*), pela rotação no eixo longitudinal do carro (*RCB*), associada à distância (*c*), pela rotação no eixo transversal do carro (*PCB*), associada à distância (*a*), pela translação vertical do truque dianteiro (*BFB*), e pela rotação no eixo longitudinal do truque dianteiro (*RFB*), associada à distância (*c*). As demais equações dos deslocamentos verticais das suspensões secundárias no domínio do tempo são obtidas de maneira análoga, assim tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta_{S1}(t) &= BCB(t) - c\cdot\sin(RCB(t)) - a\cdot\sin(PCB(t)) - BFB(t) + c\cdot\sin(RFB(t))\\
\delta_{S2}(t) &= BCB(t) + c\cdot\sin(RCB(t)) - a\cdot\sin(PCB(t)) - BFB(t) - c\cdot\sin(RFB(t))\\
\delta_{S3}(t) &= BCB(t) - c\cdot\sin(RCB(t)) + a\cdot\sin(PCB(t)) - BRB(t) + c\cdot\sin(RRB(t))\\
\delta_{S4}(t) &= BCB(t) + c\cdot\sin(RCB(t)) + a\cdot\sin(PCB(t)) - BRB(t) - c\cdot\sin(RRB(t)).
\end{aligned} \tag{2}$$

3.1.1.3 Equações dos deslocamentos das ligações laterais

A equação do deslocamento lateral do eixo 1 no domínio do tempo (δ_{L1}), por exemplo, é obtida pela translação lateral do eixo 1 ($LW1$), e pela irregularidade lateral da via analisada no eixo 1 (I_{L1}). As demais equações dos deslocamentos laterais dos outros eixos no domínio do tempo, são obtidas de maneira análoga, assim tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta_{L1}(t) &= LW1(t) - I_{L1}(t) \\
\delta_{L2}(t) &= LW2(t) - I_{L2}(t) \\
\delta_{L3}(t) &= LW3(t) - I_{L3}(t) \\
\delta_{L4}(t) &= LW4(t) - I_{L4}(t).
\end{aligned} \tag{3}$$

3.1.1.4 Equações dos deslocamentos das ligações rotacionais

A equação do deslocamento rotacional do eixo 1 no domínio do tempo (δ_{R1}), por exemplo, é obtida pela rotação no eixo vertical do eixo 1 (*yawing*), e pela irregularidade rotacional da via analisada no eixo 1 (I_{R1}). As demais equações dos deslocamentos rotacionais dos outros eixos no domínio do tempo, são obtidas de maneira análoga, assim tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta_{R1}(t) &= YW1(t) - I_{R1}(t) \\
\delta_{R2}(t) &= YW2(t) - I_{R2}(t) \\
\delta_{R3}(t) &= YW3(t) - I_{R3}(t) \\
\delta_{R4}(t) &= YW4(t) - I_{R4}(t).
\end{aligned} \tag{4}$$

As Equações (1) e (2), dos deslocamentos, podem ser simplificadas (linearizadas), admitindo-se para pequenas rotações, ($\sin(\theta(t)) \approx \theta(t)$). Substituindo-se a linearização nas Equações (1) e (2), e rearranjando os termos, tem-se respectivamente:

$$\begin{aligned}
\delta_{P1}(t) &= BFB(t) - c\cdot RFB(t) - b\cdot PFB(t) - BW1(t) + c\cdot RW1(t) - I_{V1}(t) \\
\delta_{P2}(t) &= BFB(t) + c\cdot RFB(t) - b\cdot PFB(t) - BW1(t) - c\cdot RW1(t) - I_{V2}(t) \\
\delta_{P3}(t) &= BFB(t) - c\cdot RFB(t) + b\cdot PFB(t) - BW2(t) + c\cdot RW2(t) - I_{V3}(t) \\
\delta_{P4}(t) &= BFB(t) + c\cdot RFB(t) + b\cdot PFB(t) - BW2(t) - c\cdot RW2(t) - I_{V4}(t) \\
\delta_{P5}(t) &= BRB(t) - c\cdot RRB(t) - b\cdot PRB(t) - BW3(t) + c\cdot RW3(t) - I_{V5}(t) \\
\delta_{P6}(t) &= BRB(t) + c\cdot RRB(t) - b\cdot PRB(t) - BW3(t) - c\cdot RW3(t) - I_{V6}(t) \\
\delta_{P7}(t) &= BRB(t) - c\cdot RRB(t) + b\cdot PRB(t) - BW4(t) + c\cdot RW4(t) - I_{V7}(t) \\
\delta_{P8}(t) &= BRB(t) + c\cdot RRB(t) + b\cdot PRB(t) - BW4(t) - c\cdot RW4(t) - I_{V8}(t).
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\delta_{S1}(t) &= BCB(t) - c\cdot RCB(t) - a\cdot PCB(t) - BFB(t) + c\cdot RFB(t) \\
\delta_{S2}(t) &= BCB(t) + c\cdot RCB(t) - a\cdot PCB(t) - BFB(t) - c\cdot RFB(t) \\
\delta_{S3}(t) &= BCB(t) - c\cdot RCB(t) + a\cdot PCB(t) - BRB(t) + c\cdot RRB(t) \\
\delta_{S4}(t) &= BCB(t) + c\cdot RCB(t) + a\cdot PCB(t) - BRB(t) - c\cdot RRB(t).
\end{aligned} \tag{6}$$

3.1.2 Irregularidades da via

As irregularidades da via são aqui apresentadas em irregularidades verticais, laterais, e rotacionais. A Figura 5 mostra a convenção dos sinais positivos, para as irregularidades verticais e laterais, em ambos os trilhos da via, considerando-se a vista posterior, ou seja, com as rodas ímpares trafegando no trilho (R_O), o trilho do lado direito.

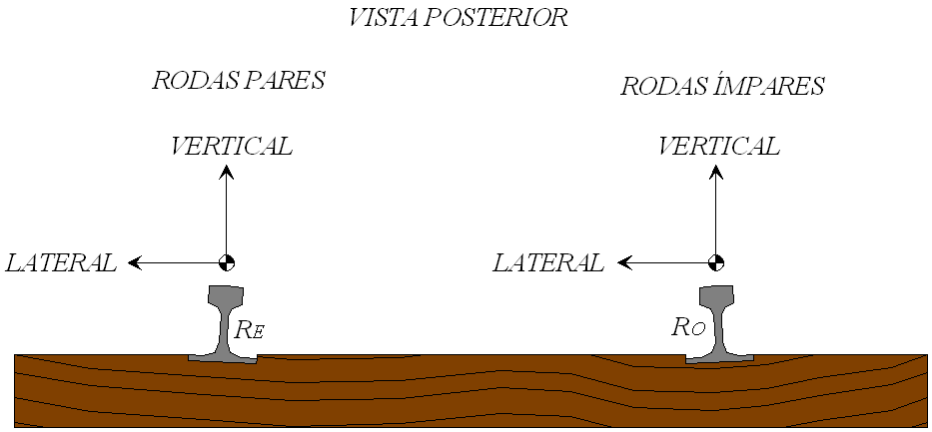


Figura 5 – Geometria das irregularidades da via.
Fonte: Autor.

Para definir os modelos matemáticos de representação das irregularidades da via, torna-se necessário apresentar a geometria dos pontos de contato entre as rodas e os trilhos. A Figura 6 mostra a geometria dos pontos de contato entre as rodas e os trilhos e o respectivo sistema de coordenadas móvel que acompanha o veículo ferroviário.

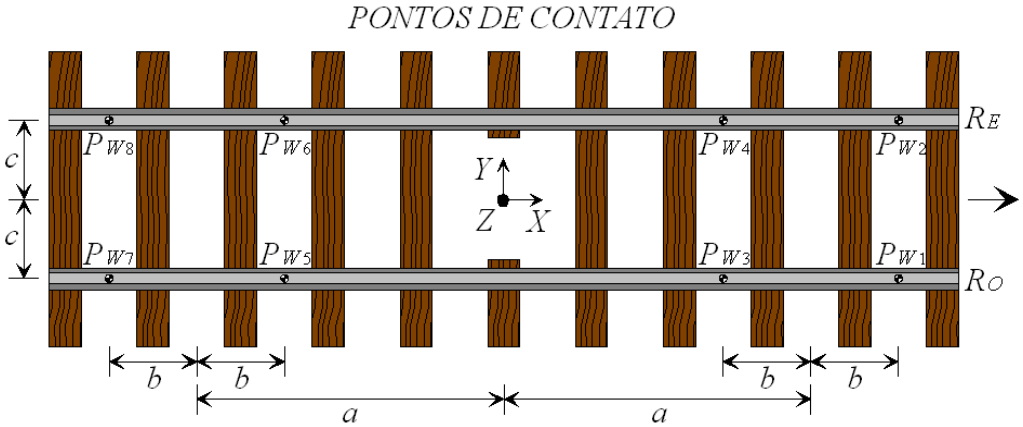


Figura 6 – Pontos de contato entre as rodas e os trilhos.
Fonte: Adaptado de (BEGHETTO, 2006).

Observa-se na Figura 6, a presença de dois trilhos (R_E e R_O) que representam o trilho onde trafegam as rodas pares, e o trilho onde trafegam as rodas ímpares, respectivamente. Os pontos de contato entre as rodas e os trilhos são representados por (P_{Wi}). As distâncias do veículo (a), (b) e (c) são descritas na Tabela 3. Desta maneira tem-se o seguinte sistema de coordenadas móveis:

$$
\begin{aligned}
P_{W1} &= (a+b,-c,0)\\
P_{W2} &= (a+b,c,0)\\
P_{W3} &= (a-b,-c,0)\\
P_{W4} &= (a-b,c,0)\\
P_{W5} &= (-a+b,-c,0)\\
P_{W6} &= (-a+b,c,0)\\
P_{W7} &= (-a-b,-c,0)\\
P_{W8} &= (-a-b,c,0).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

3.1.2.1 Irregularidades verticais

As irregularidades verticais da via são representadas por um modelo matemático de funções harmônicas senoidais. (DAHLBERG, 2006). A Figura 7 mostra uma situação de irregularidades verticais da via e seu respectivo modelo matemático definido por uma amplitude de onda (A_V), e um comprimento de onda (l_V).

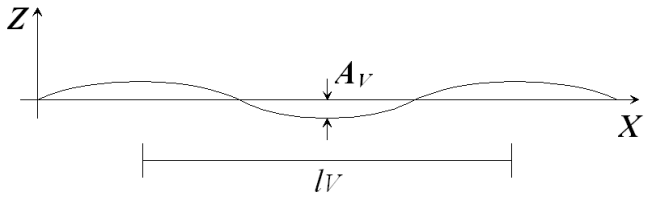


Figura 7 – Modelo de irregularidades verticais da via.
Fonte: Adaptado de (BEGHETTO, 2006).

Cada linha de trilho apresenta uma função que é particularizada para cada roda segundo a posição que ela ocupa ao longo do tempo. Esta posição é definida através dos pontos de contato entre as rodas e os trilhos. Desta maneira, as equações das irregularidades verticais da via analisadas em cada roda são apresentadas respectivamente por:

$$
\begin{aligned}
I_{V2\cdot i-1}(t) &= A_{VO}\cdot\sin\left[\frac{2\cdot\pi\cdot v}{l_{VO}}\cdot\left(t+\frac{|P_{W2\cdot i-1}-P_{W1}|}{v}\right)\right] \qquad i=1,2,...,4 \qquad \textit{Rodas} \quad \textit{Ímpares}\\
I_{V2\cdot i}(t) &= A_{VE}\cdot\sin\left[\frac{2\cdot\pi\cdot v}{l_{VE}}\cdot\left(t+\frac{|P_{W2\cdot i}-P_{W2}|}{v}\right)\right] \qquad i=1,2,...,4 \qquad \textit{Rodas} \quad \textit{Pares}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Onde (A_{VO}) e (A_{VE}) representam as amplitudes de onda senoidal onde trafegam as rodas ímpares e as rodas pares, respectivamente. Os comprimentos de onda senoidal onde trafegam as rodas ímpares, e as rodas pares, são representados respectivamente por (l_{VO}) e (l_{VE}). A velocidade do veículo é representada por (v), o tempo é representado por (t), e os pontos de contato entre as rodas e os trilhos são representados por (P_{Wi}). A diferença em tempo da passagem de um eixo para outro em relação a um referencial fixo, é definida através da diferença entre os pontos de contato e a velocidade do veículo, como é apresentado na Equação (8).

3.1.2.2 Irregularidades laterais

As irregularidades laterais representam o movimento lateral do rodeiro transversalmente à linha dos trilhos, pois a bitola do material rodante é mantida pela rigidez do eixo que acopla as rodas, ou seja, tratada como corpo rígido. Porém a bitola da via pode variar. A diferença entre a bitola da via e a bitola do material rodante, é chamada de jogo da via, fixado segundo a "Conferência de Berna" nos valores entre (9 mm a 15 mm), para rodas com frisos novos. (BRINA, 1979). A Figura 8 mostra o jogo da via.

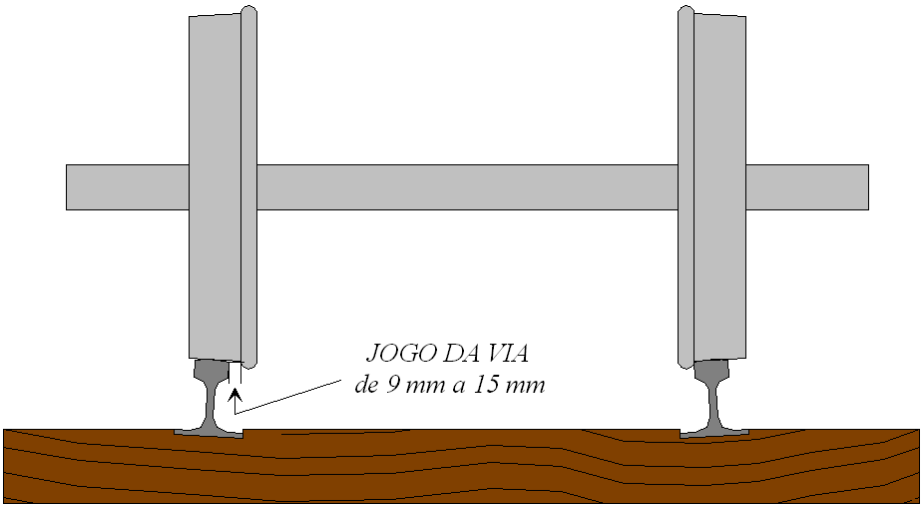


Figura 8 – Jogo da via.
Fonte: Autor.

As irregularidades laterais em cada eixo são representadas por funções harmônicas senoidais particularizadas para cada eixo. A Figura 9 mostra o modelo matemático definido por uma amplitude de onda (A_L) e um comprimento de onda (l_L).

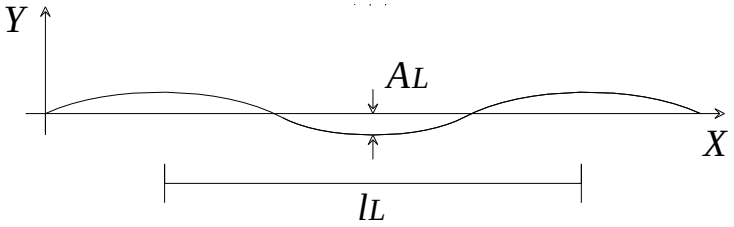


Figura 9 – Modelo de irregularidades laterais da via.
Fonte: Autor.

O respectivo modelo matemático de irregularidades laterais da via é escrito segundo a equação:

$$I_{Li}(t) = A_L \cdot \sin\left[\frac{2\cdot\pi\cdot v}{l_L}\cdot\left(t + \frac{|P_{W2\cdot i-1} - P_{W1}|}{v}\right)\right] \qquad Eixos \quad i = 1,2,...,4 \tag{9}$$

Os movimentos de translação vertical (*BWi*), e rotação em relação ao eixo horizontal (*RWi*), dos eixos, são provocados pelas irregularidades verticais (I_{Vi}). Os movimentos de

translação lateral dos eixos (*LWi*), são provocados pelas irregularidades laterais (I_{Li}). Além desses movimentos, existe a rotação em relação ao eixo vertical (*YWi*), que por sua vez é produzida pelas irregularidades aqui nomeadas de rotacionais (I_{Ri}).

Para definir as irregularidades rotacionais, é necessário o conhecimento da geometria da via, e o movimento do rodeiro no plano horizontal. O fenômeno conhecido como *hunting*, é o movimento oscilatório do rodeiro na via composto por uma translação e uma rotação, em que o centro do rodeiro não acompanha a linha de centro da via.

Este fenômeno é produzido pela velocidade do veículo e pelas forças interativas entre roda e trilho, as quais dependem da geometria de seus contornos, bem como, das características do contato como atrito e escorregamento. (MOHAN, 2003).

Esta oscilação foi observada por *George Stephenson* em 1827, e analisada por *Klingel* em 1873. A respectiva freqüência angular desta oscilação cinemática pode ser encontrada assumindo-se o movimento senoidal através da equação: (IWNICKI, 2003).

$$\omega = v.\sqrt{\frac{\delta}{b_0.r_0}} \tag{10}$$

Onde (v), (δ), (b_0) e (r_0) representam a velocidade translacional do rodeiro em tangente (trecho reto), a conicidade da roda, a distância do ponto de contato da roda com o trilho até o centro do eixo (meia bitola), e o raio médio de rolamento da roda, respectivamente.

De acordo com *Klingel* e *Boedecker*, a equação que descreve o comprimento da onda (L_W) do movimento senoidal do rodeiro para o fenômeno de *hunting* é dada por: (POMBO, 2007).

$$L_W = 2.\pi.\sqrt{\frac{b_0.r_0}{\delta}} \tag{11}$$

De acordo com os estudos de (MOHAN, 2003), as forças interativas entre trilhos e rodas agem variando o sistema de amortecimento dos veículos ferroviários. Geralmente, o fenômeno de *hunting* está associado a duas condições de velocidade crítica do veículo ferroviário. Uma condição ocorre em velocidade relativamente baixa, e é encontrada em veículos com sistema de suspensão de pequeno amortecimento. A outra condição ocorre em altas velocidades, com uma violenta oscilação lateral do rodeiro.

A Figura 10 mostra o *hunting* do rodeiro na via. Também são mostradas as irregularidades laterais, e rotacionais da via, e os respectivos movimentos laterais, e rotacionais do rodeiro.

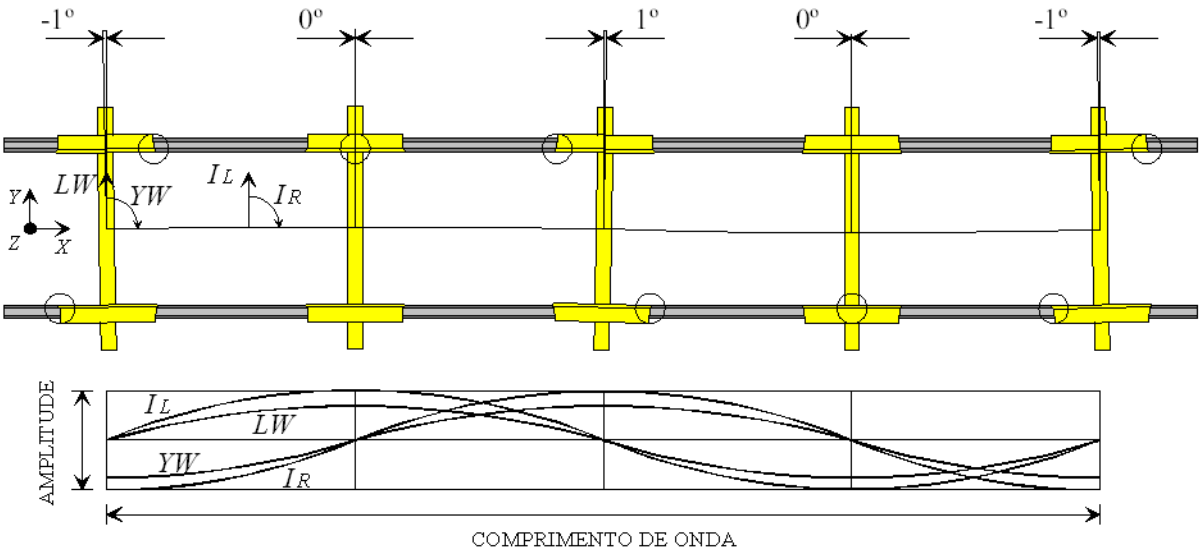


Figura 10 – Movimento plano do rodeiro na via.
Fonte: Autor.

A Figura 10 mostra que a limitação da rotação do rodeiro (*YW*) varia aproximadamente entre (-1º a 1º), sendo o valor encontrado no modelo de (-0,890459274º a 0,890459274º). Estes valores podem ser determinados mediante a Figura 11, onde a amplitude do ângulo (*AR*) da irregularidade rotacional pode ser obtida através da relação métrica do triângulo retângulo (ABC), ou seja, (*sin AR = AL / D*), então (*AR = arcsin AL / D*), onde (*D*) é o diâmetro da roda. Desta maneira, limita-se as irregularidades rotacionais através as irregularidades laterais.

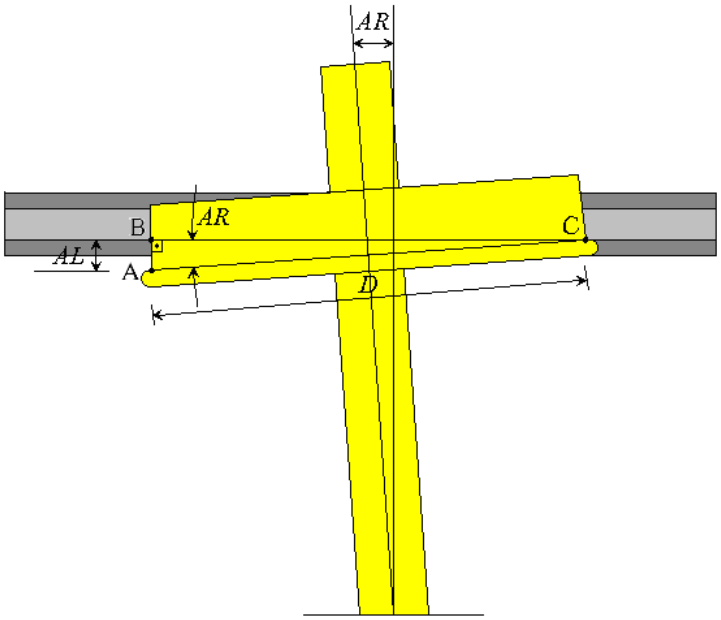


Figura 11 – Determinação da amplitude *AR*.
Fonte: Autor.

Esta limitação ocorre devido à geometria do rodeiro e da via. Neste modelo foram utilizados: um rodeiro de bitola (1,60 m); rodas com diâmetro de (38”), largura do aro de (145

mm), frisos novos com altura de (25 mm), e espessura de (35 mm); jogo da via máximo de (15 mm); e trilhos TR-45 com largura do patim de (139,7 mm), e largura do boleto de (69,0 mm). Estas e outras características dos componentes das estradas de ferro, dos carros e dos vagões são descritas em detalhes nos Apêndices A e B. Para estes valores ocorre o contato dos frisos das rodas com as laterais dos boletos dos trilhos, conforme indicado pelos círculos na Figura 10. Portanto, os modelos de irregularidades laterais e rotacionais serão limitados pelo jogo da via. Na Figura 10, é possível observar que os modelos de irregularidades laterais, e rotacionais da via apresentam maiores amplitudes que os respectivos deslocamentos dos rodeiros. Isto se deve à rigidez das ligações do truque que limitará os valores destes deslocamentos.

Ainda na Figura 10, é possível observar que o modelo de irregularidades rotacionais da via está defasado em relação ao modelo de irregularidades laterais, porém apresenta o mesmo comprimento de onda. Este modelo de irregularidades rotacionais pode ser representado matematicamente como a primeira derivada temporal negativa do modelo de irregularidades laterais.

3.1.2.3 Irregularidades rotacionais

As irregularidades rotacionais da via são representadas sob um modelo matemático de funções harmônicas cosenoidais, definido por uma amplitude de onda (A_R), e um comprimento de onda (l_L). Este modelo pode ser representado pela seguinte equação:

$$I_{Ri}(t) = -A_R \cdot \cos\left[\frac{2 \cdot \pi \cdot v}{l_L} \cdot \left(t + \frac{\left|P_{W2 \cdot i-1} - P_{W1}\right|}{v}\right)\right] \qquad Eixos \quad i = 1,2,...,4 \tag{12}$$

3.1.3 Forças nas suspensões e ligações

As forças nas suspensões e ligações estão associadas às forças viscosas e as forças elásticas provenientes dos amortecedores e das molas, respectivamente. Admitindo-se o regime viscoso linear para os amortecedores e também o regime elástico linear para as molas, têm-se as seguintes equações referentes às forças nos sistemas de suspensões e ligações:

3.1.3.1 Forças nas suspensões primárias

$$F_{Pi}(t) = C_P \cdot \dot{\delta}_{Pi}(t) + K_P \cdot \delta_{Pi}(t) \qquad i = 1,2,...,8. \tag{13}$$

3.1.3.2 Forças nas suspensões secundárias

$$F_{Si}(t) = C_S \cdot \dot{\delta}_{Si}(t) + K_S \cdot \delta_{Si}(t) \qquad i = 1,2,...,4. \tag{14}$$

3.1.3.3 Forças nas ligações laterais

$$F_{Li}(t) = C_L \cdot \dot{\delta}_{Li}(t) + K_L \cdot \delta_{Li}(t) \qquad i = 1,2,...,4. \tag{15}$$

3.1.3.4 Forças nas ligações rotacionais

$$F_{Ri}(t) = C_H \cdot \dot{\delta}_{Ri}(t) + K_H \cdot \delta_{Ri}(t) \qquad i = 1,2,...,4. \tag{16}$$

Nas Equações (13), (14), (15) e (16), o símbolo (·) acima das equações dos deslocamentos representa a primeira derivada em relação ao tempo, ou seja, a velocidade, e os demais parâmetros estão descritos nas Tabelas 2 e 4.

3.1.4 Equações de movimento

As equações de movimento do modelo de veículo ferroviário são obtidas através do equilíbrio dinâmico de forças e de momentos realizados nos corpos rígidos. Essas forças são produzidas pelas suspensões e pelas ligações, e tendem a transladar os corpos rígidos ao longo de um eixo coordenado. Os momentos são produzidos pelas forças nas suspensões e ligações associadas às suas distâncias em relação aos centros de massa dos corpos rígidos, e tendem a rotacionar estes corpos em um eixo coordenado. Desta maneira, quando o grau de liberdade de movimento está associado a uma translação, têm-se somente as forças das suspensões e ligações que atuam ao longo deste eixo de translação. Analogamente, quando o grau de liberdade de movimento está associado a uma rotação, têm-se as forças das suspensões e ligações associadas às distâncias em relação ao centro de massa do corpo rígido que gerarão momento em um eixo coordenado em questão.

A seguir são apresentadas as equações de movimento do carro, do truque dianteiro, do truque traseiro, e dos eixos com rodas acopladas.

3.1.4.1 Equações de movimento do carro

As equações de movimento do carro compreendem a translação vertical (*bouncing*), a rotação no eixo longitudinal (*rolling*), e a rotação no eixo transversal (*pitching*).

3.1.4.1.1 Translação vertical do carro (*bouncing*)

$$M_{CB} \cdot \ddot{BCB}(t) + F_{S1}(t) + F_{S2}(t) + F_{S3}(t) + F_{S4}(t) = 0. \tag{17}$$

A equação da translação vertical do carro no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões secundárias ($F_{S1}(t)$), ($F_{S2}(t)$), ($F_{S3}(t)$) e ($F_{S4}(t)$), definidos pela Equação (14). O símbolo (··) acima do grau de liberdade de movimento representa a segunda derivada em relação ao tempo, ou seja, a aceleração. Observa-se que a primeira parcela da equação está associada à força inercial, ou seja, o produto entre massa e aceleração. As forças viscosas são obtidas pelo produto entre amortecimento e velocidade, e as forças elásticas são obtidas pelo produto entre rigidez e deslocamento. As forças viscosas e elásticas são produzidas pelos sistemas de suspensão, e as forças inerciais estão associadas às massas e aos momentos de inércia de massa.

3.1.4.1.2 Rotação no eixo longitudinal do carro (*rolling*)

$$I_{RCB} \cdot \ddot{RCB}(t) - c \cdot F_{S1}(t) + c \cdot F_{S2}(t) - c \cdot F_{S3}(t) + c \cdot F_{S4}(t) = 0. \tag{18}$$

A equação da rotação no eixo longitudinal do carro no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões secundárias ($F_{S1}(t)$), ($F_{S2}(t)$), ($F_{S3}(t)$) e ($F_{S4}(t)$) associadas à distância (c), as quais produzem tendência de rotação do carro no eixo longitudinal. Estas forças se opõem à força inercial de rotação da massa do carro.

3.1.4.1.3 Rotação no eixo transversal do carro (*pitching*)

$$I_{PCB} \cdot \ddot{PCB}(t) - a \cdot F_{S1}(t) - a \cdot F_{S2}(t) + a \cdot F_{S3}(t) + a \cdot F_{S4}(t) = 0. \tag{19}$$

A equação da rotação no eixo transversal do carro no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões secundárias ($F_{S1}(t)$), ($F_{S2}(t)$), ($F_{S3}(t)$) e

($F_{S4}(t)$) associadas à distância (a), as quais produzem tendência de rotação no eixo transversal. Estas forças se opõem à força inercial de rotação da massa do carro.

3.1.4.2 Equações de movimento do truque dianteiro

As equações de movimento do truque dianteiro compreendem a translação vertical (*bouncing*), a rotação no eixo longitudinal (*rolling*), e a rotação no eixo transversal (*pitching*).

3.1.4.2.1 Translação vertical do truque dianteiro (*bouncing*)

$$M_{FB} \cdot B\ddot{F}B(t) + F_{P1}(t) + F_{P2}(t) + F_{P3}(t) + F_{P4}(t) - F_{S1}(t) - F_{S2}(t) = 0. \quad (20)$$

A equação da translação vertical do truque dianteiro no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P1}(t)$), ($F_{P2}(t)$), ($F_{P3}(t)$) e ($F_{P4}(t)$), e também pela contribuição das forças verticais das suspensões secundárias ($F_{S1}(t)$) e ($F_{S2}(t)$). Estas forças produzem a tendência de translação vertical no truque dianteiro, que se opõem à força inercial devido à massa do truque dianteiro.

3.1.4.2.2 Rotação no eixo longitudinal do truque dianteiro (*rolling*)

$$I_{RFB} \cdot R\ddot{F}B(t) - c \cdot F_{P1}(t) + c \cdot F_{P2}(t) - c \cdot F_{P3}(t) + c \cdot F_{P4}(t) + c \cdot F_{S1}(t) - c \cdot F_{S2}(t) = 0. \quad (21)$$

A equação da rotação no eixo longitudinal do truque dianteiro no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P1}(t)$), ($F_{P2}(t)$), ($F_{P3}(t)$) e ($F_{P4}(t)$), e das forças verticais das suspensões secundárias ($F_{S1}(t)$) e ($F_{S2}(t)$) associadas à distância (c), as quais produzem tendência de rotação do truque dianteiro no eixo longitudinal. Estas forças se opõem à força inercial de rotação da massa do truque dianteiro.

3.1.4.2.3 Rotação no eixo transversal do truque dianteiro (*pitching*)

$$I_{PFB} \cdot P\ddot{F}B(t) - b \cdot F_{P1}(t) - b \cdot F_{P2}(t) + b \cdot F_{P3}(t) + b \cdot F_{P4}(t) = 0. \quad (22)$$

A equação da rotação no eixo transversal do truque dianteiro no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P1}(t)$), ($F_{P2}(t)$), ($F_{P3}(t)$) e ($F_{P4}(t)$) associadas à distância (b), as quais produzem tendência de rotação do truque dianteiro no eixo transversal. Estas forças se opõem à força inercial de rotação da massa do truque dianteiro.

3.1.4.3 Equações de movimento do truque traseiro

As equações de movimento do truque traseiro compreendem a translação vertical (*bouncing*), a rotação no eixo longitudinal (*rolling*), e a rotação no eixo transversal (*pitching*).

3.1.4.3.1 Translação vertical do truque traseiro (*bouncing*)

$$M_{RB} \cdot \ddot{BRB}(t) + F_{P5}(t) + F_{P6}(t) + F_{P7}(t) + F_{P8}(t) - F_{S3}(t) - F_{S4}(t) = 0. \quad (23)$$

A equação da translação vertical do truque traseiro no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P5}(t)$), ($F_{P6}(t)$), ($F_{P7}(t)$) e ($F_{P8}(t)$), e também pela contribuição das forças verticais das suspensões secundárias ($F_{S3}(t)$) e ($F_{S4}(t)$). Estas forças produzem a tendência de translação vertical no truque traseiro, que se opõem à força inercial devido à massa do truque traseiro.

3.1.4.3.2 Rotação no eixo longitudinal do truque traseiro (*rolling*)

$$I_{RRB} \cdot \ddot{RRB}(t) - c \cdot F_{P5}(t) + c \cdot F_{P6}(t) - c \cdot F_{P7}(t) + c \cdot F_{P8}(t) + c \cdot F_{S3}(t) - c \cdot F_{S4}(t) = 0. \quad (24)$$

A equação da rotação no eixo longitudinal do truque traseiro no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P5}(t)$), ($F_{P6}(t)$), ($F_{P7}(t)$) e ($F_{P8}(t)$), e das forças verticais das suspensões secundárias ($F_{S3}(t)$) e ($F_{S4}(t)$) associadas à distância (c), as quais produzem tendência de rotação do truque traseiro no eixo longitudinal. Estas forças se opõem à força inercial de rotação da massa do truque traseiro.

3.1.4.3.3 Rotação no eixo transversal do truque traseiro (*pitching*)

$$I_{PRB} \cdot P\ddot{R}B(t) - b \cdot F_{P5}(t) - b \cdot F_{P6}(t) + b \cdot F_{P7}(t) + b \cdot F_{P8}(t) = 0. \quad (25)$$

A equação da rotação no eixo transversal do truque traseiro no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P5}(t)$), ($F_{P6}(t)$), ($F_{P7}(t)$) e ($F_{P8}(t)$) associadas à distância (b), as quais produzem tendência de rotação do truque traseiro no eixo transversal. Estas forças se opõem à força inercial de rotação da massa do truque traseiro.

3.1.4.4 Equações de movimento do eixo 1

As equações de movimento do eixo 1 compreendem a translação vertical (*bouncing*), a translação lateral (*lateral*), a rotação no eixo horizontal (*rolling*), e a rotação no eixo vertical (*yawing*).

3.1.4.4.1 Translação vertical do eixo 1 (*bouncing*)

$$M_W \cdot B\ddot{W}1(t) - F_{P1}(t) - F_{P2}(t) = 0. \quad (26)$$

A equação da translação vertical do eixo 1 no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P1}(t)$) e ($F_{P2}(t)$). Estas forças produzem a tendência de translação vertical no eixo 1, que se opõem à força inercial devido à massa do eixo.

3.1.4.4.2 Translação lateral do eixo 1 (*lateral*)

$$M_W \cdot L\ddot{W}1(t) + F_{L1}(t) = 0. \quad (27)$$

A equação da translação lateral do eixo 1 no domínio do tempo é obtida pela contribuição da força lateral ($F_{L1}(t)$). Esta força produz a tendência de translação lateral no eixo 1, que se opõe à força inercial devido à massa do eixo.

3.1.4.4.3 Rotação no eixo horizontal do eixo 1 (*rolling*)

$$I_{RW} \cdot R\ddot{W}1(t) + c \cdot F_{P1}(t) - c \cdot F_{P2}(t) = 0. \quad (28)$$

A equação da rotação no eixo horizontal do eixo 1 no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P1}(t)$) e ($F_{P2}(t)$) associadas à distância (c), as quais produzem tendência de rotação do eixo 1 no eixo horizontal. Estas forças se opõem à força inercial de rotação da massa do eixo 1.

3.1.4.4.4 Rotação no eixo vertical do eixo 1 (*yawing*)

$$I_{YW} \cdot Y\ddot{W}1(t) + 2.c^2 \cdot F_{R1}(t) = 0. \quad (29)$$

A equação da rotação no eixo vertical do eixo 1 no domínio do tempo é obtida pela contribuição da força rotacional ($F_{R1}(t)$) associada à distância (c), a qual produz tendência de rotação do eixo 1 no eixo vertical. Esta força se opõe à força inercial de rotação da massa do eixo 1. O termo ($2.c^2$) vem da relação de equivalência entre a rigidez torcional, (WICKENS, 1996) apud (BARBOSA, 1999).

3.1.4.5 Equações de movimento do eixo 2

As equações de movimento do eixo 2 compreendem a translação vertical (*bouncing*), a translação lateral (*lateral*), a rotação no eixo horizontal (*rolling*), e a rotação no eixo vertical (*yawing*).

3.1.4.5.1 Translação vertical do eixo 2 (*bouncing*)

$$M_W \cdot B\ddot{W}2(t) - F_{P3}(t) - F_{P4}(t) = 0. \quad (30)$$

A equação da translação vertical do eixo 2 no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P3}(t)$) e ($F_{P4}(t)$). Estas forças produzem a tendência de translação vertical no eixo 2, que se opõem à força inercial devido à massa do eixo.

3.1.4.5.2 Translação lateral do eixo 2 (*lateral*)

$$M_W \cdot L\ddot{W}2(t) + F_{L2}(t) = 0. \tag{31}$$

A equação da translação lateral do eixo 2 no domínio do tempo é obtida pela contribuição da força lateral ($F_{L2}(t)$). Esta força produz a tendência de translação lateral no eixo 2, que se opõe à força inercial devido à massa do eixo.

3.1.4.5.3 Rotação no eixo horizontal do eixo 2 (*rolling*)

$$I_{RW} \cdot R\ddot{W}2(t) + c \cdot F_{P3}(t) - c \cdot F_{P4}(t) = 0. \tag{32}$$

A equação da rotação no eixo horizontal do eixo 2 no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P3}(t)$) e ($F_{P4}(t)$) associadas à distância (c), as quais produzem tendência de rotação do eixo 2 no eixo horizontal. Estas forças se opõem à força inercial de rotação da massa do eixo 2.

3.1.4.5.4 Rotação no eixo vertical do eixo 2 (*yawing*)

$$I_{YW} \cdot Y\ddot{W}2(t) + 2.c^2 \cdot F_{R2}(t) = 0. \tag{33}$$

A equação da rotação no eixo vertical do eixo 2 no domínio do tempo é obtida pela contribuição da força rotacional ($F_{R2}(t)$) associada à distância (c), a qual produz tendência de rotação do eixo 2 no eixo vertical. Esta força se opõe à força inercial de rotação da massa do eixo 2.

3.1.4.6 Equações de movimento do eixo 3

As equações de movimento do eixo 3 compreendem a translação vertical (*bouncing*), a translação lateral (*lateral*), a rotação no eixo horizontal (*rolling*), e a rotação no eixo vertical (*yawing*).

3.1.4.6.1 Translação vertical do eixo 3 (*bouncing*)

$$M_W \cdot B\ddot{W}3(t) - F_{P5}(t) - F_{P6}(t) = 0. \quad (34)$$

A equação da translação vertical do eixo 3 no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P5}(t)$) e ($F_{P6}(t)$). Estas forças produzem a tendência de translação vertical no eixo 3, que se opõem à força inercial devido à massa do eixo.

3.1.4.6.2 Translação lateral do eixo 3 (*lateral*)

$$M_W \cdot L\ddot{W}3(t) + F_{L3}(t) = 0. \quad (35)$$

A equação da translação lateral do eixo 3 no domínio do tempo é obtida pela contribuição da força lateral ($F_{L3}(t)$). Esta força produz a tendência de translação lateral no eixo 3, que se opõe à força inercial devido à massa do eixo.

3.1.4.6.3 Rotação no eixo horizontal do eixo 3 (*rolling*)

$$I_{RW} \cdot R\ddot{W}3(t) + c \cdot F_{P5}(t) - c \cdot F_{P6}(t) = 0. \quad (36)$$

A equação da rotação no eixo horizontal do eixo 3 no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P5}(t)$) e ($F_{P6}(t)$) associadas à distância (c), as quais produzem tendência de rotação do eixo 3 no eixo horizontal. Estas forças se opõem à força inercial de rotação da massa do eixo 3.

3.1.4.6.4 Rotação no eixo vertical do eixo 3 (*yawing*)

$$I_{YW} \cdot Y\ddot{W}3(t) + 2.c^2 \cdot F_{R3}(t) = 0. \quad (37)$$

A equação da rotação no eixo vertical do eixo 3 no domínio do tempo é obtida pela contribuição da força rotacional ($F_{R3}(t)$) associada à distância (c), a qual produz tendência de rotação do eixo 3 no eixo vertical. Esta força se opõe à força inercial de rotação da massa do eixo 3.

3.1.4.7 Equações de movimento do eixo 4

As equações de movimento do eixo 4 compreendem a translação vertical (*bouncing*), a translação lateral (*lateral*), a rotação no eixo horizontal (*rolling*), e a rotação no eixo vertical (*yawing*).

3.1.4.7.1 Translação vertical do eixo 4 (*bouncing*)

$$M_W \cdot B\ddot{W}4(t) - F_{P7}(t) - F_{P8}(t) = 0. \tag{38}$$

A equação da translação vertical do eixo 4 no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P7}(t)$) e ($F_{P8}(t)$). Estas forças produzem a tendência de translação vertical no eixo 4, que se opõem à força inercial devido à massa do eixo.

3.1.4.7.2 Translação lateral do eixo 4 (*lateral*)

$$M_W \cdot L\ddot{W}4(t) + F_{L4}(t) = 0. \tag{39}$$

A equação da translação lateral do eixo 4 no domínio do tempo é obtida pela contribuição da força lateral ($F_{L4}(t)$). Esta força produz a tendência de translação lateral no eixo 4, que se opõe à força inercial devido à massa do eixo.

3.1.4.7.3 Rotação no eixo horizontal do eixo 4 (*rolling*)

$$I_{RW} \cdot R\ddot{W}4(t) + c \cdot F_{P7}(t) - c \cdot F_{P8}(t) = 0. \tag{40}$$

A equação da rotação no eixo horizontal do eixo 4 no domínio do tempo é obtida pela contribuição das forças verticais das suspensões primárias ($F_{P7}(t)$) e ($F_{P8}(t)$) associadas à distância (c), as quais produzem tendência de rotação do eixo 4 no eixo horizontal. Estas forças se opõem à força inercial de rotação da massa do eixo 4.

3.1.4.7.4 Rotação no eixo vertical do eixo 4 (*yawing*)

$$I_{YW} \cdot \ddot{YW}4(t) + 2.c^2 \cdot F_{R4}(t) = 0. \tag{41}$$

A equação da rotação no eixo vertical do eixo 4 no domínio do tempo é obtida pela contribuição da força rotacional ($F_{R4}(t)$) associada à distância (c), a qual produz tendência de rotação do eixo 4 no eixo vertical. Esta força se opõe à força inercial de rotação da massa do eixo 4.

As equações de movimento do veículo ferroviário podem ser agrupadas em um sistema matricial de equações diferenciais não-homogêneas lineares de segunda ordem abaixo:

$$[M_V]\{\ddot{U}_V(t)\} + [C_V]\{\dot{U}_V(t)\} + [K_V]\{U_V(t)\} = \{P_V(t)\}. \tag{42}$$

onde, $[M_V]$, $[C_V]$ e $[K_V]$ são as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do veículo, respectivamente. Os termos $\{\ddot{U}_V(t)\}$, $\{\dot{U}_V(t)\}$ e $\{U_V(t)\}$ representam os vetores de aceleração, velocidade e deslocamento do veículo, respectivamente. Finalmente $\{P_V(t)\}$ representa o vetor de forças externas. A Equação (42) representa que a soma das forças: inerciais; de amortecimento; e elásticas, é igual às forças externas ao sistema. (BATHE, 1996). A matriz de massa é diagonal, e as matrizes de amortecimento e de rigidez são diagonalmente dominantes, e positivas definidas. Os coeficientes das matrizes e dos vetores da Equação (42) estão dispostos no Apêndice C. Os coeficientes das matrizes de massa ($[M_V]$), de amortecimento ($[C_V]$) e de rigidez ($[K_V]$) são simétricos, isto é:

$$m_{V_{ij}} = m_{V_{ji}}; \quad c_{V_{ij}} = c_{V_{ji}}; \quad k_{V_{ij}} = k_{V_{ji}}. \tag{43}$$

No caso do modelo tridimensional de uma composição ferroviária (trem), este pode ser obtido através da associação de (n) modelos de veículos ferroviários descritos anteriormente. Os modelos de composições ferroviárias, em particular, Trem Unidade Elétrico (TUE), são apresentados nas análises numéricas do Capítulo 4.

3.2 Modelo de contato entre rodas e trilhos

Esta seção apresenta a teoria do contato mecânico entre corpos elásticos, são apresentadas a teoria do contato de *Hertz*, e a teoria linear de *Kalker* do contato entre roda e trilho. A teoria de *Hertz* será utilizada neste trabalho para o caso de rolamento puro, e a teoria de *Kalker* contempla a situação de rolamento com microescorregamento (*creep*), entre as superfícies em contato.

3.2.1 Teoria do contato de *Hertz*

O físico alemão da cidade de Hamburgo, *Heinrich Rudolf Hertz*, Figura 12, em 1881-1882, foi o primeiro a encontrar a solução correta dos problemas fundamentais acerca das tensões e deformações do contato mecânico entre corpos pelos métodos da teoria da elasticidade.

Figura 12 – *Heinrich Rudolf Hertz* (1857 – 1894).
Fonte: (HEINRICH-HERTZ-PARK, 2010).

Suas pesquisas sobre contato tiveram início com experimentos em interferência óptica com duas lentes cilíndricas de vidro. O problema em questão era saber se a deformação elástica das lentes em contato sob um carregamento constate poderia ter influência sobre o seu modelo de interferência óptica. A Figura 13 mostra a área de contato entre duas lentes cilíndricas iguais com seus eixos inclinados a (45º) nas situações de contato descarregado e contato carregado (SANTOS, 2000).

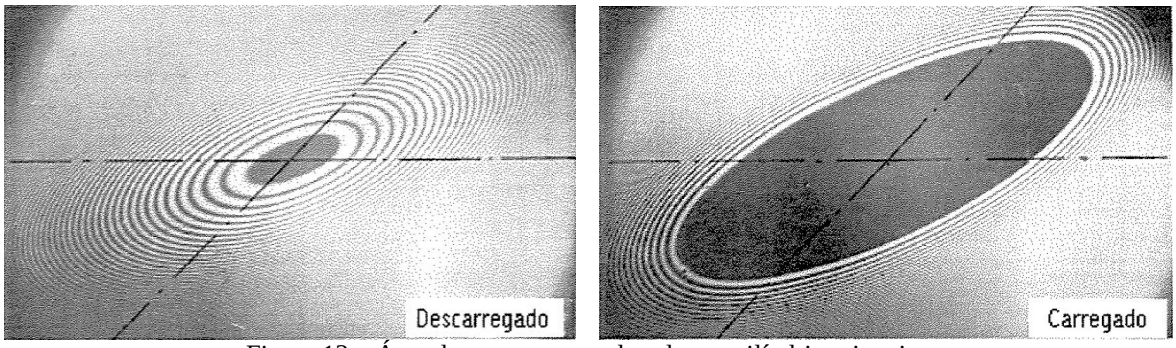


Figura 13 – Área de contato entre duas lentes cilíndricas iguais.
Fonte: (SANTOS, 2000).

Segundo a teoria de *Hertz*, quando dois corpos de superfície curva são comprimidos um contra outro, o contato por sua mutua deformação se estabelece em uma superfície elíptica. As hipóteses em que se baseia a teoria do contato de *Hertz* são as seguintes (HERNÁNDEZ, 1965):

a) As dimensões da superfície elíptica de contato são muito pequenas com relação às dimensões de ambos os sólidos (e com relação a seus raios de curvatura).

b) As tensões e as deformações produzidas não ultrapassam os limites de proporcionalidade dos materiais.

c) A superfície de compressão não sofre tensões de cisalhamento, isto é, não ocorre escorregamento durante o contato. Devido a esta hipótese, pode-se admitir que haja rolamento entre os corpos em contato, porém que não haja deslizamento entre eles (rolamento puro).

Sejam dois corpos elásticos de superfícies curvas com raios principais de curvatura (R_1), (R'_1) e (R_2), (R'_2) perpendiculares entre si. O contato mecânico se dá através do plano tangente (xy) no ponto (O), conforme mostra a Figura 14. (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980).

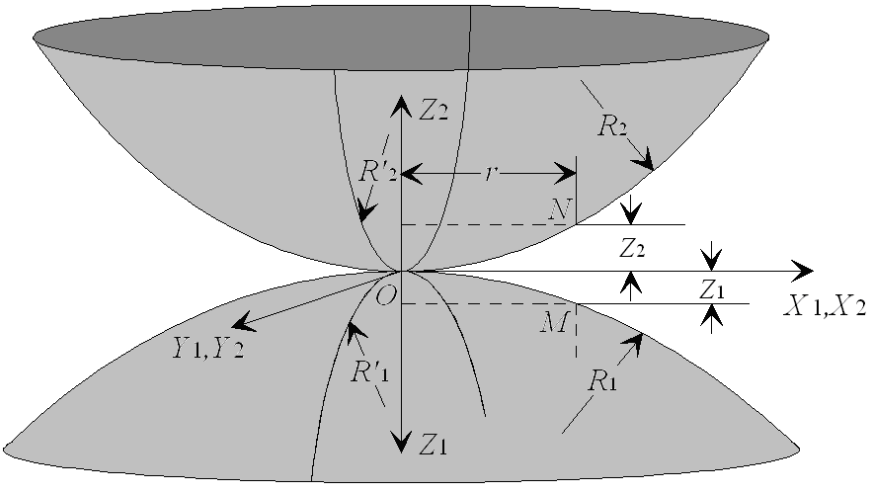


Figura 14 – Corpos elásticos em contato mecânico.
Fonte: Autor.

As superfícies dos corpos elásticos nas vizinhanças do ponto de contato (O), desprezando-se pequenas quantidades de ordem superior, podem ser representadas pelas equações apresentadas abaixo: (Idem, 1980).

$$\begin{aligned} z_1 &= A_1.x^2 + A_2.x.y + A_3.y^2 \\ z_2 &= B_1.x^2 + B_2.x.y + B_3.y^2. \end{aligned} \tag{44}$$

Considera-se que a superfície próxima ao ponto de contato é arredondada e desta maneira, pode ser considerada como uma superfície de segundo grau. Pode-se representar a distância entre dois pontos tais como (M) e (N) da seguinte forma (Idem, 1980):

$$z_1 + z_2 = (A_1 + B_1).x^2 + (A_2 + B_2).x.y + (A_3 + B_3).y^2. \tag{45}$$

Pode-se sempre tomar como direções (x) e (y), aquelas que anulam o termo que contém o produto (xy). Desta maneira, têm-se (Idem, 1980):

$$z_1 + z_2 = A.x^2 + B.y^2. \tag{46}$$

Onde (A) e (B) são constantes, cujos valores dependem das grandezas das curvaturas principais das superfícies em contato, e do ângulo formado entre os planos de curvatura principal destas superfícies. Considerando-se (R_1) e (R'_1) os raios principais de curvatura no ponto de contato de um dos corpos, (R_2) e (R'_2) os do outro corpo, e o ângulo (ψ) compreendido entre os planos normais que contêm as curvaturas ($1/R_1$) e ($1/R_2$), então as constantes (A) e (B) poderão ser determinadas pelas equações: (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980).

$$\begin{aligned} A + B &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R'_2}\right) \\ B - A &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R'_1}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R'_2}\right)\cos 2\psi\right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{47}$$

A curvatura de um corpo é considerada positiva se o raio de curvatura, neste ponto, penetra no seu interior. Na Figura 14, as curvaturas de ambos os corpos são positivas. As constantes (A) e (B) na Equação (46) serão ambas positivas, uma vez que ($z_1 + z_2$) deve ser positivo. Pode-se deduzir daí que todos os pontos separados pela mesma distância ($z_1 + z_2$) se encontram sobre uma elipse. Portanto, ao comprimirem-se os corpos entre si, segundo a direção normal ao plano tangente por (O), a superfície de contato terá um contorno elíptico, conforme mostra a Figura 15 (Idem, 1980).

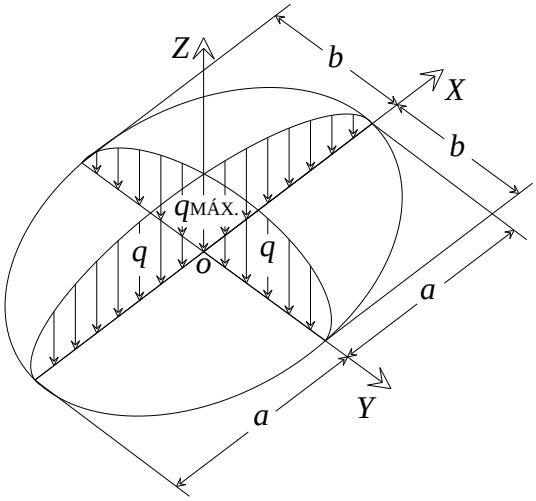


Figura 15 – Distribuição de pressões na superfície de contato.
Fonte: Autor.

Hertz demonstrou que a distribuição de pressões (q) na superfície de contato é representada pelas ordenadas de um semi-elipsóide, construído sobre esta mesma superfície. A máxima pressão está localizada, evidentemente, no centro da superfície de contato.

Designando-a por ($q_{MÁX.}$) e por (a) e (b) os semi-eixos do contorno elíptico da superfície de contato, a intensidade da pressão máxima é obtida através da Equação (48) (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980):

$$P = \iint q dA = \tfrac{2}{3}\pi.a.b.q_{MÁX.} \qquad q_{MÁX.} = \frac{3}{2}\frac{P}{\pi.a.b} \tag{48}$$

onde (P) é a carga vertical que comprime os corpos. Observa-se que a pressão máxima é 1 ½ vezes a pressão média na superfície de contato, pois a área da elipse pode ser obtida por ($\pi.a.$b). Para calcular esta pressão, deve-se conhecer o valor dos semi-eixos (a) e (b), que podem ser obtidos através das seguintes relações: (Idem, 1980).

$$a = m\sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}\frac{P.(k_1+k_2)}{(A+B)}} \qquad b = n\sqrt[3]{\frac{3\pi}{4}\frac{P.(k_1+k_2)}{(A+B)}}. \tag{49}$$

As constantes (k_1) e (k_2) são obtidas através das relações (Idem, 1980):

$$k_1 = \frac{1-\nu_1^{\,2}}{\pi.E_1} \qquad k_2 = \frac{1-\nu_2^{\,2}}{\pi.E_2}. \tag{50}$$

Onde (ν_1), (E_1) e (ν_2), (E_2) são o coeficiente de *Poisson* e o módulo de elasticidade (módulo de *Young*) dos corpos 1 e 2, respectivamente.Os parâmetros (A + B) nas Equações (49) são determinados pelas Equações (47), e os coeficientes (m) e (n) são números que dependem da relação (B – A) ÷ (A + B). Utilizando a notação (Idem, 1980):

$$\cos\theta = \frac{B-A}{A+B}. \tag{51}$$

os valores de (m) e (n), para diversos valores de (θ), são dados na Tabela 5.

Tabela 5 – Coeficientes (m) e (n) em função de (θ).

θ	m	n	θ	m	n
0º	∞	0	35º	2,397	0,53
0,5º	61,4	0,102	40º	2,136	0,567
1º	36,89	0,131	45º	1,926	0,604
1,5º	27,48	0,152	50º	1,754	0,641
2º	22,26	0,169	55º	1,611	0,678
3º	16,5	0,196	60º	1,486	0,717
4º	13,31	0,219	65º	1,378	0,759
6º	9,79	0,255	70º	1,284	0,802
8º	7,86	0,285	75º	1,202	0,846
10º	6,612	0,319	80º	1,128	0,893
20º	3,778	0,408	85º	1,061	0,944
30º	2,731	0,493	90º	1	1

Fonte: (DUKKIPATI; AMYOT, 1988) apud (SANTOS, 2000).

3.2.1.1 Teoria do contato de *Hertz* entre roda e trilho

Particularizando-se a teoria de *Hertz* do contato mecânico entre corpos elásticos para o caso específico de contato mecânico entre roda e trilho tem-se o seguinte exemplo numérico: Considera-se o contato de uma roda cilíndrica de raio (R_1 = 0,4826 m) e (R'_1 infinito), com um trilho ferroviário cujo boleto tem um raio (R_2 = 0,2540 m) e (R'_2 infinito) conforme mostra a Figura 16. (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980).

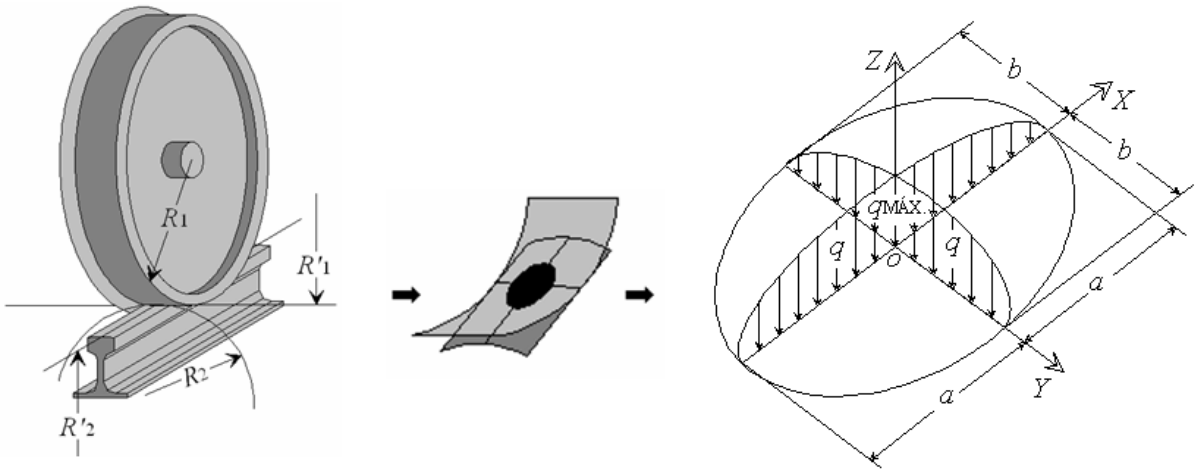


Figura 16 – Contato entre roda e trilho: raios principais de curvatura; e elipse de *Hertz*.
Fonte: Autor.

Encontra-se substituindo ($1/R'_1 = 1/R'_2 = 1/\infty = 0$) e ($\psi = \pi/2$) na Equação (47):

$$A + B = 3{,}0046 \qquad B - A = 0{,}9324 \qquad \cos\theta = 0{,}310 \qquad \theta = 71^{\circ}55'.$$

Então, por interpolação, obtêm-se da Tabela 5:

$$m = 1{,}253 \qquad n = 0{,}819.$$

Substituindo nas Equações (49) e fazendo (E = 206,85 GPa) e (ν = 0,292) nas Equações (50):

$$a = 0{,}000163154\sqrt[3]{P} \qquad b = 0{,}000106642\sqrt[3]{P}.$$

Para uma carga de compressão de 10 toneladas, ($P \approx 100$ kN):

$$a = 0{,}757\ cm \qquad b = 0{,}495\ cm \qquad \text{área de contato } \pi.a.b = 1{,}177\ cm^2.$$

A pressão máxima no centro da área de contato é:

$$q_{MÁX.} = \frac{3}{2}\frac{P}{\pi.a.b} = 1274{,}21\ MPa. \tag{52}$$

3.2.1.1.1 Tensões de contato *Hertziano* entre roda e trilho

Para avaliar as tensões de contato entre roda e trilho considera-se a elipse de contato com os seguintes pontos (P_0 = (0,0,0)), (P_a = (a,0,0)) e (P_b = (0,b,0)) na Figura 17 abaixo:

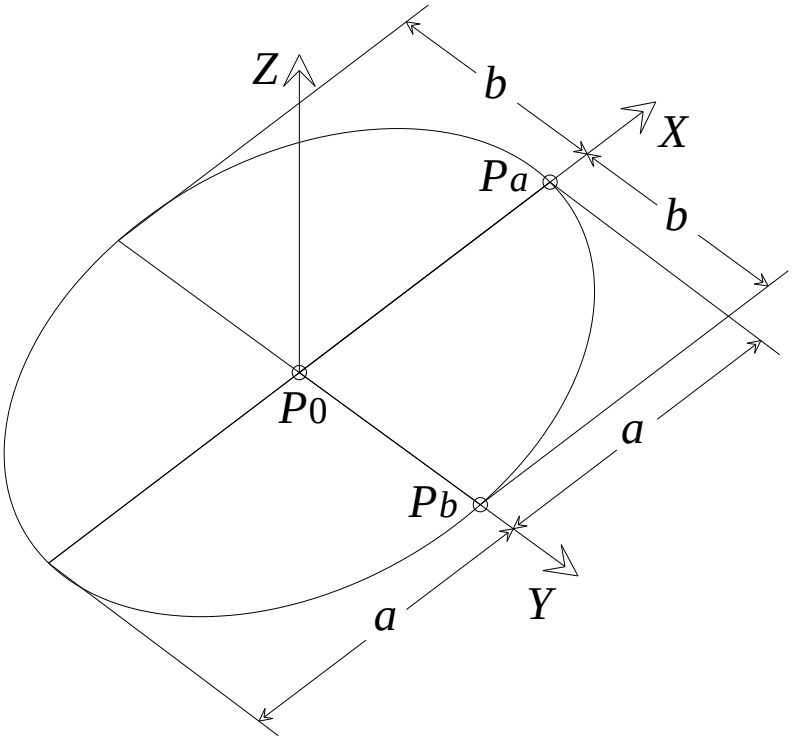


Figura 17 – Pontos da elipse de contato.
Fonte: Autor.

As máximas tensões principais são obtidas no centro da superfície de contato, (P_0 = (0,0,0)), estas podem ser representadas através das seguintes equações: (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -2.\nu.q_{MÁX.} - (1-2.\nu).q_{MÁX.}.\frac{b}{a+b} \\ \sigma_y &= -2.\nu.q_{MÁX.} - (1-2.\nu).q_{MAX.}.\frac{a}{a+b} \\ \sigma_z &= -q_{MÁX.}. \end{aligned} \tag{53}$$

Para os dados anteriores, têm-se as máximas tensões principais:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -953{,}71\ MPa \\ \sigma_y &= -1064{,}64\ MPa \\ \sigma_z &= -1274{,}21\ MPa. \end{aligned}$$

Observa-se que as tensões são todas compressivas, e que de maneira geral que ($\sigma_z > \sigma_y > \sigma_x$). Quanto mais afastado do centro da elipse menores são as tensões de contato. Seja um elemento infinitesimal de dimensões (*dx*), (*dy*) e (*dz*) retirado da superfície de contato da elipse no ponto (P_0 = (0,0,0)), então a distribuição das tensões principais de contato neste ponto pode ser representada através da Figura 18.

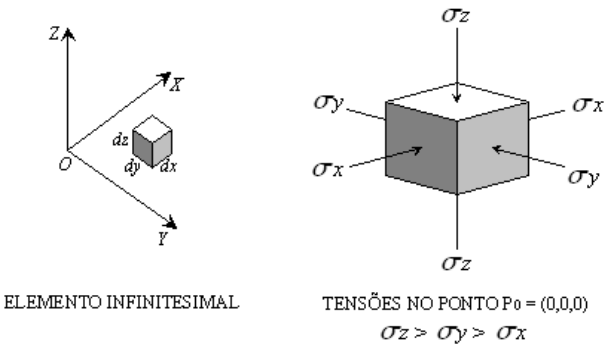


Figura 18 – Tensões principais na origem.
Fonte: Autor.

Os pontos localizados no limite da elipse de contato não possuem tensão principal na direção (*z*), ou seja, (σ_z = 0). Nestes pontos a tensão de tração na direção radial é igual à tensão de compressão na direção circunferencial, portanto há um cisalhamento puro. (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980).A Figura 19 mostra a distribuição das tensões principais na superfície da elipse de contato.

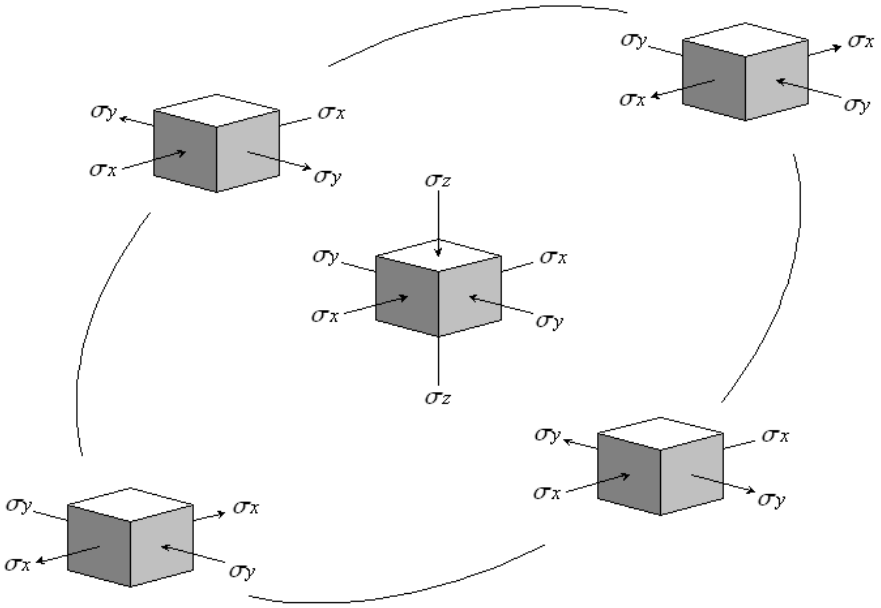


Figura 19 – Tensões principais na superfície da elipse de contato.
Fonte: Autor.

Nos pontos localizados nos extremos da elipse, isto é, (P_a = (a,0,0)) e (P_b = (0,b,0)), as tensões de cisalhamento (τ_a) e (τ_b) podem ser calculadas respectivamente através das seguintes equações: (Idem, 1980).

$$\tau_a = (1-2.\nu).q_{MÁX.}.\frac{\beta}{e^2}.\left(\frac{1}{e}.arctgh\ e-1\right) \qquad \tau_b = (1-2.\nu).q_{MÁX.}.\frac{\beta}{e^2}.\left(1-\frac{\beta}{e}.arctg\ \frac{e}{\beta}\right) \tag{54}$$

onde os parâmetros (β) e (e) são obtidos respectivamente por:

$$\beta = b/a \qquad e = (1/a).\sqrt{a^2-b^2}. \tag{55}$$

Para os dados anteriores, têm-se as tensões de cisalhamento:

$$\tau_a = -198{,}11\,MPa$$
$$\tau_b = 156{,}35\,MPa.$$

As tensões de contato *Hertziano* entre roda e trilho calculadas anteriormente consideram a carga compressiva (*P*) constante simulando uma situação estática. No entanto, pode-se aplicar a teoria de *Hertz* considerando a situação dinâmica desde que não ocorra deslizamento durante o contato, isto é, na condição de rolamento puro.

Considerando-se agora a conicidade das rodas (δ), e também a rotação de cada eixo (RW_i), tem-se a decomposição de forças mostradas na Figura 20. (IWNICKI, 2003).

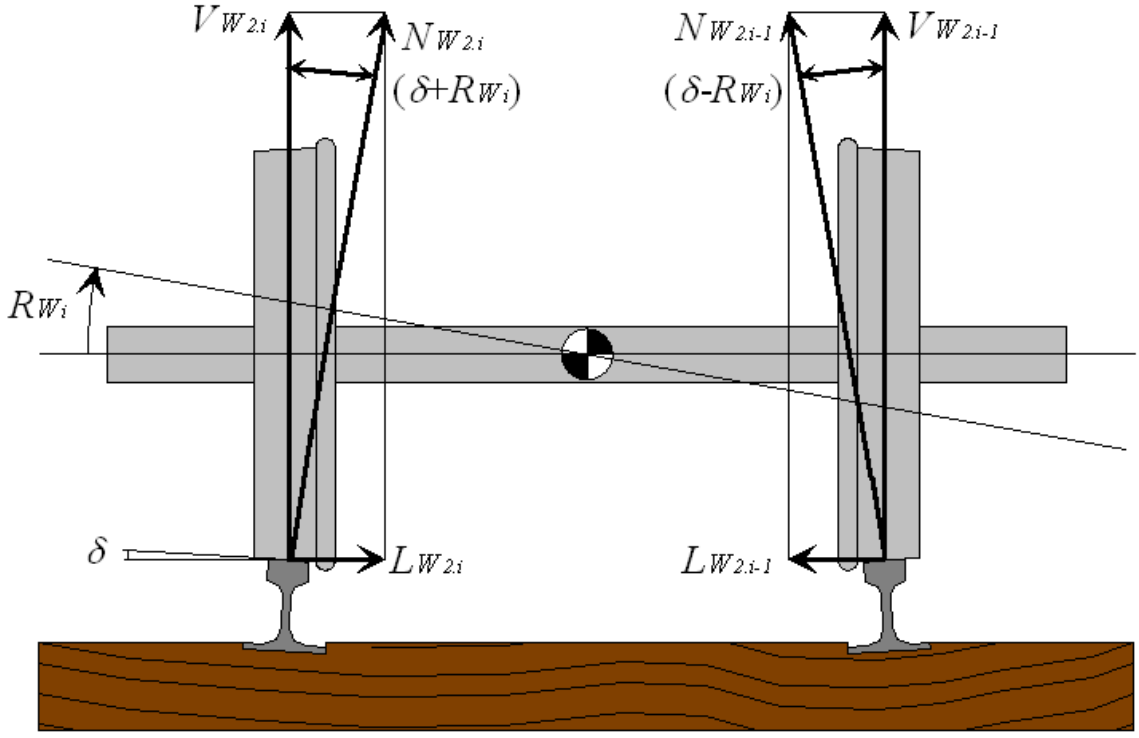


Figura 20 – Decomposição das forças em relação à conicidade e a rotação dos eixos.
Fonte: Autor.

Desta forma, as forças verticais do veículo distribuídas em cada roda (V_{Wi}), são aplicadas nos pontos de contato entre as rodas e os trilhos (P_{Wi}), estas forças podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
V_{W2.i-1}(t) &= \left[-\left(\frac{M_{CB}}{8}+\frac{M_{FB}}{4}+\frac{M_W}{2}\right).g+\frac{M_W}{2}.\ddot{I}_{V2.i-1}(t)-F_{P2.i-1}(t)\right] && i = 1,2\\
V_{W2.i}(t) &= \left[-\left(\frac{M_{CB}}{8}+\frac{M_{FB}}{4}+\frac{M_W}{2}\right).g+\frac{M_W}{2}.\ddot{I}_{V2.i}(t)-F_{P2.i}(t)\right] && i = 1,2\\
V_{W2.i-1}(t) &= \left[-\left(\frac{M_{CB}}{8}+\frac{M_{RB}}{4}+\frac{M_W}{2}\right).g+\frac{M_W}{2}.\ddot{I}_{V2.i-1}(t)-F_{P2.i-1}(t)\right] && i = 3,4\\
V_{W2.i}(t) &= \left[-\left(\frac{M_{CB}}{8}+\frac{M_{RB}}{4}+\frac{M_W}{2}\right).g+\frac{M_W}{2}.\ddot{I}_{V2.i}(t)-F_{P2.i}(t)\right] && i = 3,4.
\end{aligned} \qquad (56)$$

Estas forças são obtidas através das contribuições do peso devido às massas, do carro, do truque dianteiro, do truque traseiro, e dos eixos com rodas acopladas. Também contribuem para a composição destas forças as acelerações das massas dos eixos com rodas acopladas, devido às irregularidades verticais da via avaliadas em cada roda do veículo, e finalmente, as forças provenientes dos sistemas de suspensões primárias.

As forças normais ao plano de contato são obtidas através da seguinte decomposição: (IWNICKI, 2003).

$$\begin{aligned} N_{W2.i-1}(t) &= \frac{V_{W2.i-1}(t)}{\cos(\delta - R_{Wi}(t))} \qquad i = 1,2,3,...,4 \qquad \textit{rodas} \quad \textit{ímpares} \\ N_{W2.i}(t) &= \frac{V_{W2.i}(t)}{\cos(\delta + R_{Wi}(t))} \qquad i = 1,2,3,...,4 \qquad \textit{rodas} \quad \textit{pares} \end{aligned} \tag{57}$$

E as forças laterais são obtidas através da seguinte decomposição: (Idem, 2003).

$$\begin{aligned} L_{W2.i-1}(t) &= N_{W2.i-1}(t).\sin(\delta - R_{Wi}(t)) \qquad i = 1,2,3,...,4 \qquad \textit{rodas} \quad \textit{ímpares} \\ L_{W2.i}(t) &= N_{W2.i}(t).\sin(\delta + R_{Wi}(t)) \qquad i = 1,2,3,...,4 \qquad \textit{rodas} \quad \textit{pares} \end{aligned} \tag{58}$$

A razão entre as componentes lateral e vertical (L/V) é usada como indicador de descarrilamento, segundo os estudos de *M. J. Nadal* em 1908. (Idem, 2003).

O contato entre as rodas e os trilhos é definido pelas forças reativas às forças aplicadas nos trilhos. De acordo com a terceira lei de *Newton*, têm-se as seguintes forças reativas: (BEER; JOHNSTON, 1991).

$$F_{\text{Re ativas}_i}(t) = -N_{Wi}(t) \qquad \text{para } i = 1,2,...,8 \tag{59}$$

Enquanto as forças reativas forem positivas as rodas permanecem em contato com os trilhos, no entanto, a perda de contato ocorre quando as forças reativas forem negativas.

Também deve-se considerar neste modelo de rolamento puro, a força de atrito de rolamento, que por sua vez, dependerá do coeficiente de atrito entre as superfícies em contato. Desta maneira, tem-se a seguinte equação do atrito de *Coulomb*:

$$F_t \leq \mu.N \tag{60}$$

onde (F_t) é a força tangencial à superfície de contato entre a roda e o trilho, (μ) é o coeficiente de atrito entre a roda e o trilho, e (N) é a força normal à superfície de contato. Segundo esta equação, a força tangencial não pode exceder o valor obtido pelo produto do coeficiente de atrito pela força normal. Caso isto ocorra, haverá deslizamento da roda sobre o trilho e a força tangencial assumirá este valor. (SANTOS, 2000).

3.2.1.1.2 Coeficiente de atrito entre roda e trilho

O coeficiente de atrito (μ), também chamado de coeficiente de aderência, varia com o tipo dos materiais em contato, com o estado das superfícies em contato, com a presença ou ausência de contaminações, com as condições climáticas, e também com a velocidade. (BRINA, 1983). Os coeficientes de atrito das rodas de aço sobre os trilhos de aço são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 – Coeficientes de atrito entre roda e trilho.

Condições do trilho	μ_0
Trilho completamente seco, ou lavado pela chuva.	0,33
Trilho seco e limpo.	0,22
Trilho seco.	0,20
Trilho molhado pela chuva.	0,14
Trilho úmido de orvalho.	0,125
Trilho úmido e sujo.	0,11
Trilho com óleo.	0,10

Fonte: Adaptado de (BRINA, 1983).

A variação do coeficiente de atrito em função da velocidade pode ser escrita segundo a fórmula empírica: (BRINA, 1983).

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + 0{,}01.v} \tag{61}$$

onde (μ) é o coeficiente de atrito para a velocidade do veículo, (μ_0) é o coeficiente de atrito para as condições do trilho dado na Tabela 6, e (v) é a velocidade do veículo em (km/h).
Utilizando-se a Equação (61) e os valores da Tabela 6, tem-se o seguinte gráfico:

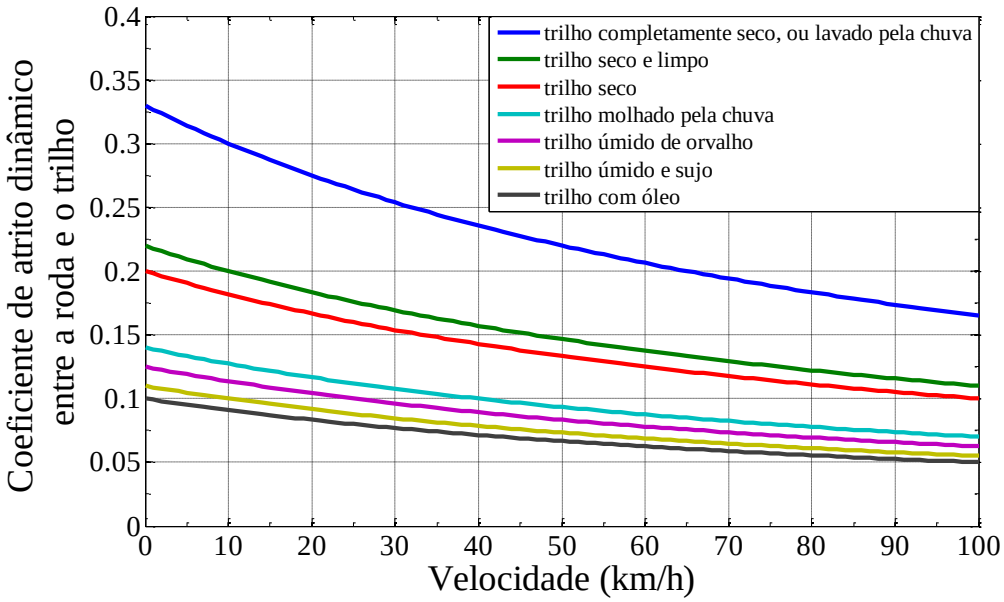


Figura 21 – Coeficiente de atrito dinâmico entre a roda e o trilho.
Fonte: Autor.

3.2.2 Teoria linear de *Kalker* do contato entre roda e trilho

Em 1951, *Joost J. Kalker*, Figura 22, ingressou na Universidade de Tecnologia de *Delft* nos Países Baixos como estudante de Física. Posteriormente, transferiu-se para o Centro de Mecânica Aplicada e iniciou suas pesquisas em mecânica do contato, computação e programação. Em 1958, *Kalker* graduou-se como engenheiro matemático. Durante este período, seu orientador, *De Pater*, apresentou o problema de contato entre roda e trilho à *Kalker*. Em 1967, *Kalker* publicou sua tese de doutorado intitulada "*On The Rolling Contact of two Elastic Bodies in the Presence of dry Friction*". Suas maiores contribuições deste trabalho ao meio ferroviário foram a quantificação das forças de escorregamento (*creep forces*) e a Teoria Linear do Contato entre Roda e Trilho (ZAAZAA; SCHWAB, 2009).

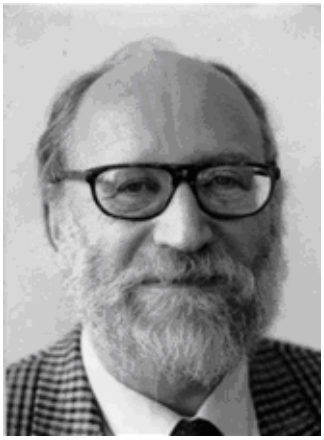


Figura 22 – *Joost J. Kalker* (1933 – 2006).
Fonte: (CONTACTMECHANICS, 2010).

Seja uma roda ferroviária em contato de rolamento sobre um trilho ferroviário. Devido às propriedades elásticas da roda e do trilho, e ao carregamento externo aplicado a estes corpos durante o contato, produz-se uma deformação mútua entre os corpos que se estabelece em uma superfície elíptica (HERNÁNDEZ, 1965).

Alguns pontos da superfície na região do contato podem escorregar enquanto que outros podem aderir durante o movimento destes corpos (ZAAZAA; SCHWAB, 2009).

Desta maneira, a superfície de contato elíptica estabelecida pela teoria de *Hertz* passa a ser dividida em duas áreas, uma de aderência e outra de escorregamento. O tamanho e a forma destas áreas podem variar de acordo com o tipo de contato entre a roda e o trilho. Na situação de rolamento puro, a superfície de contato é toda preenchida pela área de aderência, pois não há escorregamento. Na situação de escorregamento puro, a superfície de contato é toda preenchida pela área de escorregamento. No caso intermediário, onde ocorre rolamento com escorregamento, a superfície de contato fica dividida em duas áreas, uma de aderência e outra

de escorregamento. A Figura 23 mostra a distribuição das áreas de aderência e de escorregamento na superfície elíptica de contato.

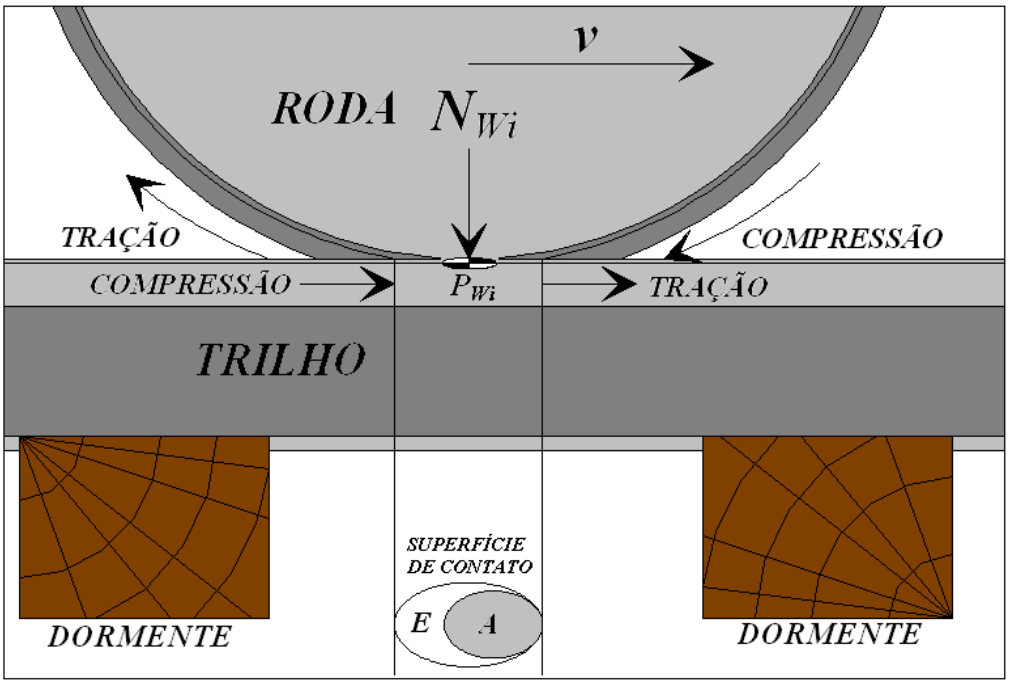


Figura 23 – Aderência e escorregamento na superfície elíptica de contato.
Fonte: Autor.

Na Figura 23, (v), (N_{Wi}), (P_{Wi}), (A), e (E), representam respectivamente a velocidade de translação da roda sobre o trilho, a força do veículo distribuída na roda, o ponto de contato entre a roda e o trilho, a região de aderência da superfície de contato, e a região de escorregamento da superfície de contato.

A roda ferroviária quando está rolando sobre o trilho exerce uma pequena resistência ao rolamento. Isto pode ser explicado devido à deformação relativa das superfícies que estão em contato, ocorrendo a compressão da superfície da roda, e a tração do trilho imediatamente no primeiro contato. Neste instante, surge a resistência ao rolamento, e ocorre a adesão. Após este instante, a superfície da roda deixa a região de aderência (A), e passa à região de escorregamento (E), alongando-se, e comprimindo o trilho. (SANTOS, 2000).

Segundo a teoria simplificada de *Kalker*, a distribuição das tensões normais (σ), e tensões cisalhantes (τ) na elipse de contato dividida entre as áreas de adesão e de escorregamento são representadas na Figura 24.

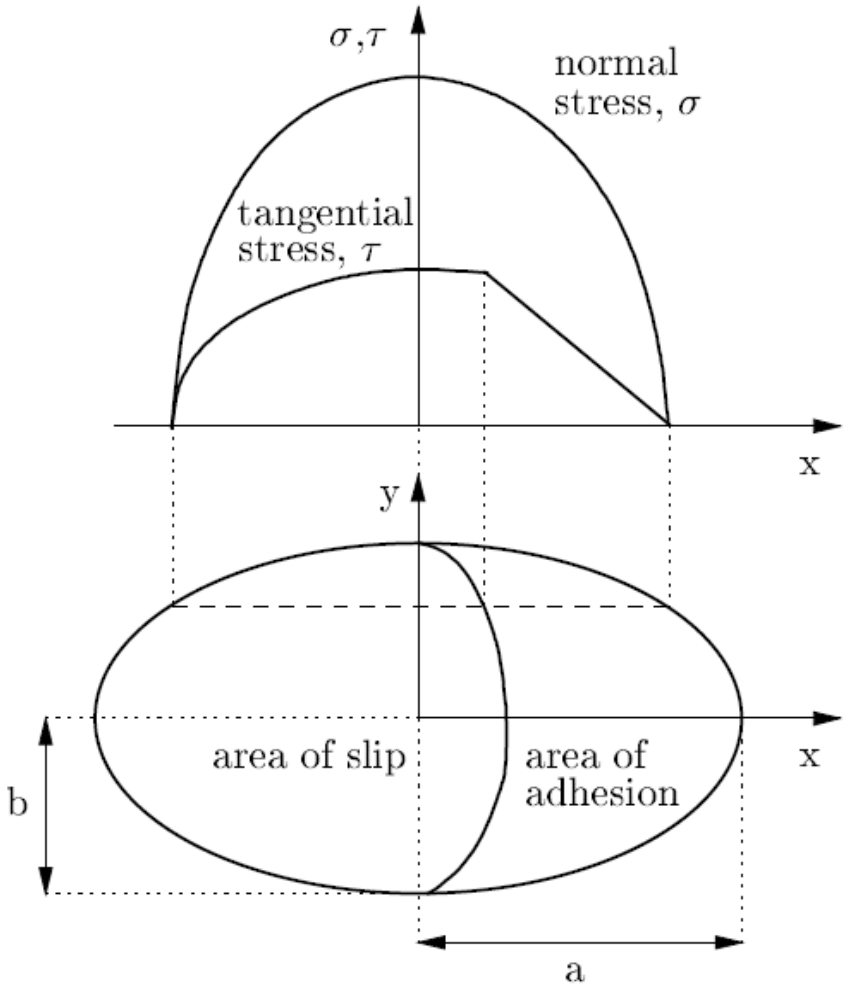


Figura 24 – Distribuição das tensões na elipse de contato segundo *Kalker*.
Fonte: (CHRISTIANSEN, 2001).

A Figura 24 mostra que na área de adesão as tensões cisalhantes (τ) crescem linearmente até o início da área de escorregamento, onde a partir deste ponto decrescem até o final da área de escorregamento. A distribuição das tensões normais (σ) obedece a teoria de *Hertz*.

A roda gira sobre o boleto do trilho através de sua faixa de rolamento, o vetor posição do ponto (P) é representado por ($\boldsymbol{r}$), a posição angular é representada pelo escalar (θ), o deslocamento angular é representado pelo vetor ($d\boldsymbol{\theta}$), a velocidade angular é representada pelo vetor ($\boldsymbol{\omega}$), e a aceleração angular é representada pelo vetor ($\boldsymbol{\alpha}$). A Figura 25 representa o movimento da roda sobre o trilho e suas convenções.

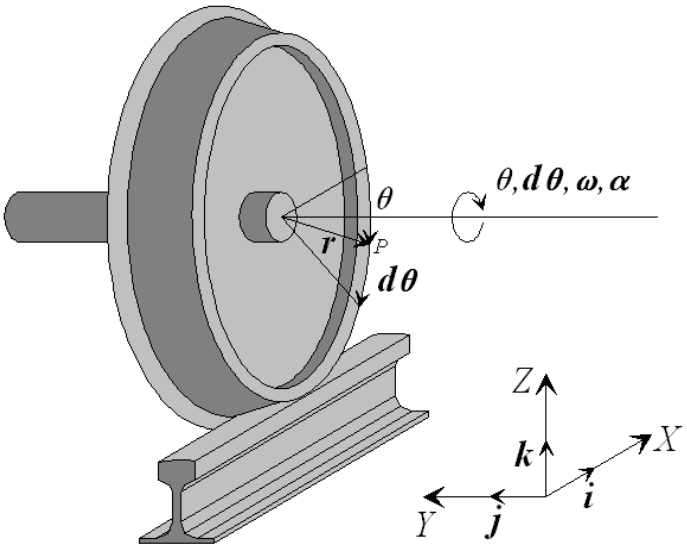


Figura 25 – Movimento da roda sobre o trilho e convenções.
Fonte: Autor.

O vetor posição (***r***), a posição angular (θ), o deslocamento angular ($d\theta$), a velocidade angular (ω), e a aceleração angular (α) podem ser representados respectivamente por:

$$\vec{r} = r(\cos\theta\vec{i} - \sin\theta\vec{k}); \qquad \theta; \qquad d\vec{\theta}; \qquad \vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \dot{\theta}; \qquad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \frac{d^2\vec{\theta}}{dt^2} = \ddot{\vec{\theta}}. \tag{62}$$

A Figura 26 mostra o vetor posição (***r***) do ponto (*P*) e suas convenções:

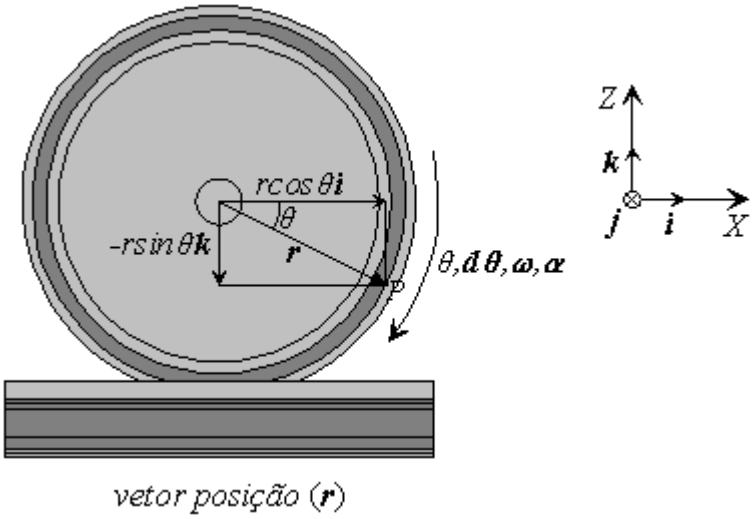


Figura 26 – Vetor posição (***r***) do ponto (*P*) e suas convenções.
Fonte: Autor.

Na Equação (62), eliminando-se (*dt*) em (ω) e em (α), pode-se escrever:

$$dt = \frac{d\vec{\omega}}{\vec{\alpha}} \quad e \quad dt = \frac{d\vec{\theta}}{\vec{\omega}} \quad \therefore \quad \frac{d\vec{\omega}}{\vec{\alpha}} = \frac{d\vec{\theta}}{\vec{\omega}} \quad \therefore \quad \vec{\alpha}d\vec{\theta} = \vec{\omega}d\vec{\omega}. \tag{63}$$

Para uma aceleração angular constante tem-se:

$$\vec{\alpha} = \alpha_c; \qquad \omega = \omega_0 + \alpha_c.t; \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0.t + \frac{1}{2}.\alpha_c.t^2; \qquad \omega^2 = \omega_0{}^2 + 2.\alpha_c.(\theta - \theta_0). \tag{64}$$

O vetor velocidade (***v***) do ponto (*P*) pode ser escrito através do produto vetorial entre o vetor velocidade angular (***ω***) e o vetor posição (***r***) do ponto (*P*), desta maneira, tem-se:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}; \qquad \vec{v} = (\omega \vec{j}) \times (r(\cos\theta \vec{i} - \sin\theta \vec{k})); \qquad \vec{v} = (\omega r)(-\sin\theta \vec{i} - \cos\theta \vec{k}). \tag{65}$$

A Figura 27 mostra o vetor velocidade (***v***) do ponto (*P*) e suas convenções:

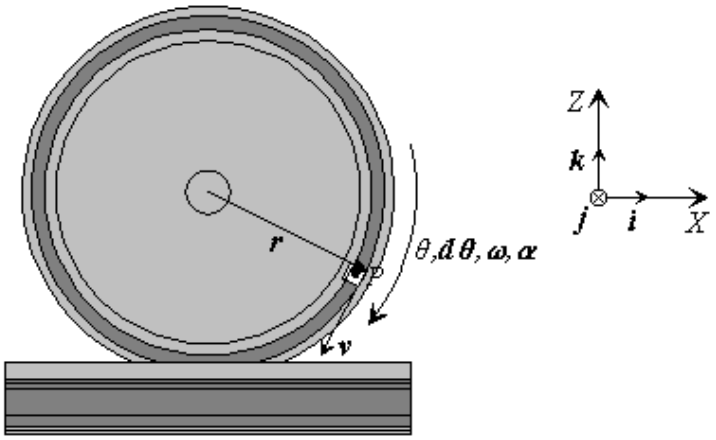


Figura 27 – Vetor velocidade (***v***) do ponto (*P*) e suas convenções.
Fonte: Autor.

O vetor aceleração (***a***) do ponto (*P*) pode ser escrito através da derivada do produto vetorial:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}; \quad como \quad \vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad e \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad então \quad \vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}). \tag{66}$$

A aceleração no ponto (*P*) também pode ser escrita como a soma das acelerações tangencial e normal, desta maneira tem-se:

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}); \quad como \quad \vec{a}_t = \vec{\alpha} \times \vec{r} \quad e \quad \vec{a}_n = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) \quad então \quad \vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n. \tag{67}$$

A Figura 28 mostra o vetor aceleração (***a***) do ponto (*P*) e suas convenções:

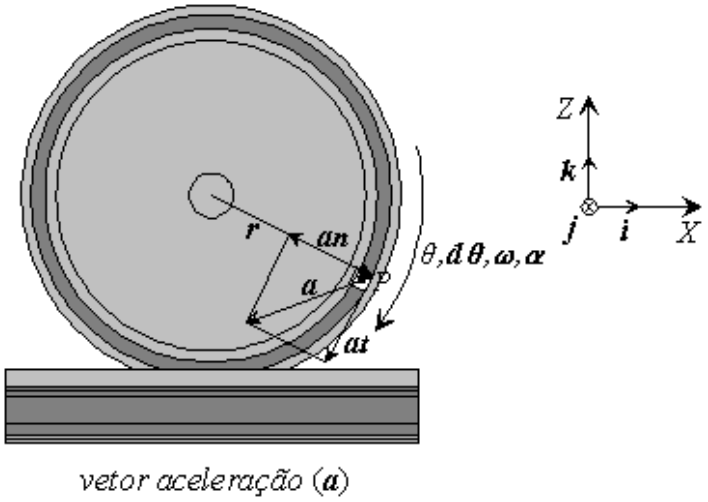


Figura 28 – Vetor aceleração (***a***) do ponto (*P*) e suas convenções.
Fonte: Autor.

O deslocamento transversal da roda sobre o boleto do trilho através da conicidade da faixa de rolamento pode ocorrer devido: ao jogo da via; às irregularidades laterais; à superlargura nos trechos em curva.

O deslocamento transversal da roda sobre o boleto produz uma variação do raio de rotação (***r***), que é linear, pois, trata-se de uma superfície cônica. Desta maneira, pode-se escrever a variação do raio de rotação como:

$$\vec{r} = \vec{r}_i \qquad i = 1,2,3,...,n. \tag{68}$$

Como há variação no raio de rolamento da roda, conseqüentemente haverá variação das velocidades tangenciais na superfície de contato. Estas velocidades podem ser escritas para uma mesma velocidade angular ($\boldsymbol{\omega}$) através do seguinte produto vetorial:

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i \qquad i = 1,2,3,...,n. \tag{69}$$

A Figura 29 mostra a variação do raio de rotação da roda.

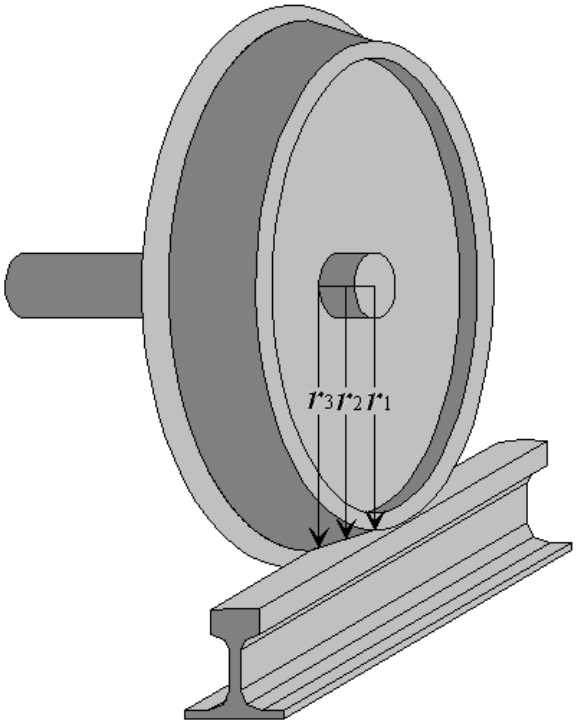


Figura 29 – Variação do raio de rotação da roda.
Fonte: Autor.

Com a variação no raio de rolamento da roda, variam-se as velocidades tangenciais, e também as acelerações tangenciais na superfície de contato. Estas acelerações podem ser escritas para uma mesma velocidade angular ($\boldsymbol{\omega}$), e uma mesma aceleração angular ($\boldsymbol{\alpha}$) através do seguinte produto vetorial:

$$\vec{a}_i = \vec{\alpha} \times \vec{r}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) \qquad i = 1,2,3,...,n. \tag{70}$$

Observa-se que nas equações anteriores a velocidade angular e a aceleração angular são absolutas, e que as velocidades tangenciais e as acelerações tangenciais são variáveis em função do raio de rolamento (r_i), que por sua vez varia linearmente de acordo com a conicidade da roda. Pode-se desta maneira concluir que as velocidades tangenciais e as acelerações tangenciais têm ambas as variações lineares, e suas trajetórias em curvas são diferentes permitindo a inscrição do rodeiro. Isto é, a roda do lado interno da curva apresentará menor: circunferência de rolamento, velocidade tangencial, e aceleração tangencial. Por outro lado, a roda do lado externo da curva apresentará maior: circunferência de rolamento, velocidade tangencial, e aceleração tangencial, conforme mostra a Figura 30.

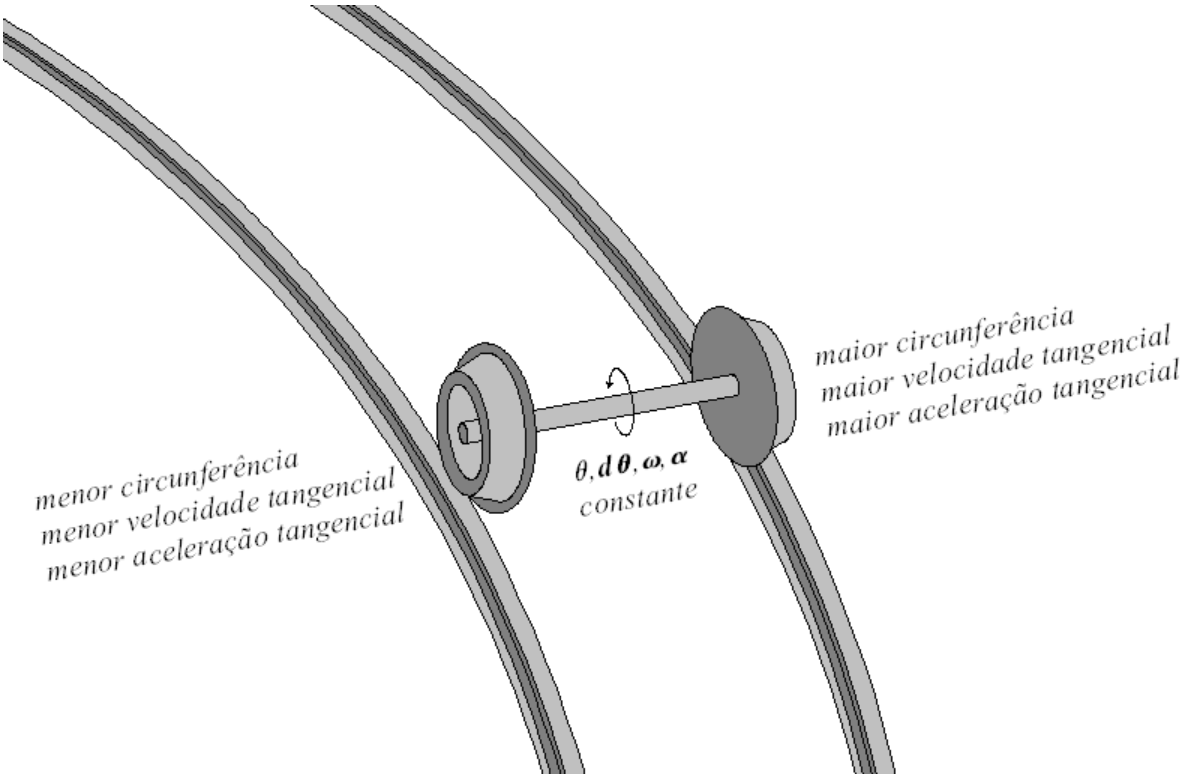


Figura 30 – Rodeiro em curva.
Fonte: Autor.

Observa-se que há grande potencial de deslocamentos relativos entre as rodas e os trilhos (escorregamentos), sobretudo em trechos com curvas. Os escorregamentos também ocorrem em trechos em tangentes (retas), devido às constantes acelerações e frenagens que são submetidos os rodeiros. Isto se intensifica quando há mudança nas superfícies de contato entre as rodas e os trilhos, tais contaminações podem surgir por substâncias oleosas, ou até mesmo água no caso de sereno, orvalho, garoa, chuva, etc.

Os escorregamentos transversais das rodas sobre os trilhos ocorrem até que os frisos das rodas toquem no flanco lateral do boleto dos trilhos, evitando-se desta forma o descarrilamento.

Neste trabalho é considerado o contato simples entre roda e trilho ocorrendo somente em um ponto, isto é, entre a faixa de rolamento da roda e a superfície superior do boleto. Pois pode ocorrer o contato duplo, quando além da situação anterior, ocorre também o contato com o friso. Também pode ocorrer o contato múltiplo, comum quando há grande desgaste entre a faixa de rolamento e a superfície superior do boleto. Ou ainda, somente o contato com o friso. Para os casos de contato duplo ou contato múltiplo, pode-se citar o trabalho de (POMBO, AMBRÓSIO e SILVA, 2007). A Figura 31 mostra os casos de contato entre roda e trilho.

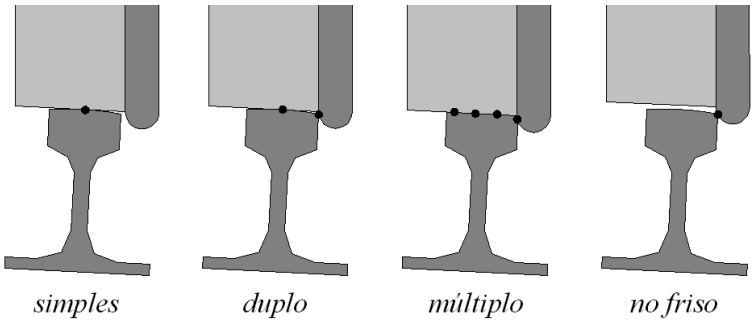


Figura 31 – Casos de contato entre roda e trilho.
Fonte: Autor.

Considerando-se também a velocidade de translação da roda sobre o trilho, esta pode ser representada por um vetor localizado no centro de massa da roda com suas componentes no plano (*XY*). A Figura 32 mostra as velocidades translacionais e circunferenciais da roda e suas respectivas componentes.

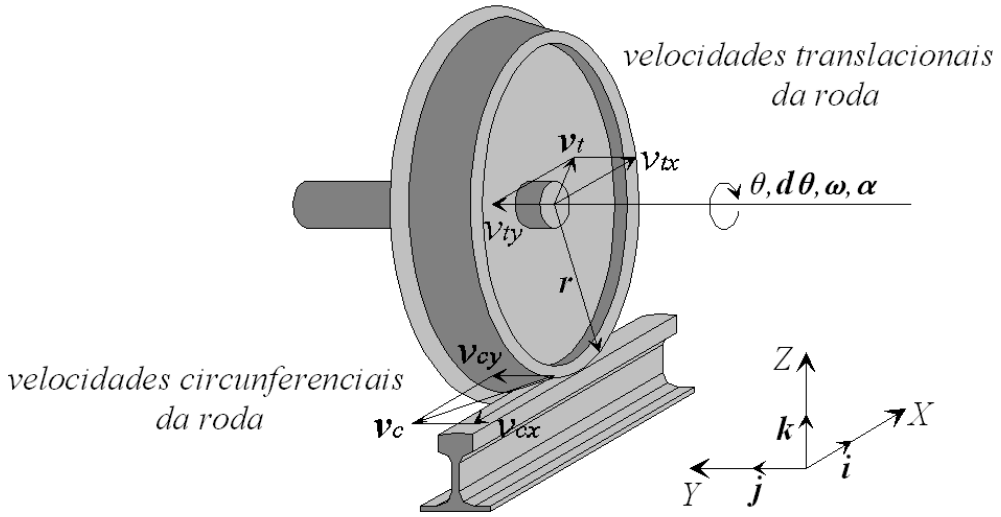


Figura 32 – Velocidades translacionais e circunferenciais da roda.
Fonte: Autor.

Na situação de rolamento sem escorregamento, a velocidade circunferencial ($\boldsymbol{v_c}$), pode ser representada pelo produto vetorial entre a velocidade angular ($\boldsymbol{\omega}$) e o vetor posição ($\boldsymbol{r}$). Neste caso a velocidade translacional é igual à velocidade circunferencial, não havendo desta forma velocidades relativas entre o trilho e a roda, nem deslocamentos relativos entre eles.

Na situação de rolamento com escorregamento, a velocidade circunferencial ($\boldsymbol{v_c}$), deixa de ser igual ao produto vetorial entre a velocidade angular ($\boldsymbol{\omega}$) e o vetor posição ($\boldsymbol{r}$). Pois podem ocorrer duas situações distintas: a velocidade circunferencial é maior que a velocidade translacional (patinagem durante a aceleração); ou a velocidade circunferencial é menor que a velocidade translacional (deslizamento durante a frenagem). Na situação de igualdade entre estas velocidades, tem-se o rolamento sem escorregamento, como descrito anteriormente.

3.2.2.1 Escorregamentos

O escorregamento, ou também conhecido por microescorregamento ou ainda (*creep*), é definido em (KALKER, 1990), como a razão entre a diferença de velocidade circunferencial ($\boldsymbol{v_c}$) e a velocidade translacional ($\boldsymbol{v_t}$) da roda, pela média aritmética normalizada destas velocidades, desta maneira, tem-se:

$$\vec{\xi} = \frac{\vec{v}_c - \vec{v}_t}{|\vec{v}_0|}; \qquad \vec{v}_0 = \frac{\vec{v}_c + \vec{v}_t}{2}. \tag{71}$$

As componentes cartesianas do vetor escorregamento nas direções dos vetores unitários de base ($\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$) pode ser expressas respectivamente por: (BARBOSA, 1999).

$$\xi_x = \frac{v_{cx} - v_{tx}}{|\vec{v}_0|}; \qquad \xi_y = \frac{v_{cy} - v_{ty}}{|\vec{v}_0|}; \qquad \xi_{spin} = \frac{\omega_z}{|\vec{v}_0|}. \tag{72}$$

Onde a componente (ω_z) representa a inclinação do plano (XY) devido à conicidade (δ) da roda como mostra a Figura 33 abaixo:

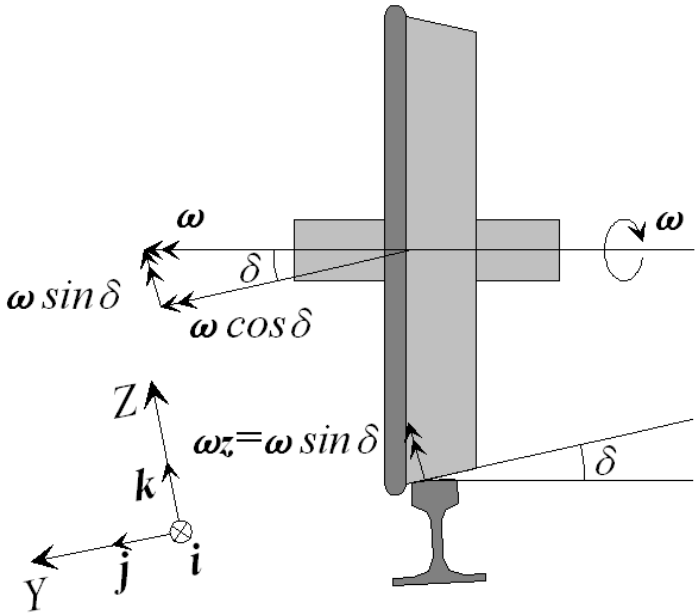


Figura 33 – Componente (ω_z) devido à conicidade (δ).
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 33 que a componente (ω_z) pode ser escrita através da seguinte relação:

$$\omega_z = \omega \sin \delta. \tag{73}$$

As velocidades relativas dependem do movimento do rodeiro no plano horizontal, tais como a média aritmética normalizada das velocidades circunferencial e translacional ($\boldsymbol{v_0}$), a translação transversal à via (LW), a rotação no eixo vertical (YW), e de suas respectivas derivadas temporais ($d(LW)/dt$) e (d(YW)/dt). As velocidades também dependem do raio de rolamento (r), da distância do centro de massa do rodeiro ao ponto de contato da roda no trilho (c), e da velocidade angular ($\boldsymbol{\omega}$). Assim têm-se as seguintes expressões gerais das componentes da velocidade circunferencial: (BARBOSA, 1999).

$$v_{cx} = \omega.r - c.\frac{d(YW)}{dt}; \qquad v_{cy} = \frac{d(LW)}{dt} - \vec{v}_0.\sin(YW). \tag{74}$$

A Figura 34 mostra os movimentos do rodeiro no plano horizontal, e suas respectivas convenções.

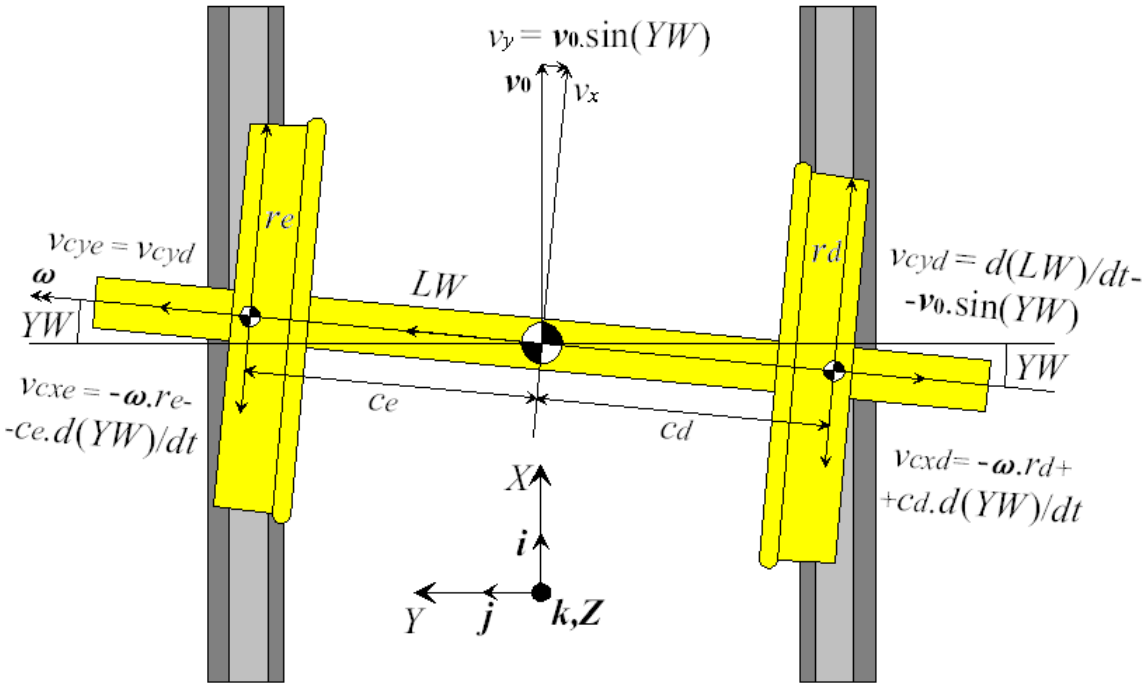


Figura 34 – Movimentos do rodeiro no plano horizontal.
Fonte: Adaptado de (BARBOSA, 1999).

Considerando-se os movimentos do rodeiro no plano horizontal, cada roda tem seu raio de rolamento (r_e e r_d), pois estes são variáveis em função da translação transversal à via (LW), e da conicidade das rodas (δ). Desta forma, podem-se escrever as expressões para os raios de rolamento (r_e e r_d) em função do raio de rolamento central (r_0), da translação transversal à via (u_y), e da conicidade das rodas (δ): Adaptado de (Idem, 1999).

$$r_e = r_0 + \delta.LW; \qquad r_d = r_0 - \delta.LW. \tag{75}$$

Substituindo-se (r_e e r_d) respectivamente em (v_{cxe} e v_{cxd}) na Figura 34, obtêm-se:

$$v_{cxe} = -\omega.(r_0 + \delta.LW) - c_e.\frac{d(YW)}{dt}; \qquad v_{cxd} = -\omega.(r_0 - \delta.LW) + c_d.\frac{d(YW)}{dt}. \tag{76}$$

Desenvolvendo-se a Equação (76) considerando-se ($v_0 = \omega.r_0$), obtêm-se:

$$v_{cxe} = -v_0 - \frac{v_0.\delta.LW}{r_0} - c_e.\frac{d(YW)}{dt}; \qquad v_{cxd} = -v_0 + \frac{v_0.\delta.LW}{r_0} + c_d.\frac{d(YW)}{dt}. \tag{77}$$

Substituindo-se a Equação (77) na componente (ξ_x) da Equação (72), obtêm-se as expressões de escorregamento da componente (ξ_x) para cada roda:

$$\xi_{xe} = -\frac{\delta.LW}{r_0} - \frac{c_e}{v_0}.\frac{d(YW)}{dt}; \qquad \xi_{xd} = \frac{\delta.LW}{r_0} + \frac{c_d}{v_0}.\frac{d(YW)}{dt}. \tag{78}$$

Substituindo-se (v_{cye} e v_{cyd}) da Figura 34 na componente (ξ_y) da Equação (72), e considerando-se ângulos pequenos (linearizando-se), obtêm-se as expressões de escorregamento da componente (ξ_y) para cada roda: Adaptado de (BARBOSA, 1999).

$$\xi_{ye} = \frac{1}{v_0}.\frac{d(LW)}{dt} - YW; \qquad \xi_{yd} = \frac{1}{v_0}.\frac{d(LW)}{dt} - YW. \tag{79}$$

O escorregamento de rotação (*spin*) deve considerar a Equação (73) relacionada à conicidade. Substituindo-se na Equação (72), considerando-se ($v_0 = \omega.r_0$), e ângulos pequenos (linearizando-se), têm-se o seguinte desenvolvimento: Adaptado de (Idem, 1999).

$$\xi_{spin} = \frac{\omega_z}{|\vec{v}_0|} = \frac{\frac{d(YW)}{dt} + \omega.\sin\delta}{v_0} = \frac{\frac{d(YW)}{dt} + \frac{v_0}{r_0}.\sin\delta}{v_0}; \qquad \xi_{spine,d} = \frac{\frac{d(YW)}{dt}}{v_0} \mp \frac{\delta}{r_0}. \tag{80}$$

As Equações (78), (79) e (80) podem ser reescritas na forma matricial, então têm-se os escorregamentos para a roda esquerda e para a roda direita, respectivamente dados por:

$$\begin{Bmatrix} \xi_{xe} \\ \xi_{ye} \\ \xi_{spine} \end{Bmatrix} = \left\{ \left(-\frac{\delta.LW}{r_0} - \frac{c_e}{v_0}.\frac{d(YW)}{dt} \right) \quad \left(\frac{1}{v_0}.\frac{d(LW)}{dt} - YW \right) \quad \left(\frac{\frac{d(YW)}{dt}}{v_0} - \frac{\delta}{r_0} \right) \right\}^T$$

$$\begin{Bmatrix} \xi_{xd} \\ \xi_{yd} \\ \xi_{spind} \end{Bmatrix} = \left\{ \left(\frac{\delta.LW}{r_0} + \frac{c_d}{v_0}.\frac{d(YW)}{dt} \right) \quad \left(\frac{1}{v_0}.\frac{d(LW)}{dt} - YW \right) \quad \left(\frac{\frac{d(YW)}{dt}}{v_0} + \frac{\delta}{r_0} \right) \right\}^T \tag{81}$$

Conforme as variações das intensidades de escorregamentos têm-se diversos tipos de áreas de contato. A Figura 35 mostra os formatos das áreas de contato para diversos casos de escorregamentos segundo *Kalker*.

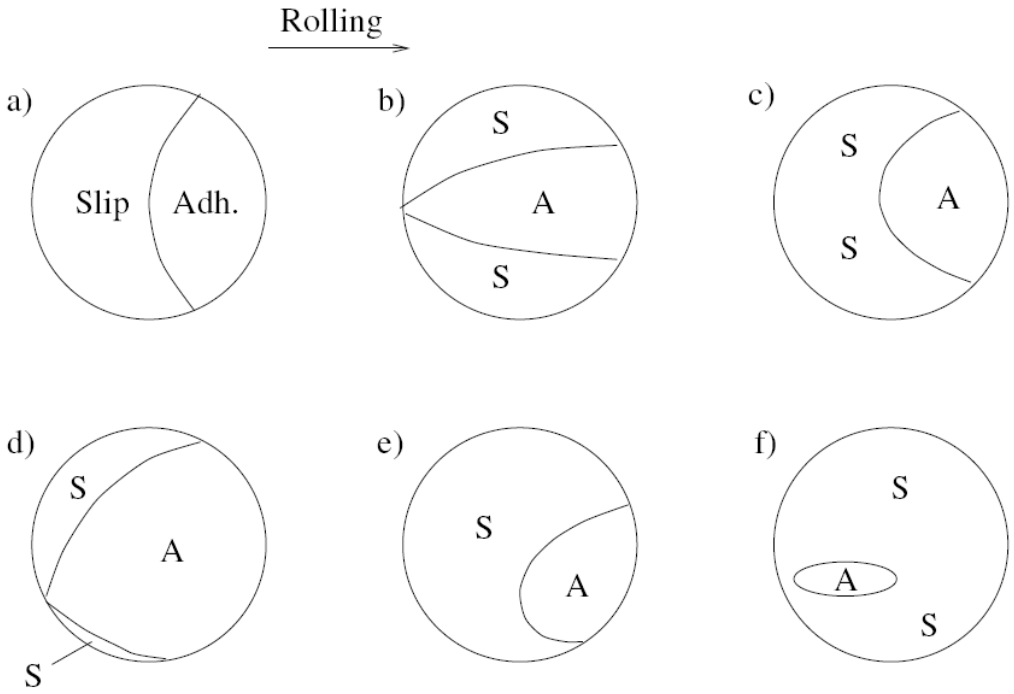


Figura 35 – Formatos das áreas de contato segundo *Kalker*.
Fonte: (KALKER, 1990).

Na Figura 35, S e A, representam as áreas de escorregamento (*slip*) e de aderência (*adhesion*), respectivamente. No caso (a), ocorre escorregamento nas direções longitudinal e lateral, porém não ocorre escorregamento de rotação (*spin*). No caso (b), ocorre somente escorregamento de rotação (*spin*), porém de magnitude pequena. No caso (c), ocorre escorregamento lateral e de rotação (*spin*). No caso (d), ocorre escorregamento longitudinal e de rotação (*spin*). O caso (e) representa o caso geral, onde ocorrem escorregamentos longitudinal, lateral e de rotação (*spin*). Finalmente no caso (f), ocorre somente escorregamento de rotação (*spin*) de magnitude alta. (KALKER, 1990).

3.2.2.2 Forças de contato

A teoria linear de *Kalker* do contato entre roda e trilho considera a existência de certa rigidez no contato, que se opõe aos escorregamentos fazendo uma analogia à Lei de *Hooke*. Desta maneira tem-se (F_x), (F_y) e (M_z) que são: a força de contato longitudinal, a força de contato lateral, e momento de rotação (*spin*), respectivamente. Estes são linearmente proporcionais aos escorregamentos (ξ_x), (ξ_y) e (ξ_{spin}) através das rigidezas (K_x), (K_y) e (K_{spin}), respectivamente. A Figura 36 representa o contato entre a roda e o trilho, a rigidez de contato, as forças de contato, e os escorregamentos segundo a teoria linear de *Kalker* do contato entre roda e trilho.

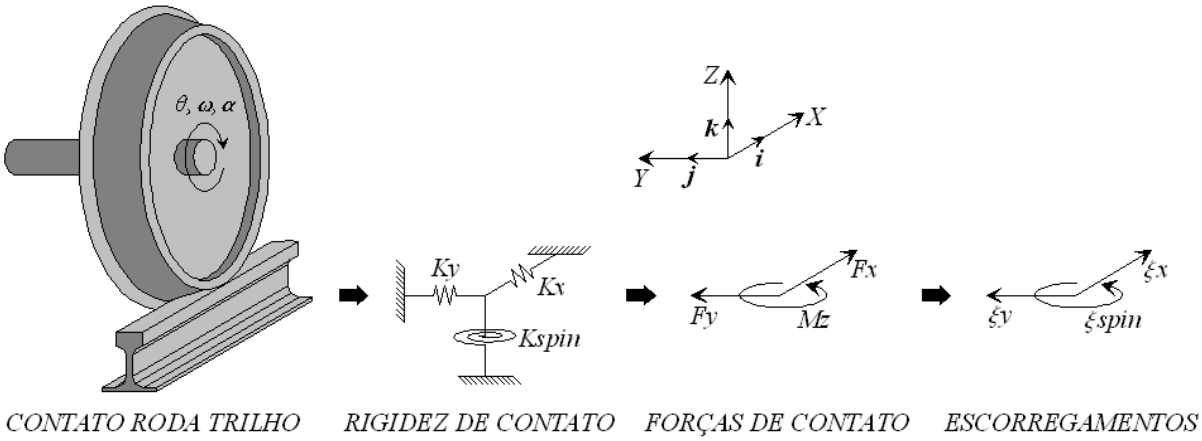


Figura 36 – Contato roda-trilho, rigidez, forças, e escorregamentos segundo *Kalker*.
Fonte: Autor.

As relações da teoria linear de *Kalker* do contato entre roda e trilho podem ser expressas através das seguintes equações:

$$\begin{aligned} F_x &= -a.b.G.C_{11}.\xi_x \\ F_y &= -a.b.G.\left(C_{22}.\xi_y + \sqrt{a.b}.C_{23}.\xi_{spin}\right) \\ M_z &= -a.b.G.\left(-\sqrt{a.b}.C_{23}.\xi_y + a.b.C_{33}.\xi_{spin}\right) \end{aligned} \tag{82}$$

Estas equações acima, podem ser expressas através da seguinte equação matricial:

$$\begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ M_z \end{bmatrix} = -G.a.b.\begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{22} & \sqrt{a.b}C_{23} \\ 0 & -\sqrt{a.b}C_{23} & a.b.C_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_x \\ \xi_y \\ \xi_{spin} \end{bmatrix} \tag{83}$$

Onde o módulo (G) é obtido através da seguinte relação:

$$G = \frac{2.G_w.G_r}{G_w + G_r} \tag{84}$$

Em que (G_w) e (G_r) são os módulos de elasticidade transversal ou módulo de cisalhamento da roda e do trilho, respectivamente. O módulo (G) foi proposto por *Kalker* para combinar diferentes propriedades elásticas dos materiais em contato. Os parâmetros (a) e (b), são os semi-eixos da elipse de contato entre a roda e o trilho obtidos analiticamente mediante e teoria do contato de *Hertz*.

Na Equação (82), (C_{11}), (C_{22}), (C_{23}) e (C_{33}) são os coeficientes de rigidez de contato calculados analiticamente por *Kalker* e apresentados na Tabela 7. O módulo (ν) é obtido através da seguinte relação:

$$\nu = \frac{G.\left(G_w.\nu_r + G_r.\nu_w\right)}{2.G_w.G_r} \tag{85}$$

Em que (ν_w) e (ν_r) são os coeficientes de *Poisson* dos materiais da roda e do trilho, respectivamente, possibilitando-se, desta maneira, a combinação de diferentes propriedades elásticas dos materiais em contato.

Tabela 7 – Coeficientes de rigidez de contato segundo *Kalker*.

		C_{11}			C_{22}			C_{23}			C_{33}		
		ν **=0**	ν **=1/4**	ν**=1/2**	ν **=0**	ν**=1/4**	ν**=1/2**	ν **=0**	ν **=1/4**	ν**=1/2**	ν**=0**	ν**=1/4**	ν**=1/2**
a* / *b **(*b* > *a*)**	**0,1**	2,51	3,31	4,85	2,51	2,52	2,53	0,334	0,473	0,731	6,420	8,280	11,700
	0,2	2,59	3,37	4,81	2,59	2,63	2,66	0,483	0,603	0,809	3,460	4,270	5,660
	0,3	2,68	3,44	4,80	2,68	2,75	2,81	0,607	0,715	0,889	2,490	2,960	3,720
	0,4	2,78	3,53	4,82	2,78	2,88	2,98	0,720	0,823	0,977	2,020	2,320	2,770
	0,5	2,88	3,62	4,83	2,88	3,01	3,14	0,827	0,929	1,070	1,740	1,930	2,220
	0,6	2,98	3,72	4,91	2,98	3,14	3,31	0,930	1,030	1,180	1,560	1,680	1,860
	0,7	3,09	3,81	4,97	3,09	3,28	3,48	1,030	1,140	1,290	1,430	1,500	1,600
	0,8	3,19	3,91	5,05	3,19	3,41	3,65	1,130	1,150	1,400	1,340	1,370	1,420
	0,9	3,29	4,01	5,12	3,29	3,54	3,82	1,230	1,360	1,510	1,270	1,270	1,270
a* = *b	**1,0**	3,40	4,12	5,20	3,40	3,67	3,98	1,330	1,470	1,630	1,210	1,190	1,160
b* / *a **(*a* > *b*)**	**0,9**	3,51	4,22	5,30	3,51	3,81	4,16	1,440	1,590	1,770	1,160	1,110	1,060
	0,8	3,65	4,36	5,42	3,65	3,99	4,39	1,580	1,750	1,940	1,100	1,040	0,954
	0,7	3,82	4,54	5,58	3,82	4,21	4,67	1,760	1,950	2,180	1,050	0,965	0,852
	0,6	4,06	4,78	5,80	4,06	4,50	5,04	2,010	2,230	2,500	1,010	0,892	0,751
	0,5	4,37	5,10	6,11	4,37	4,90	5,56	2,350	2,620	2,960	0,958	0,819	0,650
	0,4	4,84	5,57	6,57	4,84	5,48	6,31	2,880	3,240	3,700	0,912	0,747	0,549
	0,3	5,57	6,34	7,34	5,57	6,40	7,51	3,790	4,320	5,010	0,868	0,674	0,446
	0,2	6,69	7,78	8,82	6,96	8,14	9,79	5,720	6,630	7,890	0,828	0,601	0,341
	0,1	10,70	11,70	12,90	10,70	12,80	16,00	12,200	14,600	18,000	0,795	0,526	0,228

Fonte: (KALKER, 1990).

3.2.2.2.1 Saturação do contato

As forças de contato devem respeitar a saturação da lei do atrito de *Coulomb*, ou seja, as forças no plano de contato são limitadas por um valor máximo, definido pelas condições das superfícies em contato (aderência, rugosidade, contaminação, etc.). (BARBOSA, 1999).

A teoria linear de *Kalker* não trabalha com grandes escorregamentos, portanto as forças tangenciais na superfície de contato, as quais produzem os escorregamentos, devem ser limitadas. A resultante das forças tangenciais na superfície de contato não pode exceder o limite produzido pela adesão. Se (N_W) é a força normal no plano de contato entre a roda e o trilho, então a resultante das forças tangenciais na superfície de contato (F_T), obtida pelas componentes (F_x) e (F_y), não pode exceder o limite produzido pela adesão de contato entre a roda e o trilho, ou seja:

$$F_T = \sqrt[2]{F_x^{\,2} + F_y^{\,2}}; \qquad F_T \le \mu . N_W . \tag{86}$$

O modelo de *Vermeulen* e *Johnson* citado em: (KALKER, 1990), (GUIMARÃES, 1999), (CHISTIANSEN, 2001), (XIA, 2002), (HOFFMANN, 2003), (IWNICKI, 2003), e (POMBO; AMBRÓSIO; SILVA, 2007) restringe as forças tangenciais de contato e o momento de rotação *spin* segundo um polinômio cúbico. Esta proposta tende a contemplar as não linearidades geométricas devido aos perfis da roda e do trilho, bem como, os limites de aderência no contato entre roda e trilho. Neste modelo também é incluído o escorregamento de rotação (*spin*). O valor das forças tangenciais de contato saturadas (F_x*) e (F_y*), e o valor do momento de rotação (*spin*) saturado (M_z*), podem ser calculados mediante o seguinte procedimento:

$$
\begin{aligned}
&\textit{Para} \quad F_T \le 3.\mu.N_W \\
&F_x^* = \frac{F_x}{F_T}.\left[\frac{F_T}{\mu.N_W} - \frac{1}{3}.\left(\frac{F_T}{\mu.N_W}\right)^2 + \frac{1}{27}.\left(\frac{F_T}{\mu.N_W}\right)^3\right].\mu.N_W \qquad \textit{para todas as rodas } Fxi* \quad i = 1,2,3,...,8 \\
&F_y^* = \frac{F_y}{F_T}.\left[\frac{F_T}{\mu.N_W} - \frac{1}{3}.\left(\frac{F_T}{\mu.N_W}\right)^2 + \frac{1}{27}.\left(\frac{F_T}{\mu.N_W}\right)^3\right].\mu.N_W \qquad \textit{para todas as rodas } Fyi* \quad i = 1,2,3,...,8 \\
&M_z^* = \frac{M_z}{F_T}.\left[\frac{F_T}{\mu.N_W} - \frac{1}{3}.\left(\frac{F_T}{\mu.N_W}\right)^2 + \frac{1}{27}.\left(\frac{F_T}{\mu.N_W}\right)^3\right].\mu.N_W \qquad \textit{para todas as rodas } Mzi* \quad i = 1,2,3,...,8 \\
&\textit{Para} \quad F_T > 3.\mu.N_W \\
&F_x^* = \mu.N_W \frac{F_x}{F_T} \qquad \textit{para todas as rodas } Fxi* \quad i = 1,2,3,...,8 \\
&F_y^* = \mu.N_W \frac{F_y}{F_T} \qquad \textit{para todas as rodas } Fyi* \quad i = 1,2,3,...,8 \\
&M_z^* = \mu.N_W \frac{M_z}{F_T} \qquad \textit{para todas as rodas } Mzi* \quad i = 1,2,3,...,8
\end{aligned}
\tag{87}
$$

A Figura 37 mostra a comparação entre a restrição da força tangencial segundo a aproximação polinomial cúbica proposta por *Vermeulen* e *Johnson*, e o modelo teórico da lei de atrito de *Coulomb*.

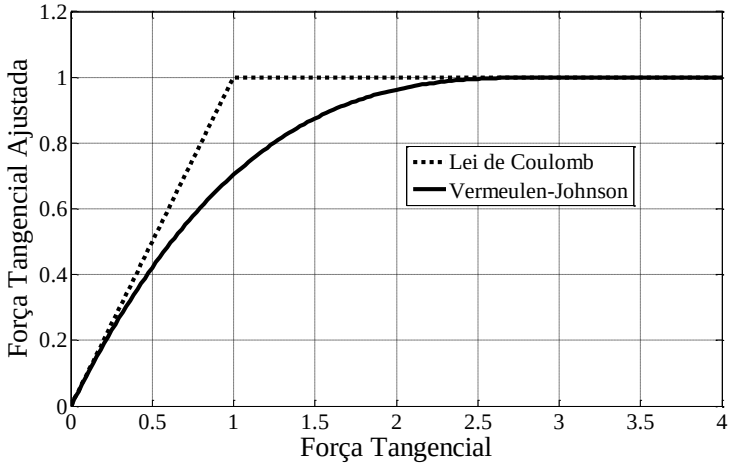


Figura 37 – Comparação entre e lei do atrito de *Coulomb* e o modelo de *Vermeulen* e *Johnson*.
Fonte: Autor.

Na Figura 37 ambos os eixos estão normalizados por ($\mu.N_W$). É possível observar que na lei do atrito de *Coulomb* a força tangencial de contato pode crescer até o limite estabelecido pelo produto ($\mu.N_W$), onde, a partir deste ponto ocorre o escorregamento. No modelo proposto por *Vermeulen* e *Johnson*, mostra-se que a força tangencial é linear para pequenos escorregamentos, (inclinação próxima à origem). E, que para escorregamentos maiores, a relação entre a força tangencial e os escorregamentos é essencialmente não linear. Este modelo é conhecido na literatura como modelo de força de *creep* não linear com *spin*, ou modelo não linear heurístico. (GUIMARÃES, 1999).

A relação entre a força tangencial ajustada e o escorregamento segundo o modelo de *Vermeulen* e *Johnson* é apresentada na Figura 38. Cada elipse de contato é representada por duas áreas, a área de adesão (branca), e a área de escorregamento (preta). Com o crescimento da força tangencial ajustada, cresce também a área de escorregamento, e decresce a área de adesão. Isto ocorre até o limite em que toda a área da elipse de contato fica tomada pelos escorregamentos conforme mostra a Figura 38.

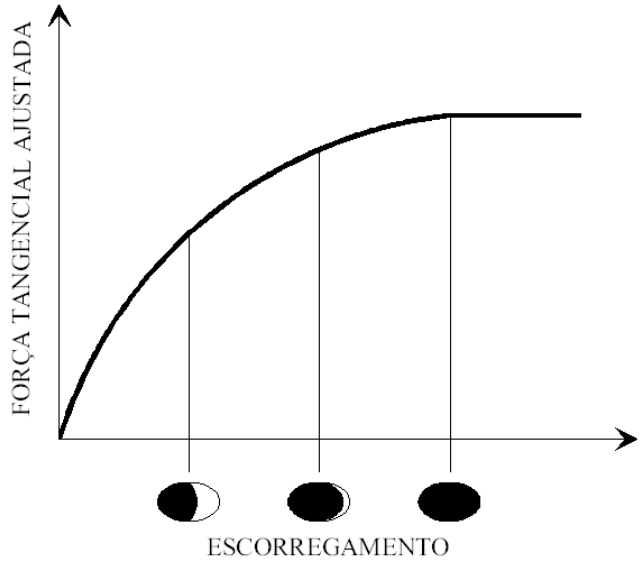


Figura 38 – Relação entre a força tangencial ajustada e o escorregamento.
Fonte: Autor.

3.3 Modelos de elementos finitos

Com o propósito da modelagem tridimensional da ponte ferroviária em elementos finitos, apresenta-se a formulação do elemento finito de pórtico tridimensional. Este tipo de elemento finito, pode ser visto como a associação dos elementos finitos de barra e de viga. Pois nos elementos finitos de barra têm-se os esforços axiais e de torção; e nos de viga, tem-se os esforços produzidos pela flexão. Desta forma, é apresentada na seqüência a formulação energética dos elementos finitos: de barra; de viga; bem como o de pórtico tridimensional.

3.3.1 Elemento finito de barra submetido à força axial

Os elementos finitos de barra submetidos à força axial são originados pela subdivisão da barra em pequenos membros, os quais possuem as mesmas propriedades materiais e geométricas pertencentes à barra original. A Figura 39 mostra um elemento finito de barra e seus graus de liberdade.

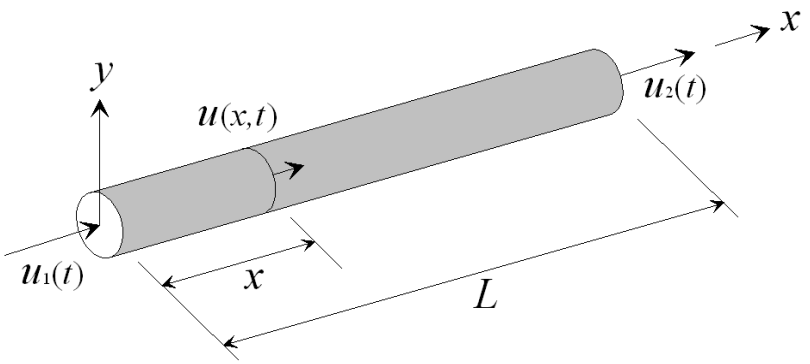


Figura 39 – Elemento finito de barra.
Fonte: Autor.

Na Figura 39, ($u(x,t)$), ($u_1(t)$), ($u_2(t)$), (x) e (L), representam respectivamente: o campo de deslocamento da barra; o deslocamento do nó 1; o deslocamento do nó 2; a coordenada local do elemento (abscissa); e o comprimento do elemento finito de barra. Neste elemento, há dois graus de liberdade de movimento, sendo um em cada nó. O grau de liberdade de movimento refere-se à translação ao longo do eixo longitudinal da barra. No elemento finito de barra, os esforços são aplicados axialmente, ou seja, na direção do eixo longitudinal da barra. Desta maneira, têm-se somente esforços axiais, de tração ou de compressão.

Utilizando-se a aproximação dos deslocamentos no elemento através das funções de forma, ou funções de interpolação, têm-se:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{i=1}^{2} \psi_i(x).u_i(t) \\ u(x,t) &= \psi_1(x).u_1(t) + \psi_2(x).u_2(t) \end{aligned} \tag{88}$$

onde ($\psi_i(x)$), representa as funções de forma, ou funções de interpolação, que são aplicadas em cada nó do elemento, ou seja, ($\psi_1(x)$) e ($\psi_2(x)$).

Deve-se agora selecionar uma função polinomial completa e contínua que represente o campo de deslocamento ($u(x,t)$), e que satisfaça as condições de contorno essenciais. É escolhida então uma função linear, pois existem duas condições de contorno essenciais. (CRAIG, 1981).

$$u(x,t) = c_1 + c_2.\left(\frac{x}{L}\right) \tag{89}$$

Condições de contorno essenciais:

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u_1(t) = c_1 \\ u(L,t) &= u_2(t) = c_1 + c_2 \end{aligned} \tag{90}$$

Então:

$$\begin{aligned} & c_1 = u_1 \qquad e \qquad c_2 = u_2 - u_1 \\ & u(x,t) = u_1 + (u_2 - u_1).\left(\frac{x}{L}\right) \\ & u(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right).u_1(t) + \left(\frac{x}{L}\right).u_2(t) \\ & u(x,t) = \psi_1(x).u_1(t) + \psi_2(x).u_2(t) \end{aligned} \tag{91}$$

Satisfazendo-se as condições de contorno essenciais:

$$\begin{aligned} & \psi_1(0) = 1 \qquad e \qquad \psi_1(L) = 0 \\ & \psi_2(0) = 0 \qquad e \qquad \psi_2(L) = 1 \end{aligned} \tag{92}$$

As funções de forma são:

$$\psi_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \qquad e \qquad \psi_2(x) = \left(\frac{x}{L}\right) \tag{93}$$

A Figura 40 mostra as funções de forma para o elemento finito de barra.

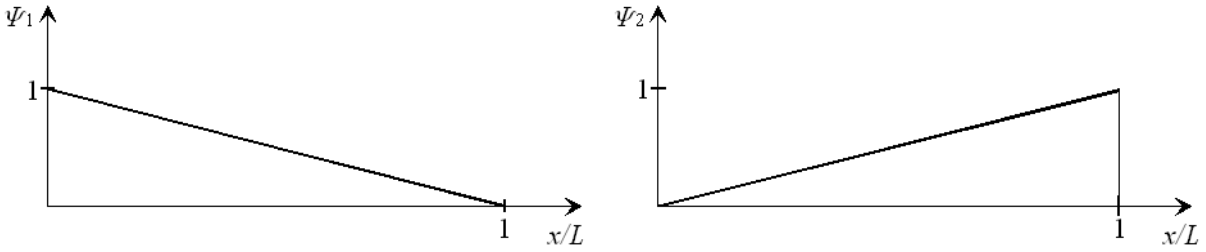


Figura 40 – Funções de forma para o elemento finito de barra.
Fonte: Autor.

A energia cinética do elemento finito de barra pode ser representada por:

$$\begin{aligned} & \dot{u}(x,t) = \sum_{i=1}^{2} \psi_i(x).\dot{u}_i(t) \\ & T = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho.A.(\dot{u})^2 dx \\ & T = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho.A.[\sum_{i=1}^{2} \psi_i(x).\dot{u}_i(t)].[\sum_{j=1}^{2} \psi_j(x).\dot{u}_j(t)]dx \\ & T = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}[\int_0^L \rho.A.\psi_i(x).\psi_j(x)dx].\dot{u}_i(t).\dot{u}_j(t) \\ & T = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} m_{ij}\dot{u}_i.\dot{u}_j \end{aligned} \tag{94}$$

Onde (T), (ρ), (A) representam respectivamente: a energia cinética do elemento finito de barra; a massa específica do material; e a área de secção transversal. O símbolo ($\dot{}$), representa a primeira derivada com relação ao tempo, ou seja, a velocidade, e (m_{ij}) representa a matriz de

massa do elemento finito de barra, que é obtida utilizando-se as funções de forma da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
m_{ij} &= \int_0^L \rho.A.\psi_i.\psi_j dx \\
m_{12} &= \int_0^L \rho.A.\psi_1.\psi_2 dx \\
m_{12} &= \int_0^L \rho.A.\left(1-\frac{x}{L}\right).\left(\frac{x}{L}\right) dx \\
m_{12} &= \frac{\rho.A.L}{6} \\
[m] &= \left(\frac{\rho.A.L}{6}\right).\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{95}
$$

Esta matriz de massa é chamada de matriz de massa consistente. Reescrevendo a energia cinética do elemento finito de barra, agora na forma matricial, têm-se:

$$
\begin{aligned}
& T = \tfrac{1}{2}\{\dot{u}\}^T[m]\{\dot{u}\} \\
& onde \quad \{u(t)\} = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \\
& onde \quad \{\dot{u}(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_1(t) \\ \dot{u}_2(t) \end{Bmatrix} \\
& onde \quad [m] = \left(\frac{\rho.A.L}{6}\right).\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{96}
$$

A energia potencial de deformação do elemento finito de barra pode ser representada da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
& V = \tfrac{1}{2}\int_0^L \sigma.\varepsilon.dV \\
& onde \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad generalizando \quad \{\varepsilon\} = [C]\{u\} \\
& onde \quad \sigma = E.\varepsilon \quad generalizando \quad \{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \\
& V = \tfrac{1}{2}\int_0^L E.A.(u')^2 dx \\
& V = \tfrac{1}{2}\int_0^L E.A.[\sum_{i=1}^{2}\psi_i'(x).u_i(t)].[\sum_{j=1}^{2}\psi_j'(x).u_j(t)]dx \\
& V = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}[\int_0^L E.A\psi_i'(x).\psi_j'(x)dx].u_i(t).u_j(t) \\
& V = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}k_{ij}u_iu_j
\end{aligned}
\tag{97}
$$

Onde (V), (σ), (ε) representam respectivamente: a energia potencial de deformação do elemento finito de barra; a tensão axial; e a deformação relativa axial. Esta pode ser representada pela variação do campo de deslocamentos em relação à coordenada (x), ou seja, ($\varepsilon = \partial u/\partial x$). A tensão axial pode ser representada através da Lei de *Hooke*, ou seja, ($\sigma = E.\ \varepsilon$), onde (E) é o módulo de elasticidade, ou módulo de *Young*. As matrizes [C] e [D], representam

respectivamente: a matriz do campo de deslocamentos; e a matriz constitutiva, ou matriz material. O símbolo (') representa a primeira derivada com relação a (x), e (k_{ij}) representa a matriz de rigidez do elemento finito de barra, que é obtida utilizando-se as funções de forma da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= \int_0^L E.A.\psi_i'.\psi_j' dx \\ k_{12} &= \int_0^L E.A.\psi_1'.\psi_2' dx \\ k_{12} &= \int_0^L E.A.\left(-\frac{1}{L}\right).\left(\frac{1}{L}\right) dx \\ k_{12} &= -\frac{E.A}{L} \\ [k] &= \left(\frac{E.A}{L}\right).\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{98}$$

Reescrevendo a energia potencial de deformação do elemento finito de barra, agora na forma matricial, têm-se:

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{2}\{u\}^T[k]\{u\} \\ &onde \quad \{u(t)\} = \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{Bmatrix} \\ &onde \quad [k] = \left(\frac{E.A}{L}\right).\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{99}$$

A variação do trabalho produzido pelas forças não conservativas no elemento finito de barra pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \delta W_{nc} &= \int_0^L p(x,t).\delta u(x,t) dx \\ \delta W_{nc} &= \int_0^L p(x,t).\sum_{i=1}^{2} \psi_i(x).\delta u_i(t) dx \\ \delta W_{nc} &= \sum_{i=1}^{2} [\int_0^L p(x,t).\psi_i(x) dx].\delta u_i(t) \\ \delta W_{nc} &= \sum_{i=1}^{2} p_i(t).\delta u_i(t) \\ \delta W_{nc} &= \{\delta u\}^T \{p\} \end{aligned} \tag{100}$$

Os esforços externos aplicados nos nós do elemento finito de barra, os esforços nodais, são obtidos da seguinte forma:

$$p_i = \int_0^L p(x,t).\psi_i dx \tag{101}$$

Para um carregamento constante, ($p(x,t) = p_0$), tem-se a seguinte distribuição dos esforços nodais:

$$
\begin{aligned}
&Se \quad p(x,t) = p_0 \\
&p_1 = \int_0^L p_0.\psi_1 dx \qquad p_2 = \int_0^L p_0.\psi_2 dx \\
&p_1 = \int_0^L p_0.\left(1-\frac{x}{L}\right)dx \qquad p_2 = \int_0^L p_0.\left(\frac{x}{L}\right)dx \\
&p_1 = \frac{L}{2}.p_0 \qquad p_2 = \frac{L}{2}.p_0
\end{aligned}
\tag{102}
$$

Reescrevendo o trabalho das forças não conservativas no elemento finito de barra, agora na forma matricial, têm-se:

$$
\begin{aligned}
&\delta W_{nc} = \{\delta u\}^T \{p\} \\
&onde \quad \{p(t)\} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} \\
&onde \quad \{\delta u\} = \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{103}
$$

As equações de movimento do elemento finito de barra podem ser obtidas através do princípio de *Hamilton*.

O Princípio de *Hamilton*, afirma que a variação da energia cinética e potencial mais a variação do trabalho produzido pelas forças não conservativas durante o intervalo de tempo (t_1 e t_2) deve ser igual à zero, ou seja: (CLOUGH; PENZIEN, 1993).

$$
\int_{t_1}^{t_2} \delta(T-V)dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \tag{104}
$$

onde (T) representa a energia cinética total do sistema, (V) representa a energia potencial do sistema, (W_{nc}) representa o trabalho produzido pelas forças não conservativas que agem no sistema, incluindo o amortecimento e as forças externas arbitrárias, e finalmente (δ) representa uma variação durante o intervalo de tempo (t_1 e t_2).

A equação *Lagrangeana* de movimento que deriva diretamente do princípio de *Hamilton* é apresentada da seguinte forma: (Idem, 1993).

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i \tag{105}
$$

onde (Q_i) são as forças não conservativas incluindo o amortecimento e as forças externas arbitrárias aplicadas nas coordenadas generalizadas (q_i). Reescrevendo a equação *Lagrangeana* de movimento, permutando-se as coordenadas generalizadas pelos graus de liberdade, e as forças conservativas pelos esforços nodais, tem-se:

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial V}{\partial u_i} = p_i \tag{106}
$$

Aplicando-se: a energia cinética (T); a energia potencial de deformação (V); e os esforços nodais (p_i) na equação *Lagrangeana* de movimento obtêm-se:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial u_i}+\frac{\partial V}{\partial u_i}=p_i \\ &onde \quad T=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}m_{ij}\dot{u}_i.\dot{u}_j \\ &onde \quad V=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}k_{ij}u_iu_j \\ &\sum_{j=1}^{2}m_{ij}\ddot{u}_j+\sum_{j=1}^{2}k_{ij}u_j=p_i \end{aligned} \tag{107}$$

Reescrevendo na forma matricial, obtêm-se:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{u}\}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \{u\}}+\frac{\partial V}{\partial \{u\}}=\{p\} \\ &onde \quad T=\tfrac{1}{2}\{\dot{u}\}^T[m]\{\dot{u}\} \\ &onde \quad V=\tfrac{1}{2}\{u\}^T[k]\{u\} \\ &[m]\{\ddot{u}\}+[k]\{u\}=\{p\} \end{aligned} \tag{108}$$

3.3.2 Elemento finito de barra submetido à torção

No elemento finito de barra submetido à torção, os esforços de torção, ou seja, os torques são aplicados na direção do eixo longitudinal da barra. A Figura 41 mostra um elemento finito de barra submetido à torção.

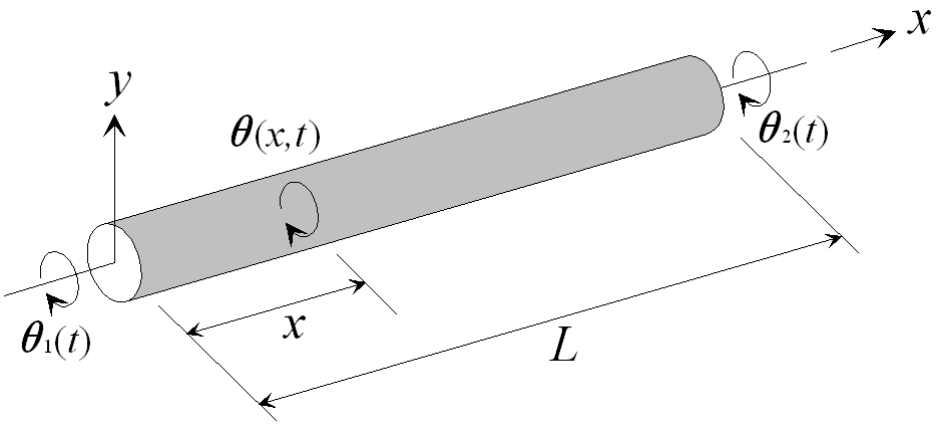


Figura 41 – Elemento finito de barra submetido à torção.
Fonte: Autor.

Na Figura 41, ($\theta(x,t)$), (θ_1) e (θ_2), representam respectivamente: o campo de deslocamento de rotação da barra; a rotação do nó 1; e a rotação do nó 2. Neste elemento, há dois graus de liberdade de movimento, sendo um em cada nó. O grau de liberdade de movimento refere-se à rotação ao longo do eixo longitudinal da barra. Os torques provocam as tensões cisalhantes na barra.

Utilizando-se a aproximação dos deslocamentos no elemento através das funções de forma, ou funções de interpolação, têm-se:

$$\theta(x,t) = \sum_{i=1}^{2} \psi_i(x).\theta_i(t)$$
$$\theta(x,t) = \psi_1(x).\theta_1(t) + \psi_2(x).\theta_2(t) \tag{109}$$

onde ($\theta_i(x)$), representa as funções de forma, ou funções de interpolação, que são aplicadas em cada nó do elemento, ou seja, ($\theta_1(x)$) e ($\theta_2(x)$).

Deve-se agora selecionar uma função polinomial completa e contínua que represente o campo de deslocamento de rotação ($\theta(x,t)$), e que satisfaça as condições de contorno essenciais. É escolhida então uma função linear, pois existem duas condições de contorno essenciais. (CRAIG, 1981).

$$\theta(x,t) = c_1 + c_2.\left(\frac{x}{L}\right) \tag{110}$$

Condições de contorno essenciais:

$$\theta(0,t) = \theta_1(t) = c_1$$
$$\theta(L,t) = \theta_2(t) = c_1 + c_2 \tag{111}$$

Então:

$$c_1 = \theta_1 \qquad e \qquad c_2 = \theta_2 - \theta_1$$
$$\theta(x,t) = \theta_1 + (\theta_2 - \theta_1).\left(\frac{x}{L}\right)$$
$$\theta(x,t) = \left(1 - \frac{x}{L}\right).\theta_1(t) + \left(\frac{x}{L}\right).\theta_2(t) \tag{112}$$
$$\theta(x,t) = \psi_1(x).\theta_1(t) + \psi_2(x).\theta_2(t)$$

Satisfazendo-se as condições de contorno essenciais:

$$\psi_1(0) = 1 \qquad e \qquad \psi_1(L) = 0$$
$$\psi_2(0) = 0 \qquad e \qquad \psi_2(L) = 1 \tag{113}$$

As funções de forma são:

$$\psi_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \qquad e \qquad \psi_2(x) = \left(\frac{x}{L}\right) \tag{114}$$

A energia cinética do elemento finito de barra submetida à torção pode ser representada por:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\theta}(x,t) = \sum_{i=1}^{2} \psi_i(x).\dot{\theta}_i(t) \\
&T = \tfrac{1}{2}\int_V \rho.(r.\dot{\theta})^2\, dV \\
&T = \tfrac{1}{2}\int_0^L \left(\int_A \rho.r^2 dA\right).(\dot{\theta})^2\, dx \\
&T = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho.I_P.(\dot{\theta})^2\, dx \quad onde \quad I_P = \int_A \rho.r^2 dA \quad momento\ de\ inércia\ de\ massa\ polar \\
&T = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho.I_P.[\sum_{i=1}^{2} \psi_i(x).\dot{\theta}_i(t)].[\sum_{j=1}^{2} \psi_j(x).\dot{\theta}_j(t)]dx \\
&T = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}[\int_0^L \rho.I_P.\psi_i(x).\psi_j(x)dx].\dot{\theta}_i(t).\dot{\theta}_j(t) \\
&T = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} m_{ij}\dot{\theta}_i\dot{\theta}_j
\end{aligned}
\tag{115}
$$

Onde (r) e (I_P) representam o raio polar da secção transversal da barra, e o momento de inércia de massa polar, respectivamente. A matriz de massa do elemento finito de barra submetido à torção (m_{ij}), é obtida utilizando-se as funções de forma da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&m_{ij} = \int_0^L \rho.I_P.\psi_i.\psi_j dx \\
&m_{12} = \int_0^L \rho.I_P.\psi_1.\psi_2 dx \\
&m_{12} = \int_0^L \rho.I_P.\left(1-\frac{x}{L}\right).\left(\frac{x}{L}\right)dx \\
&m_{12} = \frac{\rho.I_P.L}{6} \\
&[m] = \left(\frac{\rho.I_P.L}{6}\right).\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{116}
$$

Reescrevendo a energia cinética do elemento finito de barra, agora na forma matricial, têm-se:

$$
\begin{aligned}
&T = \tfrac{1}{2}\{\dot{\theta}\}^T[m]\{\dot{\theta}\} \\
&onde \quad \{\theta(t)\} = \begin{Bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{Bmatrix} \\
&onde \quad \{\dot{\theta}(t)\} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{Bmatrix} \\
&onde \quad [m] = \left(\frac{\rho.I_P.L}{6}\right).\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{117}
$$

A energia potencial de deformação do elemento finito de barra submetido à torção pode ser representada da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&V = \tfrac{1}{2}\int_V \tau.\gamma dV \\
&onde \quad \gamma = r.\frac{\partial\theta}{\partial x} \quad e \quad \tau = G.\gamma \quad então \quad \tau = G.r.\frac{\partial\theta}{\partial x} \\
&V = \tfrac{1}{2}\int_0^L G.[\int_A r^2 dA].(\theta')^2 dx \\
&V = \tfrac{1}{2}\int_0^L G.J.(\theta')^2 dx \quad onde \quad J = \int_A r^2 dA \quad momento\,de\,inércia\,\,de\,área\,\,polar \\
&V = \tfrac{1}{2}\int_0^L G.J.[\sum_{i=1}^{2}\psi_i'(x).\theta_i(t)].[\sum_{j=1}^{2}\psi_j'(x).\theta_j(t)]dx \\
&V = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}[\int_0^L G.J.\psi_i'(x).\psi_j'(x)dx].\theta_i(t).\theta_j(t) \\
&V = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}k_{ij}\theta_i\theta_j
\end{aligned}
\tag{118}
$$

Onde (τ), (γ), (G) e (J) representam respectivamente: a tensão cisalhante; a distorção angular relativa ao cisalhamento; o módulo de cisalhamento; e o momento de inércia de área polar. A distorção angular pode ser representada pela variação do campo de deslocamentos associado à torção, em relação à coordenada (x), ou seja, ($\gamma = r.\partial\theta/\partial x$). A tensão cisalhante pode ser representada através da Lei de *Hooke*, ou seja, ($\tau = G.\gamma$). A matriz de rigidez do elemento finito de barra submetido à torção (k_{ij}), é obtida utilizando-se as funções de forma da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&k_{ij} = \int_0^L G.J.\psi_i'.\psi_j' dx \\
&k_{12} = \int_0^L G.J.\psi_1'.\psi_2' dx \\
&k_{12} = \int_0^L G.J.\left(-\frac{1}{L}\right).\left(\frac{1}{L}\right)dx \\
&k_{12} = -\frac{G.J}{L} \\
&[k] = \left(\frac{G.J}{L}\right).\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{119}
$$

Reescrevendo a energia potencial de deformação do elemento finito de barra submetido à torção, agora na forma matricial, têm-se:

$$
\begin{aligned}
&V = \tfrac{1}{2}\{\theta\}^T[k]\{\theta\} \\
&onde \quad \{\theta(t)\} = \begin{Bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{Bmatrix} \\
&onde \quad [k] = \left(\frac{G.J}{L}\right).\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{120}
$$

Esta matriz é válida para secções transversais circulares, podendo ser empregada em outras secções transversais como aproximação.

O trabalho produzido pelas forças não conservativas no elemento finito de barra submetido à torção pode ser escrito da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
\delta W_{nc} &= \int_0^L t(x,t).\delta\theta(x,t)dx \\
\delta W_{nc} &= \int_0^L t(x,t).\sum_{i=1}^{2}\psi_i(x).\delta\theta_i(t)dx \\
\delta W_{nc} &= \sum_{i=1}^{2}[\int_0^L t(x,t).\psi_i(x)dx].\delta\theta_i(t) \\
\delta W_{nc} &= \sum_{i=1}^{2} p_i(t).\delta\theta_i(t) \\
\delta W_{nc} &= \{\delta\theta\}^T\{p\}
\end{aligned}
\tag{121}
$$

Os esforços externos aplicados nos nós do elemento finito de barra submetido à torção, os esforços nodais, são obtidos da seguinte forma:

$$
p_i = \int_0^L t(x,t).\psi_i dx \tag{122}
$$

Aplicando-se: a energia cinética (*T*); a energia potencial de deformação (*V*); e os esforços nodais (p_i) na equação *Lagrangeana* de movimento obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial\theta_i}+\frac{\partial V}{\partial\theta_i}=p_i \\
&onde \quad T=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}m_{ij}\dot{\theta}_i.\dot{\theta}_j \\
&onde \quad V=\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}k_{ij}\theta_i\theta_j \\
&\sum_{j=1}^{2}m_{ij}\ddot{\theta}_j+\sum_{j=1}^{2}k_{ij}\theta_j=p_i
\end{aligned}
\tag{123}
$$

Reescrevendo na forma matricial, obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\{\dot{\theta}\}}\right)-\frac{\partial T}{\partial\{\theta\}}+\frac{\partial V}{\partial\{\theta\}}=\{p\} \\
&onde \quad T=\tfrac{1}{2}\{\dot{\theta}\}^T[m]\{\dot{\theta}\} \\
&onde \quad V=\tfrac{1}{2}\{\theta\}^T[k]\{\theta\} \\
&[m]\{\ddot{\theta}\}+[k]\{\theta\}=\{p\}
\end{aligned}
\tag{124}
$$

3.3.3 Teoria de viga de *Euler-Bernoulli*

A teoria de viga de *Euler-Bernoulli*, também conhecida como teoria clássica de viga, assume as seguintes hipóteses: (CRAIG, 1981).

1- A existência da linha neutra (eixo *x*), onde a viga não sofre tração nem compressão.

2- Seções planas e perpendiculares à linha neutra permanecem planas e perpendiculares após a deformação, ou seja, as deformações devidas ao cisalhamento são negligenciadas.

3- Material elástico linear e homogêneo.

4- As tensões (σ_y) e (σ_z) são desprezíveis comparadas à tensão axial (σ_x).

5- O plano (xy) é um plano principal.

A Figura 42 apresenta uma viga bi-apoiada submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído.

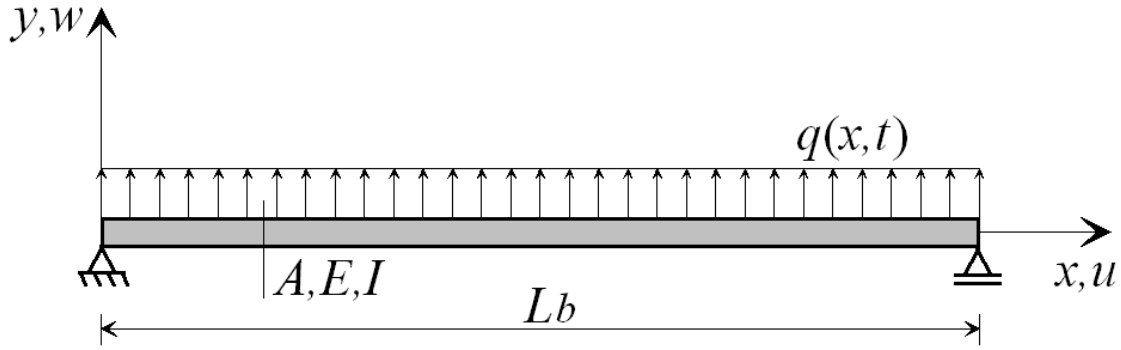


Figura 42 – Viga submetida ao carregamento transversal uniformemente distribuído.
Fonte: Adaptado de (BEGHETTO, 2006).

Onde (L_b), (A), (E), (I) e ($q(x,t)$) representam respectivamente: o comprimento da viga; a área de secção transversal; o módulo de elasticidade do material, ou módulo de *Young*; o momento de inércia da secção transversal; e o carregamento transversal uniformemente distribuído.

O carregamento transversal gera um momento fletor, o qual produz tensões axiais de tração e de compressão, conforme mostra a Figura 43.

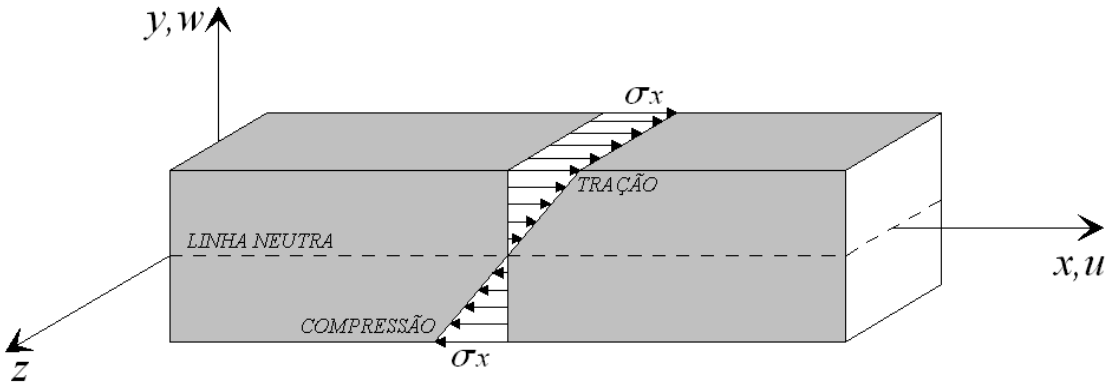


Figura 43 – Distribuição das tensões axiais na secção da viga.
Fonte: Adaptado de (BEGHETTO, 2006).

A configuração deformada da viga flexionada é apresentada na Figura 44.

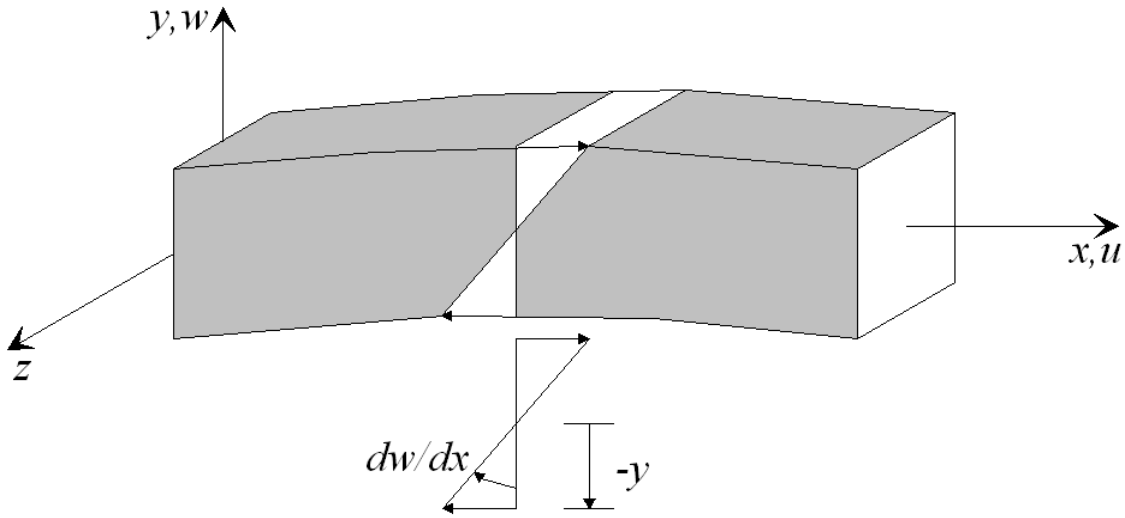


Figura 44 – Configuração deformada da viga flexionada.
Fonte: Adaptado de (BEGHETTO, 2006).

A deformação da viga sob a condição de carregamento é descrita por dois campos de deslocamentos:

$$u(x,y) \qquad e \qquad w(x,y) \tag{125}$$

onde ($u(x,y)$) e ($w(x,y)$) representam os campos de deslocamentos axial e transversal, respectivamente. Estes são apresentados através das seguintes relações:

$$u(x,y) = -y.\frac{\partial w(x)}{\partial x} = -y.\frac{dw}{dx} \qquad e \qquad w(x,y) = w(x) \tag{126}$$

onde (y) representa a altura em relação à linha neutra, e (dw/dx) representa o ângulo de rotação. Através da relação entre deslocamento e deformação, obtêm-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -y.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -y.\frac{d^2 w}{dx^2} \tag{127}$$

Agora de acordo com as relações entre tensão e deformação, (Lei de *Hooke*), obtêm-se:

$$\sigma_x = E.\varepsilon_x = -E.y.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -E.y.\frac{d^2 w}{dx^2} \tag{128}$$

onde (ε_x) e (σ_x) representam a deformação relativa axial, e a tensão axial em relação ao eixo (x), respectivamente.

Assim, a energia potencial total da viga é dada por:

$$\Pi = \tfrac{1}{2}\int_0^{L_b} E.I.\left(\frac{d^2 w}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^{L_b} q.w dx \tag{129}$$

onde a primeira parcela representa a energia interna de deformação, e a segunda parcela representa o trabalho produzido pelas forças externas.

3.3.3.1 Elemento finito de viga

Os elementos finitos de viga também são originados pela subdivisão da viga em pequenos membros os quais possuem as mesmas propriedades materiais e geométricas pertencentes à viga original. Nos elementos finitos aqui utilizados são admitidas as hipóteses da teoria de viga de *Euler-Bernoulli*. A Figura 45 apresenta um elemento finito de viga e seus respectivos graus de liberdade:

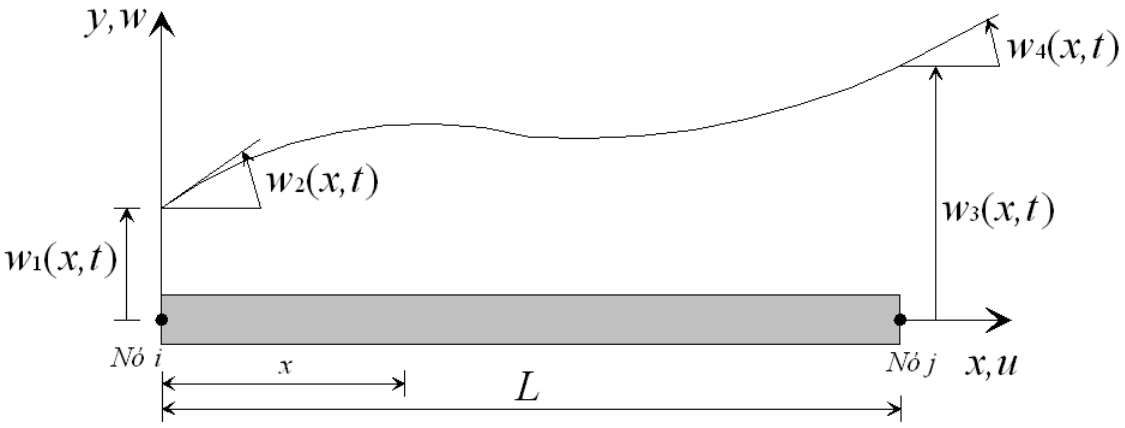


Figura 45 – Elemento finito de viga e seus graus de liberdade.
Fonte: Adaptado de (BEGHETTO, 2006).

onde ($w_1(x,t)$) e ($w_2(x,t)$) representam o deslocamento transversal, e a rotação do (*Nó i*), respectivamente. Analogamente, ($w_3(x,t)$) e ($w_4(x,t)$) representam o deslocamento transversal, e a rotação do (*Nó j*), respectivamente. O comprimento do elemento finito é representado por (L). Desta forma, o elemento finito de viga possui quatro graus de liberdade.

A equação diferencial de quarta ordem que governa o problema de flexão de vigas sujeita a um carregamento transversal uniformemente distribuído, é apresentada da seguinte maneira: (REDDY, 1984).

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(E.I.\frac{d^2w}{dx^2}\right) - q(x) = 0 \qquad (0 < x < L_b) \tag{130}$$

Deve-se agora selecionar uma função polinomial completa e contínua que represente o campo de deslocamento (w), e que satisfaça as condições de contorno essenciais. É escolhida então uma função cúbica, pois existem quatro condições de contorno essenciais. (CRAIG, 1981), (CHOPRA, 1995), (BATHE, 1996).

$$w(x,t) = c_1 + c_2.\left(\frac{x}{L}\right) + c_3.\left(\frac{x}{L}\right)^2 + c_4.\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{131}$$

As condições de contorno essenciais:

$$
\begin{aligned}
w_1(x,t) &= w(0,t) = c_1 \\
w_2(x,t) &= w'(0,t) = c_2 / L \\
w_3(x,t) &= w(L,t) = c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \\
w_4(x,t) &= w'(L,t) = c_2 / L + 2.c_3 / L + 3.c_4 / L
\end{aligned}
\tag{132}
$$

onde ($w' = dw/dx$) representa a primeira derivada em relação a (x), que corresponde a rotação.

Encontrando-se os valores de (c_i para $_{i=1,2,...,4}$) e substituindo na Equação (131), tem-se:

$$
w(x,t) = \sum_{i=1}^{4} H_i(x).w_i(x,t) \tag{133}
$$

onde ($H_i(x)$) são as funções de forma, funções coordenadas, ou funções de interpolação para o elemento finito de viga e são representadas respectivamente por:

$$
\begin{aligned}
H_1(x) &= 1 - 3.\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2.\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
H_2(x) &= L.\left(\frac{x}{L}\right) - 2.L.\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L.\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
H_3(x) &= 3.\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2.\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
H_4(x) &= -L.\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L.\left(\frac{x}{L}\right)^3
\end{aligned}
\tag{134}
$$

As funções ($H_i(x)$) são chamadas de funções polinomiais cúbicas de *Hermite*, que satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$
\begin{array}{llll}
H_1(0) = 1, & H_1'(0) = 0 & H_1(L) = 0 & H_1'(L) = 0 \\
H_2'(0) = 1, & H_2(0) = 0 & H_2(L) = 0 & H_2'(L) = 0 \\
H_3(L) = 1, & H_3(0) = 0 & H_3'(0) = 0 & H_3'(L) = 0 \\
H_4'(L) = 1, & H_4(0) = 0 & H_4'(0) = 0 & H_4(L) = 0
\end{array}
\tag{135}
$$

As representações gráficas destas funções são apresentadas na Figura 46.

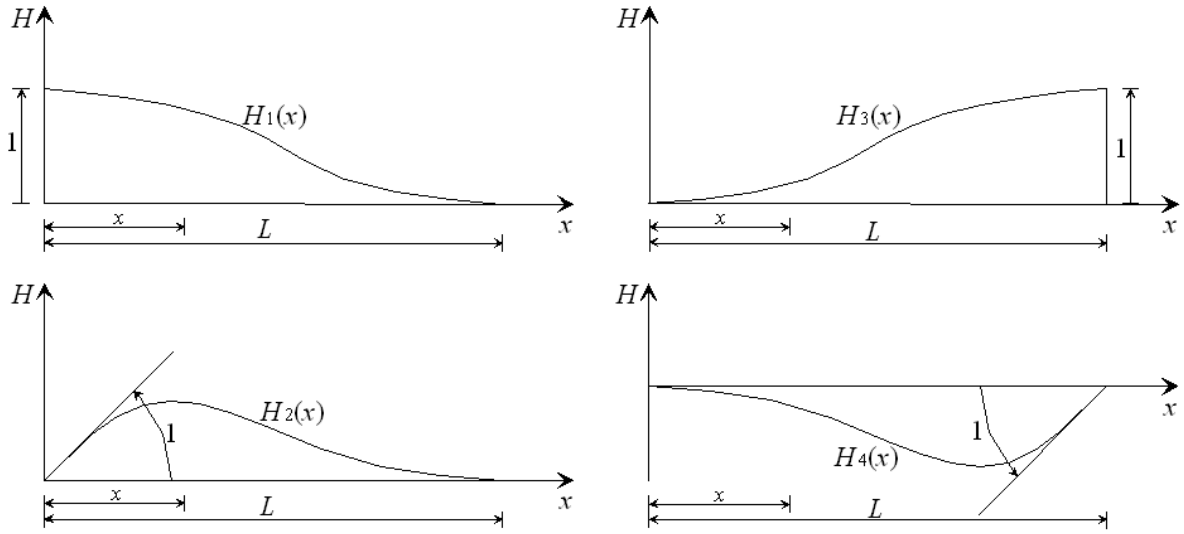


Figura 46 – Representação das funções cúbicas de *Hermite*.
Fonte: Adaptado de (BEGHETTO, 2006).

A energia cinética do elemento finito de viga pode ser representada por:

$$
\begin{aligned}
&T = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho.A.(\dot{w})^2 dx \\
&T = \tfrac{1}{2}\int_0^L \rho.A.\left[\sum_{i=1}^{4} H_i(x).\dot{w}_i(x,t)\right]\left[\sum_{j=1}^{4} H_j(x).\dot{w}_j(x,t)\right]dx \\
&T = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left[\int_0^L \rho.A.H_i(x).H_j(x)dx\right]\dot{w}_i(x,t).\dot{w}_j(x,t) \\
&T = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} m_{ij}\dot{w}_i(x,t)\dot{w}_j(x,t) \\
&T = \tfrac{1}{2}\{\dot{w}\}^T[m]\{\dot{w}\}
\end{aligned}
\tag{136}
$$

onde (T), (ρ), (A) e ($\cdot$) representam respectivamente: a energia cinética do elemento finito de viga; a massa específica do material; a área de seção transversal; e a primeira derivada com relação ao tempo. A matriz de massa do elemento finito de viga [m] pode ser obtida utilizando-se as funções de forma da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&m_{ij} = \int_0^L \rho.A.H_i.H_j.dx \\
&[m] = \frac{\rho.A.L}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22.L & 54 & -13.L \\ 22.L & 4.L^2 & 13.L & -3.L^2 \\ 54 & 13.L & 156 & -22.L \\ -13.L & -3.L^2 & -22.L & 4.L^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{137}
$$

A energia potencial de deformação do elemento finito de viga pode ser representada da seguinte maneira:

$$
\begin{aligned}
&V = \tfrac{1}{2}\int_\Omega \sigma_x.\varepsilon_x d\Omega \\
&V = \tfrac{1}{2}\int_\Omega E.y^2.(w'')^2 d\Omega \\
&V = \tfrac{1}{2}\int_0^L\int_A E.y^2.(w'')^2 dxdydz \\
&V = \tfrac{1}{2}\int_0^L\int_A E.y^2\left[\sum_{i=1}^{4} H_i''(x).w_i(x,t)\right].\left[\sum_{j=1}^{4} H_j''(x).w_j(x,t)\right]dxdA \\
&V = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left[\int_0^L\int_A E.y^2 dA H_i''(x).H_j''(x)dx\right]w_i(x,t).w_j(x,t) \\
&\text{onde}\quad I = \int_A y^2 dA \quad \text{momento de inércia de área} \\
&V = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left[\int_0^L E.I.H_i''.H_j''dx\right]w_i(x,t).w_j(x,t) \\
&V = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} k_{ij}w_i w_j \\
&V = \tfrac{1}{2}\{w\}^T[k]\{w\}
\end{aligned}
\tag{138}
$$

onde ($w'' = d^2w/dx^2$) representa a segunda derivada em relação a (x), (V) representa a energia potencial de deformação do elemento finito de viga, (Ω) representa o volume de integração do

sólido. A matriz de rigidez do elemento finito de viga [*k*] pode ser obtida utilizando-se as funções de forma da seguinte maneira:

$$k_{ij} = \int_0^L E.I.H_i''.H_j'' dx$$

$$[k] = \frac{E.I}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6.L & -12 & 6.L \\ 6.L & 4.L^2 & -6.L & 2.L^2 \\ -12 & -6.L & 12 & -6.L \\ 6.L & 2.L^2 & -6.L & 4.L^2 \end{bmatrix} \tag{139}$$

Os esforços externos aplicados ao elemento finito de viga podem ser escritos da seguinte forma:

$$\{p_i(t)\} = \int_0^L q(x).H_i dx \tag{140}$$

Para um carregamento transversal uniformemente distribuído ($q(x)$), tem-se a seguinte distribuição nodal dos esforços:

$$\{p(t)\}^T = \left\{ \frac{q(x).L}{2} \quad \frac{q(x).L^2}{12} \quad \frac{q(x).L}{2} \quad -\frac{q(x).L^2}{12} \right\} \tag{141}$$

Aplicando-se: a energia cinética (T); a energia potencial de deformação (V); e os esforços nodais (p_i) na equação *Lagrangeana* de movimento obtêm-se:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{w}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial w_i} + \frac{\partial V}{\partial w_i} = p_i \\ &onde \quad T = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} m_{ij}\dot{w}_i.\dot{w}_j \\ &onde \quad V = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} k_{ij}w_i w_j \\ &\sum_{j=1}^{4} m_{ij}\ddot{w}_j + \sum_{j=1}^{4} k_{ij}w_j = p_i \end{aligned} \tag{142}$$

Reescrevendo na forma matricial, obtêm-se:

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \{\dot{w}\}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \{w\}} + \frac{\partial V}{\partial \{w\}} = \{p\} \\ &onde \quad T = \tfrac{1}{2}\{\dot{w}\}^T[m]\{\dot{w}\} \\ &onde \quad V = \tfrac{1}{2}\{w\}^T[k]\{w\} \\ &[m]\{\ddot{w}\} + [k]\{w\} = \{p\} \end{aligned} \tag{143}$$

Na equação de movimento, a primeira parcela representa as forças inerciais, e a segunda parcela, as forças elásticas. Os vetores de aceleração e de deslocamento são dados respectivamente através da seguinte relação:

$$\{\ddot{w}\}^T = \{\ddot{w}_1 \quad \ddot{w}_2 \quad \ddot{w}_3 \quad \ddot{w}_4\} \qquad e \qquad \{w\}^T = \{w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad w_4\} \tag{144}$$

3.3.4 Elemento finito de pórtico tridimensional

O elemento finito de pórtico tridimensional é gerado, pode-se dizer, pela associação dos elementos finitos: de barra submetida aos esforços axiais; de barra submetida aos esforços de torção; e de viga submetida aos esforços de flexão. No elemento finito de pórtico tridimensional, considera-se a flexão em duas direções ortogonais entre si, ou seja, em relação aos planos (*xy*) e (*xz*). Desta forma, têm-se seis graus de liberdade por nó, sendo três translações ortogonais entre si (*u*, *v*, *w*), e três rotações ortogonais entre si (ϕ, θ, ψ), totalizando no elemento doze graus de liberdade. A Figura 47 mostra este elemento finito.

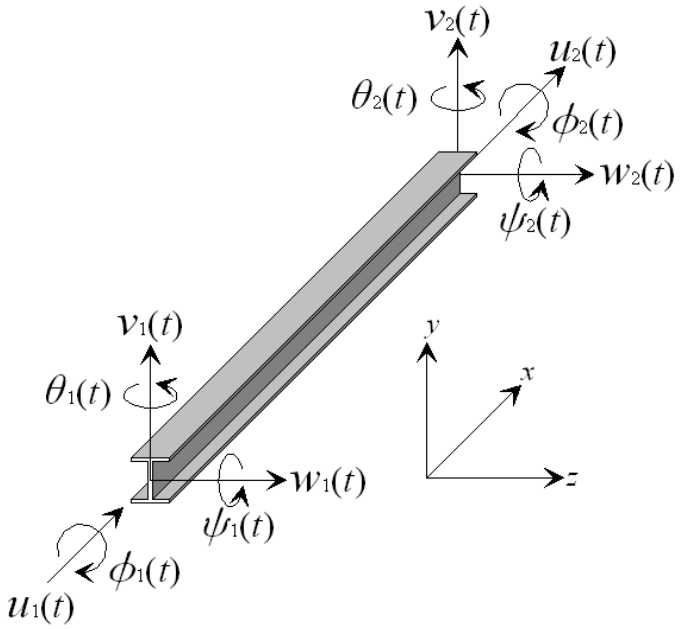


Figura 47 – Elemento finito de pórtico tridimensional e seus graus de liberdade.
Fonte: Autor.

As equações de movimento do elemento finito podem ser escritas na forma matricial:

$$[m]\{\ddot{u}\}+[k]\{u\}=\{p\} \tag{145}$$

A matriz de massa consistente [*m*] pode ser escrita da seguinte forma: (CRAIG, 1981).

$$[m]=\frac{\rho.A.L}{420}\begin{bmatrix}
140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 156 & 0 & 0 & 0 & 22.L & 0 & 54 & 0 & 0 & 0 & -13.L \\
0 & 0 & 156 & 0 & -22.L & 0 & 0 & 0 & 54 & 0 & 13.L & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{140.I_P}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{70.I_P}{A} & 0 & 0 \\
0 & 0 & -22.L & 0 & 4.L^2 & 0 & 0 & 0 & -13.L & 0 & -3.L^2 & 0 \\
0 & 22.L & 0 & 0 & 0 & 4.L^2 & 0 & 13.L & 0 & 0 & 0 & -3.L^2 \\
70 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 54 & 0 & 0 & 0 & 13.L & 0 & 156 & 0 & 0 & 0 & -22.L \\
0 & 0 & 54 & 0 & -13.L & 0 & 0 & 0 & 156 & 0 & 22.L & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{70.I_P}{A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{140.I_P}{A} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 13.L & 0 & -3.L^2 & 0 & 0 & 0 & 22.L & 0 & 4.L^2 & 0 \\
0 & -13.L & 0 & 0 & 0 & -3.L^2 & 0 & -22.L & 0 & 0 & 0 & 4.L^2
\end{bmatrix} \tag{146}$$

A matriz de rigidez [k] pode ser escrita da seguinte forma: (CRAIG, 1981).

$$[k]=\begin{bmatrix}
\frac{E.A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-E.A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{12.E.I_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.I_Z}{L^2} & 0 & \frac{-12.E.I_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.I_Z}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{12.E.I_Y}{L^3} & 0 & \frac{-6.E.I_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-12.E.I_Y}{L^3} & 0 & \frac{-6.E.I_Y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{G.J}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-G.J}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-6.E.I_Y}{L^2} & 0 & \frac{4.E.I_Y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.I_Y}{L^2} & 0 & \frac{2.E.I_Y}{L} & 0 \\
0 & \frac{6.E.I_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4.E.I_Z}{L} & 0 & \frac{-6.E.I_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2.E.I_Z}{L} \\
\frac{-E.A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E.A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{-12.E.I_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6.E.I_Z}{L^2} & 0 & \frac{12.E.I_Z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{-6.E.I_Z}{L^2} \\
0 & 0 & \frac{-12.E.I_Y}{L^3} & 0 & \frac{6.E.I_Y}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{12.E.I_Y}{L^3} & 0 & \frac{6.E.I_Y}{L^2} & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{-G.J}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{G.J}{L} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{-6.E.I_Y}{L^2} & 0 & \frac{2.E.I_Y}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6.E.I_Y}{L^2} & 0 & \frac{4.E.I_Y}{L} & 0 \\
0 & \frac{6.E.I_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2.E.I_Z}{L} & 0 & \frac{-6.E.I_Z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4.E.I_Z}{L}
\end{bmatrix} \quad (147)$$

Os vetores $\{\ddot{u}\}$, $\{u\}$ e $\{p\}$ podem ser escritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\{\ddot{u}\}^T &= \{\ddot{u}_1 \quad \ddot{v}_1 \quad \ddot{w}_1 \quad \ddot{\phi}_1 \quad \ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\psi}_1 \quad \ddot{u}_2 \quad \ddot{v}_2 \quad \ddot{w}_2 \quad \ddot{\phi}_2 \quad \ddot{\theta}_2 \quad \ddot{\psi}_2\} \\
\{u\}^T &= \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \phi_1 \quad \theta_1 \quad \psi_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad \phi_2 \quad \theta_2 \quad \psi_2\} \\
\{p\}^T &= \{p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6 \quad p_7 \quad p_8 \quad p_9 \quad p_{10} \quad p_{11} \quad p_{12}\}
\end{aligned} \quad (148)$$

No vetor de forças externas $\{p\}$, as forças são aplicadas nos respectivos graus de liberdade de movimento de (1 a 12).

3.4 Modelo da ponte ferroviária

A ponte ferroviária da empresa Engefer é um projeto do Engenheiro Fernando Uchoa Cavalcanti, publicado na Revista ESTRUTURA 93, em Dezembro de 1980. (THOMAZ, 2008). Esta ponte é destinada ao tráfego de composições de bitola larga (1,60 m). Trata-se de uma estrutura em concreto armado, de vão único, formada por duas vigas simétricas, paralelas, e bi-apoiadas. Nos consoles dos apoios, estão presentes os aparelhos de apoio, sobre os quais são apoiadas as vigas. Estas são travadas em ambos os apoios por placas pré-moldadas de concreto, e no centro do vão, por uma transversina. Sobre as vigas é apoiado o tabuleiro, e sobre este, fica o lastro, compactado e confinado em uma plataforma. Os dormentes ficam confinados na superfície do lastro, e os trilhos são apoiados e fixados nos dormentes. As vigas são constituídas de concreto armado protendido, sendo a protensão

realizada através de cabos com cordoalhas. Ressalta-se que este projeto de ponte ferroviária está sendo utilizado aqui somente para fins acadêmicos e ilustrativos.

A Figura 48 representa a secção transversal da ponte ferroviária e suas respectivas dimensões. Na Figura 49 é representada a planta da ponte ferroviária e suas dimensões. O corte AA é representado pela Figura 50. A vista longitudinal é representada pela Figura 51. As Figuras 52 e 53 representam respectivamente as secções transversais de 0 a 7, e de 8 a 12, e seus respectivos posicionamentos dos cabos de protensão, representados por (C1 a C8).

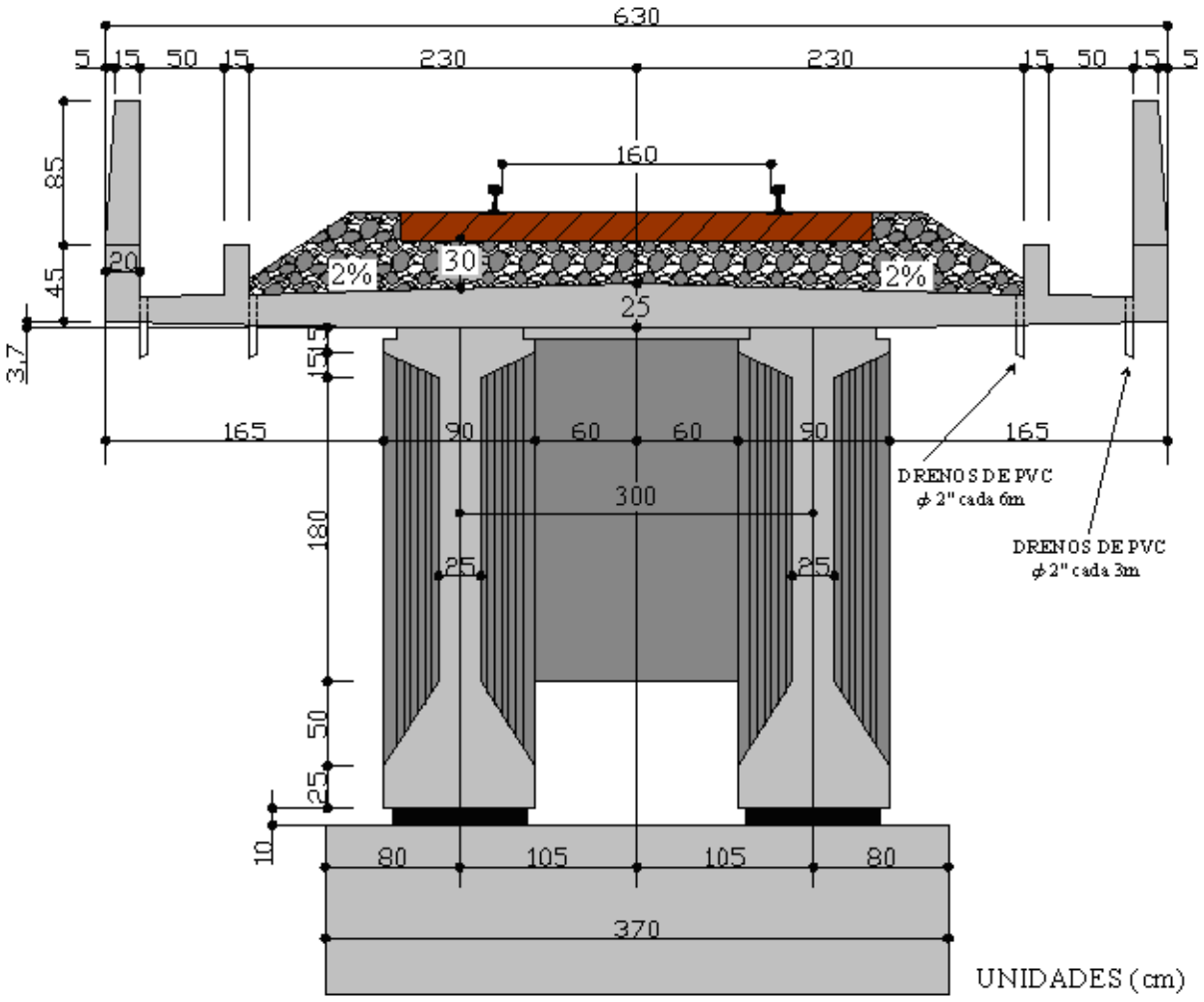


Figura 48 – Secção transversal da ponte ferroviária e suas dimensões.
Fonte: Autor.

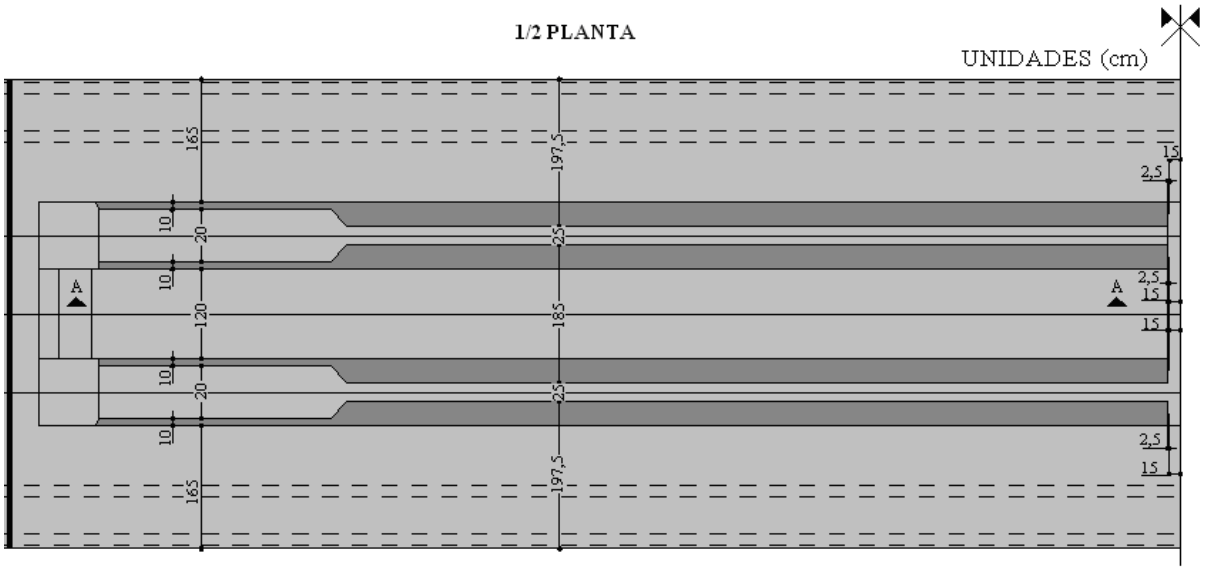


Figura 49 – Planta da ponte ferroviária e suas dimensões.
Fonte: Autor.

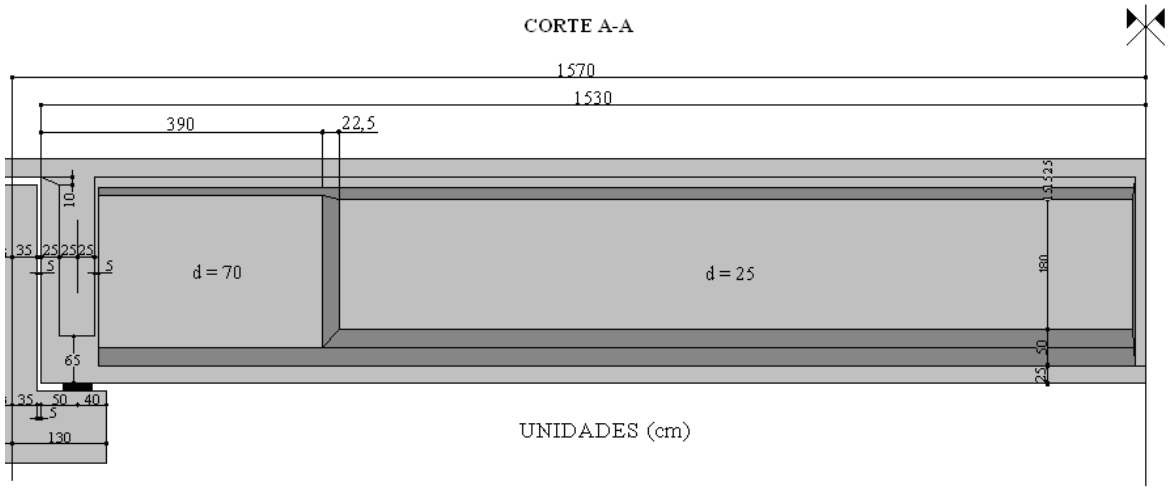


Figura 50 – Corte AA da ponte ferroviária e suas dimensões.
Fonte: Autor.

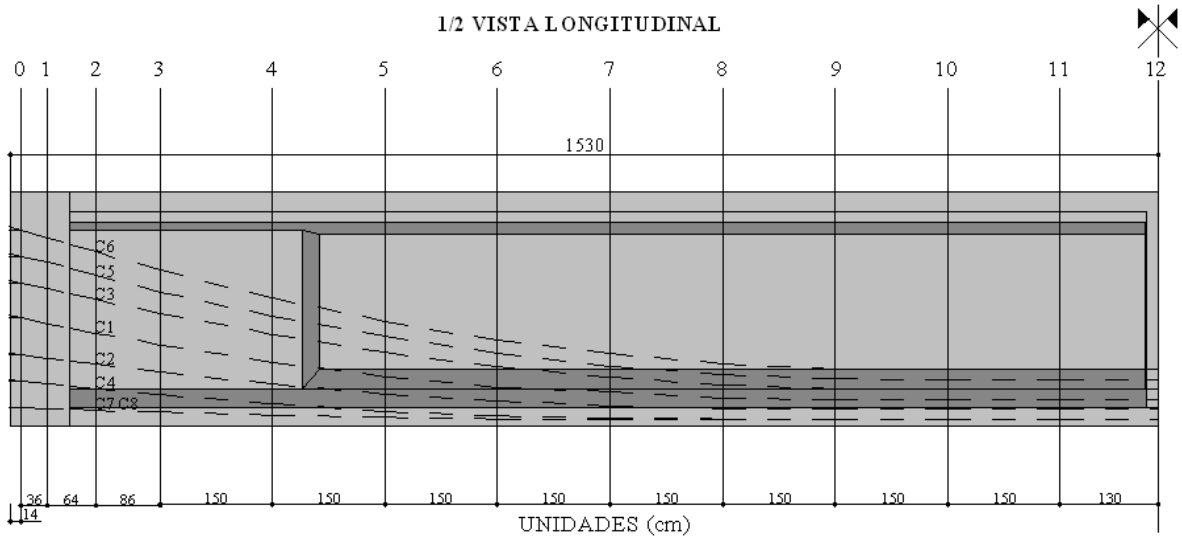


Figura 51 – Vista longitudinal da ponte ferroviária e suas dimensões.
Fonte: Autor.

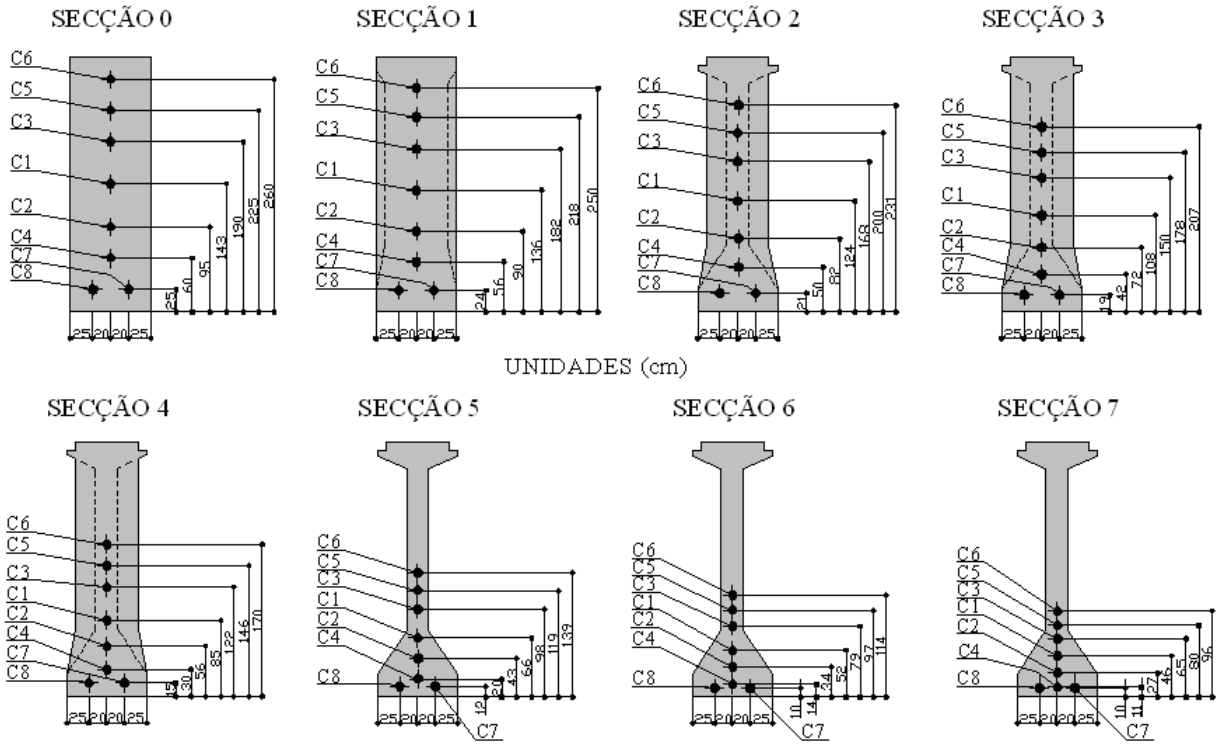


Figura 52 – Secções 0-7 da ponte ferroviária e suas dimensões.
Fonte: Autor.

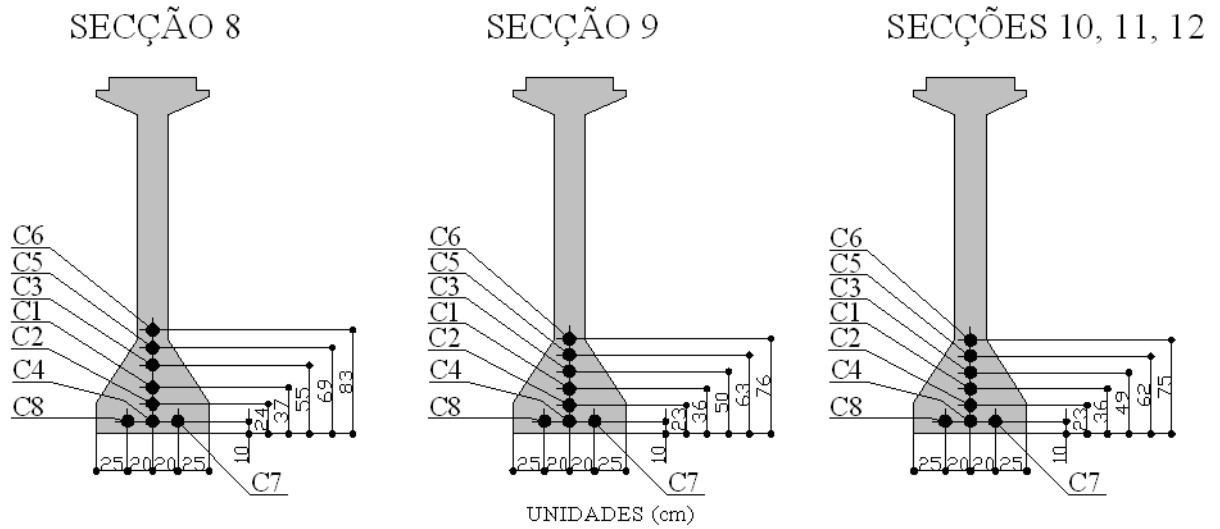


Figura 53 – Secções 8-12 da ponte ferroviária e suas dimensões.
Fonte: Autor.

3.4.1 Modelo da ponte ferroviária em elementos finitos

A rigidez da estrutura da ponte ferroviária é predominantemente formada por duas vigas simétricas, paralelas, e bi-apoiadas, as quais serão representadas no modelo matemático numérico computacional, por elementos finitos de pórtico tridimensional. As vigas possuem variações em suas secções transversais ao longo de seus comprimentos, como mostram as figuras anteriores. Desta forma, devem-se considerar estas variações relacionadas às

propriedades geométricas das seções transversais tais como as áreas e os momentos de inércia de área, bem como a massa unitária por unidade de comprimento. O lastro, o tabuleiro, e a transversina central não estão sendo modelados neste trabalho, bem como, não está se considerando os efeitos da protensão nos cabos.

A Figura 54 mostra o respectivo modelo da ponte ferroviária em elementos finitos de pórtico tridimensional. Neste modelo são consideradas duas vigas simétricas, paralelas e bi-apoiadas, representadas por 30 elementos finitos de pórtico tridimensional em cada viga. O comprimento da cada elemento finito é de (1 m). Os elementos finitos próximos dos apoios, possuem secções transversais referentes às secções (2 a 4), e os demais elementos, ou seja, os centrais, possuem secções transversais referentes às secções (5 a 11), como mostram as figuras anteriores.

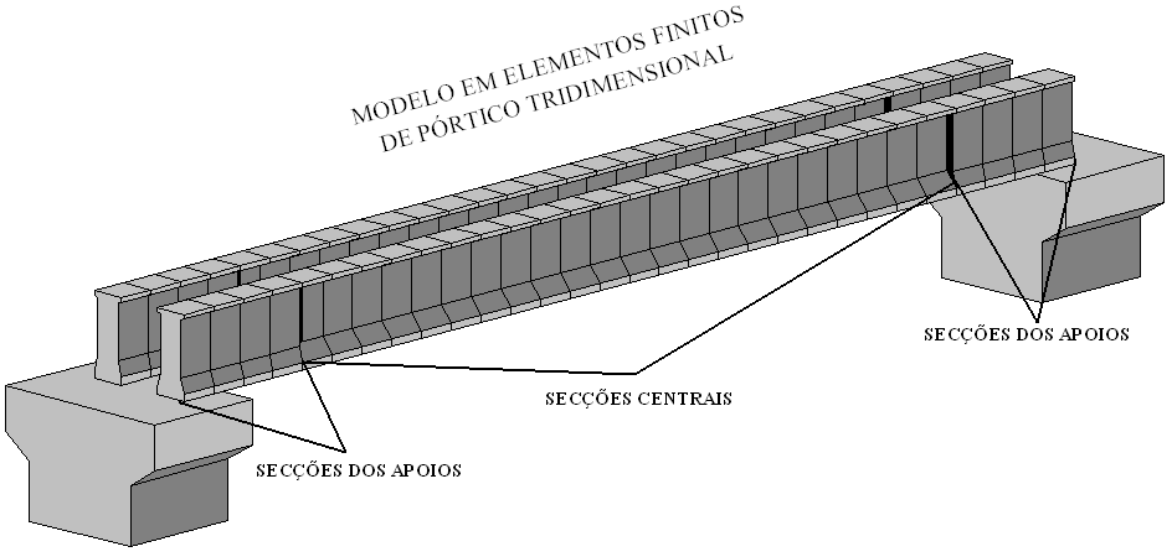


Figura 54 – Modelo em elementos finitos de pórtico tridimensional.
Fonte: Autor.

A Figura 55 mostra as secções transversais da viga e suas respectivas dimensões.

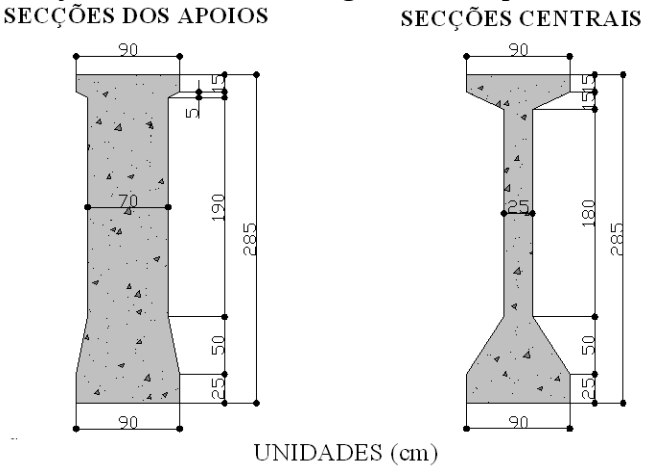


Figura 55 – Secções transversais da viga e suas dimensões.
Fonte: Autor.

Para cada viga subdividida igualmente em (30) elementos finitos, respeitando a conectividade nodal dos elementos, e as condições de contorno referentes aos apoios, tem-se:

$$[M_B]=\sum_{e=1}^{30}[m_e]; \quad [K_B]=\sum_{e=1}^{30}[k_e]; \quad \{F_B(t)\}=\sum_{e=1}^{30}\{p_e(t)\}; \quad \{U_B\}=\sum_{e=1}^{30}\{u_e\}; \quad \{\ddot{U}_B\}=\sum_{e=1}^{30}\{\ddot{u}_e\} \tag{149}$$

onde $[M_B]$ e $[K_B]$ representam as matrizes de massa e de rigidez da viga, respectivamente, $\{F_B(t)\}$ representa o vetor de forças externas aplicadas à viga, $\{U_B\}$ representa o vetor de deslocamentos da viga, e $\{\ddot{U}_B\}$ representa o vetor de aceleração da viga. Desta maneira, podem-se escrever as equações de movimento da viga toda na forma matricial:

$$[M_B]\{\ddot{U}_B\}+[K_B]\{U_B\}=\{F_B(t)\} \tag{150}$$

Incluindo-se o amortecimento estrutural no sistema, através do método de *Rayleigh* (CHOPRA, 1995). A matriz de amortecimento do sistema é obtida através de uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez, ou seja:

$$[C_B]=\alpha_B[M_B]+\beta_B[K_B] \tag{151}$$

sendo:

$$\alpha_B=\frac{2.\zeta_b.\omega_{nb1}.\omega_{nb2}}{\omega_{nb1}+\omega_{nb2}} \qquad e \qquad \beta_B=\frac{2.\zeta_b}{\omega_{nb1}+\omega_{nb2}} \tag{152}$$

onde (ω_{nb1}) e (ω_{nb2}) representam a primeira freqüência natural de vibração, e a segunda freqüência natural de vibração, respectivamente. Neste trabalho foi considerada somente a influência das duas primeiras freqüências naturais de vibração do sistema. O coeficiente (ζ_b) representa a razão de amortecimento da estrutura que é estimada em função do tipo da estrutura, e do tipo de material empregado. (CHOPRA, 1995).

O cálculo analítico das freqüências naturais para vigas bi-apoiadas e seus respectivos modos naturais de vibração podem ser obtidos pelas seguintes relações: (Idem, 1995).

$$\omega_{nbn}=\frac{n^2\pi^2}{{L_b}^2}\sqrt{\frac{EI}{m_u}} \qquad \phi_n(x)=\sin\frac{n\pi x}{L_b} \qquad n=1,2,3,... \tag{153}$$

onde (ω_{nbn}) e ($\phi_n(x)$) representam as freqüências naturais, e os modos naturais de vibração, respectivamente, (m_u) representa a massa da viga por unidade de comprimento. Os modos naturais de vibração de uma viga bi-apoiada são representados na Figura 56.

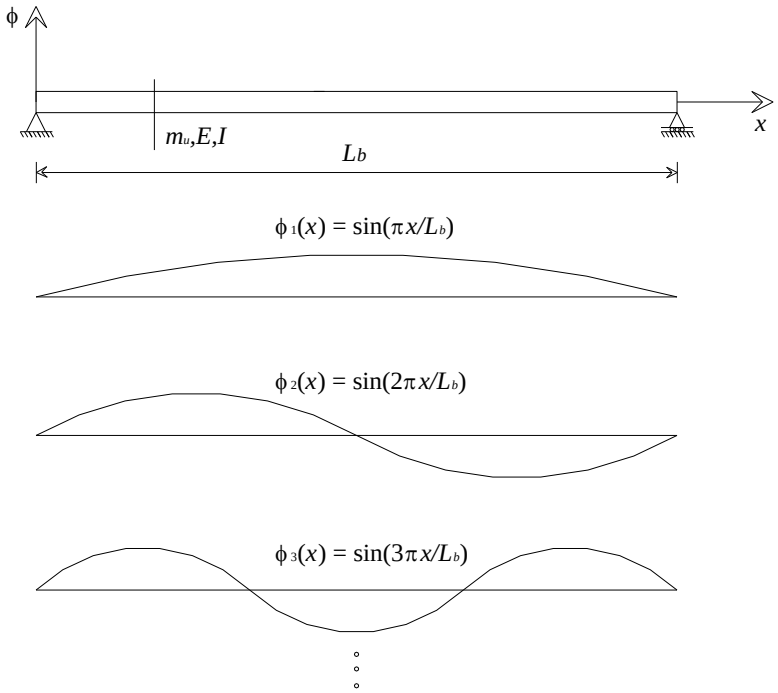


Figura 56 – Modos naturais de vibração de uma viga bi-apoiada.
Fonte: Adaptado de (BEGHETTO, 2006).

Nas vigas da ponte ferroviária, a massa unitária e o momento de inércia de área são variáveis em função do comprimento, e, portanto, as freqüências naturais e os respectivos modos naturais de vibração, serão obtidos numericamente.

Incluindo-se o amortecimento no sistema, pode-se escrever a Equação (150) da seguinte maneira:

$$[M_B]\{\ddot{U}_B\}+[C_B]\{\dot{U}_B\}+[K_B]\{U_B\}=\{F_B(t)\} \tag{154}$$

onde $[C_B]$ e $\{\dot{U}_B\}$ representam a matriz de amortecimento, e o vetor de velocidades do sistema, respectivamente.

Na Figura 57, mostra-se que na ponte, o alinhamento dos trilhos não coincide com o alinhamento das vigas, ou seja, não há correspondência direta entre os eixos verticais de simetria dos trilhos e das vigas. Isto gera algumas excentricidades, que associadas às forças do veículo produzem momentos que devem ser considerados. Estas excentricidades são tomadas do ponto de bitola dos trilhos aos centros de gravidade das vigas.

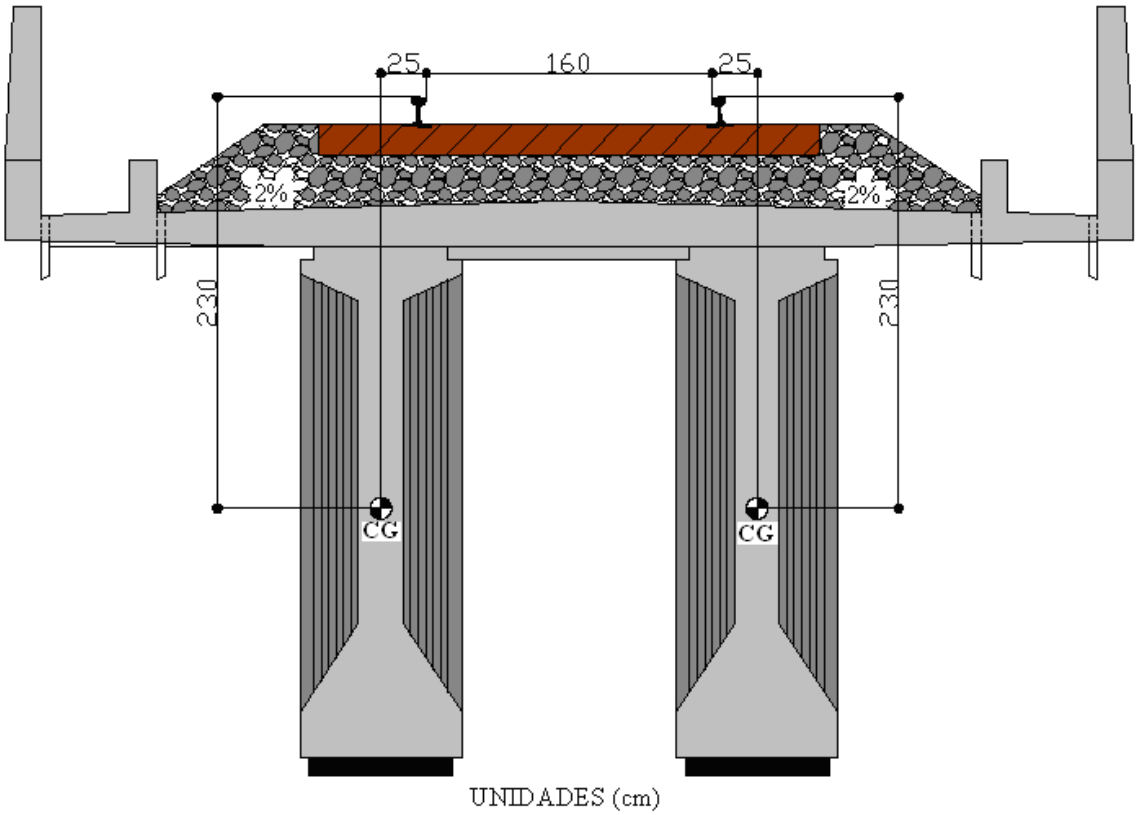


Figura 57 – Secção transversal da ponte e suas respectivas excentricidades.
Fonte: Autor.

A Figura 57 mostra que as excentricidades verticais e laterais possuem respectivamente, (*ey* = 230 cm) e (*ez* = 25 cm) de comprimento.

3.4.2 Sistema equivalente: transferência dos trilhos para as vigas

Nos pontos de contato entre as rodas e os trilhos (P_{Wi}), são aplicadas as forças e os momentos provenientes do veículo. Estas forças e momentos são distribuídos entre os trilhos onde trafegam as rodas ímpares (R_O), e os trilhos onde trafegam as rodas pares (R_E). As forças são: as forças verticais (FVR_O, FVR_E); as forças laterais (FLR_O, FLR_E); as forças horizontais (FHR_O, FHR_E); e os momentos de rotação de *spin* (MSR_O, MSR_E), obtidos através das Equações (56), (58), e (87), conforme a mudança de notação abaixo:

$$
\begin{aligned}
&\textit{FORÇAS VERTICAIS} \quad \begin{Bmatrix} V_{w2.i-1} = FVR_{O\,2.i-1} & i=1,2,3,4 \\ V_{w2.i} = FVR_{E\,2.i} & i=1,2,3,4 \end{Bmatrix} \\
&\textit{FORÇAS LATERAIS} \quad \begin{Bmatrix} L_{w2.i-1} = FLR_{O\,2.i-1} & i=1,2,3,4 \\ L_{w2.i} = FLR_{E\,2.i} & i=1,2,3,4 \end{Bmatrix} \\
&\textit{FORÇAS HORIZONTAIS} \quad \begin{Bmatrix} Fx_{2.i-1}* = FHR_{O\,2.i-1} & i=1,2,3,4 \\ Fx_{2.i}* = FHR_{E\,2.i} & i=1,2,3,4 \end{Bmatrix} \\
&\textit{MOMENTOS DE SPIN} \quad \begin{Bmatrix} Mz_{2.i-1}* = MSR_{O\,2.i-1} & i=1,2,3,4 \\ Mz_{2.i}* = MSR_{E\,2.i} & i=1,2,3,4 \end{Bmatrix}
\end{aligned}
\tag{155}
$$

A Figura 58 mostra o sistema de forças e momentos do veículo sendo aplicado nos trilhos da ponte.

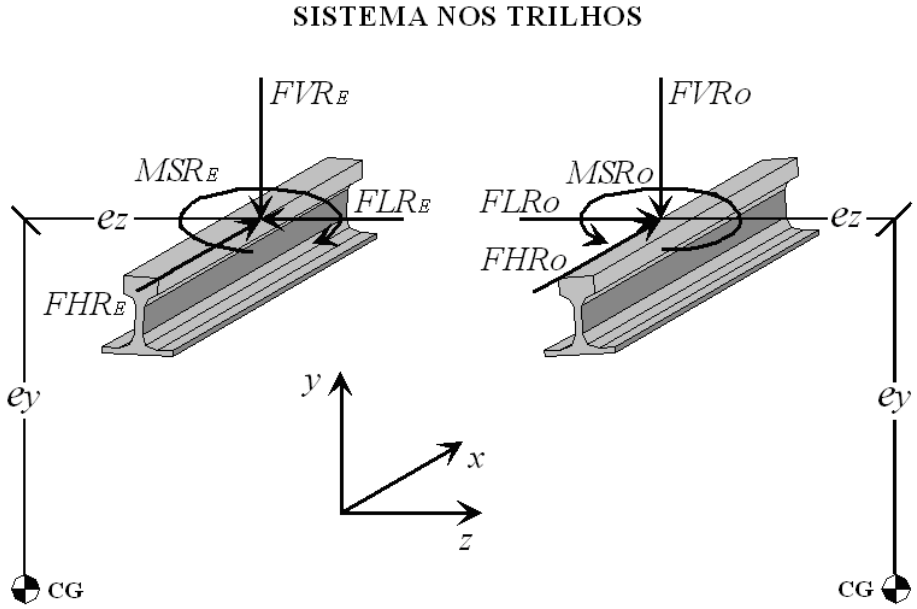


Figura 58 – Sistema de forças e momentos do veículo aplicado nos trilhos.
Fonte: Autor.

Para transferir, os pontos de aplicação das forças e dos momentos, dos trilhos para os centros de gravidade das vigas, devem-se considerar as excentricidades (*ey*) e (*ez*) mostradas na Figura 58. Nesta transferência, utiliza-se o princípio da transmissibilidade das forças através dos corpos rígidos, e o sistema equivalente força-binário. (HIBBELER, 2011). A Figura 59 mostra o sistema equivalente de forças e momentos, no qual transferiram-se os pontos de aplicação das forças e dos momentos, dos trilhos para os centros de gravidade das vigas. Observa-se na Figura 59 que, com o princípio da transmissibilidade das forças através dos corpos rígidos e do sistema equivalente força-binário, além das forças anteriores, transferiram-se também os momentos produzidos pelas forças associados às excentricidades.

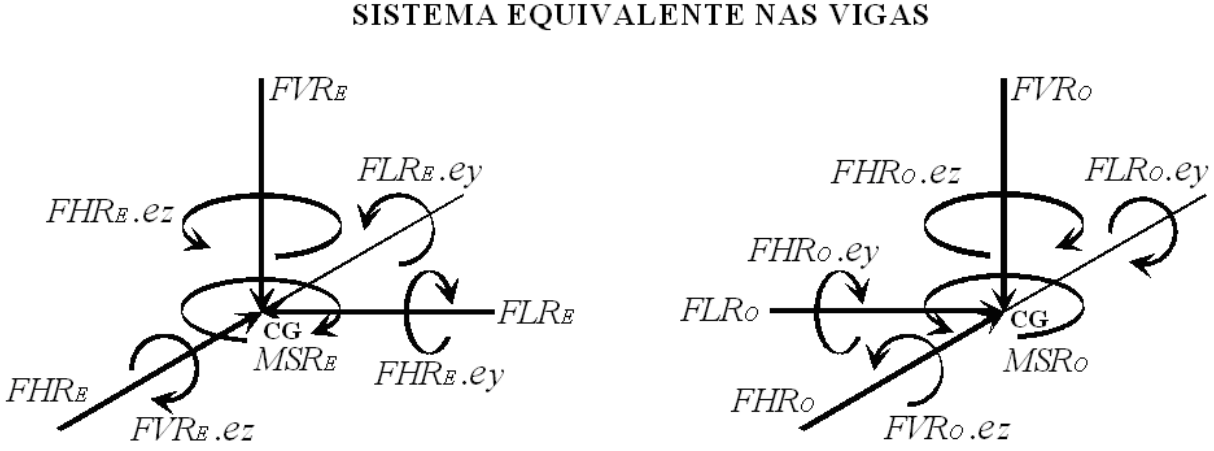


Figura 59 – Sistema equivalente de forças e momentos nas vigas.
Fonte: Autor.

No presente modelo de interação dinâmica está se considerando as forças e os momentos produzidos pelo veículo na passagem pela ponte. As respectivas respostas dinâmicas da ponte não estão sendo atualizadas e realimentando a excitação do veículo. Isto é, está se concebendo a interação do veículo na ponte, e não da ponte no veículo.

3.4.3 Distribuição das forças do veículo na estrutura da ponte

As forças do veículo percorrem toda a extensão da ponte. No respectivo modelo em elementos finitos, o sistema equivalente de forças percorre toda a extensão das vigas. E, portanto, são interpoladas as forças e os momentos entre os elementos finitos através de suas respectivas funções de forma, ou funções de interpolação. Esta variação da posição das forças e dos momentos ao longo de cada elemento finito é obtida através do seguinte procedimento:

$$\{p(t)\} = \{p_i(t)\}.\{\psi_i(x)\} \qquad i = 1,2,3,...,12$$

onde

$$\{p_i(t)\}^T = \{p_1(t) \quad p_2(t) \quad p_3(t) \quad p_4(t) \quad p_5(t) \quad p_6(t) \quad p_7(t) \quad p_8(t) \quad p_9(t) \quad p_{10}(t) \quad p_{11}(t) \quad p_{12}(t)\}$$

$$\{\psi_i(t)\}^T = \{\psi_1(t) \quad \psi_2(t) \quad \psi_3(t) \quad \psi_4(t) \quad \psi_5(t) \quad \psi_6(t) \quad \psi_7(t) \quad \psi_8(t) \quad \psi_9(t) \quad \psi_{10}(t) \quad \psi_{11}(t) \quad \psi_{12}(t)\}$$

$$\{\psi_i(t)\} = \begin{Bmatrix} \left(1-\frac{x}{L}\right) \text{ LINEAR AXIAL NÓ } i \\ 1-3.\left(\frac{x}{L}\right)^2+2.\left(\frac{x}{L}\right)^3 \text{ FLEXÃO PLANO xy HERMITE CÚBICA DEFLEXÃO NÓ } i \\ 1-3.\left(\frac{x}{L}\right)^2+2.\left(\frac{x}{L}\right)^3 \text{ FLEXÃO PLANO xz HERMITE CÚBICA DEFLEXÃO NÓ } i \\ \left(1-\frac{x}{L}\right) \text{ LINEAR TORÇÃO NÓ } i \\ L.\left(\frac{x}{L}\right)-2.L.\left(\frac{x}{L}\right)^2+L.\left(\frac{x}{L}\right)^3 \text{ FLEXÃO PLANO xy HERMITE CÚBICA ROTAÇÃO NÓ } i \\ L.\left(\frac{x}{L}\right)-2.L.\left(\frac{x}{L}\right)^2+L.\left(\frac{x}{L}\right)^3 \text{ FLEXÃO PLANO xz HERMITE CÚBICA ROTAÇÃO NÓ } i \\ \left(\frac{x}{L}\right) \text{ LINEAR AXIAL NÓ } j \\ 3.\left(\frac{x}{L}\right)^2-2.\left(\frac{x}{L}\right)^3 \text{ FLEXÃO PLANO xy HERMITE CÚBICA DEFLEXÃO NÓ } j \\ 3.\left(\frac{x}{L}\right)^2-2.\left(\frac{x}{L}\right)^3 \text{ FLEXÃO PLANO xz HERMITE CÚBICA DEFLEXÃO NÓ } j \\ \left(\frac{x}{L}\right) \text{ LINEAR TORÇÃO NÓ } j \\ -L.\left(\frac{x}{L}\right)^2+L.\left(\frac{x}{L}\right)^3 \text{ FLEXÃO PLANO xy HERMITE CÚBICA ROTAÇÃO NÓ } j \\ -L.\left(\frac{x}{L}\right)^2+L.\left(\frac{x}{L}\right)^3 \text{ FLEXÃO PLANO xz HERMITE CÚBICA DEFLEXÃO NÓ } j \end{Bmatrix} \tag{156}$$

onde (x) e (L) representam a coordenada e o comprimento do elemento finito, respectivamente. A velocidade média do veículo pode ser escrita em função do tempo (t) e da posição (x) da seguinte maneira:

$$v = \frac{x}{t} \quad e \quad x = v.t \tag{157}$$

Substituíndo-se a Equação (157) nas funções de forma da Equação (156), e rearranjando os termos tem-se:

$$\{p(t)\} = \begin{Bmatrix} \{p_1(t)\}.\left\{\left(1-\frac{v.t}{L}\right)\right\} \\ \{p_2(t)\}.\left\{1-3.\left(\frac{v.t}{L}\right)^2+2.\left(\frac{v.t}{L}\right)^3\right\} \\ \{p_3(t)\}.\left\{1-3.\left(\frac{v.t}{L}\right)^2+2.\left(\frac{v.t}{L}\right)^3\right\} \\ \{p_4(t)\}.\left\{1-\frac{v.t}{L}\right\} \\ \{p_5(t)\}.\left\{L.\left(\frac{v.t}{L}\right)-2.L.\left(\frac{v.t}{L}\right)^2+L.\left(\frac{v.t}{L}\right)^3\right\} \\ \{p_6(t)\}.\left\{L.\left(\frac{v.t}{L}\right)-2.L.\left(\frac{v.t}{L}\right)^2+L.\left(\frac{v.t}{L}\right)^3\right\} \\ \{p_7(t)\}.\left\{\frac{v.t}{L}\right\} \\ \{p_8(t)\}.\left\{3.\left(\frac{v.t}{L}\right)^2-2.\left(\frac{v.t}{L}\right)^3\right\} \\ \{p_9(t)\}.\left\{3.\left(\frac{v.t}{L}\right)^2-2.\left(\frac{v.t}{L}\right)^3\right\} \\ \{p_{10}(t)\}.\left\{\frac{v.t}{L}\right\} \\ \{p_{11}(t)\}.\left\{-L.\left(\frac{v.t}{L}\right)^2+L.\left(\frac{v.t}{L}\right)^3\right\} \\ \{p_{12}(t)\}.\left\{-L.\left(\frac{v.t}{L}\right)^2+L.\left(\frac{v.t}{L}\right)^3\right\} \end{Bmatrix} \tag{158}$$

Desta maneira pode-se realizar a variação da posição das forças em função do tempo (t) e da velocidade do veículo (v) em cada elemento finito. Para toda a extensão das vigas, basta-se atualizar o procedimento acima a cada elemento finito. Por exemplo, na Figura 60, no tempo (Δt), a força vertical (FVR_O), está no nó (j) do elemento (n – 1), e no nó (i) do elemento (n). Assim, passa-se sucessivamente até o último nó do elemento finito do modelo.

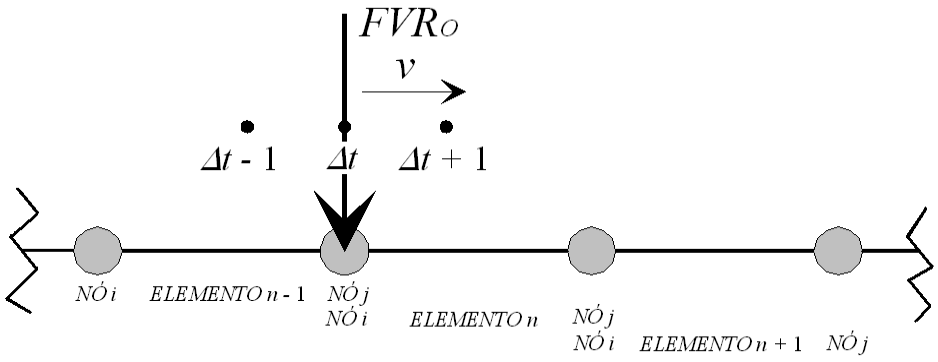


Figura 60 – Atualização das forças em cada elemento finito.
Fonte: Autor.

No presente capítulo, apresentou-se um modelo tridimensional de veículo ferroviário. Foram descritos seus componentes, suas características físicas e geométricas, seus graus de liberdade, bem como foi apresentada a formulação que determina suas equações de movimento. Também foram apresentados neste capítulo: os modelos matemáticos das irregularidades verticais, laterais, e rotacionais da via; o modelo de contato entre rodas e trilhos embasado nas teorias de *Hertz* e de *Kalker*; a variação do coeficiente de atrito entre rodas e trilhos com a velocidade e as condições de contaminações entre as superfícies em contato; o modelo de saturação do contato das forças tangenciais e dos momentos de *spin*; a formulação energética dos elementos finitos de barra, de viga e de pórtico tridimensional para a modelagem da ponte; a ponte ferroviária e seu respectivo modelo em elementos finitos; o sistema equivalente de forças, transferindo os pontos de aplicação das forças, dos trilhos para os centros de gravidade das vigas; a distribuição das forças do veículo na estrutura da ponte; e a atualização das forças em cada elemento finito.

No próximo capítulo, serão apresentadas as análises numéricas dos modelos matemáticos desenvolvidos neste capítulo. Será apresentada: a análise modal do veículo; a análise de vibração forçada do veículo nas condições de ressonância sob diferentes condições de velocidade e irregularidades da via; a análise dinâmica do contato entre as rodas e os trilhos; e a análise dos deslizamentos e da perda de contato entre as rodas e os trilhos, combinando-se os modelos de irregularidades da via, variando-se a velocidade do veículo, e considerando-se os trilhos contaminados com óleo.

Referente ao estudo da ponte ferroviária, será apresentada: a análise modal; a análise de vibração forçada na ponte produzida pelo tráfego do veículo ferroviário e da composição Trem Unidade Elétrico (TUE), sob diferentes condições de velocidade e irregularidades da via, abordando-se as condições de ressonância da ponte produzidas pelo tráfego tanto do veículo ferroviário quanto da composição TUE.

CAPÍTULO 4
ANÁLISES NUMÉRICAS

Este capítulo apresenta análises numéricas dos modelos matemáticos desenvolvidos no capítulo anterior. Primeiramente será realizado o estudo do comportamento dinâmico do veículo ferroviário. Será realizada a análise modal do veículo, determinando-se suas características dinâmicas como freqüências e modos naturais de vibração, bem como, os fatores de amortecimento do sistema. Também realiza-se a análise de vibração forçada nas condições de ressonância, determinando-se as respostas dinâmicas do veículo sob diferentes condições de velocidade e irregularidades verticais, laterais, e rotacionais da via. A análise dinâmica do contato entre as rodas e os trilhos é realizada estudando-se as dimensões das elipses de contato, as tensões, os escorregamentos, as forças tangenciais, e os momentos de rotação de *spin*. A análise dos deslizamentos e da perda de contato entre as rodas e os trilhos é estudada através de oito casos distintos, combinando-se os modelos de irregularidades da via, variando-se a velocidade do veículo, e considerando-se os trilhos contaminados com óleo.

Posteriormente será realizado o estudo do comportamento dinâmico do modelo de ponte ferroviária através da análise modal, determinando-se suas características dinâmicas como freqüências e modos naturais de vibração. Também realiza-se a análise de vibração forçada na ponte produzida pelo tráfego do veículo ferroviário e da composição Trem Unidade Elétrico (TUE), sob diferentes condições de velocidade e irregularidades verticais, laterais, e rotacionais da via. Nestas análises também são consideradas as condições de ressonância da ponte produzidas pelo tráfego tanto do veículo ferroviário quanto da composição TUE.

4.1 Metodologia de análise

O veículo ferroviário ao atravessar a ponte com velocidade constante está sujeito aos efeitos das irregularidades verticais, laterais, e rotacionais da via. Admite-se que as amplitudes destas irregularidades são maiores que as dimensões da superfície elíptica de contato entre as rodas e os trilhos. Pois, no caso de uma corrugação no trilho, (irregularidade de pequena amplitude e pequeno comprimento de onda), haverá mais que um ponto de contato entre a roda e o trilho, formando-se, desta maneira, mais que uma elipse de contato. E também que as amplitudes dos escorregamentos não podem ser maiores que as elipses de

contato entre as rodas e os trilhos, limitando-se, desta forma, o deslizamento entre estas superfícies.

Na análise das respostas dinâmicas do veículo, este é considerado parado, e em suas rodas ocorre a passagem das irregularidades da via através de uma freqüência, estipulada pela velocidade do veículo. Desta maneira, tem-se um problema conhecido no meio acadêmico como excitação de base.

Os esforços provenientes do veículo, mediante às excitações das irregularidades são transmitidos à estrutura da ponte através dos pontos de contato das rodas com os trilhos. Desta maneira pode-se analisar o comportamento dinâmico da ponte através de suas respectivas respostas dinâmicas. Estas, não estão sendo atualizadas e realimentando a excitação do veículo. Isto é, está se concebendo a interação do veículo na ponte, e não da ponte no veículo.

As equações de movimento do veículo e da ponte são integradas numericamente com 17.490 passos iguais de tempo utilizando o método de *Newmark* com aceleração média, apresentado por (BATHE, 1996), e disposto no Apêndice D. O sistema linear de equações é resolvido através do método da eliminação de *Gauss*. (BURDEN; FAIRES, 2003).

Esses procedimentos de análise foram programados utilizando-se o *software* MATLAB® versão 7.5.0.342 (R2007b), de 15 de agosto de 2007. Para realizar as análises numéricas foi utilizado um computador Hewlett-Packard, modelo Pavilion b2030br, com processador Intel® Pentium® D915 Dual Core 2.80 GHz - 2x2MB L2, memória RAM de 512 MB DDR2 667 MHz. O tempo total de processamento de cada simulação é de 7.000,6601 segundos, ou seja, 1h 56min. 40,6601s. A Figura 61 mostra o tempo de processamento em função do número de passos de tempo de integração utilizando-se o método de *Newmark*. Para valores maiores que 17.490 passos de tempo, há limitação de memória, sendo este o valor mais refinado possível.

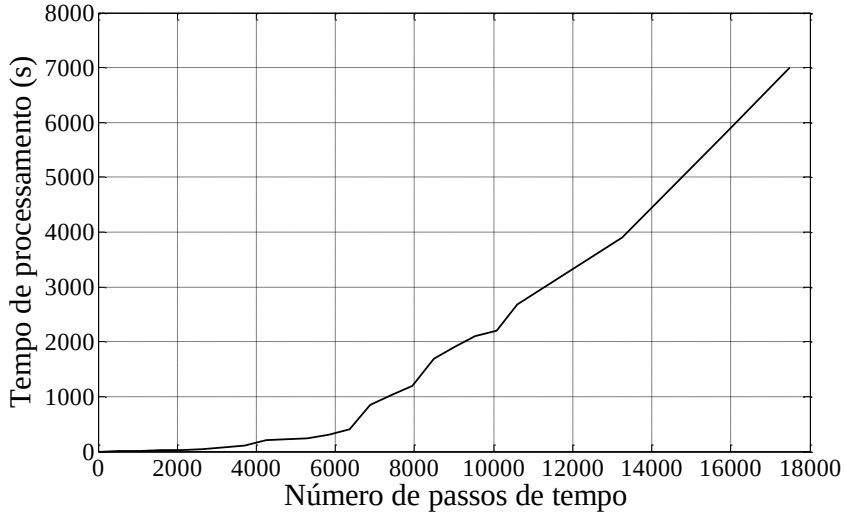


Figura 61 – Tempo de processamento.
Fonte: Autor.

É possível observar que o tempo de processamento cresce geometricamente em função do número de passos de tempo de integração.

4.2 Análise dinâmica do veículo

Serão realizadas análises dinâmicas numéricas do veículo no que diz respeito à análise modal, a análise de vibração forçada nas condições de ressonância, a análise dinâmica do contato entre as rodas e os trilhos, e a análise dos deslizamentos e da perda de contato entre as rodas e os trilhos.

4.2.1 Análise modal do veículo

A análise modal é largamente utilizada para caracterizar os sistemas dinâmicos com respeito às freqüências naturais circulares, e aos seus respectivos modos naturais de vibração. Trata-se de um problema de autovalores e autovetores, em que deve-se determinar as freqüências naturais circulares de vibração (autovalores), e seus respectivos modos naturais de vibração (autovetores). Considerando-se o modelo de veículo ferroviário sem amortecimento, o problema pode ser representado na seguinte forma matricial: (CHOPRA, 1995).

$$[K_V][\Phi_V] = [\Omega_V]^2 [M_V][\Phi_V] \tag{159}$$

onde $[K_V]$ e $[M_V]$, representam respectivamente as matrizes de rigidez, e de massa do veículo ferroviário. E $[\Phi_V]$ e $[\Omega_V]$, representam a matriz modal, e a matriz espectral do veículo, respectivamente. A matriz modal contém os modos naturais de vibração do veículo (autovetores), e a matriz espectral contém o quadrado das freqüências naturais circulares de vibração do veículo (autovalores), representados da seguinte forma:

$$[\Phi_V] = [\phi_{Vn}] = \begin{bmatrix} \phi_{V1} \\ \phi_{V2} \\ \vdots \\ \phi_{Vn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}; \qquad [\Omega_V]^2 = \begin{bmatrix} {\omega_{nv1}}^2 & & & \\ & {\omega_{nv2}}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & {\omega_{nvn}}^2 \end{bmatrix}. \tag{160}$$

A solução formal da Equação (159) pode ser representada da seguinte forma:

$$\left[[K_V] - [\Omega_V]^2 [M_V]\right][\Phi_V] = [0]. \tag{161}$$

A solução trivial seria $[\Phi_V] = [0]$, porém não é utilizada, pois não produz movimento no sistema. Então tem-se a seguinte solução não trivial: (Idem, 1995).

$$\det\left[[K_V] - [\Omega_V]^2 [M_V]\right] = 0. \tag{162}$$

Expandindo-se o determinante da matriz obtêm-se a equação característica, um polinômio de ordem (n), que contém (n) raízes reais positivas, pois as matrizes de massa e de rigidez são simétricas e positivas definidas. Quando uma freqüência natural circular é conhecida, a equação característica pode ser resolvida para o seu correspondente modo de vibração. (CHOPRA, 1995).

Os modos de vibração não representam valores absolutos nos graus de liberdade de um sistema estrutural, e, portanto, deve-se considerar apenas a sua forma. Por isso costumam-se normalizá-los, obtendo-se, desta maneira, valores que são ponderados em relação à maior amplitude de movimento.

Considerando-se agora o modelo de veículo ferroviário com amortecimento, deve-se também determinar as freqüências naturais circulares amortecidas, e suas respectivas razões de amortecimento. Desta forma, tem-se a seguinte equação: (BATHE, 1996).

$$[\Phi_V]^T [C_V][\Phi_V] = 2.\omega_{nvi}.\xi_{vi}.[I] \tag{163}$$

Como o produto ($[\Phi_V]^T [C_V][\Phi_V]$) é diagonal, o sistema possui amortecimento clássico, e as freqüências naturais circulares amortecidas são determinadas da seguinte forma: (CHOPRA, 1995).

$$\omega_{dvi} = \omega_{nvi}.\sqrt{1-\xi^2{}_{vi}}. \tag{164}$$

Onde (ω_{dvi}), (ω_{nvi}), e (ζ_{vi}) representam respectivamente as freqüências naturais circulares amortecidas, as freqüências naturais circulares, e as razões de amortecimento do modelo de veículo ferroviário. Os modos de vibração para um sistema que possui amortecimento clássico são os mesmos modos de um sistema sem amortecimento. Porém, no caso de amortecimento não clássico, o chamado amortecimento giroscópio, os modos de vibração e suas respectivas freqüências naturais circulares devem ser calculados por outros métodos diferentes. As matrizes [M_V], [C_V] e [K_V] estão dispostas no Apêndice C.

No modelo de veículo, são utilizadas as propriedades do carro motor pertencente a um TUE utilizado no Brasil para o transporte coletivo urbano. (CORREA, 2008). As propriedades dinâmicas dos componentes do veículo, as propriedades dinâmicas dos sistemas de suspensões e ligações, e as distâncias geométricas são apresentadas respectivamente pelas Tabelas 8, 9 e 10. Estas e outras características dos componentes dos carros e dos vagões são descritas em detalhes no Apêndice B.

Tabela 8 – Propriedades dinâmicas dos componentes do veículo ferroviário.

Corpos Rígidos	Parâmetros	Símbolos	Valores	Unidades
Carro	Massa	M_{CB}	49.120	kg
	Momento de inércia de massa (*rolling*)	I_{RCB}	64.050	kg.m²
	Momento de inércia de massa (*pitching*)	I_{PCB}	2.008.950	kg.m²
Truque Dianteiro	Massa	M_{FB}	11.000	kg
	Momento de inércia de massa (*rolling*)	I_{RFB}	8.750	kg.m²
	Momento de inércia de massa (*pitching*)	I_{PFB}	20.800	kg.m²
Truque Traseiro	Massa	M_{RB}	11.000	kg
	Momento de inércia de massa (*rolling*)	I_{RRB}	8.750	kg.m²
	Momento de inércia de massa (*pitching*)	I_{PRB}	20.800	kg.m²
Eixos 1,2,3 e 4	Massa	M_W	1.500	kg
	Momento de inércia de massa (*rolling*)	I_{RW}	989	kg.m²
	Momento de inércia de massa (*yawing*)	I_{YW}	989	kg.m²

Fonte: Adaptado de (CORREA, 2008).

Tabela 9 – Propriedades dinâmicas dos sistemas de suspensões e ligações.

Sistemas	Parâmetros	Símbolos	Valores	Unidades
Suspensão Primária	Rigidez	K_P	1.637.275	N/m
	Amortecimento	C_P	32.745,5	N.s/m
Suspensão Secundária	Rigidez	K_S	875.655	N/m
	Amortecimento	C_S	17.513,1	N.s/m
Ligações Laterais	Rigidez	K_L	100.000	N/m
	Amortecimento	C_L	2.000	N.s/m
Ligações Horizontais	Rigidez	K_H	100.000	N/m
	Amortecimento	C_H	2.000	N.s/m

Fonte: Adaptado de (CORREA, 2008).

Tabela 10 – Distâncias geométricas.

Distâncias	Símbolos	Valores	Unidades
Distância longitudinal dos centros dos truques	$2a$	15	m
Distância longitudinal dos centros dos eixos	$2b$	2,6	m
Distância transversal dos centros dos eixos	$2c$	2,5	m

Fonte: Adaptado de (CORREA, 2008).

Os autovalores (freqüências naturais circulares) do modelo de veículo ferroviário (ω_{nv}) são apresentados na Tabela 11, bem como, as freqüências naturais circulares amortecidas (ω_{dv}), as freqüências naturais cíclicas (f_{nv}), as freqüências naturais cíclicas amortecidas (f_{dv}), os períodos de vibração natural (T_{nv}), os períodos de vibração natural amortecido (T_{dv}), e as razões de amortecimento do sistema (ζ_v).

Tabela 11 – Freqüências naturais, períodos, e razões de amortecimento do veículo.

Nº	ω_{nv} **(rad/s)**	ω_{dv} **(rad/s)**	f_{nv} **(Hz)**	f_{dv} **(Hz)**	T_{nv} **(s)**	T_{dv} **(s)**	ζ_v **(%)**
1º	8,165	8,138	1,300	1,295	0,770	0,772	0,082
2º	13,923	13,787	2,216	2,194	0,451	0,456	0,139
3º	14,84	14,676	2,362	2,336	0,423	0,428	0,148
4º	15,896	15,694	2,530	2,498	0,395	0,400	0,159
5º	17,776	17,493	2,829	2,784	0,353	0,359	0,178
6º	18,365	18,053	2,923	2,873	0,342	0,348	0,184
7º	52,107	44,474	8,293	7,078	0,121	0,141	0,521
8º	53,057	44,975	8,444	7,158	0,118	0,140	0,531
9º	71,926	49,97	11,447	7,953	0,087	0,126	0,719
10º	80,018	47,991	12,735	7,638	0,079	0,131	0,800

Fonte: Autor.

Os correspondentes autovetores (modos naturais de vibração) do modelo de veículo ferroviário (ϕ_V) são apresentados na Tabela 12. Aqui, os autovetores são normalizados, e as amplitudes de seus deslocamentos são representadas em cada grau de liberdade.

Tabela 12 – Modos naturais de vibração normalizados.

G.L.	ϕ_{V1}	ϕ_{V2}	ϕ_{V3}	ϕ_{V4}	ϕ_{V5}	ϕ_{V6}	ϕ_{V7}	ϕ_{V8}	ϕ_{V9}	ϕ_{V10}
BCB	0	-0,5~0	0	0	0	0	0	0	0	0
RCB	0	0	0	0	0	0~0,3	0	0	0	0
PCB	0	0	0~0,1	0	0	0	0	0	0	0
BFB	0	0~0,9	0~0,9	0	0	0	0	-0,3~0,3	0	0
RFB	0	0	0	0~1,0	0	-0,9~0	0	0	0	-0,2~0,2
PFB	0	0	0	0	0	0	-0,2~0	0	0	0
BRB	0	0~0,9	-0,9~0	0	0	0	0	-0,3~0	0	0
RRB	0	0	0	-1,0~0	0	-0,9~0	0	0	0	-0,2~0
PRB	0	0	0	0	0	0	-0,2~0	0	0	0
BW1	0	0~1,0	0~1,0	0	0	0	-1,0~0,1	-1,0~1,0	0	0
LW1	-1,0~0,4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
RW1	0	0	0	0~1,0	0	-1,0~0	0	0	-1,0~0	-1,0~1,0
YW1	0	0	0	0	-0,7~1,0	0	0	0	0	0
BW2	0	0~1,0	0~1,0	0	0	0	-0,1~1,0	-1,0~1,0	0	0
LW2	-1,0~0,1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
RW2	0	0	0	0~1,0	0	-1,0~0	0	0	0~1,0	-1,0~1,0
YW2	0	0	0	0	0~1,0	0	0	0	0	0
BW3	0	0~1,0	-1,0~0	0	0	0	-1,0~-0,1	0~1,0	0	0
LW3	-0,1~1,0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
RW3	0	0	0	-1,0~0	0	-1,0~0	0	0	-1,0~0	0~1,0
YW3	0	0	0	0	-1,0~0,5	0	0	0	0	0
BW4	0	0~1,0	-1,0~0	0	0	0	0,1~1,0	0~1,0	0	0
LW4	-1,0~0,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
RW4	0	0	0	-1,0~0	0	-1,0~0	0	0	0~1,0	0~1,0
YW4	0	0	0	0	0~1,0	0	0	0	0	0

Fonte: Autor.

Observa-se nas Tabelas 11 e 12 que são apresentados os 10 autovalores e autovetores do sistema, as demais freqüências naturais circulares e seus respectivos modos de vibração foram omitidos aqui, pois representam apenas movimentos de corpo rígido.

O 1º modo de vibração excita os graus de liberdade do movimento lateral dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme mostra a Figura 62.

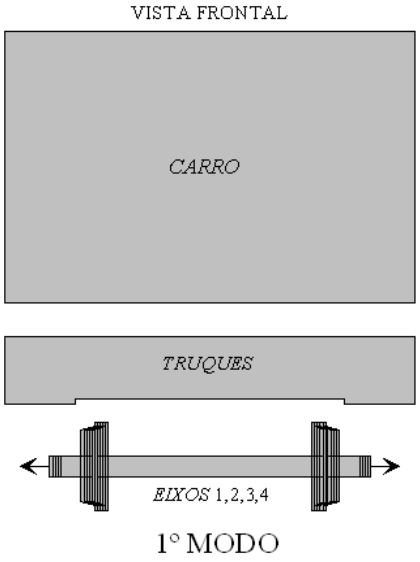


Figura 62 – 1º modo de vibração do veículo ferroviário.
Fonte: Autor.

O 2º modo de vibração excita os graus de liberdade do movimento vertical do carro, dos truques dianteiro e traseiro, e dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme mostra a Figura 63.

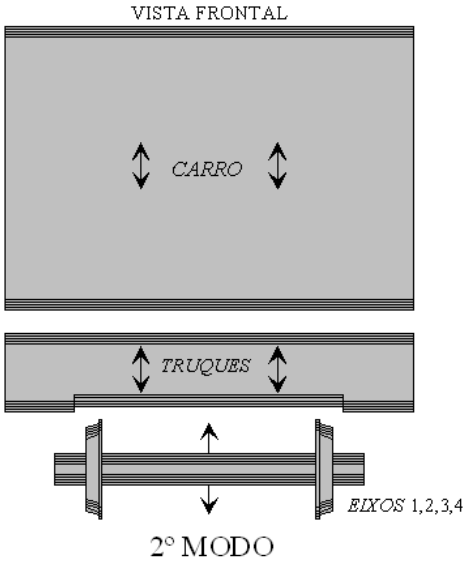


Figura 63 – 2º modo de vibração do veículo ferroviário.
Fonte: Autor.

O 3º modo de vibração excita os graus de liberdade do movimento vertical dos truques dianteiro e traseiro, dos eixos 1, 2, 3, e 4, e o movimento de rotação (*pitching*) do carro, conforme mostra a Figura 64.

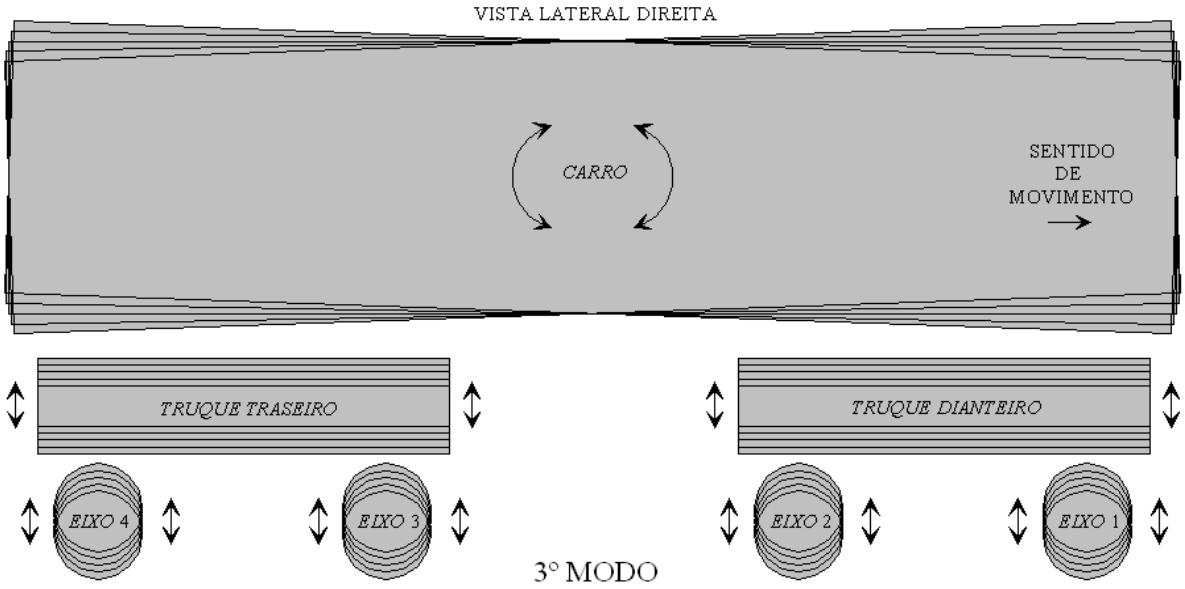


Figura 64 – 3º modo de vibração do veículo ferroviário.
Fonte: Autor.

O 4º modo de vibração excita os graus de liberdade do movimento de rotação (*rolling*), dos truques dianteiro e traseiro, e dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme mostra a Figura 65.

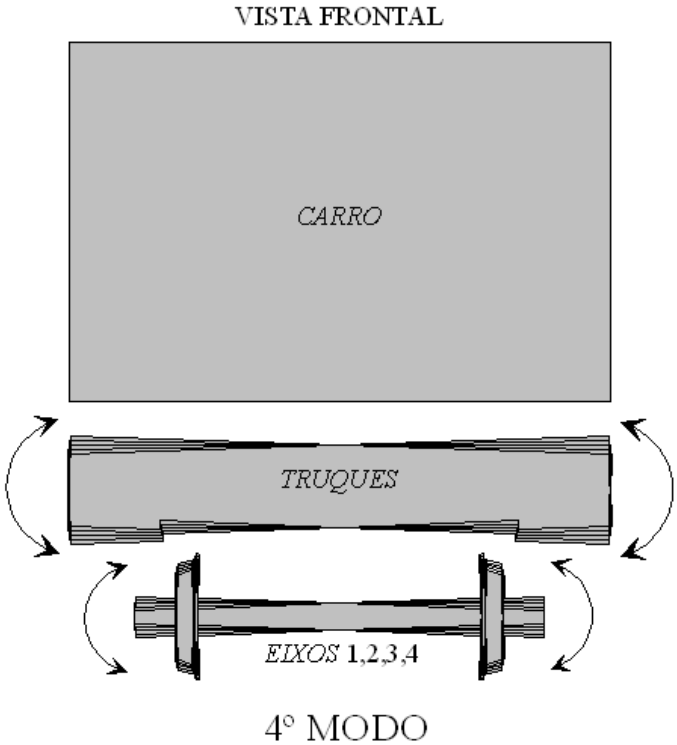


Figura 65 – 4º modo de vibração do veículo ferroviário.
Fonte: Autor.

O 5º modo de vibração excita os graus de liberdade do movimento de rotação (*yawing*), dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme mostra a Figura 66.

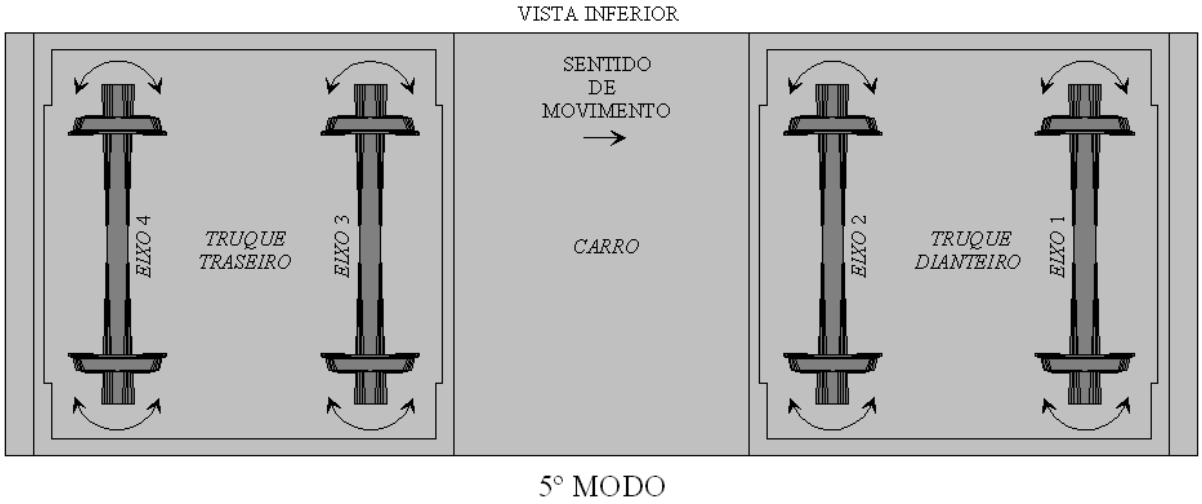


Figura 66 – 5º modo de vibração do veículo ferroviário.
Fonte: Autor.

O 6º modo de vibração excita os graus de liberdade de movimento de rotação (*rolling*), do carro, dos truques dianteiro e traseiro, e dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme mostra a Figura 67.

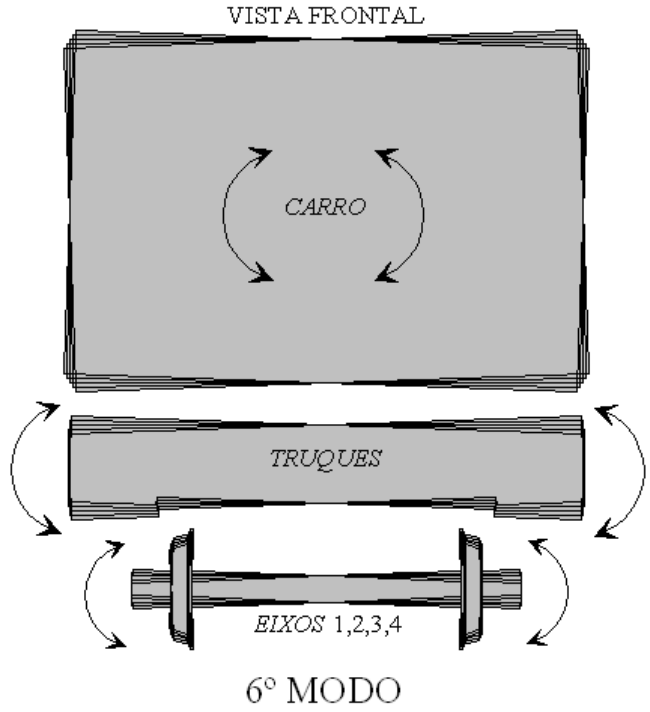


Figura 67 – 6º modo de vibração do veículo ferroviário.
Fonte: Autor.

O 7º modo de vibração excita os graus de liberdade do movimento vertical dos eixos 1, 2, 3, e 4, e o movimento de rotação (*pitching*) dos truques dianteiro e traseiro, conforme mostra a Figura 68.

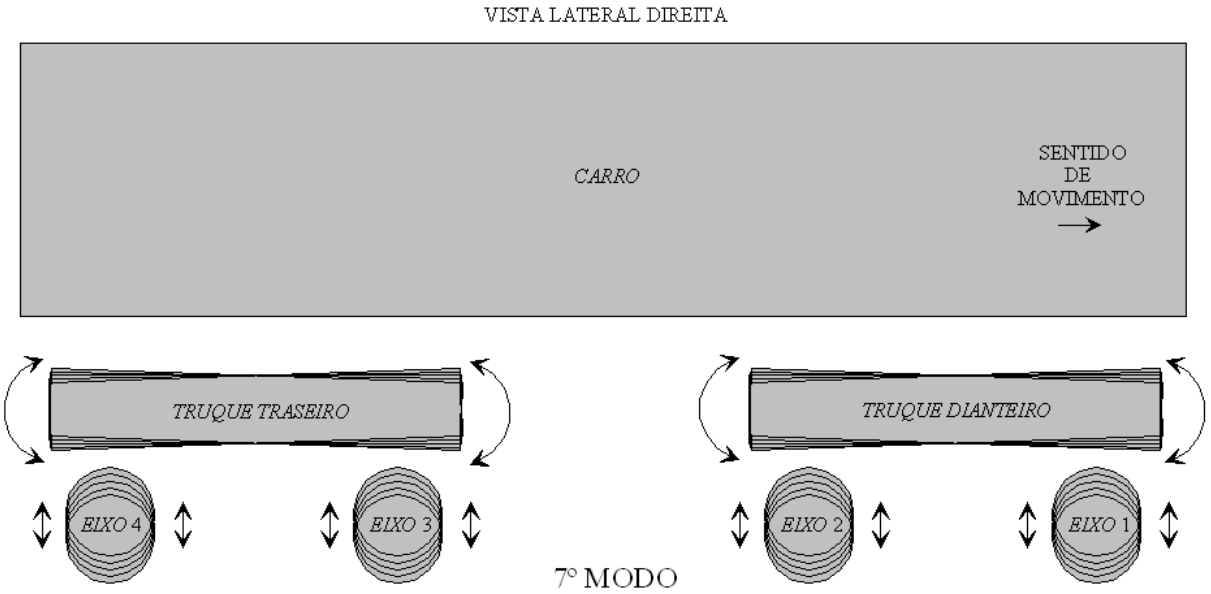


Figura 68 – 7º modo de vibração do veículo ferroviário.
Fonte: Autor.

O 8º modo de vibração excita os graus de liberdade do movimento vertical dos truques dianteiro e traseiro, e dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme mostra a Figura 69.

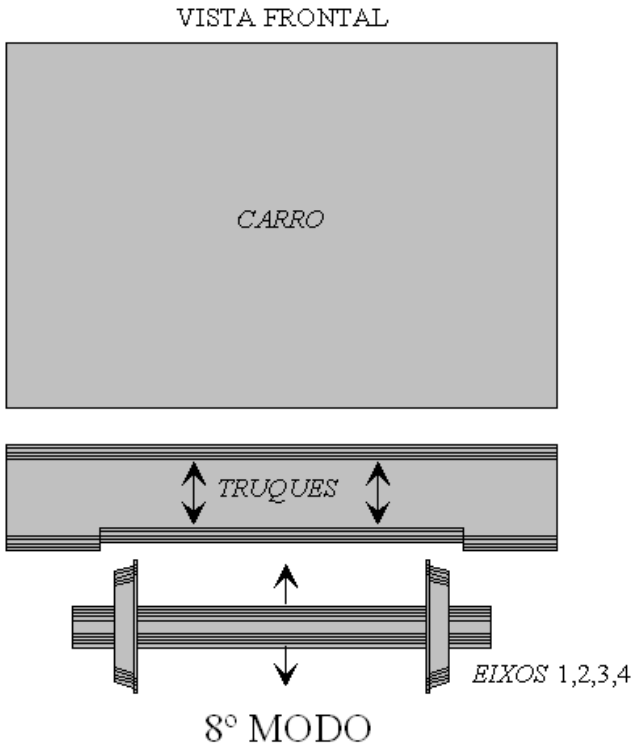


Figura 69 – 8º modo de vibração do veículo ferroviário.
Fonte: Autor.

O 9º modo de vibração excita os graus de liberdade do movimento de rotação (*rolling*), dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme mostra a Figura 70.

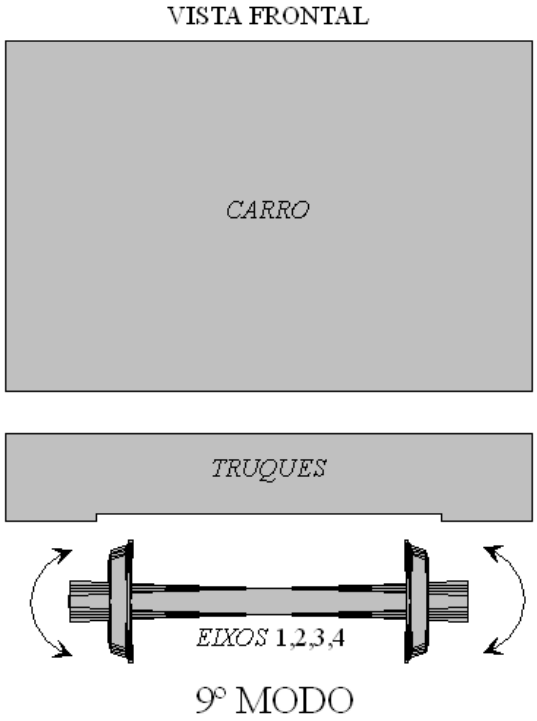


Figura 70 – 9º modo de vibração do veículo ferroviário.
Fonte: Autor.

E o 10º modo de vibração excita os graus de liberdade do movimento de rotação (*rolling*), dos truques dianteiro e traseiro, e dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme mostra a Figura 71.

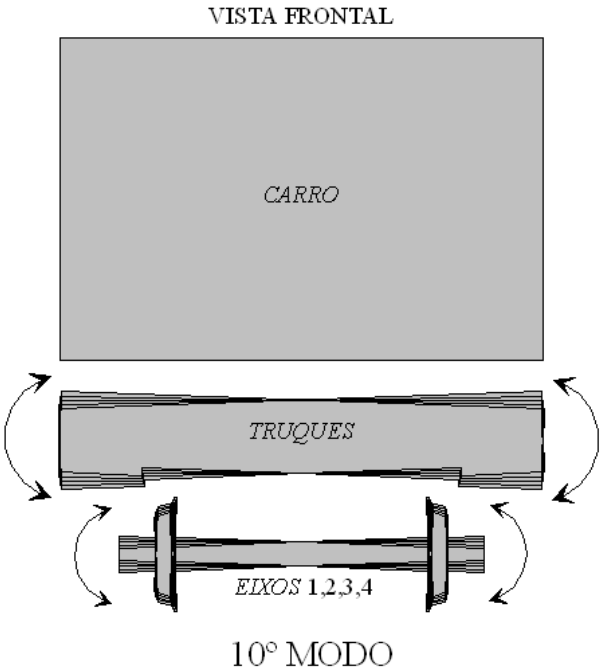


Figura 71 – 10º modo de vibração do veículo ferroviário.
Fonte: Autor.

Observa-se que o 4º e o 10º, modos de vibração excitam os mesmos graus de liberdade de movimento, porém suas amplitudes de movimento são distintas, bem como, seus ângulos de fase de movimento, como pode ser observado na Tabela 12.

Nesta sessão foi realizada a análise modal do veículo determinando-se as freqüências naturais, as freqüências naturais amortecidas, os períodos de vibração, os períodos de vibração amortecidos, as razões de amortecimento, e os modos de vibração.

4.2.2 Análise de vibração forçada nas condições de ressonância do veículo

A vibração forçada do veículo está associada a uma excitação externa, que será produzida pelas irregularidades da via, e pela velocidade do veículo. Os modelos destas irregularidades apresentados anteriormente no Capítulo 3, são os das irregularidades verticais, laterais, e rotacionais.

As irregularidades verticais da via são classificadas de acordo com o comprimento e a amplitude da onda. Para irregularidades de pequeno tamanho, ou corrugações, os comprimentos das ondas variam entre 30 mm a 300 mm, e suas amplitudes são da ordem de 1 mm. Para irregularidades grandes, os comprimentos das ondas são maiores que 300 mm, e suas amplitudes são da ordem de 10 mm. (DAHLBERG, 2006).

As irregularidades laterais têm seu comprimento e sua amplitude definidos pela geometria dos truques, dos rodeiros, e da via. Como visto anteriormente, as amplitudes são limitadas pelo jogo da via, e podem chegar a (7,5mm), ou seja, a metade do valor máximo do jogo da via. Os comprimentos destas irregularidades são variáveis, porém o comprimento para a ocorrência do fenômeno *hunting*, é definido pela Equação (11) do Capítulo 3. Utilizando-se os seguintes valores: (b_0 = 0,8725m; r_0 = 0,4826m; e δ = 0,05) na Equação (11), tem-se o comprimento de onda de (18,234m), o qual irá produzir o fenômeno *hunting*.

As irregularidades rotacionais têm seu comprimento variável, porém sua amplitude também é limitada pela geometria dos truques, dos rodeiros, e da via. Conforme observado no Capítulo 3, para os seguintes valores: um rodeiro de bitola (1,60 m); rodas com diâmetro de (38”), largura do aro de (145 mm), frisos novos com altura de (25 mm), e espessura de (35 mm); jogo da via máximo de (15 mm); e trilhos TR-45 com largura do patim de (139,7 mm), e largura do boleto de (69,0 mm), tem-se a máxima amplitude da irregularidade rotacional de (0,890459274º).

A ressonância no veículo ocorrerá se a excitação externa (no caso de vibração forçada), coincidir com as suas freqüências naturais amortecidas. Como são dez freqüências naturais amortecidas, e dez modos naturais de vibração, têm-se dez condições de ressonância, e, portanto, dez velocidades ressonantes. As velocidades ressonantes do veículo para as respostas dinâmicas de deslocamento podem ser escritas da seguinte forma:

$$\omega_{dvi} = \omega_{Ii}; \qquad \omega_{Ii} = 2.\pi.f_{Ii} = \frac{2.\pi.V_{RVDi}}{l_{Ii}}; \qquad V_{RVDi} = \frac{\omega_{dvi}.l_{Ii}}{2.\pi}; \qquad i = 1,2,3,...,10. \tag{165}$$

Onde (ω_{dvi}), (ω_{Ii}), (f_{Ii}), (V_{RVDi}), e (l_{Ii}) representam as freqüências naturais circulares amortecidas do veículo, as freqüências circulares das irregularidades, as freqüências cíclicas das irregularidades, as velocidades ressonantes do veículo para as respostas dinâmicas de deslocamento, e os comprimentos das irregularidades da via, respectivamente.

As velocidades ressonantes do veículo para as respostas dinâmicas de velocidade, e de aceleração podem ser escritas respectivamente da seguinte maneira:

$$V_{RVVi} = \frac{\omega_{nvi}.l_{Ii}}{2.\pi}; \qquad V_{RVAi} = \frac{\omega_{nvi}.l_{Ii}}{2.\pi.\sqrt{1-2.\xi_{vi}^{\ 2}}}; \qquad i = 1,2,3,...,10. \tag{166}$$

Uma vez excitado o veículo na condição de ressonância, ocorrerá a amplificação de suas respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade, e aceleração. Esta amplificação será atenuada pelo amortecimento do sistema. Os três fatores de amplificação das respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade, e aceleração do veículo podem ser escritos da seguinte maneira:

$$R_{DVi} = \frac{1}{2.\xi_{vi}.\sqrt{1-\xi_{vi}^{\ 2}}}; \qquad R_{VVi} = \frac{1}{2.\xi_{vi}}; \qquad R_{AVi} = \frac{1}{2.\xi_{vi}.\sqrt{1-\xi_{vi}^{\ 2}}}; \qquad i = 1,2,3,...,10. \tag{167}$$

Utilizando-se os valores das razões de amortecimento apresentados na Tabela 11, têm-se os seguintes valores dos fatores de amplificação das respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade, e aceleração para o veículo:

Tabela 13 – Fatores de amplificação das respostas dinâmicas para o veículo.

MODO	***RDV***	***RVV***	***RAV***
1º	6,118	6,098	6,118
2º	3,632	3,597	3,632
3º	3,416	3,378	3,416
4º	3,185	3,145	3,185
5º	2,855	2,809	2,855
6º	2,765	2,717	2,765
7º	1,124	0,960	1,124
8º	1,111	0,942	1,111
9º	1,001	0,695	1,001
10º	1,042	0,625	1,042

Fonte: Autor.

Observa-se que as maiores amplificações ocorrem em baixas freqüências, situações estas de menores amortecimentos, pois com o aumento da razão de amortecimento, os fatores de amplificação dinâmica diminuem.

Para ilustrar as respostas dinâmicas das vibrações forçadas nas condições de ressonância, os comprimentos das irregularidades são escolhidos de maneira a amplificar as respostas dinâmicas do veículo. Isto é, relacionam-se com a geometria dos truques, dos rodeiros, da via, bem como, as distâncias geométricas do veículo. A Tabela 14 mostra os valores das irregularidades utilizados para a condição de ressonância em cada modo de vibração do veículo.

Tabela 14 – Valores das irregularidades utilizados nas condições de ressonância.

Nº	A_{VO} **(m)**	l_{VO} **(m)**	A_{VE} **(m)**	l_{VE} **(m)**	A_L **(m)**	l_L **(m)**	A_R **(º)**	l_R **(m)**
1º	...	...	...	...	0,0005	18,234	...	...
2º	0,01	7,5	0,01	7,5	...	...	...	...
3º	0,01	10,0	0,01	10,0	...	...	...	...
4º	-0,01	7,5	0,01	7,5	...	...	...	...
5º	...	...	...	...	...	...	0,0002	3,0
6º	-0,01	7,5	0,01	7,5	...	...	...	...
7º	0,01	1,0	0,01	1,0	...	...	...	...
8º	0,01	2,5	0,01	2,5	...	...	...	...
9º	-0,01	2,0	0,01	2,0	...	...	...	...
10º	-0,01	2,0	0,01	2,0	...	...	...	...

Fonte: Autor.

Utilizando-se os comprimentos das irregularidades apresentados na Tabela 14, e com as Equações (165) e (166), tem-se as seguintes velocidades ressonantes para as respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade, e aceleração apresentados na Tabela 15.

Tabela 15 – Velocidades ressonantes para as respostas dinâmicas do veículo.

Nº	V_{RVD} **(km/h)**	V_{RVV} **(km/h)**	V_{RVA} **(km/h)**
1º	85,018	85,300	85,880
2º	59,245	59,830	61,020
3º	84,087	85,027	86,953
4º	67,440	68,308	70,103
5º	30,068	30,555	31,571
6º	77,577	78,918	81,733
7º	25,482	29,855	44,158
8º	64,422	75,999	115,086
9º	57,261	82,421	...
10º	54,994	91,694	...

Fonte: Autor.

Para ilustrar a ressonância do 1º modo de vibração do veículo, a Figura 72 mostra as respostas dinâmicas de deslocamento lateral dos eixos 1, 2, 3, e 4. Os valores das irregularidades laterais, e da velocidade ressonante para as respostas dinâmicas de deslocamento utilizados estão dispostos nas Tabelas 14 e 15, respectivamente. O comprimento do trecho da via com irregularidades laterais a ser estudado é de 300 m.

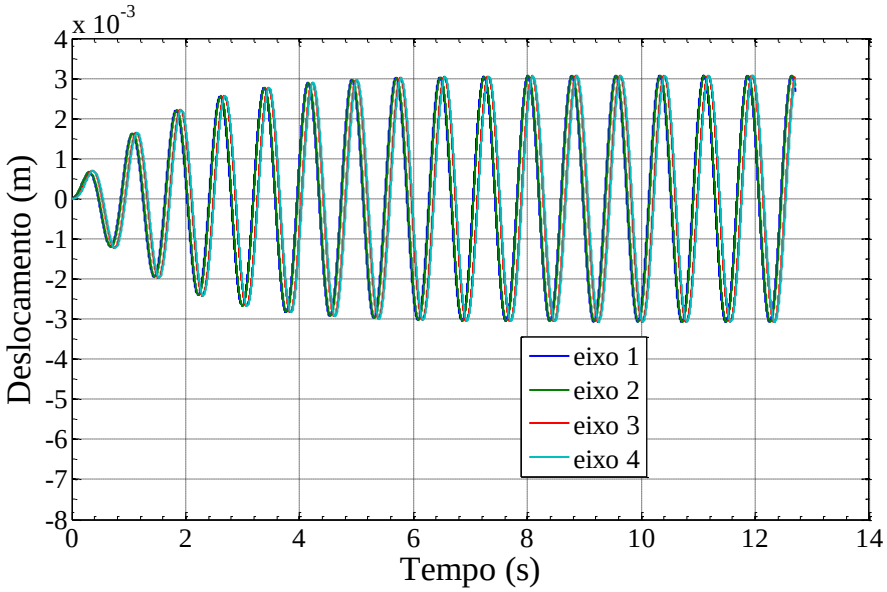


Figura 72 – Deslocamento lateral dos eixos 1, 2, 3, e 4.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 72 que as respostas dinâmicas de deslocamento lateral dos eixos 1, 2, 3, e 4, na condição de ressonância cresce até amplitudes próximas a (±3 mm), e estabiliza-se em função do tempo, mantendo-se próximo a este valor. As máximas amplitudes de deslocamento são compatíveis com o fator de amplificação dinâmica apresentado na Tabela 13. Também se observa que as respostas do eixo 1 são acompanhadas das respostas do eixo 2, havendo uma pequena defasagem em relação ao tempo entre eles, o mesmo ocorre entre os eixos 3 e 4.

A amplitude de irregularidade lateral utilizada neste exemplo é de 0,5mm, e o comprimento para a ocorrência do fenômeno de *hunting* utilizado é de 18,234 m. As respostas dinâmicas de deslocamento lateral encontradas são menores que o máximo valor do jogo da via de 15 mm, ou seja, (±7,5 mm). Desta forma, não está havendo o contato dos frisos das rodas com as laterais dos boletos dos trilhos. Para maiores valores de irregularidades laterais, como por exemplo, 1,22 mm, já serão observadas as condições de contato entre os frisos das rodas com as laterais dos boletos dos trilhos. Os deslizamentos das rodas sobre os trilhos, ocorrerão ainda anteriormente a este contato, e com amplitudes de irregularidades laterais menores a 1,22 mm, como será apresentado posteriormente.

Para a ressonância do 2º modo de vibração serão utilizados os valores das irregularidades verticais, e da velocidade ressonante para as respostas dinâmicas de deslocamento apresentados respectivamente nas Tabelas 14 e 15. A Figura 73 ilustra o veículo e o comprimento de irregularidade vertical utilizado.

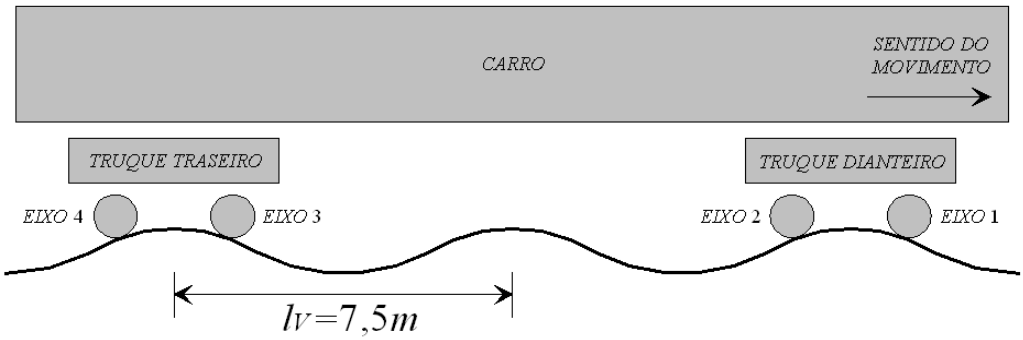


Figura 73 – Veículo e comprimento de irregularidade vertical.
Fonte: Autor.

A Figura 74 mostra as respostas dinâmicas de deslocamento vertical do carro e dos truques dianteiro e traseiro, conforme o 2º modo de vibração na condição de ressonância.

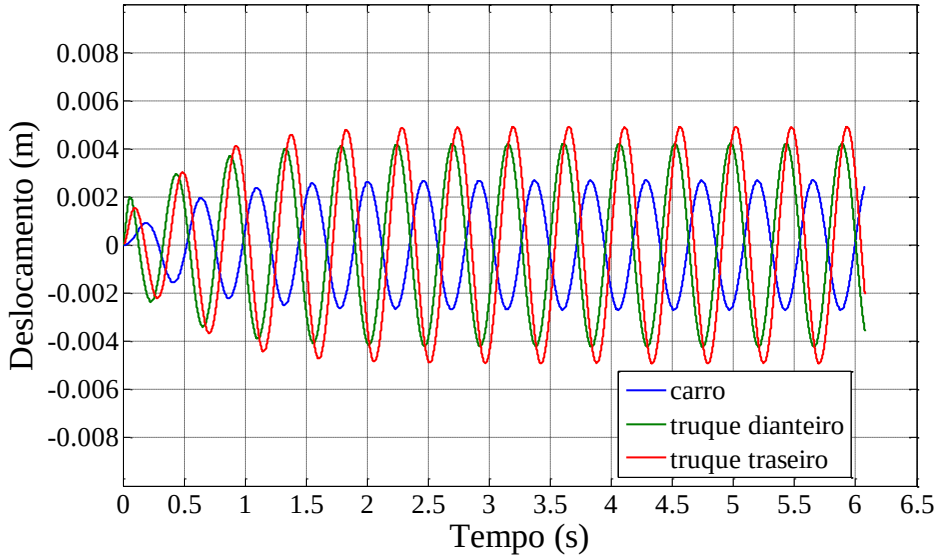


Figura 74 – Deslocamento vertical do carro e dos truques na condição de ressonância.
Fonte: Autor.

O comprimento do trecho da via com irregularidades verticais a ser estudado nesta condição é de 100 m. Observa-se que os deslocamentos são oscilatórios e harmônicos, conforme as funções de excitação externa, ou seja, as irregularidades verticais. Também é possível observar que os deslocamentos do carro são relativamente menores comparados aos dos truques. Isto se deve à presença da suspensão secundária, localizada entre os truques e o carro, às quais reduzem significativamente os deslocamentos. Os deslocamentos são defasados entre si devido à geometria do veículo, (fase em relação à excitação externa). Observa-se uma pequena amplificação dos deslocamentos do truque traseiro em relação ao dianteiro, isto possivelmente se deve à conexão do carro com os truques. Apesar da condição ressonante, os máximos deslocamentos encontrados são relativamente pequenos.

A Figura 75 mostra as respostas dinâmicas de deslocamento vertical dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme o 2º modo de vibração na condição de ressonância.

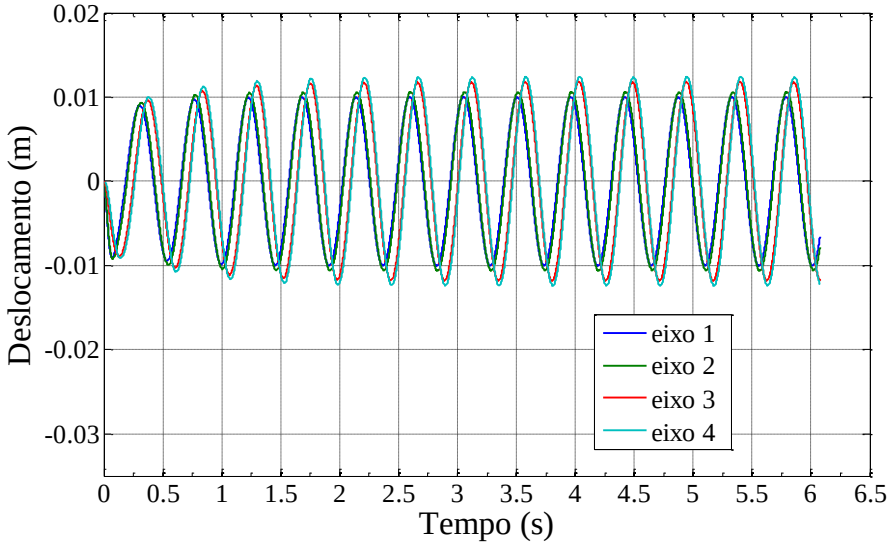


Figura 75 – Deslocamento vertical dos eixos na condição de ressonância.
Fonte: Autor.

É possível observar na Figura 75 que o comportamento dos deslocamentos verticais dos eixos é praticamente o mesmo, porém defasados em relação ao tempo, devido à geometria do veículo. Porém, observa-se uma pequena amplificação dos deslocamentos verticais dos eixos traseiros (3 e 4), em relação aos dianteiros (1 e 2). E, também ocorre amplificação entre os eixos traseiros (3 e 4). Isto possivelmente se deve à conexão do carro com os truques, e estes por sua vez, são conectados com os eixos. Também observa-se que os deslocamentos verticais têm aproximadamente as mesmas amplitudes das irregularidades verticais, pois as rodas recebem diretamente as irregularidades verticais da via sem que haja condição de amortecimento.

A Figura 76 compara os deslocamentos verticais do carro, do truque dianteiro, e do eixo 1, na condição de ressonância do 2º modo de vibração.

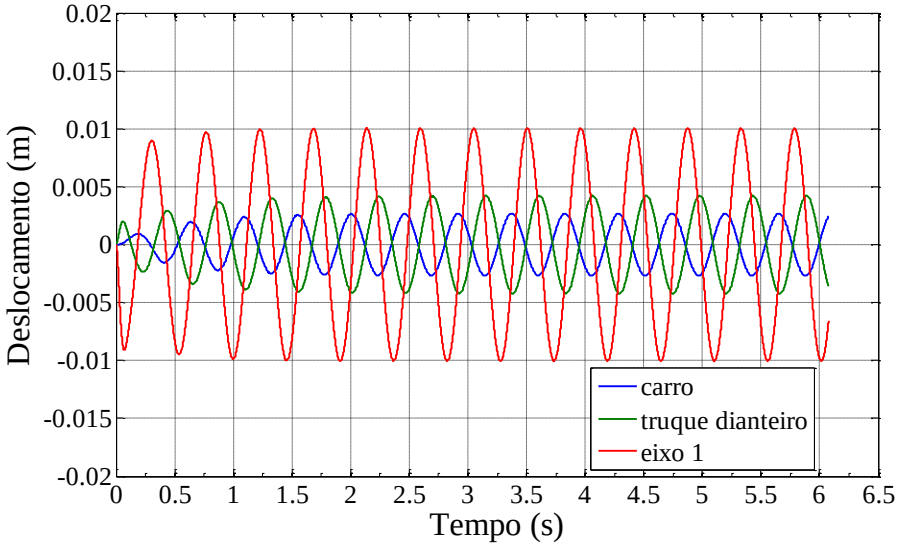


Figura 76 – Deslocamento vertical do carro, do truque dianteiro, e do eixo 1.
Fonte: Autor.

Comparando-se os deslocamentos verticais entre o eixo 1 e o truque dianteiro, percebe-se uma grande redução dos deslocamentos, proveniente da suspensão primária, que pode chegar até 95,33%. Comparando-se agora os deslocamentos verticais entre o truque dianteiro e o carro, também percebe-se uma redução dos deslocamentos, proveniente da suspensão secundária, que pode chegar até 38,10%. Observa-se grande eficiência por parte dos sistemas de suspensões primária e secundária no que diz respeito à redução dos deslocamentos. A defasagem entre as respostas dinâmicas de deslocamentos se deve à geometria do veículo.

A Figura 77 mostra as respostas dinâmicas de aceleração vertical do carro (*bouncing*) na condição de ressonância para a resposta dinâmica de aceleração, ou seja, na velocidade V_{RVA} = 61,020 km/h.

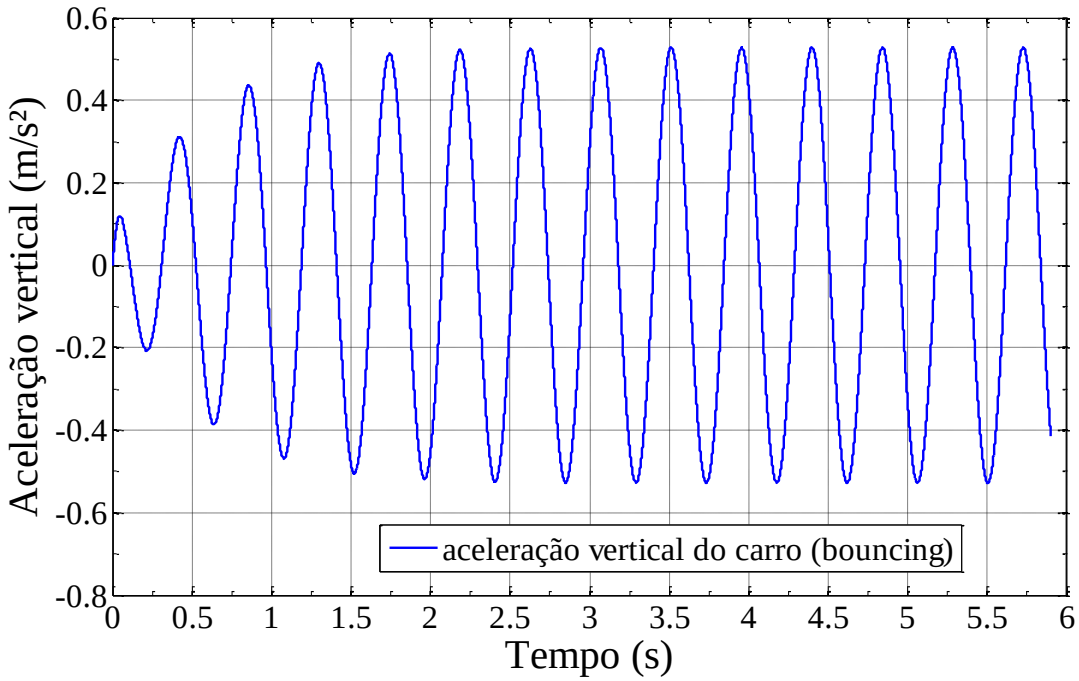


Figura 77 – Aceleração vertical do carro (*bouncing*).
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 77 que as respostas dinâmicas de aceleração vertical do carro (*bouncing*) crescem inicialmente, e estabilizam-se em função do tempo próximo aos valores de amplitudes (±0,5 m/s²). Os valores encontrados são relativamente pequenos apesar da condição de ressonância.

Para a ressonância do 3º modo de vibração serão utilizados os valores das irregularidades verticais, e da velocidade ressonante para a resposta dinâmica de deslocamento apresentados respectivamente nas Tabelas 14 e 15. O comprimento do trecho da via com irregularidades verticais a ser estudado é de 100 m. A Figura 78 ilustra o veículo e o comprimento de irregularidade vertical utilizado.

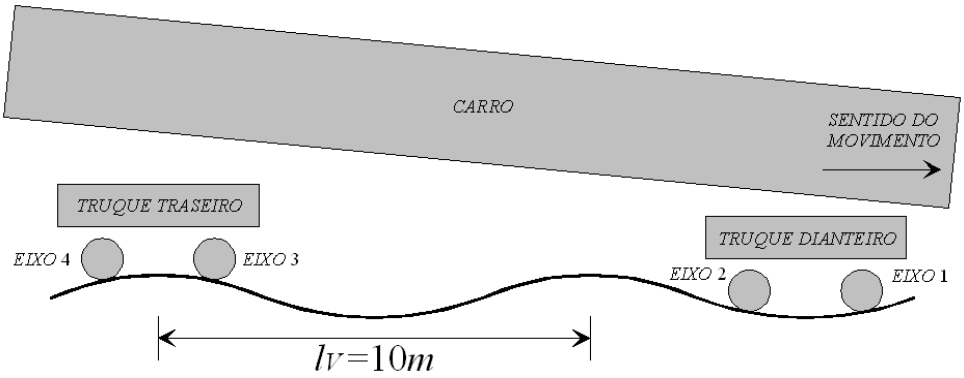


Figura 78 – Veículo e comprimento de irregularidade vertical.
Fonte: Autor.

A Figura 79 mostra a resposta dinâmica de rotação (*pitching*) do carro, conforme o 3º modo de vibração na condição de ressonância.

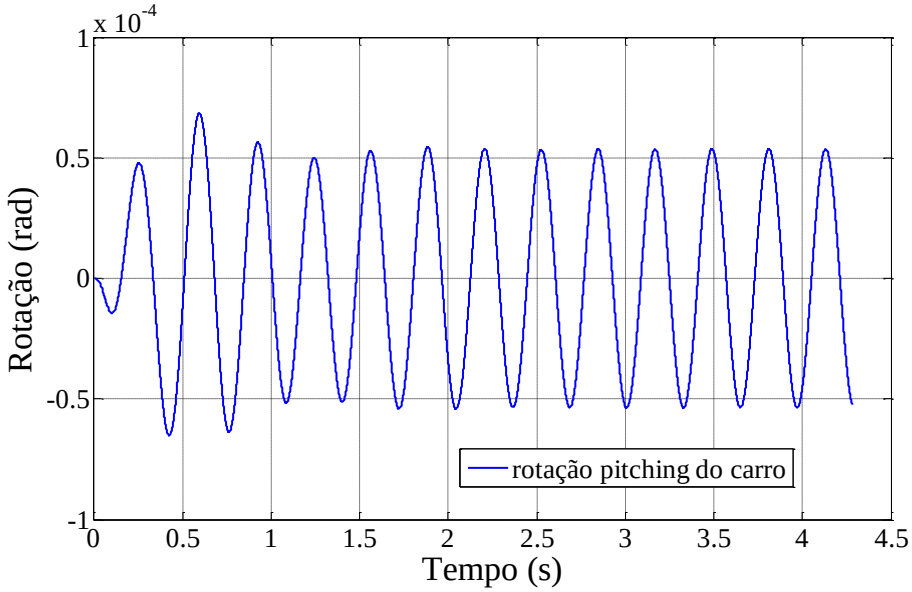


Figura 79 – Deslocamento da rotação (*pitching*) do carro na condição de ressonância.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 79 que a rotação (*pitching*) do carro possui uma pequena amplificação inicial que se estabiliza em função do tempo próximo aos valores de amplitudes (±0,00005 rad). Esta pequena amplificação está associada ao rompimento da inércia no início do movimento. Os máximos valores obtidos são relativamente pequenos.

As demais respostas dinâmicas de deslocamento vertical dos truques dianteiro e traseiro, e dos eixos 1, 2, 3, e 4, são menores que os encontrados na condição de ressonância do 2º modo, isto se deve ao amortecimento do sistema, pois a 3º razão de amortecimento é maior que a 2º.

A Figura 80 mostra as respostas dinâmicas de aceleração de rotação (*pitching*) do carro na condição de ressonância para a resposta dinâmica de aceleração, ou seja, na velocidade V_{RVA} = 86,953 km/h.

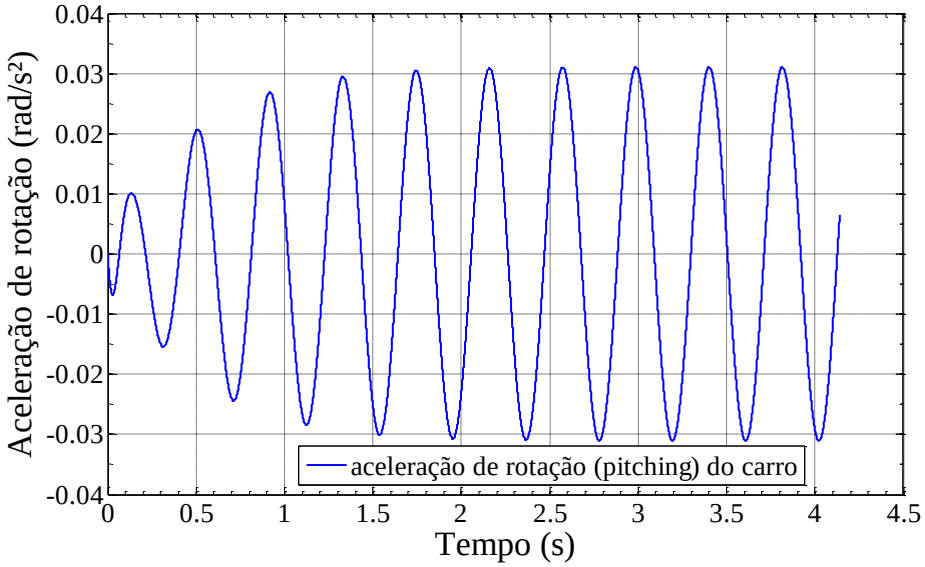


Figura 80 – Aceleração de rotação (*pitching*) do carro.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 80 que as respostas dinâmicas de aceleração de rotação (*pitching*) do carro crescem inicialmente, e estabilizam-se em função do tempo próximo aos valores de amplitudes (±0,03 rad/s²). Os valores encontrados aqui, também são relativamente pequenos apesar da condição de ressonância.

Para a ressonância do 4º modo de vibração serão utilizados os comprimentos de onda da irregularidade vertical de (7,5m), em ambos os trilhos (R_E e R_O), e amplitudes respectivas de (±10 mm), conforme indicado na Figura 81. Esta diferença entre as amplitudes de irregularidades dos trilhos (R_E e R_O), que irá provocar a excitação da rotação (*rolling*) do carro, dos truques dianteiro e traseiro, e dos eixos 1, 2, 3, e 4. A velocidade ressonante para as respostas dinâmicas de deslocamento será: V_{RVD} = 67,440 km/h. O comprimento do trecho da via com as irregularidades verticais tem 100 m.

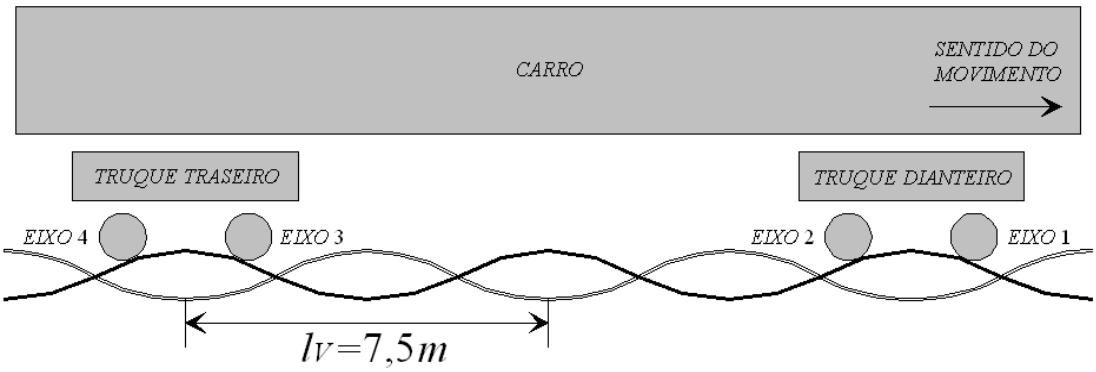


Figura 81 – Veículo e modelo de irregularidade vertical.
Fonte: Autor.

A Figura 82 mostra as respostas dinâmicas de deslocamento da rotação (*rolling*) do carro, e dos truques dianteiro e traseiro, conforme o 4º modo de vibração em ressonância.

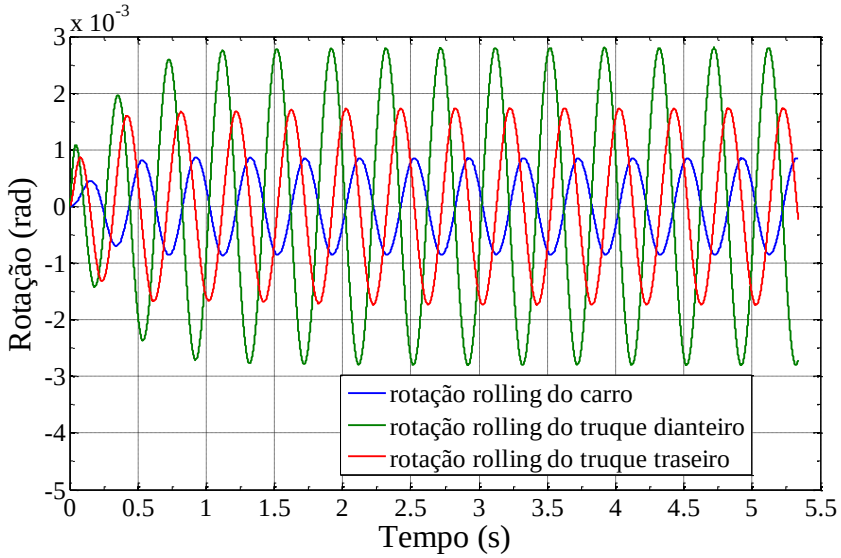


Figura 82 – Deslocamento da rotação (*rolling*) do carro, e dos truques.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 82 que os valores dos deslocamentos de rotação (*rolling*) do carro são inferiores aos dos truques dianteiro e traseiro, isto devido às suspensões secundárias. Observa-se também que há defasagem das respostas em relação ao tempo, devido à geometria do veículo. Esta defasagem contribui para a atenuação dos deslocamentos de rotação (*rolling*) do truque traseiro, como pode-se observar na Figura 82. As amplitudes tendem a estabilizar-se em função do tempo, e os máximos valores encontrados são relativamente baixos.

O 4º modo de vibração não excita o deslocamento de rotação (*rolling*) do carro, que aqui foi representado para comparar as respostas dinâmicas dos truques, bem como, explicar a atenuação das respostas do truque traseiro.

A Figura 83 mostra as respostas dinâmicas de deslocamento da rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme o 4º modo de vibração na condição de ressonância.

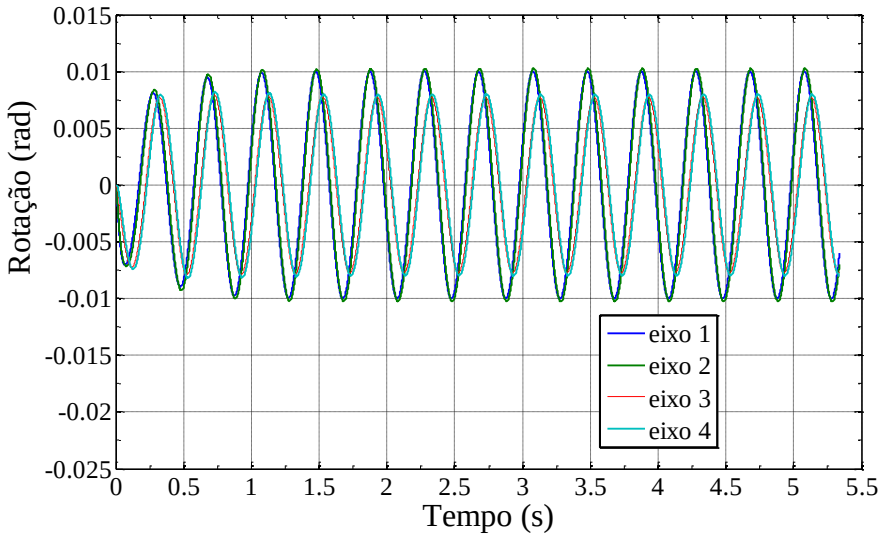


Figura 83 – Deslocamento da rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 83 que os deslocamentos de rotação (*rolling*) dos eixos tendem a estabilizar-se em função do tempo, e que os máximos valores encontrados são relativamente pequenos. Há defasagem entre os deslocamentos, e, também ocorre atenuação, neste caso, entre os eixos traseiros (3 e 4). Isto devido às ligações entre o carro e os truques, e entre os truques e os eixos, que através da defasagem de suas respostas podem, neste caso, atenuar as respostas de outros graus de liberdade do veículo.

Para ilustrar as respostas dinâmicas de deslocamento de rotação (*yawing*) dos eixos 1, 2, 3, e 4, na condição de ressonância do 5º modo de vibração do veículo, são utilizados o modelo de irregularidade rotacional com comprimento de onda de 3,0 m e amplitude de 0,0002º, e a velocidade ressonante para as respostas dinâmicas de deslocamento de V_{RVD} = 30,068 km/h.

A Figura 84 mostra as respostas dinâmicas de deslocamento de rotação (*yawing*) dos eixos 1, 2, 3, e 4, na condição de ressonância do 5º modo de vibração do veículo. O comprimento do trecho da via com as irregularidades rotacionais tem 40 m.

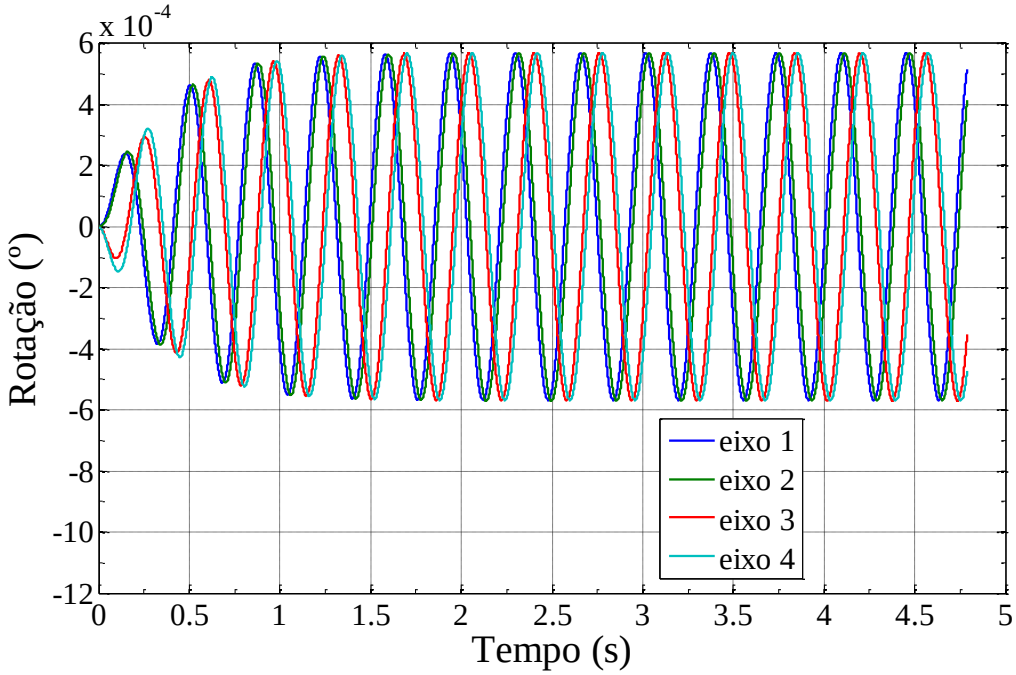


Figura 84 – Deslocamento da rotação (*yawing*) dos eixos 1, 2, 3, e 4.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 84 que as respostas dinâmicas de deslocamento de rotação (*yawing*) dos eixos 1, 2, 3, e 4, na condição de ressonância do 5º modo de vibração cresce até amplitudes próximas a (±0,0006º), e estabiliza-se em função do tempo, mantendo-se próximo a este valor. As máximas amplitudes de deslocamento são compatíveis com o fator de amplificação dinâmica apresentado na Tabela 13. Também se observa que as respostas do eixo 1 são acompanhadas das respostas do eixo 2, havendo uma pequena defasagem em relação ao tempo entre eles, o mesmo ocorre entre os eixos 3 e 4.

As respostas dinâmicas de deslocamento de rotação (*yawing*) encontradas são menores que o máximo valor de (±0,890459274º), imposto pela geometria dos truques, dos rodeiros, e da via. Desta forma, não está havendo o contato dos frisos das rodas com as laterais dos boletos dos trilhos. Para maiores valores de irregularidades rotacionais, como por exemplo, 0,313º, já ocorrerá o contato entre os frisos das rodas com as laterais dos boletos dos trilhos. Os deslizamentos das rodas sobre os trilhos, ocorrerão ainda anteriormente a este contato, e com amplitudes de irregularidades rotacionais menores a 0,313º, como será visto posteriormente.

Para a ressonância do 6º modo de vibração serão utilizados os mesmos valores das irregularidades verticais utilizados para o 4º modo de vibração, porém a velocidade ressonante para as respostas dinâmicas de deslocamentos será: V_{RVD} = 77,577 km/h.

A Figura 85 mostra as respostas dinâmicas de deslocamento da rotação (*rolling*) do carro, e dos truques dianteiro e traseiro, conforme o 6º modo de vibração na condição de ressonância.

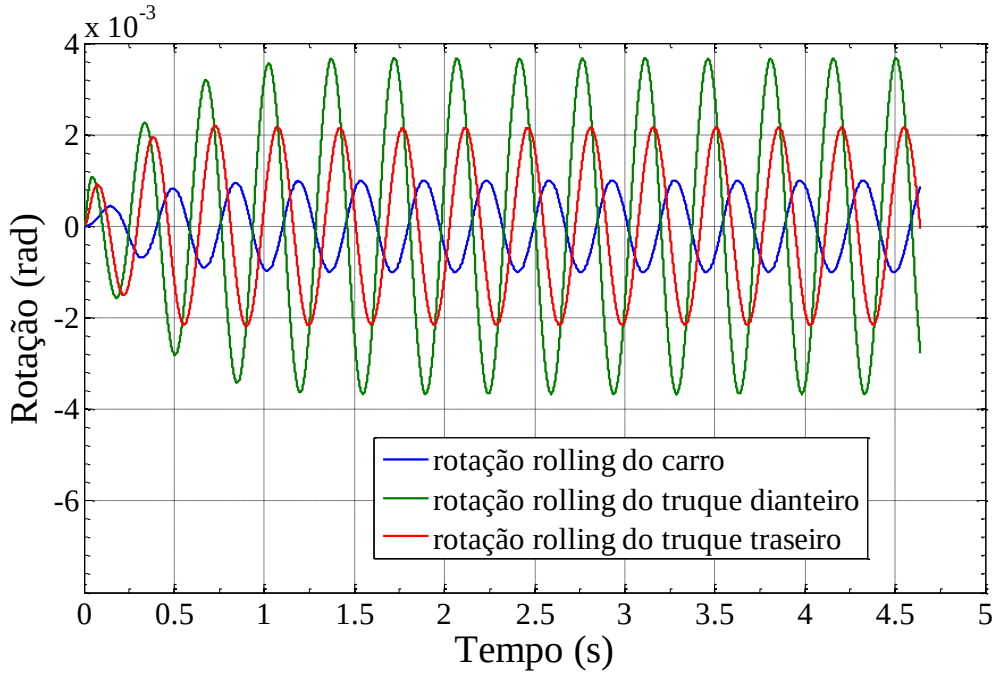


Figura 85 – Deslocamento da rotação (*rolling*) do carro, e dos truques.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 85 que a resposta dinâmica de deslocamento da rotação (*rolling*) do carro é relativamente inferior às obtidas para dos truques dianteiro e traseiro. Neste caso também ocorre a atenuação da resposta dinâmica no truque traseiro, devido às respostas defasadas do carro. Os máximos valores das respostas dinâmicas de deslocamentos de rotação (*rolling*) para o carro, e os truques dianteiro e traseiro obtidos para esta situação também são relativamente pequenos.

A Figura 86 mostra as respostas dinâmicas de deslocamento da rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme o 6º modo de vibração na condição de ressonância.

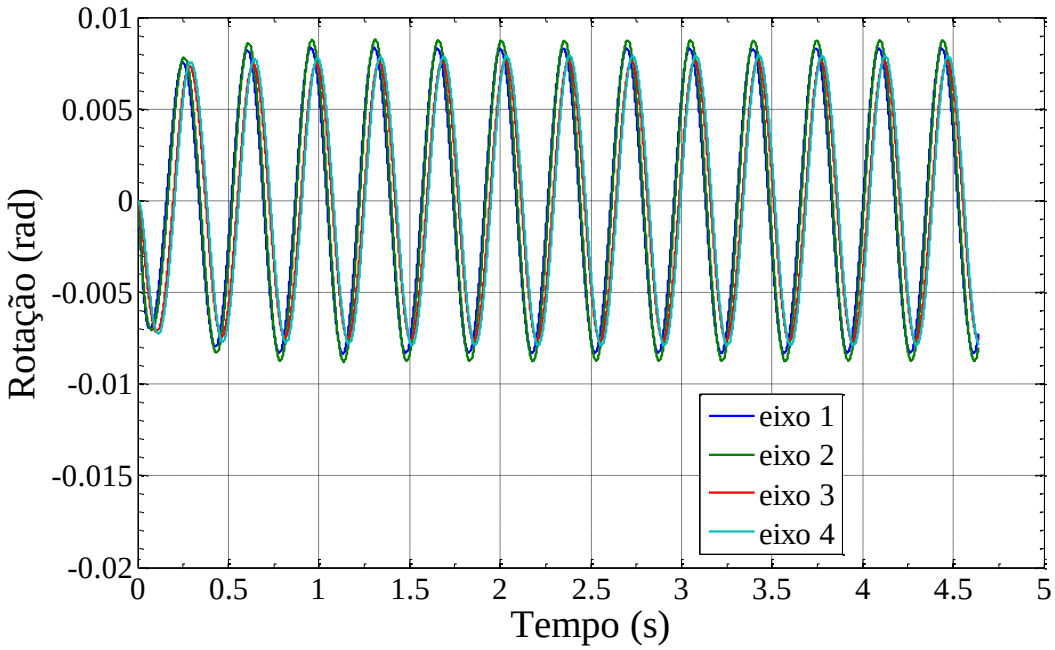


Figura 86 – Deslocamento da rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 86 que há defasagem entre os deslocamentos, e que também ocorre atenuação, neste caso, entre os eixos traseiros (3 e 4). As respostas são estabilizadas em função do tempo, e os máximos valores encontrados são relativamente baixos.

A Figura 87 mostra as respostas dinâmicas de aceleração de rotação (*rolling*) do carro na condição de ressonância para a resposta dinâmica de aceleração, ou seja, na velocidade V_{RVA} = 81,733 km/h.

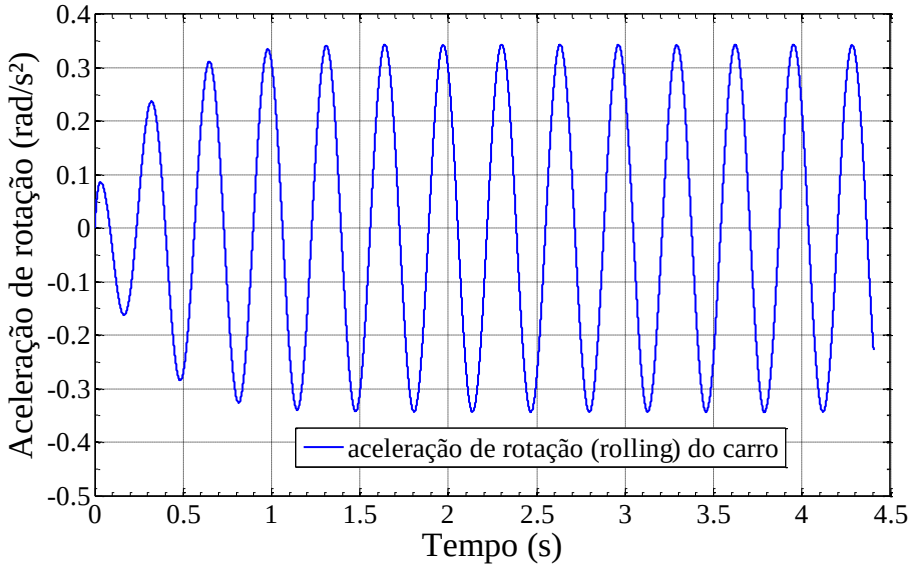


Figura 87 – Aceleração de rotação (*rolling*) do carro.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 87 que as respostas dinâmicas de aceleração de rotação (*rolling*) do carro crescem inicialmente, e estabilizam-se em função do tempo próximo aos valores de amplitudes (±0,35 rad/s²). Os valores encontrados nesta aceleração de rotação (*rolling*), são maiores que os da aceleração de rotação (*pitching*).

Para a ressonância do 7º modo de vibração serão utilizados os comprimentos de onda da irregularidade vertical de (1m), em ambos os trilhos (R_E e R_O), e amplitudes de 10 mm, conforme indicado na Figura 88. A velocidade ressonante do veículo para as respostas dinâmicas de deslocamento será: V_{RVD} = 25,482 km/h.

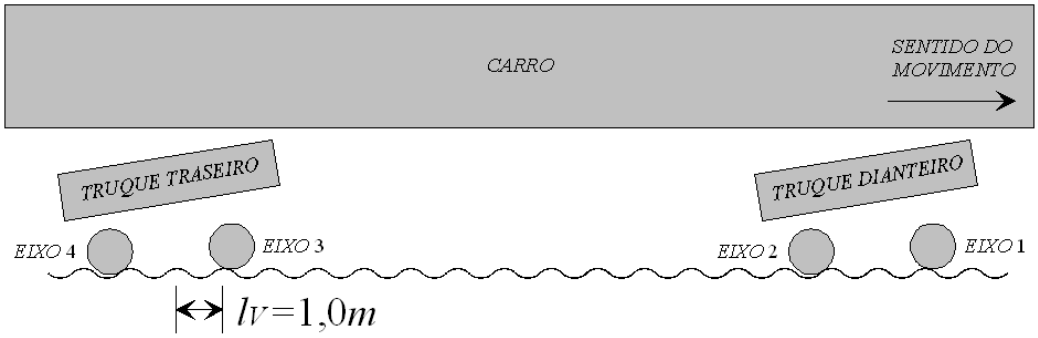


Figura 88 – Veículo e modelo de irregularidade vertical.
Fonte: Autor.

A Figura 89 mostra as respostas dinâmicas de deslocamento da rotação (*pitching*) dos truques dianteiro e traseiro, conforme o 7º modo de vibração na condição de ressonância, em um trecho de via de 10 m.

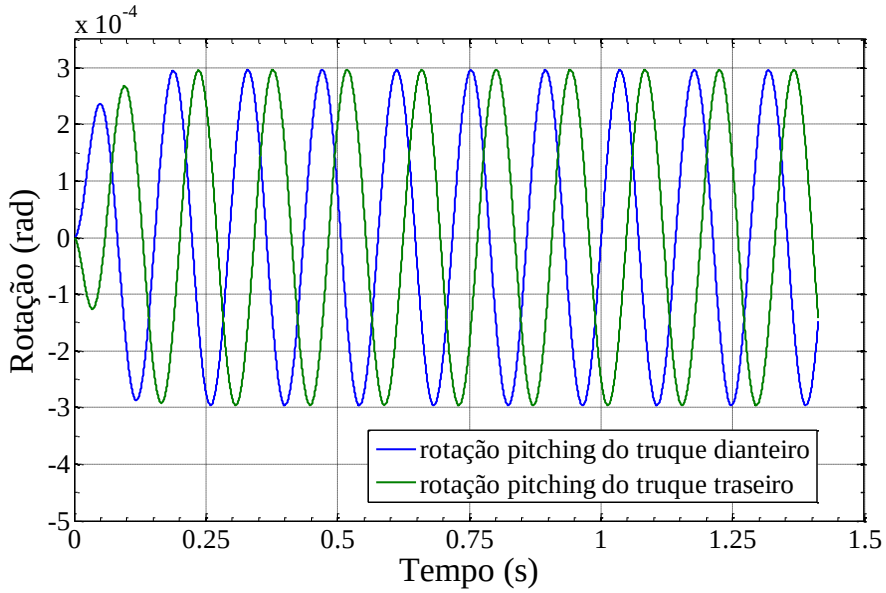


Figura 89 – Deslocamento da rotação (*pitching*) dos truques dianteiro e traseiro.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 89 que o comportamento dos deslocamentos de rotação (*pitching*) dos truques dianteiro e traseiro é praticamente idêntico, porém defasados em relação ao

tempo. Há estabilização das respostas em função do tempo, e as máximas amplitudes obtidas são pequenas. Está representando-se aqui um trecho de via de apenas 10 m, devido ao fator de escala para a representação gráfica, uma vez que os comprimentos das irregularidades utilizados aqui são menores que os dos exemplos anteriores.

A Figura 90 representa as respostas dinâmicas dos deslocamentos verticais dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme o 7º modo de vibração na condição de ressonância, em um trecho de via de 10 m.

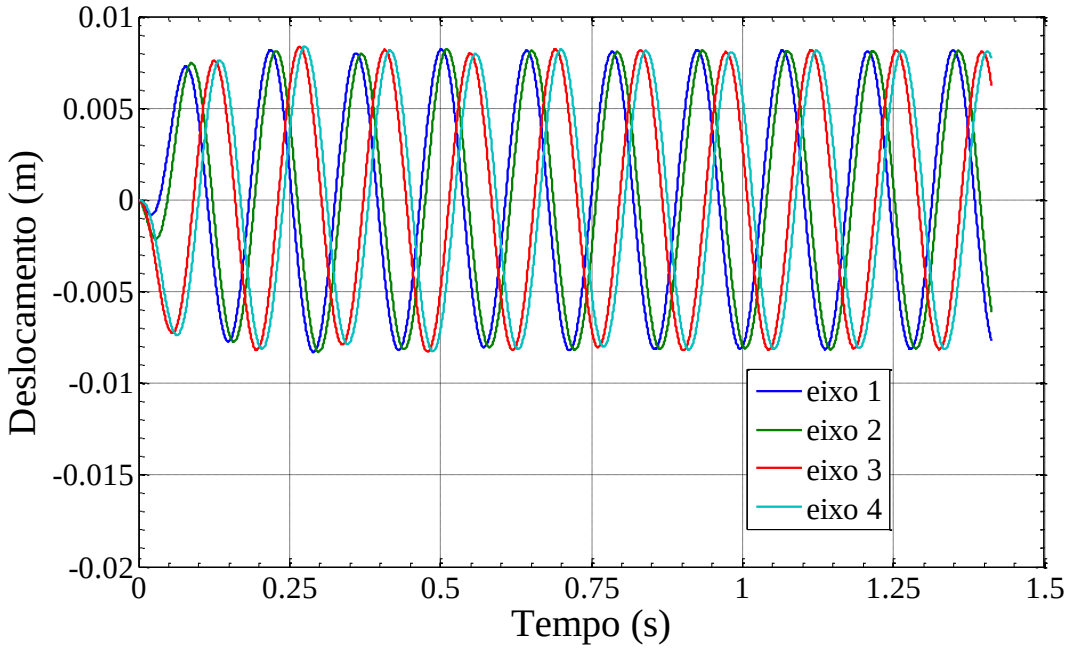


Figura 90 – Deslocamento vertical dos eixos 1, 2, 3, e 4.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 90 que o comportamento dos deslocamentos verticais do eixo 1 acompanha o eixo 2, bem como, o eixo 3 acompanha o eixo 4. Isto ocorre pois o comprimento de irregularidade vertical da via é pequeno, tornado as respostas com uma pequena defasagem em relação ao tempo. E, naturalmente há uma defasagem maior entre os pares de eixos (1 e 2) e (3 e 4), devido a geometria do veículo. As respostas são estabilizadas em função do tempo, e as máximas amplitudes são pequenas.

Para a ressonância do 8º modo de vibração serão utilizados os comprimentos de onda da irregularidade vertical de (2,5m), em ambos os trilhos (R_E e R_O), e amplitudes de 10 mm. A velocidade ressonante do veículo para as respostas dinâmicas de deslocamento utilizada será: V_{RVD} = 64,422 km/h.

A Figura 91 representa as respostas dinâmicas de deslocamento vertical dos truques dianteiro e traseiro, conforme o 8º modo de vibração na condição de ressonância, em um trecho de via de 50 m.

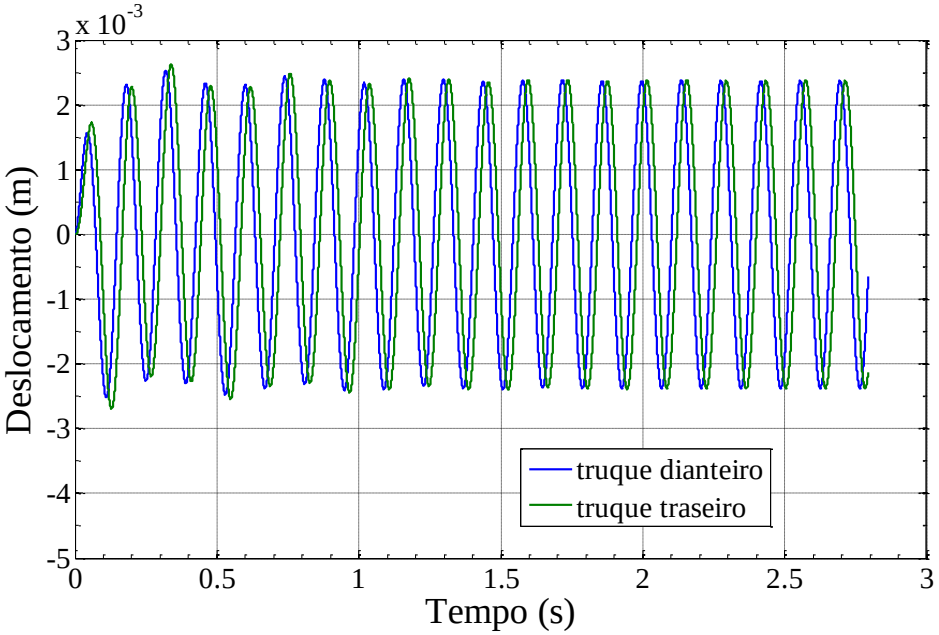


Figura 91 – Deslocamento vertical dos truques dianteiro e traseiro.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 91 que o comportamento das respostas dinâmicas de deslocamento vertical dos truques dianteiro e traseiro é semelhante, porém defasado em relação ao tempo. As amplitudes são estabilizadas ao longo do tempo, e seus máximos valores são relativamente pequenos. Está representando-se aqui um trecho de via de apenas 50 m, devido ao fator de escala para a representação gráfica.

A Figura 92 representa as respostas dinâmicas dos deslocamentos verticais dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme o 8º modo de vibração na condição de ressonância, em um trecho de via de 50 m.

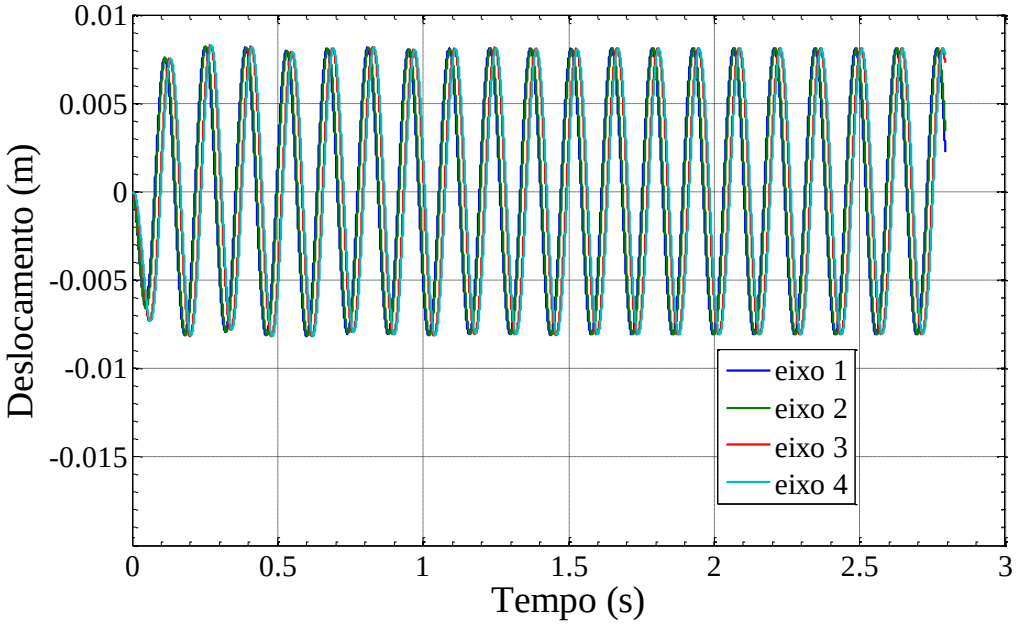


Figura 92 – Deslocamento vertical dos eixos 1, 2, 3, e 4.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 92 que os deslocamentos verticais dos eixos 1, 2, 3, e 4, são praticamente idênticos, porém defasados em relação ao tempo. Apesar da condição ressonante, as amplitudes dos deslocamentos são relativamente pequenas.

Para a ressonância do 9º modo de vibração serão utilizados os comprimentos de onda da irregularidade vertical de (2m), em ambos os trilhos (R_E e R_O), e amplitudes respectivas de (±10 mm). Esta diferença entre as amplitudes de irregularidades dos trilhos (R_E e R_O), que irá provocar a excitação da rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4. A velocidade ressonante do veículo para as respostas dinâmicas de deslocamento será: V_{RVD} = 57,261 km/h.

A Figura 93 mostra as respostas dinâmicas de deslocamento da rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme o 9º modo de vibração na condição de ressonância, em um trecho de via de 20 m.

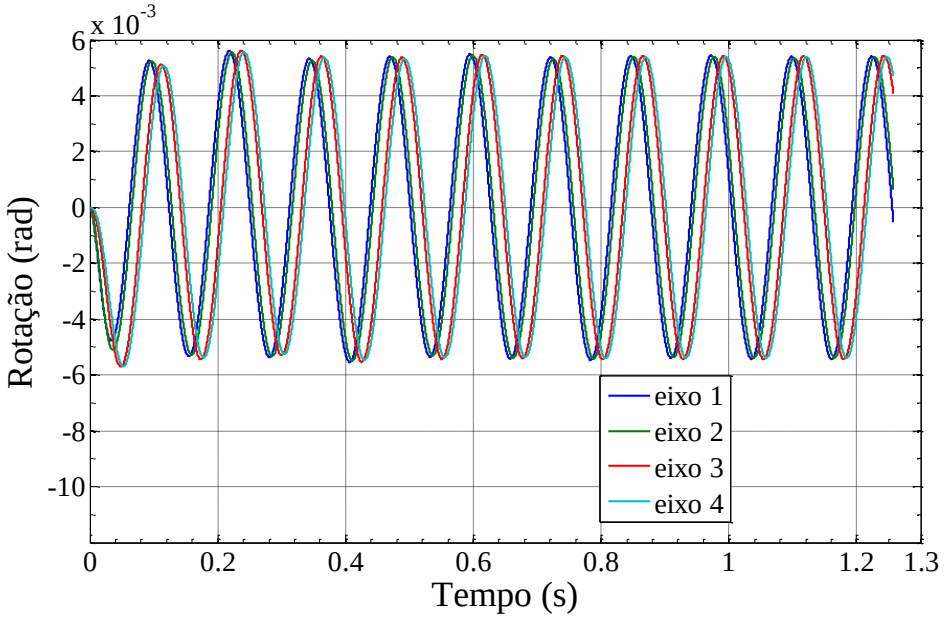


Figura 93 – Deslocamento da rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 93 que as respostas dinâmicas dos deslocamentos de rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4, são dispostas aos pares, isto é, o eixo 1 acompanha o eixo 2 com pequena defasagem em relação ao tempo, o mesmo ocorrendo com os eixos 3 e 4. A maior defasagem em relação ao tempo ocorre entre os pares de eixos (1 e 2) e (3 e 4), devido à geometria do veículo. As máximas amplitudes encontradas são relativamente baixas. Está representando-se aqui um trecho de via de apenas 20 m, devido ao fator de escala para a representação gráfica.

Para a ressonância do 10º modo de vibração será utilizado o mesmo modelo de irregularidades verticais da via anterior, porém a velocidade ressonante para as respostas dinâmicas de deslocamento será: V_{RVD} = 54,994 km/h.

A Figura 94 mostra as respostas dinâmicas de deslocamento da rotação (*rolling*) dos truques dianteiro e traseiro, conforme o 10º modo de vibração na condição de ressonância, em um trecho de via de 20 m.

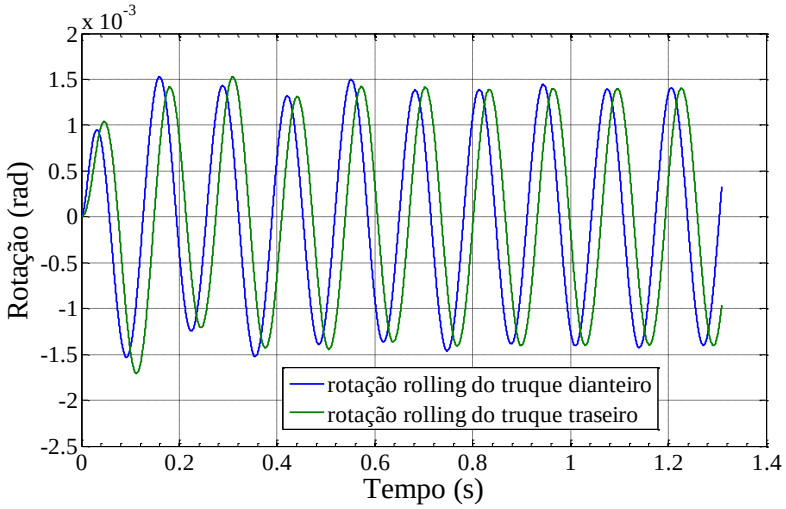


Figura 94 – Deslocamento da rotação (*rolling*) dos truques dianteiro e traseiro.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 94 que os deslocamentos da rotação (*rolling*) dos truques dianteiro e traseiro possuem o mesmo comportamento, porém as respostas são defasadas em relação ao tempo. As máximas amplitudes dos deslocamentos são revezadas entre os truques dianteiro e traseiro, porém estabilizam-se ao longo do tempo. Estas máximas amplitudes são relativamente pequenas. Está representando-se aqui um trecho de via de apenas 20 m, devido ao fator de escala para a representação gráfica.

A Figura 95 mostra as repostas dinâmicas dos deslocamentos de rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4, conforme o 10º modo de vibração na condição de ressonância, em um trecho de via de 20 m.

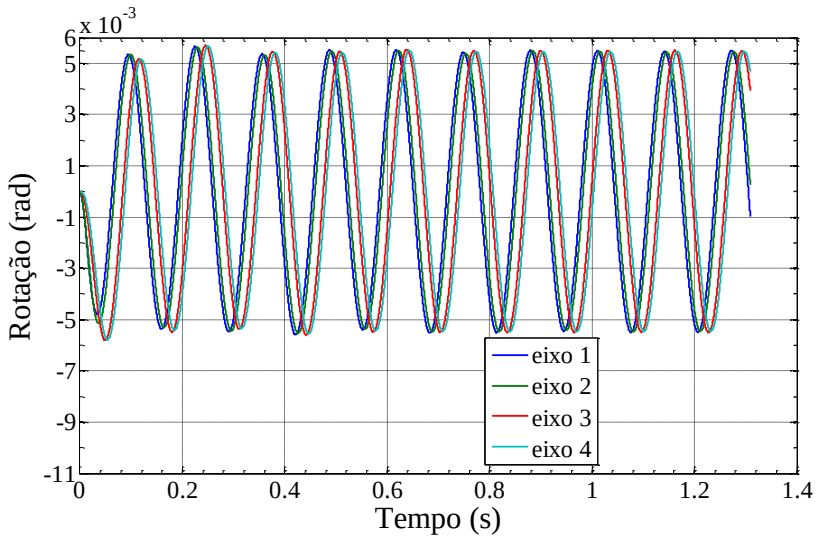


Figura 95 – Deslocamento da rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 95 que as respostas dinâmicas dos deslocamentos de rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4, são semelhantes às encontradas no 9º modo de vibração. Esta semelhança se deve ao mesmo modelo de irregularidades verticais da via, porém as velocidades ressonantes encontradas são diferentes. As respostas são estabilizadas com o tempo, e os máximos valores encontrados são relativamente pequenos. Está representando-se aqui um trecho de via de apenas 20 m, devido ao fator de escala para a representação gráfica.

Nesta sessão foi realizada a análise de vibração forçada nas condições de ressonância do veículo. Observou-se que as maiores amplificações ocorrem em baixas freqüências, situações estas de menores amortecimentos, pois com o aumento da razão de amortecimento, os fatores de amplificação dinâmica diminuem.

Os comprimentos das irregularidades foram escolhidos de maneira a amplificar as respostas dinâmicas do veículo. Isto é, relacionaram-se com a geometria dos truques, dos rodeiros, da via, bem como, as distâncias geométricas do veículo.

Observou-se que os deslocamentos em geral são oscilatórios e harmônicos, conforme as funções de excitação externa, ou seja, os modelos de irregularidades harmônicas empregados. Os deslocamentos são defasados em relação ao tempo devido à geometria do veículo. Em alguns casos ocorreram amplificações no início do movimento, devido ao rompimento da inércia.

Observou-se grande eficiência por parte dos sistemas de suspensões primária e secundária no que diz respeito à redução dos deslocamentos. A suspensão primária, localizada entre os eixos e os truques, reduz os deslocamentos dos truques. E, a suspensão secundária, localizada entre os truques e o carro, reduz os deslocamentos do carro.

Observou-se a estabilização das respostas dinâmicas de deslocamento e de aceleração em função do tempo devido ao amortecimento do sistema. Dependendo-se do ângulo de fase da excitação externa (irregularidades), e em função das ligações dos eixos com os truques, e dos truques com o carro, (geometria do sistema), obteve-se casos de amplificação, (em fase), e também casos de atenuação, (fora de fase) das respostas dinâmicas de deslocamento.

As irregularidades verticais da via empregadas foram as grandes, (comprimentos das ondas maiores que 300 mm, e amplitudes da ordem de 10 mm), de acordo com a classificação apresentada por (DAHLBERG, 2006). Pois se escolheu neste modelo as maiores amplitudes, o que resulta em maiores amplitudes de deslocamentos nos graus de liberdade do veículo, (situação mais crítica).

Observou-se a ocorrência de contato entre os frisos das rodas com as laterais dos boletos dos trilhos em duas condições: no 1º modo de vibração, com amplitudes de irregularidades

laterais acima de 1,22 mm; e no 5º modo de vibração, com amplitudes de irregularidades rotacionais acima de 0,313º.

Também observou-se que para um mesmo modelo de irregularidades da via, em diferentes velocidades ressonantes, obteve-se nos mesmos graus de liberdade as mesmas amplitudes de deslocamentos. Isto ocorreu com o 9º e o 10º modos de vibração do veículo nas respostas dinâmicas de deslocamento de rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4.

4.2.3 Análise dinâmica do contato entre as rodas e os trilhos

Nesta seção será apresentada a análise dinâmica do contato entre as rodas e os trilhos. Serão apresentadas as dimensões das elipses de contato, as tensões, os escorregamentos, e as forças tangenciais.

Para ilustrar as dimensões dos semi-eixos de uma elipse de contato entre roda e trilho, e as tensões provenientes deste contato uma situação dinâmica, serão utilizados: os comprimentos de onda da irregularidade vertical de (2m), em ambos os trilhos (R_E e R_O), e amplitudes respectivas de (±10 mm). Esta diferença entre as amplitudes de irregularidades dos trilhos (R_E e R_O), que irá provocar a excitação da rotação (*rolling*) do carro, dos truques dianteiro e traseiro, e dos eixos 1, 2, 3, e 4. Nesta aplicação não serão utilizados os modelos de irregularidades laterais, e rotacionais. A velocidade do veículo é de 30 km/h, e o trecho da via a ser estudado tem o comprimento de 30m. Nesta aplicação não ocorre deslizamento entre as rodas e os trilhos. As propriedades geométricas e materiais dos corpos rígidos em contato, isto é, as rodas e os trilhos são apresentadas na Tabela 16.

Tabela 16 – Propriedades geométricas e materiais das rodas e dos trilhos.

Corpos Rígidos	Parâmetros	Símbolos	Valores	Unidades
Rodas	Raio de curvatura	R_1	0,4826	m
	Raio de curvatura	R'_1	∞	m
	Módulo de elasticidade	E_1	206,85	GPa
	Módulo de cisalhamento	G_1	80,05	GPa
	Coeficiente de Poisson	v_1	0,292	...
Trilhos	Raio de curvatura	R_2	0,254	m
	Raio de curvatura	R'_2	∞	m
	Módulo de elasticidade	E_2	206,85	GPa
	Módulo de cisalhamento	G_2	80,05	GPa
	Coeficiente de Poisson	v_2	0,292	...
Rodas e Trilhos	Ângulo de contato	ψ	$\pi/2$	rad

Fonte: Autor.

A Figura 96 mostra as dimensões dos semi-eixos da elipse de contato entre roda e trilho da roda 1.

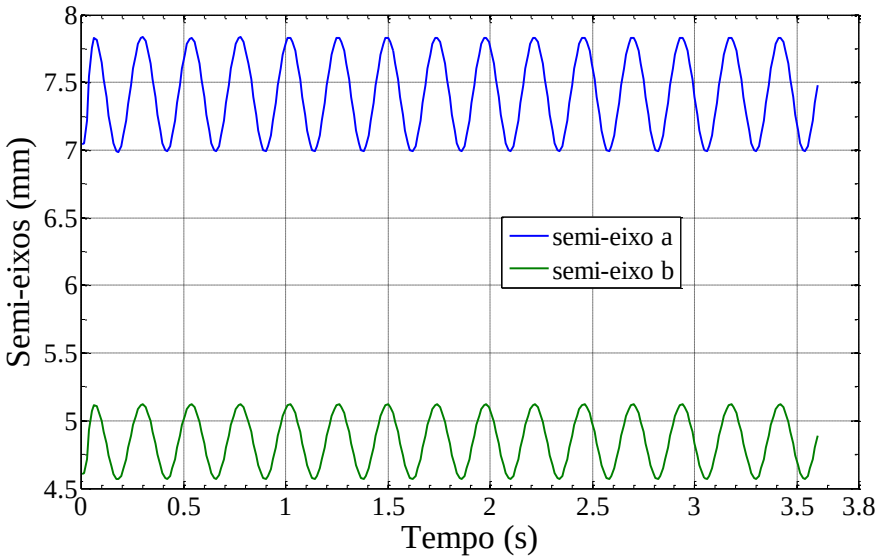


Figura 96 – Dimensões dos semi-eixos da elipse de contato.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 96 que as dimensões dos semi-eixos da elipse de contato são oscilatórias em função do tempo, pois as forças de compressões distribuídas em cada roda também são oscilatórias devido às excitações externas das irregularidades verticais. As dimensões do semi-eixo (*a*) são maiores que as dimensões do semi-eixo (*b*). Para este caso, as dimensões do semi-eixo (*a*) variam de (6,988 mm a 7,834 mm), e as dimensões do semi-eixo (*b*) variam de (4,567 mm a 5,121 mm). Devido às variações das dimensões dos semi-eixos da elipse de contato, ocorrerá a variação da área da elipse de contato. A Figura 97 mostra a variação da área da elipse de contato.

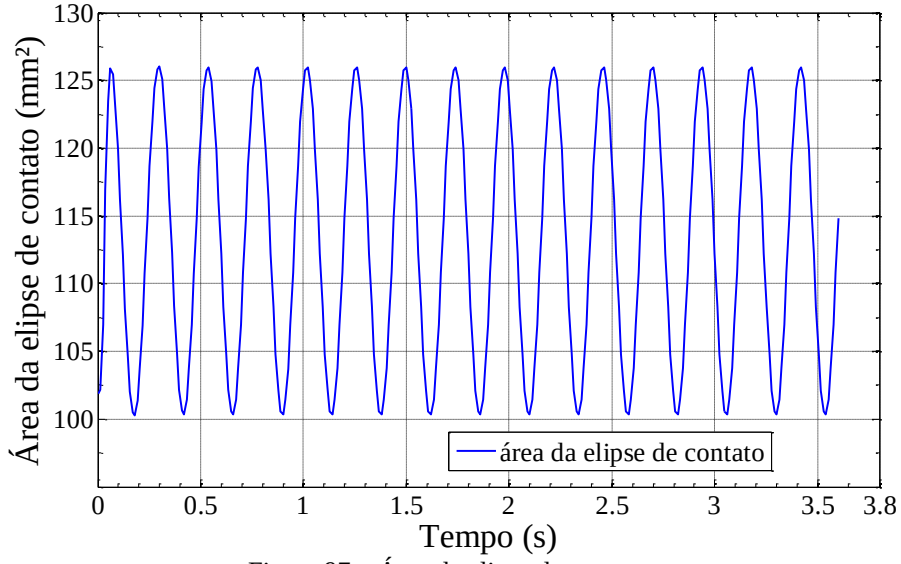


Figura 97 – Área da elipse de contato.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 97 que a área de elipse de contato também é variável em função do tempo, esta variação compreende (100,265 mm² a 126,026 mm²).

Em função da variação da área da elipse de contato, também ocorrerão variações nas tensões de contato. A Figura 17 mostra a elipse de contato com os pontos (P_0 = (0,0,0)), (P_a = (a,0,0)) e (P_b = (0,b,0)), onde serão avaliadas as tensões de contato.

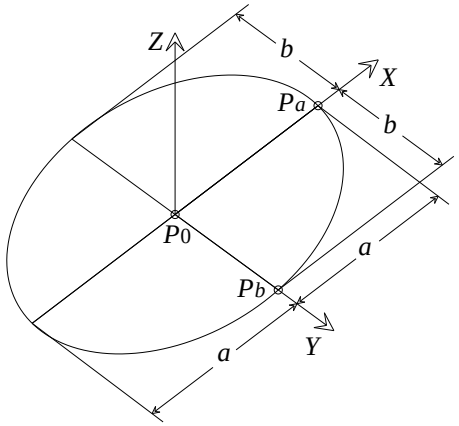


Figura 17 – Pontos da elipse de contato.
Fonte: Autor.

As tensões de compressão nas direções principais avaliadas no centro da elipse de contato, ou seja, no ponto P_0 = (0,0,0) são mostradas na Figura 98.

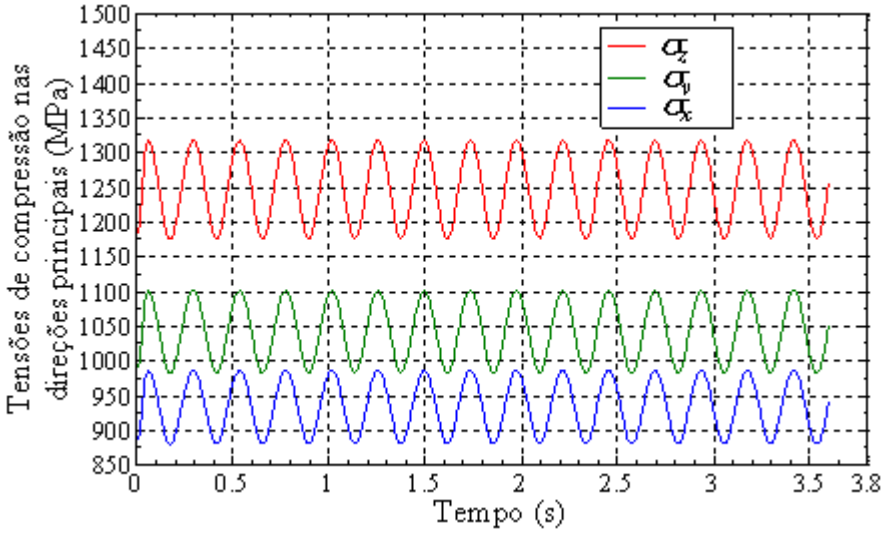


Figura 98 – Tensões de compressão nas direções principais no ponto P_0 = (0,0,0).
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 98 que as tensões de compressão nas direções principais são oscilatórias, e ($\sigma_z > \sigma_y > \sigma_x$). As tensões ($\sigma_z$) variam entre (1175,3 MPa a 1317,7 MPa), as tensões (σ_y) variam entre (982,1 MPa a 1101,0 MPa), e as tensões (σ_x) variam entre (879,6 MPa a 986,2 MPa).

Os resultados das tensões dinâmicas obtidas anteriormente consideraram as superfícies de contato entre rodas e trilhos sem desgaste, ou seja, raio de curvatura do boleto do trilho original e superfície de rolamento das rodas novas. Isto pode explicar a causa dos elevados valores de tensões obtidos.(SANTOS, 2000).

Com o desgaste das superfícies das rodas e dos trilhos em contato, as áreas de contato tendem a aumentar, reduzindo-se desta maneira os valores das tensões. Medições realizadas por (KUMAR, 1981) apud (SANTOS, 2000), mostraram que as tensões de contato entre rodas e trilhos tendem a estabilizar-se em função dos ciclos de carregamento. Entende-se por ciclo de carregamento a revolução integral de uma roda sendo solicitada, ou seja, seu perímetro. Para veículos mais pesados a estabilização ocorre mais rapidamente, pois o desgaste das superfícies é mais acentuado com a intensidade de tensões.

Em (KUMAR, 1992) apud (SANTOS, 2000), também foi estudado o volume de desgaste das rodas em função dos ciclos de carregamento, e das tensões máximas de contato, em ensaios experimentais.

Quanto ao tipo de desgaste nos trilhos e sua origem, segundo (BRINA, 1979), referindo-se ao desgaste ondulatório dos trilhos:

> O trilho adquire ondulações de frações de milímetro, atingindo até alguns milímetros. A causa desse desgaste é pouco conhecida, mas parece ser originada pelas vibrações produzidas nos trilhos, durante a passagem das rodas dos veículos, fazendo variar o grau de aderência e pressão nos pontos de contato. Isto acarreta uma variação na velocidade angular da roda e em conseqüência, uma série de deslizamentos elementares, que produzem no trilho o desgaste ondulatório. Este tipo de desgaste, não acarreta perigo ao tráfego, mas torna o trilho excessivamente ruidoso, na passagem dos trens, diminuindo o conforto dos passageiros. (BRINA, 1979, p. 56-57).

Os pontos localizados no limite da elipse de contato não possuem tensão principal na direção (z), ou seja, ($\sigma_z = 0$). Nestes pontos ocorre um cisalhamento puro, como visto anteriormente no Capítulo 3. As tensões cisalhantes de contato são avaliadas nas extremidades da elipse de contato, ou seja, nos pontos $P_a = (a,0,0)$ e $P_b = (0,b,0)$. A Figura 99 mostra as tensões cisalhantes de contato.

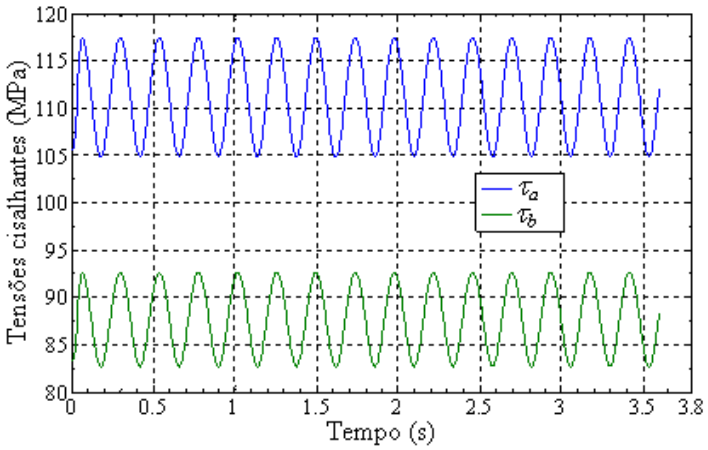


Figura 99 – Tensões cisalhantes nos pontos $P_a = (a,0,0)$ e $P_b = (0,b,0)$.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 99 que as tensões cisalhantes são oscilatórias, e ($\tau_a > \tau_b$). As tensões (τ_b) são negativas, e foram representadas em módulo aqui, devido ao fator de escala gráfica. As tensões cisalhantes (τ_a) variam entre (104,8 MPa a 117,5 MPa), e as tensões cisalhantes (τ_b) variam entre (–82,6 MPa a –92,6 MPa).

Para ilustrar agora as situações que produzirão os escorregamentos, e também ilustrar as forças de contato, utilizam-se os mesmos dados da situação anterior, e acrescenta-se os modelos de irregularidades laterais, e rotacionais da via. As irregularidades laterais terão comprimento de onda de (3m), e amplitudes de (1mm), e o modelo de irregularidades rotacionais, tem comprimento de onda de (3m), e amplitudes de (0,0005º). O coeficiente de atrito dinâmico entre rodas e trilhos empregado é 0,33, para a condição de trilhos completamente secos, ou lavados pela chuva. Por se tratar de atrito dinâmico, haverá variação do coeficiente de atrito em função da velocidade, de acordo com a Equação (61) do Capítulo 3. Nesta aplicação não ocorre deslizamento entre as rodas e os trilhos.

Os coeficientes da rigidez de contato de *Kalker* (C_{11}, C_{22}, C_{23} e C_{33}) para (ν = 0,292) foram obtidos através da Tabela 7 do Capítulo 3 mediante interpolação linear, pois este valor é intermediário aos valores (ν = 0,25 e ν = 0,5). O Apêndice E mostra os valores obtidos nestas interpolações, e também os compara graficamente. Após a obtenção dos valores interpolados, empregou-se o Método dos Mínimos Quadrados para a determinação dos valores intermediários. As equações de ajuste são polinômios de quarta ordem e de terceira ordem, e uma equação de potência, conforme é apresentado no Apêndice E.

A Figura 100 mostra os escorregamentos na elipse de contato, na direção longitudinal ao trilho (ξ_x), e na direção transversal ao trilho (ξ_y), produzidos pela roda 1.

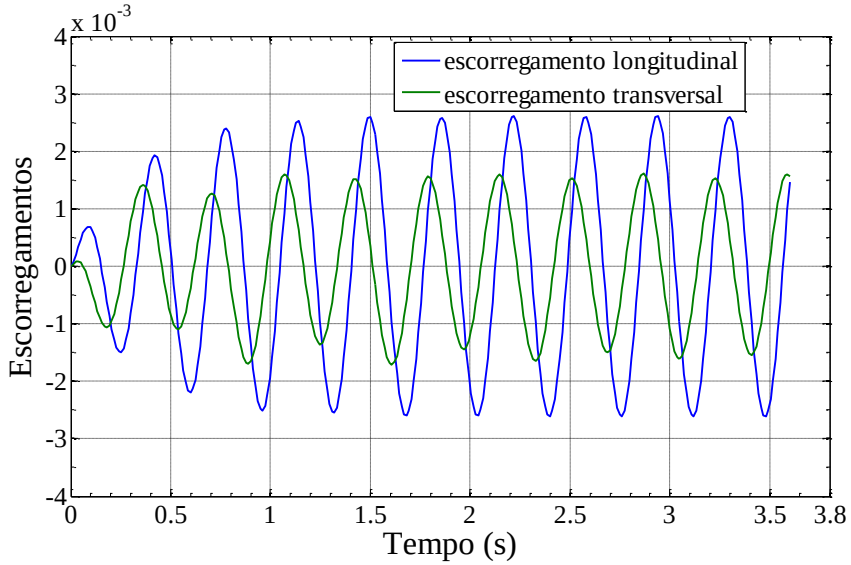


Figura 100 – Escorregamentos longitudinal e transversal.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 100 que os escorregamentos também são oscilatórios, e estabilizam-se em função do tempo. Percebe-se que os escorregamentos longitudinal e transversal são defasados em função do tempo, e ($\xi_x > \xi_y$). Os escorregamentos não apresentam unidades, pois referem-se a razão entre a diferença de velocidade circunferencial e a velocidade translacional da roda, pela média aritmética normalizada destas velocidades, de acordo com a Equação (71) apresentada no Capítulo 3.

Através da teoria de *Kalker* apresentada no Capítulo 3, observou-se que as forças tangenciais de contato são proporcionais aos escorregamentos. A Figura 101 mostra as forças tangenciais de contato saturadas, nas direções longitudinal e transversal. Estas forças tangenciais saturadas são obtidas de acordo com o modelo proposto por *Vermeulen* e *Johnson*, apresentado na Equação (87) do Capítulo 3.

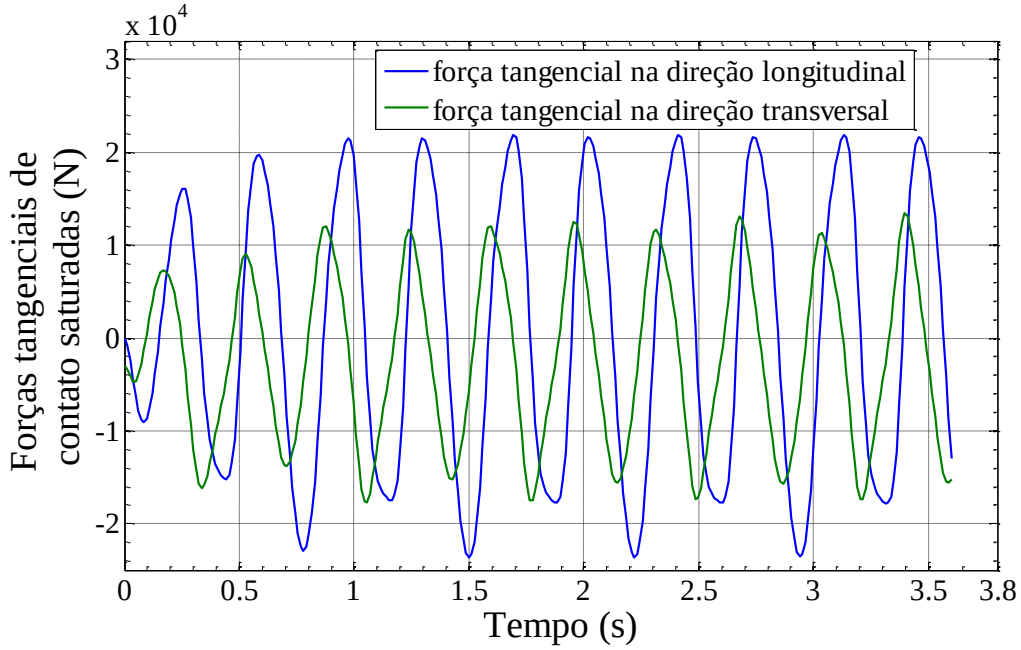


Figura 101 – Forças tangenciais de contato saturadas.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 101 que as forças tangenciais de contato saturadas são oscilatórias, e as amplitudes da força tangencial na direção longitudinal são maiores que as encontradas na força tangencial na direção transversal. Esta proporcionalidade entre as forças tangenciais saturadas, também é observada entre os escorregamentos, uma vez que são diretamente relacionados às rigidezas, de acordo com a teoria linear de *Kalker*.

O escorregamento de rotação *spin* avaliado na elipse de contato produzido pela roda 1 é apresentado na Figura 102.

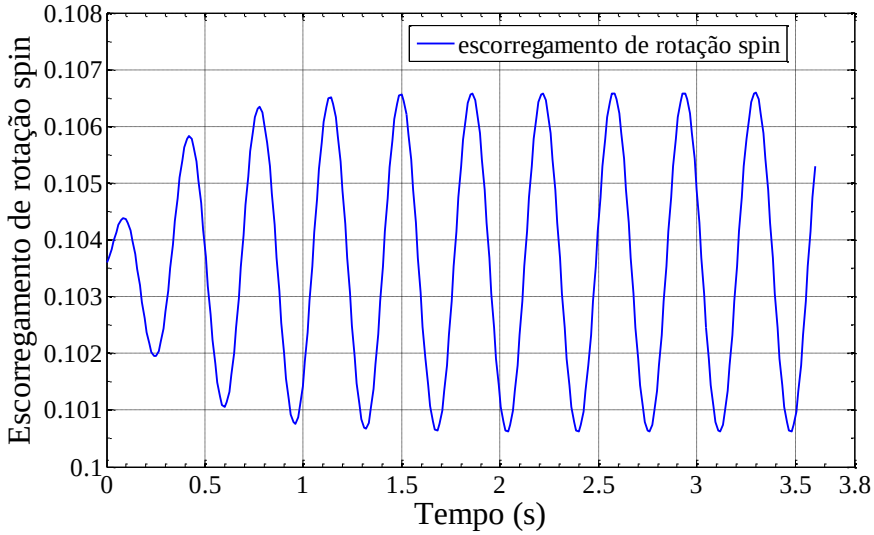


Figura 102 – Escorregamento de rotação *spin*.
Fonte: Autor.

Também percebe-se aqui na Figura 102 que os escorregamentos de rotação *spin* são oscilatórios, e estabilizam-se com o tempo. A Figura 103 mostra o momento de rotação de *spin* saturado na elipse de contato produzido pela roda 1.

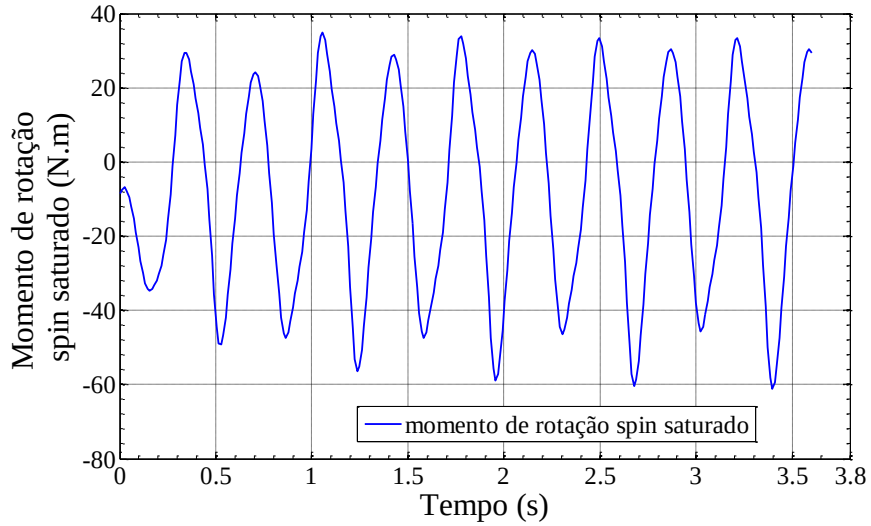


Figura 103 – Momento de rotação *spin* saturado.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 103 que os momentos de rotação *spin* são oscilatórios, e seus respectivos valores são baixos. Percebe-se que os valores dos escorregamentos de rotação *spin* são altos, e os valores dos momentos de rotação *spin* saturados são baixos, o que implica em rigidez ao escorregamento de rotação *spin* muito baixa, de acordo com a teoria linear de *Kalker*.

Observa-se nas forças tangenciais saturadas, e no momento de rotação *spin* saturado, que suas respectivas curvas sofrem uma pequena declinação próxima aos seus picos. Isto se deve

ao modelo de *Vermeulen* e *Johnson* que restringe as forças tangenciais de contato e o momento de rotação *spin* segundo um polinômio cúbico.

A Figura 104 interpreta os escorregamentos longitudinais produzidos pelo eixo 1 avaliados nas rodas 1 e 2, e suas respectivas forças tangenciais de contato na direção longitudinal.

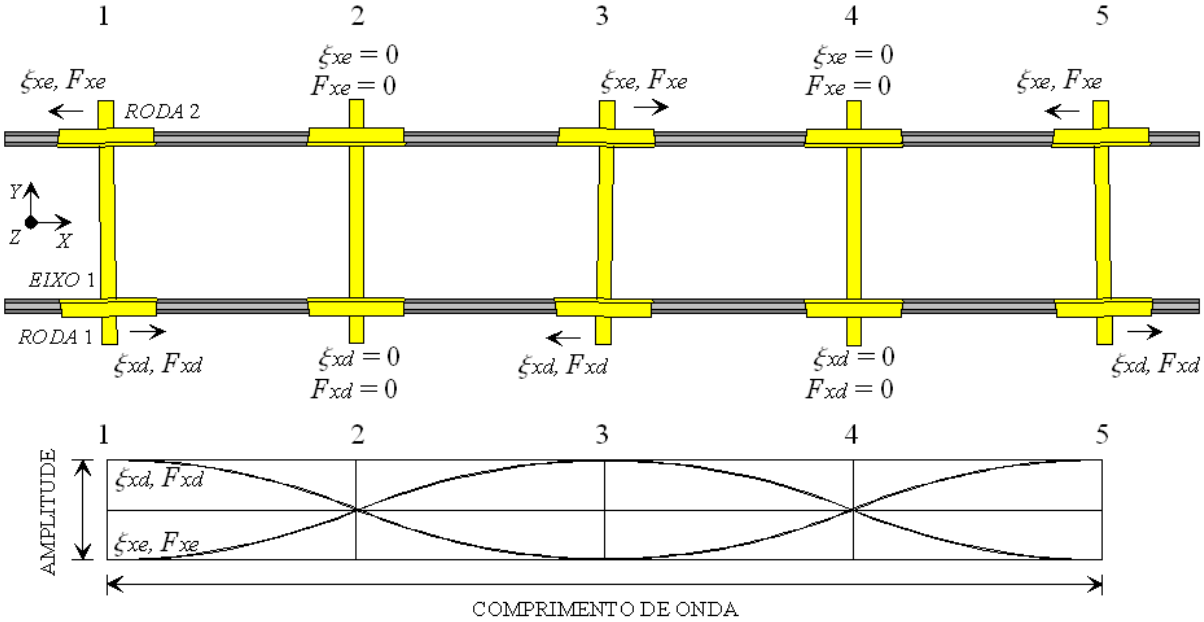


Figura 104 – Escorregamentos e forças tangenciais na direção longitudinal.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 104 que os escorregamentos e as forças tangenciais de contato na direção longitudinal alternam-se em relação aos sinais. Para ilustrar a condição acima, a Figura 105 mostra os escorregamentos longitudinais das rodas 1 e 2, sob as condições anteriores.

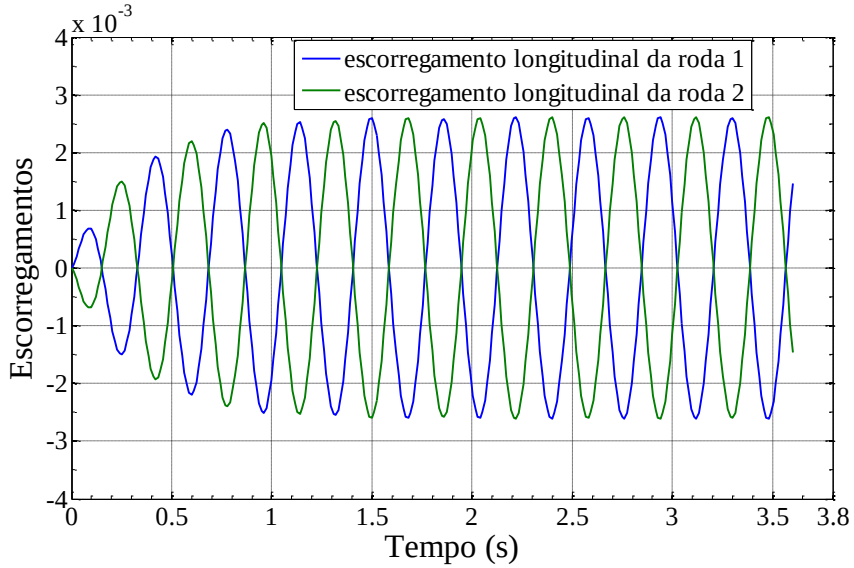


Figura 105 – Escorregamentos longitudinais das rodas 1 e 2.
Fonte: Autor.

A Figura 106, mostra as forças tangenciais de contato saturadas na direção longitudinal das rodas 1 e 2, sob as condições anteriores.

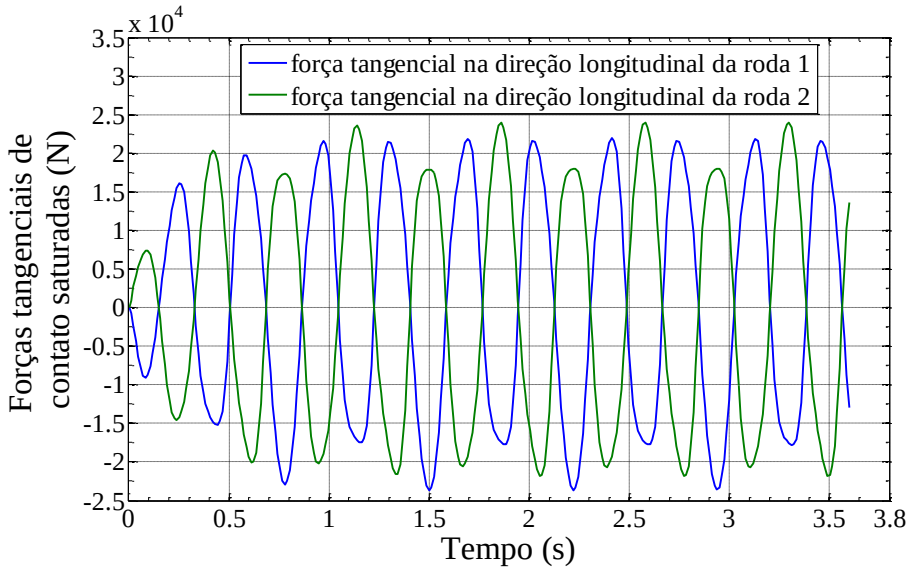


Figura 106 – Forças tangenciais na direção longitudinal das rodas 1 e 2.
Fonte: Autor.

A Figura 107 interpreta os escorregamentos laterais produzidos pelo eixo 1 avaliados nas rodas 1 e 2, e suas respectivas forças tangenciais de contato na direção lateral.

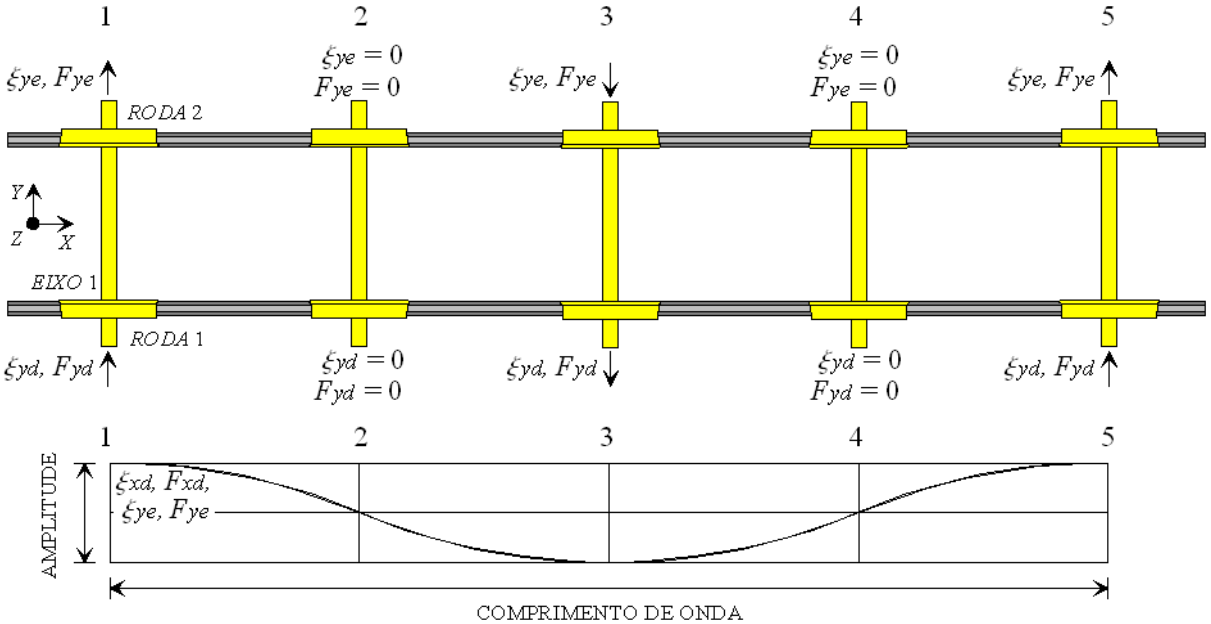


Figura 107 – Escorregamentos e forças tangenciais na direção lateral.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 107 que os escorregamentos e as forças tangenciais de contato na direção lateral preservam os mesmos sinais. Os escorregamentos laterais são iguais nas rodas 1 e 2, como pode se observar na Equação (81) do Capítulo 3. Porém as forças tangenciais na direção lateral não apresentam os mesmos valores, isto devido aos escorregamentos de rotação *spin*, que possui sinais opostos para as rodas 1 e 2. Esta diferença pode ser observada

nas Equações (81) e (82) do Capítulo 3, e é exatamente ($\pm\delta/r_0$), ou seja, a razão entre a conicidade da roda, e o raio médio de rolamento da roda. A Figura 108 mostra as forças tangenciais saturadas na direção lateral para as rodas 1 e 2.

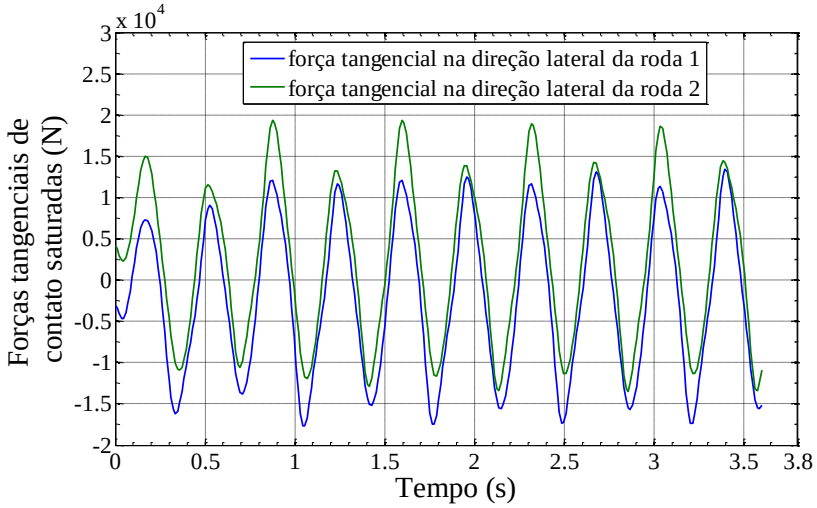


Figura 108 – Forças tangenciais na direção lateral das rodas 1 e 2.
Fonte: Autor.

A Figura 109 interpreta os escorregamentos de rotação *spin* produzidos pelo eixo 1 avaliados nas rodas 1 e 2, e seus respectivos momentos de rotação *spin*. E a Figura 110 mostra os momentos de rotação *spin* saturados produzidos pelo eixo 1 avaliados nas rodas 1 e 2.

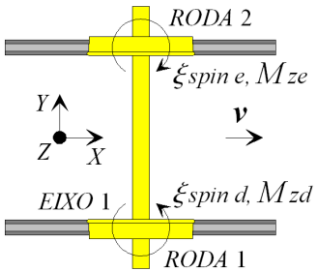


Figura 109 – Interpretação dos escorregamentos e momentos de rotação *spin*.
Fonte: Autor.

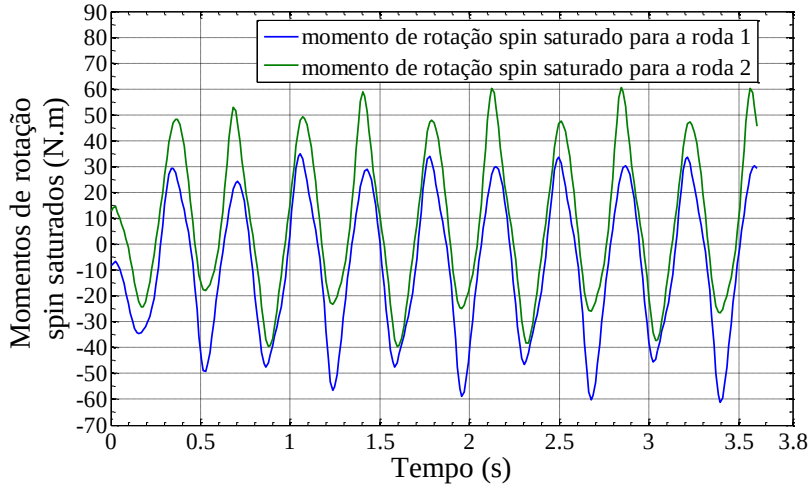


Figura 110 – Momentos de rotação *spin* saturados para as rodas 1 e 2.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 110 que os momentos de rotação *spin* saturados para as rodas 1 e 2 são diferentes, isto pode ser avaliado através da Equação (82) do Capítulo 3. Os escorregamentos laterais são usados para definir o momento de rotação *spin*, e reciprocamente, os escorregamentos de rotação *spin* são usados para definir a força tangencial de contato na direção lateral. Isto explica as diferenças observadas entre as forças tangenciais de contato na direção lateral das rodas 1 e 2, bem como, os momentos de rotação *spin* nas rodas 1 e 2.

Todas estas características observadas no eixo 1, que compreende as rodas 1 e 2, também são observadas para os demais eixos 2, 3, e 4, e suas respectivas rodas 3 e 4, 5 e 6, e 7 e 8, no modelo de veículo ferroviário.

Nesta sessão foi realizada a análise dinâmica do contato entre rodas e trilhos. Observou-se que as dimensões dos semi-eixos da elipse de contato são oscilatórias em função do tempo, em virtude do modelo de irregularidades verticais utilizado. Devido às variações das dimensões dos semi-eixos da elipse de contato, ocorrerá variação da área da elipse de contato, o que implica também em variações nas tensões de contato.

No centro da elipse de contato as tensões de compressão nas direções principais são oscilatórias, e em geral ($\sigma_z > \sigma_y > \sigma_x$). Nos pontos localizados no limite da elipse de contato a tensão principal ($\sigma_z = 0$), e a tensão de tração na direção radial é igual à tensão de compressão na direção circunferencial, portanto há um cisalhamento puro. (TIMOSHENKO; GOODIER, 1980). Observou-se que as tensões cisalhantes também são oscilatórias, e em geral ($\tau_a > \tau_b$).

Observou-se que os escorregamentos também são oscilatórios, e estabilizam-se em função do tempo. Através da teoria linear de *Kalker* observou-se que as forças tangenciais de contato e o momento de rotação *spin* são proporcionais aos escorregamentos através das rigidezas de contato. Percebeu-se que os valores dos escorregamentos de rotação *spin* são altos, e os valores dos momentos de rotação *spin* saturados são baixos, o que implica em rigidez ao escorregamento de rotação *spin* muito baixa, de acordo com a teoria linear de *Kalker*.

Observou-se que tanto nas forças tangenciais saturadas quanto no momento de rotação *spin* saturado, as curvas sofrem uma pequena declinação próxima aos seus picos. Isto se deve ao modelo de *Vermeulen* e *Johnson* que restringe as forças tangenciais de contato e o momento de rotação *spin* segundo um polinômio cúbico.

Os escorregamentos e as forças tangenciais de contato na direção longitudinal alternam-se em relação aos sinais, enquanto que os escorregamentos e as forças tangenciais de contato na direção lateral preservam os mesmos sinais. Os escorregamentos laterais são iguais nas rodas

de um mesmo eixo, porém as forças tangenciais na direção lateral não apresentam os mesmos valores. Isto se deve aos escorregamentos de rotação *spin*, que possui sinais opostos para as rodas de um mesmo eixo.

Também pode-se observar que os escorregamentos laterais são usados para definir o momento de rotação *spin*, e reciprocamente, os escorregamentos de rotação *spin* são usados para definir a força tangencial de contato na direção lateral. Isto explica as diferenças observadas nas rodas de um mesmo eixo, entre as forças tangenciais de contato na direção lateral, e os momentos de rotação *spin*.

4.2.4 Análise dos deslizamentos e da perda de contato entre as rodas e os trilhos

Nesta seção serão estudados os deslizamentos e a perda de contato entre as rodas e os trilhos. Para determinar as condições de deslizamento, e as condições de perda de contato entre as rodas e os trilhos serão abordados oito casos distintos: o primeiro sem irregularidades (SI); o segundo com somente irregularidades verticais (V); o terceiro com somente irregularidades laterais (L); o quarto com somente irregularidades rotacionais (R); o quinto com irregularidades verticais e laterais (VL); o sexto com irregularidades verticais e rotacionais (VR); o sétimo com irregularidades laterais e rotacionais (LR); e o oitavo com irregularidades verticais, laterais, e rotacionais (VLR). Em todos estes casos será utilizada a condição de contaminação dos dois trilhos com óleo em um trecho de via de 100 m, sendo variada a velocidade do veículo de 0 a 100 km/h, com incrementos de 1 km/h. A Tabela 17 mostra os valores utilizados nos oito casos.

Tabela 17 – Valores utilizados para análise dos deslizamentos e da perda de contato.

CASOS	μ_0	***v* (km/h)**	***AVO* (m)**	***lVO* (m)**	***AVE* (m)**	***lVE* (m)**	***AL* (m)**	***lL* (m)**	***AR* (º)**	***lR* (m)**
(SI)	0,1	0 ~ 100	...	...	...	...	...	...	...	...
(V)	0,1	0 ~ 100	-0,01	1,0	0,01	1,0	...	...	...	...
(L)	0,1	0 ~ 100	...	...	...	...	0,00073	18,234	...	...
(R)	0,1	0 ~ 100	...	...	...	...	...	...	0,0003	3,0
(VL)	0,1	0 ~ 100	-0,01	1,0	0,01	1,0	0,00073	18,234	...	...
(VR)	0,1	0 ~ 100	-0,01	1,0	0,01	1,0	...	...	0,0003	3,0
(LR)	0,1	0 ~ 100	...	...	...	...	0,00073	18,234	0,0003	3,0
(VLR)	0,1	0 ~ 100	-0,01	1,0	0,01	1,0	0,00073	18,234	0,0003	3,0

Fonte: Autor.

Os aqui chamados deslizamentos não podem ser confundidos com os *creeps*, microescorregamentos, ou escorregamentos abordados anteriormente através da teoria linear de *Kalker*. Trata-se do limite imposto pela lei de atrito de *Coulomb*, e pelo modelo de saturação do contato proposto por *Vermeulen* e *Johnson*, abordados nas Equações (86) e (87)

do Capítulo 3.

Desta forma, haverá o contato de rolamento puro e/ou rolamento com escorregamento (*creep*) até certo limite, e após este limite, haverá o deslizamento.

A limitação das forças tangenciais de contato dependerá diretamente do coeficiente de atrito dinâmico entre rodas e trilhos para as condições de contaminação entre as superfícies em contato destes corpos. Estas condições e seus respectivos valores são apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 – Coeficientes de atrito entre roda e trilho.

Condições do trilho	μ_0
Trilho completamente seco, ou lavado pela chuva.	0,33
Trilho seco e limpo.	0,22
Trilho seco.	0,20
Trilho molhado pela chuva.	0,14
Trilho úmido de orvalho.	0,125
Trilho úmido e sujo.	0,11
Trilho com óleo.	0,10

Fonte: Adaptado de (BRINA, 1983).

A variação do coeficiente de atrito em função da velocidade pode ser escrita segundo a fórmula empírica: (BRINA, 1983).

$$\mu = \frac{\mu_0}{1+0{,}01.v} \tag{61}$$

onde (μ) é o coeficiente de atrito para a velocidade do veículo, (μ_0) é o coeficiente de atrito para as condições do trilho dado na Tabela 6, e (v) é a velocidade do veículo em (km/h). Utilizando-se a Equação (61) e os valores da Tabela 6, tem-se o seguinte gráfico:

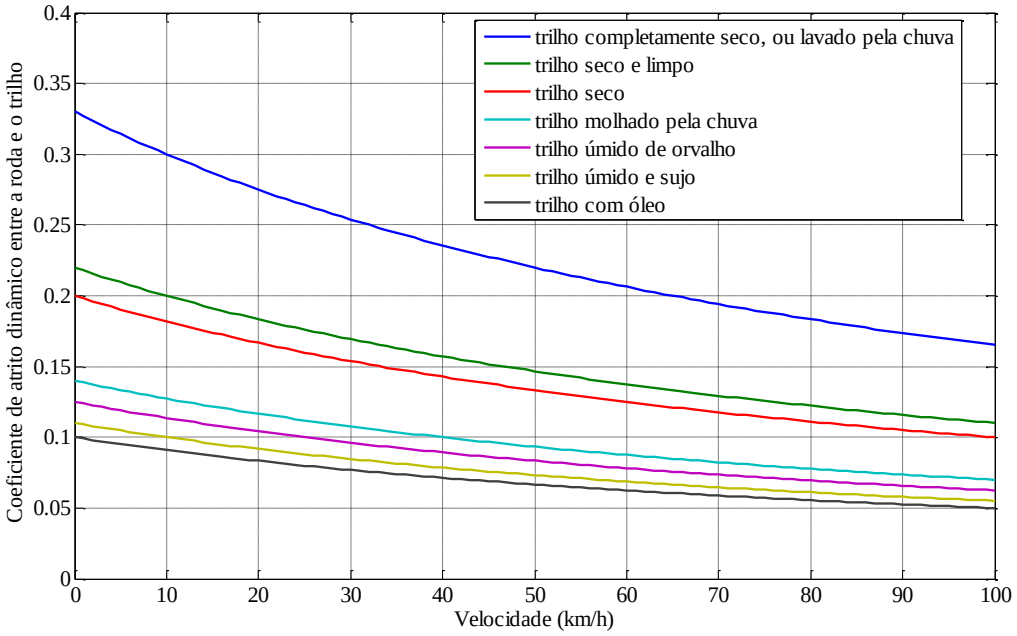


Figura 21 – Coeficiente de atrito dinâmico entre a roda e o trilho.
Fonte: Autor.

Observa-se que a condição mais desfavorável, ou seja, mais suscetível aos deslizamentos refere-se à condição dos trilhos contaminados com óleo, e em condições de alta velocidade. Caso não ocorram os deslizamentos nesta condição, naturalmente também não ocorrerão deslizamentos nas demais condições de contaminação. Por isso, será utilizada esta condição de contaminação nos dois trilhos para a determinação dos deslizamentos das rodas sobre os trilhos nos oito casos de irregularidades, por se tratar da situação mais crítica.

A perda de contato entre as rodas e os trilhos ocorrerá se as forças reativas forem negativas, de acordo com a Equação (59) exposta no Capítulo 3.

No caso sem irregularidades (SI), não foram observados os deslizamentos das rodas sobre os trilhos, e em todas as simulações houve contato permanente entre as rodas e os trilhos.

No caso com somente irregularidades verticais (V), também não foram observados os deslizamentos das rodas sobre os trilhos, e tampouco houve a perda de contato entre estes corpos.

No caso com somente irregularidades laterais (L), observou-se deslizamento das rodas 2 e 4 sobre os trilhos, nas direções: longitudinal, transversal, e de *spin*, na faixa de velocidade de 78 a 86 km/h. Percebe-se que esta faixa de velocidade compreende a velocidade ressonante para as respostas dinâmicas de deslocamento lateral dos eixos, apresentada na Tabela 15, ou seja, V_{RVD} 85,018 km/h. Para o mesmo comprimento de onda de irregularidades laterais, porém com amplitudes menores que (0,73mm), não foram observados os deslizamentos das rodas sobre os trilhos. Em todas estas simulações não foram registrados casos de perda de contato entre as rodas e os trilhos.

No caso com somente irregularidades rotacionais (R), observou-se deslizamento de todas as rodas sobre os trilhos, nas direções: longitudinal, lateral, e de *spin*, nas velocidades de 29 e 31 km/h, coincidindo com a velocidade ressonante para as respostas dinâmicas de deslocamento de rotação (*yawing*) dos eixos, apresentada na Tabela 15, ou seja, V_{RVD} = 30,068 km/h. Não foram observados os deslizamentos das rodas sobre os trilhos para amplitudes de irregularidades rotacionais menores que (0,0003º), preservando-se os comprimentos de onda de (3m). Não foi observada a perda de contato entre as rodas e os trilhos no caso (R).

No caso combinado entre as irregularidades verticais e laterais (VL), observou-se deslizamento das rodas 2, 4, 6, e 8 sobre os trilhos, nas direções: longitudinal, transversal, e de *spin*, na faixa de velocidade de 69 a 90 km/h. Percebe-se que a influência das irregularidades verticais nas irregularidades laterais contribuem para o deslizamento de um número maior de rodas do veículo que o caso (L), bem como, uma maior faixa de velocidade

em que o fenômeno ocorre. Também percebe-se neste caso combinado de irregularidades, que com uma amplitude menor de irregularidade lateral, por exemplo, (0,65mm) já observa-se o deslizamento das rodas sobre os trilhos. Não ocorreu a perda de contato entre as rodas e os trilhos neste caso combinado de irregularidades (VL).

No caso combinado entre as irregularidades verticais e rotacionais (VR), observou-se deslizamento de todas as rodas sobre os trilhos, nas direções: longitudinal, transversal, e de *spin*, na faixa de velocidade de 27 a 32 km/h. Percebe-se que a influência das irregularidades verticais nas irregularidades rotacionais contribui para a ocorrência do deslizamento em uma faixa pouco maior de velocidade que no caso (R). Para amplitudes menores que (0,0003º), mantendo-se os comprimentos de onda de (3m) nas irregularidades rotacionais, e preservando-se as irregularidades verticais, não foram observados deslizamentos. Não ocorreu a perda de contato entre as rodas e os trilhos neste caso combinado de irregularidades (VR).

No caso combinado entre as irregularidades laterais e rotacionais (LR), observou-se que o deslizamento das rodas sobre os trilhos ocorre na faixa de velocidade de 60 a 92 km/h. O deslizamento de todas as rodas sobre os trilhos ocupa a faixa de velocidade de 65 a 79 km/h. Também percebe-se neste caso combinado de irregularidades, que com uma amplitude menor de irregularidade lateral, por exemplo, (0,55mm) já observa-se o deslizamento. Não ocorreu a perda de contato entre as rodas e os trilhos neste caso combinado de irregularidades (LR).

No caso combinado entre as irregularidades verticais, laterais e rotacionais (VLR), observou-se o deslizamento das rodas sobre os trilhos na faixa de velocidade de 52 a 96 km/h. Foi observado o deslizamento de todas as rodas sobre os trilhos na faixa de velocidade de 65 a 89 km/h. Observa-se que a faixa em que ocorrem os deslizamentos é a maior apresentada em todos os demais casos. Também percebe-se neste caso combinado de irregularidades, que com uma amplitude menor de irregularidade lateral, por exemplo, (0,5mm) já observa-se o deslizamento. Não ocorreu a perda de contato entre as rodas e os trilhos neste caso combinado de irregularidades (VLR).

Em resumo, não ocorreu a perda de contato entre as rodas e os trilhos em nenhum dos casos analisados. Não houve deslizamento das rodas sobre os trilhos nos casos (SI) e (V). Nos casos combinados (VL), (VR), (LR), e (VLR), os deslizamentos se iniciam com menores amplitudes de irregularidades que os casos isolados (L) e (R). Percebe-se que os deslizamentos nestes casos combinados, ocupam uma maior faixa de velocidade, bem como, há um número maior de rodas que deslizam nesta faixa de velocidade. Há também coincidência das velocidades ressonantes pertencerem à faixa de velocidade em que ocorrem os deslizamentos. Em geral, nos casos combinados de irregularidades, há uma maior

suscetibilidade de ocorrência dos deslizamentos.

Pode-se perceber que os escorregamentos dependem dos graus de liberdade de movimento lateral (*LW*), e de rotação (*yawing*) (*YW*) dos eixos com rodas acopladas, de acordo com a Equação (81) exposta no Capítulo 3. Com o aumento destes escorregamentos proveniente da excitação das irregularidades, há um aumento proporcional das forças tangenciais de contato, e no limite, surgem os deslizamentos das rodas sobre os trilhos. Isto pode explicar a ausência dos deslizamentos das rodas sobre os trilhos nos casos (SI) e (V), bem como, a presença dos deslizamentos das rodas sobre os trilhos nos casos isolados (L) e (R), e nos casos combinados (VL), (VR), (LR), e (VLR).

4.3 Análise dinâmica da ponte

Serão realizadas análises dinâmicas numéricas da ponte no que diz respeito à análise modal, determinando-se suas características dinâmicas como freqüências e modos naturais de vibração. Também realiza-se a análise de vibração forçada na ponte produzida pelo tráfego do veículo ferroviário e da composição Trem Unidade Elétrico (TUE), sob diferentes condições de velocidade e irregularidades verticais, laterais, e rotacionais da via. Nestas análises também são consideradas as condições de ressonância da ponte produzidas pelo tráfego tanto do veículo ferroviário quanto da composição TUE.

4.3.1 Análise modal da ponte

Considerando-se o modelo de ponte ferroviária sem amortecimento, o problema de autovalores e autovetores pode ser representado na seguinte forma matricial: (CHOPRA, 1995).

$$[K_B][\Phi_B] = [\Omega_B]^2[M_B][\Phi_B] \tag{168}$$

onde $[K_B]$ e $[M_B]$, representam respectivamente as matrizes de rigidez, e de massa da ponte ferroviária. E $[\Phi_B]$ e $[\Omega_B]$, representam a matriz modal, e a matriz espectral da ponte, respectivamente. A matriz modal contém os modos naturais de vibração da ponte (autovetores), e a matriz espectral contém o quadrado das freqüências naturais circulares de vibração da ponte (autovalores), representados da seguinte forma:

$$[\Phi_B] = [\phi_{Bn}] = \begin{bmatrix} \phi_{B1} \\ \phi_{B2} \\ \vdots \\ \phi_{Bn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} \end{bmatrix}; \qquad [\Omega_B]^2 = \begin{bmatrix} \omega_{nb1}{}^2 & & & \\ & \omega_{nb2}{}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \omega_{nbn}{}^2 \end{bmatrix}. \tag{169}$$

A solução formal da Equação (168) pode ser representada abaixo da seguinte forma:

$$[[K_B] - [\Omega_B]^2 [M_B]][\Phi_B] = [0]. \tag{170}$$

A solução trivial seria $[\Phi_B] = [0]$, porém não é utilizada, pois não produz movimento no sistema. Então tem-se a seguinte solução não trivial: (CHOPRA, 1995).

$$\det[[K_B] - [\Omega_B]^2 [M_B]] = 0. \tag{171}$$

Expandindo-se o determinante da matriz obtêm-se a equação característica, um polinômio de ordem (n), que contém (n) raízes reais positivas, pois as matrizes de massa e de rigidez são simétricas e positivas definidas. Quando uma freqüência natural circular é conhecida, a equação característica pode ser resolvida para o seu correspondente modo de vibração. (Idem, 1995).

Os modos de vibração não representam valores absolutos nos graus de liberdade de um sistema estrutural, e, portanto, deve-se considerar apenas a sua forma. Por isso costuma-se normalizá-los, obtendo-se, desta maneira, valores que são ponderados em relação à maior amplitude de movimento.

O método de *Rayleigh*, descrito no Capítulo 3, está sendo empregado para incluir o amortecimento estrutural no sistema. Está sendo considerada somente a influência das duas primeiras freqüências naturais circulares de vibração referentes ao primeiro modo de vibração à flexão vertical, e ao primeiro modo de vibração à flexão lateral das vigas da ponte. A razão de amortecimento do sistema está sendo estimada em função do material e do tipo de estrutura empregada, (concreto protendido), de acordo com (NEWMARK; HALL, 1982) apud (CHOPRA, 1995), para estas condições tem-se (ζ_b = 0,025).

Considerando-se agora o modelo de ponte ferroviária com amortecimento, deve-se também determinar as freqüências naturais circulares amortecidas, e suas respectivas razões de amortecimento para os demais modos de vibração. Desta forma, tem-se a seguinte equação: (BATHE, 1996).

$$[\Phi_B]^T [C_B][\Phi_B] = 2.\omega_{nbi}.\xi_{bi}.[I] \tag{172}$$

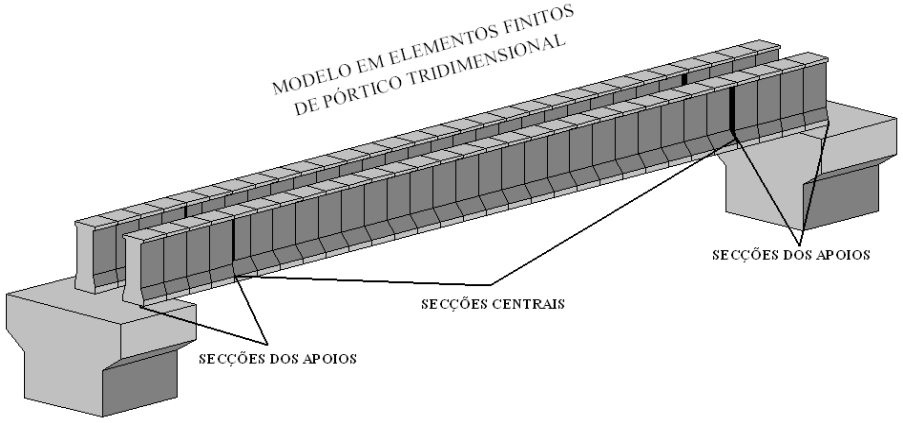
Como o produto ($[\Phi_B]^T [C_B][\Phi_B]$) é diagonal, o sistema possui amortecimento clássico, e as freqüências naturais circulares amortecidas são determinadas da seguinte forma: (CHOPRA, 1995).

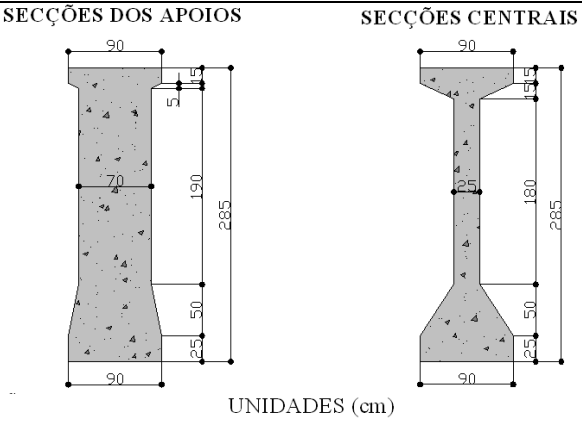
$$\omega_{dbi} = \omega_{nbi} \cdot \sqrt{1 - \xi^2{}_{bi}} \,. \tag{173}$$

Onde (ω_{dbi}), (ω_{nbi}), e (ζ_{bi}) representam respectivamente as freqüências naturais circulares amortecidas, as freqüências naturais circulares, e as razões de amortecimento do modelo de ponte ferroviária. Os modos de vibração para um sistema que possui amortecimento clássico são os mesmos modos de um sistema sem amortecimento.

O modelo em elementos finitos da ponte é mostrado na Tabela 18, bem como, as propriedades geométricas e materiais das secções transversais das vigas que o compõem.

Tabela 18 – Propriedades geométricas e materiais das secções transversais.





Propriedades Geométricas e Materiais		Símbolos	Valores	Unidades
Secções dos Apoios	Área de secção transversal próximo ao apoio	A_A	2,13	m²
	Massa por metro linear	mu_A	5325,0	kg/m
	Momento de Inércia de área em relação ao eixo *Z*	I_{ZA}	1,490684166	m^4
	Momento de Inércia de área em relação ao eixo *Y*	I_{YA}	0,094329166	m^4
	Momento de inércia de área polar	J_A	1,585013332	m^4
Secções Centrais	Área de secção transversal central	A_C	1,18375	m²
	Massa por metro linear	mu_C	2959,375	kg/m
	Momento de Inércia de área em relação ao eixo *Z*	I_{ZC}	0,931238916	m^4
	Momento de Inércia de área em relação ao eixo *Y*	I_{YC}	0,027490104	m^4
	Momento de inércia de área polar	J_C	0,95872902	m^4
Todas as Secções	Módulo de elasticidade	E	29,43	GPa
	Módulo de cisalhamento	G	12,263	GPa
	Coeficiente de Poisson	v	0,2	-
	Massa específica	ρ	2.500	kg/m³

Fonte: Autor.

Os autovalores (freqüências naturais circulares) de uma das vigas que compõem a ponte (ω_{nb}) são apresentados na Tabela 19, bem como, as freqüências naturais circulares amortecidas (ω_{db}), as freqüências naturais cíclicas (f_{nb}), as freqüências naturais cíclicas amortecidas (f_{db}), os períodos de vibração natural (T_{nb}), os períodos de vibração natural amortecido (T_{db}), e as razões de amortecimento do sistema (ζ_b).

Tabela 19 – Freqüências naturais, períodos naturais, e razões de amortecimento da viga.

Nº	**Descrição**	ω_{nb} **(rad/s)**	ω_{db} **(rad/s)**	f_{nb} **(Hz)**	f_{db} **(Hz)**	T_{nb} **(s)**	T_{db} **(s)**	ζ_b **(%)**
1º	**1º Modo de Flexão Vertical.**	28,550	28,541	4,544	4,542	0,220	0,220	0,025
2º	**1º Modo de Flexão Lateral.**	72,019	71,997	11,462	11,459	0,087	0,087	0,025
3º	**2º Modo de Flexão Vertical.**	75,269	75,245	11,979	11,976	0,083	0,084	0,026
4º	**1º Modo de Torção.**	83,506	83,476	13,290	13,286	0,075	0,075	0,027
5º	**1º Modo Longitudinal.**	131,111	131,024	20,867	20,853	0,048	0,048	0,036
6º	**3º Modo de Flexão Vertical.**	142,003	141,895	22,600	22,583	0,044	0,044	0,039
7º	**2º Modo de Flexão Lateral.**	143,022	142,913	22,763	22,745	0,044	0,044	0,039
8º	**2º Modo de Torção.**	163,719	163,561	26,057	26,032	0,038	0,038	0,044
9º	**3º Modo de Flexão Lateral.**	211,390	211,071	33,644	33,593	0,030	0,030	0,055
10º	**3º Modo de Torção.**	237,478	237,033	37,796	37,725	0,026	0,027	0,061
11º	**2º Modo Longitudinal.**	256,617	256,061	40,842	40,753	0,024	0,025	0,066
12º	**3º Modo Longitudinal.**	370,485	368,863	58,964	58,706	0,017	0,017	0,093

Fonte: Autor.

Na Tabela 19, foram mostradas apenas as 12 primeiras freqüências naturais de vibração de uma das vigas que compõem a ponte. No entanto, existem outras freqüências que foram omitidas aqui, ao todo são 186 de acordo com o número de elementos finitos utilizados no modelo. Entre estas freqüências, existem também as que produzem somente os movimentos de corpo rígido, ou os "falsos modos de vibração", estes, foram omitidos aqui.

A Figura 111 mostra o 1º modo de vibração das vigas, referente ao 1º modo de flexão vertical nas vigas.

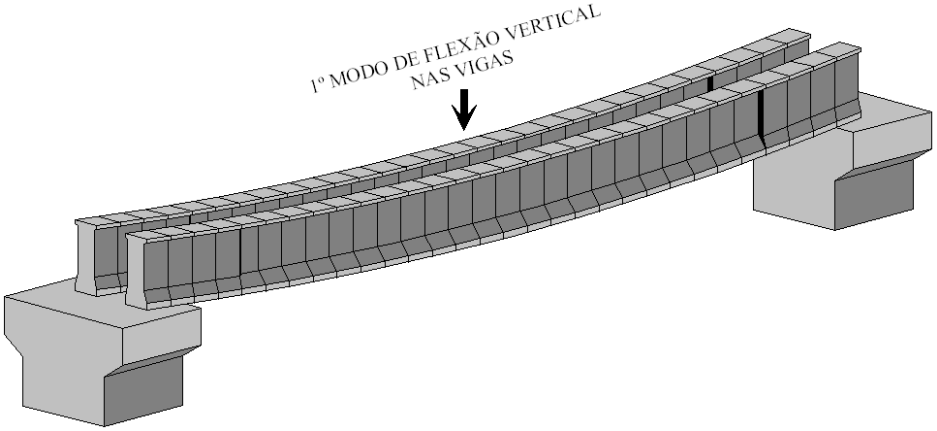


Figura 111 – 1º Modo de vibração das vigas.
Fonte: Autor.

A Figura 112 mostra o 2º modo de vibração das vigas, referente ao 1º modo de flexão lateral nas vigas.

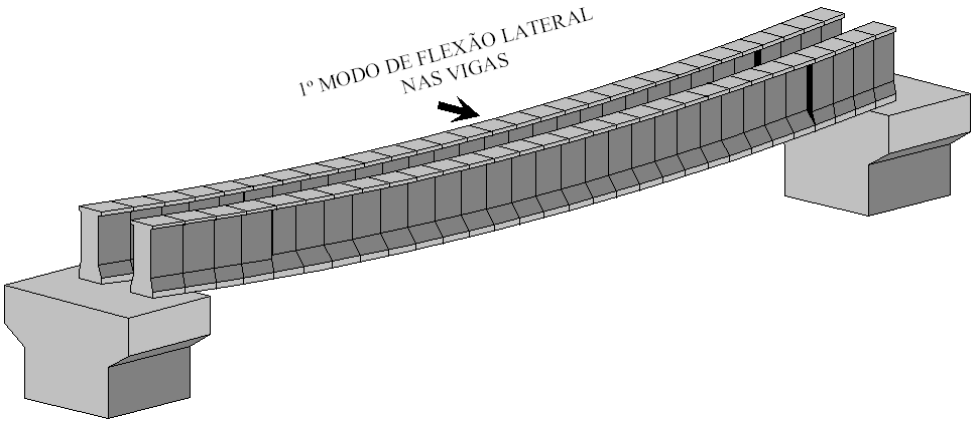


Figura 112 – 2º Modo de vibração das vigas.
Fonte: Autor.

A Figura 113 mostra o 3º modo de vibração das vigas, referente ao 2º modo de flexão vertical nas vigas.

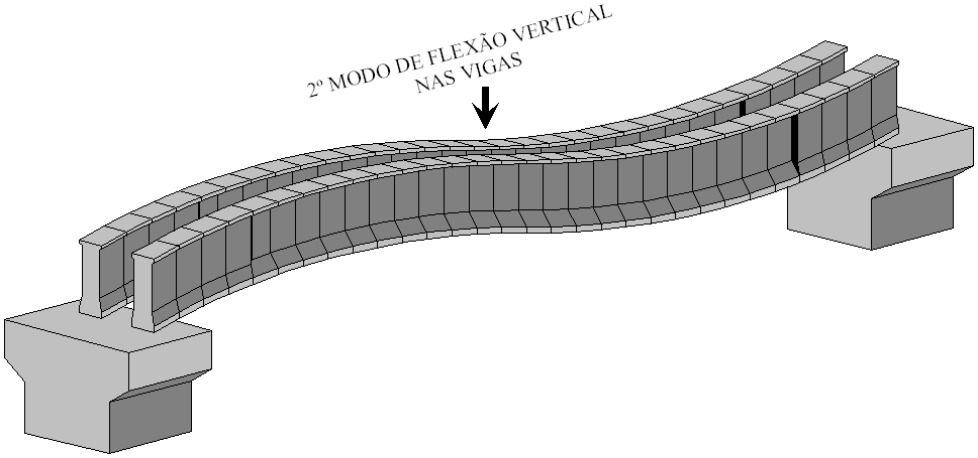


Figura 113 – 3º Modo de vibração das vigas.
Fonte: Autor.

A Figura 114 mostra o 4º modo de vibração das vigas, referente ao 1º modo de torção nas vigas.

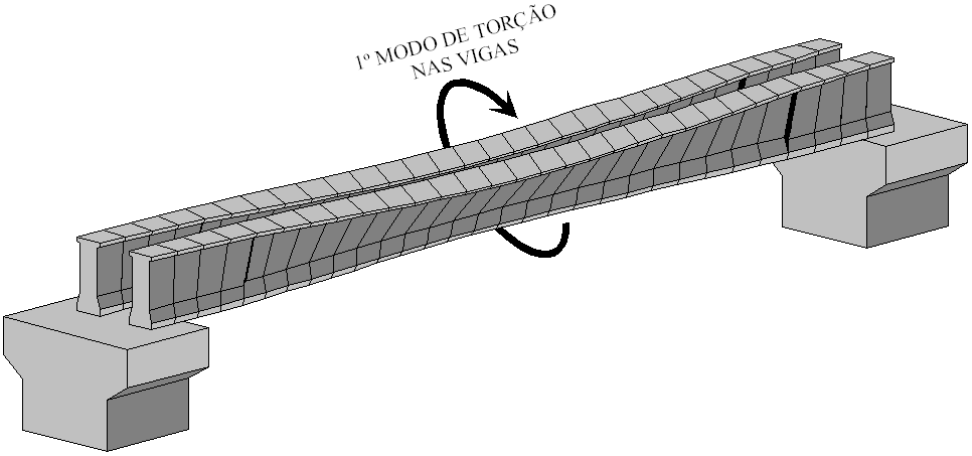


Figura 114 – 4º Modo de vibração das vigas.
Fonte: Autor.

A Figura 115 mostra o 5º modo de vibração das vigas, referente ao 1º modo longitudinal nas vigas. A Figura 116 mostra o 6º modo de vibração das vigas, referente ao 3º modo de flexão vertical nas vigas. E na Figura 47 reapresentam-se os graus de liberdade do elemento finito de pórtico tridimensional, os quais são referenciados na presente análise modal.

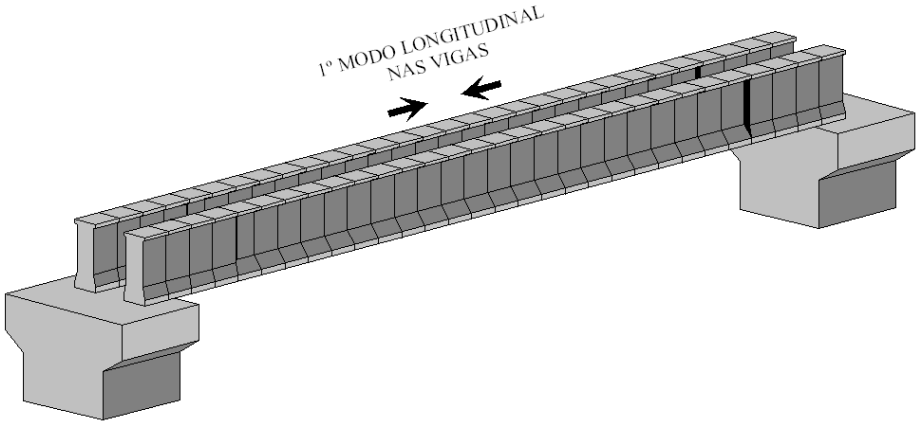


Figura 115 – 5º Modo de vibração das vigas.
Fonte: Autor.

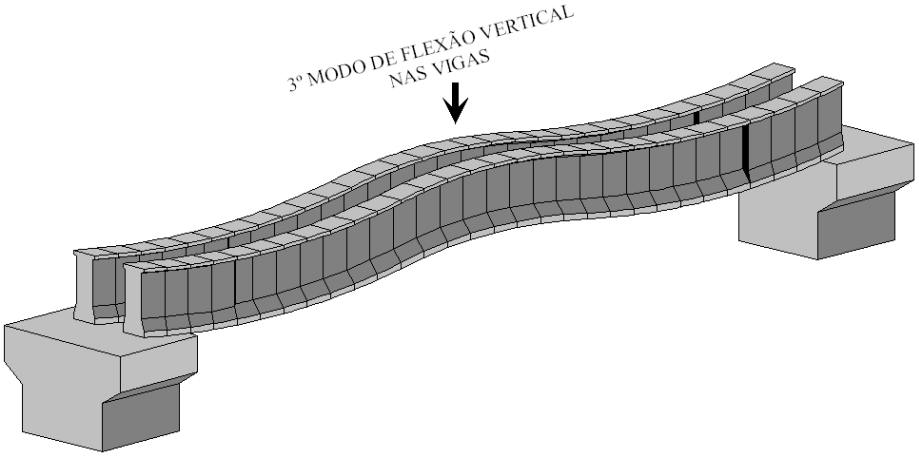


Figura 116 – 6º Modo de vibração das vigas.
Fonte: Autor.

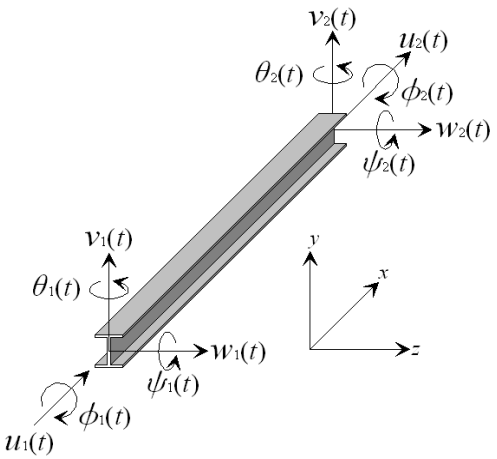


Figura 47 – Elemento finito de pórtico tridimensional e seus graus de liberdade.
Fonte: Autor.

A Figura 117 mostra os três primeiros modos de vibração referentes à flexão vertical das vigas, ou seja, os modos 1º, 3º, e 6º da estrutura. São apresentadas as amplitudes normalizadas em função dos graus de liberdade referentes aos deslocamentos verticais dos elementos finitos de pórtico tridimensional, isto é, os graus de liberdade representados por (*v*), como mostra a Figura 47.

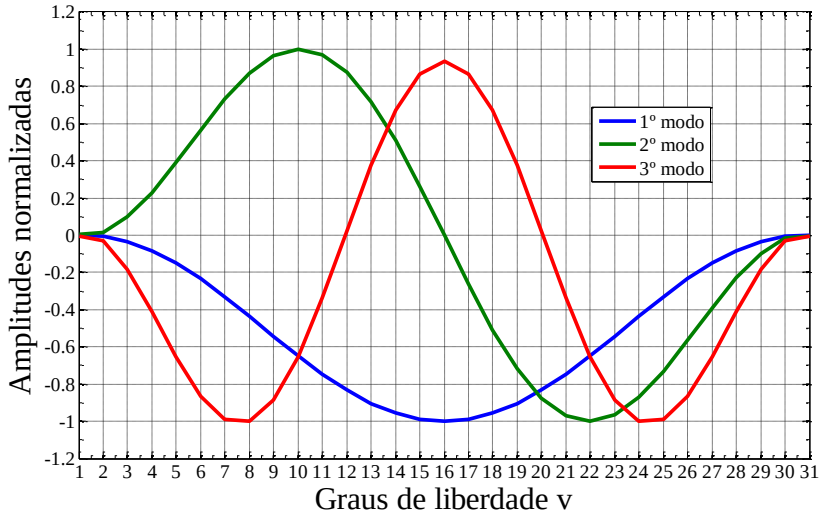


Figura 117 – Três primeiros modos de flexão vertical da viga.
Fonte: Autor.

A Figura 118 mostra os três primeiros modos de vibração referentes à flexão lateral das vigas, ou seja, os modos 2º, 7º, e 9º da estrutura. São apresentadas as amplitudes normalizadas em função dos graus de liberdade referentes aos deslocamentos laterais dos elementos finitos de pórtico tridimensional, isto é, os graus de liberdade representados por (*w*), como mostra a Figura 47.

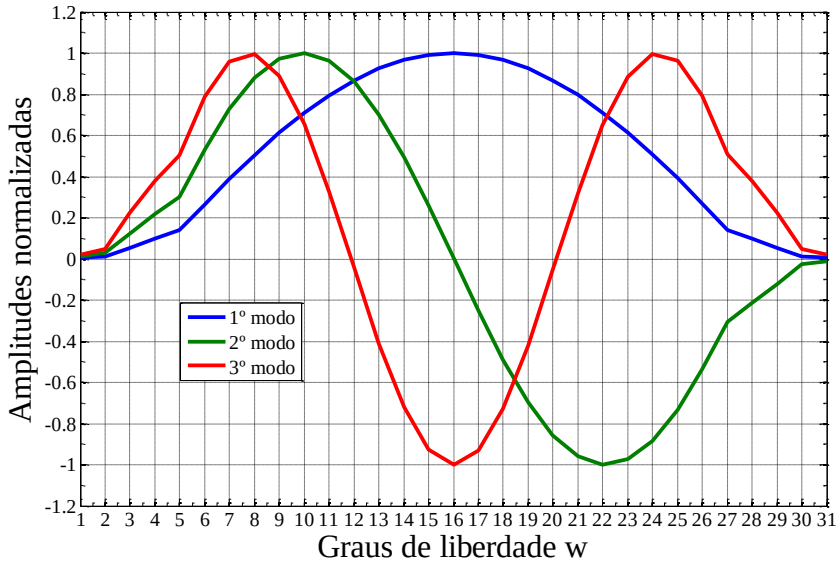


Figura 118 – Três primeiros modos de flexão lateral da viga.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 118 que as amplitudes dos modos de flexão lateral são influenciadas pelas diferentes secções transversais das vigas utilizadas na ponte. Isto é, próximo aos apoios, as secções transversais das vigas são mais rígidas que as secções transversais centrais, no que diz respeito à flexão lateral. Desta forma, os modos relativos à flexão lateral apresentam certa descontinuidade próxima aos apoios. Esta diferença entre os parâmetros geométricos é mostrada na Tabela 18. Os parâmetros materiais são os mesmos para toda a estrutura, não havendo, desta forma, influência material.

A Figura 119 mostra os três primeiros modos de vibração referentes à torção nas vigas, ou seja, os modos 4º, 8º, e 10º da estrutura. São apresentadas as amplitudes normalizadas em função dos graus de liberdade referentes aos deslocamentos de rotação, os quais produzem a torção das vigas. Estes graus de liberdade dos elementos finitos de pórtico tridimensional são representados por (ϕ), como mostra a Figura 47.

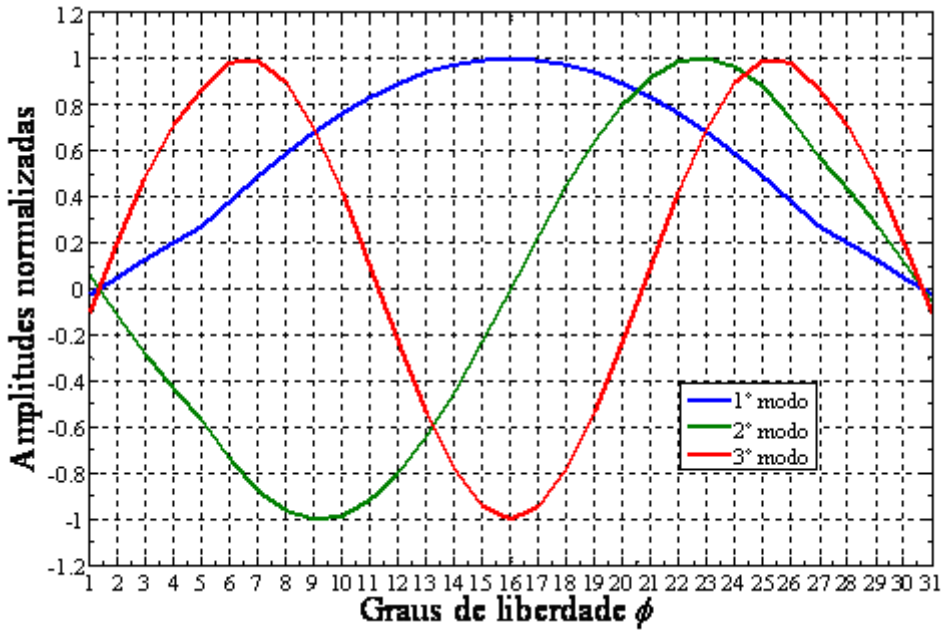


Figura 119 – Três primeiros modos de torção da viga.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 119 que as amplitudes dos modos de torção são influenciadas pelas diferentes secções transversais das vigas utilizadas na ponte, no que diz respeito à torção próximo aos apoios.

A Figura 120 mostra os três primeiros modos de vibração referentes ao deslocamento longitudinal das vigas, ou seja, os modos 5º, 11º, e 12º da estrutura. São apresentadas as amplitudes normalizadas em função dos graus de liberdade referentes aos deslocamentos longitudinais. Estes graus de liberdade dos elementos finitos de pórtico tridimensional são representados por (u), como mostra a Figura 47.

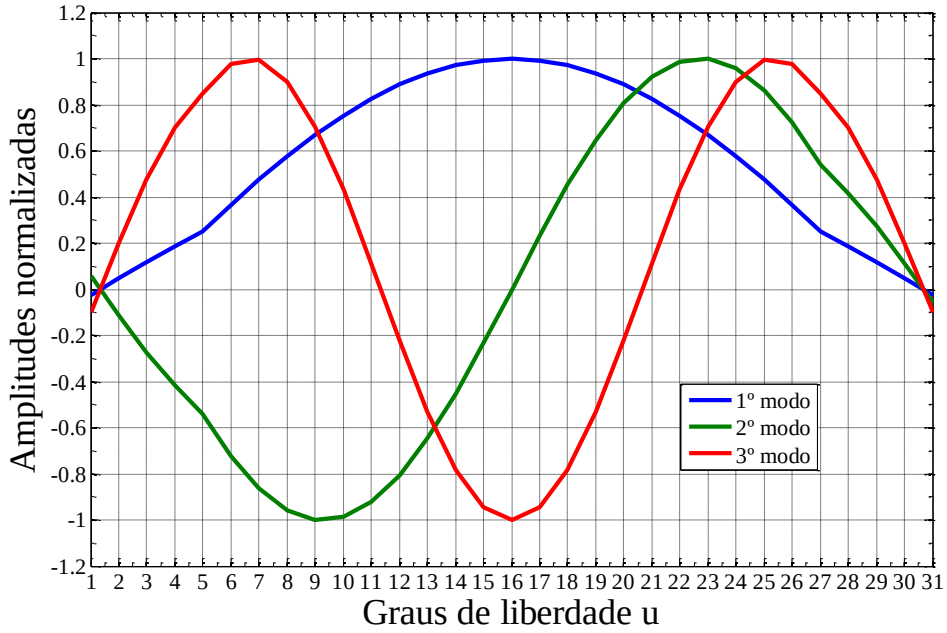


Figura 120 – Três primeiros modos longitudinais.
Fonte: Autor.

Também se observa na Figura 120 que as amplitudes dos modos longitudinais são influenciadas pelas diferentes secções transversais das vigas utilizadas na ponte, no que diz respeito também ao deslocamento longitudinal próximo aos apoios.

Nesta sessão foi realizada a análise modal da ponte, determinando-se as freqüências naturais, os períodos naturais, e os modos naturais de vibração da estrutura. Observou-se que as freqüências naturais de vibração e seus correspondentes modos naturais de vibração apresentam-se alternadamente entre modos de flexão vertical, modos de flexão lateral, modos de torção, e modos longitudinais.

Devido às variações das secções transversais das vigas que compõem a ponte, houve influências nas amplitudes dos modos de vibração relativos à flexão lateral, à torção, e ao modo longitudinal. Próximo aos apoios, as secções transversais das vigas são mais rígidas que as secções transversais centrais. Não foi observada esta influência nos modos de flexão vertical. A variação da secção transversal no que diz respeito à rigidez de flexão vertical, é menor que para os outros casos. Isto é, as razões entre as propriedades geométricas das secções transversais dos apoios e centrais, no que diz respeito à flexão vertical, à flexão lateral, à torção, e ao deslocamento longitudinal, podem ser ordenadas da seguinte forma: ($I_{ZA}/I_{ZC} < J_A/J_C < A_A/A_C < I_{YA}/I_{YC}$). Desta maneira, por ordem de influência nas amplitudes dos deslocamentos, próxima às secções dos apoios, devido às variações das secções transversais, os modos de vibração podem ser ordenados da seguinte forma: modos de flexão lateral; modos longitudinais; modos de torção; e modos de flexão vertical.

4.3.2 Análise de vibração forçada na ponte produzida pelo veículo ferroviário

Nesta seção será estudada a vibração forçada na ponte produzida pelo tráfego do veículo ferroviário. Para determinar as respostas dinâmicas da ponte serão estudados oito casos distintos: sem irregularidades (SI); com somente irregularidades verticais (V); com somente irregularidades laterais (L); com somente irregularidades rotacionais (R); com irregularidades verticais e laterais (VL); com irregularidades verticais e rotacionais (VR); com irregularidades laterais e rotacionais (LR); e com irregularidades verticais, laterais, e rotacionais (VLR). Em todos estes casos será utilizada a condição de trilhos completamente secos, ou lavados pela chuva, sem que haja os deslizamentos das rodas sobre as superfícies dos trilhos. Será variada a velocidade do veículo de 0 a 100 km/h, com incrementos de 1 km/h, passando pelas condições de ressonância da ponte. A Tabela 20 mostra os valores utilizados nos oito casos.

Tabela 20 – Valores utilizados para análise de vibração forçada na ponte.

CASOS	μ_0	v (km/h)	A_{VO} (m)	l_{VO} (m)	A_{VE} (m)	l_{VE} (m)	A_L (m)	l_L (m)	A_R (º)	l_R (m)
(SI)	0,33	0 ~ 100	...	...	...	...	...	...	...	...
(V)	0,33	0 ~ 100	-0,01	1,0	0,01	1,0	...	...	...	...
(L)	0,33	0 ~ 100	...	...	...	...	0,00073	1,0	...	...
(R)	0,33	0 ~ 100	...	...	...	...	...	...	0,0003	1,0
(VL)	0,33	0 ~ 100	-0,01	1,0	0,01	1,0	0,00073	1,0	...	...
(VR)	0,33	0 ~ 100	-0,01	1,0	0,01	1,0	...	...	0,0003	1,0
(LR)	0,33	0 ~ 100	...	...	...	...	0,00073	1,0	0,0003	1,0
(VLR)	0,33	0 ~ 100	-0,01	1,0	0,01	1,0	0,00073	1,0	0,0003	1,0

Fonte: Autor.

A ressonância na ponte ocorrerá se a excitação externa produzida pelo veículo coincidir com as suas freqüências naturais amortecidas. Como foram apresentadas doze freqüências naturais amortecidas, e doze modos naturais de vibração para a ponte, têm-se doze condições de ressonância, e, portanto, doze velocidades do veículo que produzem ressonância na ponte. Estas velocidades do veículo para as respostas dinâmicas de deslocamento da ponte na condição de ressonância podem ser escritas da seguinte forma:

$$\omega_{dbi} = \omega_{Ii}; \qquad \omega_{Ii} = 2.\pi.f_{Ii} = \frac{2.\pi.V_{RBDi}}{l_{Ii}}; \qquad V_{RBDi} = \frac{\omega_{dbi}.l_{Ii}}{2.\pi}; \qquad i = 1,2,3,...,12. \tag{174}$$

Onde (ω_{dbi}), (ω_{Ii}), (f_{Ii}), (V_{RBDi}), e (l_{Ii}) representam as freqüências naturais circulares amortecidas da ponte, as freqüências circulares das irregularidades, as freqüências cíclicas das irregularidades, as velocidades do veículo para as respostas dinâmicas de deslocamento da ponte na condição de ressonância, e os comprimentos das irregularidades da via, respectivamente.

As velocidades do veículo para as respostas dinâmicas de velocidade, e de aceleração da ponte na condição de ressonância podem ser escritas respectivamente da seguinte maneira:

$$V_{RBVi} = \frac{\omega_{nbi}.l_{Ii}}{2.\pi}; \qquad V_{RBAi} = \frac{\omega_{nbi}.l_{Ii}}{2.\pi.\sqrt{1-2.\xi_{bi}^{\ 2}}}; \qquad i = 1,2,3,...,12. \tag{175}$$

Uma vez excitada a ponte na condição de ressonância, ocorrerá a amplificação de suas respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade, e aceleração. Esta amplificação será atenuada pelo amortecimento do sistema. Os três fatores de amplificação das respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade, e aceleração da ponte podem ser escritos da seguinte maneira:

$$R_{DBi} = \frac{1}{2.\xi_{bi}.\sqrt{1-\xi_{bi}^{\ 2}}}; \qquad R_{VBi} = \frac{1}{2.\xi_{bi}}; \qquad R_{ABi} = \frac{1}{2.\xi_{bi}.\sqrt{1-\xi_{bi}^{\ 2}}}; \qquad i = 1,2,3,...,12. \tag{176}$$

Utilizando-se os valores das razões de amortecimento apresentados na Tabela 19, têm-se os seguintes valores dos fatores de amplificação das respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade, e aceleração para a ponte:

Tabela 21 – Fatores de amplificação das respostas dinâmicas para a ponte.

MODO	***RDB***	***RVB***	***RAB***
1º	20,006	20,000	20,006
2º	20,006	20,000	20,006
3º	19,613	19,607	19,613
4º	18,608	18,602	18,608
5º	13,711	13,702	13,711
6º	12,863	12,854	12,863
7º	12,789	12,779	12,789
8º	11,421	11,410	11,421
9º	9,110	9,096	9,110
10º	8,187	8,172	8,187
11º	7,617	7,601	7,617
12º	5,372	5,349	5,372

Fonte: Autor.

Observa-se que as maiores amplificações ocorrem em baixas freqüências, situações estas de menores amortecimentos, pois com o aumento da razão de amortecimento, os fatores de amplificação dinâmica diminuem.

Utilizando-se os comprimentos das irregularidades apresentados na Tabela 20, e com as Equações (174) e (175), tem-se as seguintes velocidades do veículo para as respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade, e aceleração da ponte na condição de ressonância, apresentados na Tabela 22.

Tabela 22 – Velocidades do veículo para as respostas dinâmicas ressonantes da ponte.

Nº	***VRBD* (km/h)**	***VRBV* (km/h)**	***VRBA* (km/h)**
1º	16,353	16,358	16,368
2º	41,251	41,264	41,290
3º	43,112	43,126	43,154
4º	47,828	47,846	47,880
5º	75,071	75,121	75,221
6º	81,300	81,361	81,485
7º	81,883	81,946	82,071
8º	93,714	93,804	93,984
9º	120,935	121,118	121,485
10º	135,810	136,065	136,577
11º	146,712	147,031	147,671
12º	211,343	212,272	214,152

Fonte: Autor.

Em todos os oito casos serão avaliadas as respostas dinâmicas da ponte no centro de seu vão, onde ocorrem as maiores amplitudes, e nos centros de gravidade das duas vigas representados pelos pontos (*P*) e (*Q*) como mostra a Figura 121.

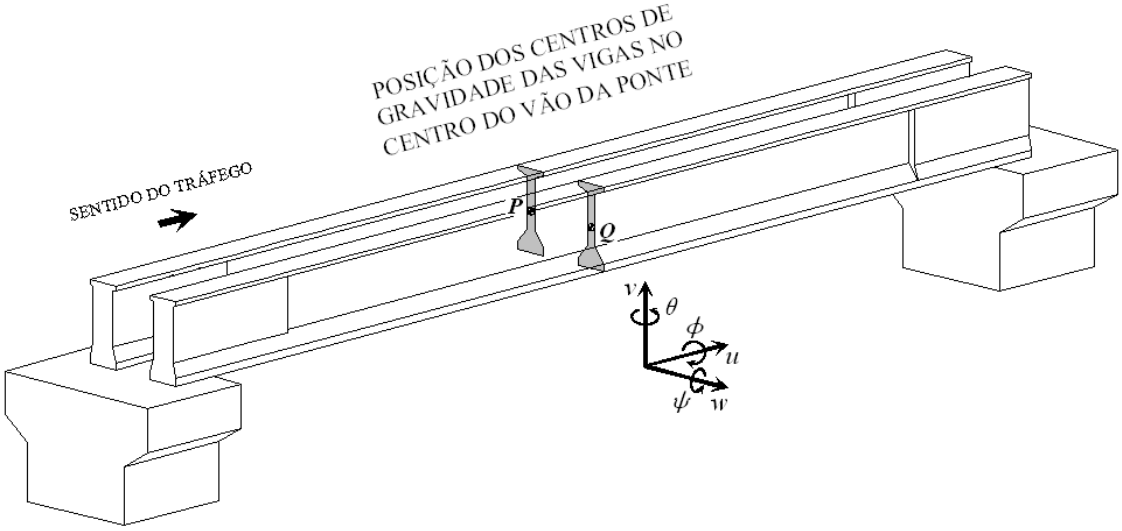


Figura 121 – Posição dos centros de gravidade das vigas.
Fonte: Autor.

As respostas dinâmicas da ponte produzidas pelo tráfego do veículo ferroviário dependerão do posicionamento do mesmo sobre a ponte. A Figura 122 mostra o posicionamento do veículo em relação à ponte. No instante (A), o primeiro eixo do truque dianteiro está sobre o apoio esquerdo da ponte. No instante (B), o centro do truque dianteiro está sobre o centro da ponte. No instante (C), o centro do veículo está sobre o centro da ponte. No instante (D), o centro do truque traseiro está sobre o centro da ponte. E finalmente no instante (E), o segundo eixo do truque traseiro está sobre o apoio direito da ponte.

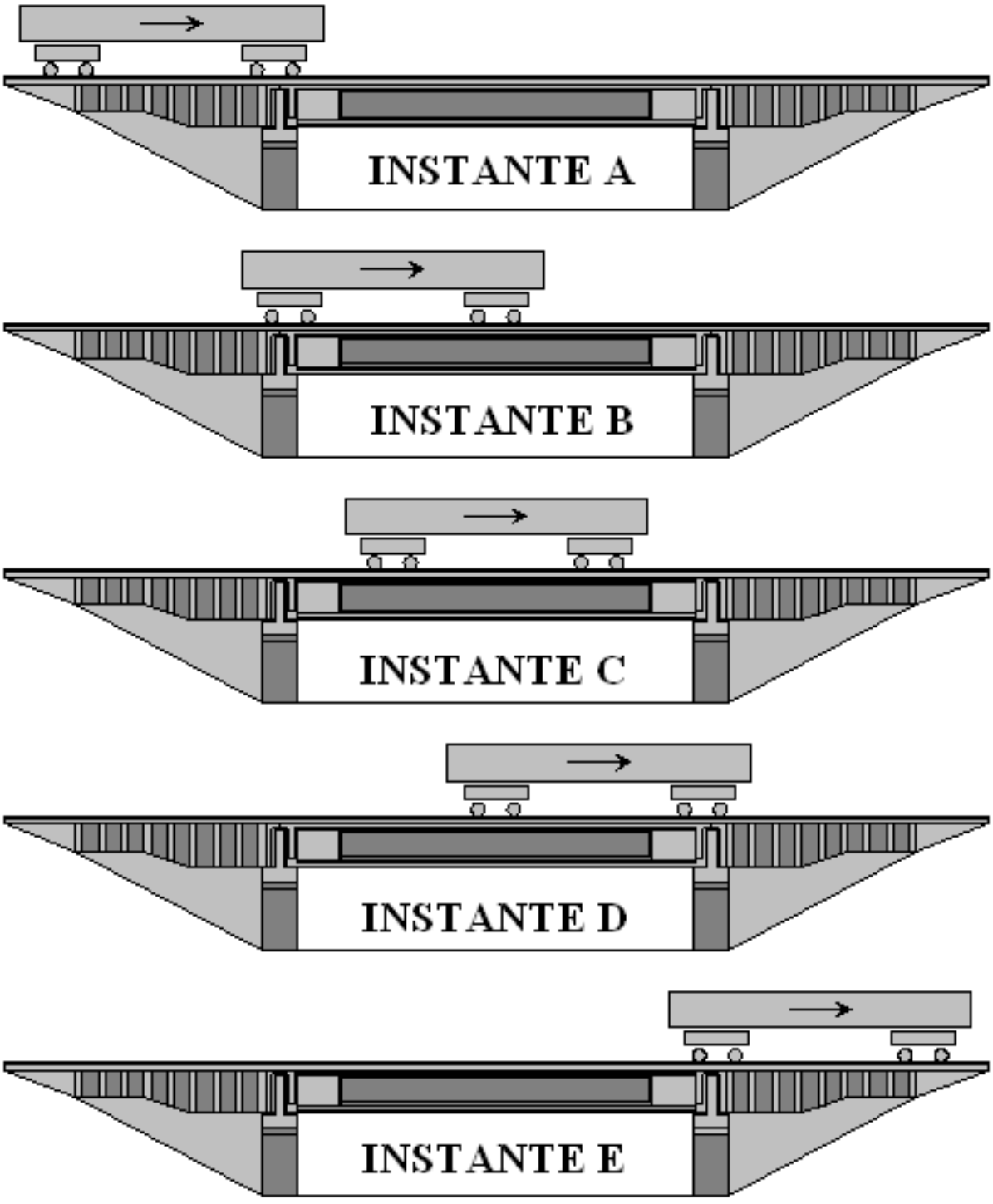


Figura 122 – Posicionamento do veículo em relação à ponte.
Fonte: Autor.

No caso sem irregularidades (SI), em todas as simulações não foram observadas a perda de contato entre as rodas e os trilhos. A Figura 123 mostra o histórico temporal de deslocamentos verticais (*v*), no centro da ponte com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para ao acaso (SI). Esta velocidade foi escolhida aqui para ilustrar uma condição sem ressonância, como pode ser vista na Tabela 22. As condições de ressonância serão apresentadas adiante.

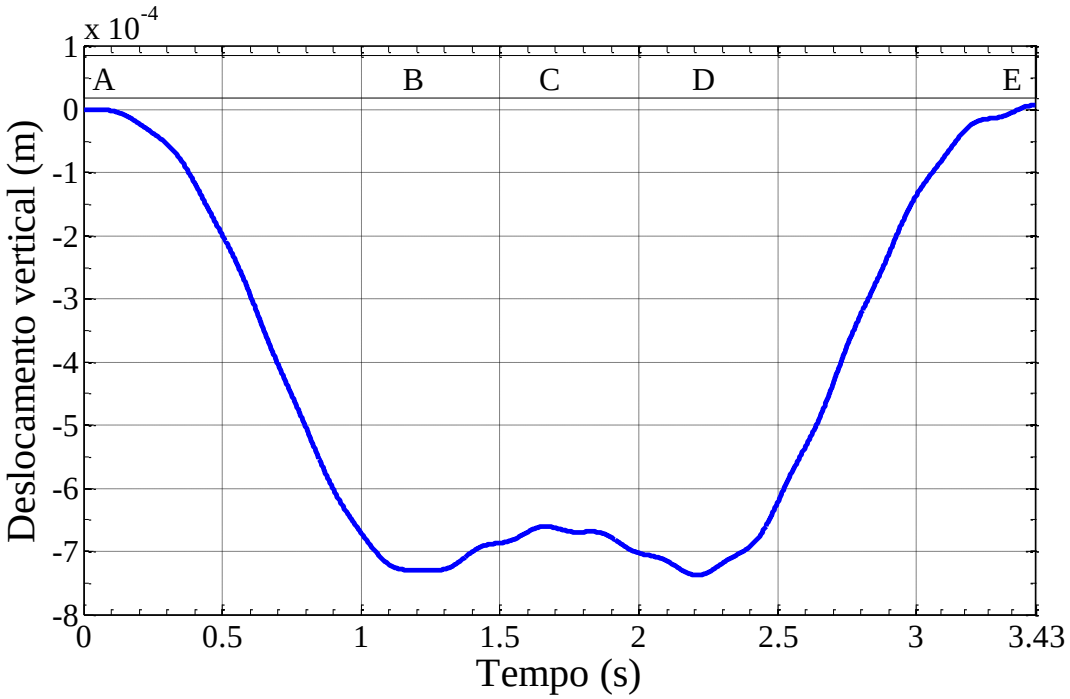


Figura 123 – Deslocamento vertical no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 123 no instante (A), em que o primeiro eixo do truque dianteiro está sobre o apoio esquerdo da ponte, as amplitudes dos deslocamentos verticais são nulas. No instante (B), em que o centro do truque dianteiro está sobre o centro da ponte, as amplitudes dos deslocamentos verticais formam o primeiro vale da curva. No instante (C), em que o centro do veículo está sobre o centro da ponte, apresenta-se certo alívio nos deslocamentos verticais da ponte, sendo representado pela pequena crista entre os dois vales da curva. No instante (D), em que o centro do truque traseiro está sobre o centro da ponte, as amplitudes dos deslocamentos verticais formam o segundo vale da curva. E finalmente no instante (E), em que o segundo eixo do truque traseiro está sobre o apoio direito da ponte, as amplitudes dos deslocamentos verticais são nulas. Observa-se que as maiores amplitudes dos deslocamentos verticais da ponte ocorrem nos instantes (B) e (D), em que os truques estão sobre o centro da ponte.

Os deslocamentos verticais no centro da ponte indicam a flexão vertical da ponte produzida pelo carregamento do veículo. Estes deslocamentos são relativamente pequenos, e representam frações de milímetros. Os deslocamentos verticais de ambas as vigas são praticamente idênticos, razão pela qual, é apresentada somente uma curva na Figura 123.

A Figura 124 mostra o histórico temporal dos deslocamentos laterais (*w*), no centro da ponte com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso (SI).

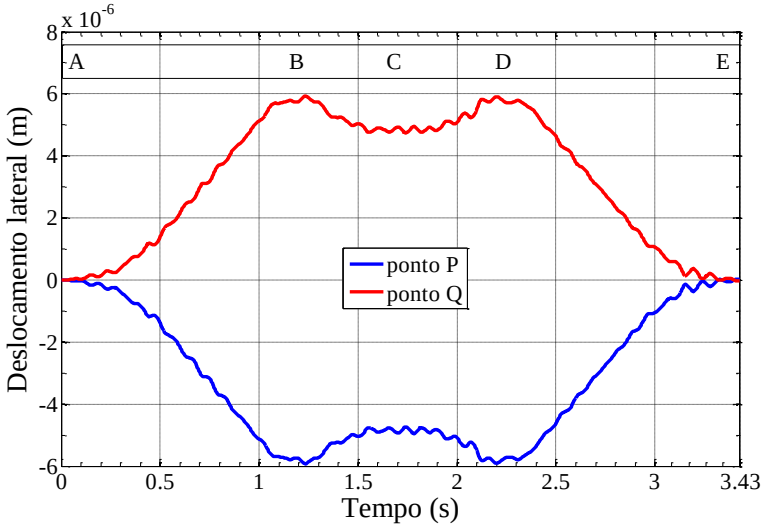


Figura 124 – Deslocamento lateral no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 124 duas curvas “espelhadas” que representam os deslocamentos laterais dos pontos (*P*) e (*Q*) localizados no centro da ponte. Enquanto os deslocamentos do ponto (*P*) são negativos, os do ponto (*Q*) são positivos, indicando a flexão lateral das vigas no sentido externo, conforme mostra a convenção dos sinais na Figura 121. Estas flexões se devem aos esforços laterais produzidos pelas rodas do veículo, definidos pela Equação (58) apresentada no Capítulo 3. Observa-se novamente a influência da passagem dos truques do veículo pelo centro do vão da ponte, apresentando-se as maiores amplitudes de deslocamentos laterais, representadas pelos instantes (B) e (D). Estes deslocamentos são da ordem de milésimos de milímetros, e, portanto, são relativamente pequenos.

A Figura 125 mostra o histórico temporal das rotações associadas à torção das vigas (ϕ), avaliadas no centro da ponte com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso (SI).

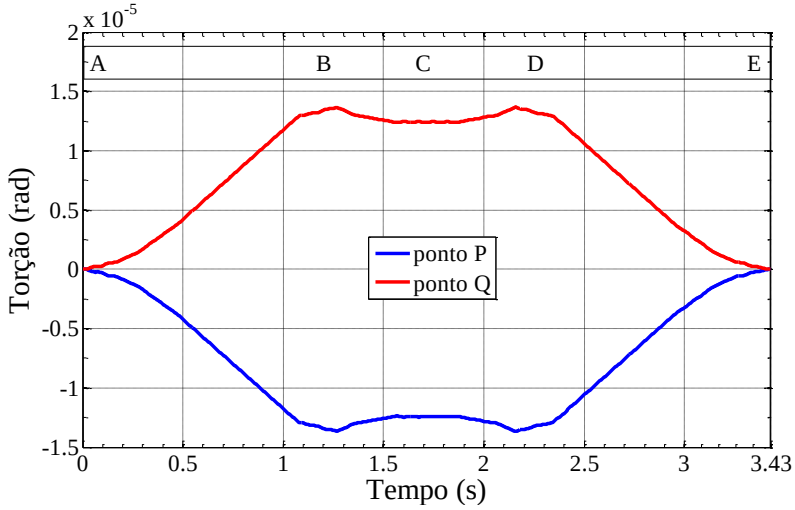


Figura 125 – Deslocamento de torção no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 125 duas curvas “espelhadas” representando os ângulos de rotação relativos à torção das vigas, avaliados nos pontos (*P*) e (*Q*) localizados no centro da ponte. Enquanto as rotações do ponto (*P*) são negativas, as do ponto (*Q*) são positivas, indicando a torção das vigas no sentido externo, conforme mostra a convenção dos sinais na Figura 121. Observa-se novamente a influência da passagem dos truques do veículo pelo centro do vão da ponte, apresentando-se as maiores amplitudes de rotação, representadas pelos instantes (B) e (D). Estas rotações são da ordem de milésimos de graus, e, portanto, são relativamente pequenas.

A Figura 126 mostra o histórico temporal das declividades da flexão vertical das vigas (ψ), avaliadas no centro da ponte com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso (SI).

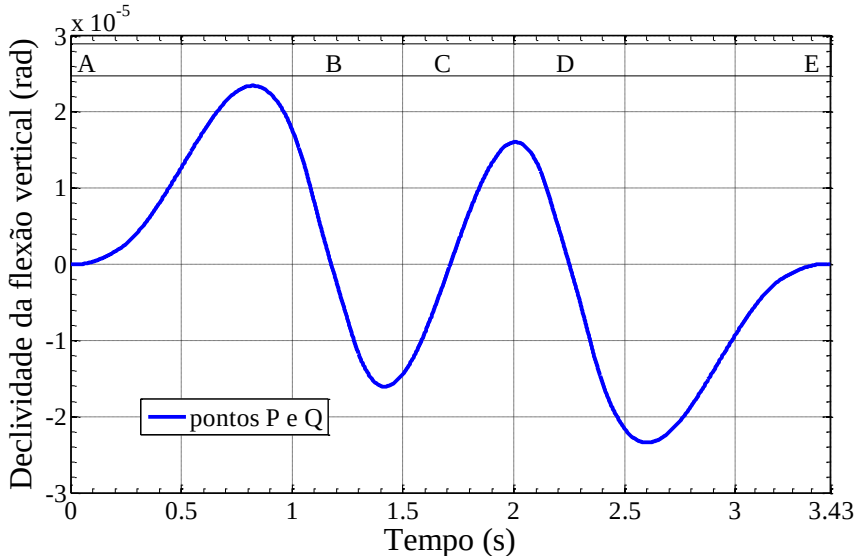


Figura 126 – Declividades da flexão vertical (ψ) no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 126 que nos instantes (A), e (E), as declividades (rotações) são nulas, pois representam respectivamente a entrada e a saída do veículo na ponte. Nos demais instantes (B), (C), e (D), as declividades também são nulas, pois representam pontos de máximos e mínimos da flexão vertical conforme mostra a Figura 123, uma vez que esta declividade é derivada primeira em relação à flexão vertical. Os valores destas declividades são da ordem de milésimos de graus, e, portanto, são relativamente pequenos. As declividades de ambas as vigas são praticamente idênticas, razão pela qual, é apresentada somente uma curva na Figura 126.

A Figura 127 mostra o histórico temporal das declividades da flexão lateral das vigas (θ), avaliadas no centro da ponte com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso (SI).

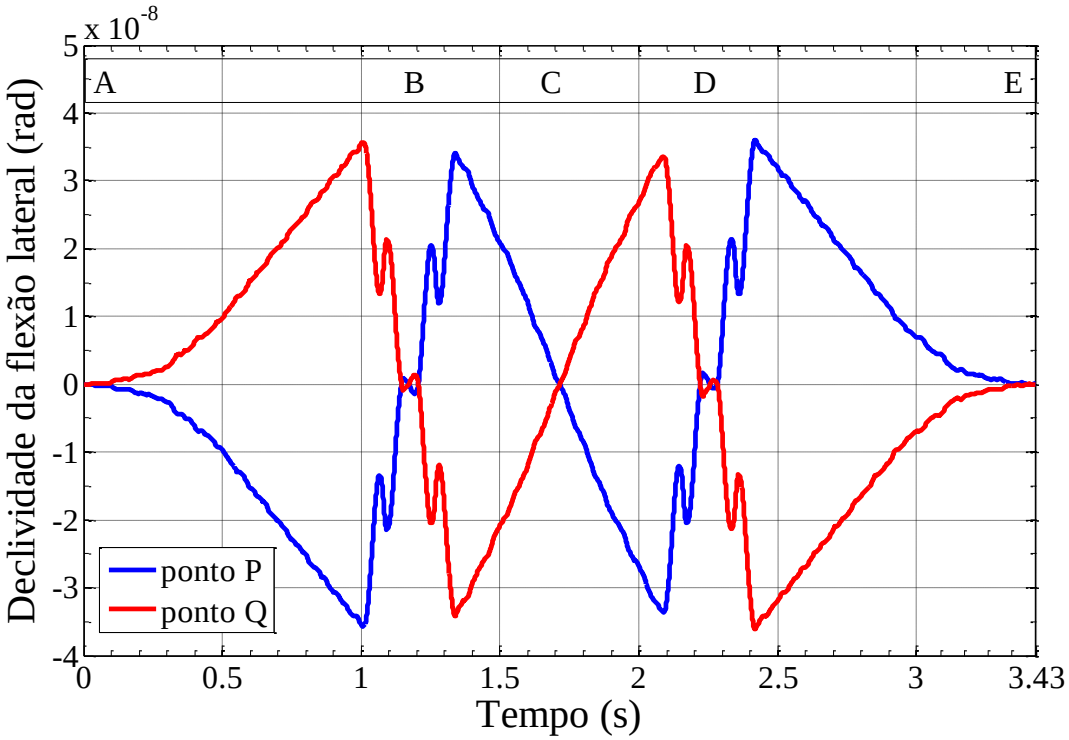


Figura 127 – Declividades da flexão lateral (θ) no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 127 que as declividades (rotações) de ambas as vigas são opostas, simétricas e invertem-se seus sentidos durante a passagem do veículo. Também observa-se que nos instantes (A), e (E), as declividades são nulas, pois representam respectivamente a entrada e a saída do veículo na ponte. Nos demais instantes (B), (C), e (D), as declividades também são nulas, pois representam pontos de máximos e mínimos da flexão lateral conforme mostra a Figura 124, uma vez que esta declividade é derivada primeira em relação à flexão lateral. As declividades apresentadas são da ordem de milionésimos de graus, e, portanto, são relativamente pequenas.

Os deslocamentos longitudinais da ponte, para o presente modelo sem irregularidades (SI), são nulos, pois estes deslocamentos dependem dos esforços horizontais produzidos pelo veículo, que por sua vez dependem dos escorregamentos horizontais de acordo com a teoria linear de *Kalker*, que por sua vez dependem dos movimentos laterais e das rotações (*yawing*) dos eixos, como apresentado nas Equações (81) e (82) do Capítulo 3.

No caso com somente irregularidades verticais (V), em todas as simulações não foram observadas a perda de contato entre as rodas e os trilhos. A Figura 128 mostra o histórico temporal de deslocamentos verticais (v), no centro da ponte com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso (V). Aqui também foi escolhida esta velocidade para ilustrar uma condição sem ressonância, como pode ser vista na Tabela 22.

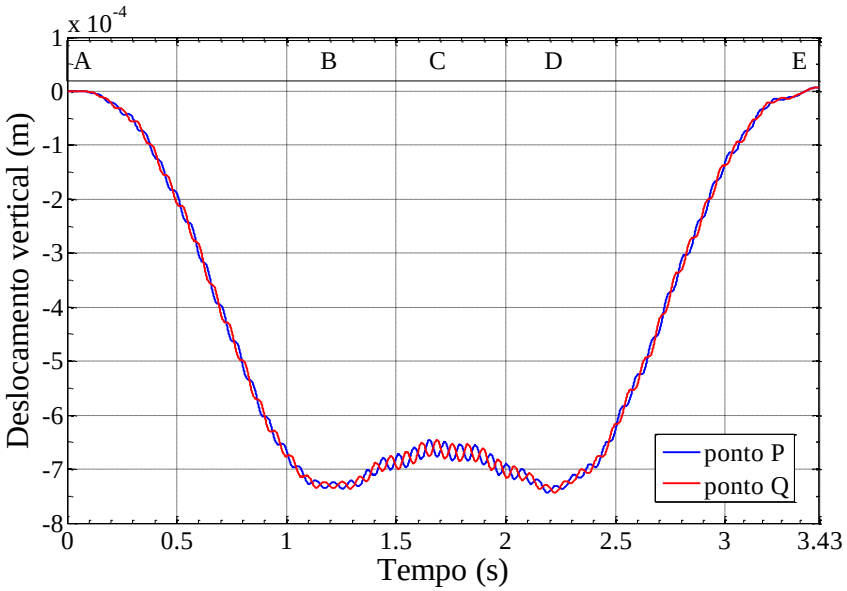


Figura 128 – Deslocamento vertical no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 128 duas curvas, representando os deslocamentos verticais das vigas no centro da ponte nos pontos (*P*) e (*Q*). Estes deslocamentos são oscilatórios devido às irregularidades verticais da via, as quais excitam o veículo que por sua vez incide seus esforços à estrutura da ponte. Também observa-se que os deslocamentos nos pontos (*P*) e (*Q*) são defasados entre si, pois no modelo de irregularidades verticais as amplitudes são defasadas (±10 mm), como mostra a Tabela 41. Em geral, os deslocamentos são proporcionais aos apresentados no modelo sem irregularidades (SI) da Figura 123, exceto pela resposta oscilatória proveniente das irregularidades verticais.

A Figura 129 mostra o histórico temporal dos deslocamentos laterais (*w*), no centro da ponte com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso (V).

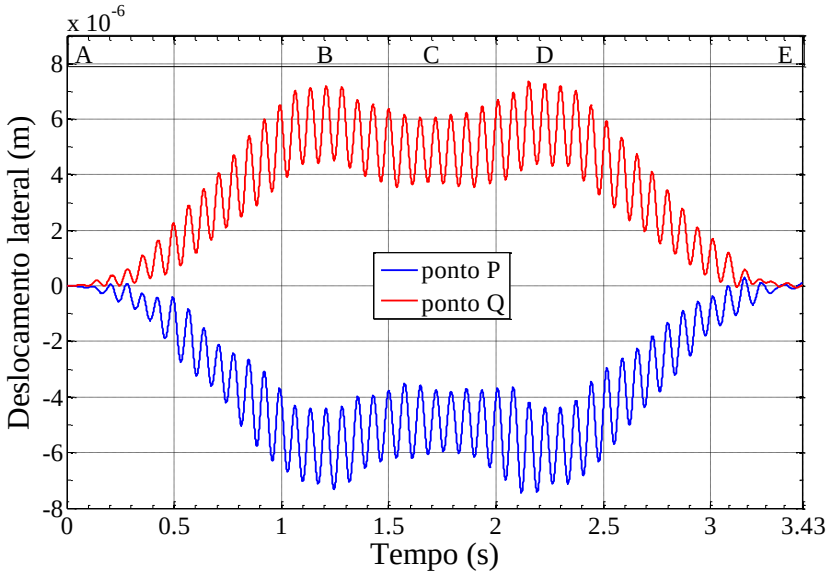


Figura 129 – Deslocamento lateral no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 129 duas curvas, representando os deslocamentos laterais das vigas no centro da ponte nos pontos (*P*) e (*Q*). Estes deslocamentos também são oscilatórios devido às irregularidades verticais da via. Enquanto os deslocamentos do ponto (*P*) são negativos, os do ponto (*Q*) são positivos, indicando a flexão lateral das vigas no sentido externo. Em geral, os deslocamentos são um pouco mais pronunciados que os apresentados no modelo sem irregularidades (SI) da Figura 124, e também, apresentam uma resposta oscilatória proveniente das irregularidades verticais. Estas irregularidades verticais também influenciam os esforços laterais do veículo, pois os esforços laterais são obtidos pela decomposição dos esforços verticais, como visto na Equação (58) do Capítulo 3.

A Figura 130 mostra o histórico temporal das rotações associadas à torção das vigas (ϕ), avaliadas no centro da ponte com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso (V).

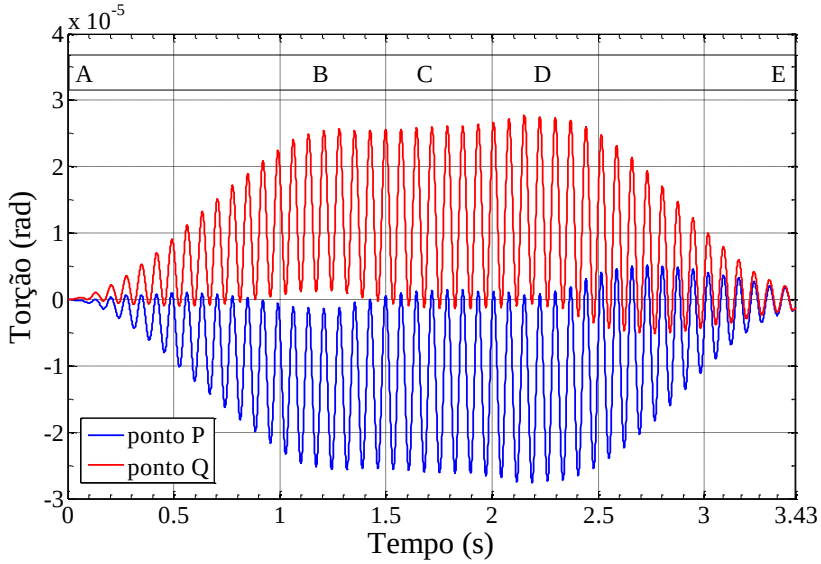


Figura 130 – Deslocamento de torção no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 130 duas curvas que representam os ângulos de rotação relativos à torção das vigas, avaliados nos pontos (*P*) e (*Q*) localizados no centro da ponte. Enquanto as rotações do ponto (*P*) são negativas, as do ponto (*Q*) são positivas, indicando a torção das vigas no sentido externo. Também observa-se que os deslocamentos são oscilatórios, e as máximas amplitudes são relativamente maiores que as apresentadas no caso (SI) da Figura 125. Todavia, os ângulos das rotações de torção são da ordem de milésimos de graus, portanto, relativamente pequenos.

A Figura 131 mostra o histórico temporal das declividades da flexão vertical das vigas (ψ), avaliadas no centro da ponte com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso (V).

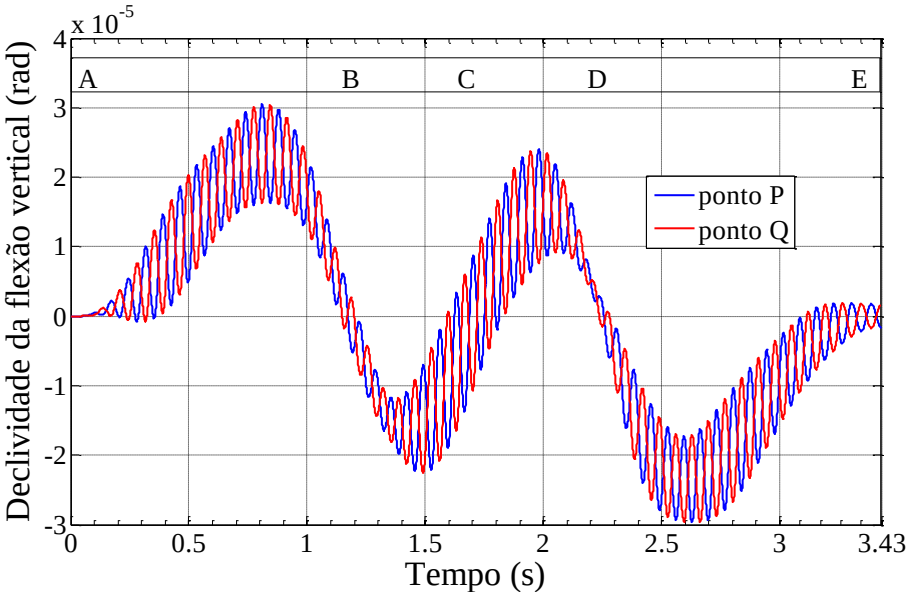


Figura 131 – Declividades da flexão vertical (ψ) no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 131 duas curvas, representando as declividades da flexão vertical das vigas avaliadas no centro da ponte nos pontos (*P*) e (*Q*). As respostas são oscilatórias e defasadas devido ao modelo de irregularidades verticais da via, o qual também apresenta defasagem em relação às amplitudes. O comportamento das curvas é semelhante ao encontrado no modelo sem irregularidades (SI) da Figura 126, no entanto, as respostas são oscilatórias, e as amplitudes encontradas aqui são maiores, porém da mesma ordem de grandeza, e, portanto relativamente pequenas.

A Figura 132 mostra o histórico temporal das declividades da flexão lateral das vigas (θ), avaliadas no centro da ponte com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso (V).

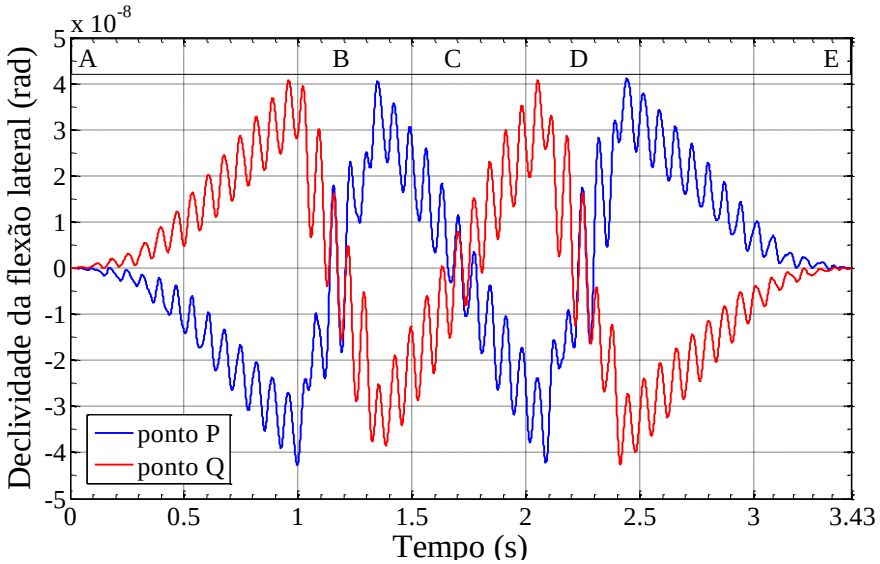


Figura 132 – Declividades da flexão lateral (θ) no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 132 duas curvas, representando as declividades da flexão lateral das vigas avaliadas no centro da ponte nos pontos (*P*) e (*Q*). As respostas também são oscilatórias e defasas devido ao modelo de irregularidades verticais da via. O comportamento das curvas é semelhante ao encontrado no modelo sem irregularidades (SI) da Figura 127, no entanto, as respostas são oscilatórias, e as amplitudes encontradas aqui são um pouco maiores, porém da mesma ordem de grandeza, e, portanto relativamente pequenas.

Os deslocamentos longitudinais da ponte, para o presente modelo com somente irregularidades verticais (V), são nulos, pois estes deslocamentos dependem dos esforços horizontais produzidos pelo veículo, que por sua vez dependem dos escorregamentos horizontais de acordo com a teoria linear de *Kalker*, que por sua vez dependem dos movimentos laterais e das rotações (*yawing*) dos eixos, como apresentado nas Equações (81) e (82) do Capítulo 3.

No caso com somente irregularidades laterais (L), em todas as simulações não foram observadas a perda de contato entre as rodas e os trilhos. A Figura 133 mostra o histórico temporal de deslocamentos longitudinais (*u*), no centro da ponte com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso (L).

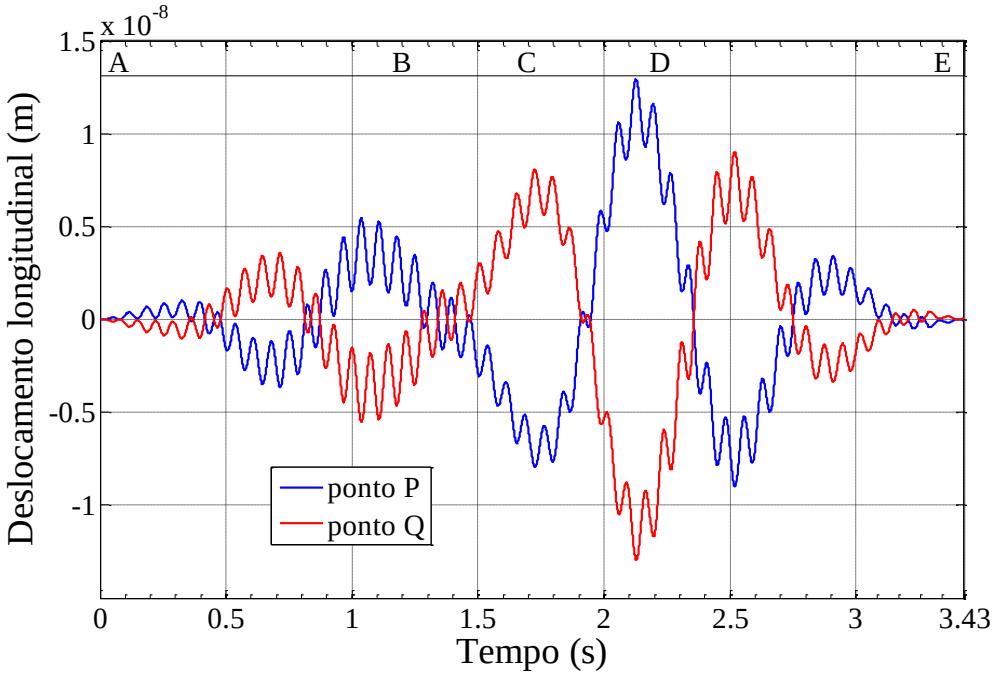


Figura 133 – Deslocamento longitudinal no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 133 duas curvas que representam os deslocamentos longitudinais das vigas avaliadas no centro da ponte nos pontos (*P*) e (*Q*). As curvas indicam os movimentos praticamente simétricos, e opostos entre si, isto é, enquanto o ponto (*P*) sofre oscilações positivas, o ponto (*Q*) sofre oscilações negativas, e vice e versa.

No instante (A), em que o primeiro eixo do truque dianteiro está sobre o apoio esquerdo da ponte, as amplitudes dos deslocamentos longitudinais de ambos os pontos (*P*) e (*Q*) são nulas. No instante (B), em que o centro do truque dianteiro está sobre o centro da ponte, as amplitudes dos deslocamentos longitudinais do ponto (*P*) são positivas, enquanto que as do (*Q*) são negativas. No instante (C), em que o centro do veículo está sobre o centro da ponte, a situação é invertida, as amplitudes dos deslocamentos longitudinais do ponto (*P*) são negativas, enquanto que as do (*Q*) são positivas. No instante (D), em que o centro do truque traseiro está sobre o centro da ponte, as amplitudes dos deslocamentos longitudinais do ponto (*P*) são positivas, enquanto que as do (*Q*) são negativas. Ainda entre os instantes (D) e (E), a inversão dos sentidos dos deslocamentos ocorre duas vezes, sendo a primeira vez mais pronunciada. E finalmente no instante (E), em que o segundo eixo do truque traseiro está sobre o apoio direito da ponte, as amplitudes dos deslocamentos longitudinais são nulas. Observa-se que as maiores amplitudes dos deslocamentos longitudinais da ponte ocorrem no instante (D), em que o truque traseiro está sobre o centro da ponte.

Os deslocamentos longitudinais das vigas avaliadas no centro da ponte são produzidos pelos esforços horizontais do veículo, e indicam tensões de trações e de compressões longitudinais nas vigas da ponte. Porém, estas tensões são de baixa intensidade, frente aos deslocamentos que são relativamente pequenos, da ordem de centésimos de milésimos de milímetros.

As demais respostas dinâmicas de deslocamentos no centro da ponte para o caso de somente irregularidades laterais da via (L), foram omitidas aqui, pois representam comportamento muito semelhante às respostas obtidas para ao caso sem irregularidades (SI).

No caso com somente irregularidades rotacionais (R), em todas as simulações não foram observadas a perda de contato entre as rodas e os trilhos. A Figura 134 mostra o histórico temporal de deslocamentos longitudinais (*u*), no centro da ponte com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso (R).

Observa-se na Figura 134 duas curvas que representam os deslocamentos longitudinais das vigas avaliadas no centro da ponte nos pontos (*P*) e (*Q*). As curvas indicam os movimentos praticamente simétricos, e opostos entre si, isto é, enquanto o ponto (*P*) sofre deslocamentos positivos, o ponto (*Q*) sofre deslocamentos negativos, e vice e versa. Percebe-se que as amplitudes dos deslocamentos obtidas aqui são relativamente maiores que as encontradas no caso anterior (L) da Figura 133, além de apresentarem maiores oscilações. Os deslocamentos são da ordem de décimos milésimos de milímetros, e, portanto, são relativamente pequenos.

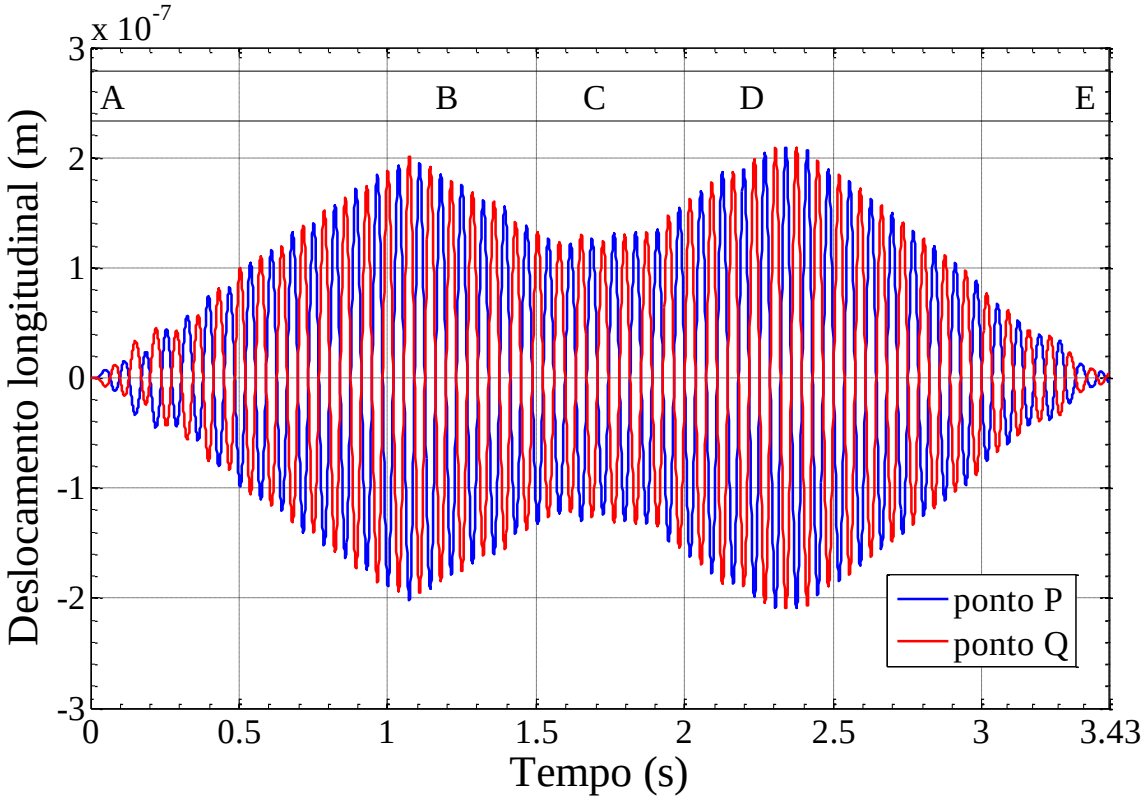


Figura 134 – Deslocamento longitudinal no centro da ponte.
Fonte: Autor.

No caso (R) há maiores escorregamentos longitudinais, provenientes da rotação dos eixos no plano (*yawing*), os quais produzem maiores esforços longitudinais de acordo com a teoria linear de *Kalker*, implicando em maiores repostas dos deslocamentos longitudinais. Estas relações estão nas Equações (81) e (82) do Capítulo 3.

As demais respostas dinâmicas de deslocamentos no centro da ponte para o caso de somente irregularidades rotacionais da via (R), foram omitidas aqui, pois também representam comportamento muito semelhante às respostas obtidas para ao caso sem irregularidades (SI).

Nos casos com irregularidades combinadas: vertical e lateral (VL); vertical e rotacional (VR); e lateral e rotacional (LR); em todas as simulações não foram observadas a perda de contato entre as rodas e os trilhos. Quanto às respostas dinâmicas de deslocamentos: as do caso (VL), são semelhantes às do caso (V); e as dos casos (VR) e (LR), são semelhantes às do caso (R).

Apesar destas semelhanças, as amplitudes dos deslocamentos das respostas dinâmicas obtidas nestes casos de irregularidades combinadas são um pouco mais intensificadas devido à presença de outro tipo de irregularidade. Isto provoca maiores esforços verticais e laterais do veículo que são transmitidos aos trilhos, que por sua vez os transmitem à estrutura da ponte. Com uma maior movimentação nos graus de liberdade dos eixos do veículo, proveniente da excitação das irregularidades, haverá maiores intensidades de escorregamentos de acordo com

a Equação (81) do Capítulo 3. Devido ao acréscimo destes escorregamentos haverá um acréscimo nas forças de contato (laterais, longitudinais, e os momentos de *spin*), de acordo com a teoria linear de *Kalker*, como mostra a Equação (82) do Capítulo 3. Com o aumento dos esforços verticais e laterais do veículo, e também com o aumento das forças de contato, ocorre um proporcional aumento dos deslocamentos da ponte. Todavia, estes ainda são relativamente pequenos.

No caso que combina os tipos de irregularidades, vertical, lateral, e rotacional (VLR), as amplitudes das respostas dinâmicas obtidas são maiores que as dos casos anteriores, devido à maior combinação de efeitos provenientes das irregularidades. Deste modo, serão avaliadas as condições ressonantes da ponte utilizando-se este tipo de irregularidades combinadas (VLR), por se tratar de um caso mais crítico.

A Figura 135 mostra o histórico temporal de deslocamentos verticais (*v*), no centro da ponte na condição ressonante do 1º modo de flexão vertical, com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 16,353 km/h para o caso (VLR).

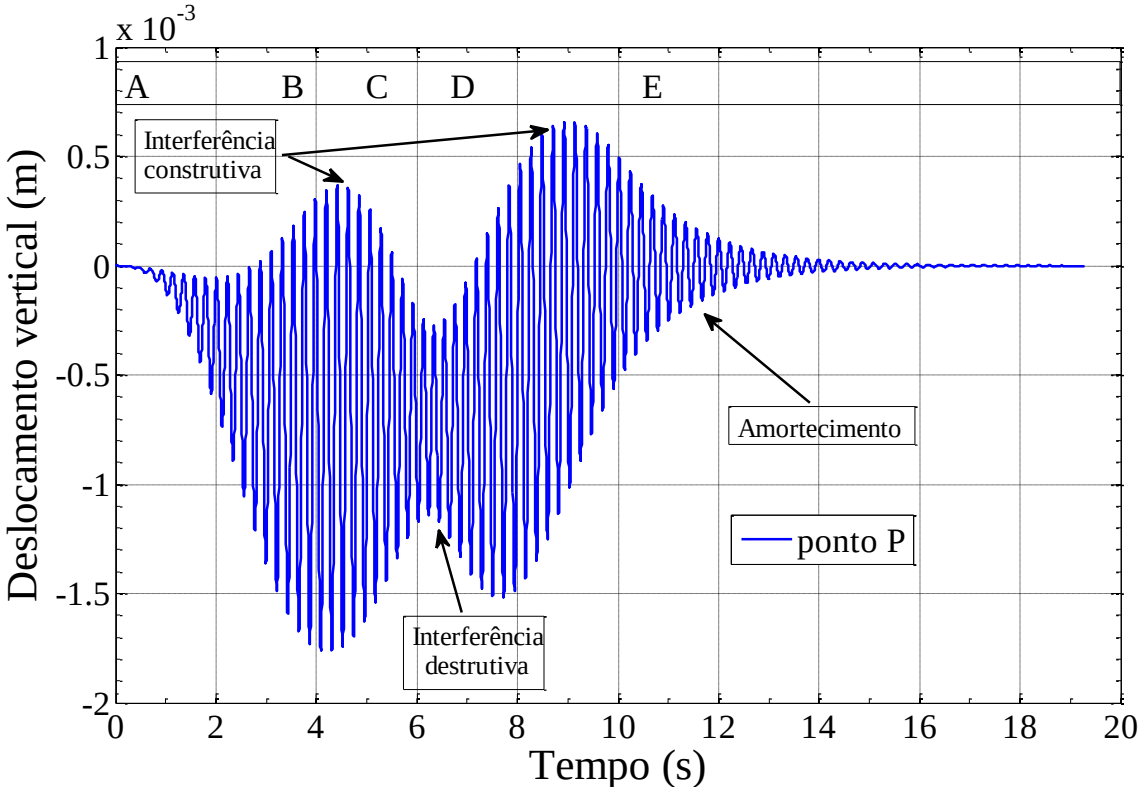


Figura 135 – Deslocamento vertical no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 135 que os deslocamentos apresentam uma rápida oscilação com uma baixa variação de amplitude, fenômeno conhecido como batimento. Este ocorre pois há uma superposição de ondas de mesma direção, mesmas amplitudes e freqüências próximas, condição esta de ressonância. (INMAN, 1996).

Percebe-se também as interferências construtivas, as quais aumentam significativamente as amplitudes dos deslocamentos, tanto no sentido positivo, quanto no sentido negativo. De maneira oposta, as interferências destrutivas reduzem as amplitudes dos deslocamentos. Entende-se por estas interferências construtivas e destrutivas a questão da excitação em fase, e fora de fase, respectivamente. Observa-se também que as amplificações dos deslocamentos não coincidem com os instantes (B) e (D), em que os truques do veículo passam pelo centro da ponte, havendo, desta forma, um pequeno atraso das amplificações das repostas dinâmicas. Após a passagem do veículo pela ponte, ou seja, a partir do instante (E), a ponte continua em vibração, sendo atenuada exponencialmente em função do tempo através do amortecimento do sistema.

A oscilação dos deslocamentos verticais entre valores positivos e negativos, implica em oscilações nas solicitações de tração e de compressão nas vigas, devido aos esforços relativos à flexão vertical.

Apesar da condição ressonante, as máximas amplitudes dos deslocamentos verticais encontradas são pequenas, da ordem de milímetros. As respostas dinâmicas relativas ao deslocamento vertical no centro do vão da ponte analisadas no ponto (*Q*) nesta condição ressonante são análogas às encontradas na Figura 135, razão pela qual foram omitidas aqui.

A Figura 136 mostra o histórico temporal de aceleração vertical, no centro da ponte na condição ressonante do 1º modo de flexão vertical, com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 16,368 km/h para o caso (VLR).

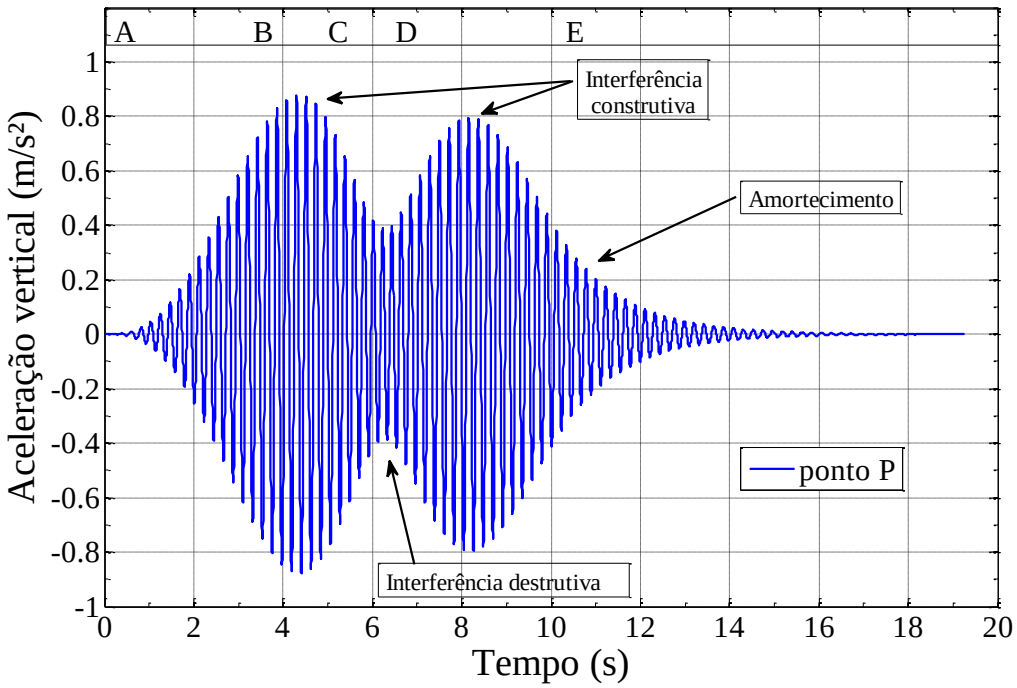


Figura 136 – Aceleração vertical no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 136 a presença do batimento para as acelerações verticais no centro da ponte. Também é possível observar as interferências construtivas e destrutivas das acelerações, bem como, as oscilações tanto no sentido positivo, quanto no sentido negativo. As amplificações das acelerações também não coincidem com os instantes (B) e (D), em que os truques do veículo passam pelo centro da ponte, havendo, desta forma, um pequeno atraso nas repostas dinâmicas de aceleração. A presença do amortecimento no sistema também é observada, contribuindo para a redução exponencial das amplitudes de aceleração.

As máximas amplitudes de aceleração vertical são pequenas ($\approx 0{,}09.\vec{g}$), apesar da condição ressonante. As acelerações verticais no centro do vão da ponte analisadas no ponto (*Q*) nesta condição ressonante foram omitidas aqui, pois representam um comportamento semelhante ao encontrado na Figura 136.

A Figura 137 mostra o histórico temporal de deslocamentos laterais (*w*), no centro da ponte na condição ressonante do 1º modo de flexão lateral, com o veículo trafegando a uma velocidade de constante 41,251 km/h para o caso (VLR).

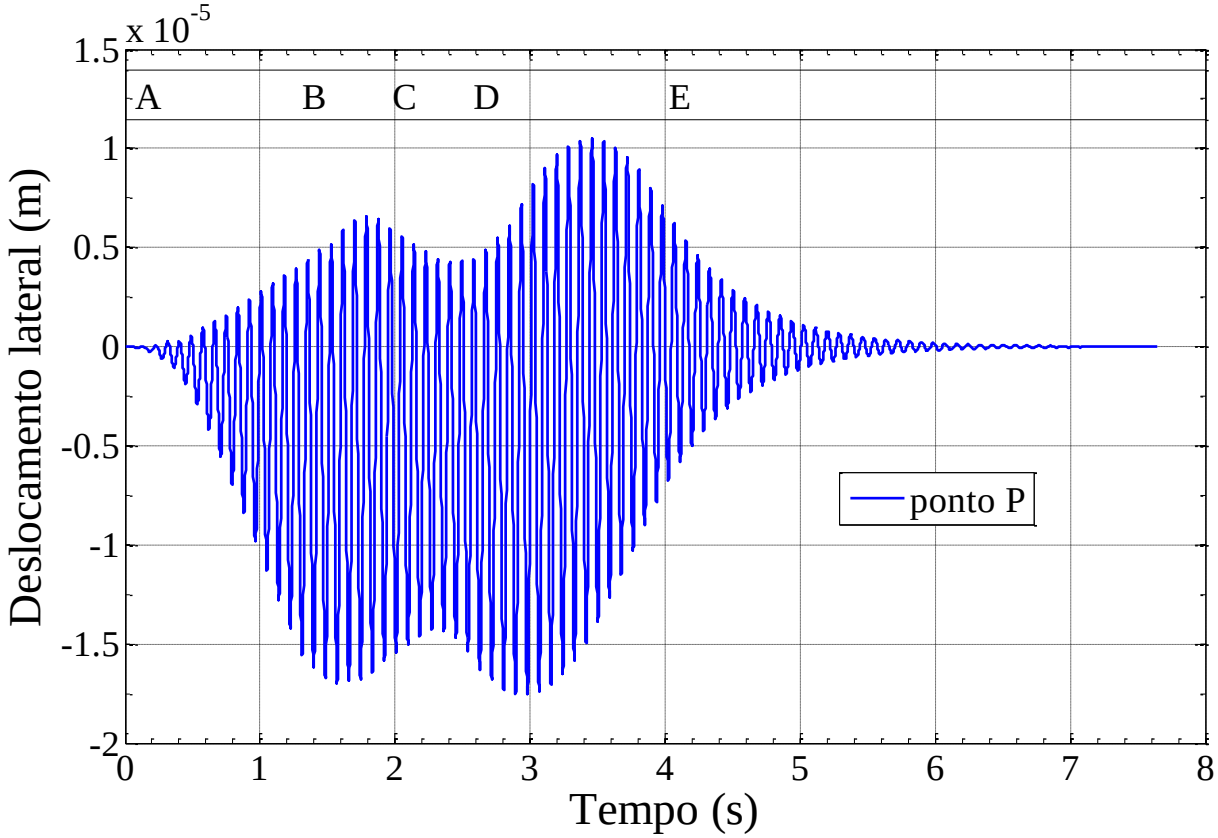


Figura 137 – Deslocamento lateral no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 137 a presença do batimento nas respostas dinâmicas de deslocamento lateral no centro da ponte. Também percebe-se as interferências construtivas e destrutivas, além do amortecimento. As amplificações aqui também são atrasadas em relação

aos instantes (B) e (D), em que os truques do veículo passam pelo centro da ponte. As oscilações variam entre amplitudes positivas e negativas, indicando a flexão lateral com oscilações nas solicitações de tração e de compressão. Apesar da condição de ressonância, as amplitudes dos deslocamentos laterais são relativamente pequenas da ordem de centésimos de milímetros. As respostas do ponto (*Q*) para as mesmas condições, são praticamente idênticas, porém, opostas às obtidas na Figura 137, pois a flexão lateral das vigas ocorre no sentido externo, desta forma, foram omitidas aqui.

A Figura 138 mostra o histórico temporal de aceleração lateral, no centro da ponte na condição ressonante do 1º modo de flexão lateral, com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 41,290 km/h para o caso (VLR).

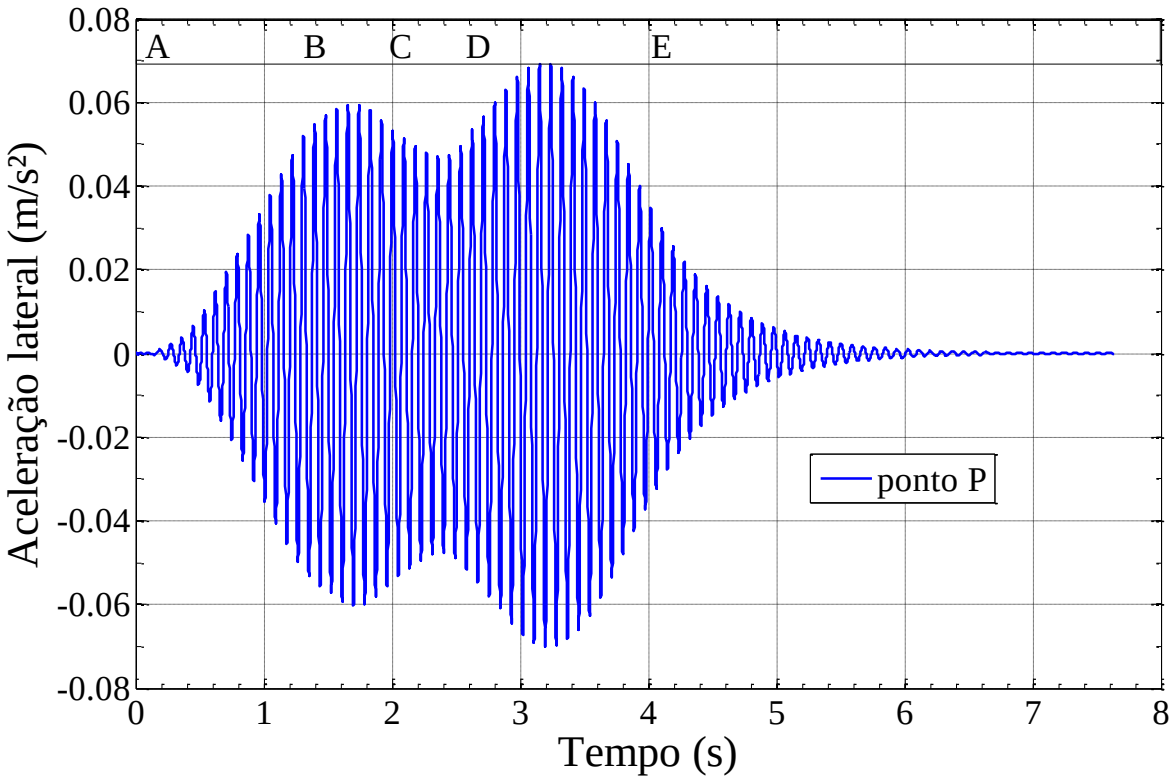


Figura 138 – Aceleração lateral no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Também observa-se na Figura 138, a presença do batimento, das interferências construtivas e destrutivas, bem como, o amortecimento do sistema, nas respostas dinâmicas de aceleração lateral no centro da ponte. Aqui também há um atraso das amplificações das acelerações em relação à passagem dos truques do veículo pelo centro da ponte nos instantes (B) e (D). As acelerações laterais oscilam entre valores positivos e negativos, e as máximas amplitudes são relativamente pequenas ($\approx 0{,}007.\vec{g}$), apesar da condição de ressonância. As respostas do ponto (*Q*) para as mesmas condições, foram omitidas aqui, pois, são praticamente idênticas, porém têm o sentido oposto às obtidas na Figura 138.

A Figura 139 mostra o histórico temporal das rotações associadas à torção da viga (ϕ), avaliadas no centro da ponte no ponto (P), na condição de ressonância do 1º modo de torção, com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 47,828 km/h, para o caso (VLR).

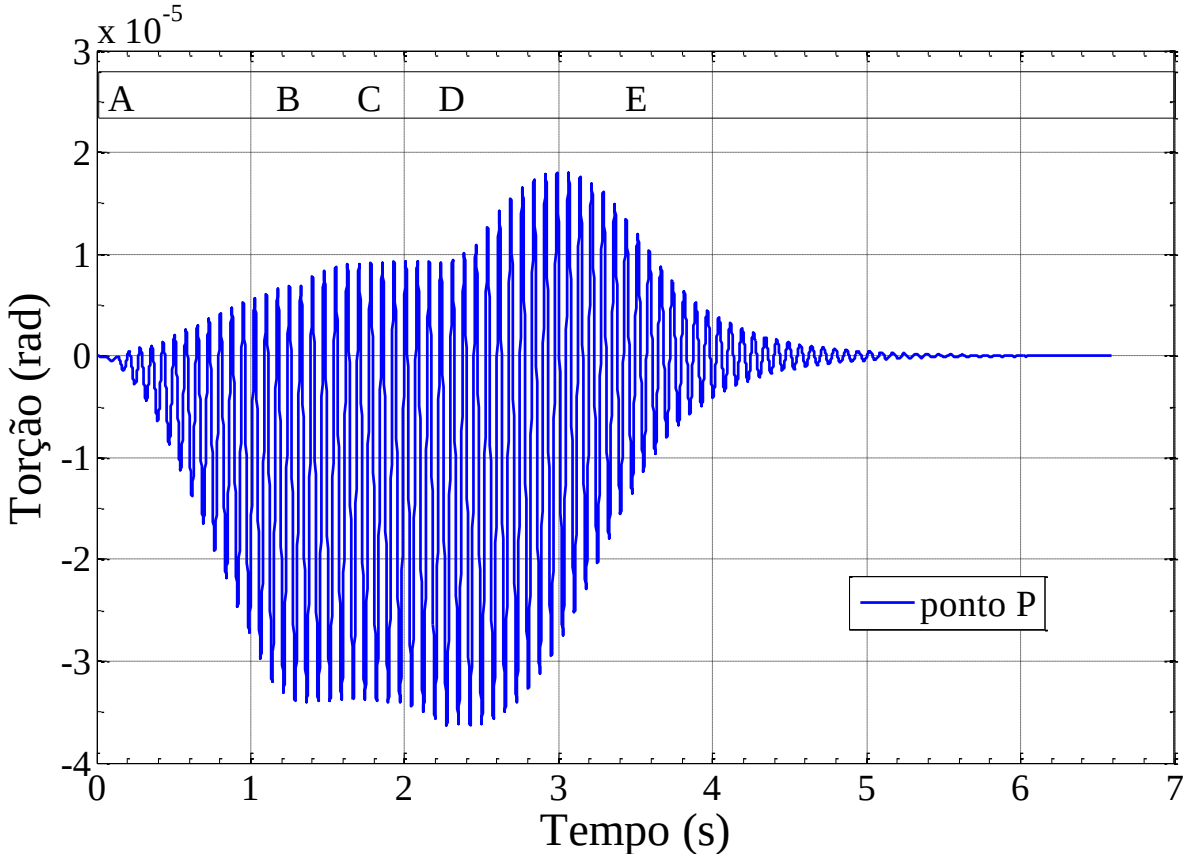


Figura 139 – Deslocamento de torção no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 139 a presença do batimento, pois há uma rápida oscilação com uma baixa variação de amplitude nas rotações relativas à torção da viga avaliada no ponto (P). Também observa-se um atraso nas amplificações relativo aos instantes (B) e (D), em que os truques passam pelo centro da ponte. Percebe-se que as oscilações variam entre valores positivos e negativos. A partir do instante (E), é possível observar a presença do amortecimento do sistema, pois há redução das amplitudes dos deslocamentos de rotação. Estes são da ordem de milésimos de graus, e, portanto, são relativamente pequenos, apesar da condição de ressonância. As rotações obtidas no ponto (Q) para as mesmas condições anteriores são idênticas às do ponto (P), porém têm o sentido oposto, por isso foram omitidas aqui.

A Figura 140 mostra o histórico temporal de deslocamentos longitudinais (u), avaliados no centro da ponte no ponto (P), na condição de ressonância do 1º modo longitudinal, com o veículo trafegando a uma velocidade constante de 75,071 km/h, para o caso (VLR).

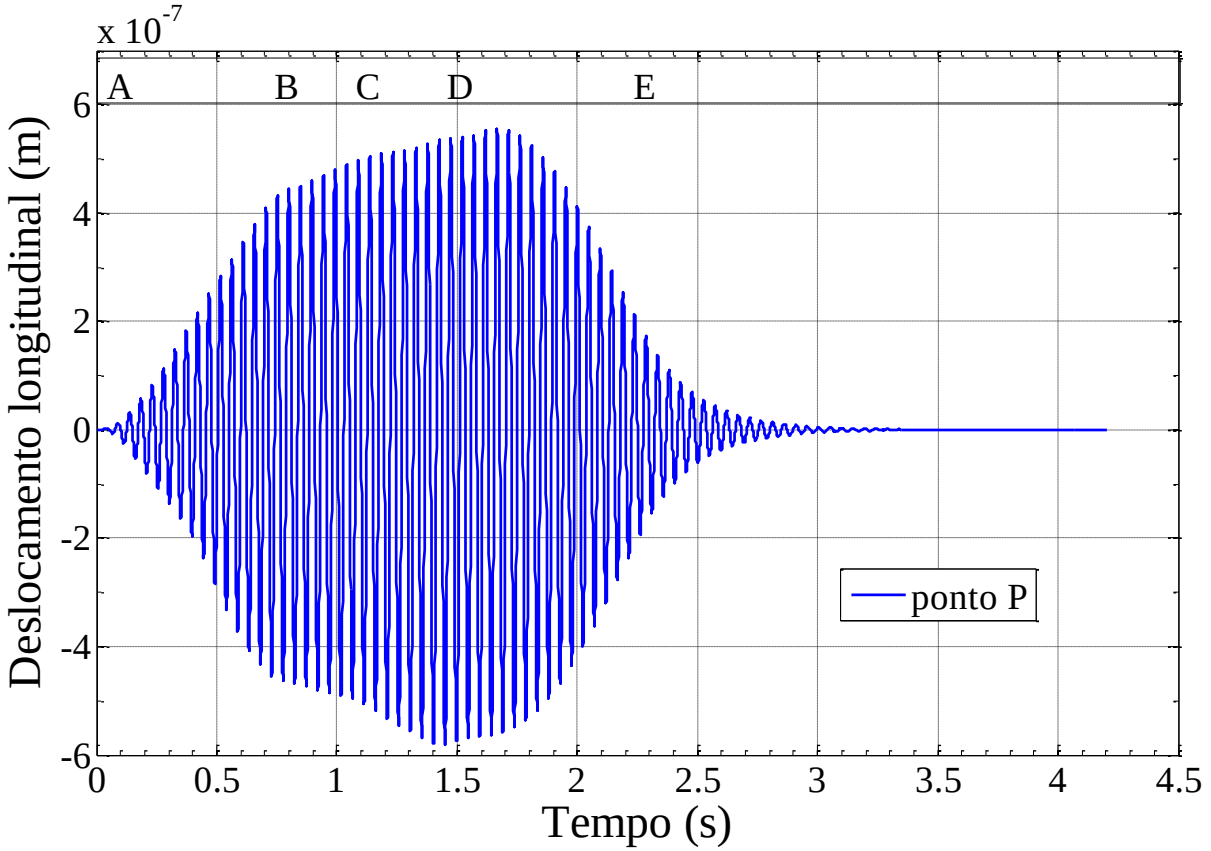


Figura 140 – Deslocamento longitudinal no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 140 a presença do batimento nas respostas dinâmicas de deslocamento longitudinal no centro da ponte. As oscilações variam entre valores positivos e negativos, indicando respectivamente tensões de tração e tensões de compressão. Todavia os valores de deslocamentos são relativamente pequenos, da ordem de décimos centésimos de milímetros. Também observa-se a presença do amortecimento através da redução das amplitudes. As respostas avaliadas no ponto (*Q*) para as mesmas condições foram omitidas, pois representam um comportamento semelhante.

Nesta seção foi estudada a vibração forçada na ponte produzida pelo tráfego do veículo ferroviário sob diferentes condições de velocidade e irregularidades verticais, laterais, e rotacionais da via.

Em geral observou-se que as maiores respostas dinâmicas foram produzidas pelo modelo no qual combina os efeitos das irregularidades, o modelo (VLR). No modelo sem irregularidades (SI), as respostas dinâmicas não apresentam oscilações. Estas já são observadas nos demais modelos, pois se utilizam de funções harmônicas.

Nestas análises, também foram abordadas as condições de ressonância da ponte produzidas pelo tráfego do veículo ferroviário. Observou-se que nas condições de ressonância, as respostas dinâmicas são amplificadas, apresentando-se amplitudes de valores

relativamente maiores que nas demais condições. Porém, apesar das condições ressonantes, as máximas amplitudes dos deslocamentos encontradas na ponte são relativamente pequenas não comprometendo, desta forma, a trafegabilidade do veículo ferroviário para os casos estudados.

4.3.3 Análise de vibração forçada na ponte produzida pela composição TUE

Nesta seção será estudada a vibração forçada na ponte produzida por uma composição TUE. Uma composição TUE, Trem Unidade Elétrico, pode ser formada por quatro veículos (MRRM), ou por oito veículos (MRRMMRRM), onde (M) e (R), representam carro motor, e carro reboque, respectivamente. A Figura 141 ilustra uma composição TUE formada por oito veículos trafegando sobre a ponte ferroviária, e uma composição TUE formada por quatro veículos trafegando sobre a ponte ferroviária.

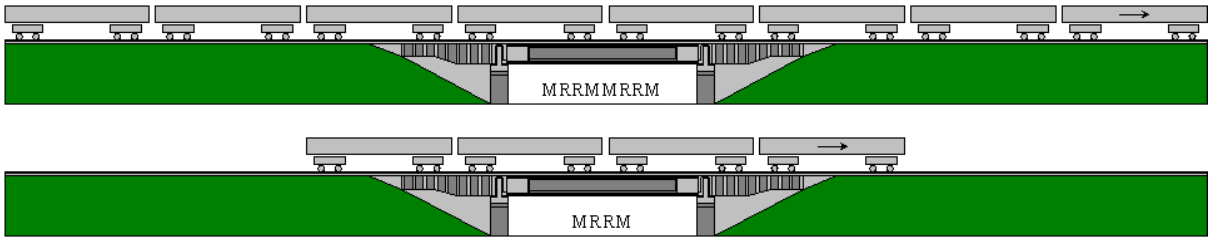


Figura 141 – Composições TUE trafegando sobre a ponte ferroviária.
Fonte: Autor.

Em todos os veículos serão utilizadas as propriedades do carro motor, expostas anteriormente pelas Tabelas 8, 9 e 10. As distâncias longitudinais das composições TUE formada por oito, e por quatro veículos, são representadas na Figura 142.

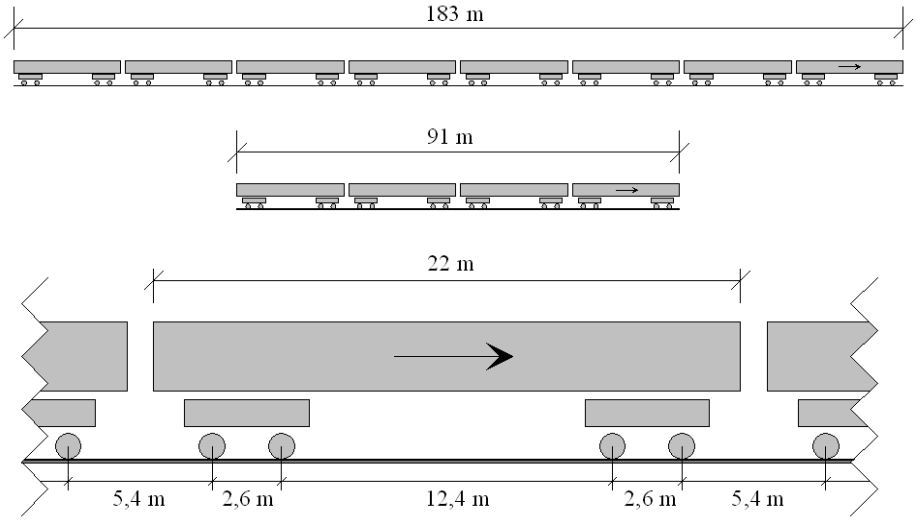


Figura 142 – Distâncias longitudinais das composições TUE.
Fonte: Autor.

Nesta associação de carros preserva-se o afastamento que há entre eles. Neste modelo não são considerados os efeitos provenientes dos aparelhos de choque e de tração, os quais interconectam os vagões. Portanto, não são consideradas as forças de conexão nem os movimentos longitudinais relativos entre os vagões. Estes aparelhos são apresentados em detalhes no Apêndice B. Também não se considerou a análise modal do conjunto veículo e estrutura da ponte.

As equações de movimento do modelo tridimensional de composição ferroviária (trem) podem ser agrupadas em um único sistema matricial de equações diferenciais não-homogêneas lineares de segunda ordem representado por:

$$[M_T]\{\ddot{U}_T(t)\}+[C_T]\{\dot{U}_T(t)\}+[K_T]\{U_T(t)\}=\{P_T(t)\} \tag{177}$$

onde, $[M_T]$, $[C_T]$ e $[K_T]$ são as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do trem, respectivamente. Os vetores $\{\ddot{U}_T(t)\}$, $\{\dot{U}_T(t)\}$ e $\{U_T(t)\}$ representam a aceleração, velocidade e deslocamento do trem, respectivamente. Finalmente $\{P_T(t)\}$ representa o vetor de forças externas.

As matrizes $[M_T]$, $[C_T]$ e $[K_T]$, e os vetores $\{\ddot{U}_T(t)\}$, $\{\dot{U}_T(t)\}$, $\{U_T(t)\}$ e $\{P_T(t)\}$, são compostos pelos arranjos das sub-matrizes $[M_V]$, $[C_V]$ e $[K_V]$, e dos sub-vetores $\{\ddot{U}_V(t)\}$, $\{\dot{U}_V(t)\}$, $\{U_V(t)\}$ e $\{P_V(t)\}$, da Equação (42) do Capítulo 3, respectivamente. Desta maneira, têm-se os seguintes arranjos matriciais:

$$[M_T]=\begin{bmatrix}[M_V] & & & & \\ & [M_V] & & & \\ & & [M_V] & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & [M_V]\end{bmatrix};\quad [C_T]=\begin{bmatrix}[C_V] & & & & \\ & [C_V] & & & \\ & & [C_V] & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & [C_V]\end{bmatrix};$$

$$[K_T]=\begin{bmatrix}[K_V] & & & & \\ & [K_V] & & & \\ & & [K_V] & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & [K_V]\end{bmatrix}. \tag{178}$$

De maneira análoga, têm-se os seguintes arranjos vetoriais:

$$\{\ddot{U}_T(t)\}=\begin{Bmatrix}\{\ddot{U}_V(t)\}\\ \{\ddot{U}_V(t)\}\\ \{\ddot{U}_V(t)\}\\ \vdots \\ \{\ddot{U}_V(t)\}\end{Bmatrix};\quad \{\dot{U}_T(t)\}=\begin{Bmatrix}\{\dot{U}_V(t)\}\\ \{\dot{U}_V(t)\}\\ \{\dot{U}_V(t)\}\\ \vdots \\ \{\dot{U}_V(t)\}\end{Bmatrix};\quad \{U_T(t)\}=\begin{Bmatrix}\{U_V(t)\}\\ \{U_V(t)\}\\ \{U_V(t)\}\\ \vdots \\ \{U_V(t)\}\end{Bmatrix};\quad \{P_T(t)\}=\begin{Bmatrix}\{P_V(t)\}\\ \{P_V(t)\}\\ \{P_V(t)\}\\ \vdots \\ \{P_V(t)\}\end{Bmatrix} \tag{179}$$

A Figura 143 mostra o histórico temporal de deslocamentos verticais (*v*), no centro da

ponte produzido por uma composição TUE formada por oito veículos, trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso de irregularidades combinadas (VLR).

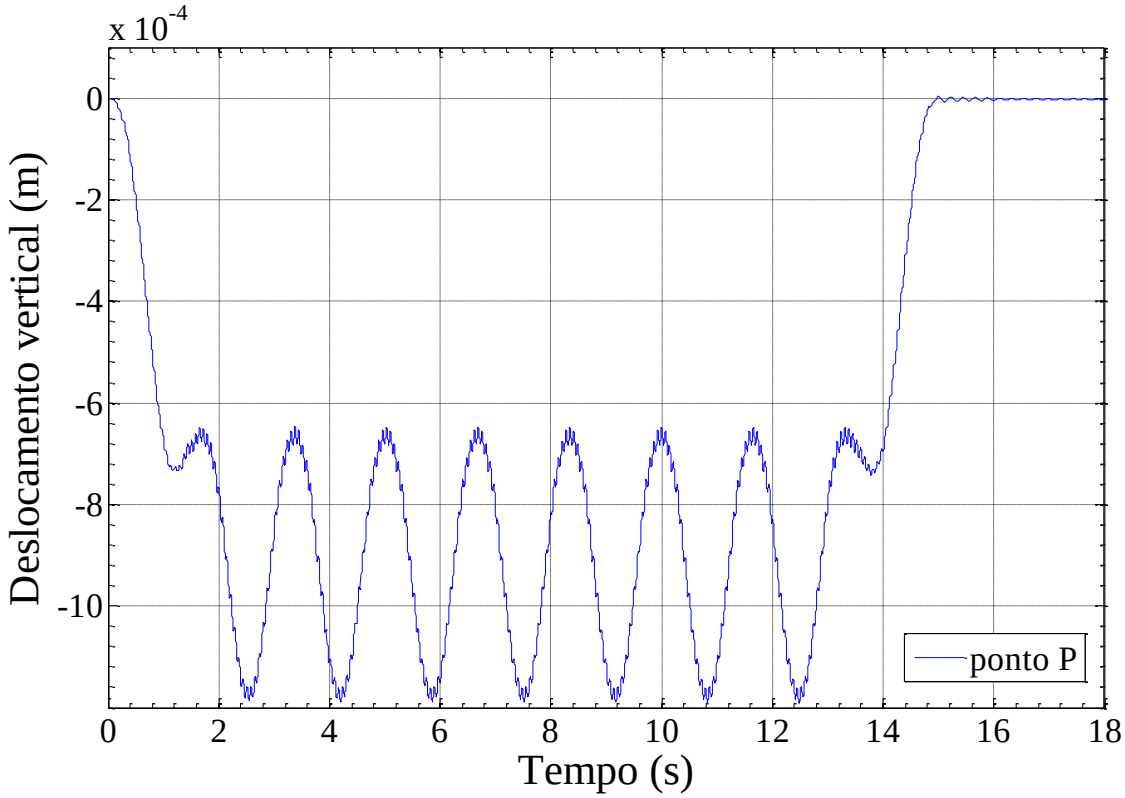


Figura 143 – Deslocamento vertical no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 143 que os deslocamentos verticais no centro da ponte avaliados no ponto (*P*) são oscilatórios e periódicos. As oscilações são provenientes das irregularidades da via que excitam os veículos da composição os quais transmitem seus esforços oscilatórios à estrutura da ponte. A periodicidade das respostas está relacionada com a passagem dos eixos dos truques da composição pelo centro da ponte. Quando isto ocorre observa-se a amplificação das respostas dinâmicas. A Figura 144 ilustra um instante em que ocorre esta amplificação.

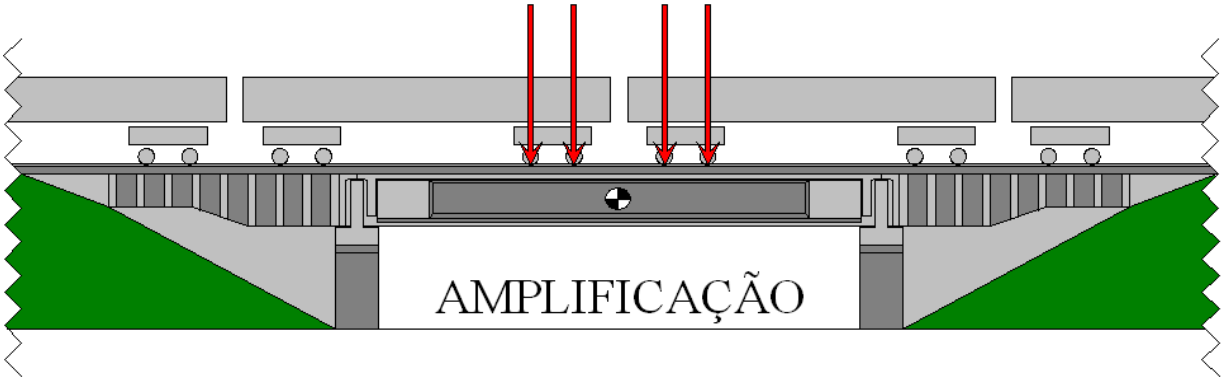


Figura 144 – Instante de amplificação das respostas dinâmicas na ponte.
Fonte: Autor.

Percebe-se na Figura 143, a ocorrência de sete maiores amplificações, pois a composição TUE é formada por oito veículos. Também ocorrem outras amplificações, porém de menores intensidades: uma inicial; quando o truque dianteiro do primeiro veículo passa pelo centro da ponte; e a outra final; quando o truque traseiro do último veículo passa pelo centro da ponte.

Os deslocamentos verticais obtidos na ponte devido ao tráfego da composição TUE são maiores que os obtidos pelo tráfego de somente um veículo, devido a um número maior de cargas que agem na ponte. Entretanto, as máximas amplitudes obtidas, correspondentes às maiores amplificações, são pouco maiores que 1 mm. Os deslocamentos verticais obtidos no ponto (*Q*), são semelhantes aos obtidos no ponto (*P*), por isso, foram aqui omitidos.

A Figura 145 mostra o histórico temporal de deslocamentos laterais (*w*), no centro da ponte produzido por uma composição TUE formada por oito veículos, trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso de irregularidades combinadas (VLR).

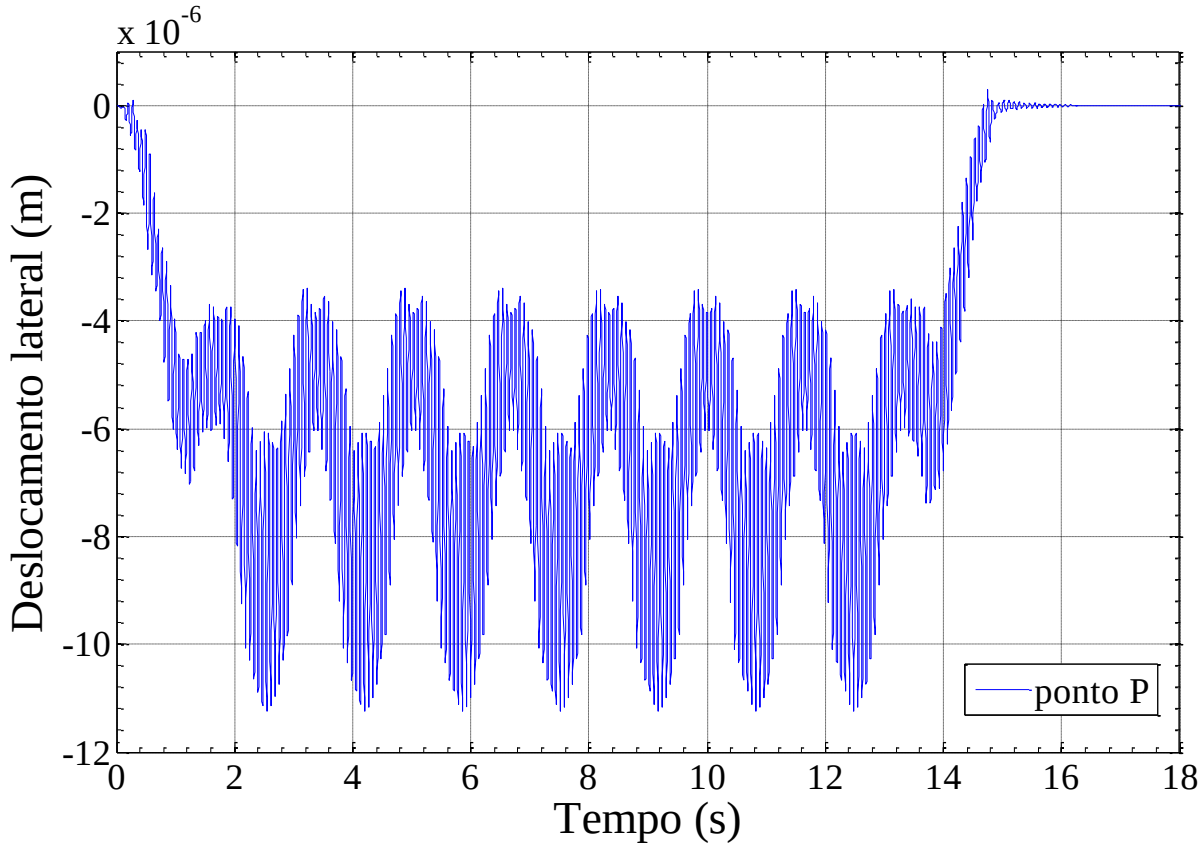


Figura 145 – Deslocamento lateral no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 145 que os deslocamentos laterais no centro da ponte são menores que os verticais, porém apresentam maiores oscilações. Percebe-se também a amplificação das respostas dinâmicas, coincidindo com a passagem dos eixos dos truques dos veículos pelo centro da ponte, conforme visto anteriormente na Figura 144. Os deslocamentos laterais no centro da ponte avaliados nos pontos (*P*) e (*Q*), representam a flexão lateral das vigas no

sentido externo. Desta forma, os deslocamentos obtidos no ponto (*Q*), são semelhantes aos obtidos no ponto (*P*), porém de sentidos opostos, razão pela qual foram omitidos aqui.

A Figura 146 mostra o histórico temporal das rotações associadas à torção das vigas (ϕ), no centro da ponte produzido por uma composição TUE formada por oito veículos, trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso de irregularidades combinadas (VLR).

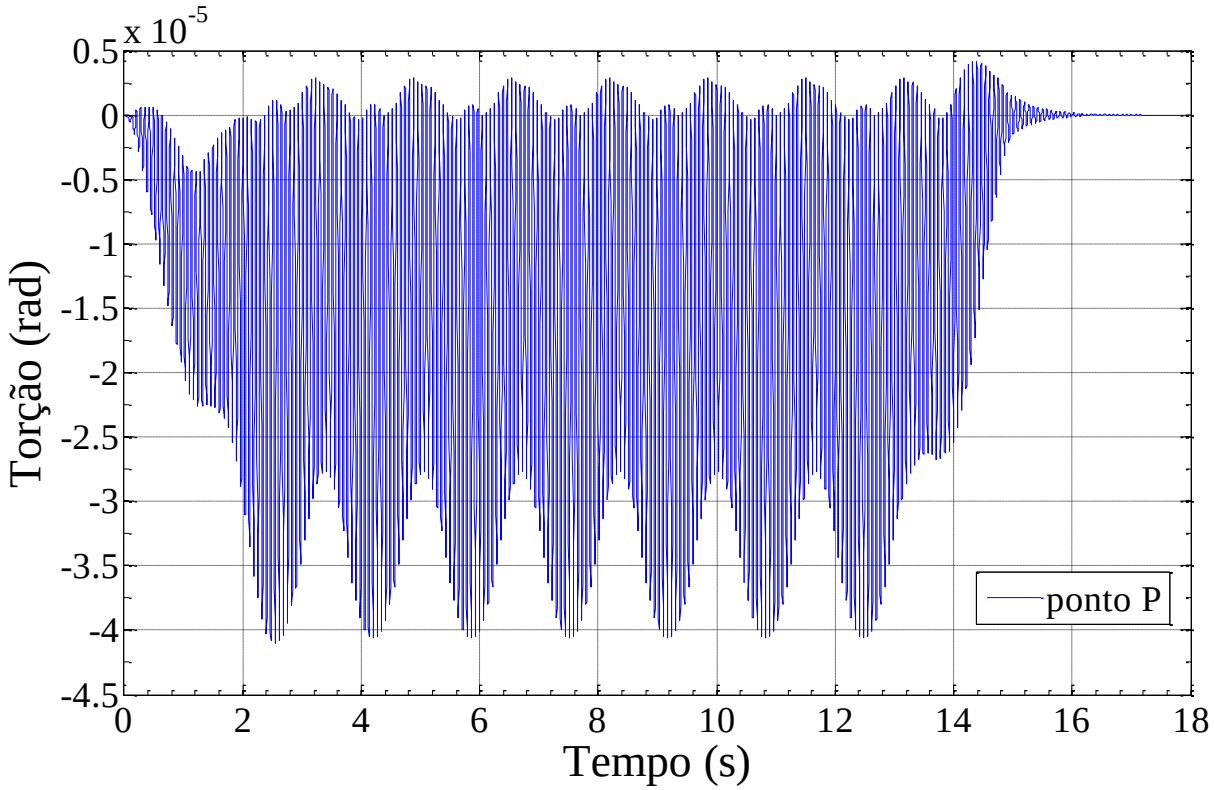


Figura 146 – Deslocamento de torção no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 146 grandes oscilações referentes às rotações produzidas pela torção das vigas, porém as amplitudes dos ângulos de rotação são relativamente pequenas, da ordem de milésimos de graus. Também aqui, percebe-se que as amplificações coincidem com a passagem dos eixos dos truques dos veículos pelo centro da ponte. As torções das vigas no centro da ponte avaliadas nos pontos (*P*) e (*Q*), ocorrem no sentido externo. As respostas obtidas no ponto (*Q*) são análogas às encontradas no ponto (*P*), porém apresentam o sentido oposto, por isso foram omitidas aqui.

A Figura 147 mostra o histórico temporal das declividades da flexão vertical das vigas (ψ), no centro da ponte produzido por uma composição TUE formada por oito veículos, trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso de irregularidades combinadas (VLR).

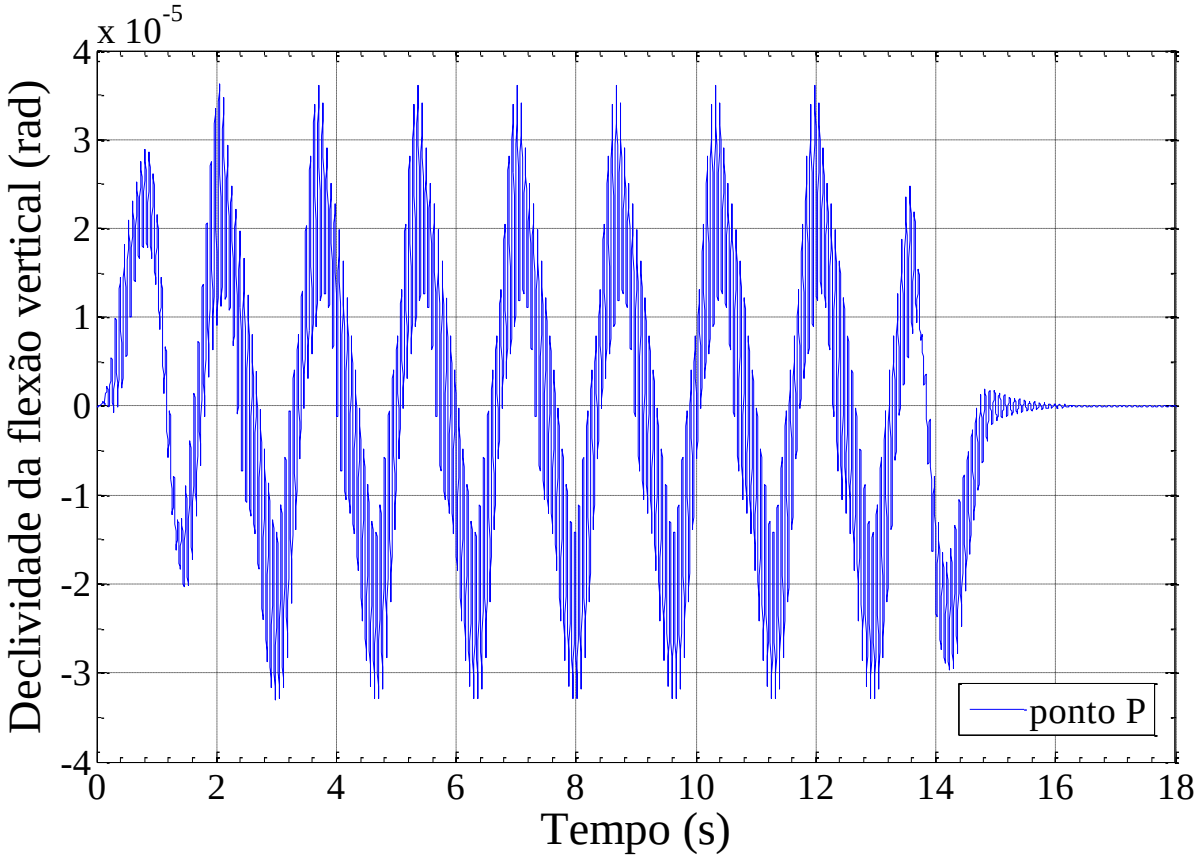


Figura 147 – Declividades da flexão vertical (ψ) no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 147 que as declividades da flexão vertical da viga avaliada no centro da ponte são oscilatórias e periódicas. As oscilações são decorrentes das irregularidades da via, que por sua vez excitam os veículos os quais transmitem seus esforços oscilatórios à ponte. A periodicidade está relacionada com os ciclos de carga proveniente do tráfego dos eixos dos truques dos veículos. Avaliando-se também a Figura 143, percebe-se que os máximos e mínimos coincidem com as declividades nulas. Isto ocorre, pois a presente declividade é derivada primeira em relação à flexão vertical. As máximas amplitudes de rotação encontradas são da ordem de milésimos de graus, portanto, são relativamente pequenas. As respostas obtidas no ponto (*Q*) são praticamente idênticas às obtidas no ponto (*P*), desta forma, foram omitidas aqui.

A Figura 148 mostra o histórico temporal das declividades da flexão lateral das vigas (θ), no centro da ponte produzido por uma composição TUE formada por oito veículos, trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso de irregularidades combinadas (VLR).

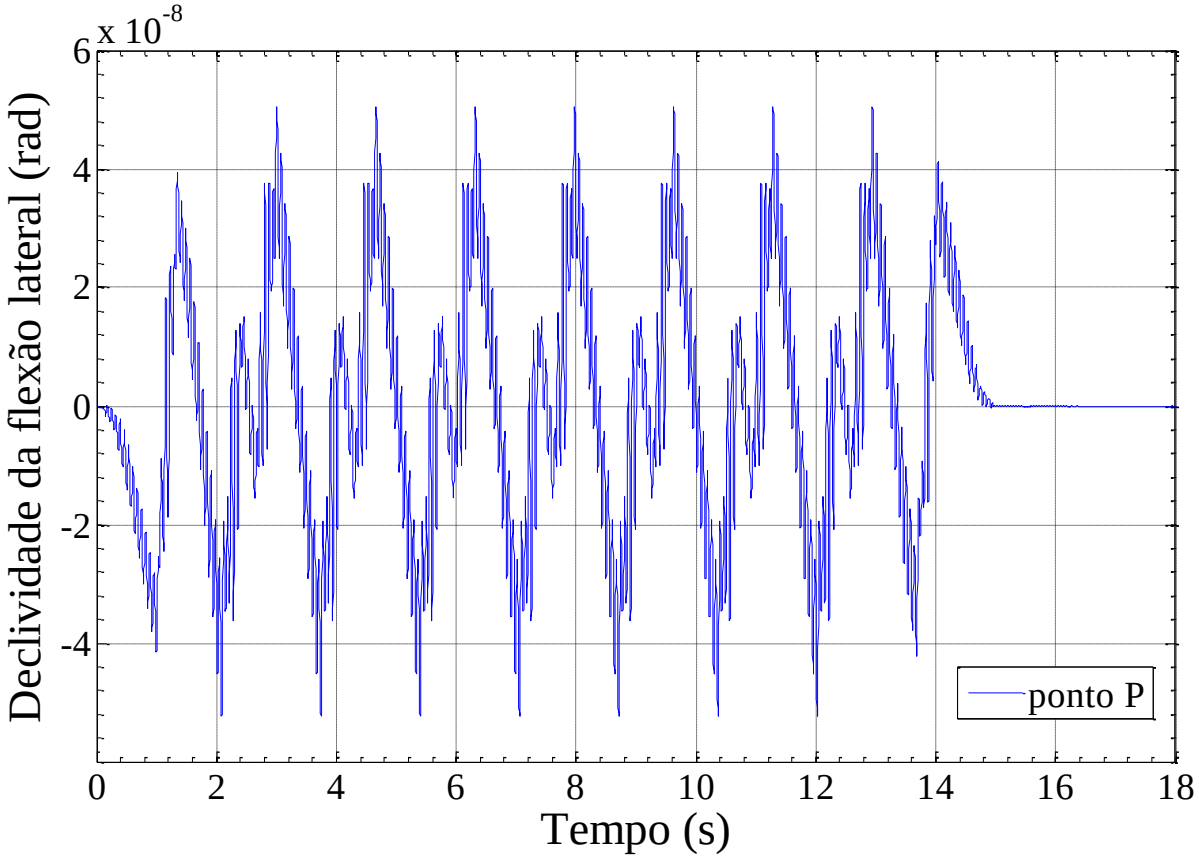


Figura 148 – Declividades da flexão lateral (θ) no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 148 que as declividades da flexão lateral da viga avaliada no centro da ponte são oscilatórias devido às irregularidades, e periódicas devido ao tráfego da composição. Avaliando-se conjuntamente a Figura 145, percebe-se que os máximos e mínimos também coincidem com as declividades nulas. Isto ocorre, pois a presente declividade é derivada primeira em relação à flexão lateral. As máximas amplitudes de declividade encontradas são da ordem de milionésimos de graus, portanto, são relativamente pequenas. As respostas obtidas no ponto (*Q*) são praticamente idênticas às obtidas no ponto (*P*), porém, são de sentidos opostos, por isso, foram omitidas aqui.

A Figura 149 mostra o histórico temporal de deslocamentos longitudinais (*u*), no centro da ponte produzido por uma composição TUE formada por oito veículos, trafegando a uma velocidade constante de 50 km/h, para o caso de irregularidades combinadas (VLR).

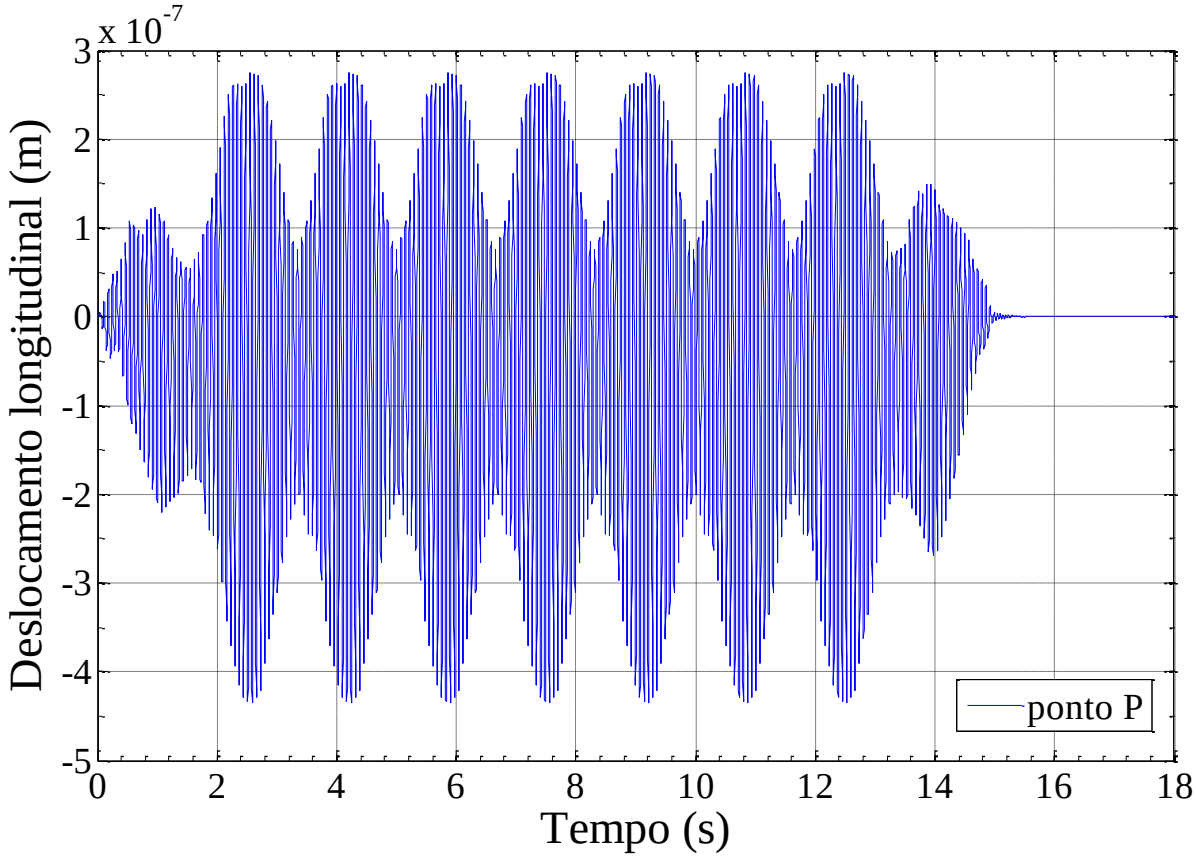


Figura 149 – Deslocamento longitudinal no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 149 que os deslocamentos longitudinais no centro da ponte apresentam grandes oscilações, e as amplificações coincidem com o tráfego dos eixos da composição sobre o centro da ponte. As máximas amplitudes dos deslocamentos encontradas são da ordem de décimos milésimos de milímetros, portanto, são relativamente pequenas.

As próximas análises referem-se às respostas dinâmicas da ponte ferroviária nas condições em que ocorre a ressonância produzida pela excitação da composição TUE associada às irregularidades da via.

A Figura 150 mostra os deslocamentos verticais (v), no centro da ponte na condição ressonante do 1º modo de flexão vertical, com a composição TUE trafegando a uma velocidade constante de 16,353 km/h para o caso (VLR).

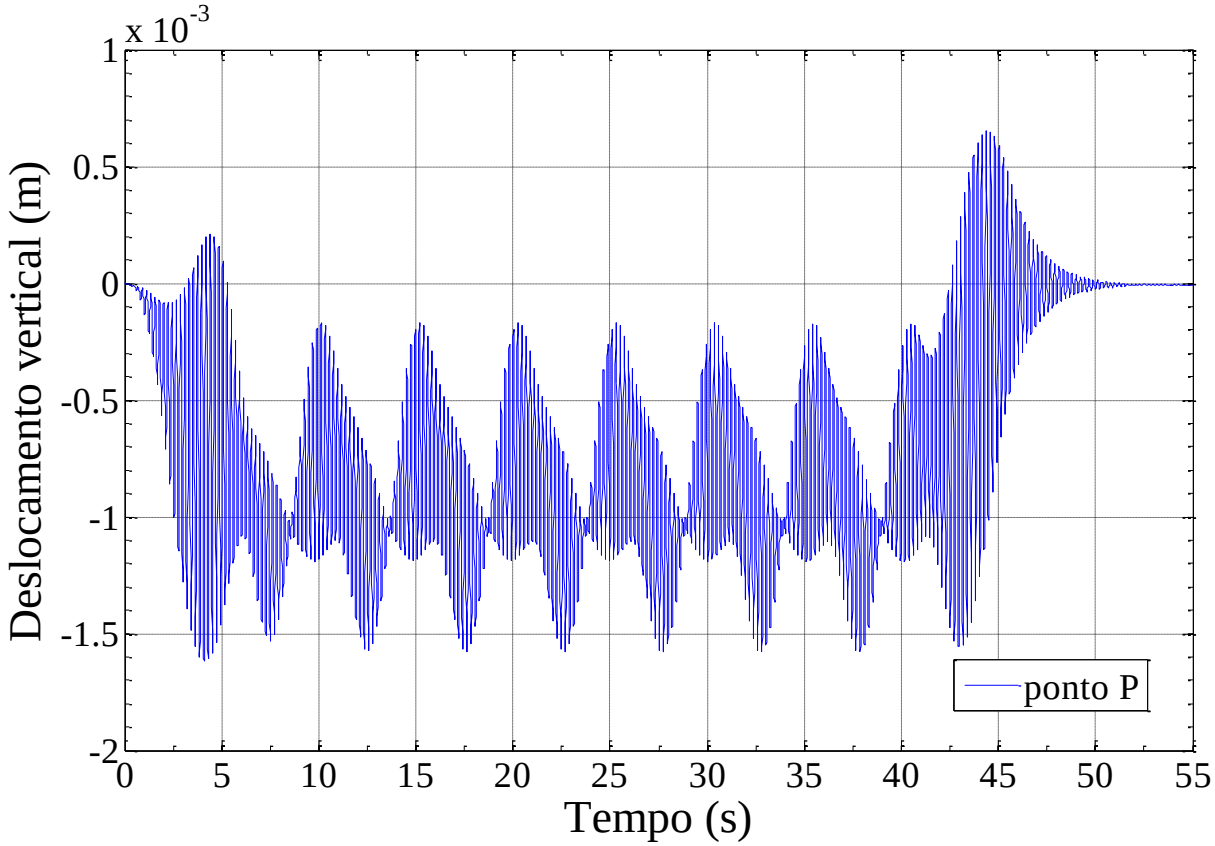


Figura 150 – Deslocamento vertical no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 150 que os deslocamentos verticais avaliados no centro da ponte na condição de ressonância são oscilatórios, e também há periodicidade nas amplificações devido ao tráfego dos veículos que formam a composição, (batimento). Também observa-se que em certos instantes os deslocamentos são positivos, indicando-se a flexão da viga para cima. Isto ocorre com as maiores amplificações, coincidindo com os instantes em que o primeiro e o último veículo estão sobre a ponte, sendo a situação mais crítica quando o último veículo está saindo da ponte. Pois durante a passagem sucessiva dos veículos, a ponte está armazenando e liberando a energia potencial elástica de deformação, na forma de ciclos de carga e de descarga. E no último ciclo, a energia potencial elástica de deformação é liberada quando a ponte está com pouco carregamento, isto pode explicar a amplificação na saída do último veículo da ponte.

Apesar da condição ressonante, os máximos deslocamentos obtidos ainda são relativamente pequenos. As respostas obtidas no ponto (*Q*) são praticamente idênticas, desta forma, foram omitidas aqui.

A Figura 151 mostra as acelerações verticais no centro da ponte na condição ressonante do 1º modo de flexão vertical, com a composição TUE trafegando a uma velocidade constante de 16,368 km/h para o caso (VLR).

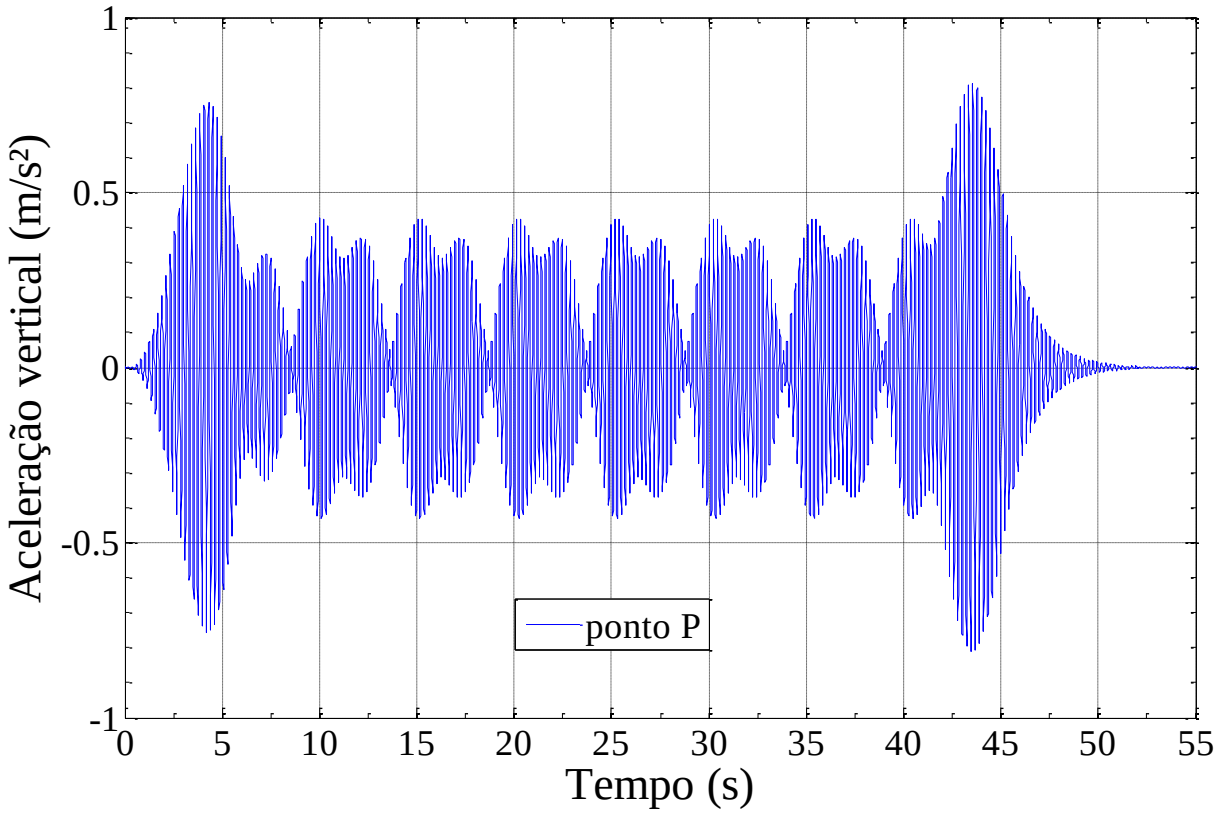


Figura 151 – Aceleração vertical no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 151 que as acelerações verticais no centro da ponte apresentam batimento com oscilações praticamente simétricas entre os valores positivos e negativos. As maiores amplificações também coincidem com os instantes em que o primeiro e o último veículo estão sobre a ponte, sendo este último instante o mais crítico, pois apresenta as maiores amplitudes de aceleração, tanto positiva quanto negativa. Apesar da condição ressonante, as máximas amplitudes são relativamente pequenas, ($\approx 0{,}08.\vec{g}$). Os valores obtidos no ponto (*Q*) são semelhantes aos obtidos no ponto (*P*), assim, aqueles foram omitidos aqui.

A Figura 152 mostra os deslocamentos laterais (*w*), no centro da ponte na condição ressonante do 1º modo de flexão lateral, com a composição TUE trafegando a uma velocidade constante de 41,251 km/h para o caso (VLR).

Observa-se na Figura 152 que os deslocamentos laterais no centro da ponte na condição de ressonância oscilam entre valores positivos e negativos. Também observa-se a presença das amplificações e do batimento. Os deslocamentos laterais apresentados aqui são da ordem de centésimos de milímetros, portanto, muito menores que os deslocamentos verticais obtidos na Figura 150, referentes aos deslocamentos verticais avaliados no centro da ponte.

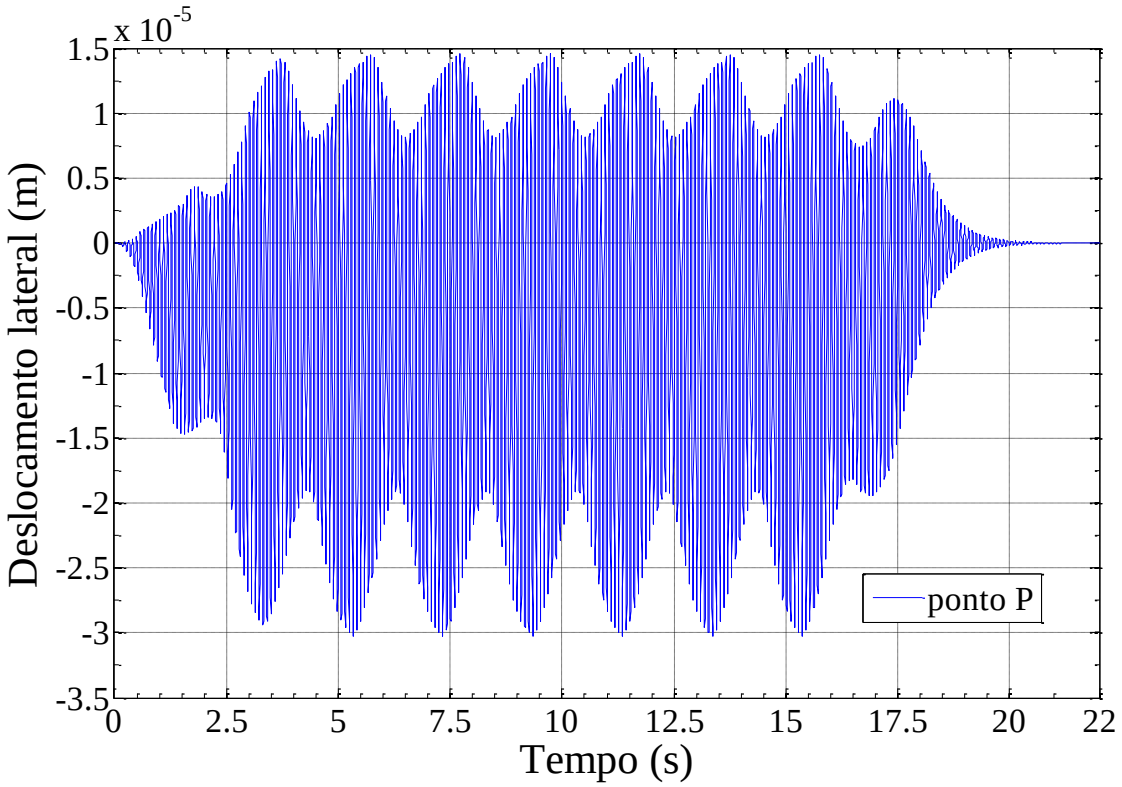


Figura 152 – Deslocamento lateral no centro da ponte.
Fonte: Autor.

A Figura 153 mostra as acelerações laterais no centro da ponte na condição ressonante do 1º modo de flexão lateral, com a composição TUE trafegando a uma velocidade constante de 41,290 km/h para o caso (VLR).

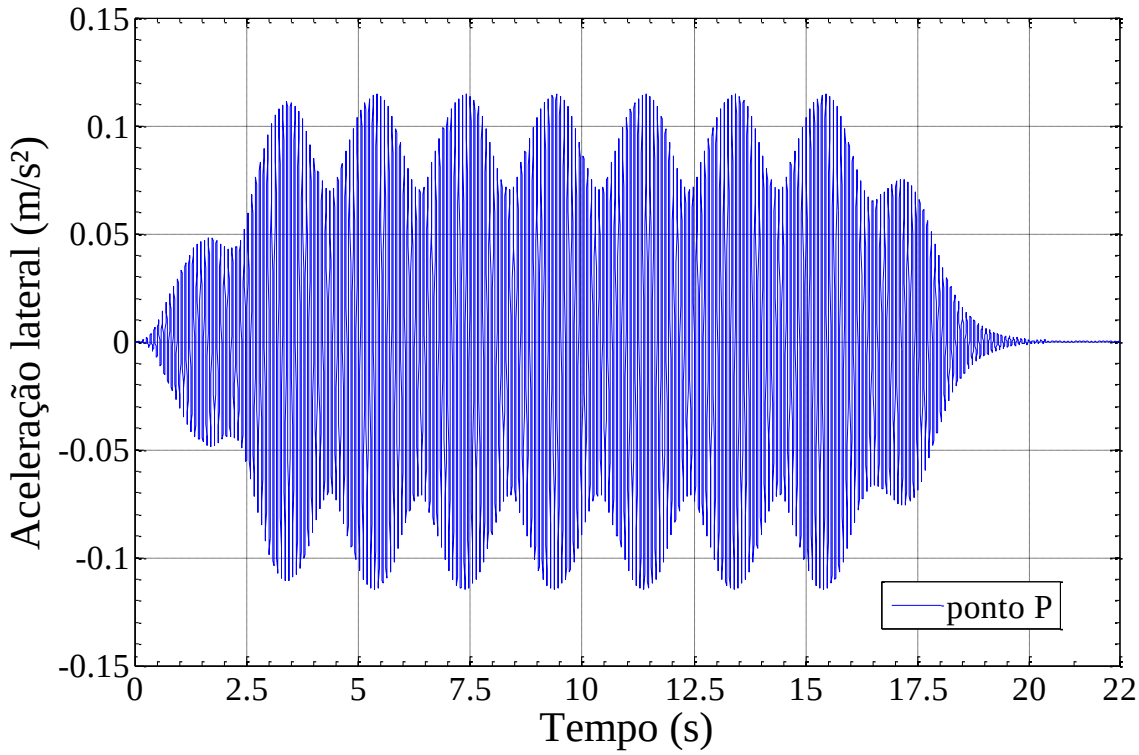


Figura 153 – Aceleração lateral no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 153 que as acelerações laterais no centro da ponte apresentam batimento com oscilações praticamente simétricas entre os valores positivos e negativos. Apesar da condição ressonante, as máximas amplitudes são relativamente pequenas, da ordem de ($\approx 0{,}01.\vec{g}$). As acelerações laterais encontradas aqui são menores que as acelerações verticais da Figura 151. Os valores obtidos no ponto (*Q*) são semelhantes aos obtidos no ponto (*P*), assim, aqueles foram omitidos aqui.

A Figura 154 mostra o histórico temporal das rotações associadas à torção das vigas (ϕ), no centro da ponte na condição ressonante do 1º modo de torção, com a composição TUE trafegando a uma velocidade constante de 47,828 km/h para o caso (VLR).

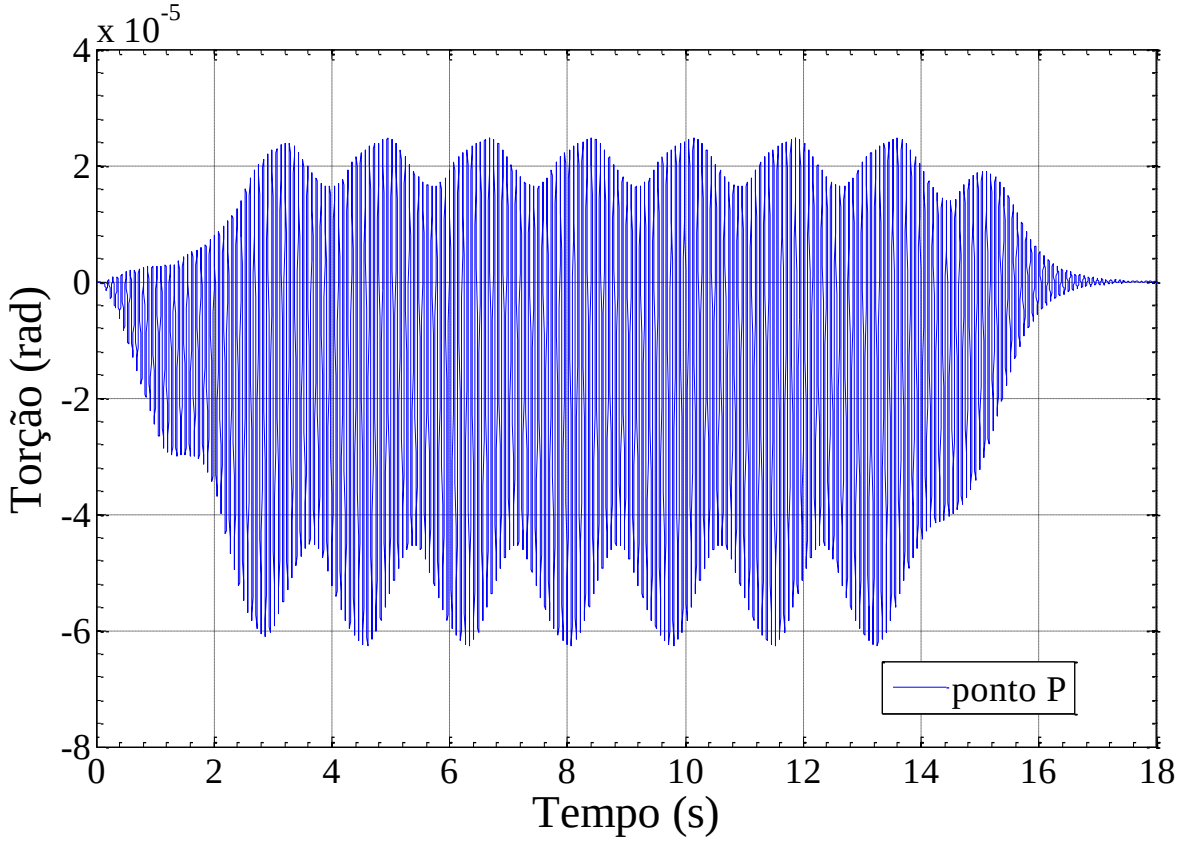


Figura 154 – Deslocamento de torção no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 154 que os ângulos referentes à torção da ponte avaliados no ponto (*P*), apresentam grandes oscilações, porém as amplitudes são relativamente pequenas apesar da condição de ressonância, da ordem de milésimos de graus. Os respectivos ângulos de torção avaliados no centro da ponte no ponto (*Q*) apresentam o mesmo comportamento, porém seu sentido é oposto, uma vez que representam a torção das vigas no sentido externo.

A Figura 155 mostra os deslocamentos longitudinais (*u*), no centro da ponte na condição ressonante do 1º modo longitudinal, com a composição TUE trafegando a uma velocidade

constante de 75,071 km/h para o caso (VLR).

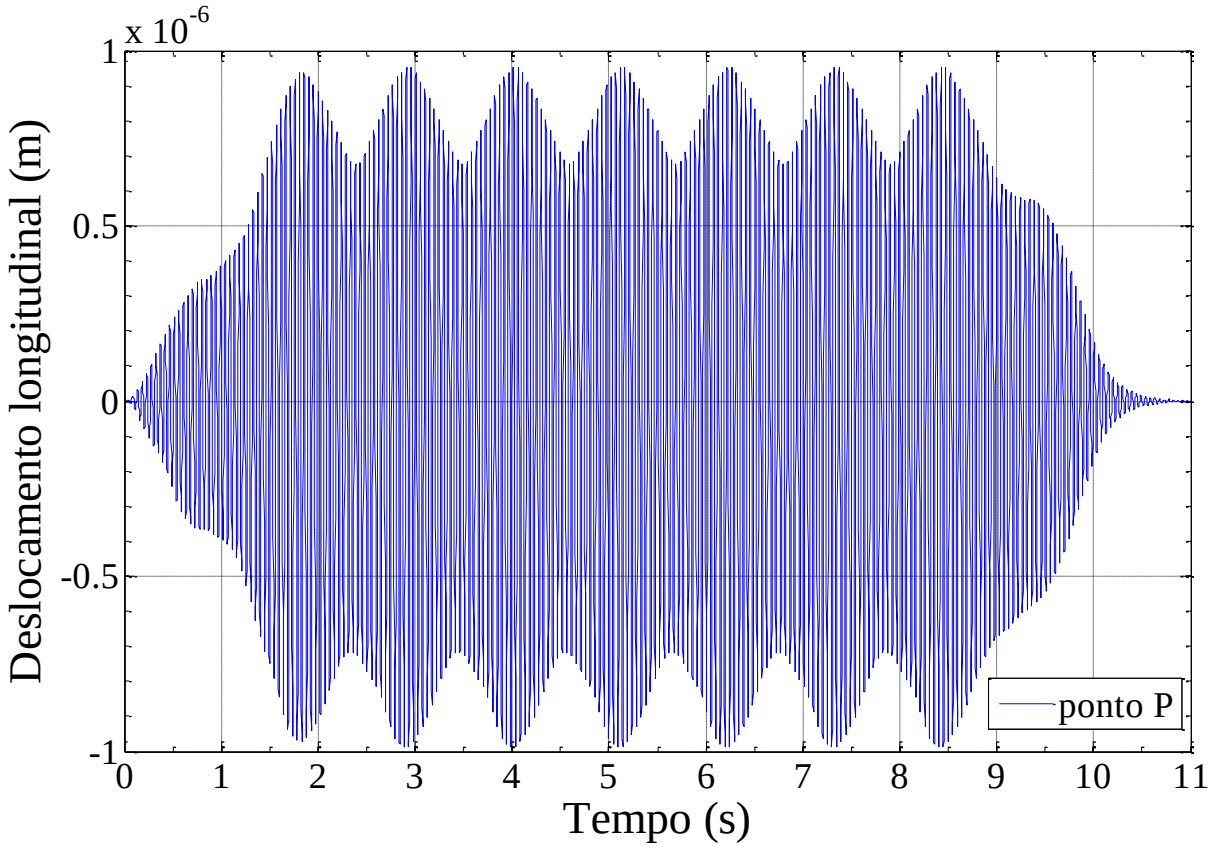


Figura 155 – Deslocamento longitudinal no centro da ponte.
Fonte: Autor.

Observa-se na Figura 155 que os deslocamentos longitudinais avaliados no centro da ponte apresentam grandes oscilações, e as amplitudes variam entre os valores positivos e negativos. Isto indica que as vigas estão sendo submetidas à tensões de tração e de compressão. As amplitudes são pequenas apesar da condição de ressonância, são da ordem de milésimos de milímetros. Os respectivos deslocamentos avaliados no ponto (*Q*) são praticamente idênticos, porém apresentam sinais opostos.

Nesta seção foi estudada a vibração forçada na ponte produzida pelo tráfego da composição ferroviária, Trem Unidade Elétrico (TUE), sob diferentes condições de velocidade e irregularidades combinadas verticais, laterais, e rotacionais (VLR) da via.

Em geral observou-se que os deslocamentos no centro da ponte avaliados nos pontos (*P*) e (*Q*) são oscilatórios (devido às irregularidades), e periódicos (devido à passagem dos eixos dos truques da composição). Observou-se que a amplificação das respostas dinâmicas está relacionada com a passagem dos eixos dos truques da composição pelo centro da ponte. Devido a um número maior de cargas sobre a ponte, as respostas dinâmicas obtidas no centro da ponte para o tráfego da composição (TUE) são maiores que as encontradas pelo tráfego de somente um carro.

Nas análises que abordam as condições de ressonância da ponte submetida ao tráfego da composição (TUE), utilizando-se o modelo de irregularidades combinadas (VLR), foram observadas maiores amplitudes das respostas dinâmicas, comparadas às demais situações. Na condição de ressonância referente ao 1º modo de flexão vertical, observou-se duas maiores amplificações entre as demais, coincidindo com os instantes em que o primeiro e o último veículo estão sobre a ponte, sendo a situação mais crítica quando o último veículo está saindo da ponte. Pois durante a passagem sucessiva dos veículos, a ponte está armazenando e liberando a energia potencial elástica de deformação, na forma de ciclos de carga e de descarga. E no último ciclo, a energia potencial elástica de deformação é liberada quando a ponte está com pouco carregamento, isto pode explicar a amplificação na saída do último veículo da ponte. Todavia, as máximas amplitudes encontradas são relativamente pequenas.

Também percebeu-se que com a intensidade da vibração da estrutura da ponte, as amplitudes oscilam entre valores positivos e negativos, invertendo-se, desta forma, os sentidos das tensões às quais a estrutura está sendo submetida.

No presente capítulo, apresentou-se análises numéricas utilizando os modelos matemáticos desenvolvidos no capítulo anterior. Foram realizados, no estudo do comportamento dinâmico do veículo ferroviário: a análise modal do veículo; a análise de vibração forçada do veículo nas condições de ressonância, sob diferentes condições de velocidade e irregularidades verticais, laterais, e rotacionais da via; a análise dinâmica do contato entre as rodas e os trilhos estudando-se as dimensões das elipses de contato, as tensões, os escorregamentos, as forças tangenciais, e os momentos de rotação de *spin*; e a análise dos deslizamentos e da perda de contato entre as rodas e os trilhos, através de oito casos distintos, combinando-se os modelos de irregularidades da via, variando-se a velocidade do veículo, e considerando-se os trilhos contaminados com óleo.

Referentes ao estudo da ponte ferroviária, foram realizadas: a análise modal; e a análise de vibração forçada na ponte produzida pelo tráfego do veículo ferroviário, e da composição Trem Unidade Elétrico (TUE), sob diferentes condições de velocidade e irregularidades verticais, laterais, e rotacionais da via, abordando-se as condições de ressonância da ponte produzidas pelo tráfego tanto do veículo ferroviário quanto da composição TUE.

No próximo capítulo encerra-se este trabalho apresentando um resumo do que foi realizado e as conclusões que foram obtidas, além de sugestões para trabalhos futuros.

CAPÍTULO 5
CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este capítulo apresenta um resumo do trabalho abordando seu desenvolvimento, bem como, as conclusões que foram obtidas. Também são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

5.1 Resumo e conclusões

Este trabalho teve por objetivo estudar a interação dinâmica tridimensional entre um veículo e uma ponte ferroviária considerando-se a mecânica do contato entre as rodas e os trilhos, frente à variação da velocidade e a presença das irregularidades da via.

Desenvolveu-se o modelo tridimensional de veículo ferroviário através da associação de corpos rígidos interconectados a sistemas de suspensões. Determinaram-se as equações dos deslocamentos das suspensões, baseando-se nos movimentos dos graus de liberdade do veículo. Representaram-se as irregularidades da via através de funções harmônicas. Obtiveram-se as equações de movimento do veículo ferroviário através do equilíbrio dinâmico. Desenvolveu-se o modelo de contato mecânico entre as rodas e os trilhos embasado-se nas teorias de *Hertz* e de *Kalker*. Considerou-se no modelo de contato mecânico a variação do coeficiente de atrito entre rodas e trilhos em função da velocidade, e das condições de contaminações entre as superfícies em contato. Inseriu-se no modelo de saturação do contato baseando-se na Lei de *Coulomb*, o modelo de *Vermeulen* e *Johnson*, restringindo-se as forças tangenciais de contato e o momento de rotação *spin* segundo um polinômio cúbico, de modo a contemplar as não linearidades geométricas devidas aos perfis das rodas e dos trilhos, bem como, os limites de aderência no contato entre rodas e trilhos.

A estrutura da ponte ferroviária em concreto protendido que é predominantemente formada por duas vigas simétricas, paralelas, e bi-apoiadas, foram representadas no modelo matemático numérico computacional, por elementos finitos de pórtico tridimensional. O amortecimento do sistema estrutural foi concebido utilizando-se o método de *Rayleigh*. Os esforços provenientes do tráfego do veículo foram transmitidos aos trilhos da ponte através da mecânica do contato. A transferência dos esforços aplicados nos trilhos para os centros de gravidade das vigas foi concebida mediante o princípio da transmissibilidade, e ao sistema equivalente força-binário. O modelo de composição ferroviária foi obtido através da associação dos veículos. A distribuição das forças dos veículos na estrutura da ponte, e a

atualização das forças em cada elemento finito foi realizada mediante as funções de forma, (funções de interpolação).

As equações de movimento dos sistemas estruturais foram integradas numericamente utilizando-se o método de *Newmark* com aceleração média, o qual é incondicionalmente estável. E o sistema linear de equações foi resolvido através do método da eliminação de *Gauss*. Todos os respectivos modelos matemáticos foram implementados no software MATLAB.

Referente ao estudo do comportamento dinâmico do veículo ferroviário, conclui-se que:

O 4º e o 10º, modos de vibração excitam os mesmos graus de liberdade, porém suas amplitudes são distintas, bem como, seus ângulos de fase de movimento.

As maiores amplificações das respostas dinâmicas do veículo ocorrem em baixas freqüências (de 1,3 Hz a 2,9 Hz), situações estas de menores amortecimentos.

Em geral, os deslocamentos nos graus de liberdade do veículo são oscilatórios e harmônicos em função do tempo, conforme as funções de excitação externa, ou seja, os modelos de irregularidades empregados. Os deslocamentos são defasados em relação ao tempo devido à geometria do veículo. Em alguns casos ocorrem amplificações no início do movimento, devido ao rompimento da inércia.

Os sistemas de suspensões primárias e secundárias são eficientes na redução dos deslocamentos produzidos pelas irregularidades.

O amortecimento do sistema contribui para a redução das respostas dinâmicas, especialmente nas condições de ressonância, e para a estabilização das respostas em função do tempo.

As amplificações e atenuações das respostas dinâmicas estão relacionadas com os ângulos de fase da excitação externa.

O contato entre os frisos das rodas com as laterais dos boletos dos trilhos ocorre em duas condições: no 1º modo de vibração do veículo, com amplitudes de irregularidades laterais acima de 1,22 mm; e no 5º modo de vibração do veículo, com amplitudes de irregularidades rotacionais acima de 0,313º.

Para um mesmo modelo de irregularidades da via, em diferentes velocidades ressonantes, obtiveram-se nos mesmos graus de liberdade as mesmas amplitudes de deslocamentos. Isto ocorreu com o 9º e o 10º modos de vibração do veículo nas respostas dinâmicas de deslocamento de rotação (*rolling*) dos eixos 1, 2, 3, e 4.

Referente ao estudo do contato mecânico entre rodas e trilhos, conclui-se que:

As dimensões dos semi-eixos das elipses de contato são oscilatórias e harmônicas em função do tempo, em virtude do modelo de irregularidades verticais utilizado. Devido às variações das dimensões dos semi-eixos das elipses de contato, ocorreram variações das áreas das elipses de contato, o que implica também em variações nas tensões de contato.

No centro da elipse de contato as tensões de compressão nas direções principais são oscilatórias, e em geral ($\sigma_z > \sigma_y > \sigma_x$). Nos pontos localizados no limite da elipse de contato a tensão principal ($\sigma_z = 0$), e a tensão de tração na direção radial é igual à tensão de compressão na direção circunferencial, portanto há um cisalhamento puro. As tensões cisalhantes também são oscilatórias, e em geral ($\tau_a > \tau_b$).

Os escorregamentos também são oscilatórios, e estabilizam-se em função do tempo. De acordo com a teoria linear de *Kalker*, as forças tangenciais de contato e o momento de rotação *spin* são proporcionais aos escorregamentos através das rigidezas de contato. Os valores dos escorregamentos de rotação *spin* são altos, e os valores dos momentos de rotação *spin* saturados são baixos, o que implica em rigidez ao escorregamento de rotação *spin* muito baixa, de acordo com a teoria linear de *Kalker*.

Tanto nas forças tangenciais saturadas quanto no momento de rotação *spin* saturado, as curvas sofrem uma pequena declinação próxima aos seus picos. Isto se deve ao modelo de *Vermeulen* e *Johnson* que restringe as forças tangenciais de contato e o momento de rotação *spin* segundo um polinômio cúbico, para contemplar as não linearidades geométricas devido aos perfis das rodas e dos trilhos, bem como, os limites de aderência no contato entre rodas e trilhos.

Os escorregamentos e as forças tangenciais de contato na direção longitudinal alternam-se em relação aos sinais, enquanto que os escorregamentos e as forças tangenciais de contato na direção lateral preservam os mesmos sinais. Os escorregamentos laterais são iguais nas rodas de um mesmo eixo, porém as forças tangenciais na direção lateral não apresentam os mesmos valores. Isto se deve aos escorregamentos de rotação *spin*, que possui sinais opostos para as rodas de um mesmo eixo.

Os escorregamentos laterais são usados para definir o momento de rotação *spin*, e reciprocamente, os escorregamentos de rotação *spin* são usados para definir a força tangencial de contato na direção lateral. Isto explica as diferenças observadas nas rodas de um mesmo eixo, entre as forças tangenciais de contato na direção lateral, e os momentos de rotação *spin*.

Na análise dos deslizamentos e da perda de contato entre as rodas e os trilhos, combinando-se os modelos de irregularidades da via, variando-se a velocidade do veículo, e considerando-se os trilhos contaminados com óleo, para os casos sem irregularidades (SI), e com somente irregularidades verticais (V), não foram observados os deslizamentos das rodas sobre os trilhos, e tampouco houve a perda de contato entre estes corpos.

No caso com somente irregularidades laterais (L), observou-se deslizamento das rodas 2 e 4 sobre os trilhos, nas direções longitudinal, transversal, e de *spin*, na faixa de velocidade de 78 a 86 km/h. Percebe-se que esta faixa de velocidade compreende a velocidade ressonante para as respostas dinâmicas de deslocamento lateral dos eixos, V_{RVD} 85,018 km/h. Para o mesmo comprimento de onda de irregularidades laterais, porém com amplitudes menores que (0,73mm), não foram observados os deslizamentos das rodas sobre os trilhos. Em todas estas simulações não foram registrados casos de perda de contato entre as rodas e os trilhos.

No caso com somente irregularidades rotacionais (R), observou-se deslizamento de todas as rodas sobre os trilhos, nas direções longitudinal, lateral, e de *spin*, nas velocidades de 29 e 31 km/h, coincidindo com a velocidade ressonante para as respostas dinâmicas de deslocamento de rotação (*yawing*) dos eixos, V_{RVD} = 30,068 km/h. Não foram observados os deslizamentos das rodas sobre os trilhos para amplitudes de irregularidades rotacionais menores que (0,0003º), preservando-se os comprimentos de onda de (3m). Não foi observada a perda de contato entre as rodas e os trilhos no caso (R).

No caso combinado entre as irregularidades verticais e laterais (VL), observou-se deslizamento das rodas 2, 4, 6, e 8 sobre os trilhos, nas direções longitudinal, transversal, e de *spin*, na faixa de velocidade de 69 a 90 km/h. Percebe-se que a influência das irregularidades verticais nas irregularidades laterais contribuem para o deslizamento de um número maior de rodas do veículo que o caso (L), bem como, uma maior faixa de velocidade em que o fenômeno ocorre. Também percebeu-se neste caso combinado de irregularidades, que com uma amplitude menor de irregularidade lateral, por exemplo, (0,65mm) já se observa o deslizamento das rodas sobre os trilhos. Não ocorreu a perda de contato entre as rodas e os trilhos neste caso combinado de irregularidades (VL).

No caso combinado entre as irregularidades verticais e rotacionais (VR), observou-se deslizamento de todas as rodas sobre os trilhos, nas direções longitudinal, transversal, e de *spin*, na faixa de velocidade de 27 a 32 km/h. Percebe-se que a influência das irregularidades verticais associadas às irregularidades rotacionais contribui para a ocorrência do deslizamento em uma faixa pouco maior de velocidade que o caso (R). Para amplitudes menores que (0,0003º), mantendo-se os comprimentos de onda de (3m) nas irregularidades rotacionais, e

preservando-se as irregularidades verticais, não foram observados deslizamentos. Não ocorreu a perda de contato entre as rodas e os trilhos neste caso combinado de irregularidades (VR).

No caso combinado entre as irregularidades laterais e rotacionais (LR), observou-se que o deslizamento das rodas sobre os trilhos ocorre na faixa de velocidade de 60 a 92 km/h. O deslizamento de todas as rodas sobre os trilhos ocupa uma faixa menor de velocidade de 65 a 79 km/h. Também percebe-se neste caso combinado de irregularidades, que com uma amplitude menor de irregularidade lateral, por exemplo, (0,55mm) já se observa o deslizamento. Não ocorreu a perda de contato entre as rodas e os trilhos neste caso combinado de irregularidades (LR).

No caso combinado entre as irregularidades verticais, laterais e rotacionais (VLR), observou-se o deslizamento das rodas sobre os trilhos na faixa de velocidade de 52 a 96 km/h. Foi observado o deslizamento de todas as rodas sobre os trilhos em uma faixa menor de velocidade de 65 a 89 km/h. Observa-se que a faixa em que ocorrem os deslizamentos é a maior apresentada em todos os demais casos. Também percebe-se neste caso combinado de irregularidades, que com uma amplitude menor de irregularidade lateral, por exemplo, (0,5mm) já se observa o deslizamento. Não ocorreu a perda de contato entre as rodas e os trilhos neste caso combinado de irregularidades (VLR).

Em resumo, não ocorreu a perda de contato entre as rodas e os trilhos em nenhum dos casos analisados. Não houve deslizamento das rodas sobre os trilhos nos casos (SI) e (V). Nos casos combinados (VL), (VR), (LR), e (VLR), os deslizamentos se iniciam com menores amplitudes de irregularidades que os casos isolados (L) e (R). Percebe-se que os deslizamentos nestes casos combinados, ocupam uma maior faixa de velocidade, bem como, há um número maior de rodas que deslizam em uma faixa de velocidade. Há também coincidência das velocidades ressonantes pertencerem à faixa de velocidade em que ocorrem os deslizamentos, devido às amplificações dinâmicas. Em geral, nos casos combinados de irregularidades, há uma maior suscetibilidade de ocorrência dos deslizamentos.

Pode-se perceber que os escorregamentos dependem dos graus de liberdade de movimento lateral (*LW*), e de rotação (*yawing*) (*YW*) dos eixos com rodas acopladas. Com o aumento destes escorregamentos provenientes da excitação das irregularidades, há um aumento proporcional das forças tangenciais de contato, e no limite, surgem os deslizamentos das rodas sobre os trilhos. Isto pode explicar a ausência dos deslizamentos das rodas sobre os trilhos nos casos (SI) e (V), bem como, a presença dos deslizamentos das rodas sobre os trilhos nos casos isolados (L) e (R), e nos casos combinados (VL), (VR), (LR), e (VLR).

Referente ao estudo do comportamento dinâmico da ponte ferroviária, conclui-se que:

Na análise modal, para o tipo de ponte analisada, as freqüências naturais de vibração e seus correspondentes modos naturais de vibração apresentam-se alternadamente entre modos de flexão vertical, modos de flexão lateral, modos de torção, e modos longitudinais.

Devido às variações das secções transversais das vigas que compõem a ponte, houve influências nas amplitudes dos modos de vibração relativos à flexão lateral, à torção, e ao modo longitudinal. Pois, próximo aos apoios, as secções transversais das vigas são mais rígidas que as secções transversais centrais. Não foi observada esta influência nos modos de flexão vertical. Pois a variação da secção transversal no que diz respeito à rigidez de flexão vertical, é menor do que para os outros casos. Isto é, as razões entre as propriedades geométricas das secções transversais dos apoios e centrais, no que diz respeito à flexão vertical, à flexão lateral, à torção, e ao deslocamento longitudinal, podem ser ordenadas da seguinte forma: ($I_{ZA}/I_{ZC} < J_A/J_C < A_A/A_C < I_{YA}/I_{YC}$). Desta maneira, por ordem de influência nas amplitudes dos deslocamentos, próxima às secções dos apoios, devido às variações das secções transversais, os modos de vibração podem ser ordenados da seguinte forma: modos de flexão lateral; modos longitudinais; modos de torção; e modos de flexão vertical.

Na vibração forçada da ponte ferroviária produzida pelo tráfego do veículo ferroviário combinando-se os modelos de irregularidades da via, variando-se a velocidade do veículo, e considerando-se os trilhos completamente secos, ou lavados pela chuva, sem que haja deslizamentos das rodas sobre as superfícies dos trilhos, observou-se que as maiores respostas dinâmicas foram produzidas pelo modelo no qual combina os efeitos das irregularidades, o modelo (VLR). No modelo sem irregularidades (SI), as respostas dinâmicas não apresentam oscilações. Estas já são observadas nos demais modelos, pois utilizam-se de funções harmônicas.

Nas condições de ressonância da ponte produzidas pelo tráfego do veículo ferroviário, observou-se que as respostas dinâmicas são amplificadas, apresentando-se amplitudes de valores relativamente maiores que nas demais condições. Porém, apesar das condições ressonantes, as máximas amplitudes dos deslocamentos encontradas são relativamente pequenas.

Referente à vibração forçada na ponte produzida pelo tráfego da composição ferroviária, Trem Unidade Elétrico (TUE), sob diferentes condições de velocidade e irregularidades combinadas verticais, laterais, e rotacionais (VLR) da via, e considerando-se os trilhos completamente secos, ou lavados pela chuva, sem que haja deslizamentos das rodas sobre as

superfícies dos trilhos, observou-se que os deslocamentos verticais no centro da ponte avaliados nos pontos (*P*) e (*Q*) são oscilatórios (devido às irregularidades) e periódicos (devido à passagem dos eixos dos truques da composição). Observou-se que a amplificação das respostas dinâmicas está relacionada com a passagem dos eixos dos truques da composição pelo centro da ponte. Devido a um número maior de cargas sobre a ponte, as amplitudes das respostas dinâmicas obtidas no centro da ponte para o tráfego da composição (TUE) são maiores que as encontradas pelo tráfego de somente um carro.

Nas análises que abordam as condições de ressonância da ponte, utilizando-se o modelo de irregularidades combinadas (VLR), foram observadas maiores amplitudes das respostas dinâmicas, comparadas às demais situações. Na ressonância referente ao 1º modo de flexão vertical, observou-se duas maiores amplificações, coincidindo com os instantes em que o primeiro e o último veículo estão sobre a ponte, sendo a situação mais crítica quando o último veículo está saindo da ponte. Pois, durante a passagem sucessiva dos veículos, a ponte está armazenando e liberando a energia potencial elástica de deformação, produzida por sucessivos ciclos de carga e de descarga. E nos últimos ciclos, a energia potencial elástica de deformação é liberada quando a ponte está com pouco carregamento, isto explica a amplificação na saída do último veículo da ponte. Todavia, as máximas amplitudes encontradas são relativamente pequenas.

Também percebeu-se que com a intensidade da vibração da estrutura da ponte, as amplitudes oscilam entre valores positivos e negativos, invertendo-se, desta forma, os sentidos das tensões às quais a estrutura está sendo submetida.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestões para trabalhos futuros pode-se citar:

Utilizar outros modelos de irregularidades da via como o de funções aleatórias e o modelo estatístico *PSD,* (*Power Spectral Density*). E também considerar o modelo de irregularidades das rodas, (mossas).

Considerar o deslizamento das rodas sobre os trilhos também na interação dinâmica com a ponte ferroviária.

Considerar a aceleração e a frenagem do veículo na análise do contato, e da interação com a ponte ferroviária.

Realizar a modelagem do acoplamento longitudinal entre os veículos considerando-se a aceleração e a frenagem.

Considerar na interação dinâmica entre veículo e ponte, as respostas dinâmicas da ponte excitando o veículo.

Considerar na modelagem os efeitos da protensão nos cabos.

Estudar o comportamento dinâmico da ponte ferroviária mediante a variação de suas propriedades geométricas e materiais, bem como, outros tipos e outras configurações de pontes.

Considerar a flexibilidade dos apoios da ponte.

Calcular os esforços e as tensões dinâmicas provenientes do tráfego das composições na ponte ferroviária.

Estimar a vida útil da ponte ferroviária considerando-se os ciclos de carregamento provenientes do tráfego das composições, e a fadiga do material.

Realizar a modelagem dos trilhos, dos atenuadores (*pads*), dos dormentes, do lastro, do tabuleiro, e da transversina central da ponte, verificando-se suas influências nas respostas dinâmicas da ponte ferroviária.

Considerar a análise modal do conjunto veículo e estrutura da ponte.

Realizar o estudo do amortecimento da ponte variando-se a razão de amortecimento no método de *Rayleigh*, bem como, considerar mais freqüências naturais para estimar o amortecimento, (método de *Caughey*).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AHMED, N. U.; HARBI, H. **Torsional and longitudinal vibration of suspension bridge subject to aerodynamic forces**. Mathematical Problems in Engineering, Overseas Publishers Association, v. 4, p. 393-421, 1998.

ALMEIDA, F. C. **Análise das forças de contato e comportamento dinâmico de rodeiro ferroviário**. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2006.

AMBRÓSIO, J. **Train kinematics for the design of railway vehicle components**. Mechanism and Machine Theory. 45 (2010) 1035-1049.

AMSTEDMAXION, 2010. Disponível em <http://www.amstedmaxion.com.br/> Acesso em: 14 outubro 2010.

ANDREOLI, R. V.; CARVALHO, J. C. **Apostila de FORTRAN**, Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais - INPE, 2001.

ANPF, 2010. **Associação Nacional de Preservação Ferroviária**. Disponível em: <http://www.anpf.com.br> Acesso em 12 novembro 2010.

ANTF, 2010. **Associação Nacional dos Transportadores Ferroviários**. Disponível em: <http://www.antf.org.br> Acesso em: 21 setembro 2010.

ANTT, 2010. **Agência Nacional de Transportes Terrestres**. Disponível em: <http://www.antt.gov.br> Acesso em: 01 dezembro 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 10520: Informação e documentação - Citações em documentos - Apresentação**. Agosto 2002.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14724: Informação e documentação - Trabalhos acadêmicos - Apresentação**. Agosto 2002.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7603: Freio Ferroviário - Classificação**.1982.

BANIMAHD, M.; WOODWARD, P. K. **Three dimensional finite element modeling of railway transitions**. Proceedings of 9th International Conference on Railway Engineering. London, June 2007.

BARBOSA, R. S. **Aplicação de sistemas multicorpos na dinâmica de veículos guiados**. Tese de doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1999.

BARBOSA, Roberto S. **Estudo da dinâmica longitudinal do trem**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas, 1993.

BARSA, Enciclopédia. **Encyclopaedia Britannica** Editores Ltda, Rio de Janeiro, São Paulo, 1979.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. Jr. **Mecânica Vetorial Para Engenheiros – Estática**, 5ª Edição Revisada, Makron Books do Brasil Editora Ltda, 1991.

BEGHETTO, F. L. M. **Efeitos dinâmicos em modelo de veículo e ponte ferroviária diante da variação de velocidade e irregularidades verticais da via**. 2006. 105 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, Paraná, Brasil.

BEGHETTO, F. L. M.; ABDALLA FILHO, J. E. **An approach for the three-dimensional dynamic analysis of railway bridge and vehicle**. In: XXVII CILAMCE - Congresso Ibero Latino-Americano sobre Métodos Computacionais Para Engenharia, 2006, Belém - PA. Anais do XXVII CILAMCE. Belém - PA: Editora da Universidade Federal do Pará, 2006. v. 1. p. 1-14.

BEGHETTO, F. L. M.; ABDALLA FILHO, J. E. **Dynamic Response of a Railway Bridge Due to a Moving Train**. In: 30º CILAMCE - Congresso Ibero-Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, 2009, Búzios - RJ. Anais do 30º CILAMCE, 2009. v. 1. p. 1-15.

BEGHETTO, F. L. M.; ABDALLA FILHO, J. E. **Dynamic Response of Railway Bridge and Vehicle Subject to Speed and vertical Track Irregularities Variations**, In, CMNE/CILAMCE 2007, 2007, Porto-Portugal, Anais do CMNE/CILAMCE 2007, Porto, v. 1, p. 1-20, AMPTAC, 2007.

BEGHETTO, F. L. M.; ABDALLA FILHO, J. E. **Modeling the Dynamic Response of a Railway Bridge and Vehicle System**. In: Proceedings of the Tenth International Conference on Engineering Computational Technology, 2010, Valência Espanha. Proceedings of the Tenth International Conference on Computational Structures Technology, 2010.

BEGHETTO, F. L. M.; ABDALLA FILHO, J. E. **On The Dynamic Modeling of a Railway Vehicle-Bridge System Considering Track Irregularities**. In: 32º CILAMCE - Congresso Ibero-Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, 2011, Ouro Preto - MG. Anais do 32º CILAMCE, 2011. v. 1. p. 1-20.

BENCAT, J.; PAPÁN, D. **Experimental dynamic analysis of Ruzín railway bridges**. 22nd Danubia-Adria Symposium on Experimental Methods in Solid Mechanics, Monticelli Terme, Parma, Italy, September 28-October 1, 2005.

BHASKAR, A.; JOHNSON, K. L.; WOOD, G. D.; WOODHOUSE, J. **Wheel-rail dynamics with closely conformal contact Part 1: dynamic modeling and stability analysis**. Engineering Department, Cambridge University, 1997.

BRACCIALI, A.; CIUFFI, R.; PICCIOLI, F. **Soluzione numerica del modello PDE della dinamica verticale di un binario**. XXX Convegno Nazionale AIAS – Alghero (SS), 12-15 Settembre 2001, Dipartimento di Meccanica e Tecnologie Industriali – Università di Firenze, Santa Marta, Firenze, Italia, 2001.

BRINA, H. L. **Estradas de Ferro**. Volume 1. Via Permanente. Livros Técnicos e Científicos Editora. 1979.

BRINA, H. L. **Estradas de Ferro**. Volume 2. Tração, Frenagem, Material Rodante, Circulação dos Trens. Livros Técnicos e Científicos Editora. 1983.

BURDEN, R. L., FAIRES, J. D., **Análise Numérica**, Ed. Thomson, 2003.

BUREIKA, G.; SUBAČIUS, R. **Mathematical model of dynamic interaction between wheel-set and rail track**. Vilniaus Gedimino Technikos Universitetas, Academia Scientiarum Lithuaniae, TRANSPORT, v. 17, n. 2, p. 46-51, 2002.

CAI, Z.; RAYMOND, G. P.; IGWEMEZIE, J. O. **Contact loads from vertical dynamic wheel/rail and track interaction**. Fourth International Conference on Contact Mechanics and Wear of Wheel/Rail Systems, Vancouver, 1994.

CALÇADA, Rui Artur B. **Efeitos dinâmicos em pontes resultantes do tráfego ferroviário a alta velocidade**. Dissertação de mestrado, Universidade do Porto, Portugal, 1995.

CARLBOM, P. **Carbody and passengers in rail vehicle dynamics.** Doctoral Thesis, Kungl Tekniska Högskolan, Railway Technology, Department of Vehicle Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2000.

CBTU, 2010. **Companhia Brasileira de Trens Urbanos**. Disponível em: <http://www.cbtu.gov.br/> Acesso em: 21 setembro 2010.

CEARA, 2010. Disponível em <http://www.ceara.gov.br/> Acesso em: 01 dezembro 2010.

CEPEDA, F. J. R.; CASTILLO, F. G. **Análisis dinámico de estructuras sometidas a acciones de trenes de alta velocidad**. Informe Técnico. Universidad Politécnica de Madrid, España, Noviembre 2005.

CHAAR, N. **Wheelset structural flexibility and track flexibility in vehicle-track dynamic interaction**. Doctoral Thesis, Kungl Tekniska Högskolan, Aeronautical and Vehicle Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2007.

CHEN, S. **Dynamic performance of bridges and vehicles under strong wind**. Doctor Dissertation, Louisiana State University, USA, 2004.

CHEN, Y.; TAN, C. A.; BERGMAN, L. A. **Effects of boundary flexibility on the vibration of a continuum with a moving oscillator**. Transactions of the ASME, Vol. 124, October, 2002.

CHENG, Y. S.; AU, F. T. K.; CHEUNG, Y. K. **Vibration of railway bridges under a moving train by using bridge-track-vehicle element**. Engineering Structures, Great Britain, v. 23, p. 1597 - 1606, 2001.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and applications to earthquake engineering**. Prentice-Hall, New York, 1995.

CHRISTIANSEN, L. E. **The dynamics of a railway vehicle on a disturbed track, Modelling of lateral irregularities**. Master of Science Thesis, Department of Physics, Technical University of Denmark, Denmark, 2001.

CLAUS, H.; SCHIEHLEN, W. **Modeling and simulation of railway bogie structural vibrations**. Dynamics of vehicles on roads and tracks, University of Stuttgart, Germany, 1997.

CLAUS, H.; SCHIEHLEN, W. **Railway bogies with radial-elastic wheelsets**. EUROMECH Colloquium 409, University of Hannover, March 6-9, Germany, 2000.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. 2nd edition, McGraw-Hill, New York, 1993.

CNT, 2010. **Confederação Nacional do Transporte**. Disponível em: <http://www.cnt.org.br/> Acesso em: 22 setembro 2010.

CONSOLI, Luciano R. P. **Análise do comportamento dinâmico lateral de um veículo ferroviário**. Dissertação de mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2007.

CONTACTMECHANICS, 2010. Disponível em <http://www.contactmechanics.org/> Acesso em: 27 outubro 2010.

COPA2014, 2011. Disponível em <http://www.copa2014.org.br/> Acesso em: 27 janeiro 2011.

CORREA, W. da. L. **Controle das vibrações induzidas pela interação dinâmica entre trens-trilhos-dormentes-estrutura de aço de pontes ferroviárias**. Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

CORREA, W. da. L. **Vibrações em pontes ferroviárias**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

COSTA, P. A., CALÇADA, R., CARDOSO, A. S., BODARE, A. **Influence of soil non-linearity on the dynamic response of high-speed railway tracks**. Soil Dynamics and Earthquake Engineering 30 (2010) 221-235.

CPTM, 2011. **Companhia Paulista de Trens Metropolitanos**. Disponível em <http://www.cptm.sp.gov.br/> Acesso em: 25 janeiro 2011.

CRAIG, R. R. **Structural Dynamics: An introduction to computer methods**. J. Wiley & Sons, New York, 1981.

CRUCEANU, C.; SPIROIU, M.; DUMITRIU, M. **About adoption of the vertical suspension parameters for passenger wagons**. Mechanics Transport Communications, Academic Journal, Issue 3, n. 155, Romania, 2007.

CRUZ, Sara Maria dos Santos R. da, **Comportamento dinâmico de pontes ferroviárias em vias de alta velocidade**. Dissertação de mestrado, Universidade do Porto, Portugal, 1994.

DAHLBERG, T. **Handbook of Railway Vehicle Dynamics**, Track Issues, Taylor & Francis Group, LLC, 2006.

DAILYDKA, S.; LINGAITIS, L. P.; MYAMLIN, S.; PRICHODKO, V. **Modelling the interaction between railway wheel and rail**. Vilniaus Gedimino Technikos Universitetas, Academia Scientiarum Lithuaniae, TRANSPORT 2008 23 (3), p. 236-239, 2008.

DAMME, S.; ZASTRAU, B. W. **Finite element modeling of wheel and rail in rolling contact**. Technische Universität Dresden, Machine Dynamics Problems, 2004.

DELGADO, R. L.; SANTOS, R. C. S. M. dos. **Modeling of railway bridge-vehicle interaction on high speed tracks**. Computers and Structures, Great Britain, v. 63, n. 3, p. 511 - 523, 1997.

DI MINO, G.; DI LIBERTO, C. M. **A model of dynamic interaction between a train vehicle and a rail track**. 4th International SIIV Congress – Palermo (Italy), 12-14 September, 2007.

DIAS, L. A. M. **Estruturas de Aço: conceitos, técnicas e linguagem**. São Paulo, Zigurate Editora, 2002.

DIETZ, S.; KNOTHE, K.; KORTÜM, W. **Fatigue life simulations applied to railway bogies**.1998.

DNIT, 2010. **Departamento Nacional de Infraestrutura Terrestre**. Disponível em: <http://www1.dnit.gov.br/ferrovias/historico.asp> Acesso em: 22 setembro 2010.

FAZENDA, 2010. **Ministério da Fazenda**. Disponível em: <http://200anos.fazenda.gov.br> Acesso em: 15 novembro 2010.

FERREIRA, Narciso J. **Comportamento dinâmico de pontes ferroviárias de alta velocidade constituídas por vigas pré-fabricadas**. Dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, 2008.

FRÝBA, L. **A rough assessment of railway bridges for high speed trains**. Engineering Structures, Great Britain, v. 23, p. 548 - 556, 2001.

GOICOLEA, J. M.; DOMÍNGUEZ, J.; NAVARRO, J. A.; GABALDÓN, F. **New dynamic analysis methods for railway bridges in codes IAPF and EUROCODE 1**. Railway Bridges, Design, Construction and Maintenance, Spanish group of IABSE, Madrid, 12-14 June, Spain, 2002.

GRIFFITHS, D. F. **An Introduction to Matlab**, University of Dundee, Stockholm, Sweden, 1996.

GUIMARÃES, Carlos Alberto B. **Análise das solicitações dinâmicas na via férrea através da simulação da interação entre o veículo e a via**. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas, 1999.

HAMIDI, S. A.; DANSHJOO, F. **Determination of impact factor for steel railway bridges considering simultaneous effects of vehicle speed and axle distance to span length ratio**.Engineering Structures, 32 (2010) 1369-1376.

HANDOKO, Y. A. **Investigation of the dynamics of railway bogies subjected to traction/braking torque**. Ph.D. Thesis, Centre for Railway Engineering, Central Queensland University, Australia, 2006.

HEIDEN, M.; SILVA, L. S.; PIRCHER, M.; PIRCHER, H. **Response of a high-speed train bridge under the extreme event of a passing train and an earthquake**. Kongresse-Seminare – IABSE, Lisbon, 2005.

HEIDEN, M.; BOKAN, H.; SILVA, L. S.; GREINER, R.; PIRCHER, M.; PIRCHER, H. **Dynamic effects of railway bridges for high speed usage: application example steel-composite truss bridge**. IV Congresso de Construção Metálica e Mista, Lisboa, Portugal, Dezembro 4-5, 2003.

HEINRICH-HERTZ-PARK, 2010. Disponível em <http://www.heinrich-hertz-park.de/> Acesso em: 14 outubro 2010.

HERNÁNDEZ, R. **Manual del Ingeniero**. Academia Hütte de Berlín. Cap. VI. Resistencia de Materiales. Editorial Gustavo Gili S. A. 1965.

HERWIG, A. **Consideration of the dynamic effect of increased train loads for the fatigue examination of concrete bridges**. 6th International PhD Symposium in Civil Engineering, Zürich, Swiss, August 23-26, 2006.

HIBBELER, R. C. **ESTÁTICA: Mecânica para engenharia**. 12ª Edição. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.

HOFFMANN, M. **Dry friction and impact dynamics in railway vehicles**. M. Sc. Eng. Thesis, Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, Denmark, 2003.

HOFFMANN, M. **Dynamics of European two-axle freight wagons**. Ph.D. Thesis, Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, Denmark, 2006.

INMAN, D. J. **Engineering vibration**, Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

ISHIDA, M.; BAN, T. **Modelling of wheel flats for track dynamics**. Laboratory Head – Track Dynamics Laboratory, Railway Technical Research Institute, Tokyo, Japan, 2001.

IWNICKI, S. D.; WICKENS, A. H. **Validation of a matlab railway vehicle simulation using a scale roller rig**. The Rail Technology Unit, Manchester Metropolitan University, Manchester, United Kingdom, 2004.

IWNICKI, S. **Simulation of wheel-rail contact forces**. Fatigue Fracture Engineering Meterials Structures, n. 26, p. 887-900, 2003.

JAMES, G. **Analysis of traffic load effects on railway bridges**. Doctoral Thesis, Kungl Tekniska Högskolan, Structural Engineering Division, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2003.

JASCHINSKI, A.; CHOLLET, H.; IWNICKI, S.; WICKENS, A.; WÜRZEN, J. V. **The application of roller rigs to railway vehicle dynamics**. Vehicle system dynamics, 31, pp. 345-392, Swets & Zeitlinger, 1999.

KALKER, Joost J. **On the rolling contact of two elastic bodies in the presence of dry friction**. Doctoral thesis, Delft University of technology, 1967.

KALKER, Joost J. **Rolling contact phenomena: Linear Elasticity**. Delft University of technology, 1990.

KAROUMI, R.; WIBERG, J.; LILJENCRANTZ, A. Monitoring **traffic loads and dynamic effects using instrumented railway bridge**. Engineering Structures, 27 (2005) 1813-1819.

KUMARAN, G.; MENON, D.; NAIR, K. K. **Dynamic studies of railtrack sleepers in a track structure system**. Journal of Sound and Vibration, 268 (2003) 485-501.

LAW, S. S.; BU, J. Q.; ZHU, X. Q.; CHAN, S. L. **Vehicle axle loads identification using finite element method**. Engineering Structures, Great Britain, v. 26, p. 1143 - 1153, 2004.

LIU, K.; DE ROECK, G.; LOMBAERT, G. **The effect of dynamic train-bridge interaction on the bridge response during a train passage**. Journal of Sound and Vibration, 325, (2009), p. 240-251.

LOPES JÚNIOR, Vicente. **Estudo da resposta dinâmica de uma locomotiva a excitações devidas a irregularidades da via**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas, 1987.

LORIEUX, L. **Analysis of train-induced vibrations on a single-span composite bridge**. Master Thesis, Kungl Tekniska Högskolan, Structural Design and Bridges, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2008.

LOU, P. **A vehicle-track-bridge interaction element considering vehicle's pitching effect**. Finite Element in Analysis and Design, Great Britain, v. 41, p. 397 - 427, 2005.

LU, F.; LIN, J. H.; KENNEDY, D.; WILLIAMS, F. W. **An algorithm to study non-stationary random vibrations of vehicle-bridge systems**. Computers and Structures, 87 (2009), p. 177-185.

MARTÍNEZ-RODRIGO, M. D., LAVADO, J., MUSEROS, P. **Transverse vibrations in existing railway bridges under resonant conditions: Single-track versus double-track configurations**. Engineering Structures. 32 (2010) 1861-1875.

MARTINS, Sérgio R. **Simulação da frenagem de trem unitário de carga**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas, 1999.

MAZILU, T., DUMITRIU, M., TUDORACHE, C. **On the dynamics of interaction between a moving mass and an infinite one-dimensional elastic structure at the stability limit**. Journal of Sound and Vibration. 330 (2011) 3729-3743.

MEDINA, J. **Mecânica dos Pavimentos**, Editora UFRJ – 1997.

MELCER, Jozef. **A vehicle-bridge interaction**. Communications/Komunikacie, Scientific letters of the University of Žilina, Slovakia, v. 9, n. 3, p. 5-10, 2007.

METROCURITIBA, 2010. Disponível em <http://metro.curitiba.pr.gov.br/> Acesso em: 06 dezembro 2010.

METRODF, 2011. Disponível em <http://www.metro.df.gov.br/> Acesso em: 25 janeiro 2011.

MICHALTSOS, G. T. **Parameters affecting the dynamic response of light (steel) bridges**. The Scientific Journal FACTA UNIVERSITATIS, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, Greece, 2000, v. 2, n. 10, p. 1203 - 1218.

MOHAN, A. **Nonlinear investigation of the use of controllable primary suspensions to improve hunting in railway vehicles**. Master of Science in Mechanical Engineering Thesis, Faculty of Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia, USA, 2003.

MRS, 2010. Disponível em <http://www.mrs.com.br/> Acesso em: 21 outubro 2010.

MUSEROS, P.; ROMERO, M. L.; POY, A.; ALARCÓN, E. **Advances in the analysis of short span railway bridges for high-speed lines**. Computers and Structures, Great Britain, v. 80, p. 2121 - 2132, 2002.

MUSEROS, P.; ALARCÓN, E. **Influence of the second bending mode on the response of high-speed bridges at resonance**. Journal of Structural Engineering ASCE, March, 2005.

NEWWORLDENCYCLOPEDIA, 2010. Disponível em: <http://static.newworldencyclopedia.org/> Acesso em: 21 setembro 2010.

NOTICIASUOL, 2011. Disponível em <http://noticias.uol.com.br/> Acesso em: 27 janeiro 2011.

OLIVEIRA, Augusto Cesar C. de. **Determinação dos níveis de tensões na lateral de um truque ferroviário**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas, 1989.

PARK, T. W.; PARK, C. J. **Dynamic analysis of a moving vehicle on flexible beam structures (I): General Approach**. International Journal of the Korean Society of Precision Engineering, Vol. 3, Nº 4, October, Korea, 2002.

PEARSON, J. T.; GOODALL, R. M. **An active stability system for a high speed railway vehicle**. Electronic Systems and Control Division Research, Department of Electronic and Electrical Engineering, Loughborough University, United Kingdom, 2003.

PEREIRA, Miguel F. D. F. **Comportamento dinâmico de pontes ferroviárias de alta velocidade. Especificações para o projecto de estruturas**. Dissertação de mestrado, Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa, Portugal, 2008.

PFAFFINGER, M. R. **Higher vibration modes in railway tracks at their cutoff frequencies**. Doctor Thesis, Swiss federal institute of technology, Zürich, Swiss, 2000.

PIERINGER, A.; KROPP, W. **A Time-Domain Model for High-Frequency Wheel/Rail Interaction Incluing Tangential Friction**.10ème Congrès Français d´Acoustique, Lyon 12-16 Avril, 2010.

PIOTROWSKI, J. **Kalker's algorithm Fastsim solves tangential contact problems with slip dependent friction and friction anisotropy**. Symposium of Advances in Contact Mechanics: a tribute to Prof. J. J. Kalker, 22-24 October 2008, Delft, The Netherlands.

PLANET-WISSEN, 2010. Disponível em <http://www.planet-wissen.de/> Acesso em: 14 outubro 2010.

POLACH, O. **Curving and stability optimization of locomotive bogies using interconnected wheelsets**. Extensive Summaries of the 18th IAVSD Symposium Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks, Atsugi, Kanagawa, Japan, August 24-30, 2003.

POLACH, O. **Influence of wheel/rail contact geometry on the behavior of a railway vehicle at stability limit**. ENOC-2005, Eindhoven, Netherlands, 7-12 August, 2005.

POMBO, J.; DESPRETS, H.; VERARDI, R.; AMBRÓSIO, J.; PEREIRA, M.; ARIAUDO, C.; KUKA, N. **Wheel wear evolution and its influence on the dynamic behaviour of railway vehicles**. 7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, Lisbon, Portugal, September 7-11, 2009.

POMBO, J.; AMBRÓSIO, J.; SILVA, M. **A new wheel-rail contact model for railway dynamics**. IDMEC – Instituto Superior Técnico, Lisboa, Portugal, 2007.

POPOV, V. L.; PSAKHIE, S. G.; SHILKO, E. V.; DMITRIEV, A. I.; KNOTHE, K.; BUCHER, F.; ERTZ, M. **Friction coefficient in "rail-wheel"-contact as a function of material and loading parameters**. Physical Mesomechanics, v. 5, n. 3, p. 17-24, 2002.

POPPRATH, S.; BENATZKY, C.; BILIK, C.; KOZEK, M.; STRIBERSKY, A.; WASSERMANN, J. **Experimental modal analysis of a scaled car body for metro vehicles**. The Thirteenth International Congress on Sound and Vibration. Vienna, Austria, July 2-6, 2006.

QU, W. –L.; QIN, S. –Q.; TU, J. –W.; LIU, J.; ZHOU, Q.; CHENG, H.; PI, Y. –L. **Intelligent control for braking-induced longitudinal vibration responses of floating-type railway bridges**. Smart Materials and Structures, 18 (2009) 125003 (20pp).

REDDY, J. N. **Energy and variational methods in applied mechanics: With an introduction to the finite element method**. J. Wiley & Sons, 1984.

REN, W. -X.; ZHAO, T.; HARIK, I. E. **Experimental and analytical modal analysis of steel arch bridge**. Journal of Structural Engineering, American Society of Civil Engineering, July 2004, v. 130, n. 7, p. 1022 - 1031.

RIGUEIRO, Maria C. S. **Avaliação dos efeitos dinâmicos em pontes ferroviárias de alta velocidade de pequeno e médio vão**. Tese de doutorado, Universidade de Coimbra, Potugal, 2007.

RODRIGUES FILHO, Fausto. **Estudo da estabilidade dinâmica de veículos ferroviários através da simulação do comportamento de uma locomotiva**. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas, 1983.

ROMERO, D. P. M. **Interacción vehículo-estructura y efectos de resonancia en puentes isostáticos de ferrocarril para líneas de alta velocidad**. Universidad Politécnica de Madrid, Thesis Doctoral, Mayo, 2002.

RUGE, P.; WIDARDA, D. R.; SCHMÄLZLIN, G.; BAGAYOKO, L. **Longitudinal track-bridge interaction due to sudden change of coupling interface**. Computers and Structures, 87 (2009), p. 47-58.

RUGE, P.; BIRK, C. **Longitudinal forces in continuously welded rails on bridgedecks due to nonlinear track-bridge interaction**. Computers & Structures, n. 85, p. 458-475, 2007.

SANTOS, F. C. **Análise do Contato Roda-Trilho e sua Influência na Vida em Serviço de Rodas Ferroviárias**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas, 2000.

SEMPREBONE, Paula da S. **Desgaste em trilhos ferroviários**. Dissertação de mestrado, universidade estadual de Campinas, Unicamp, 2005.

SHIN, J. R., AN, Y. K., SOHN, H., YUN, C. B. **Vibration reduction of high-speed railway bridges by adding size-adjusted vehicles**. Engineering Structures. 32 (2010) 2839-2849.

SKYSCRAPERCITY, 2011. **Pontes e Viadutos Ferroviários Brasileiros**. Disponível em: <http://www.skyscrapercity.com/> Acesso em: 28 janeiro 2011.

SONG, M. -K.; NOH, H. -C.; CHOI, C. -K. **A new three-dimensional finite element analysis model of high-speed train-bridge interactions**. Engineering Structures, Great Britain, v. 25, p. 1611 - 1626, 2003.

SONG, Y.; BIONDINI, F.; BERGMAN, L. A. **Effects of surface irregularities on the dynamical responses of bridge-vehicle interaction systems**. 15th ASCE Engineering Mechanics Conference, June 2-5, 2002, Columbia University, New York, NY, USA.

SOPHIANOPOULOS, D. S.; MICHALTSOS, G. T. **Combined torsional-lateral vibration of beams under vehicular loading. I: Formulation and solution techniques.** The Scientific Journal FACTA UNIVERSITATIS, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, Greece, 1999, v. 2, n. 9, p. 877 - 886.

STEAMCIRCUS, 2010. Disponível em: <http://www.steamcircus.info/> Acesso em: 21 setembro 2010.

SUN, L. P.; ZHANG, J.; ZHANG, J. **Analyses on wheel-rail contact using finite element method during passing through curved track**. International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, 2009.

SUPERVIA, 2011. **SuperVia. Concessionária de Transporte Ferroviário S. A.** Disponível em <http://www.supervia.com.br/> Acesso em: 25 janeiro 2011.

TAVBRASIL, 2010. Disponível em <http://www.tavbrasil.gov.br/> Acesso em: 07 dezembro 2010.

THOMAZ, E. C. S. **Concreto Prótendido**, Ponte Ferroviária, Projeto Real, Notas de Aula, Instituto Militar de Engenharia, 2008.

TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Teoria da Elasticidade**. 3º Edição, 1980, McGraw-Hill, Editora Guanabara Koogan, S. A.

TIMOSHENKO, S. **Resistência dos Materiais Volume II**, 3ª Edição, LTC – Livros Técnicos e Científicos Editora S.A. Rio de Janeiro, RJ, 1975.

TORSTENSSON, P. T., NIELSEN, J. C. O., BAEZA, L. **Dynamic train-track interaction at high vehicle speeds-Modelling of wheelset dynamics and wheel rotation**. Journal of Sound and Vibration. 330 (2011) 5309-5321.

TRENSURB, 2010. Disponível em <http://www.trensurb.gov.br/> Acesso em: 01 dezembro 2010.

VEGGIEOILCAR, 2010. Disponível em <http://www.veggieoilcar.com.ph/> Acesso em: 14 outubro 2010.

VFCO, 2010. Disponível em <http://www.vfco.com.br/> Acesso em: 30 outubro 2010.

VILLA, Emerson C. **Inscrição de um veículo ferroviário em curva**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas, 1993.

WU, T. X.; THOMPSON, D. J. **Wheel/rail non-linear interaction with coupling between vertical and lateral directions**. University of Southampton, Institute of Sound and Vibration Research, ISVR Technical Memorandum Nº 891, Dynamics Group, England, 2002.

XIA, F. **Three piece freight truck**. Doctor Dissertation, Informatics and Mathematical Modelling, Technical University of Denmark, Denmark, 2002.

XIA, H.; XU, Y. L.; CHAN, T. H. T.; ZAKERI, J. A. **Dynamic responses of railway suspension bridges under moving trains**. Scientia Iranica, Vol. 14, Nº 5, pp 385-394, Sharif University of Tecnology, October 2007.

XIA, H.; ZHANG, N.; De ROECK, G. **Dynamic analysis of high speed railway bridge under articulated trains**. Computers and Structures, Great Britain, v. 81, p. 2467 - 2478, 2003.

XU, Y. L., LI, Q., WU, D. J., CHEN, Z. W. **Stress and acceleration analysis of coupled vehicle and long-span bridge systems using the mode superposition method.** Engineering Structures, 32 (2010) 1356-1368.

YANG, Y. -B.; YAU, J. -D.; HSU, L. -C. **Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds**. Engineering Structures, Great Britain, v. 19, n. 11, p. 936 - 944, 1997.

ZAAZAA, K. E., SCHWAB, A. L. **Review of Joost Kalker's Wheel-Rail Contact Theories and Their Implementation in Multibody Codes**. Proceedings of the ASME 2009 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference, IDETC/CIE 2009, August 30 – September 2, 2009, San Diego, California, USA.

ZAMPIERI, Douglas E. **Estudo analítico de um veículo sobre trilhos**. Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Unicamp, Campinas, 1975.

APÊNDICE A

1 Componentes das estradas de ferro

As estradas de ferro, vias férreas, (ferrovias) ou vias permanentes são constituídas pelos principais elementos como os trilhos, os dormentes, os acessórios, o lastro e o sublastro. A via ferroviária tem o propósito de guiar os trens de maneira segura e econômica, se a via não for perfeitamente nivelada e alinhada, surgirão as irregularidades causando oscilações e vibrações produzindo desconforto aos passageiros e possíveis danos aos bens a serem transportados. (BRINA, 1979), (DAHLBERG, 2006). A Figura A1 representa a secção da via férrea com seus principais elementos.

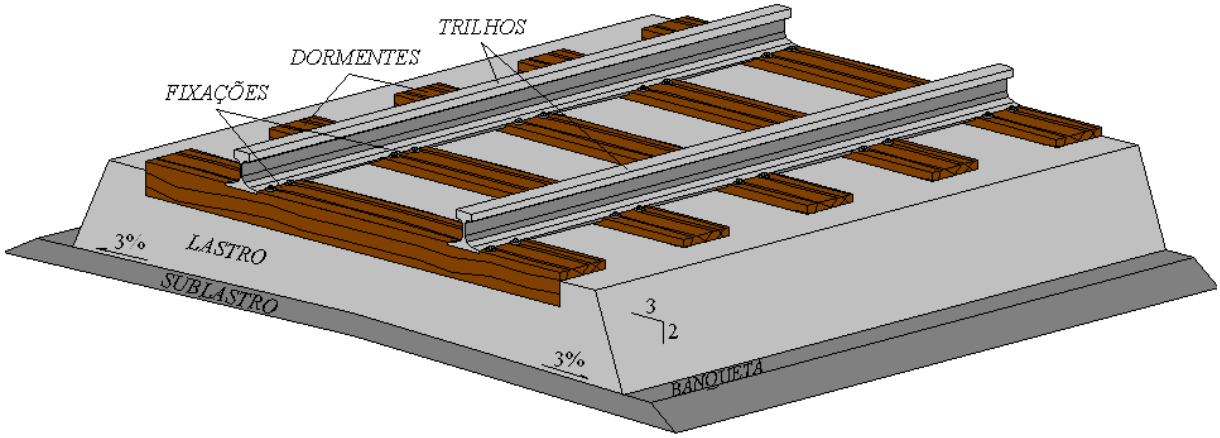


Figura A1 – Representação da secção da via férrea e principais elementos.
Fonte: Autor.

Também fazem parte de uma estrada de ferro as obras de terraplenagem, de drenagem, os projetos de sinalização, eletrificação entre outros. Em alguns trechos justifica-se o emprego de obras de arte especiais tais como elevados, pontes, pontilhões, trincheiras, túneis e viadutos. Há também a necessidade de terminais e estações ferroviárias, plataformas para embarque e desembarque de carga e/ou de passageiros, cruzamentos, passagens de nível, desvios, bem como pátio de manobras. Todos estes elementos são necessários para a concepção de um meio de transporte eficiente, seguro, econômico e que seja integrado com os demais meios de transporte, possibilitando desta maneira, o atendimento das demandas do transporte urbano das grandes metrópoles, e do escoamento das produções nacionais.

1.1 Bitolas

Denomina-se bitola de uma via ferroviária a distância entre as faces internas das duas filas de trilhos, medida a (12 mm) abaixo do plano de rodagem das rodas (plano constituído pela face superior dos trilhos). (BRINA, 1979). A Figura A2 abaixo mostra a bitola de uma via ferroviária.

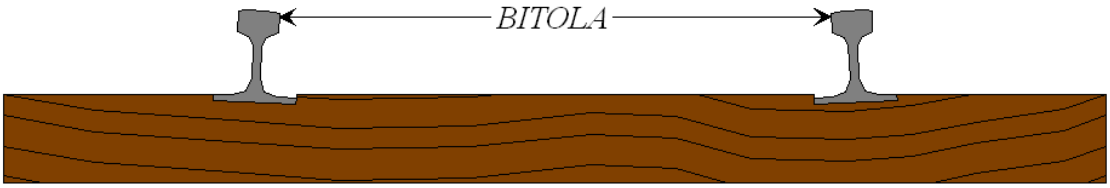


Figura A2 – Representação da bitola da via ferroviária.
Fonte: Adaptado de (BRINA, 1979).

A bitola internacional ficou oficialmente adotada em 1907 pela Conferência de Berna como a bitola de (1,435 m). Este valor é originário da distância entre rodas de (4’ 8” ½) das diligências que trafegavam nos primeiros trechos ferroviários de (*Stockton* a *Darlington*, e *Liverpool* a *Manchester*). Esta bitola foi adotada na Inglaterra e na maioria dos países, porém existem outras tais como: na Itália (1,445 m); na França (1,44 m); na Espanha (1,674 m); em Portugal (1,665 m); na Argentina e no Chile (1,676 m); e na Rússia (1,523 m). No Brasil, através do Plano Nacional de Viação, ficou estabelecido como bitola padrão a de (1,60 m), ou bitola larga, porém existem outras em uso tais como: (1,435 m, 1,00 m, 0,76 m, e 0,60 m). (BRINA, 1979).

O uso da bitola métrica trás vantagens como: curvas de menor raio; menor largura da plataforma, terraplenos e obras; economia de lastro, dormentes e trilhos; material rodante mais barato; menor resistência à tração; e economia nas obras de arte. Por outro lado, as desvantagens são: menor capacidade de tráfego; menor velocidade; e necessidade de baldeação nos entroncamentos com outras bitolas. Há discussões sobre o uso da bitola métrica, sobretudo quanto à sua capacidade de tráfego. (Idem, 1979).

1.2 Trilhos

Os trilhos devem promover superfícies de rolamento lisas guiando os rodeiros na direção da via ferroviária. Devem receber as cargas verticais, laterais e longitudinais produzidas pelos trens e distribuir estas aos dormentes. (BRINA, 1979), (DAHLBERG, 2006).

A forma do perfil de duas cabeças do trilho foi desenvolvida visando uma peça de secção econômica e resistente à flexão. Devido ao grande desgaste produzido pelo atrito com as rodas, deu-se uma espessura considerável à mesa superior. Posteriormente, o engenheiro inglês *Vignole* idealizou um tipo de trilho de mais fácil fixação aos dormentes. Este tipo de trilho passou a ser denominado de trilho *vignole*, composto por boleto (cabeça), alma e patim. Têm-se também o trilho de fenda, utilizado para o transporte em bondes urbanos, onde os frisos das rodas trafegam na fenda existente na cabeça do trilho. (Idem, 1979).

Diante dos materiais existentes, o aço é o que oferece as melhores vantagens na fabricação dos trilhos, pois têm dureza, elasticidade, resiliência, tenacidade e resistência à flexão. A dureza está relacionada com a resistência do material à penetração e ao desgaste por abrasão devido ao atrito do aro das rodas com a superfície do boleto. A Figura A3 mostra a secção transversal do trilho vignole e do trilho de fenda com suas respectivas partes.

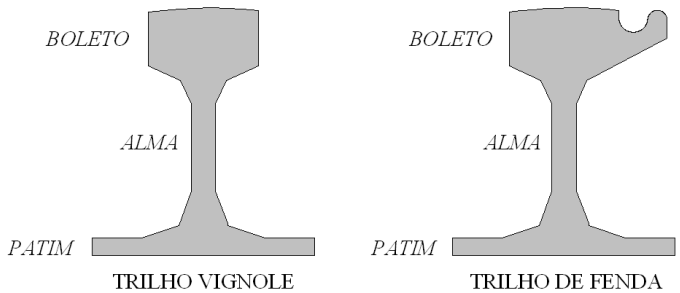


Figura A3 – Representação da secção transversal do trilho *vignole* e do trilho de fenda.
Fonte: Adaptado de (BRINA, 1979).

A elasticidade é a capacidade do material de sofrer carga e descarga e voltar a sua configuração original, isto é, sem sofrer deformações residuais (deformações plásticas). (DIAS, 2002).

A resiliência é a capacidade do material em armazenar a energia potencial de deformação elástica e devolvê-la quando cessarem as tensões que causam as deformações. (MEDINA, 1997), (TIMOSHENKO, 1975).

Tenacidade está relacionada com a capacidade do material em absorver energia potencial de deformação total (elástica e plástica) por unidade de volume, quando submetido à cargas de impacto. (DIAS, 2002), (TIMOSHENKO, 1975).

A composição do aço utilizado na fabricação dos trilhos é basicamente formada por ferro, carbono, manganês, silício, fósforo e enxofre. O ferro é o elemento básico do aço compondo aproximadamente (98%). O carbono e o manganês fornecem dureza à liga de aço. O silício aumenta a resistência à ruptura sem prejudicar a ductilidade e a tenacidade da liga. O fósforo e o enxofre são elementos indesejáveis à liga de aço, suas percentagens mínimas devem ser controladas. O fósforo torna o material quebradiço, e o enxofre é responsável pela formação das segregações. (BRINA, 1979).

A fabricação dos trilhos se dá através de fundição em alto fornos, seguido de laminação à quente dos lingotes em vários cilindros sucessivos que vão dando a forma gradativamente, e posterior resfriamento controlado. Para maior facilidade de laminação e redução dos defeitos a distribuição da massa do trilho deve ser uniforme: boleto (de 40 % a 42 %), alma (de 18 % a 22 %) e patim (de 38 % a 40 %). (Idem, 1979).

Os trilhos fabricados no Brasil obedecem às especificações da *American Society for Testing Materials* (*ASTM*) e da *American Railway Engineering Association* (*AREA*). Estas especificações estão relacionadas com as dimensões, peso, prova de choque, e os ensaios de tração, resiliência, dureza *Brinell*, micrográfico, macrográfico, composição química, e de entalhe e fratura. (Idem, 1979).

As marcas de classificação estampadas na alma dos trilhos permitem a identificação quanto ao controle e a qualidade no processo de fabricação. Em um dos lados da alma do trilho são estampados a marca da usina (CSN), o país de fabricação (BR), a indicação de que o resfriamento foi controlado (RC), o tipo de forno de aço referente à fabricação (T=*Thomas*; B=*Bessemer*; M=*Martin*; E=Elétrico; SM=*Siemens-Martin*), o tipo do trilho referente ao peso (TR 57), o ano de fabricação (1978), e o mês em que foi fabricado, abril (IIII). De outro lado da alma do trilho são identificados o número da corrida (171078), a letra indicativa da posição do trilho em relação ao lingote (B significa o segundo trilho do lingote), o número do lingote por ordem de lingoteamento e o sentido de laminação. (Idem, 1979). A Figura A4 mostra as marcas de classificação descritas acima.

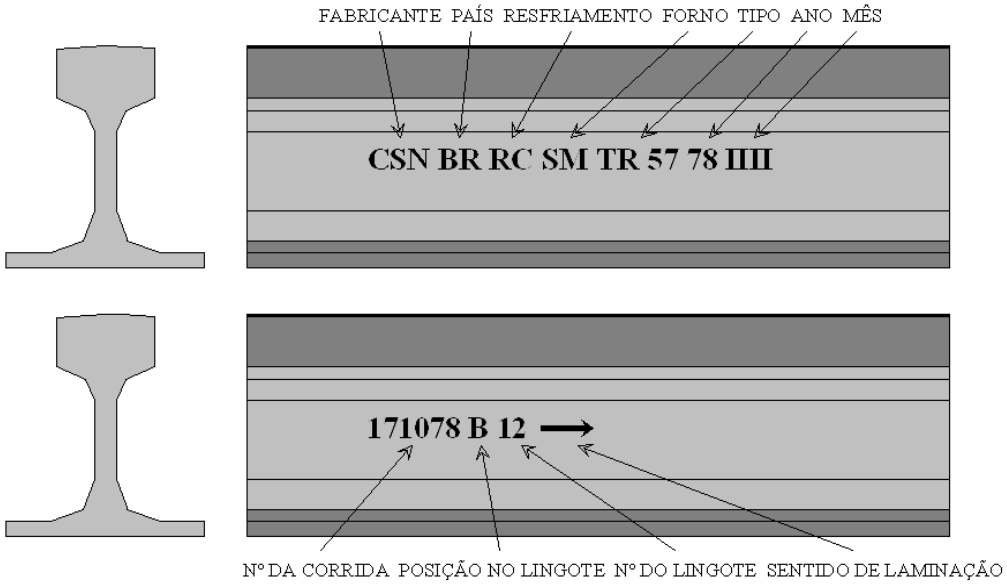


Figura A4 – Representação das marcas de classificação nos trilhos.
Fonte: Autor.

Os defeitos nos trilhos podem ser originados durante o processo de fabricação, ou durante o serviço quando solicitado através das rodas. (Idem, 1979).

Os defeitos de fabricação são:

a) os vazios ou bolsas de contração decorrentes do resfriamento e solidificação;
b) as segregações provenientes das escórias prejudicando a homogeneidade;
c) as bolhas formadas pelas inclusões gasosas retidas durante a laminação;
d) as fissuras transversais geradas pela laminação podendo originar fraturas em serviço;
e) as ondulações, rebarbas e pregas também oriundas da laminação.

Os defeitos em serviço são:

a) deformação nas pontas decorrentes dos choques e flexões nas juntas;
b) autotêmpera superficial provocada pela patinagem e frenagem das rodas;
c) escoamento do metal na superfície do boleto produzido pelo martelamento das rodas;
d) desgaste da alma e do patim por ação química (mercadorias corrosivas, maresia, etc.);
e) desgaste por atrito dos frisos das rodas, principalmente em curvas de pequeno raio;
f) desgaste ondulatório gerado pela variação de aderência e pressão das rodas;
g) fraturas que surgem da fadiga do material por uso e/ou por defeitos internos.

O perfil do boleto com sua superfície boleada foi concebido para oferecer condições de rolamento reduzindo o desgaste tanto de rodas quanto de trilhos. A roda mantém o contato com o trilho através da banda de rolagem ou superfície de rolamento, esta geralmente apresenta uma conicidade de (1:20). A roda também apresenta uma saliência em sua borda interna, o flange ou friso, que serve para guiá-la sobre os trilhos principalmente em trechos com curvas. O ângulo (β) foi estudado para evitar o descarrilamento. Este ângulo geralmente é igual a (β = 60º), pois se (β < 60º) as rodas podem subir nos trilhos provocando o descarrilamento. O trilho é fixado sobre os dormentes com uma inclinação de (1:20). (BRINA, 1979). A Figura A5 mostra os perfis da secção transversal do trilho e da roda.

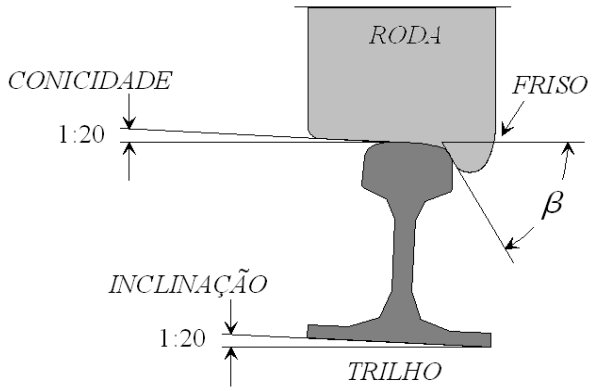


Figura A5 – Representação da secção transversal do trilho e da roda.
Fonte: Adaptado de (BRINA, 1979).

O desgaste no boleto devido ao serviço das rodas ocorre verticalmente e lateralmente, sendo este último mais acentuado em trechos com curvas. Os limites para o desgaste vertical podem chegar até (12 mm) em vias principais, e para vias secundárias de (15 a 20 mm). A largura, e a altura do boleto são representadas por (*c*) e (*e*), respectivamente. Devido ao desgaste, a razão (*c*/*e*), deve estar entre (1,6 a 1,8) para que o desgaste lateral não obrigue a troca do trilho. Devendo ocorrer primeiro o limite de uso para o desgaste vertical, pois pode haver a inversão de lado do trilho permitindo uso até o limite de desgaste vertical. O ângulo admitido de desgaste lateral do boleto (θ) deve variar entre (32º a 34º). Este ângulo é medido em relação à extremidade inferior do boleto e o eixo de simetria vertical. Geralmente adota-se como limite de desgaste a perda da área do boleto de 25%. (Idem, 1979). A Figura A6 mostra a secção transversal do trilho e suas dimensões.

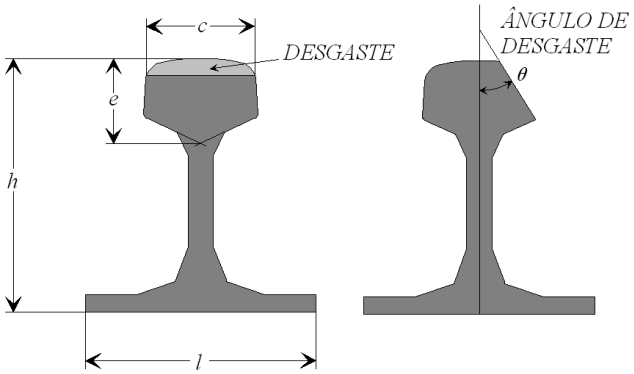


Figura A6 – Representação da secção transversal do trilho e dimensões.
Fonte: Adaptado de (BRINA, 1979).

A relação entre a altura do trilho e a largura do patim, (*h*/*l*) deve estar entre (1 a 1,1), para que haja segurança em relação ao reviramento. Isto é, além do esforço vertical (*P*), o trilho é solicitado por esforço lateral (*F*). Tomando-se os momentos em relação à extremidade (*O*) do patim, a força lateral (*F*) gera um momento de reviramento (*F*.*l*) que deve ser combatido pelo momento (*P*.*l*/2) e o momento resistente da fixação. (BRINA, 1979). A Figura A7 mostra a seção transversal do trilho com suas dimensões e forças.

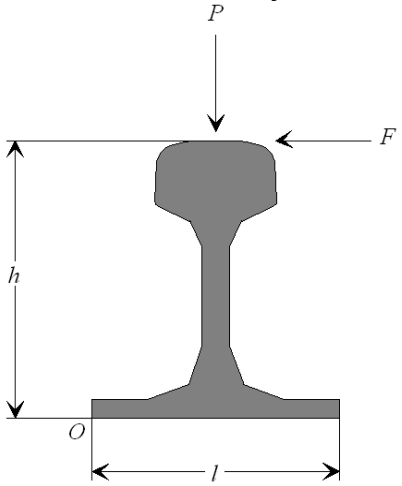


Figura A7 – Representação da secção transversal do trilho dimensões e forças.
Fonte: Adaptado de (BRINA, 1979).

O momento de inércia de área da secção transversal e o módulo de resistência à flexão podem ser obtidos respectivamente pelas expressões abaixo:

$$I = 0{,}13.S.h^2$$
$$W = 0{,}25\ a\ 0{,}27.S.h \qquad \text{(A.1)}$$

onde, (*S*) e (*h*) são a área de secção transversal e a altura do trilho, respectivamente. Para a escolha do perfil de trilho mais econômico, defini-se o coeficiente de utilidade (*C* = *W*/*p*), estabelecendo a razão entre o módulo de resistência à flexão e o peso por metro linear. O perfil mais econômico será aquele que oferecer o maior valor de (*C*), ou seja, maior resistência à flexão e menor peso. (Idem, 1979).

Os trilhos de aço-liga fabricados no Brasil possuem: limite de resistência à tração de (100 kg/mm²), limite de escoamento de (58 kg/mm² mínimo), alongamento percentual em 50 mm de (8 %), e dureza *Brinell* na superfície de rolamento variando entre (300 a 348), sendo em média (315), e no mínimo (290). (Idem, 1979). Os trilhos fabricados no Brasil são mostrados na Tabela A1.

Tabela A1 - Trilhos fabricados no Brasil.

TRILHOS								
TIPO NOMINAL BRASILEIRO - TR			**25**	**32**	**37**	**45**	**50**	**57**	**68**
Peso calculado em kg/m			24,654	32,045	37,105	44,645	50,349	56,897	67,560
Área calculada da secção (cm^2)	**Boleto**	**área**	13,23	17,16	19,87	20,58	24,51	25,22	31,35
		% do total	42	42	42	36,2	38,2	34,8	36,3
	Alma	**área**	6,58	8,58	9,94	13,68	14,52	19,68	25,53
		% do total	21	21	21	24	22,6	27,1	27,3
	Patim	**área**	11,61	15,10	17,48	22,64	25,16	27,68	31,42
		% do total	37	37	37	39,8	39,2	38,1	36,4
	ÁREA TOTAL		31,42	40,84	47,29	56,9	64,19	72,58	86,3
Momento de inércia de área (cm^4)			413,7	703,4	951,5	1610,8	2039,5	2730,5	3950,0
Módulo de resistência (cm^3)		**Boleto**	81,6	120,8	149,1	205,6	247,4	295,0	391,6
		Patim	86,7	129,5	162,9	249,7	291,7	360,7	463,8
Raio de giração (cm)			3,63	4,15	4,49	5,32	5,63	6,13	7,11

Fonte: Adaptado de (BRINA, 1979).

1.3 Dormentes

Os dormentes promovem o suporte e a fixação dos trilhos e preservam a bitola, nível e alinhamento da via ferroviária. Os dormentes transmitem as cargas verticais, laterais e longitudinais dos trilhos ao lastro. (BRINA, 1979), (DAHLBERG, 2006) Nas Figuras anteriores mostram-se os dormentes de madeira sendo utilizados na via ferroviária, podendo estes também ser de aço, e de concreto.

As características necessárias para que se cumpram suas funções são: (Idem, 1979).

a) dimensões compatíveis;
b) resistência aos esforços;
c) durabilidade;
d) permitir o nivelamento da via;
e) opor-se aos deslocamentos longitudinais e transversais da via;
f) permitir boa fixação do trilho.

1.3.1 Dormentes de madeira

Os dormentes de madeira são os que oferecem as melhores qualidades para o uso, sendo o principal tipo a ser empregado até os dias de hoje. As dimensões estabelecidas pelas normas brasileiras em relação ao comprimento, largura e altura para as bitolas de (1,60 m) e (1,00 m) são respectivamente: (2,80 m x 0,24 m x 0,17 m) e (2,00 m x 0,22 m x 0,16 m). (BRINA, 1979).

A avaliação da resistência mecânica da madeira para o emprego em dormentes é realizada pelas normas brasileiras as quais determinam as características físicas como umidade, retratibilidade e peso específico, bem como as características mecânicas de compressão, flexão, tração, fendilhamento, dureza e cisalhamento que são influenciadas diretamente com seu teor de umidade. Pode-se estabelecer como densidade mínima das madeiras para uso como dormentes em (0,70 kg/dm^3). Algumas resistências mecânicas da madeira podem ser relacionadas em função de sua densidade conforme mostra a Tabela A2. (Idem, 1979).

Tabela A2 – Resistência mecânica da madeira em função de sua densidade.

PROPRIEDADE MECÂNICA	RELAÇÃO COM A DENSIDADE "D"	
	MADEIRA VERDE	MADEIRA SECA AO AR
FLEXÃO ESTÁTICA	**30 % DE UMIDADE**	**12 % DE UMIDADE**
Tensão no limite de proporcionalidade (kg/cm²)	$717.D^{1,25}$	$1170.D^{1,25}$
Tensão de ruptura (kg/cm²)	$1240.D^{1,25}$	$1800.D^{1,25}$
FLEXÃO DINÂMICA		
Altura de queda do martelo para causar a ruptura (cm)	$45.D^{1,75}$	$37,3.D^{1,75}$
COMPRESSÃO PARALELA ÀS FIBRAS		
Tensão no limite de proporcionalidade (kg/cm²)	370.D	615.D
Tensão de ruptura (kg/cm²)	470.D	850.D
COMPRESSÃO PERPENDICULAR ÀS FIBRAS		
Tensão no limite de proporcionalidade (kg/cm²)	$210.D^{2,25}$	$326.D^{2,25}$
DUREZA		
No topo (kg)	$1360.D^{2,25}$	$2180.D^{2,25}$
Lateral (kg)	$1550.D^{2,25}$	$1710.D^{2,25}$

Fonte: Adaptado de (BRINA, 1979).

As espécies de madeira necessitam de tratamento químico para evitar a proliferação dos fungos e insetos que comprometem a resistência e durabilidade dos dormentes. Estima-se que a vida útil dos dormentes quando tratados com creosoto chegue até 40 anos. (BRINA, 1979).

Em relação às espécies de madeira a serem empregadas como dormentes tem-se 1ª e 2ª classes. Algumas espécies da 1ª classe são: aroeira, sucupira, jacarandá, amoreira, angico, ipê, pereira, bálsamo, etc. Alguns exemplos de espécies da 2ª classe: angelim, araribá, amarelinho, braúna, carvalho do Brasil, canela-preta, guarabú, jatobá, maçaranduba, peroba, pau-brasil, baru, eucalipto (*citriodora*, *paniculata*, *rostrata*, etc.). Os exemplos da 3ª classe são as espécies pertencentes à 1ª e 2ª classes, porém que apresentam defeitos toleráveis ao uso. Destaca-se o dormente de sucupira por possuir excelentes qualidades de fixação dos trilhos, dureza e peso específico elevados, grande resistência ao apodrecimento, chegando a durar em uma linha mais de 30 anos. (Idem, 1979).

Observa-se que a maioria das espécies citadas é de madeiras nobres e/ou que estão em extinção no Brasil, tornando o produto cada vez mais caro, isto se intensifica com a exploração ilegal e a deficiência dos reflorestamentos. Estes fatores tornam necessário o estudo de outras espécies alternativas com as características físicas e mecânicas semelhantes, e que tenham crescimento rápido em reflorestamentos. Também se estudam outros materiais a serem empregados na confecção dos dormentes além dos já existentes.

As vantagens dos dormentes de madeira: (Idem, 1979).

a) resistência;
b) elasticidade;
c) fácil manuseio;
d) bom comportamento ao descarrilamento;
e) permite reemprego;
f) baixo custo;
g) bom desempenho para grandes cargas;
h) bom desempenho em ambientes agressivos.

As desvantagens dos dormentes de madeira: (BRINA, 1979).

a) sujeitos ao apodrecimento;
b) sujeitos à queima;
c) afrouxamento das fixações;
d) desgaste mecânico;

e) escassez de madeira de alta densidade;
f) tratamento químico difícil;
g) recebimento demorado;
h) controle de qualidade com custo elevado.

1.3.2 Dormentes de aço

Os dormentes de aço são essencialmente constituídos por uma chapa de aço laminada na forma de (*U*) invertido e com suas extremidades fechadas e curvadas servindo de fixação no lastro. Este tipo de dormente é essencialmente leve (70 kg) e de fácil assentamento. A fixação nos dormentes de aço se dá através de parafusos e castanhas que sofrem afrouxamento devido à trepidação e a rigidez deste tipo de dormente. Também produz muito ruído comparado aos outros tipos de dormentes. A condutividade elétrica também prejudica seu uso principalmente em trechos de sinalização que são energizados. (BRINA, 1979).

As vantagens dos dormentes de aço: (Idem, 1979).
a) leveza;
b) maior rigidez;
c) melhor assentamento.

As desvantagens dos dormentes de aço: (BRINA, 1979).
a) barulho;
b) condutividade elétrica;
c) fixação difícil;
d) custo elevado.

A Figura A8 representa o dormente de aço em corte longitudinal e vista de cima.

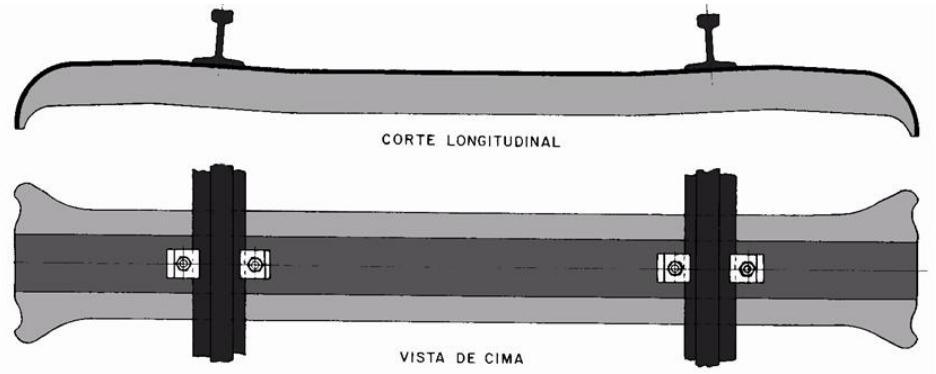


Figura A8 – Representação de um dormente de aço.
Fonte: Autor.

A Figura A9 representa o detalhe do tipo de fixação dos trilhos a ser empregada nos dormentes de aço.

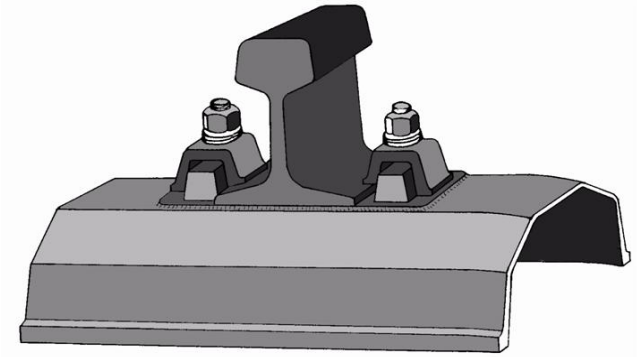


Figura A9 – Representação do detalhe da fixação de um dormente de aço.
Fonte: Autor.

1.3.3 Dormentes de concreto

Os dormentes de concreto, Figura A10, podem ser do tipo monobloco, consistindo em uma estrutura única de concreto pró-tendido, o bi-bloco, são dois blocos de concreto unidos por uma barra metálica, e o articulado sendo três pecas de concreto unidas por fios de aço. (BRINA, 1979).

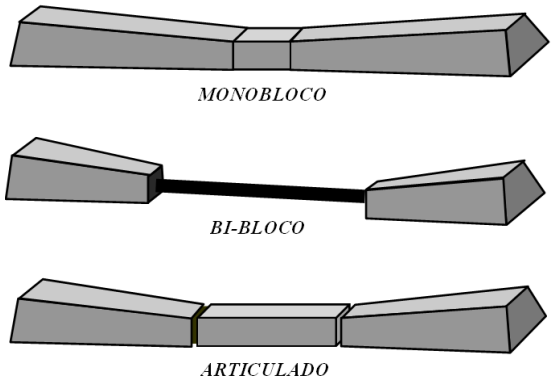


Figura A10 – Representação dos dormentes de concreto.
Fonte: Autor.

Quanto às vantagens dos dormentes de concreto: (Idem, 1979).
a) maior estabilidade;
b) economia de lastro;
c) durabilidade (50 anos);
d) maior segurança;
e) fabricação no local.
Quanto às desvantagens dos dormentes de concreto: (Idem, 1979).
a) manuseio difícil;
b) fragilidade ao impacto;
c) custo;
d) danos quando usado trilhos defeituosos.

Há discussões sobre as vantagens e as desvantagens sobre o uso de determinado tipo de dormente, porém devem-se considerar os aspectos da via como a intensidade das cargas e a intensidade de tráfego. A intensidade das cargas está relacionada à resistência do material à sua ruptura, e a intensidade de tráfego relaciona-se com a fadiga do material, isto é, a resistência ao ciclo de carregamentos. Outro aspecto relevante à durabilidade dos dormentes é a boa drenagem da plataforma de terraplenagem, pois o material em contato direto com água está mais suscetível à deterioração.

1.4 Acessórios

Constituem os acessórios de uma via férrea as talas de junção, as placas de apoio, as fixações, os *railpads*, os aparelhos de mudança de via, etc. As talas de junção servem para unir os trilhos longitudinalmente, são duas peças de aço posicionadas em ambos os lados das almas dos dois trilhos e fixadas por parafusos e porcas que transpassam estas estruturas. As placas de apoio, também servem para aumentar a área de apoio do trilho no dormente, diminuindo-se a pressão no dormente, e a tendência de corte das arestas do patim do trilho sobre o dormente. Os acessórios de fixação são os parafusos, arruelas, porcas, pregos, *tirefonds*, grampos, retensores, etc. (BRINA, 1979). Nota-se que para cada tipo de dormente há um tipo específico de acessório de fixação dos trilhos. A Figura A11 mostra alguns destes acessórios.

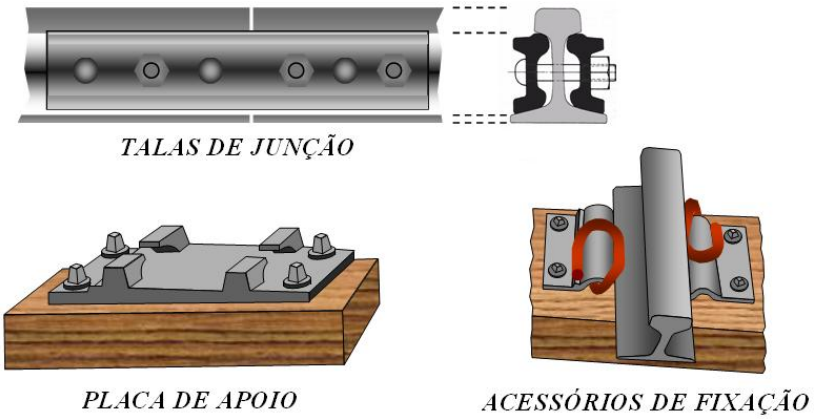


Figura A11 – Representação dos acessórios.
Fonte: Autor.

Em uma ferrovia constituída de dormentes de concreto, os *railpads* são dispostos entre os trilhos e os dormentes. Os *railpads* protegem os dormentes dos impactos e proporcionam o isolamento elétrico dos trilhos. Em ferrovias com dormentes de madeira, não há a necessidade deste uso. (DAHLBERG, 2006). Este aparelho de apoio, também é conhecido como atenuador viscoelástico de vibrações. A Figura A12 mostra um trilho fixado ao dormente de concreto e a disposição do *railpad*.

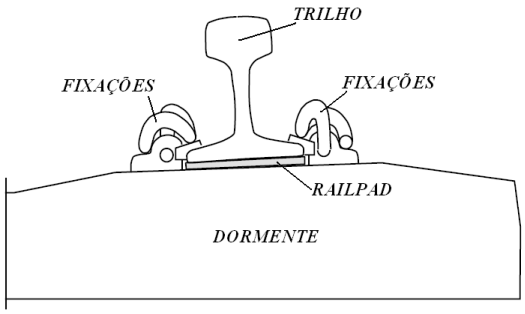


Figura A12 – Disposição do *railpad*.
Fonte: Adaptado de (DAHLBERG, 2006).

Os aparelhos de mudança de via (AMV) têm a função basicamente de desviar o tráfego ferroviário de uma linha para outra, permitindo manobras e possibilitando o tráfego sem interrupção das linhas. Seu uso é mais freqüente nos terminais ferroviários e nos pátios de manobra. A Figura A13 representa um aparelho de mudança de via e seus componentes.

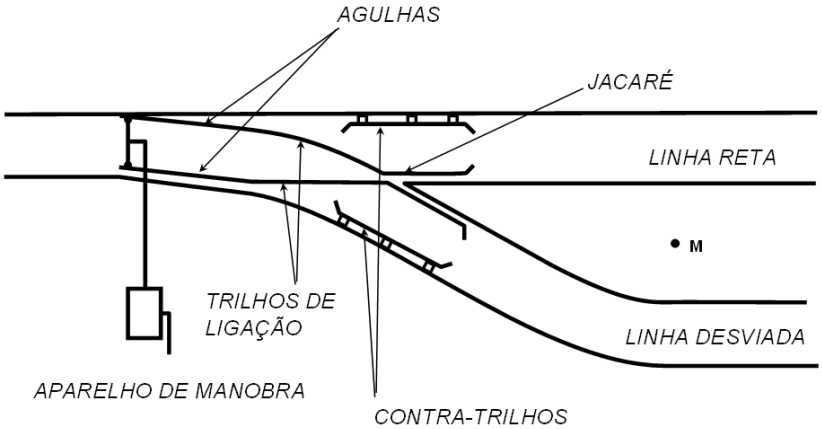


Figura A13 – Representação de um aparelho de mudança de via e seus componentes.
Fonte: Autor.

1.5 Lastro

O lastro situa-se entre os dormentes e o sublastro, e tem como função: (BRINA, 1979).
a) distribuir sobre a plataforma os esforços dos veículos;
b) formar suporte elástico;
c) superfície uniforme para os dormentes e trilhos;
d) impedir os deslocamentos dos dormentes (longitudinal e transversal);
e) facilitar a drenagem.

A pedra britada é o melhor tipo de lastro, comparado a terra, a areia, ao cascalho e as escórias. De preferência, escolhem-se para a britagem as rochas duras. As mais utilizadas na britagem são: arenito, calcário, mármore, dolomita, micaxisto, quartzito, diorito, basalto, diabásio, granito, gnaisse. Entretanto, no Brasil o material para o lastro deve atender as especificações da (*AREA*) tais como: peso específico mínimo de (2,7 kg/dm³), resistência à ruptura, ensaio de solubilidade, ensaio de absorção, ensaio de substâncias nocivas, e granulometria variando de (3/4" a 2" 1/2). (Idem, 1979).

1.6 Sublastro

O sublastro situa-se entre o lastro e a plataforma, e tem como função: (BRINA, 1979).
a) aumentar a capacidade de suporte da plataforma de terraplenagem;
b) evitar a penetração do lastro na plataforma;
c) aumentar a resistência do leito à erosão e a penetração da água;
d) permitir relativa elasticidade e regularidade da plataforma.

O material a ser utilizado como sublastro deve atender as características: (Idem, 1979).
a) IG (Índice de Grupo) igual a 0 (zero);
b) LL (Limite de Liquidez) máximo 35;
c) IP (Índice de Plasticidade) máximo 6;
d) grupo A1 da classificação de solos *HRB* (*Highway Research Board*);
e) expansão máxima 1 %;
f) CBR (índice de Suporte Califórnia) mínimo de 30.

Quando um solo não corresponder à estas características, pode-se misturar com outro tipo de solo, de areia, ou outro tipo de agregado. Também se pode substituir por uma mistura de solo cimento, desde que seja economicamente viável. (Idem, 1979).

APÊNDICE B

1 Componentes dos carros e dos vagões

Os carros de passageiros podem ser divididos em carros motores e em carros reboques, ambos são formados por vários componentes, dos quais os principais podem ser representados pelo esquema da Figura B1. Os vagões destinados ao transporte de carga possuem alguns de seus componentes distintos dos componentes dos carros de passageiros. Esta diferenciação será citada durante a descrição dos componentes dos carros e dos vagões na presente sessão.

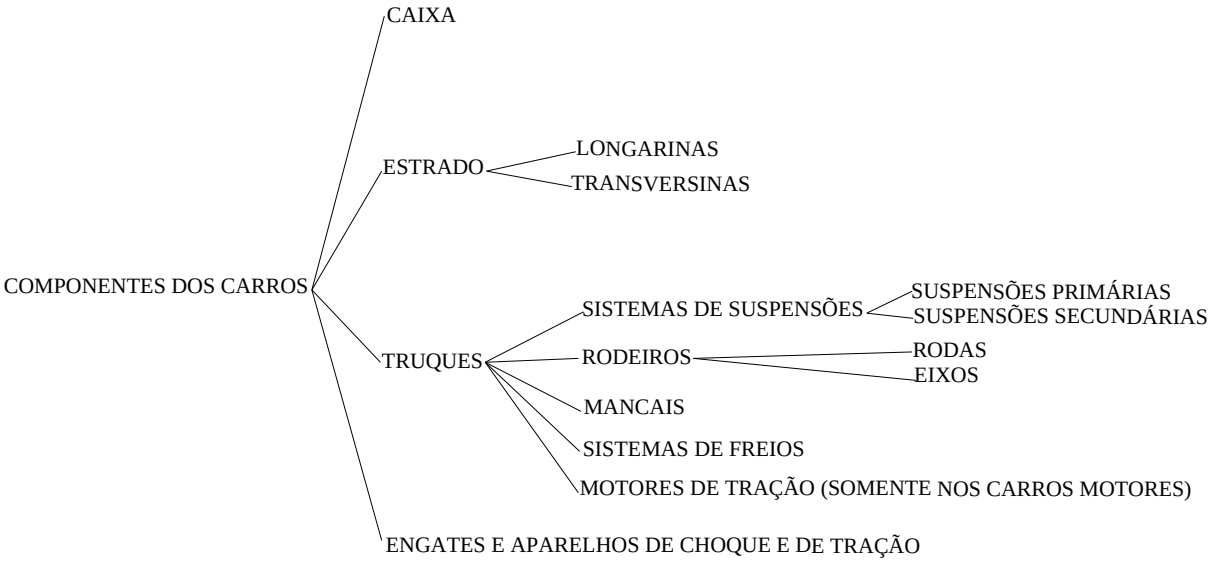


Figura B1 – Componentes dos carros.
Fonte: Autor.

1.1 Caixa

A caixa dos carros modernos é de construção metálica de modo a fornecer condições de conforto e segurança aos passageiros, economia de material, suficiente leveza e fraca resistência aerodinâmica possibilitando o desenvolvimento de elevadas velocidades. (BRINA, 1983). Em princípio, trata-se de uma armação formada por perfis de aço carbono, revestidas por chapas de aço inoxidável, como é o caso dos Veículos Leves Sobre Trilhos, os (VLT's). (CBTU, 2010).

1.2 Estrado

O estrado é a estrutura a qual se assenta a caixa do veículo, e tem as funções de descarregar sobre as rodas o peso da carga, e de transmitir os esforços longitudinais de um veículo ao outro, através dos engates e aparelhos de choque e de tração. Em princípio, trata-se de um conjunto formado por longarinas e transversinas concebendo uma estrutura na forma de grelha. Os estrados modernos são constituídos de estruturas metálicas, e são distintos quando se trata de vagões ou de carros de passageiros. Nos vagões é auto-resistente, isto é, não depende da estrutura da caixa. Nos carros de passageiros modernos a estrutura do estrado é formada conjuntamente com a estrutura da caixa. (BRINA, 1983).

1.3 Truques

Os truques são pequenos veículos constituídos de uma estrutura metálica a qual associa os rodeiros aos sistemas de suspensões. Estes veículos têm a função de receber as cargas dos vagões e dos carros de passageiros, e permitir a inscrição em curvas. A diferença básica entre os truques para os vagões e os truques para os carros de passageiros está compreendida na flexibilidade dos sistemas de suspensões. (BRINA, 1983).

Figura B2 – Truque para vagões de carga tipo *ride contro*l da empresa *amsted-maxion*.
Fonte: Adaptado de (CORREA, 2008).

Os truques *ride control* para vagões de carga surgiram da necessidade de amortecimento dos movimentos oscilatórios aumentados por conta do aumento da velocidade de tráfego destes veículos. Estes truques possuem molas helicoidais duplas, uma externa e outra interna, com curso de 2 ½", no total de 10 por truque. Também possuem cunhas de fricção para atenuar os efeitos de ressonância destas molas. (Idem, 1983).

As exigências quanto à absorção de choques e de vibrações nos truques para os carros de passageiros é ainda maior, de modo a proporcionar conforto aos passageiros. As molas destes truques são elípticas e o amortecimento é feito por atrito entre as lâminas. Nos truques dos carros de passageiros modernos, existe um sistema de suspensão secundária, formado por bolsas de ar comprimido. A diferença básica entre os truques motores e os truques reboques, nos carros de passageiros, consiste na presença dos motores de tração. Todos os truques possuem sistemas de freios que são interligados de veículo a veículo a um único comando central. (Idem, 1983). As Figuras B3 e B4 mostram um truque motor, e um truque reboque para carros de passageiros.

Figura B3 – Truque motor para carros de passageiros.
Fonte: Adaptado de (CORREA, 2003).

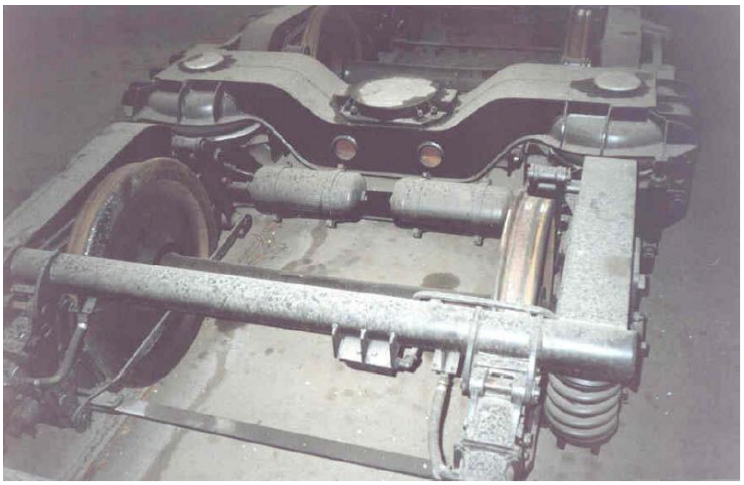


Figura B4 – Truque reboque para carros de passageiros.
Fonte: Adaptado de (CORREA, 2003).

A Tabela B1 mostra os tipos de truques estabelecidos pelas normas brasileiras.

Tabela B1 – Tipos de truques segundo as normas brasileiras.

Número de eixos por truque	**Dimensões de manga em polegadas**	**Designação dos truques**
2	3 3/4 X 7	2*A*
2	4 1/4 X 8	2*B*
2	5 X 9	2*C*
2	5 1/2 X 10	2*D*
2	6 X 11	2*E*
2	6 1/2 X 12	2*F*
3	6 X 11	3*E*
3	6 1/2 X 12	3*F*

Fonte: Adaptado de (BRINA, 1983).

Pelo tipo de truque têm-se segundo as normas brasileiras os seguintes diâmetros das rodas.

Tabela B2 – Diâmetros das rodas segundo as normas brasileiras.

Bitola (m)	**Tipo de truque**	**Diâmetro em mm**
1,00	2*B*	743
1,00	2*C*	743
1,00	2*D*	743
1,60	2*C*	838
1,60	2*D*	838
1,60	2*E*	838
1,60	2*F*	914

Fonte: Adaptado de (BRINA, 1983).

As normas brasileiras também estabelecem as dimensões da base rígida dos truques.

Tabela B3 – Dimensões da base rígida dos truques segundo as normas brasileiras.

Bitola (m)	**Tipos de truques 2*B*, 2*C* e 2*D***	**Truque tipo 2*E***	**Truque tipo 2*F***
1,00	1575 mm	...	...
1,60	1676 mm	1727 mm	1778 mm

Fonte: Adaptado de (BRINA, 1983).

1.3.1 Sistemas de suspensões

Os sistemas de suspensões nos carros de passageiros são basicamente divididos em suspensões primárias, e suspensões secundárias.

1.3.1.1 Suspensões primárias

A suspensão primária de um truque é formada por quatro grupos de quatro molas helicoidais translacionais, ou seja, um grupo de quatro molas em cada ponta de eixo. A suspensão primária fica montada entre os mancais e o chassi do truque, dispondo de calço para a regulagem de altura. (CORREA, 2003). A Figura B5 mostra a ponta de um eixo e a sua respectiva suspensão primária, em um truque para carros de passageiros.

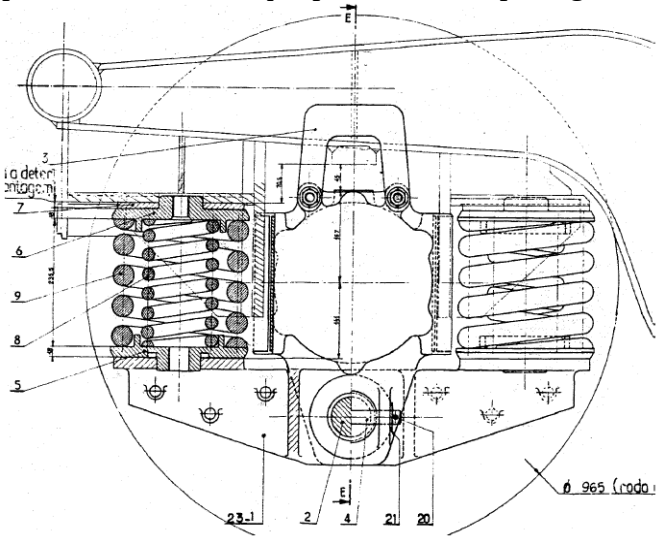


Figura B5 – Ponta de um eixo e suspensão primária, em um truque para carros de passageiros.
Fonte: Adaptado de (CORREA, 2003).

1.3.1.2 Suspensões secundárias

A suspensão secundária é formada por bolsas de ar fixadas entre a caixa do veículo e o chassi do truque. Um batente elástico limita o deslocamento lateral, e um batente rígido limita a deflexão vertical. Dentro das bolsas de ar existe um batente de borracha tipo *sandwich*, que é acionado após um rebaixo de aproximadamente 28 mm, servindo para manter a caixa na posição correta. A suspensão secundária também dispõe de dois amortecedores hidráulicos verticais. (CORREA, 2003). A Figura B6 mostra a suspensão secundária de um truque para carros de passageiros.

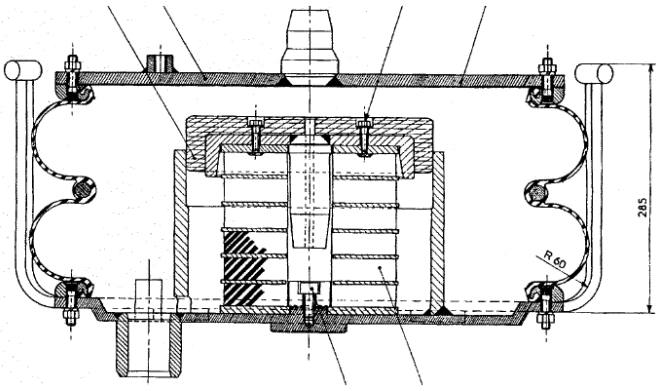


Figura B6 – Suspensão secundária de um truque para carros de passageiros
Fonte: Adaptado de (CORREA, 2003).

1.3.2 Rodeiros

O rodeiro é constituído de um eixo e de duas rodas de mesmo diâmetro que são caladas rigorosamente perpendiculares nas extremidades do referido eixo. (BRINA, 1983). O rodeiro do truque motor possui engrenagem calada ao eixo, a qual será acoplada ao motor de tração. Desta forma, o torque produzido no motor de tração é transmitido à engrenagem, que por sua vez transmite-o ao eixo, o qual o transmitirá às rodas. As Figuras B7 e B8 mostram o rodeiro de um truque reboque, e o rodeiro de um truque motor, respectivamente.

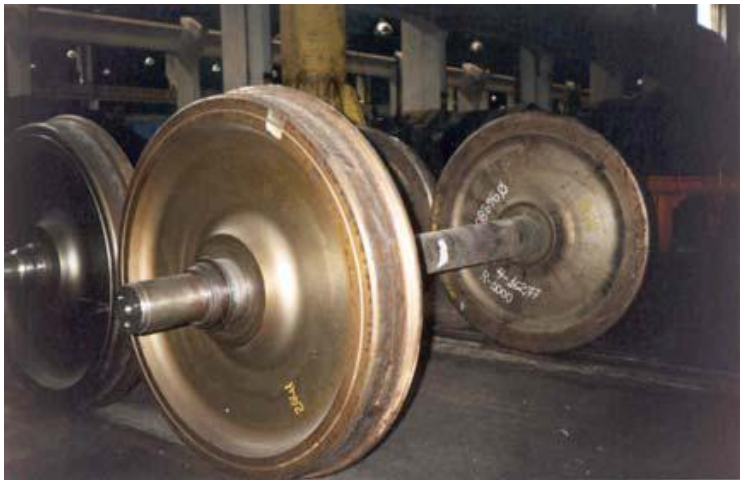


Figura B7 – Rodeiro de um truque reboque.
Fonte: Adaptado de (CORREA, 2008)

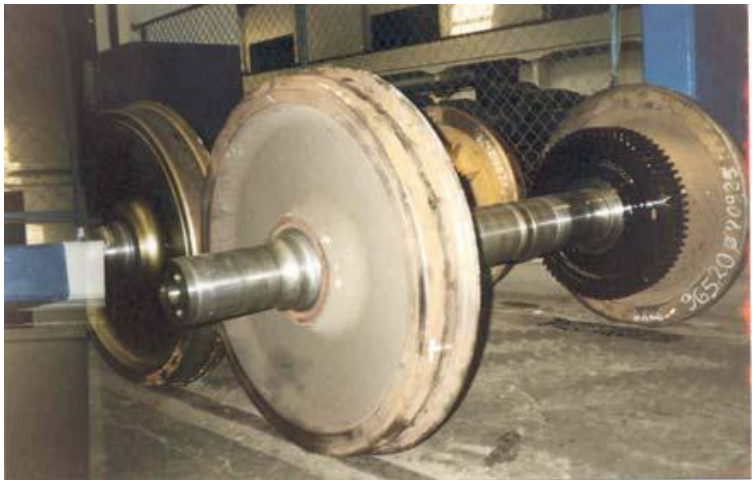


Figura B8 – Rodeiro de um truque motor.
Fonte: Adaptado de (CORREA, 2008).

1.3.2.1 Rodas

A roda pode ser dividida em duas partes principais tais como o aro, e o centro (cubo). O aro submetido ao desgaste exige reparo ou substituição, enquanto que o centro possui maior durabilidade. O centro pode ser cheio ou raiado, porém as rodas raiadas, com grandes velocidades desenvolvidas pelo veículo, levantam pó e prejudicam as condições de lubrificação das peças. As rodas podem ser constituídas de ferro fundido, aço forjado e laminado, e de aço fundido. (BRINA, 1983). A Figura B9 mostra o perfil de uma roda ferroviária com suas respectivas partes.

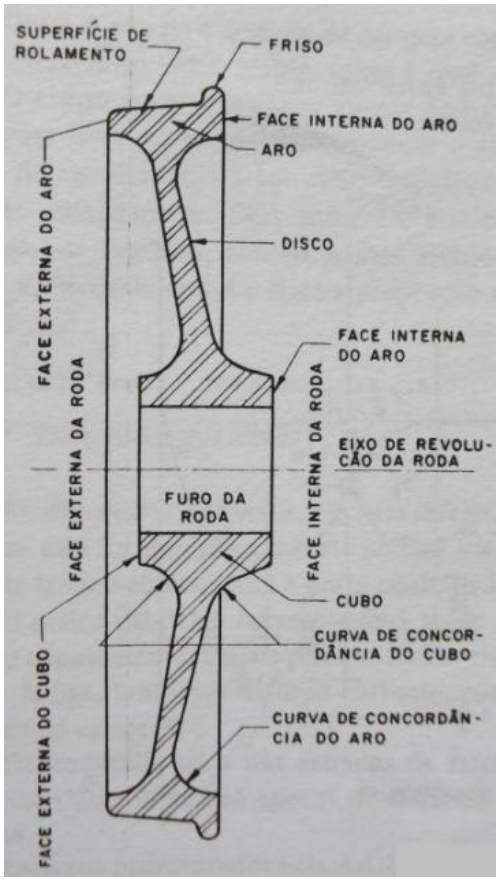


Figura B9 – Perfil de uma roda ferroviária e suas respectivas partes.
Fonte: Adaptado de (BRINA, 1983).

Na fabricação das rodas de ferro fundido, o ferro fundido é vertido em moldes de areia, ficando a periferia das rodas em contato com os moldes de ferro fundido, que resfriam a superfície bruscamente produzindo o endurecimento do metal. As rodas de ferro fundido são utilizadas no Brasil em vagões de até 36 toneladas. Estas possuem menor preço, grande dureza, e maior coeficiente de atrito nas sapatas de freio. As rodas de ferro fundido devem respeitar as exigências brasileiras quanto à composição química, dureza, acabamento, resistência ao choque e ao calor. (BRINA, 1983).

As rodas de aço laminado são utilizadas em locomotivas, carros de passageiros, e vagões, variando sua composição química, tratamento térmico e dimensões, de acordo com sua finalidade. Na fabricação, o aço é aquecido até a temperatura de forjamento e levado à prensa de forjar, e depois aos laminadores, posteriormente, as rodas são submetidas a um resfriamento uniforme e controlado, e conforme o caso recebem um tratamento térmico e a usinagem que for necessária. As rodas de aço são de dois tipos: as ***one wear*** (único uso), utilizadas somente em vagões; e as ***multiple wear*** (múltiplo uso), utilizadas em vagões, carros de passageiros, e locomotivas. (Idem, 1983).

As rodas ***one wear*** suportam um único tratamento antes de serem rejeitadas. Estas rodas obedecem às especificações da *AAR* (*Association of American Railroads*), não sofrem tratamento térmico, mas passam por resfriamento controlado. A composição química destas rodas é: 0,65 a 0,85% de carbono; 0,60 a 0,85% de manganês; máximo de 0,05% de fósforo; máximo de 0,05% de enxofre; e máximo de 0,15% de silício. (Idem, 1983).

Em relação ao acabamento, as rodas ***one wear*** são de duas classes: (Idem, 1983).

Classe 1 – O contorno, a superfície de rolamento e os frisos podem ser laminados em bruto ou usinados, conforme o critério do fabricante;

Classe 2 – A superfície de rolamento e os frisos são obrigatoriamente usinados.

As rodas ***multiple wear*** possuem aro com espessura de 2 ½", permitindo desta maneira, vários torneamentos sucessivos antes de serem rejeitadas. Estas rodas também obedecem as especificações da *AAR* e podem ser fornecidas em quatro classes diferentes:

Classe U – Indicada para serviços gerais, em que a roda sem tratamento térmico é satisfatória;

Classe A – Indicada para alta velocidade, com severas condições de frenamento, porém com cargas moderadas sobre a roda;

Classe B – Indicada para alta velocidade, com severas condições de frenamento e com cargas sobre a roda mais pesadas;

Classe C-1 – Indicada para serviços com condições de frenamento leve, porém com altas cargas sobre a roda;

Classe C-2 – Indicada para serviços com condições severas de frenamento, mas para freios fora da superfície de rolamento da roda (freio de disco).

O aro é a parte da roda que proporciona a superfície de rodagem da roda sobre o boleto do trilho. Nos aros, existe um rebordo ou friso saliente do lado de dentro da via, este também é chamado de flange. A superfície de rodagem apresenta uma certa inclinação sobre a horizontal, a conicidade, que geralmente tem uma inclinação de 1:20 no centro do aro, e sobre uma distância de 55 a 65 mm, e 1:10, no extremo oposto ao friso. Esta dupla conicidade (somente em rodas de ferro fundido) tende a reduzir a formação de sulcos devido ao desgaste, aumentando desta maneira, a vida útil dos aros antes de torneá-los. O torneamento os aros das rodas realiza-se aproximadamente a cada 100.000 quilômetros, conforme a qualidade da roda, o peso por eixo, e o traçado da via. (BRINA, 1983). As Figuras B10 e B11 mostram os contornos das rodas de aço laminado, e de ferro fundido, respectivamente.

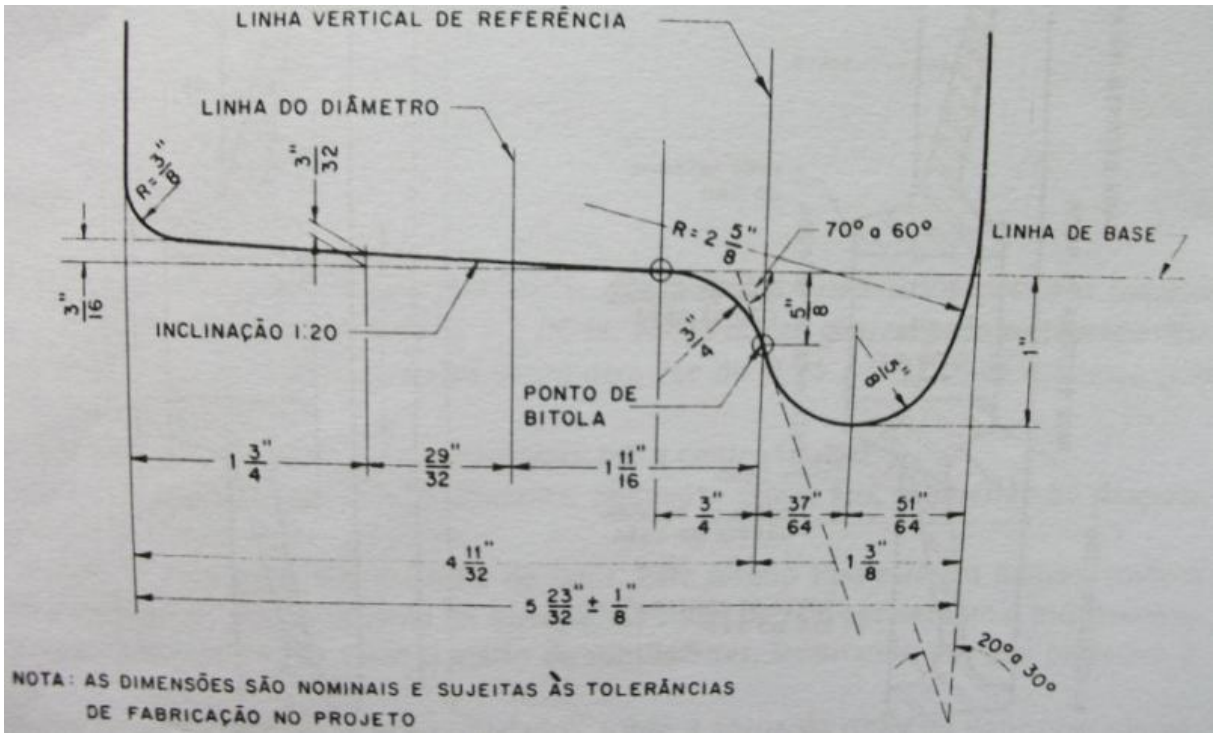


Figura B10 – Contorno da superfície de rolamento e do friso da roda de aço laminado.
Fonte: Adaptado de (BRINA, 1983).

A largura do aro varia de 133 a 145 mm, e também deve ser torneada, quando se desgasta com o uso. Os frisos têm uma altura de 25 a 27 mm, e espessura de 29 a 35 mm. (Idem, 1983).

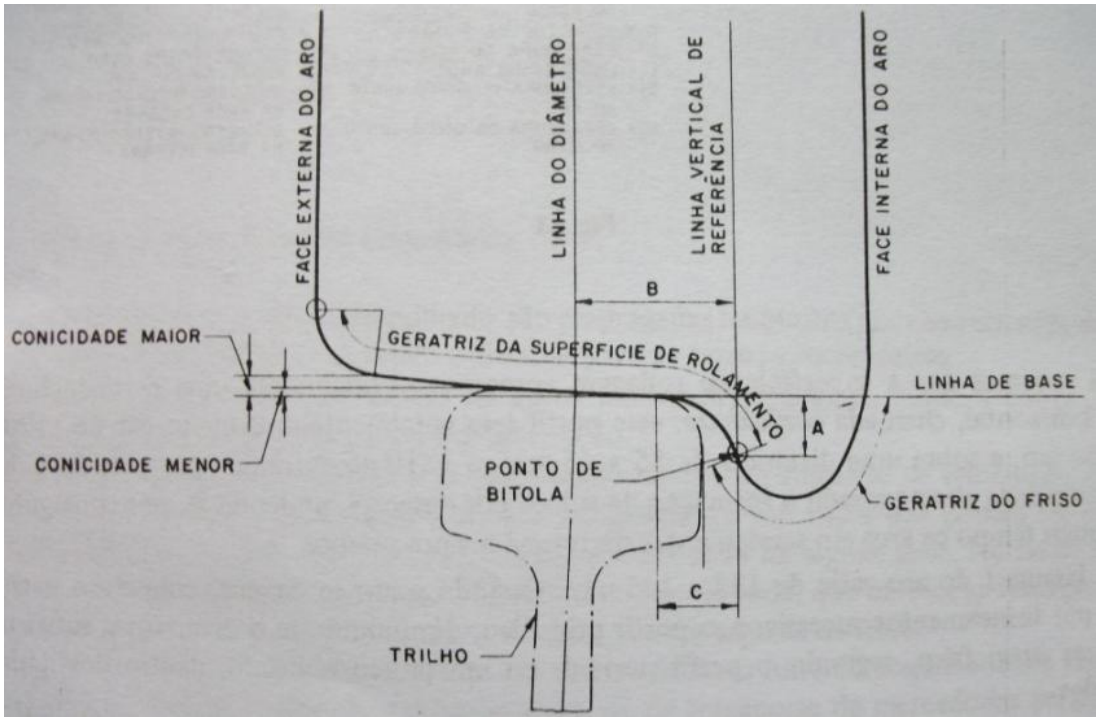


Figura B11 – Contorno da superfície de rolamento e do friso da roda de ferro fundido.
Fonte: Adaptado de (BRINA, 1983).

1.3.2.2 Eixos

O eixo recebe as cargas verticais em seu prolongamento externamente às rodas. Um eixo é composto por três partes: o fuste ou corpo do eixo; as seções de calagem das rodas; e as mangas. (BRINA, 1983). A Figura B12 mostra um eixo ferroviário com suas partes.

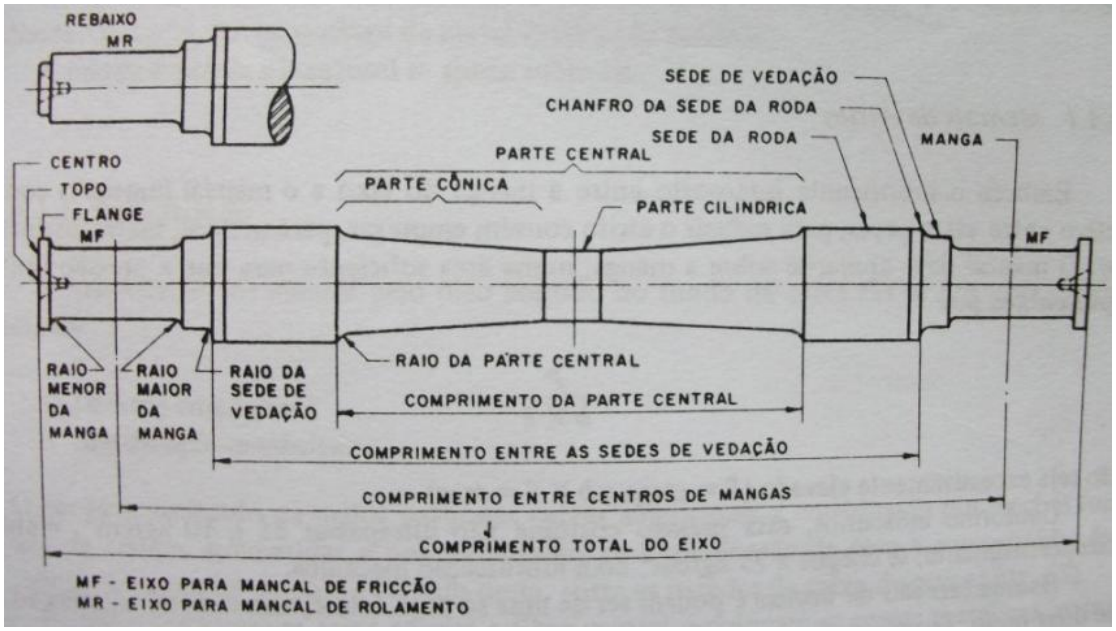


Figura B12 – Eixo ferroviário e suas principais partes.
Fonte: Adaptado de (BRINA, 1983).

Os eixos são geralmente constituídos de aço, com resistência mínima de 45 a 55 kg/mm², e alongamento de 25 a 18%. De modo a aumentar a resistência e, ao mesmo tempo reduzir o peso, utilizam-se principalmente em eixos de locomotivas, as ligas de aço níquel, com 1 a 7%

de níquel, e ligeira proporção de manganês. As resistências deste eixo, de aço níquel, oscilam entre 60 e 90 kg/mm².(BRINA, 1983).

Os eixos utilizados nas estradas de ferro brasileiras têm as dimensões padronizadas pela *AAR*, na qual são designados pelas dimensões de suas mangas, e pelo peso bruto máximo do vagão (supondo-se vagões de quatro eixos). (Idem, 1983).

Tabela B4 – Dimensões dos eixos utilizados no Brasil.

	Mangas	**Peso bruto máximo do vagão (tara + carga útil)**
A	3 3/4" X 7"	30 toneladas
B	4 1/4" X 8"	47 toneladas
C	5" X 9"	64 toneladas
D	5 1/2" X 10"	80 toneladas
E	6" X 11"	100 toneladas
F	6 1/2" X 12"	119 toneladas

Fonte: Adaptado de (BRINA, 1983).

1.3.3 Mancais

Os mancais são estruturas que transmitem as cargas aos eixos através das mangas. Os mancais podem ser de dois tipos: mancais de fricção; e mancais de rolamento. Nos mancais de fricção, as mangas ficam encerradas dentro de uma caixa hermeticamente fechada e lubrificada, a chamada caixa do mancal. Nos mancais de rolamento, o acoplamento entre as mangas dos eixos e a caixa do mancal é realizado através de rolamentos. Desta forma, o atrito de deslizamento (nos mancais de fricção), é substituído pelo atrito de rolamento, de esferas, ou de rolos, dependendo-se do tipo de rolamento a ser empregado. (BRINA, 1983). A Figura B13 mostra um mancal de fricção, e a Figura B14 mostra um mancal de rolamento.

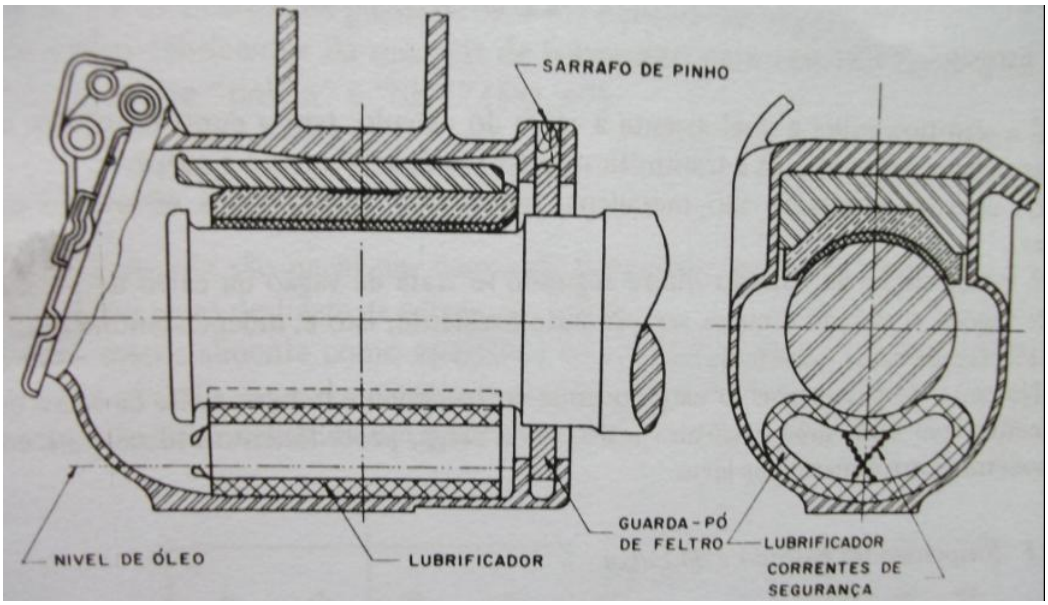


Figura B13 – Mancal de fricção.
Fonte: Adaptado de (BRINA, 1983).

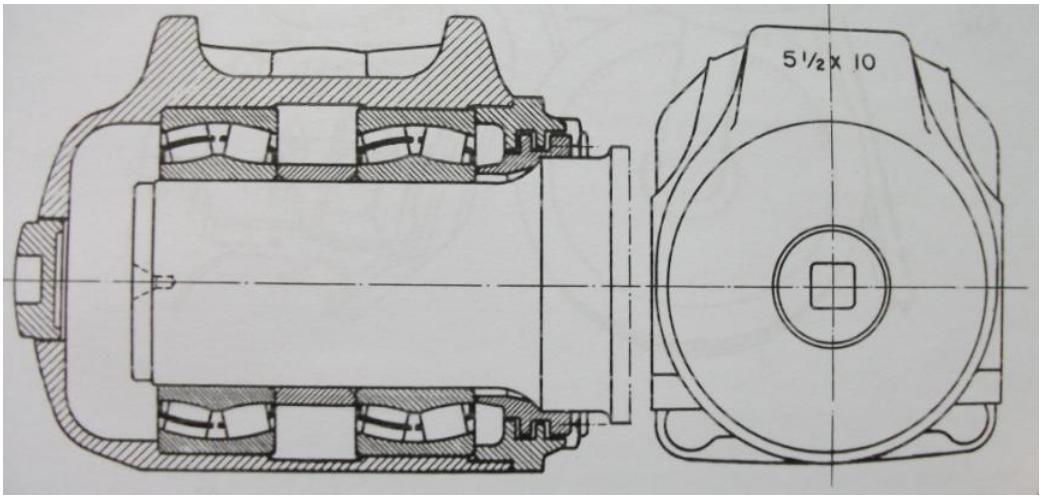


Figura B14 – Mancal de rolamento.
Fonte: Adaptado de (BRINA, 1983).

1.3.4 Sistemas de freios

Os sistemas de freios são classificados quanto ao seu esforço de acionamento em: pneumático; elétrico; eletro-pneumático; hidro-pneumático; e manual. O freio pneumático pode ainda ser: a vácuo; a ar comprimido; e combinado ar comprimido e vácuo. O sistema de freio elétrico pode ser: reostático, quando a energia elétrica obtida pelo freio é transformada em calor através de resistência elétrica, (efeito *Joule*); ou de recuperação, quando a energia elétrica obtida pelo freio é enviada à catenária ou ao terceiro trilho, (sistema de eletrificação). (NBR 7603, 1982).

Quanto ao carregamento e/ou a velocidade do veículo, os sistemas de freios são ainda classificados em: de capacidade única, quando a força máxima de frenagem disponível é invariável, não dependendo, portanto, do peso do veículo ou de sua velocidade no momento em que o freio é aplicado; e de capacidade múltipla, quando a força máxima de frenagem disponível é variável com o peso do veículo, e com a sua velocidade no momento em que o freio é aplicado. Os sistemas de freios têm ainda a classificação quanto ao seu modo de atuação: a disco, quando a força de frenagem é aplicada a um disco; a sapata, quando a força de frenagem é aplicada por uma sapata à roda; dinâmico, quando a força de frenagem é aplicada ao eixo motor, através do motor de tração; magnético, quando a força de frenagem é aplicada às fiadas de trilhos; e de cremalheira, quando a força de frenagem é aplicada por roda dentada à cremalheira. (NBR 7603, 1982).

1.3.5 Motores de tração

Os motores de tração elétricos, dos carros motores, ficam localizados nos truques, e possuem comando individual, ou seja, existe um motor de tração para cada eixo. No sistema de alimentação elétrica destes motores, e também nos motores das locomotivas elétricas, a energia elétrica é colhida da rede elétrica aérea (catenária) através de um pantógrafo, ou por meio do terceiro trilho através de uma sapata lateral. Os trens unidades de passageiros do sistema de transporte metropolitano utilizam o mesmo princípio. A maioria dos sistemas de eletrificação aérea no Brasil utiliza a corrente contínua de 3.000 volts, e com o terceiro trilho operando com uma corrente contínua de 750 volts. (BRINA,1983), (ANTF, 2010).

1.4 Engates e aparelhos de choque e de tração

Os veículos de uma composição ferroviária devido as constantes acelerações e frenagens geram afastamentos e aproximações, respectivamente, ou seja, deslocamentos, velocidades e acelerações relativas entre eles. Estes afastamentos e aproximações dão origem aos esforços longitudinais de tração e de compressão, respectivamente, que são transmitidos através de seus engates e aparelhos de choque e tração. Cada veículo tem um comportamento dinâmico distinto, pois a aceleração e a frenagem em uma composição ferroviária não ocorrem de maneira simultânea em todos os veículos, mesmo que ocorresse, a resposta dinâmica em cada veículo seria diferente. Suas massas podem ser distintas, suas velocidades podem ser distintas, e conseqüentemente suas quantidades de movimento, (*momentum*, ou impulso linear) são distintas. Usando-se o princípio do impulso linear e da quantidade de movimento, tem-se para os (*n*) veículos de uma composição ferroviária:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\vec{F}_i dt = \sum_{i=1}^{n}\int_{v_0}^{v} m_i\vec{v}_i dv. \tag{B.1}$$

Onde a primeira parcela representa o somatório dos impulsos lineares, e a segunda parcela representa as quantidades de movimento dos corpos. Considerando-se que não há variação das massas durante a aplicação dos impulsos lineares, a Equação (B.1) pode ser reescrita como:

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{t_0}^{t}\vec{F}_i dt = \sum_{i=1}^{n} m_i\int_{v_0}^{v}\vec{v}_i dv. \tag{B.2}$$

Os esforços da primeira parcela devido aos impulsos lineares são os esforços longitudinais de tração e de compressão produzidos nos engates e aparelhos de choque e tração. Pelo princípio do impulso linear e da quantidade de movimento, estes esforços longitudinais que irão produzir as variações das velocidades dos veículos, ou seja, as velocidades relativas, uma vez que as massas não variam suas quantidades durante a aplicação dos impulsos lineares.

Os aparelhos de choque e tração utilizados no Brasil são do tipo americano, ou seja, o engate central automático, de grande resistência e jogo reduzido, adotado a mais de 50 anos na América. Este aparelho é destinado à formação de composições de elevada tonelagem, sua resistência à ruptura está em torno de 240 toneladas, e o limite elástico na ordem de 150 toneladas. O curso do aparelho de choque e tração é fixado pelas normas brasileiras em 66 mm para a bitola métrica (1,00 m), e 82 mm para a bitola larga (1,60 m). A folga entre os engates nos trens de carga é da ordem de ¾", podendo-se ainda reduzir este valor. Esta folga facilita a transmissão dos esforços de veículo a veículo quando a locomotiva avança, pois se não houvesse folga, o esforço de tração seria muito elevado para vencer a inércia dos veículos. Nos trens de passageiros não se deixa folga entre os engates, pois este tipo de composição é mais leve e conseqüentemente os esforços de tração e de compressão são menores. A altura-padrão dos engates, segundo as normas da R.F.F.SA. medida do boleto dos trilhos ao centro da haste do engate é de 75 cm para a bitola métrica (1,00 m), e de 99 cm para a bitola larga (1,60 m). (BRINA, 1983).

Estes aparelhos são compostos por um engate elástico automático para formar a composição, um aparelho de tração constituído por uma barra elástica para transmitir este tipo de esforço, e por uma forte mola helicoidal ou um amortecedor de fricção para amortecer os esforços de compressão. (Idem, 1983).

O acoplamento entre os veículos ocorre automaticamente através do contato entre as mandíbulas dos engates, que estão deslocadas para um lado, ou seja, abertas, permitindo-se que uma encaixe-se na outra. Durante o engate, uma castanha interna encaixa-se em um orifício interno à mandíbula do veículo seguinte e vice-versa, impedindo-se que as mandíbulas se abram. Nesta situação, as cabeças ficam presas uma na outra. (Idem, 1983), (VFCO, 2010). A Figura B15 mostra o acoplamento entre os engates.

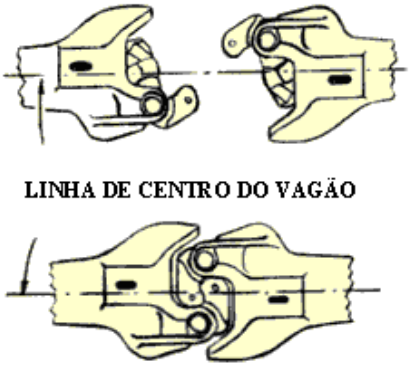


Figura B15 – Acoplamento entre os engates.
Fonte: Adaptado de (VFCO, 2010).

Para desacoplar, puxa-se uma barra que vai do engate até a lateral do vagão, acionando-se desta forma uma alavanca, liberando-se a castanha e soltando-se a mandíbula, que é automaticamente deslocada para o lado, ou seja, aberta. (BRINA, 1983), (VFCO, 2010). A Figura B16 mostra o acionamento da alavanca para o desacoplamento entre os engates.

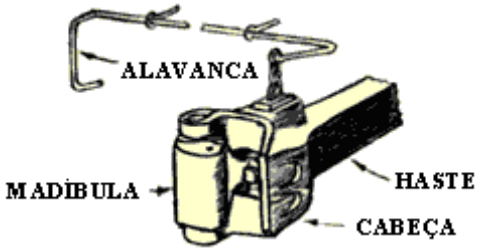


Figura B16 – Desacoplamento entre os engates.
Fonte: Adaptado de (VFCO, 2010).

APÊNDICE C

1 Equação matricial do veículo ferroviário

$$[M_V]\{\ddot{U}_V(t)\}+[C_V]\{\dot{U}_V(t)\}+[K_V]\{U_V(t)\}=\{P_V(t)\}$$

1.1 Matriz de massa [M_V]

Coeficientes:

Mv(1,1) = mcb;
Mv(2,2) = ircb;
Mv(3,3) = ipcb;
Mv(4,4) = mfb;
Mv(5,5) = irfb;
Mv(6,6) = ipfb;
Mv(7,7) = mrb;
Mv(8,8) = irrb;
Mv(9,9) = iprb;
Mv(10,10) = mw;
Mv(11,11) = mw;
Mv(12,12) = irw;
Mv(13,13) = iyw;
Mv(14,14) = mw;
Mv(15,15) = mw;
Mv(16,16) = irw;
Mv(17,17) = iyw;
Mv(18,18) = mw;
Mv(19,19) = mw;
Mv(20,20) = irw;
Mv(21,21) = iyw;
Mv(22,22) = mw;
Mv(23,23) = mw;
Mv(24,24) = irw;
Mv(25,25) = iyw;

1.2 Matriz de amortecimento [C_V]

Coeficientes:

Cv(1,1) = (4 * cs);
Cv(1,4) = (-2 * cs);
Cv(1,7) = (-2 * cs);
Cv(2,2) = (4 * (dc ^ 2) * cs);
Cv(2,5) = (-2 * (dc ^ 2) * cs);
Cv(2,8) = (-2 * (dc ^ 2) * cs);
Cv(3,3) = (4 * (da ^ 2) * cs);
Cv(3,4) = (2 * da * cs);
Cv(3,7) = (-2 * da * cs);
Cv(4,1) = Cv(1,4);

```
Cv(4,3) = Cv(3,4);
Cv(4,4) = (4 * cp) + (2 * cs);
Cv(4,10) = (-2 * cp);
Cv(4,14) = (-2 * cp);
Cv(5,2) = Cv(2,5);
Cv(5,5) = (4 * (dc ^ 2) * cp) + (2 * (dc ^ 2) * cs);
Cv(5,12) = (-2 * (dc ^ 2) * cp);
Cv(5,16) = (-2 * (dc ^ 2) * cp);
Cv(6,6) = (4 * (db ^ 2) * cp);
Cv(6,10) = (2 * db * cp);
Cv(6,14) = (-2 * db * cp);
Cv(7,1) = Cv(1,7);
Cv(7,3) = Cv(3,7);
Cv(7,7) = (4 * cp) + (2 * cs);
Cv(7,18) = (-2 * cp);
Cv(7,22) = (-2 * cp);
Cv(8,2) = Cv(2,8);
Cv(8,8) = (4 * (dc ^ 2) * cp) + (2 * (dc ^ 2) * cs);
Cv(8,20) = (-2 * (dc ^ 2) * cp);
Cv(8,24) = (-2 * (dc ^ 2) * cp);
Cv(9,9) = (4 * (db ^ 2) * cp);
Cv(9,18) = (2 * db * cp);
Cv(9,22) = (-2 * db * cp);
Cv(10,4) = Cv(4,10);
Cv(10,6) = Cv(6,10);
Cv(10,10) = (2 * cp);
Cv(11,11) = cl;
Cv(12,5) = Cv(5,12);
Cv(12,12) = (2 * (dc ^ 2) * cp);
Cv(13,13) = (2 * (dc ^ 2) * ch);
Cv(14,4) = Cv(4,14);
Cv(14,6) = Cv(6,14);
Cv(14,14) = (2 * cp);
Cv(15,15) = cl;
Cv(16,5) = Cv(5,16);
Cv(16,16) = (2 * (dc ^ 2) * cp);
Cv(17,17) = (2 * (dc ^ 2) * ch);
Cv(18,7) = Cv(7,18);
Cv(18,9) = Cv(9,18);
Cv(18,18) = (2 * cp);
Cv(19,19) = cl;
Cv(20,8) = Cv(8,20);
Cv(20,20) = (2 * (dc ^ 2) * cp);
Cv(21,21) = (2 * (dc ^ 2) * ch);
Cv(22,7) = Cv(7,22);
Cv(22,9) = Cv(9,22);
Cv(22,22) = (2 * cp);
Cv(23,23) = cl;
Cv(24,8) = Cv(8,24);
Cv(24,24) = (2 * (dc ^ 2) * cp);
Cv(25,25) = (2 * (dc ^ 2) * ch);
```

1.3 Matriz de rigidez [K_V]

Coeficientes:

```
Kv(1,1) = (4 * ks);
Kv(1,4) = (-2 * ks);
Kv(1,7) = (-2 * ks);
Kv(2,2) = (4 * (dc ^ 2) * ks);
Kv(2,5) = (-2 * (dc ^ 2) * ks);
Kv(2,8) = (-2 * (dc ^ 2) * ks);
Kv(3,3) = (4 * (da ^ 2) * ks);
Kv(3,4) = (2 * da * ks);
Kv(3,7) = (-2 * da * ks);
Kv(4,1) = Kv(1,4);
Kv(4,3) = Kv(3,4);
Kv(4,4) = (4 * kp) + (2 * ks);
Kv(4,10) = (-2 * kp);
Kv(4,14) = (-2 * kp);
Kv(5,2) = Kv(2,5);
Kv(5,5) = (4 * (dc ^ 2) * kp) + (2 * (dc ^ 2) * ks);
Kv(5,12) = (-2 * (dc ^ 2) * kp);
Kv(5,16) = (-2 * (dc ^ 2) * kp);
Kv(6,6) = (4 * (db ^ 2) * kp);
Kv(6,10) = (2 * db * kp);
Kv(6,14) = (-2 * db * kp);
Kv(7,1) = Kv(1,7);
Kv(7,3) = Kv(3,7);
Kv(7,7) = (4 * kp) + (2 * ks);
Kv(7,18) = (-2 * kp);
Kv(7,22) = (-2 * kp);
Kv(8,2) = Kv(2,8);
Kv(8,8) = (4 * (dc ^ 2) * kp) + (2 * (dc ^ 2) * ks);
Kv(8,20) = (-2 * (dc ^ 2) * kp);
Kv(8,24) = (-2 * (dc ^ 2) * kp);
Kv(9,9) = (4 * (db ^ 2) * kp);
Kv(9,18) = (2 * db * kp);
Kv(9,22) = (-2 * db * kp);
Kv(10,4) = Kv(4,10);
Kv(10,6) = Kv(6,10);
Kv(10,10) = (2 * kp);
Kv(11,11) = kl;
Kv(12,5) = Kv(5,12);
Kv(12,12) = (2 * (dc ^ 2) * kp);
Kv(13,13) = (2 * (dc ^ 2) * kh);
Kv(14,4) = Kv(4,14);
Kv(14,6) = Kv(6,14);
Kv(14,14) = (2 * kp);
Kv(15,15) = kl;
Kv(16,5) = Kv(5,16);
Kv(16,16) = (2 * (dc ^ 2) * kp);
Kv(17,17) = (2 * (dc ^ 2) * kh);
Kv(18,7) = Kv(7,18);
Kv(18,9) = Kv(9,18);
```

```
Kv(18,18) = (2 * kp);
Kv(19,19) = kl;
Kv(20,8) = Kv(8,20);
Kv(20,20) = (2 * (dc ^ 2) * kp);
Kv(21,21) = (2 * (dc ^ 2) * kh);
Kv(22,7) = Kv(7,22);
Kv(22,9) = Kv(9,22);
Kv(22,22) = (2 * kp);
Kv(23,23) = kl;
Kv(24,8) = Kv(8,24);
Kv(24,24) = (2 * (dc ^ 2) * kp);
Kv(25,25) = (2 * (dc ^ 2) * kh);
```

1.4 Vetor de deslocamento $\{U_V(t)\}$

BCB
RCB
PCB
BFB
RFB
PFB
BRB
RRB
PRB
*BW*1
*LW*1
*RW*1
*YW*1
*BW*2
*LW*2
*RW*2
*YW*2
*BW*3
*LW*3
*RW*3
*YW*3
*BW*4
*LW*4
*RW*4
*YW*4

1.5 Vetor de forças $\{P_V(t)\}$

```
Fv(1,:) = 0;
Fv(2,:) = 0;
Fv(3,:) = 0;
Fv(4,:) = (((IV1dot + IV2dot + IV3dot + IV4dot) * cp) + ((IV1 + IV2 + IV3 + IV4) * kp));
Fv(5,:) = (((-IV1dot + IV2dot - IV3dot + IV4dot) * cp * dc) + ((-IV1 + IV2 - IV3 + IV4) * kp * dc));
Fv(6,:) = (((-IV1dot - IV2dot + IV3dot + IV4dot) * cp * db) + ((-IV1 - IV2 + IV3 + IV4) * kp * db));
Fv(7,:) = (((IV5dot + IV6dot + IV7dot + IV8dot) * cp) + ((IV5 + IV6 + IV7 + IV8) * kp));
```

```
Fv(8,:) = (((-IV5dot + IV6dot - IV7dot + IV8dot) * cp * dc) + ((-IV5 + IV6 - IV7 + IV8) * kp * dc));
Fv(9,:) = (((-IV5dot - IV6dot + IV7dot + IV8dot) * cp * db) + ((-IV5 - IV6 + IV7 + IV8) * kp * db));
Fv(10,:) = (((-IV1dot - IV2dot) * cp) + ((-IV1 - IV2) * kp));
Fv(11,:) = ((IL1dot * cl) + (IL1 * kl));
Fv(12,:) = (((IV1dot - IV2dot) * cp * dc) + ((IV1 - IV2) * kp * dc));
Fv(13,:) = ((IR1dot * ch * (dc ^ 2) * 2) + (IR1 * kh * (dc ^ 2) * 2));
Fv(14,:) = (((-IV3dot - IV4dot) * cp) + ((-IV3 - IV4) * kp));
Fv(15,:) = ((IL2dot * cl) + (IL2 * kl));
Fv(16,:) = (((IV3dot - IV4dot) * cp * dc) + ((IV3 - IV4) * kp * dc));
Fv(17,:) = ((IR2dot * ch * (dc ^ 2) * 2) + (IR2 * kh * (dc ^ 2) * 2));
Fv(18,:) = (((-IV5dot - IV6dot) * cp) + ((-IV5 - IV6) * kp));
Fv(19,:) = ((IL3dot * cl) + (IL3 * kl));
Fv(20,:) = (((IV5dot - IV6dot) * cp * dc) + ((IV5 - IV6) * kp * dc));
Fv(21,:) = ((IR3dot * ch * (dc ^ 2) * 2) + (IR3 * kh * (dc ^ 2) * 2));
Fv(22,:) = (((-IV7dot - IV8dot) * cp) + ((-IV7 - IV8) * kp));
Fv(23,:) = ((IL4dot * cl) + (IL4 * kl));
Fv(24,:) = (((IV7dot - IV8dot) * cp * dc) + ((IV7 - IV8) * kp * dc));
Fv(25,:) = ((IR4dot * ch * (dc ^ 2) * 2) + (IR4 * kh * (dc ^ 2) * 2));
```

APÊNDICE D

1 Método de *Newmark*

(A) Cálculos iniciais:

1. Formar as matrizes do sistema [*M*], [*C*] e [*K*].
2. Iniciar os vetores com as condições iniciais $\{U\}_{t=0}$, $\{\dot{U}\}_{t=0}$ *e* $\{\ddot{U}\}_{t=0}$
3. Selecionar o passo de tempo (Δt) e os parâmetros (α) e (δ) e calcular as constantes de integração:

$$\delta \geq 0.50; \qquad \alpha \geq 0.25(0.5+\delta)^2;$$

$$a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \qquad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \qquad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \qquad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1;$$

$$a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \qquad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right); \qquad a_6 = \Delta t(1-\delta); \qquad a_7 = \delta \Delta t;$$

4. Formar a matriz de rigidez efetiva [K_{EF}]: $[K_{EF}] = [K] + a_0[M] + a_1[C]$

(B) Para cada passo de tempo (Δt):

1. Cálculo da força efetiva no passo de tempo (t + Δt):

$$\{F_{EF}\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} + [M]\left(a_0\{U\}_t + a_2\{\dot{U}\}_t + a_3\{\ddot{U}\}_t\right) + [C]\left(a_1\{U\}_t + a_4\{\dot{U}\}_t + a_5\{\ddot{U}\}_t\right)$$

2. Resolução do sistema para os deslocamentos no tempo (t + Δt):

$$\{F_{EF}\}_{t+\Delta t} = [K_{EF}]\{U\}_{t+\Delta t}$$

3. Cálculo das acelerações e velocidades no tempo (t + Δt):

$$\{\ddot{U}\}_{t+\Delta t} = a_0\left(\{U\}_{t+\Delta t} - \{U\}_t\right) - a_2\{\dot{U}\}_t - a_3\{\ddot{U}\}_t$$

$$\{\dot{U}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{U}\}_t + a_6\{\ddot{U}\}_t + a_7\{\ddot{U}\}_{t+\Delta t}$$

APÊNDICE E

1 Coeficientes de rigidez de contato de *Kalker*

Os coeficientes de rigidez de contato entre roda e trilho calculados analiticamente por *Kalker*, são obtidos em função dos parâmetros materiais (G_w, G_r, ν_w, ν_r), e dos parâmetros geométricos (a/b), obtidos através da elipse de contato segundo a Teoria de contato de *Hertz*, conforme apresentado no Capítulo 3.

Os valores adotados neste trabalho para os parâmetros materiais são: ($E_w = E_r = E =$ 206,85 GPa), (G_w, $G_r = G =$ E / 2.(1 + ν) = 80,05 GPa), e ($\nu_w = \nu_r = \nu =$ 0,292). Observa-se que o valor (ν = 0,292) é intermediário aos valores (ν = 0,25 e ν = 0,5) apresentados por *Kalker*, desta forma, fez-se a interpolação linear dos coeficientes (C_{11}, C_{22}, C_{23} e C_{33}) para (ν = 0,292), os resultados obtidos são apresentados abaixo:

Tabela E1. Coeficientes de rigidez de contato de *Kalker* (interpolados).

		C_{11}	**C_{22}**	**C_{23}**	**C_{33}**
		ν=0,292	**ν=0,292**	**ν=0,292**	**ν=0,292**
a* / *b **(*b* > *a*)**	0,1	3,57	2,52	0,516	8,855
	0,2	3,61	2,64	0,638	4,504
	0,3	3,67	2,76	0,744	3,088
	0,4	3,75	2,90	0,849	2,396
	0,5	3,82	3,03	0,953	1,979
	0,6	3,92	3,17	1,055	1,710
	0,7	4,00	3,31	1,165	1,517
	0,8	4,10	3,45	1,192	1,378
	0,9	4,20	3,59	1,385	1,270
a* = *b	1,0	4,30	3,72	1,497	1,185
b* / *a **(*a* > *b*)**	0,9	4,40	3,87	1,620	1,102
	0,8	4,54	4,06	1,782	1,026
	0,7	4,71	4,29	1,989	0,946
	0,6	4,95	4,59	2,275	0,868
	0,5	5,27	5,01	2,677	0,791
	0,4	5,74	5,62	3,317	0,714
	0,3	6,51	6,59	4,436	0,636
	0,2	7,95	8,42	6,842	0,557
	0,1	11,90	13,34	15,171	0,476

Fonte: Autor.

De modo a ilustrar a interpolação linear, são apresentados os gráficos abaixo relacionando os valores tabelados com os valores interpolados.

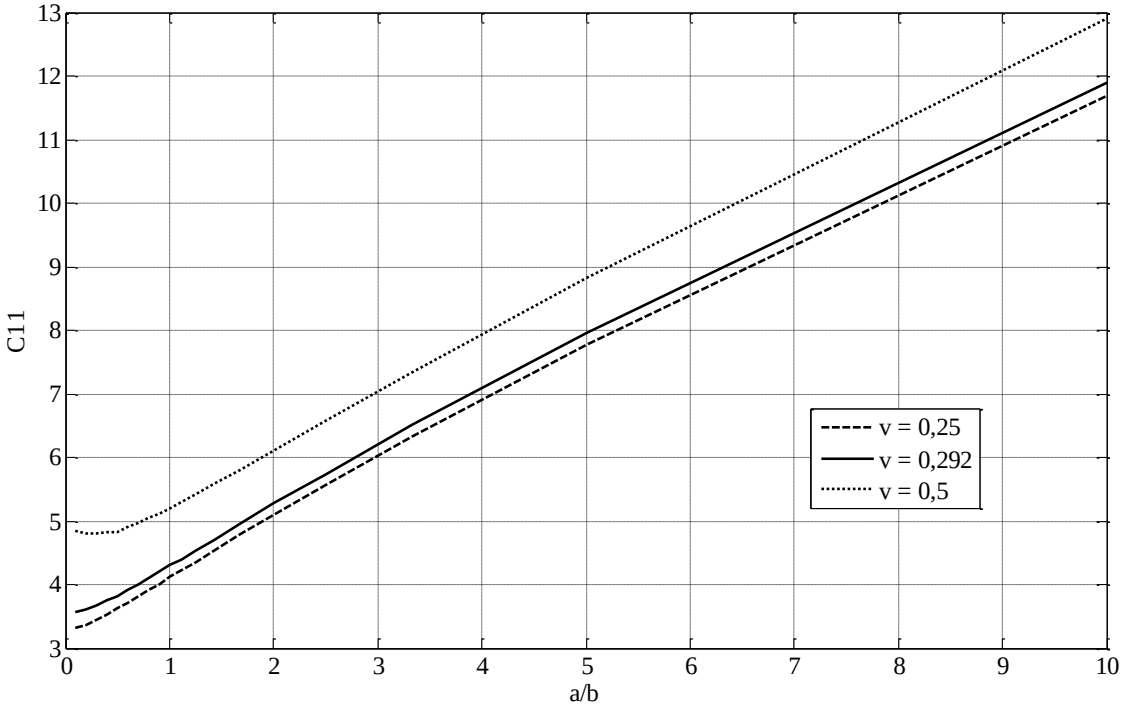


Figura E1 – Interpolação linear do coeficiente C_{11}.
Fonte: Autor.

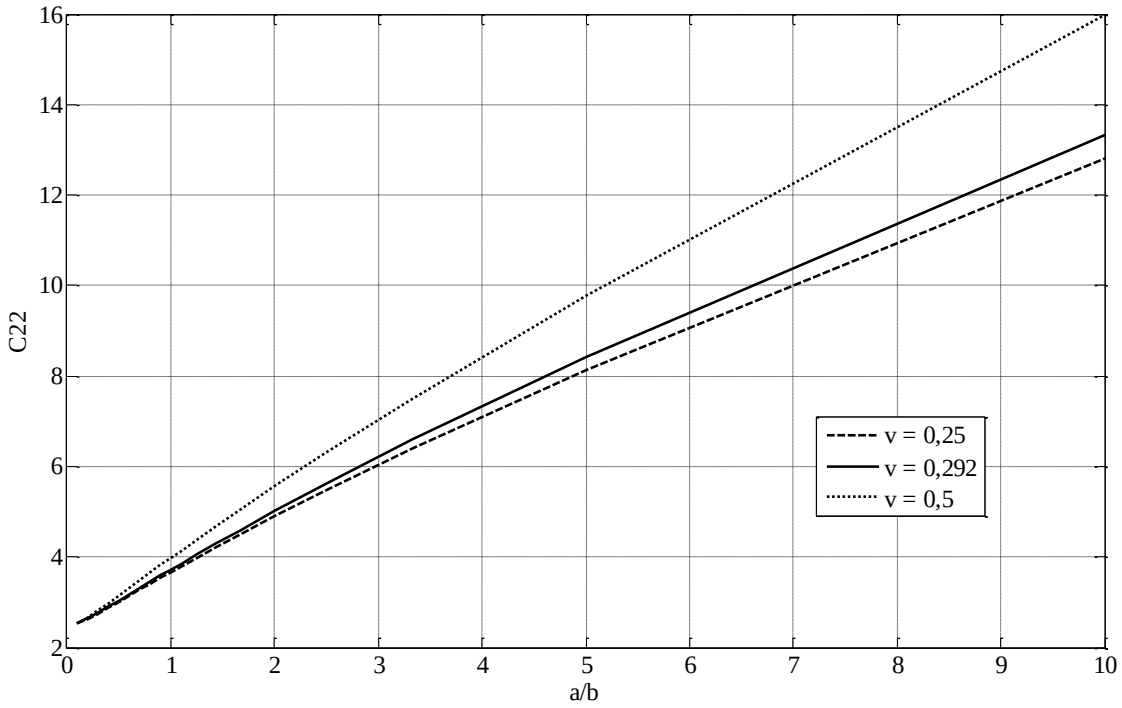


Figura E2 – Interpolação linear do coeficiente C_{22}.
Fonte: Autor.

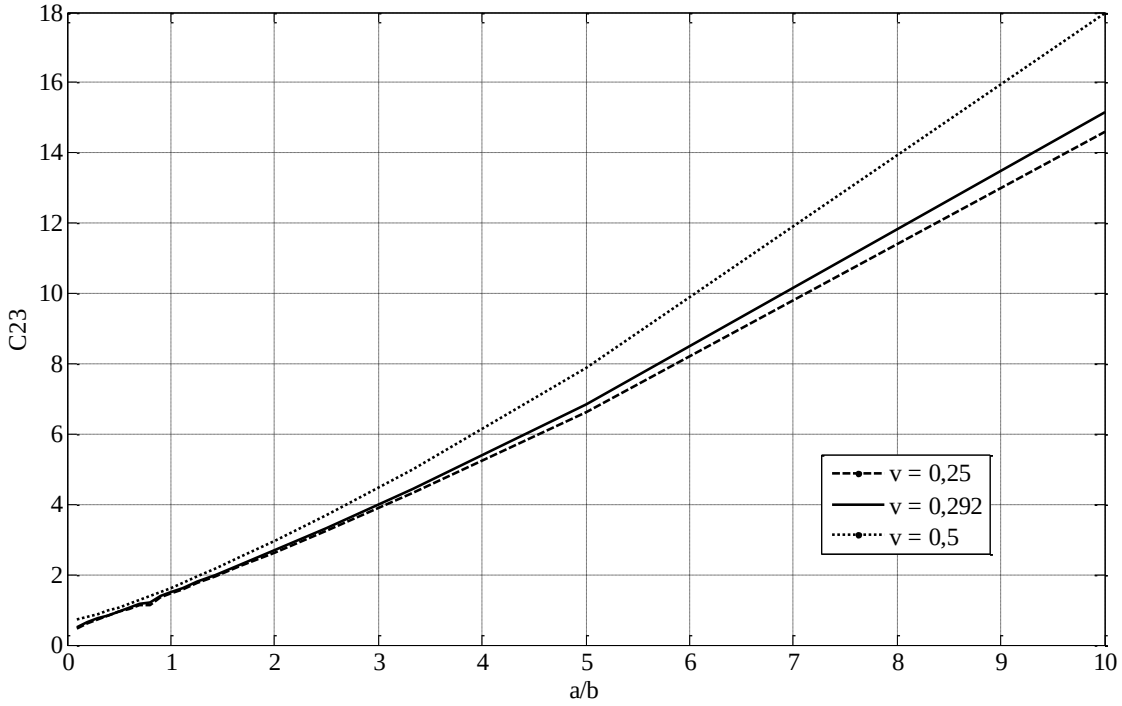


Figura E3 – Interpolação linear do coeficiente C_{23}.
Fonte: Autor.

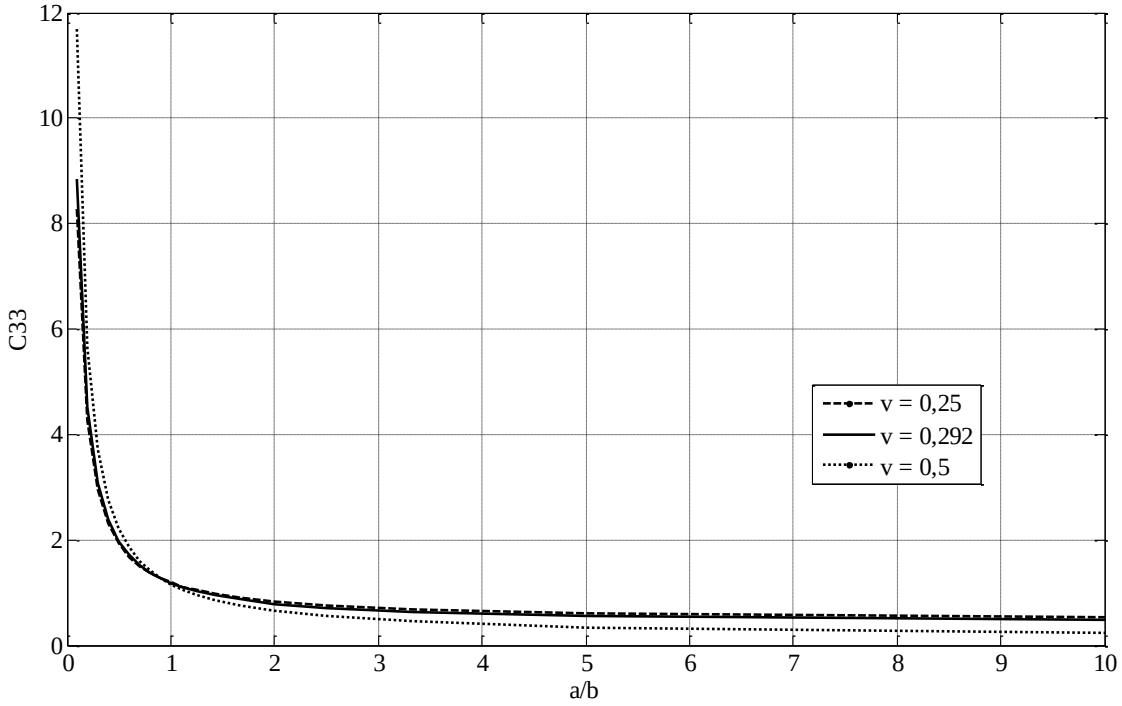


Figura E4 – Interpolação linear do coeficiente C_{33}.
Fonte: Autor.

Uma vez determinado os valores dos coeficientes de *Kalker* mediante a interpolação linear, para determinar os valores intermediários foram realizados ajustes numéricos pelo Método dos Mínimos Quadrados. As equações de ajuste são: polinômios de quarta ordem; polinômios de terceira ordem; e uma equação de potência. Os erros obtidos são mínimos, como mostra o coeficiente ($R^2 \approx 1$) em cada ajuste. A seguir são apresentados os gráficos contendo os valores tabelados, os valores determinados pelas equações de ajuste, as equações de ajuste e os seus respectivos erros obtidos. Tanto as interpolações lineares, quanto o Método dos Mínimos Quadrados, empregados aqui, podem ser encontrados em (BURDEN; FAIRES, 2003).

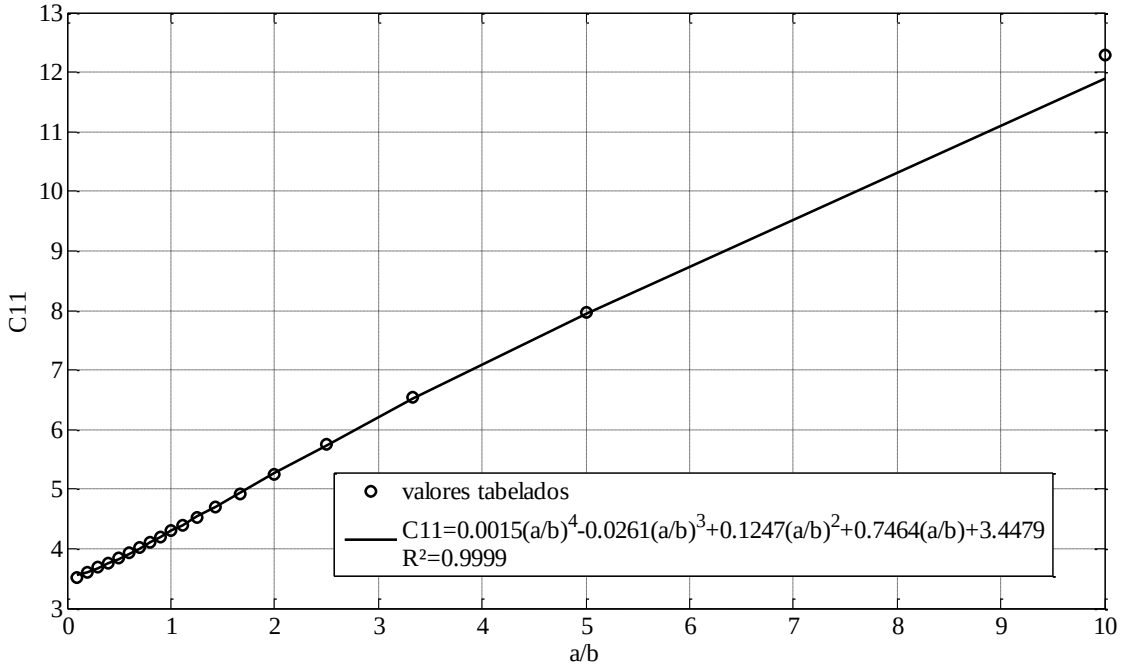


Figura E5 – Ajuste para o coeficiente C_{11}.
Fonte: Autor.

Equação de ajuste: (Polinômio de quarta ordem)

$$C_{11} = 0.0015.(a/b)^4 - 0.0261.(a/b)^3 + 0.1247.(a/b)^2 + 0.7464.(a/b) + 3.4479$$
$$R^2 = 0.9999 \qquad \text{(E.1)}$$

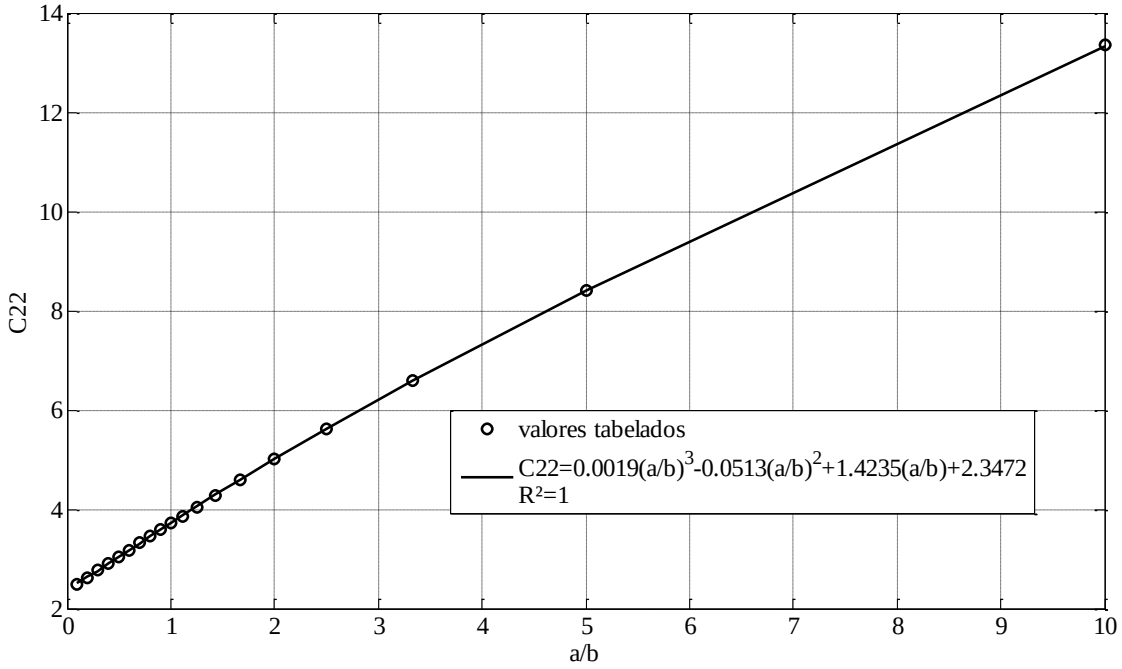


Figura E6 – Ajuste para o coeficiente C_{22}.
Fonte: Autor.

Equação de ajuste: (Polinômio de terceira ordem)

$$C_{22} = 0.0019.(a/b)^3 - 0.0513.(a/b)^2 + 1.4235.(a/b) + 2.3472$$
$$R^2 = 1 \qquad \text{(E.2)}$$

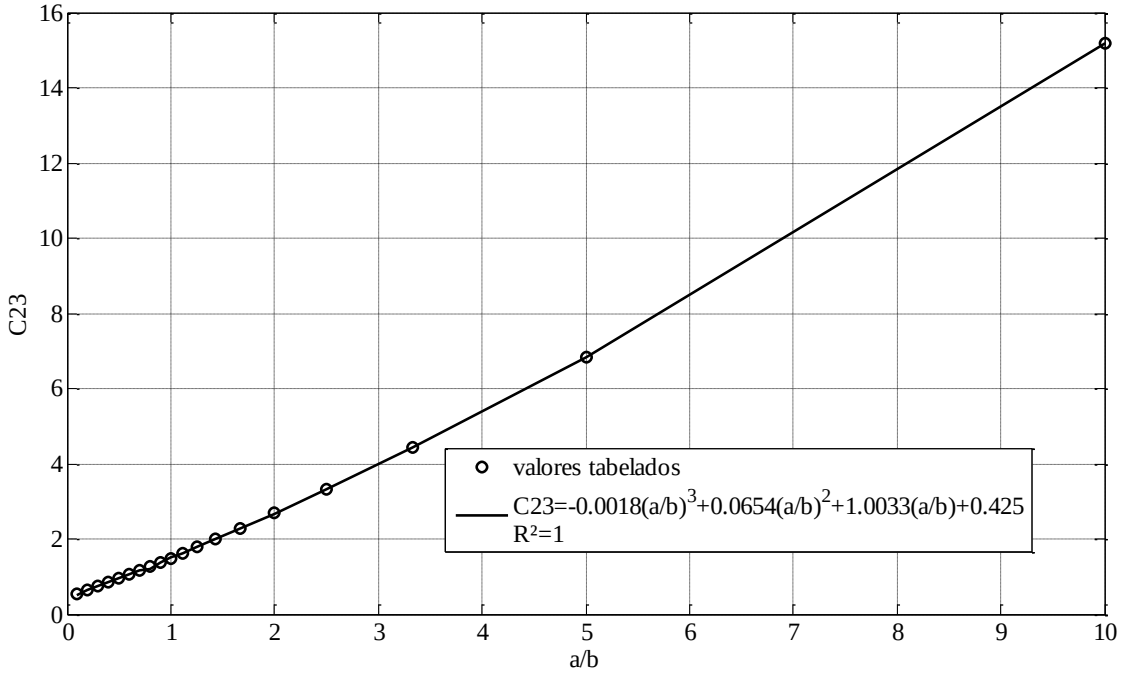


Figura E7 – Ajuste para o coeficiente C_{23}.
Fonte: Autor.

Equação de ajuste: (Polinômio de terceira ordem)

$$C_{23} = -0.0018.(a/b)^3 + 0.0654.(a/b)^2 + 1.0033.(a/b) + 0.425 \qquad (E.3)$$
$$R^2 = 1$$

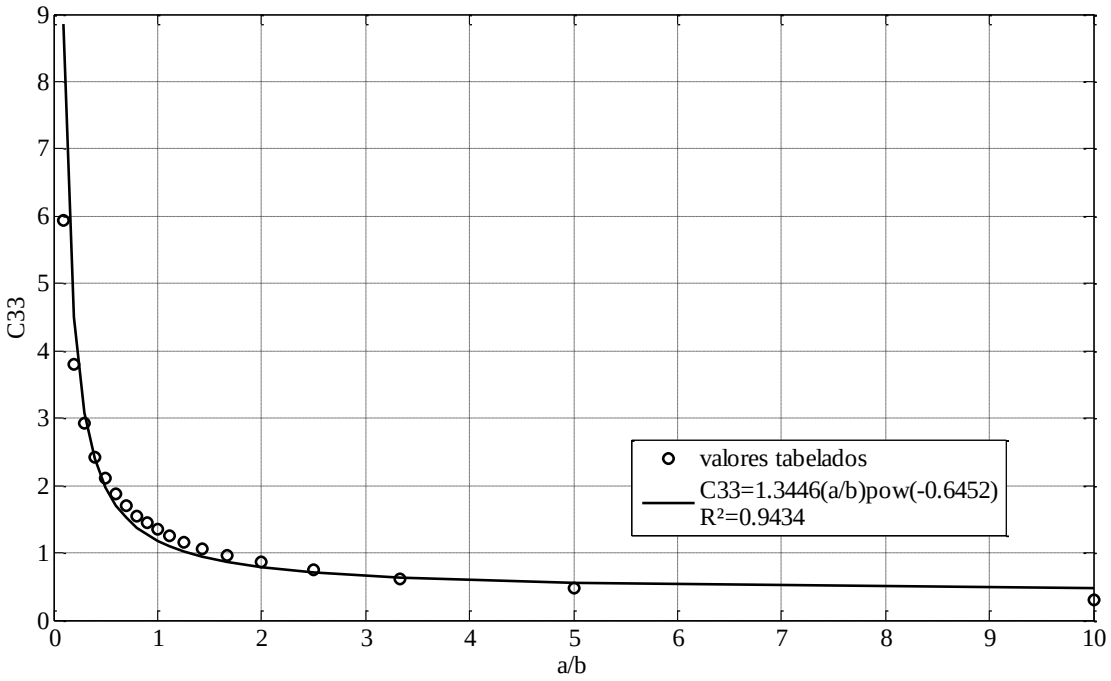


Figura E8 – Ajuste para o coeficiente C_{33}.
Fonte: Autor.

Equação de ajuste: (Equação de potência)

$$C_{33} = 1.3446.(a/b)^{-0.6452} \qquad R^2 = 0.9434 \tag{E.4}$$