

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ**

**ELENIR TEREZINHA PALUCH SOARES**

**PRÁTICAS DE APROPRIAÇÃO DA MATEMÁTICA MODERNA NA  
LICENCIATURA**

**CURITIBA  
2008**

**ELENIR TEREZINHA PALUCH SOARES**

**PRÁTICAS DE APROPRIAÇÃO DA MATEMÁTICA MODERNA NA  
LICENCIATURA**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, sob a orientação da Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Neuza Bertoni Pinto.

**CURITIBA  
2008**

Dados da Catalogação na Publicação  
Pontifícia Universidade Católica do Paraná  
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/PUCPR  
Biblioteca Central

S676p  
2008 Soares, Elenir Terezinha Paluch  
Práticas de apropriação da matemática moderna na licenciatura / Elenir  
Terezinha Paluch Soares ; orientadora, Neuza Bertoni Pinto. – 2008.  
187 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná,  
Curitiba, 2008

Bibliografia: f. 122-129

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Professores de matemática. 3. Prática  
de ensino. I. pinto, Neuza Bertoni. II. Pontifícia Universidade Católica do  
Paraná. Programa de Pós-Graduação em Educação. III. Título.

CDD 20. ed. – 510.7



**ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE EXAME DE DISSERTAÇÃO N.º 515  
DEFESA PÚBLICA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE**

**Elenir Terezinha Paluch Soares**

Aos quatorze dias do mês de maio do ano de dois mil e oito, reuniu-se no Auditório Maria Montessori - 1º andar do Centro de Teologia e Ciências Humanas da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, a Banca Examinadora constituída pelos professores: Prof.ª Dr.ª Neuza Bertoni Pinto, Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente e Prof.ª Dr.ª Maria Elisabeth Blanck Miguel para examinar a Dissertação da candidata Elenir Terezinha Paluch Soares, ano de ingresso 2006, do Programa de Pós-Graduação em Educação – Mestrado, Linha de Pesquisa Teoria e Prática Pedagógica na Formação de Professores. A mestranda apresentou a dissertação intitulada "PRÁTICAS DE APROPRIAÇÃO DA MATEMÁTICA MODERNA NA LICENCIATURA", que, após a defesa foi aprovada pela Banca Examinadora. A sessão encerrou-se às 12:30 h. Para constar, lavrou-se a presente ata, que vai assinada pelos membros da Banca Examinadora.

Observações: Pela relevante contribuição à história da Educação Matemática e pela maturidade intelectual da autora, o trabalho foi aprovado com distinção. A Banca sugere que o mesmo seja continuado em nível de doutorado.

Presidente:

Prof.ª Dr.ª Neuza Bertoni Pinto

Neuza Bertoni Pinto

Convidado Externo:

Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente

Wagner Rodrigues Valente

Convidado Interno:

Prof.ª Dr.ª Maria Elisabeth Blanck Miguel

Maria Elisabeth Blanck Miguel

Márcia Behrens

Prof.ª Dr.ª Márcia Aparecida Behrens  
Diretora do Programa de Pós-Graduação em Educação  
Stricto Sensu

**Aos meus amados filhos Tuco e Tati.**

## AGRADECIMENTOS

A Deus, por me sentir feliz em viver.

Aos meus pais, no plano que estiverem, pelo seu amor e carinho.

Aos meus irmãos Israel, Abimael, João Pedro e Gilson, por sempre me adularem.

Ao meu marido Adair, no plano que estiver, por tudo que construímos juntos nos trinta e dois anos de união.

Aos meus filhos Luiz Arthur e Leila Tatiana, pela paciência em aceitar dividir com o meu trabalho e estudo, as horas que poderíamos ter usufruído juntos.

À minha Nora Gabriele e ao meu neto Enrico, por aumentarem a minha felicidade.

À minha Sogra “Vó Lula”, por seu incentivo e carinho.

À minha querida orientadora, Professora Neuza, pelas palavras de estímulo e amizade.

A todos que foram meus professores e me levaram a conhecer mais.

Aos meus colegas de trabalho e estudo, pela acolhida carinhosa.

À colega Bárbara, que me incentivou a cursar o Mestrado na PUCPR.

## RESUMO

O estudo que ora apresentamos é referente ao internacional Movimento da Matemática Moderna, que tendo alcançado o Brasil na década de 60 do século XX, atingiu as práticas pedagógicas nos diversos níveis educacionais, os métodos de estudos dos alunos e produtos da cultura escolar como o livro didático, alterando os rumos da Educação Matemática nesse país. Tem como objetivo analisar as práticas de Matemática Moderna efetivadas no curso de Licenciatura em Matemática em uma instituição de ensino superior no interior paranaense, turma 1970-1973, período em que esse Movimento encontrava-se em plena expansão nos cursos de Licenciatura brasileiros. O estudo, de abordagem histórica, utiliza conceitos e procedimentos da história cultural. Para tanto, são observados e analisados conceitos fundamentais, dentre eles, o conceito *de cultura* em Geertz (1989), o de *cultura escolar* em Julia (2001), o de *disciplina escolar* em Chervel (1990), o de *apropriação* em Chartier (1990), o de *operação historiográfica* em Certeau (1982) e as indicações de Valente (2005) sobre a metodologia para a história da educação matemática. São apresentados estudos que apontam: a provável origem desse Movimento e traços de sua trajetória conhecida no Brasil, a evolução dos cursos de Licenciatura e a formação de professores de matemática na época do movimento, e, indícios das práticas de apropriação da Matemática Moderna no curso de Licenciatura pesquisado. As práticas pedagógicas de Matemática Moderna vivenciadas no curso investigado, foram caracterizadas, a partir dos dados obtidos nos arquivos da instituição, em documento escolar fornecido por licenciando, ex-aluno do curso investigado, contendo anotações de aulas, conteúdos e exercícios desenvolvidos em Fundamentos de Matemática Elementar, disciplina que contemplou os eixos temáticos propostos pelo Movimento da Matemática Moderna, e, em depoimentos de ex-alunos da referida turma, obtidos em entrevistas. Nas análises dessas práticas, são contemplados os conteúdos de Matemática Moderna priorizados pelo professor formador, a bibliografia recomendada aos licenciandos, as finalidades dessa disciplina, os procedimentos didático-metodológicos, as concepções e apropriações das idéias modernizadoras da Matemática. As análises apontam que esse curso de Licenciatura estava alinhado à Lei n.º. 5540/68, que fixa normas de organização e funcionamento do ensino superior e sua articulação com a escola média; que a Matemática Moderna foi introduzida nesse curso de Licenciatura pela disciplina Fundamentos de Matemática Elementar, orientada por numa concepção formalista de ensino da Matemática, com a finalidade de repassar e ampliar a compreensão dos modernos conteúdos matemáticos trazidos pelo movimento, contribuindo para o melhor desempenho docente dos formandos, na maioria professores, que na época já se encontravam em exercício nas escolas de primeiro e segundo graus do estado do Paraná.

**Palavras-chave:** Práticas Pedagógicas; Matemática Moderna; Licenciatura .

## ABSTRACT

The present study concerns to the international Modern Mathematics Movement, that having reached Brazil in the 60's of the 20<sup>th</sup> century, affected the pedagogical practices in the different educational levels, the study methods of the students and scholar culture products, such as the textbook, altering the ways of Mathematics Education in this country. The aim is to analyze the Modern Mathematics practices, that took place in a Mathematics graduation course institute in the Sstate of Parana, class 1970 to 1973, period in which this Movement found itself in full expansion in the Brazilian licentiate courses. The study, of historical approach, uses concepts and procedures of cultural history. To do so, essential concepts are analyzed, among them, the "culture" concept in Geertz (1989), the "scholar culture" concept in Julia (2001), the "scholar discipline" concept in Chervel (1990), the "appropriation" concept in Chartier (1995), the "historiographic operation" concept in Certeau (1982) and the Valente indications (2005) about the methodology for the mathematics education history. The present studies point to the probable origin of this Movement and traces of its known trajectory in Brazil, the evolution of the degree courses and the Mathematics teacher education in the period of the Movement, and, signs of appropriated practices of the Modern Mathematics in degree course researched. The pedagogical practices of the Modern Mathematics experienced in the investigated course were characterized from the data collected in the institution files, in scholar documents supplied by a graduation student, an ex-student of the investigated graduation course, containing information of the classes, contents and exercises developed in the Elementary Mathematics Fundamentals, subject which contemplated the thematic axis proposed by the Modern Mathematics Movement, and, in testimony of ex-students in the studied class, obtained through interviews. In the analysis, prioritized contents of Modern Mathematics are contemplated by the former teacher, the recommended bibliography to the students, the objectives of this subject, the didactic-methodological procedures, the conceptions and appropriations of modernizing Mathematics.

The analysis point that this licentiate course was aligned to the Law # 5540/68, that fixes organizes rules and functioning of higher education and its articulation with the high school; that Modern Mathematics was introduced in this licentiate course by the Elementary Mathematics Fundamentals, orientated by a formalist conception of Mathematics teaching, with the aim of repassing and improving the comprehension of the Modern Mathematics contents brought by the Movement, contributing to a better teaching performance education, in their majority, teachers who in that time were already working as teachers in Elementary and high school levels in the state of Paraná.

Keywords: Pedagogical Practices; Modern Mathematics; Licentiate.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Ementa da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar .....	69
Figura 2 - Definição de função (abordagem intuitiva) .....	75
Figura 3 - Definição de gráfico de função.....	75
Figura 4 - Uso acentuado de definições.....	76
Figura 5 - Capa do livro indicado em Fundamentos de Matemática Elementar. ....	81
Figura 6 - 1ª página do Prefácio do Livro “Teoria dos Conjuntos” .....	87
Figura 7 - 2ª página do Prefácio do livro “Teoria dos Conjuntos”.....	88
Figura 8 - Abordagem intuitiva seguida de definição .....	100
Figura 9 - Preocupação com o uso da simbologia.....	101
Figura 10 - Contextualização da Teoria dos Conjuntos na visão do matemático.....	102
Figura 11 - A utilização da expressão “se e somente se”.....	103
Figura 12 - Reutilização da expressão “se e somente se”.....	103
Figura 13 - Exemplificação numérica de conceitos. ....	104
Figura 14 - Atenção às propriedades. ....	105
Figura 15 - Demonstrações de propriedades da União e Intersecção.....	105
Figura 16 - Demonstração de propriedades do Produto cartesiano.....	106
Figura 17 - Demonstrações acompanhadas de experimentações numéricas.....	106
Figura 18 - Utilização de diagramas no estudo de funções.....	109
Figura 19 - Diagramas para diferenciar relação de função.....	109
Figura 20 - Definição de relação.....	111

## SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	10
1.1. Objetivos.....	17
1.2. Metodologia.....	18
2 MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA : ORIGENS E DISSEMINAÇÃO .....	29
2.1. O Movimento da Matemática Moderna no Brasil.....	33
3 A LICENCIATURA E A FORMAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA .....	41
3.1. A Formação do Professor .....	41
3.2. Licenciatura no Brasil.....	43
3.3. Formação do Professor de Matemática .....	53
3.4. Formação de professores em tempo de Matemática Moderna .....	56
4 PRÁTICAS DE MATEMÁTICA MODERNA NO CURSO DE LICENCIATURA .....	62
4.1. A primeira turma da Licenciatura em Matemática.....	66
4.2. Conteúdos Programáticos .....	67
4.3. Referências bibliográficas indicadas pelo professor formador: .....	77
4.4. Finalidades educativas da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar.....	90
5 A APROPRIAÇÃO DA MATEMÁTICA MODERNA NA LICENCIATURA.....	98
CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	116
REFERÊNCIAS .....	122
APÊNDICE .....	130
APÊNDICE A .....	131
APÊNDICE B.....	133
APÊNDICE C .....	136
ANEXOS .....	139
ANEXO A.....	141
ANEXO B.....	145

## INTRODUÇÃO

Os questionamentos que se apresentam para aqueles que caminham pelo campo educacional, nesta contemporaneidade de constantes e aceleradas mudanças, predispõem interesses por investigações que acenem para elementos esclarecedores nos debates pedagógicos atuais e futuros e, apontem caminhos para ampliar esse horizonte que tanto buscamos e que chamamos de conhecimento.

Vivenciando o processo de ensino e aprendizagem como docente de Matemática, desde 1968, época em que o ensino de Matemática no Brasil e em outros países foi sacudido pelo estigma da modernização, fomos arrastados por aquela forte corrente da comunidade matemática internacional, que apresentou princípios inovadores sob o nome de *Movimento da Matemática Moderna* levando muitos a acreditarem que o ensino e a aprendizagem dessa disciplina, finalmente passariam a ser bem sucedidos.

A chegada desse movimento, segundo Pinto (2005), não só trouxe mudanças nas práticas pedagógicas dos professores de Matemática e nos métodos de estudo dos alunos, como também atingiu produtos da cultura escolar como o livro didático. Com a reformulação dos programas de Matemática ocasionada pelas idéias modernizadoras decorrentes do referido movimento, os livros didáticos de Matemática que foram sendo editados no Brasil apresentaram muitas mudanças, principalmente na estrutura de apresentação dos conteúdos e no projeto gráfico, trouxeram em seus prefácios mensagens otimistas para alunos e professores e um visual diferenciado e atraente.

A grande novidade nos conteúdos foi a Teoria dos Conjuntos, que era visto, segundo Fiorentini (1995), como um elemento unificador de toda a Matemática, bem como Estruturas Algébricas, Relações e Funções; propunha o movimento, maior “ênfase nos aspectos estruturais e lógicos da Matemática em lugar do caráter pragmático, mecanizado e regrado, presente, naquele momento, na matemática escolar” (p.13); valorizou-se excessivamente a linguagem formal e a simbologia matemática, vistas então, como instrumento para uma leitura atualizada do mundo.

A disseminação do MMM<sup>1</sup> no Brasil, iniciando-se ainda na primeira metade da década de 60, teve como pano de fundo um regime militar de governo que pregava um discurso do desenvolvimento associado ao capital externo, sendo a educação regida pela Lei 4024/61 e

---

<sup>1</sup> MMM - Movimento da Matemática Moderna

posteriormente pela Lei 5692/71, intercaladas por uma reorganização do ensino superior pela Lei 5540/68<sup>2</sup>.

A tendência que prevalecia em educação era o tecnicismo pedagógico, que, pretendendo otimizar os resultados da escola, apontava o emprego de técnicas especiais de ensino e de administração escolar. De acordo com Fiorentini, “esta seria a pedagogia oficial do regime militar pós-64 que pretendia inserir a escola nos modelos de racionalização do sistema de produção capitalista” (1995, p. 15).

Ainda na primeira metade da década de 70, as promessas do movimento foram perdendo o vigor em função de múltiplos fatores; em 1975, a imprensa divulga uma avaliação do Movimento da Matemática Moderna, em que “os próprios líderes da reforma assumem o fracasso das propostas” (SOARES, 2005, p. 8). Conforme estudos realizados, “dentre outros fatores do seu insucesso, o de que os professores não estavam suficientemente preparados para ensinar a Matemática Moderna, tem sido um dos mais apontados” (PINTO, 2007, p.245).

Para melhor compreender essa questão que se apresentou polêmica em função das diferenças estaduais e regionais existentes na formação ou na atualização dos professores já em exercício, essa autora realizou diversos estudos<sup>3</sup> que a levaram a comentar o lugar secundário que a formação pedagógica ocupou na disseminação do movimento.

Observa-se uma ausência de problematização das práticas docentes sedimentadas em mitos e preconceitos incrustados nas concepções veiculadas nos cursos de formação, com a visão bastante generalizada na cultura escolar de que para ensinar matemática basta dominar o conteúdo matemático (PINTO, 2007, p. 255).

Questionando-se sobre o referencial que orientou a formação/preparação dos professores para o ensino da Matemática Moderna como a prática do matemático ou do professor, a autora recomenda que “indagar sobre a concepção pedagógica veiculada nos cursos de formação, ao longo de um movimento de tamanha envergadura, apresenta-se como uma instigante questão acerca das tradições formativas” (PINTO, 2007, p. 55), que deveria anteceder qualquer inferência em relação à incapacidade dos professores para ensinar Matemática Moderna.

---

<sup>2</sup> Ver as Leis referidas nas páginas 11 e 12 desse texto, em REFERÊNCIAS, p. 123.

<sup>3</sup> Entre os estudos realizados por Neuza Bertoni Pinto, Professora Doutora do Programa de Pós- Graduação da PUCPR, no momento, nos referimos à análise das duas primeiras Conferências Interamericanas sobre Educação Matemática, realizadas em 1961 e 1966, na Colômbia e no Peru, respectivamente, apresentados na **UNIÓN – Revista Íberoamericana de Educación Matemática**. Federación Íberoamericana de Sociedades de Educación Matemática – FISEM, nº. 9, março de 2007, pp. 245-256.

Entretanto, entendemos como um dos elementos mais significativos no contexto desse Movimento, o fato de que até os dias atuais, mais de trinta anos após seu arrefecimento, ainda encontramos suas marcas nos currículos escolares.

Ao falar do Movimento da Matemática Moderna, Carvalho (1988), assim se refere:

O movimento da Matemática Moderna foi o maior experimento já feito em educação matemática. Assim, qualquer pessoa que se interesse pelo ensino da matemática, quer do ponto de vista acadêmico, de pesquisa, quer do ponto de vista histórico, quer como professor de matemática engajado pessoalmente no ensino, deveria tomar conhecimento desse assunto. Sua compreensão é essencial para entender por que se ensina matemática como hoje em dia. (p. 15)

Consideramos essa afirmação, pois acreditamos como Valente (2006), que “é preciso aprofundar a reflexão sobre reformas de ontem para melhor conduzir processos de mudança hoje” (p. 32).

Desse modo, um caminho que nos parece provável para conhecer mais sobre esse marco histórico da Educação Matemática, é iluminar o presente fazendo perguntas ao passado. Entre as diversas questões relacionadas a esse importante Movimento, consideramos de grande significação, procurar desvelar como as idéias a ele atreladas foram apropriadas pelos agentes educativos, incorporando-se à cultura escolar brasileira a partir da década de sessenta do século XX.

Muitas questões referentes ao MMM vêm orientando pesquisas que buscam vestígios<sup>4</sup> de sua trajetória, bem como as heranças deixadas por esse significativo movimento, procurando identificar formas de incorporação dessas idéias modernizadoras nas atuais práticas escolares relacionadas ao ensino da Matemática nas escolas brasileiras.

Essas pesquisas vêm produzindo conhecimento histórico por meio da busca dos significados atribuídos ao Movimento da Matemática Moderna pelos diferentes atores envolvidos, seja pelos depoimentos de pessoas que vivenciaram esse passado, seja pela materialidade do cotidiano escolar, que na perspectiva de Dominique Julia (2001, p. 9) constitui-se importante fonte histórica. Esse autor aponta que uma das perspectivas interessantes para se entender a “cultura escolar como objeto histórico” é interessar-se pela análise dos conteúdos ensinados e das práticas escolares.

---

<sup>4</sup> Marc Bloch (2001), historiador francês, considera *vestígios*, quaisquer documentos ou sinais do passado. Também identificados como documentos ou fontes, foram denominados por esse historiador francês, de *testemunhos*. Para ele, tudo se inicia a partir da leitura dos vestígios, sinais que sobreviveram às intempéries da natureza ou às voluntariedades ou involuntariedades humanas e se encontram acessíveis ao pesquisador.

Os estudos realizados por Chervel (1990) sobre a relevância da história das disciplinas escolares e a sua relação com os conteúdos, conhecimentos colocados em circulação e determinados pelas finalidades educativas visadas em cada momento histórico, bem como, as colocações de Souza (2002, p. 2) sobre as relações entre currículo e cultura escolar, vistos por ela, como fortalecedores da história das disciplinas, constituíram fatores que influenciaram no direcionamento da presente pesquisa, encorajando-nos a acreditar no potencial de estudos sobre as práticas pedagógicas da Matemática Moderna desenvolvidas dentro da escola, ou seja, no âmbito da cultura escolar.

Análises iniciais realizadas pelo GHEMAT, Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática, revelam que no Brasil, as pesquisas existentes sobre o MMM, além de escassas, pouco contemplam a recepção desse movimento nas práticas pedagógicas dos professores de matemática nos diversos níveis educacionais. Assim, “há uma lacuna histórica que precisa ser preenchida para que sejam construídos referenciais da educação matemática levada a cabo em grande parte da segunda metade do século XX, no Brasil” (VALENTE, 2006, p. 32).

Logo, buscar vestígios da apropriação desse conjunto de idéias pelos diversos atores envolvidos, através da análise das práticas da Matemática Moderna desenvolvidas num curso de formação de professores, nos parece ser um dos caminhos a seguir, para a produção de conhecimento histórico referente a esse movimento, que poderá vir, por sua vez, nortear ações futuras da Educação Matemática.

Na perspectiva do historiador cultural Michel De Certeau (1982), “toda pesquisa historiográfica se articula com um lugar de produção sócio-econômica, político e cultural” e, é “em função deste lugar que se instauram os métodos, que se delinea uma topografia de interesses, que os documentos e as questões, que lhe são propostas se organizam” (CERTEAU, 1982, p. 66-67).

As vivências que tivemos até então, atuando como professora de Matemática na Educação Básica<sup>5</sup>, por 40 anos, nos levam a olhar o Movimento da Matemática Moderna como um momento muito significativo e peculiar de renovação de idéias e práticas pedagógicas, que alterou o rumo da história da Educação Matemática em todos os níveis educacionais.

---

<sup>5</sup> Educação Básica - denominação atual, segundo a LDB, Lei 9394/96, para a Educação Infantil, o Ensino Fundamental e o Ensino Médio, que compreende o Ensino Primário mais o Ensino Secundário (1º e 2º ciclos), de acordo com a denominação atribuída pela LDB, Lei 4024/61, ou o Ensino de 1º e 2º graus, segundo a Lei 5692/71 (ROMANELLI, 1995, p. 181; 237-238).

Dadas as condições ainda não satisfatórias no Brasil da formação de professores de Matemática e a suspeita de que dentre outros fatores causadores do insucesso do referido movimento, o de que os professores não estavam suficientemente preparados para ensinar a Matemática Moderna, sentimo-nos impelidos a investigar o papel desempenhado pela Academia na formação dos professores em tempo do MMM.

Dentre as várias questões suscitadas em relação aos caminhos percorridos pelas idéias renovadoras da matemática trazidas por esse movimento, nos parecem muito significativas àquelas que dizem respeito às práticas pedagógicas da Matemática Moderna exercidas pelos docentes dos cursos de Licenciatura de Matemática, formadores dos professores, que se supõe, levaram essas idéias modernizadoras aos alunos do ensino secundário<sup>6</sup>.

Para Chartier (1990) uma questão desafiadora para os historiadores culturais é a utilização diferenciada que as pessoas fazem com os objetos que lhes são colocados, com as idéias que lhes são apresentadas. Segundo esse autor, “a aceitação das mensagens e dos modelos opera-se sempre através de ordenamentos, de desvios, de reempregos singulares que são o objeto fundamental da história cultural” (CHARTIER, 1990, p.136-137).

Sob essa perspectiva, supõe-se que as práticas pedagógicas da matemática moderna desenvolvidas nos cursos de licenciatura operaram-se diferenciadamente, mesmo pela extensão territorial e diferenças culturais das diversas regiões e estados brasileiros. Segundo Miguel (1999), essas diversidades e peculiaridades regionais podem contribuir para “complementar ou enriquecer a história da educação” (p. 87) , e sob a nossa ótica, a história da Educação Matemática.

Sob esse prisma, e vislumbrando a potencialidade dos estudos que utilizam a produção escolar como fonte de pesquisa, sentimo-nos fortemente motivados a pesquisar as práticas pedagógicas no tempo do MMM, numa das poucas instituições de ensino superior que ofereceu licenciatura em matemática no interior paranaense, por considerá-las, assim como Dominique Julia (2001), componente importante da cultura escolar e, como constituinte dos saberes docentes naquele período.

Segundo Tardif (2005), “pode-se definir o saber docente como um saber plural, formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, de saberes oriundos da formação profissional e de saberes

---

<sup>6</sup> Consideraremos Ensino Secundário neste texto, de acordo com a Lei 4024/61 (ROMANELLI, 1995, p. 181), respectivamente, como o ensino escolar referente aos estudos correspondentes aos atuais estudos de 5ª à 8ª séries do Ensino Fundamental (em média de 11 aos 14 anos de idade) e ao Ensino Médio (dos 15 aos 17 anos). Conforme esta Lei, a designação “ginásial” correspondendo ao Ensino Secundário 1º Ciclo (atual 5ª à 8ª séries) e “colegial” correspondendo ao ensino secundário 2º ciclo (atual Ensino Médio).

disciplinares, curriculares e experenciais” (p. 36), o que vem conferir acréscimo de valor para os estudos das práticas desenvolvidas nos cursos de formação de professores.

Já disse Ubiratan D’Ambrósio:

Todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou. (...) Mas sem dúvida o racional, isto é, aquilo que se aprendeu nos cursos, incorpora-se à prática docente (D’AMBRÓSIO, 1998, p. 91).

Nessa perspectiva, a ação formadora de professores na licenciatura é um provável componente desse amálgama de saberes dos professores que difundiram as idéias modernizadoras da Matemática. A Teoria dos Conjuntos, um dos saberes disciplinares tratados em cursos de Licenciatura, pelo menos até o final do século passado, gerou muitas críticas e preocupações de algumas Universidades, sendo inclusive, abordadas na reformulação do Projeto Pedagógico da Licenciatura em Matemática do IME-USP (Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo)<sup>7</sup>.

(...) Na questão dos fundamentos, o objetivo é a discussão sobre o sentido em que a Teoria dos Conjuntos pode servir como base para a definição de número natural e de todas as outras extensões dos campos numéricos, podendo assim servir de fundamento para a Análise e para as teorias matemáticas em geral. Este ponto torna-se especialmente significativo diante do mau uso que foi feito na escola fundamental de teoria dos conjuntos, através da ‘Matemática Moderna’. É importante discutir com os alunos o que representou esta abordagem para o fracasso da aprendizagem de matemática na escola básica, e o porquê da inadequação deste tratamento abstrato da matemática no primeiro grau. (...) (IME-USP - LICENCIATURA EM MATEMÁTICA, Projeto Pedagógico, 1998).

Apresentamos essas considerações como uma amostra de que, em tempos não muito distantes dos nossos dias, o Movimento da Matemática Moderna continuou sendo alvo de reflexões em Curso de Licenciatura em Matemática.

Essa leitura, também, nos remete à Viñao Frago (2001), quando afirma:

A análise da cultura escolar pode ser útil – sempre que tenhamos em conta os limites e perigos do seu uso - para entender essa mescla de continuidades e mudanças, de tradições e inovações, que são as instituições educativas, e oferecer um marco explicativo para analisar: como, a partir do mundo acadêmico, se aplicam e adaptam

---

<sup>7</sup> Projeto Pedagógico da Licenciatura em Matemática do IME-USP (Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de .SP), disponível em: < [http://www.ime.usp.br/~cerri/lic/projeto\\_pedagogico.html](http://www.ime.usp.br/~cerri/lic/projeto_pedagogico.html)> . Acesso em : 30 jan. 2007. Este documento foi extraído do texto elaborado pela Comissão Coordenadora em 1998 (Iole de Freitas Druck, Maria do Carmo Domite Mendonça, Oscar João Abdounur, Rosa Maria dos Santos Barreiro Chaves), tendo como base documentos da criação do curso em 1994 (redigido pelas Professoras Elza Frutado Gomide e Iole de Freitas Druck).

as reformas educativas; (...) como pode gerar-se a mudança educativa (...) (p.30-31) (tradução nossa).

Buscando uma sondagem da viabilidade de fontes para essa investigação que nos propusemos realizar, tomamos conhecimento do material produzido por um aluno da primeira turma de licenciados em Matemática de uma Instituição de Ensino Superior, no interior paranaense. O referido material, segundo esse ex-licenciando, contém as anotações feitas no quadro de giz pelos professores formadores<sup>8</sup> das diversas disciplinas do curso Licenciatura em Matemática da referida Instituição, nos anos 1970 e 1971, ou seja, referente aos dois primeiros anos do curso. Essa produção visava favorecer conhecimentos sobre as aulas dadas, para aqueles alunos que às vezes deixavam de presenciá-las pelo nem sempre facilitado deslocamento de seus municípios de origem até o município sede da Instituição.

De acordo com declarações do aluno que produziu essa materialidade do cotidiano acadêmico, seu trabalho consistia em : após assistir as aulas, repassar as anotações feitas pelos professores formadores no quadro de giz para um estêncil e reproduzir os textos em mimeógrafo à álcool, um tipo de reprodução muito utilizado na época, visto que ainda não eram disponíveis os recursos tecnológicos atuais.

Se considerarmos as finalidades explícitas da produção desse material, ou seja, tornar possível aos alunos ausentes inteirarem-se das informações fornecidas pelos professores durante as aulas, entendemos que haja uma significativa probabilidade de fidelidade à realidade contida nessas anotações.

Além dessa fonte, utilizamos documentação oficial obtida na Secretaria Geral e no Arquivo Histórico da Instituição, históricos escolares, complementado possíveis lacunas nas informações obtidas nos documentos, com depoimento de ex-alunos da turma escolhida, que, inclusive, corresponde à primeira a graduar-se nessa Instituição.

Optamos por focalizar em nossa pesquisa as práticas pedagógicas desenvolvidas na disciplina Fundamentos de Matemática Elementar, referente ao primeiro ano, por apresentar, de acordo com a fonte acima mencionada, uma grande correspondência com os conteúdos propostos para os níveis mais elementares de ensino e contemplados pelos novos enfoques dado aos programas e livros didáticos, naquele período, ou seja, Teoria dos Conjuntos, Relações e Funções, citados por Fiorentini (1995, p. 13) como elementos unificadores dos três

---

<sup>8</sup> Consideramos “professor formador”, nesse texto, o professor que ministra aulas no Curso de Licenciatura, e, mais especificamente, durante o desenvolvimento desse trabalho, o professor que ministrava aulas de Fundamentos de Matemática Elementar, disciplina do Curso de Licenciatura, foco do presente estudo.

campos fundamentais da Matemática, ao se referir aos propósitos do Movimento da Matemática Moderna.

O estudo do material encontrado, produzido para favorecer os licenciandos que se deslocavam de vários municípios buscando sua capacitação e titulação profissional, aliado à oralidade de atores desse cenário, e os documentos da Secretaria Geral e do arquivo histórico da Instituição, nos permitiu melhor entender a trajetória desse importante Movimento da Matemática Moderna no interior paranaense e contribuir para a sua historiografia, bem como, para a história da Educação Matemática ainda em construção, ampliando possibilidades de análise quanto às permanências e mudanças, que possibilitem intervenções mais adequadas quanto ao ensino e à aprendizagem de Matemática.

Assim, as práticas da Matemática Moderna constituem o objeto dessa investigação, e a questão que orienta esse estudo é:

*Quais práticas pedagógicas de Matemática Moderna foram desenvolvidas na disciplina Fundamentos de Matemática Elementar num Curso de Licenciatura em Matemática em uma das Instituições Públicas de Ensino Superior do interior paranaense, turma 1970-1973, e qual foi a apropriação das idéias modernizadoras da Matemática perceptíveis nessas práticas ?*

## **1.1. Objetivos**

Tendo como objetivo geral, analisar a apropriação das práticas da Matemática Moderna, desenvolvidas na disciplina Fundamentos de Matemática Elementar no Curso de Licenciatura em Matemática em uma das Instituições de Ensino Superior do interior paranaense, período 1970-1973, propusemos como objetivos específicos:

- Analisar os conteúdos de matemática moderna, exercícios, indicação bibliográfica, procedimentos didático-metodológicos e prováveis finalidades da disciplina Fundamentos da Matemática Elementar do Curso de Licenciatura investigado, a partir de registros elaborados por um ex-aluno do referido curso;
- Analisar depoimentos de ex-alunos desse curso de Licenciatura, quanto às práticas pedagógicas da Matemática Moderna desenvolvidas na disciplina Fundamentos de Matemática Elementar;

- Estabelecer possíveis relações entre as práticas da Matemática Moderna efetivadas na referida disciplina pelo professor formador e a apropriação feita das idéias modernizadoras da Matemática pelos licenciandos.

## 1.2. Metodologia

Para investigar as formas de apropriação das idéias vinculadas ao MMM através das práticas pedagógicas da Matemática Moderna no Curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição de Ensino Superior pública do interior paranaense, período 1970 - 1973, utilizamos procedimentos da história cultural, considerando a relevância dessa vertente interpretativa para a escrita da história da Educação Matemática, em especial para a historiografia do Movimento da Matemática Moderna.

Para tanto, foram observados e analisados conceitos fundamentais da história cultural, dentre eles, o conceito *de cultura* em Geertz (1989), o de *cultura escolar* em Julia (2001), o de *disciplina escolar* em Chervel (1990), o de *apropriação* em Chartier (1990), o de *operação historiográfica* em Certeau (1982), além das indicações de Valente (2005) sobre a metodologia para a história da educação matemática.

Consideramos, também, a análise sobre *o fracasso das reformas educativas* feitos por Viñao Frago (2001), os estudos sobre *História Oral* fornecidas por Alberti (2005).

Destacando os produtos escolares como fontes privilegiadas para as pesquisas histórico-culturais, esse estudo utilizou um caminho investigativo centrado na cultura escolar tendo em vista a busca dos significados atribuídos pelos agentes escolares ao MMM. Nesta perspectiva, consideramos fundamentais os registros escolares, além de depoimentos de ex-alunos acerca da inserção da Matemática Moderna no curso de formação de professores de Matemática.

Segundo Valente,

A produção histórica não se define nem por seu objeto, nem por seus documentos, pelos traços deixados do passado no presente. Não existem fatos históricos por natureza. Eles são produzidos pelos historiadores a partir de seu trabalho com as fontes, com os documentos do passado, que se quer explicar a partir de questões previamente elaboradas. Assim, não há fontes sem as questões do historiador. Será ele que irá erigir os indícios deixados pelo passado em documentos para a história, em substância para a construção de seus fatos (VALENTE, 2005, p. 4).

Sob essa perspectiva, o método histórico requer perguntas aos documentos, tendo em vista transformá-los em fontes de pesquisa. São as respostas a essas perguntas que viabilizarão a construção de fatos históricos. Assim, o passado não é visto como um dado *a priori*; é o historiador que constrói o objeto de pesquisa a partir de suas interrogações, levanta hipóteses de trabalho e o legitima mediante trabalho escrito argumentado para a comunidade.

Para o historiador cultural Michel de Certeau (1982, p. 66), “encarar a história como uma operação será tentar, de maneira necessariamente limitada, compreendê-la como a relação entre um *lugar* (um recrutamento, um meio, uma profissão, etc.), *procedimentos* de análise (uma disciplina) e a construção de um *texto* (literatura)” , o que corresponderia à “*construção de objetos* de pesquisa, o uso de uma *operação específica* de trabalho e um *processo de validação* dos resultados obtidos, por uma comunidade” (VALENTE, 2005, p. 8, grifos do autor).

Para produzir história da Matemática historicamente, Valente apresenta a seguinte posição:

O historiador da educação matemática tem, como todo historiador, a tarefa de produzir fatos históricos. Sua especificidade é a de elaboração de fatos históricos relativos ao ensino de Matemática. Estudar as práticas da educação matemática de outros tempos, interrogar o que delas nos foi deixado (...) Todo esse conjunto de traços, de documentos sobre o passado, inclui, ainda dependendo do período histórico a ser estudado, o trato com a história oral, com a pesquisa junto a protagonistas ainda vivos, a respeito das práticas pedagógicas do ensino de matemática realizada noutros tempos (VALENTE, 2005, p.12-13).

Compreendemos educação como o processo de socialização dos homens, como a transmissão de alguma coisa que os antecede e ao mesmo tempo os ultrapassa, os institui como humanos que vivem em sociedade e são capazes de transformá-la pela educação, atribuindo significados que permanecem ou mudam ao longo das várias gerações. Nessa perspectiva, interpretamos cultura como um contexto formado pelo patrimônio de conhecimentos, valores e significados, edificados ao longo da história da vida humana, e a cultura escolar como um conjunto de práticas resultantes dos significados atribuídos pelos sujeitos envolvidos com a educação escolar, enquanto ações criativas aos desafios pedagógicos, sociais e políticos que lhes são apresentados por um universo de constantes mutações.

Muitos têm sido os significados atribuídos à palavra cultura, porém, usaremos como referência, aquele que Clifford Geertz, em sua obra *A interpretação das Culturas*, faz uso:

O conceito de cultura que eu defendo (...), é essencialmente semiótico. Acreditando como Max Weber, que o homem é um animal amarrado à teia de significados que ele mesmo teceu, assumo a cultura como sendo essas teias e a sua análise; portanto, não como uma ciência experimental em busca de leis, mas como uma ciência interpretativa, à procura do significado (GEERTZ, 1989, p.15).

Ao assumir cultura como ciência interpretativa à procura do significado, Geertz, faz uma analogia, recomendando que se quisermos compreender ciência, devemos olhar em primeiro lugar, não para suas teorias e descobertas, nem para o que os apologistas dizem sobre ela, mas, que devemos “ver o que os praticantes da ciência fazem”, e que, “em antropologia social, o que os praticantes fazem é a etnografia” (GEERTZ, 1989, p. 15), a qual é por ele entendida, como uma “descrição densa” (p. 20), onde a coerência não pode ser o principal teste de validade de uma descrição cultural, e que uma boa interpretação de qualquer coisa é que leva-nos ao cerne do que nos propomos interpretar.

Ao explicar a característica interpretativa da descrição etnográfica, esse antropólogo assim se pronuncia: “o que ela interpreta é o fluxo do discurso social e a interpretação envolvida consiste em tentar salvar o *dito* num tal discurso, da sua possibilidade de extinguir-se e fixá-lo em formas pesquisáveis” (p.31, grifos do autor), ou seja, ele transforma o acontecimento passado em um relato que pode ser consultado para ganharmos “acesso ao mundo conceptual no qual vivem os nossos sujeitos, para podermos, num sentido um tanto mais amplo, conversar com eles” (p. 35).

Já em outros momentos, Geertz esclarece bem o sentido do que estava denominando de cultura:

Como sistemas entrelaçados de signos interpretáveis (o que eu chamaria símbolos, ignorando as utilizações provinciais), a cultura não é um poder, algo ao qual podem ser atribuídos, casualmente os acontecimentos sociais, os comportamentos, as instituições ou os processos; ela é um contexto, algo dentro do qual eles podem ser descritos de forma inteligível – isto é, descritos com densidade. (GEERTZ, 1989, p.24).

Vista sob esse prisma, a cultura fornece o elo de ligação entre o que os homens são capazes de se tornar e o que eles se tornam individualmente: humanos; “e nós nos tornamos individuais sob a direção de padrões culturais, sistemas de significados criados historicamente em termos dos quais damos forma, ordem, objetivo e direção às nossas vidas” (GEERTZ, 1989, p.64).

Nesta perspectiva, Dominique Julia explicita o que entende por cultura escolar:

(...) um conjunto de normas que definem conhecimentos a ensinar e condutas a inculcar, e um conjunto de práticas que permitem a transmissão desses conhecimentos e a incorporação desses comportamentos; normas e práticas coordenadas a finalidades que podem variar segundo as épocas (finalidades religiosas, sociopolíticas ou simplesmente de socialização) (JULIA, 2001, p. 10).

No texto *A cultura Escolar como Objeto Histórico*, são sugeridos por Julia três eixos como meios particularmente interessantes a serem seguidos para o entendimento da cultura escolar como objeto histórico:

A primeira via seria interessar-se pelas normas e pelas finalidades que regem a escola; a segunda, avaliar o papel desempenhado pela profissionalização do trabalho de educador; e a terceira, interessar-se pela análise dos conteúdos ensinados e das práticas escolares. (JULIA, 2001, p. 9).

Ao deter-se na terceira via, Julia admite a conveniência de examinar atentamente a evolução das disciplinas escolares, em especial, os conteúdos ensinados, os exercícios escolares, atribuindo validade às fontes que contemplam produtos da cultura escolar, materialidades produzidas na própria escola, ou seja, no seio da cultura escolar.

Ao falar dos exercícios escolares, Julia (2001, p.35) em consonância com Chervel (1990), a eles se refere como “coração da caixa preta da escola”, quando utiliza uma metáfora aeronáutica para explicar sua posição, de que entende a história das disciplinas escolares, como o “núcleo duro que pode constituir uma história renovada da educação” (p. 13), através das práticas de ensino desenvolvidas em sala de aula como através dos grandes objetivos que presidiram a constituição das disciplinas.

A seleção do que é considerado desejável de preservação e transmissão, é também, uma das funções da educação escolar, exercida através da escolha de conteúdos, das competências que se quer formar, dos hábitos e valores, que, explicitamente ou de forma oculta compõem os currículos escolares, que a cada geração ou até mesmo entre elas, sofrem as renovações pedagógicas quando parte das heranças da memória escolar desaparecem, surgindo novos elementos, novas formas de saber, novas configurações epistêmico-didáticas, novos valores e atribuições de significados, decorrentes entre outros fatores, dos avanços das ciências, das tecnologias, e dos diversos contextos vividos.

Assumindo como Clifford Geertz (1989, p. 15), cultura como uma “teia de significados” tecida pelos homens e a sua análise e, olhando para o que os homens fazem e o papel que isso desempenha na vida social, consideramos, no presente estudo, os processos de ensino e aprendizagem como componentes dessa teia, no sentido de que suas práticas se

articulam com outras práticas sociais numa intensa dinâmica de negociação de significados e legitimidades.

A partir desses conceitos fundamentais presentes na historicidade das culturas e considerando que as propostas educacionais mudam, assim como as sociedades, em função de suas demandas, incluindo-se entre elas as do mundo do trabalho e os avanços científicos e tecnológicos, inferimos que as disciplinas escolares têm um papel relevante na produção da cultura escolar, por serem, segundo Chervel (1990), portadoras das finalidades educativas.

Na perspectiva desse autor a função das disciplinas escolares consiste em colocar os conteúdos de instrução a serviço das finalidades educativas, embora estas, não se encontrem muitas vezes explicitamente formuladas nos textos oficiais, de forma que a educação dada e recebida nos estabelecimentos escolares não se reduz aos ensinamentos explícitos e programados. Para conhecer as reais finalidades da disciplina, é preciso entender “por que a escola ensina o que ensina?” (CHERVEL, 1990,p.190).

A partir desse pressuposto, entendemos que os conteúdos trabalhados pelos professores formadores de docentes, no momento do MMM, fornecem indícios das finalidades educativas explícitas ou implícitas à disciplina que articulou as idéias modernizadoras da matemática aos licenciandos.

Atualmente, vem se consolidando uma tendência, entre os historiadores da educação, em favor da história das disciplinas, reconhecendo-se que uma disciplina escolar não comporta apenas as práticas docentes em sala de aula, mas também as grandes finalidades que presidiram sua constituição e o fenômeno de aculturação de massas que ela determina. Nessa perspectiva, Chervel (1990, p. 184), entende que “a história das disciplinas escolares” pode desempenhar um papel importante não somente na história da educação, mas na história cultural, porque o sistema escolar não forma somente os indivíduos, mas também uma cultura que vem penetrar, moldar, modificar a cultura da sociedade global.

Segundo esse autor, até o final do século XIX, o termo ‘disciplina’ e a expressão ‘disciplina escolar’ designam a vigilância dos estabelecimentos escolares, a repressão das condutas consideradas prejudiciais à sua boa ordem e a parte da educação que contribui para isso. No início do século XX, passa a significar uma ‘matéria de ensino suscetível de servir de exercício intelectual’, e, logo após a I Guerra Mundial, esse termo “torna-se uma pura e simples rubrica que classifica as matérias de ensino” (CHERVEL, 1990, p. 180).

Para esse autor, os conteúdos de ensino são concebidos como entidades especiais, próprios da classe escolar e com organização própria, estimando-se que os mesmos são impostos à escola pela sociedade que a rodeia e pela cultura na qual ela se banha, e que, a

história dos conteúdos é vista como componente central da história das disciplinas, “o pivô ao redor do qual ela se constitui” (p. 187).

Na perspectiva de Chervel, a “tarefa primeira do historiador das disciplinas escolares é estudar os conteúdos explícitos no ensino disciplinar”, que se apresentam como *corpus* de conhecimentos, providos de uma lógica interna, articulados em torno de alguns temas específicos, organizados em planos sucessivos claramente distintos e desembocando em algumas idéias simples e claras, ou encarregadas de esclarecer a solução de problemas mais complexos. Se os conteúdos explícitos constituem o eixo central da disciplina ensinada, o exercício é a contrapartida quase indispensável. Usando as palavras desse autor : “os conteúdos explícitos e baterias de exercícios constituem o núcleo da disciplina” (CHERVEL, 1990, p.205).

Vidal (2005), realça a importância da preservação de exercícios, cadernos, provas escolares, e outros produtos da cultura escolar, argumentando que:

Tomados em sua materialidade, esses objetos não apenas favorecem a percepção dos conteúdos ensinados, com base numa análise dos enunciados e das respostas, mas sobretudo suscitam o entendimento do conjunto de fazeres ativados no interior da escola (VIDAL, 2005, p. 64).

Essa autora chama nossa atenção, também, realçando a significação dos usos, os modos como os sujeitos lidaram com os materiais que foram distribuídos e/ ou impostos a eles, esclarecendo que esses objetos, necessários ao funcionamento da aula, “trazem as marcas da modelação das práticas escolares” (p.65), possibilitando localizar traços de como os usuários operavam inventivamente com a profusão material da escola quando das mudanças, às vezes imperceptíveis, que impetraram nas práticas escolares.

São nesses espaços que as pesquisas na perspectiva histórico-cultural poderão buscar a compreensão da apropriação das idéias do Movimento da Matemática Moderna pelos agentes escolares, e do uso que delas fizeram em suas práticas pedagógicas, considerando “apropriação”, no sentido atribuído por Chartier :

A apropriação tal como a entendemos visa a elaboração de uma história social dos usos e das interpretações, relacionados às suas determinações fundamentais e inscritos nas práticas específicas que os constroem. Prestar, assim, atenção às condições e aos processos que muito concretamente são portadores das operações de produção de sentido, significa reconhecer, em oposição à antiga história intelectual, que nem as idéias nem as interpretações são desencarnadas, e que, (...) devem ser

pensadas em função da descontinuidade das trajetórias históricas (CHARTIER, 1995, p. 185)<sup>9</sup>.

Para efetivar a investigação que propusemos, nossa primeira ação foi levantar bibliografia relevante sobre o tema, sendo que nas leituras efetuadas não encontramos estudos sobre as práticas da Matemática Moderna nos Cursos de Licenciatura em Matemática no interior do Paraná, estes, entendido por nós, como um dos veiculadores das idéias referentes ao Movimento da Matemática Moderna, enquanto formadores de professores.

O segundo passo foi inventariar fontes primárias produzidas por professores, alunos e outros agentes escolares ligados ao referido curso. Foi nessa etapa que tomamos conhecimento do rico material produzido por um aluno da turma que freqüentava o Curso de Licenciatura em Matemática numa Instituição de Ensino Superior pública do interior paranaense, no período de 1970-1973 (ANEXO B).

O referido material constitui-se de duas encadernações, contendo, conforme declaração do ex-licenciando, as anotações das aulas registradas no quadro de giz pelos professores formadores das diversas disciplinas do citado curso e período, época em que a Matemática Moderna era disseminada no Brasil. Essa produção visava repassar o conteúdo das aulas dadas, para aqueles alunos que, por motivos diversos, deparavam-se com impossibilidades de freqüência total ao curso.

Uma das encadernações é referente ao ano 1970, correspondente ao primeiro ano letivo desse curso de Licenciatura em Matemática e contém, entre outros, registros das aulas de Fundamentos de Matemática Elementar, disciplina que apresentou aos licenciandos a Teoria dos Conjuntos, Relações e Funções, eixos temáticos de destaque nos modernos programas de matemática, trazidos pelos livros didáticos dessa época, podendo se considerados como ‘vulgata’ no dizer de Chervel. Segundo esse autor, “a descrição e a análise dessa vulgata são a tarefa fundamental do historiador de uma disciplina escolar” (CHERVEL, 1990, p. 203).

A outra encadernação é referente ao ano 1971, correspondente ao segundo ano do referido curso, e, no bloco referente à disciplina Fundamentos de Matemática Elementar, apresenta conteúdos de Lógica da Matemática, outro grande eixo temático defendido pelos matemáticos modernistas.

---

<sup>9</sup> Este texto foi apresentado no seminário *Popular Culture*, na *Interdisciplinary Conference*, realizado no Massachusetts Institute of Technology de 16 a 17 de outubro de 1992. A tradução é de Anne Marie Milon Oliveira. Publicado na Revista Estudos Históricos, Rio de Janeiro, vol. 8, n. 16, 1995, p. 179-192.

Para o presente estudo, centramos nossa análise nas práticas pedagógicas desenvolvidas no primeiro ano, pelo fato da Teoria dos Conjuntos ter sido tratada mais intensamente nos demais níveis de escolaridade, mesmo pelos livros didáticos que circularam naquela época, assumindo as características do que Chervel chama de ‘vulgata’.

Para tanto, além da materialidade escolar representada pela então referida fonte, utilizamos a ementa da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar, parte integrante do Relatório de 1970, documento obtido no Arquivo Histórico da Instituição pesquisada, além de Históricos Escolares de ex-alunos e, também, outros documentos oficiais (Parecer e Lei referentes à criação, funcionamento e legalização da Instituição pesquisada), todos representativos das marcas da circulação das idéias e concepções político-pedagógicas do período analisado, que constituem fontes documentais segundo Julia (2001, p. 17).

Essas fontes foram complementadas com depoimentos de atores escolares que vivenciaram as práticas pedagógicas da Matemática Moderna, durante sua formação acadêmica. Para tanto, foram realizadas entrevistas semi-estruturadas com três alunos da primeira turma de licenciados em Matemática da referida Instituição de Ensino Superior, uma das poucas existentes no interior paranaense no período pesquisado, como ilustra o depoimento seguinte:

*Essa primeira turma da Faculdade era formada por alunos do Paraná inteiro: Irati, Foz do Iguaçu, Laranjeiras do Sul, Toledo, Pato Branco, Coronel Vivida, Imbituva, Prudentópolis, Guarapuava, Marechal Rondon, Pitanga, Malet e outros, até Contenda, perto de Curitiba. E os meus colegas que eram daqui, tinham sido meus professores. Até o diretor da escola que eu trabalhava, era meu colega. Meus ex-professores tinham prática mas não tinham titulação. Nessa época eu tinha aulas à noite e freqüentava mesmo, as aulas de sexta-feira que tinha carga horária maior, por causa do pessoal que vinha de fora, e, no sábado da uma às cinco e meia, quase seis horas. Então, o resto das aulas da semana que a gente perdia, pois trabalhava à noite, tinha um colega, o E.M.R., que copiava a matéria do quadro...certamente tinha uma revisão do professor, usava o mimeógrafo à álcool para reproduzir (a letra não era preta... era meio azulada, arroxeadada) e vendia aos colegas... (Entrevistado C, depoimento oral em 01/10/2007).*

Para obtenção dos depoimentos de ex-alunos sobre as práticas da Matemática Moderna efetivadas naquele curso e instituição, utilizamos as orientações sobre entrevistas fornecidas por Alberti (2005), que entre outras indicações, se referem à importância de “estudar as versões que os entrevistados fornecem acerca do objeto de análise” (ALBERTI, 2005, p. 30). Ainda para essa autora, “a escolha dos entrevistados é, em primeiro lugar, guiada pelos objetivos da pesquisa” (p. 31) e, que convém selecionar os entrevistados entre aqueles

que participaram, presenciaram ou se inteiraram de ocorrências ligadas ao tema, sendo assim, significativos os seus depoimentos.

De acordo com aquela autora, a escolha dos entrevistados pode sofrer modificações, pois, por mais criteriosa que seja essa escolha, só é plenamente fundamentada no momento da realização das entrevistas, quando se pode avaliar o grau de contribuição daquele depoimento para o conjunto da pesquisa.

Seguindo as indicações de Alberti (2005, p. 32), listamos nossos entrevistados, apresentando um sumário currículo, que por si só, já justifica nossa escolha.

Entrevistado A: Professor licenciado em Matemática, componente da turma (1970-1973) da Instituição pesquisada, ex-professor de Matemática do Ensino Fundamental, Médio e Superior, idealizador e executor dos dois volumes encadernados, contendo o conteúdo das aulas, registrados no quadro de giz, pelos professores formadores.

Entrevistado B: Professor Doutor, licenciado em Matemática na mesma turma referida, ex-professor do Ensino Fundamental e Médio, e atual professor de Matemática do Ensino Superior e pós-graduação em duas Universidades Públicas paranaenses, inclusive na Instituição em que obteve sua graduação.

Entrevistado C: Professora Especialista em Matemática, licenciada nas mesmas condições dos entrevistados anteriores, professora aposentada, que atuou no Ensino Fundamental e Médio, de 1969 até 2004.

A essas fontes documentais e orais, levantamos os seguintes questionamentos:

- Quais conteúdos da Matemática Moderna foram apresentados pelo professor de Fundamentos de Matemática Elementar, à turma do Curso de Licenciatura em Matemática da Instituição de Ensino Superior pesquisada.
- Quais referências bibliográficas foram indicadas pelo professor formador?
- Quais as possíveis finalidades educativas da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar estavam explícitas e implícitas nos conteúdos e exercícios escolares?
- Quais as prováveis relações entre as práticas desenvolvidas e a apropriação pelos licenciandos das idéias modernizadoras do ensino da Matemática?

De acordo com Geertz (1989), precisamos procurar “relações sistemáticas” entre fenômenos diversos, visando “integrar diferentes tipos de teorias e conceitos” de tal forma que se possam formular proposições significativas incorporando experiências e descobertas. Para ele, o ponto crítico em ciência não é se os fenômenos são empiricamente comuns, mas se eles podem ser levados a “revelar os processos naturais duradouros subjacentes neles” (p. 56).

Segundo esse autor, a análise consiste em “combinar suportes universais com necessidades subjacentes postuladas, tentando mostrar que existe alguma combinação entre as duas” (GEERTZ, 1989, p. 54). Prosseguindo, ele explica que o método é olhar as exigências humanas subjacentes, de uma ou outra espécie, e tentar mostrar que esses aspectos da cultura, que são universais, são moldados por essas exigências. Também, que a questão não é mostrar que a congruência existe, mas se ela é mais que uma congruência “frouxa” e indeterminada e, que não se pode afirmar, de forma precisa e testável, as relações que se supõe que existam.

O que genericamente buscamos, é entender essa “teia de significados”, emprestando as palavras de Geertz, atribuídos pelos diversos sujeitos envolvidos com o Movimento da Matemática Moderna, e as diferenciadas apropriações das idéias por ele veiculadas. Visamos contribuir para a historiografia desse ímpar período pelo qual passou a Educação Matemática, cujos reflexos estão implícitos em atuais práticas pedagógicas da Matemática, mesmo depois de transcorrido mais de um quarto de século, do generalizado abandono da defesa desse ideário.

Cabe aqui lembrar, palavras do historiador cultural Michel De Certeau:

Ainda que isto seja uma redundância é necessário lembrar que uma leitura do passado, por mais controlada que seja pela análise dos documentos, é sempre dirigida por uma leitura do presente. Com efeito, tanto uma quanto a outra se organizam em função de problemáticas impostas por uma situação. Elas são conformadas por premissas, quer dizer, por ‘modelos’ de interpretação ligados a uma situação ( ...) (CERTEAU, 1982, p. 34).

Em outras palavras, procuramos tomar muito cuidado na interpretação de documentos, lembrando que a história não é uma crítica epistemológica e, que aquilo que parece ser um fato, é ainda apenas um indício<sup>10</sup>; que as práticas mudam seus significados e sentidos no curso de diferentes períodos históricos, de modo, que toda interpretação histórica depende de um sistema de referência.

A análise dos dados, contidos nos documentos e nas transcrições das entrevistas (APÊNDICE A), tomando-se nestas, as devidas precauções éticas (APÊNDICES B e C) recomendadas por Alberti ( p. 2005, 132-136), foi efetuada logo após a obtenção dos mesmos, de modo a aproveitar as impressões e reflexões sobre os indícios encontrados.

---

<sup>10</sup> Para Carlo Ginzburg (1989), historiador e antropólogo italiano, conhecido como um dos pioneiros no estudo da micro história, em *Sinais: raízes de um paradigma indiciário*, os *indícios* não são aqueles elementos mais evidentes, mais explícitos; muito pelo contrário, os indícios são aqueles detalhes mais sutis, quase imperceptíveis, são os pormenores e as minúcias muitas vezes negligenciáveis.

Porém, a análise mais formal está apresentada no último capítulo do presente estudo, momento em que consideramos a totalidade dos dados recolhidos, procurando extrair informações que ampliem as possibilidades de respostas à pergunta formulada nesse estudo, pois a melhor compreensão das práticas pedagógicas da Matemática Moderna efetivadas no momento de formação de professores no interior paranaense poderá fornecer, através de suas peculiaridades, indícios da relação entre a cultura escolar e a vida desse importante momento da Educação Matemática.

As pesquisas realizadas na dimensão histórico-cultural vêm mostrando a complexidade que assumiu o Movimento da Matemática Moderna enquanto grande, talvez a maior iniciativa de modernização da matemática escolar, de âmbito internacional. Por apresentar-se como um significativo marco histórico da Educação Matemática e cujos vestígios e conseqüências encontram-se ainda nas atuais práticas escolares é que a pesquisa que ora desenvolvemos, buscou compreendê-lo a partir da cultura escolar.

Para efeitos de uma melhor organização dos indícios que apuramos com essa investigação, através das leituras que fizemos, dos registros contidos na já referida materialidade escolar, dos documentos oficiais e dos depoimentos de ex-alunos, o desenvolvimento desse estudo é apresentado em quatro capítulos.

O primeiro analisa a trajetória histórica do MMM, especialmente, no Brasil; o segundo trata da formação de professores de Matemática ; o terceiro focaliza as práticas de Matemática Moderna no Curso de Licenciatura, e o quarto trata da apropriação da Matemática Moderna na Licenciatura.

Conclui que o estudo configura-se como uma contribuição para a escrita da história da formação de professores de Matemática no Estado do Paraná, ao tempo do MMM.

## 2 MOVIMENTO DA MATEMÁTICA MODERNA: ORIGENS E DISSEMINAÇÃO

As profundas transformações sociais ocorridas no final do século XIX e começo do século XX, geradas pelas mudanças paradigmáticas decorrentes do impulso industrial na Europa Ocidental e nos Estados Unidos, provocaram mudanças estruturais nos sistemas educacionais, inclusive na matemática escolar.

Segundo Schubring (2004, p. 11-13), a indústria e o comércio demandavam “além de uma instrução matemática mais ampla, conhecimentos mais modernos que servissem de base para aplicações técnicas”. Ocorreram nessa direção, iniciativas de reformas curriculares para a escola secundária em alguns países, principalmente, a partir dos congressos internacionais<sup>11</sup> de matemáticos, sendo o I (Primeiro), realizado em Zurique, em 1897, o II em Paris 1900, o III em Heidelberg, em 1904.

No IV Congresso Internacional de Matemáticos, de acordo com Schubring, realizado em Roma, em 1908, estabeleceu-se um comitê internacional, o IMUK<sup>12</sup> (Internationale Mathematische Unterrichtskommission/Ciem = Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique), para acompanhar as comunicações sobre as reformas curriculares, tendo como primeiro presidente, o matemático alemão Félix Klein.

A realização de importantes eventos na área, dando continuidade às discussões em torno da construção do edifício matemático e do seu ensino continuaram acontecendo, sendo que o V Congresso Internacional de Matemáticos, foi realizado em 1912, em Cambridge, vindo em seguida a 1ª Guerra Mundial. O VI Congresso foi realizado em 1920, em Estrasburgo; o VII realizou-se em Toronto, em 1924, o VIII, em Bolonha, 1928, o IX em Zurique, em 1932, o X em Oslo, em 1936, o XI em Cambridge, Massachussets, U.S.A., em 1950.

Segundo Valente (2006), o desenvolvimento científico e tecnológico obtido durante a Segunda Guerra Mundial trouxe mais modificações à vida social, e “no âmbito educacional, surgiram movimentos internacionais de reforma que buscavam colocar os ensinamentos escolares em face com o desenvolvimento científico que os anos pós-guerra passaram a viver” (p.26). E na corrida pela hegemonia científica, maiores recursos financeiros foram injetados em

---

<sup>11</sup> Cronologia dos Congressos Internacionais de Matemáticos. Disponível em: <<http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/hspm>>. Acesso em 25 de março de 2007.

<sup>12</sup> O IMUK, a partir de 1952, passou a ser conhecido como ICMI – International Commission on Mathematical Instruction.

educação, e, assim, com financiamento internacional, foram realizados inúmeros congressos, encontros, visitas, estágios, além da criação de grupos de estudos locais e estrangeiros, com a perspectiva de elaboração de um novo ensino de ciências e de matemática. Nesse contexto, teria nascido o *Movimento da Matemática Moderna*.

Uma atenção especial ao ensino por matemáticos norte-americanos e europeus, conquistou a adesão, entre outros países, do Brasil, cujos anseios governamentais voltados ao desenvolvimento, incluíam a modernização como condição de progresso econômico e cultural.

Segundo Burigo (2006, p. 39), as propostas internacionais não visavam apenas um ensino mais eficiente dessa ciência; também traziam propostas de renovações curriculares voltadas a uma articulação efetiva entre o ensino superior e o secundário, ou seja, um ensino secundário que diminuísse a distância, em termos conceituais, metodológicos e de linguagem, em relação à Matemática universitária. De acordo com os estudos dessa autora, essa aproximação estava vinculada, principalmente, à valorização do método axiomático, da linguagem simbólica e à unificação da Matemática através das suas estruturas e da Teoria dos Conjuntos. Grande parte dos estudos realizados, até então, sobre o Movimento da Matemática Moderna, apresenta referências às ligações entre esse movimento e as idéias defendidas por um grupo de matemáticos formado na França, sob o pseudônimo de Nicolas Bourbaki<sup>13</sup>.

Ao redigir *Algumas notas históricas sobre a emergência e a organização da pesquisa em educação matemática, nos Estados Unidos e no Brasil*<sup>14</sup>, o respeitadíssimo professor Ubiratan D’Ambrósio, faz indicações de que entre as propostas de renovação curricular de matemática no pós-guerra, “um passo decisivo foi um colóquio, organizado pela Organização Européia de Cooperação Econômica, em Royaumont em 1959” (D’AMBROSIO, 2004, p. 72). Esse evento foi significativamente referenciado, também, em estudos recentes elaborados pelo Professor português Henrique Manuel Guimarães (2007).

De acordo com os estudos de Guimarães<sup>15</sup> (2007, p. 21-45), em 1959, no Cercle Culturel de Royaumont, em Asnières-sur-Oise, França, realizou-se um evento internacional promovido pela Organização Européia de Cooperação Econômica (OECE), onde o Grupo Bourbaki teve uma participação decisiva na elaboração das propostas de modernização do ensino da Matemática.

---

<sup>13</sup> Bourbaki - Este grupo de matemáticos, quase todos franceses, o qual formou uma espécie de sociedade secreta, Jean Dieudonné e André Weil foram considerados os dois líderes mais ativos (BOYER, 1974).

<sup>14</sup> Publicado na Revista Brasileira de Educação. Nº 27, Set/Out/Nov/Dez/2004, p.71-72.

<sup>15</sup> Henrique Manuel Guimarães – Professor da Universidade de Lisboa, Centro de Investigação em Educação.

Segundo esse autor, o *Seminário de Royaumont* teve duração de duas semanas e reuniu cerca de cinquenta delegados de dezoito países, entre eles, um dos líderes do grupo francês bourbakista, o notável matemático Jean Dieudonné, cuja influência na elaboração das propostas ficou registrada nos relatórios do referido Seminário. Ao comentar sobre esse evento, Guimarães indica as finalidades educativas para o ensino de Matemática, consideradas nesse significativo colóquio:

Foram tidas em conta, em todas as discussões, três finalidades educativas que em parte se recobrem mas que não são certamente contraditórias: a) a Matemática como método de ensino liberal (meio de formar o espírito); b) a Matemática, base para a vida e para o trabalho (instrumento necessário a todos); c) a Matemática, enquanto propedêutica (preparação para os estudos universitários) (GUIMARÃES, 2007, p. 29).

A primeira finalidade, apontada no Congresso de Royaumont, focaliza o desenvolvimento intelectual do aluno e a elevação do espírito, desempenhando a Matemática o papel de educadora do raciocínio e formadora da disciplina mental.

Segundo Guimarães (2007), esse papel formativo atribuído à Matemática, embora tenha sido levado em conta nas discussões em Royaumont, parece não ter sido contemplado nos propósitos finais da reforma do ensino de Matemática proposta nesse Congresso, ganhando reais destaques, a segunda e terceira finalidades explicitadas, ou sejam: o caráter ferramental da Matemática para a inserção na vida cotidiana e profissional, e, sublinhadamente, a preparação para a continuação dos estudos.

De acordo com esse autor, no relatório do referido Congresso diz-se que: ‘em primeiro lugar, preparar melhor os alunos para os estudos universitários; em seguida pôr à disposição de cada um, um instrumento utilizável na vida de todos os dias’ (OECE, 1961a, p. 132 apud GUIMARÃES, 2007, p. 29).

Ainda, na perspectiva de Guimarães (2007),

Do ponto de vista interno a Escola e ao ensino de Matemática, evidenciam-se, na proposta de Royaumont e na sua especificação de Dubrovnik, um propósito principal global e algumas orientações curriculares centrais. O propósito principal tinha em conta essencialmente a continuação de estudos dos alunos e as necessidades do ensino superior, e visava acabar ou reduzir, o defasamento que existia entre a Matemática dos programas das escolas secundárias e aquela que se estudava nas universidades. A esse respeito, numa das conclusões gerais do seminário, a propósito do programa que foi aí delineado, é dito que esse programa ‘está em harmonia com as matemáticas universitárias modernas’ (OECE, 1961a, p. 111, apud GUIMARÃES, 2007, p.31).

Os estudos apresentados por Guimarães (2007, p. 22), nos levam a acreditar que nesse encontro de professores e matemáticos em Royaumont e Dubrovnik<sup>16</sup>, respectivamente em 1959 e 1960, considerou-se que a maior finalidade da reforma no ensino de Matemática era adequar os programas de Matemática do ensino secundário aos avanços internos da própria Matemática, visando um melhor preparo dos alunos para seus estudos universitários. Avanços, que na concepção bourbakista da Matemática (Bourbaki, 1971, apud Guimarães, 2007, p. 23), cujas idéias parecem ter orientado em muito as indicações finais desse Seminário, consistiam na “unidade da Matemática, no método axiomático e no conceito de estrutura matemática”, convergindo para um ensino da Matemática voltado para ela mesma, para sua unidade, para suas estruturas, enfim, de interesse particular ao matemático.

Em 1960, em Dubrovnik, ocorreram as especificações das propostas apresentadas em Royaumont, quando foi elaborado *Um programa moderno de Matemática para o Ensino Secundário* (OECE, 1961b, apud Guimarães, 2007, p. 22). Com a adesão dos Estados Unidos da América do Norte e Canadá, países que se integraram aos trabalhos de Royaumont e Dubrovnik, a OECE, em 1960, segundo Guimarães (2007, nota 28, p.28) passou a denominar-se OCDE (Organização para o Desenvolvimento e Cooperação Econômica).

Segundo esse autor,

O Seminário de Royaumont é certamente a realização mais emblemática de todo o movimento reformador de grande influência internacional que recebeu o nome de Matemática Moderna e, também, uma das mais conhecidas na história da evolução curricular recente do ensino da Matemática (GUIMARÃES, 2007, p. 22).

Nos meados da primeira metade dos anos 50, nos Estados Unidos, segundo o eminente Professor americano Morris Kline (1973), após terem sido observados sinais da ineficiência do sistema educativo na comunicação de idéias matemáticas, optou-se por uma reformulação curricular dessa disciplina, na expectativa de que se fosse melhorado esse componente, os problemas referentes ao processo ensino-aprendizagem de matemática seriam resolvidos. Essa ação tomou corpo, adquiriu força política e espalhou-se internacionalmente sob o nome de *Movimento da Matemática Moderna*.

Ao falar das ações americanas voltadas à modernização do ensino da Matemática, que segundo ele, foram empreendidos desde 1952, Kline dá indicações de que as mudanças mais radicais foram propostas por um grupo internacional que se reuniu em Royaumont , na

---

<sup>16</sup> Dubrovnik, - na costa do Mar Adriático, em 1960 pertencia geograficamente à Iugoslávia e atualmente à Croácia.

França, em 1959. Esse mesmo autor, cita a Conferência de Cambridge, em 1963, e, um grupo organizado pelo Professor Fehr, da Universidade de Colúmbia, em 1965, o *Estudo de Melhoria do Currículo de Matemática da Escola Secundária*, cujo objetivo era ‘reconstruir a matemática da escola secundária, procurando eliminar barreiras que separam os vários ramos de Matemática e “unificar a matéria por meio de seus conceitos gerais, conjuntos, operações, mapeamentos, relações e estrutura” (KLINE, 1976, p. 37).

No Brasil, já se insinuavam essas idéias de modernização no II Congresso Nacional de Ensino de Matemática, em Porto Alegre, em 1957. Segundo Silva (2006, p. 53), nos anais desse congresso, “há evidências de sugestões para introduzir tópicos da matemática moderna no ensino primário e secundário”. De acordo com essa autora, naquela ocasião, o Professor Osvaldo Sangiorgi<sup>17</sup>, dentre outras colocações, afirma que “essa modelação aos tempos novos deve ser gradativa a fim de serem evitados os malefícios decorrentes de transformações radicais” (D’AMBRÓSIO, 1987, p. 87-88 apud SILVA, 2006, p ).

No entendimento de uma das estudiosas brasileiras desse movimento, Elisabete Z. Búrigo (1990), o objetivo principal dessa reforma, foi adequar o conteúdo escolar de matemática ao progresso tecnológico, tendo em vista contribuir para novas conquistas da sociedade desenvolvimentista. É nesse cenário de aceleração de inovações tecnológicas, exigindo um maior número de cientistas e técnicos bem preparados, em que, uma formação científica acessível a todos os cidadãos era vista como condição de integração numa sociedade em crescente processo de tecnologização, que surgiu o *Movimento da Matemática Moderna*.

## 2.1. O Movimento da Matemática Moderna no Brasil

No Brasil, o avanço da industrialização mantinha expectativas de inserção do país na rota do desenvolvimento, acenando para perspectivas de ascensão social por meio de escolarização e carreiras técnicas, abrindo espaço para o acolhimento de discursos que apontavam a “modernização do ensino de matemática como componente de uma modernização mais ampla da sociedade brasileira” (BÚRIGO, 2006, p. 38).

Quanto à disseminação das idéias modernizadoras da Matemática, no Brasil, os estudos de Pinto (2005) revelam que na década de 60 e no início dos anos 70, em vários

---

<sup>17</sup> Professor Osvaldo Sangiorgi, reconhecido mais tarde como o principal articulador do MMM no Brasil.

estados brasileiros organizaram-se Grupos de Estudos da Matemática, considerados como pioneiros na divulgação das idéias do MMM. Destacaram-se, dentre outros, o GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática) de São Paulo, o NEDEM (Núcleo de Estudo e Difusão do Ensino da Matemática) do Paraná, o GEEMPA (Grupo de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre, até 1983; posteriormente Grupo de Estudos sobre Educação, Metodologia de Pesquisa e Ação) do Rio Grande do Sul, e o GEPEM (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática) do Rio de Janeiro, com o objetivo de atualizar professores em serviço, elaborar manuais didáticos, especialmente democratizando as idéias modernizadoras da matemática, as quais, em muitas escolas, chegavam através dos livros didáticos. Estes, que ainda na primeira metade da década de 60, já traziam as inovações advindas do Movimento da Matemática Moderna, ampliaram-se em quantidade de publicações até o final da década de 70, quando o movimento mostrou sinais de arrefecimento.

Dentre os Grupos de disseminação do Movimento no Brasil, O GEEM (Grupo de Estudos do Ensino da Matemática) criado em 1961, na cidade de São Paulo, sob a coordenação de Osvaldo Sangiorgi, foi o que mais se destacou.

Segundo as pesquisas realizadas por Lima (2006) ,

O GEEM teve destaque e realizações significativas durante o MMM, influenciado pelo *School Mathematics Study Group – SMSG*, fundado em 1958, nos Estados Unidos, sob liderança de Edward G. Begle e com apoio do governo americano, além do financiamento da National Science Foundation – NSF (...). O SMSG foi indiretamente influenciado pelos trabalhos do Grupo Bourbaki (LIMA, 2006, p.39).

Segundo dado documental do APOS (Arquivo Pessoal de Osvaldo Sangiorgi), utilizado por Lima, Sangiorgi, considerado o principal articulador da disseminação da Matemática Moderna no Brasil, declara ter participado do *Summer Institute for High School and College Teachers of Mathematics*, no período de junho a agosto de 1960, na Universidade de Kansas, retornando com discursos eloqüentes sobre a necessidade do Brasil também oferecer aos seu professores, “a vivência com os últimos progressos do campo educacional” (SANGIORGI, 1960, p. 8, apud LIMA, 2006, p. 41).

Segundo a autora, Osvaldo Sangiorgi, presidente do GEEM, após ter realizado o citado curso, ainda em 1960, na e com apoio da Universidade Mackenzie e do Departamento de Matemática da Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade de São Paulo – USP, com a National Science Foundation , em convênio com a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo e, em conjunto com o Professor da Universidade de Kansas, George

Springer, idealizou e realizou o Curso ‘Especialização em Matemática para Professores Secundários’, que de acordo com essa autora, foi uma das bases para a criação do Grupo GEEM, um dos maiores responsáveis pela divulgação do MMM no Brasil (LIMA, 2007).

Foram, também, muito significativas para o MMM, as articulações que Sangiorgi estabeleceu com a mídia:

Pela leitura e análise dos recortes dos jornais notamos que o Professor Osvaldo Sangiorgi conhecia o Dr. José Reis, divulgador científico Diretor de Redação do *Jornal Folha de São Paulo* de 1962-1967 e responsável pela orientação e preparo de editoriais, o que poderia ter facilitado a divulgação do MMM na imprensa escrita (...) Concluimos que a imprensa escrita apoiou o MMM, principalmente na década de 60. O estreito relacionamento dos protagonistas do Movimento com as autoridades do governo, a neutralidade da disciplina Matemática perante a censura, a amizade do Professor Osvaldo Sangiorgi com o Professor José Reis, o ensino de Ciências e Matemática considerado pelos governantes atividades ligadas ao desenvolvimento cultural e econômico, bem como válvula de escape para minimizar o autoritarismo, e a utilização dos temas da Matemática como forma de preencher lacunas deixadas pelos textos censurados nos jornais são motivos que concorrem para justificar o apoio dado pelos jornais à divulgação do MMM (NAKASHIMA, 2007, p. 213-214).

Dessa forma, o Movimento da Matemática Moderna foi ganhando espaço na sociedade brasileira, atrelado à idéia de que essa reforma era necessária para a melhoria do ensino dessa disciplina, tradicionalmente vista como um “entrave” na cultura intra e extra-muros da escolas.

No estado do Paraná, “a criação do NEDEM (Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino de Matemática), em 1962, foi o marco pioneiro de disseminação do movimento entre os professores paranaenses” (PINTO, 2006, p. 114), tendo mantido esses professores envolvidos, durante duas décadas, com a proposta moderna do ensino da Matemática.

Segundo essa autora, o NEDEM, composto por um grupo de professores paranaenses que estudou e discutiu a reformulação do ensino de matemática, coordenado pelo seu fundador, o Professor Osny Antônio Dacol, trabalhou inicialmente com classes experimentais no Colégio Estadual do Paraná, em Curitiba, maior colégio desse estado, elaborando sua proposta de Matemática Moderna e, na seqüência, publicou duas coleções de livros didáticos que passaram a ser adotadas em muitas escolas paranaenses, marcando assim, a participação significativa desse grupo de estudos e difusão da Matemática Moderna principalmente no ensino público do Paraná.

Na perspectiva de Pinto:

Se a intenção do movimento era desestruturar a matemática tradicional, o NEDEM cumpriu sua missão, propiciando grandes discussões e oferecendo propostas concretas de reformulação curricular para a disciplina de Matemática. Com o trabalho desenvolvido pelo NEDEM intensificou-se a democratização da participação dos professores em congressos, cursos, palestras, com isso imprimindo novos rumos à história da educação matemática paranaense. Professores de outros estados vinham à capital paranaense não apenas para proferirem palestras, também vinham participar dos cursos de férias, buscando atualizar-se e conhecer a proposta paranaense de Matemática Moderna (PINTO, 2006, p. 21)

O trabalho realizado pelo NEDEM, segundo Pinto (2006), provocou, apesar de não intencionalmente, a introdução de conteúdos até então não contemplados nos currículos escolares, abarcando em suas atividades professores do ensino básico, escolas normais e faculdades, sugerindo sua preocupação com a formação acadêmica dos futuros mestres.

A pesquisa realizada por Ferreira (2006), indica que Osny Antônio Dacol, participou em 1961, do curso de aperfeiçoamento para professores, realizado em São Paulo e coordenado por Osvaldo Sangiorgi. Segundo a autora, no retorno desse curso o Professor Osny trouxe um “importante documento”: *Um Programa Moderno de Matemática para o curso secundário*, resultado de um colóquio realizado em agosto-setembro de 1960, na Iugoslávia, sob os auspícios da OECE (Organização Européia de Cooperação Econômica) (FERREIRA, 2006, p. 6, grifos da autora).

Após intenso estudo sobre o papel do NEDEM na disseminação do MMM no Paraná, Pinto (2006) declara que:

Apesar de toda divulgação dada pelo NEDEM, a Matemática Moderna não prosperou por muito tempo. Os cursos e palestras não atingiram todos os professores da rede municipal e principalmente estadual. Muitas faculdades no interior não estavam preparando os professores para trabalhar esses conteúdos, dificultando assim o sucesso da nova reformulação (PINTO, 2006, p.129).

A formação inadequada dos professores para trabalhar a Matemática Moderna, parece ter sido um dos componentes desfavoráveis ao sucesso do MMM, no Paraná.

Segundo Gatti (1997), numa década mais recente, 1990, inúmeros países vêm desenvolvendo políticas e ações agressivas na área educacional “cuidando, sobretudo dos formadores, ou seja, dos professores, que são os personagens centrais e mais importantes na disseminação do conhecimento e de elementos substanciais da cultura” (p.3).

Essa autora apurou, entre outros, dados indicadores da falta de professores licenciados ou com bacharelado. Em 1994, aproximadamente trinta anos após o início do MMM, apenas 9% aproximadamente das matrículas nesses cursos eram voltados à Matemática e dos

concluintes nesses cursos, apenas 6% eram nessa área. Esses dados confirmam a deficitária formação acadêmica dos professores de Matemática na época da disseminação do MMM.

Gatti comenta, também, a descaracterização atual dos cursos de formação de professores, ocupando nas Universidades um lugar de “curso menor”; que a fragmentação e a falta de articulação entre as disciplinas de conteúdos básicos e conteúdos de disciplinas pedagógicas têm sido apontados como principais determinantes dos problemas de formação profissional dos docentes para o ensino fundamental e médio” (p. 39).

Esse comentário nos reporta a Pinto (2007), quando se refere “ao lugar secundário que a formação pedagógica ocupou na disseminação do movimento”, já referenciado na introdução desse trabalho.

As discussões sobre a necessidade de compreensão de como acontecia o ensino de matemática e a busca de uma fundamentação teórico-metodológica para direcionar a prática docente e as reflexões delas advindas, através das relações entre ensino, aprendizagem e conhecimento matemático, configura um campo de estudo, que, hoje, denominamos Educação Matemática.

No Brasil, segundo Fiorentini (1995 p. 13), a Educação Matemática passou por um período de intensa mobilização com o engajamento de grande número de matemáticos e professores no movimento internacional de reformulação e modernização do currículo escolar, até hoje conhecido como *Movimento da Matemática Moderna*.

Os estudos sobre os modos de ver e conceber o ensino da Matemática, realizados por Fiorentini, indicam que até o final da década de 50 do século XX, o ensino da Matemática no Brasil, apresentava o formato da Matemática clássica, caracterizado pelo modelo euclidiano, cuja sistematização do conhecimento se dava a partir de elementos primitivos, definições, axiomas e teoremas deduzidos desses elementos. Pautava-se em uma concepção platônica, de visão conclusa, a-histórica e dogmática do conhecimento matemático, tendo como principal finalidade do ensino de Matemática, a elevação espiritual, a disciplina mental e o pensamento lógico-dedutivo.

Ao mesmo tempo, segundo Fiorentini (1995), a partir da década de vinte do século passado, surge a concepção empírico-ativista do processo ensino aprendizagem, que constituía uma negação ou oposição à escola clássica tradicional, atribuindo como finalidade da educação o desenvolvimento da criatividade e das potencialidades individuais. Essa concepção emerge no seio do movimento escolanovista, estando associada ao pragmatismo de Dewey.

No âmbito do ensino da Matemática, um dos principais representantes dessa corrente de pensamento foi Euclides Roxo, defensor no Brasil, da unificação da Matemática, acabando com a sua divisão em Aritmética, Álgebra e Geometria.

Após 1950, com o engajamento de muitos matemáticos e professores brasileiros ao movimento internacional de modernização do currículo escolar, que ficou sendo conhecido como o MMM, houve, na perspectiva de Fiorentini, um retorno ao formalismo matemático, enfatizando-se o uso preciso da linguagem matemática contemporânea, o rigor e as justificativas das transformações algébricas através das propriedades estruturais. Um dos principais propósitos do referido movimento, era o de unificar os três campos fundamentais da matemática, através da introdução de elementos unificadores como Teoria dos Conjuntos, Estruturas algébricas, Relações e Funções.

Segundo Fiorentini (1995, p. 15), muitos professores universitários, influenciados pelo Grupo Bourbaki também difundiram esse ideário e, sobretudo a concepção estrutural-formalista da Matemática, nos cursos de licenciatura. “Na verdade, essa proposta de ensino parecia visar não à formação do cidadão em si, mas à formação do especialista matemático” (FIORENTINI, 1995, p. 14).

Nessa tendência formalista moderna, a Matemática escolar perde tanto seu papel de formadora da “disciplina mental” como seu caráter pragmático de ferramenta para a resolução de problemas, relegando a segundo plano a significação histórico-cultural e a concretude das idéias e conceitos.

Ainda na perspectiva de Fiorentini, desde o final da década de 1960 até o final da década de 1970, mais precisamente pós 1964, durante o regime militar de governo, o ensino no Brasil foi marcado pelo tecnicismo pedagógico, tendência que visava otimizar os resultados da escola com a finalidade de preparar o indivíduo para a sociedade, tornando-o capaz e útil ao sistema racional de produção capitalista.

Essa foi a época dos acordos MEC-USAID<sup>18</sup>, momento em que o controle ideológico e a inibição política de uma elite pensante caminhou paralelamente com a racionalidade tecnocrática, voltada aos interesses do capital monopolista, que necessitava mão de obra especializada.

Nesse contexto, deu-se a combinação da concepção formalista estrutural da matemática (modo de conceber a matemática na ótica do MMM) e a concepção tecnicista (modo de se conceber a organização do processo ensino-aprendizagem), resultando, segundo

---

<sup>18</sup> Acordos entre o Ministério da Educação e Cultura do Brasil e United States of América Intelligence Department, que, principalmente, demarcaram as funções da universidade na época.

Fiorentini (1995), “o tecnicismo formalista” (p.16), cujos reflexos podem ser percebidos nos livros didáticos dos autores em evidência na época.

De um modo geral, nos livros didáticos desse período, percebe-se a concepção formalista moderna, na medida em que apresentam a Matemática por ela mesma, suas definições e aspectos estruturais, exagerando no rigor e precisão da linguagem e no uso da simbologia. Dessa forma, a essência, o significado epistemológico dos conceitos e os processos que os produzem são secundarizados. O caráter tecnicista é evidente nos exercícios do tipo “siga o modelo”, que enfatizava e valorizava o “fazer” em detrimento do compreender, analisar, argumentar, justificar e provar.

Na perspectiva dessa tendência pedagógica, “a aprendizagem da Matemática consiste, basicamente, no desenvolvimento de habilidades e atitudes e na fixação dos conceitos ou princípios” (FIORENTINI, 1995, p. 17), valorizando a memorização, a repetição de algoritmos, capacitando o aluno para a resolução de exercícios ou de problemas-tipo, com isso, procurando preparar recursos humanos competentes tecnicamente para a sociedade, vista como um sistema tecnologicamente perfeito, orgânico e funcional.

Ainda nas décadas de 60 e 70, o construtivismo piagetiano se fez sentir na Matemática, principalmente através do educador matemático Zoltan Dienes, propositor dos conhecidos “blocos lógicos” e da “Geometria pelas Transformações”.

Um fato curioso é que , quando ocorre o Movimento da Matemática Moderna, ainda se faziam sentir traços do Humanismo Tradicional e do Humanismo Moderno na matemática escolar, embora a tendência pedagógica que predominava oficialmente no Brasil era o Tecnicismo Educacional. Segundo Miguel (2004), “percorrendo o caminho da história da educação no Brasil pela via das tendências pedagógicas, foi possível perceber que muitos traços permaneceram, mesmo quando determinada tendência não era mais hegemônica” (p.55).

O Movimento da Matemática Moderna é citado como “um dos exemplos mais marcantes de transposição didática *lato sensu*” (PAIS, 2002, p.19) tendo em vista que o contexto original das idéias defendidas ficou distante das propostas curriculares e o resultado prático dessa reforma diferiu em muito as intenções iniciais; porém, como disse D’Ambrósio: “o movimento serviu para desmistificar muito do que se fazia no ensino da Matemática e mudar - sem dúvida para melhor - o estilo das aulas” (D’AMBRÓSIO, 1998, p. 57-58).

Assim, percebemos que a apropriação do Movimento da Matemática Moderna no Brasil, sugere a diversidade de significados atribuídos pelas pessoas a um mesmo objeto, e o uso diferenciado dos objetos colocados em circulação, confirmando a posição de Chartier

sobre a utilidade da noção de ‘apropriação’, na medida em que “postula a invenção criadora no próprio cerne dos processos de recepção” (CHARTIER, 1990, p. 136).

Esse autor considera o uso que as pessoas fazem dos objetos que lhes são distribuídos ou dos modelos que lhes são impostos, referindo-se às “práticas que se apropriam de modo diferente dos materiais que circulam em determinada sociedade” e, à “maneira contrastante como os grupos ou os indivíduos fazem uso dos motivos ou das formas que partilham com os outros” (Chartier, 1990, p. 136). Ainda, na sua perspectiva:

Pensar deste modo as apropriações culturais permite também que não se considerem totalmente eficazes e radicalmente aculturante os textos ou as palavras que pretendem moldar os pensamentos e as condutas. As práticas que deles se apoderam são sempre criadoras de usos ou de representações que não são de forma alguma, redutíveis à vontade dos produtores de discursos e de normas. O ato de leitura não pode de maneira nenhuma ser anulado no próprio texto, nem os comportamentos vividos nas interdições e nos preceitos que pretendem regulá-los. A aceitação das mensagens e dos modelos opera-se sempre através de ordenamentos, de desvios, de reempregos singulares, que são o objeto da história cultural (CHARTIER, 1990, p. 136-137).

Mas seja qual for o significado que lhe seja atribuído, a Matemática e o estudo da sua evolução ao longo do tempo, através dos modos como tem sido concebida e os métodos utilizados para o seu ensino e aprendizagem, atraindo, ainda hoje, olhares de educadores comprometidos com o papel da escola na organização sistemática do conhecimento dessa ciência e sua comunicação em nível escolar, em especial dos pesquisadores da história da educação matemática.

### 3 A LICENCIATURA E A FORMAÇÃO DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

#### 3.1. A Formação do Professor

O fenômeno educativo existe desde a origem do homem e foi se transformando lentamente ao longo da história, atingindo um caráter institucionalizado, onde inclui-se hoje, o saber pedagógico, que abarca os conhecimentos produzidos pelas ciências da educação, fornecendo a base de construção que define a identidade do educador, a qual nos dias atuais, denominamos professor.

A formação de professores pode ser considerada complexa e multidimensional, por constituir parte integrante do movimento sócio-histórico desencadeado pelas mudanças nas relações sociais, políticas e culturais que envolvem o homem, apresentando-se, assim, sob a forma de um processo com características de inconclusividade, visto seu poder de prolongar-se pela vida toda, mediante os acréscimos obtidos, principalmente, decorrentes de práticas reflexivas e investigativas que permeiam a ação docente, cada vez mais incentivadas e favorecidas pelos programas de capacitação continuada e pelas publicações contemporâneas.

Segundo Ferreira (2003), na maioria dos países, “formação de professores tem acompanhado historicamente as concepções teóricas e sócio-políticas de cada época” (p. 20). O “estado da arte” realizado pela autora nos informa que até os finais da década de 70, nos Estados Unidos, a formação dos professores para o ensino secundário era fortemente influenciada pelos estudos experimentais quantitativos, com ênfase nos métodos de treinamento em tarefas específicas .

As propostas de formação priorizavam modelos de comportamento para o professor, determinando a eficácia de determinadas condições e estratégias de ensino, orientadas por uma marcante presença das idéias skinnerianas, em que a educação é concebida como “ o estabelecimento de comportamentos que serão vantajosos para o indivíduo e para o grupo em um tempo futuro” (SKINNER, 1953, p. 403). Para esse psicólogo estadunidense,

Uma tecnologia do ensino pode resolver muitos problemas criados pelas diferenças individuais, suplementando histórias ambientais deficientes e assegurando-se de que as contingências educacionais estão completas e são eficazes. Não reduzirá entretanto os alunos a um só molde. Ao contrário, descobrirá e valorizará as diferenças genéticas genuínas. Se for baseada em uma sábia política, será também

capaz de planejar contingências ambientais que darão lugar à mais promissora diversidade (SKINNER, 1972, p. 232)

Na década de 70, as idéias skinnerianas influíram, significativamente, na educação brasileira, e conseqüentemente, na concepção de formação de professores. Nesse período a educação brasileira orientou-se pela política de desenvolvimento associado ao capital internacional, marcada pela racionalidade técnica que se expressava nas escolas pelo tecnicismo pedagógico, pelas famosas “reciclagens de professores”, principalmente, pela necessidade de maior divulgação e estudo da Lei 5692/71, lei que na ocasião, definia os rumos da educação no país. No estado do Paraná tais treinamentos ocorriam no CETEPAR (Centro de Seleção, Treinamento e Aperfeiçoamento de Pessoal do Paraná) sob a responsabilidade da Secretaria de Estado da Educação, através das longas instruções programadas prescritas aos professores em treinamento.

Nos anos 80, passaram a coexistir nas pesquisas, idéias distintas sobre a formação do professor: formação como treinamento e formação como educação. Essas idéias eram fundamentadas em diferentes concepções, sendo o ensino, por um lado visto como uma arte e por outro lado visto como uma profissão. Mas, o que prevalecia mesmo, era a idéia que ligava o “desempenho do estudante às características, os comportamentos e as decisões do professor” (FERREIRA, 2003, p. 22). Dessa forma, as investigações e práticas de formação apontavam mais para a atualização do conhecimento específico do professor, apostando-se que esta condição regulasse o desempenho do estudante.

Ainda segundo a autora, a partir dos meados da década de 90, as pesquisas sobre formação de professores centraram-se não apenas “no processo de aprender e ensinar dos professores, como também em suas crenças, suas concepções e seus valores” (FERREIRA, 2003, p. 24).

Desde que iniciaram as investigações sobre o pensamento do professor, seu comportamento e suas experiências, a visão de formação do professor, de ensino e aprendizagem, ganharam novas perspectivas, passando a ser considerados como elementos importantes na elaboração de programas de formação e de desenvolvimento profissional.

De acordo com Dewey (1959), a idéia de que um conhecimento se constrói a partir da experiência possuindo um lado pessoal, de construção individual mas também social, enfim, essa consideração pelo que o professor sabe e conhece sobre seu trabalho, tomou corpo internacionalmente e vem ganhando cada vez mais espaço, levando a uma evolução do conceito de formação de professores.

Na perspectiva de Darsie e Carvalho (1998, apud Ferreira 2003, p. 25), atualmente a formação de professores é compreendida como um processo contínuo, resultante da inter-relação de teorias, modelos e princípios extraídos de investigações experimentais e regras procedentes da prática. Essa tendência favorece o desenvolvimento profissional do professor, passando este, a ser valorizado como um elemento nuclear no processo de formação e mudança. Segundo Ferreira (2003, p. 25), o professor passou “de objeto passivo de estudo e formação, ele começa a ser considerado sujeito do estudo com participação ativa e colaborativa em muitos casos”.

No Brasil, essas modificações podem, também, ser decorrentes das novas políticas educacionais brasileiras, especialmente advindas da Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - Lei nº. 9394/96 (NISKIER, 1997, p. 29-58), bem como, de discussões geradas a partir de livros, artigos publicados em periódicos, dissertações e teses, que orientam para alterações em grades curriculares, metodologias de ensino, carga horária de prática de ensino e outros elementos constituintes dos cursos de licenciatura..

Os artigos 12 e 13 dessa Lei (NISKIER, 1997, p. 34), que atribuem aos estabelecimentos de ensino e aos docentes a elaboração da proposta pedagógica, parecem ter contribuído para que nesse início do século XXI, como inúmeros relatos comprovam, o professor conquiste cada vez mais, vez e voz.

### **3.2. Licenciatura no Brasil**

Como já disse Nóvoa (1991), “não há ensino de qualidade, nem reforma educativa, nem inovação pedagógica, sem uma adequada formação de professores” (p. 9). Quem pretende educar, precisa aprender, precisa ser formado, precisa ser educado para ser educador.

Ao curso de grau superior ou universitário, que habilita professores para atuar de 5ª até 8ª série do Ensino Fundamental e também no Ensino Médio, denomina-se Licenciatura Plena, mas normalmente é denominado apenas Licenciatura.

Segundo a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional – Lei 9394/96, artigo 62 (NISKIER, 1997, p. 50) e o Decreto nº. 3.276, de 6 de dezembro de 1999<sup>19</sup>, “a formação de

---

<sup>19</sup>Decreto nº. 3276/99. **Legislação do Ensino Superior.** Disponível em: <<http://www.pedagogiaemfoco.pro.br/lindice.htm#decretos> Acesso em 20/02/2008.

docentes para atuar na educação básica far-se-á em nível superior, em curso de *licenciatura*, de graduação plena, em universidades, centros universitários e demais instituições superiores de educação” (grifo nosso). A única exceção admitida pela LDB para que se formem professores que não em licenciaturas plenas para exercício de magistério na educação básica, é a que se desenvolve em nível médio, na modalidade Normal, que passa a ser formação mínima para o exercício do magistério na educação infantil e nas quatro primeiras séries do ensino fundamental.

Além das disciplinas de conteúdo da área de formação, a licenciatura requer também disciplinas pedagógicas e 300 horas de prática de ensino. Aliás, essa é uma das características principais da licenciatura, que ensina ao aluno, além das disciplinas da área de conhecimento específica do curso de formação, aquelas que fundamentam a ação docente voltada para a educação básica, ou sejam, as chamadas “disciplinas pedagógicas” que articulam os aspectos teóricos e práticos da prática profissional do futuro docente.

A Licenciatura Plena<sup>20</sup>, ministrada por universidades, centros universitários ou instituições não universitárias de educação superior, destina-se à formação de docentes para a educação básica. Segundo o artigo 7º da Resolução CNE/CP Nº. 1, de 30/09/1999<sup>21</sup>, os cursos de licenciatura plena, ministrados pelos Institutos Superiores de Educação, podem ser de dois tipos: o curso normal superior, para licenciatura de profissionais em educação infantil e de professores para os anos iniciais do ensino fundamental; e os cursos de licenciatura destinados à formação de docentes dos anos finais do ensino fundamental e do ensino médio, organizados em habilitações polivalentes ou especializadas por disciplina ou área de conhecimento. Ambos deverão ter duração mínima de 3.200 horas, computadas as partes teórica e prática. Além desses, nos termos da Resolução CNE Nº. 2/97<sup>22</sup>, poderão ser desenvolvidos programas especiais de formação pedagógica, destinados a portadores de diploma de nível superior que desejem ensinar nos anos finais do ensino fundamental ou no ensino médio, em áreas de conhecimento ou disciplinas de sua especialidade.

Segundo Candau (1987), “a formação de professores em instituições de nível superior surge no Brasil nos anos 30”( p. 11), com a criação de novas unidades de ensino inseridas em diferentes projetos de universidades, que emergem de diferenciadas correntes de pensamento

---

<sup>20</sup> Licenciatura Plena - Definição dada para o termo, no Glossário Institucional fornecido pela Assessoria de Gestão da Informação -Pró-Reitoria de Planejamento e Desenvolvimento - Universidade Federal de Minas Gerais. Disponível em:< <http://www.ufmg.br/proplan/glossario/e.htm>>. Acesso em 28 de fevereiro de 2008.

<sup>21</sup> CNE/CP nº. 1/99. Disponível em : <http://portal.mec.gov.br> Acesso em 30/03/08.

<sup>22</sup> CNE Nº 2/97 - Idem.

político, e que incluem diferentes modelos de organização das unidades responsáveis pelo processo de preparação de professores.

Em 1931, foi promulgado o Estatuto das Universidades Brasileiras, que estabeleceu os padrões de organização do ensino superior em todo o país, sendo que o primeiro efeito desse Estatuto foi a reforma da Universidade do Rio de Janeiro, a qual deveria incluir uma “Faculdade que compreenderia três seções: educação, ciências e letras, responsáveis pelo oferecimento dos Cursos de Licenciatura, que habilitariam os licenciados a lecionar as disciplinas de sua especialidade no curso normal ou secundário” (CANDAUI, 1987, p. 11). Na prática, essa faculdade não chega a ser instalada.

Vale lembrar, segundo Romanelli (1995, p. 149), que em 1932, o “Manifesto dos Pioneiros”, propunha dentre outras coisas, a unificação do processo de formação de professores para todos os graus de ensino, que deveria ser feito em cursos ou escolas universitárias.

Em janeiro de 1934, é criada, por decreto estadual, a Universidade de São Paulo – USP, cujo projeto original incluía além das Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras, uma Faculdade de Educação, que deveria ser o centro de formação de professores para o ensino secundário, embora o que se propusesse de fato é que ela ministrasse a formação pedagógica para os licenciados pela Faculdade de Filosofia.

Em 1937, a Universidade do Rio de Janeiro sofre nova reorganização. A Faculdade de Educação, Ciência e Letras que nunca chegara a existir, é fragmentada em duas: Faculdade Nacional de Educação e Faculdade Nacional de Filosofia, Ciências e Letras. Mas, em 1939, uma das reformas setoriais de Francisco Campos, que respondia pelo recém criado Ministério de Educação e Saúde Pública do Governo Vargas, transforma a Faculdade de Educação em duas seções da Faculdade de Filosofia: a seção de Pedagogia criando-se um Curso de Bacharelado nessa especialidade, e a seção especial de Didática, que habilitava os bacharéis a lecionarem no ensino secundário,

Definiu-se assim a Faculdade Nacional de Filosofia, como o ‘estabelecimento federal de ensino destinado à preparação do magistério secundário, tendo também o objetivo de aumentar e aprofundar a cultura nacional no terreno filosófico e literário’ (CANDAUI, 1987, p. 13). Tendo em vista esses objetivos, propõe-se para ela uma tríplice finalidade:

- a) preparar trabalhadores intelectuais para o exercício das altas atividades culturais de ordem desinteressada ou técnica;
- b) preparar candidatos ao magistério do ensino secundário e normal;
- c) realizar pesquisas nos vários domínios da cultura que constituam objeto do seu ensino (CANDAUI, 1987, p. 13).

Quando às Faculdades de Filosofia, Ciências e Letras foram criadas no Brasil, foi necessário trazer professores de fora do país, havendo uma reação nacionalista, e, apesar, de um corpo docente de alta competência, o número de matrículas foi pequeno, a ponto de serem recrutados professores primários que continuavam recebendo seus salários.

Para Teixeira (1968 apud Candau 1987), com exceção dessas faculdades maiores do Rio e de São Paulo, foi mais ‘como escolas normais de professor secundário do que como Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (TEIXEIRA, 1968, p. 46) que essas instituições se multiplicaram, passando a ser entendidas como um empreendimento fácil, favorecendo a expansão da rede privada de Faculdades de Filosofia, muitas destituídas de condições mínimas para funcionar normalmente’ (FERNANDES, 1962, p. 227-228, apud CANDAU, 1987, p. 15).

Após 1960, o processo de expansão dessas faculdades se acentuou ainda mais, de forma desordenada, e embora inicialmente elas estivessem “orientadas para a pesquisa científica e alta cultura, tornaram-se na realidade, uma instituição de massa” (SUCUPIRA, 1969, p. 264). No entanto, apesar de todas as dificuldades, considera-se o papel relevante que algumas dessas escolas tiveram em nosso desenvolvimento cultural.

De acordo com Candau (1987, p. 19), os principais marcos legais<sup>23</sup> na evolução dos cursos de licenciatura no Brasil, foram:

Decreto-lei nº. 1190 de 4/4/1939 (BRASIL, 1953a), que organizou a Faculdade Nacional de Filosofia, exigida como modelo padrão pelas demais escolas, que preveja a existência de uma seção especial de didática, responsável por um ‘curso ordinário’, cuja duração de um ano, acrescentado aos cursos de bacharelado<sup>24</sup>, com duração de três anos. Esse curso, deveria compreender as seguintes disciplinas: Didática Geral, Didática Especial, Psicologia Educacional, Administração Escolar, Fundamentos Biológicos da Educação e Fundamentos Sociológicos da Educação.

Decreto-lei nº. 9092 de 26/3/1946 (BRASIL, 1953b), que ampliava o regime didático das faculdades de filosofia, de aplicação facultativa, equiparando a duração dos cursos de bacharelado e licenciatura. Esse decreto prescrevia que no quarto ano os alunos poderiam

---

<sup>23</sup> Os instrumentos legais citados no texto, encontram-se especificados nas Referências Bibliográficas.

<sup>24</sup> Bacharelado - Modalidade de oferta de curso de graduação que conduz ao grau de bacharel. Esse grau confere, ao diplomado, habilidades e competências num determinado campo do saber para o exercício da atividade profissional. Disponível em:< <http://www.ufmg.br/proplan/glossario/e.htm>>. Acesso em 28 de fevereiro de 2008.

optar por duas ou três cadeiras ou cursos dentre os ministrados pela faculdade (art. 4º), sendo que os candidatos ao diploma de licenciado receberiam formação didática, teórica e prática no ginásio de aplicação, sendo obrigados a um curso de psicologia aplicada à educação (Art. 4º, § 1º). Anteriormente, pelo Decreto-lei 9053, de 12/3/1946 (BRASIL, 1974b), tornara-se obrigatório às faculdades de Bacharelado - Filosofia manter um ginásio de aplicação destinado à prática docente dos alunos matriculados no curso de didática.

Após a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional, Lei 4024/61 de 20/12/1961, o Parecer nº. 292/62, do Conselho Federal de Educação (BRASIL, 1974,b), estabelecia que os currículos mínimos dos cursos de licenciatura compreenderiam as matérias fixadas para o bacharelado, convenientemente ajustadas em sua amplitude e os estudos profissionais que habilitem ao exercício do magistério nos estabelecimentos de ensino médio e trata desta última parte do currículo. Partia do princípio de que o ‘que ensinar’ preexistiria e ao ‘como ensinar’, e de certo modo o condiciona, mas que a formação do licenciado deveria incluir, além da parte de conteúdo fixada no currículo de cada curso, estudos que o familiarizem com os dois aspectos imediatos da situação docente: o aluno e o método. Com esse objetivo, prescrevia matérias pedagógicas de caráter obrigatório, como a Psicologia da Educação, incluindo Adolescência e Aprendizagem, Didática e Elementos de Administração Escolar, além da Prática de Ensino das matérias que seriam objeto de habilitação profissional, sob a forma de estágio supervisionado. Esta última, foi a única inovação efetivamente introduzida.

Lembra o Parecer que a exigência feita pela legislação anterior de um colégio de aplicação, anexo às faculdades de filosofia, por ser de montagem evidentemente custosa e difícil, deixou de surgir na maioria das faculdades de filosofia e mesmo naqueles em que foi criado, o seu funcionamento ou reproduziu a rotina dos educandários comuns, ou deles fez uma autêntica *vitrina pedagógica*, onde os alunos-mestres passivamente assistiam como espectadores, ao que, a rigor, não lhes era dado fazer. O Parecer propunha, inclusive, redefinir esses colégios como centro de experimentação e demonstração e desenvolver a Prática de Ensino nas escolas da comunidade, nos moldes dos internatos dos cursos de Medicina.

Dispõe ainda o Parecer que era preciso entender a licenciatura como um grau apenas equivalente ao bacharelado, e não igual a este, mais Didática, como acontece no conhecido “3 + 1”. Estabelecia, nesse sentido, que as matérias de formação pedagógica deveriam ser oferecidas ao longo de cinco semestres e não ao final do curso, em um ano, como se fazia no regime anterior. Entretanto, a parte pedagógica da licenciatura ficou reduzida de um quarto para um oitavo, do período total de duração do curso (quatro anos), excluindo do currículo os fundamentos (biológicos e sociológicos) da educação.

Pelo Parecer nº. 627/69 (BBRASIL, 1974c), a disciplina Elementos de Administração Escolar é substituída por Estrutura e Funcionamento do Ensino de 2º Grau.

Essas indicações oficiais, demonstram a reduzida atenção à formação pedagógica daqueles que conduziam em sala de aula, a aprendizagem dos educados brasileiros. Assim, temos indícios para inferir, que na época em que o Movimento da Matemática Moderna disseminava-se no Brasil, foram instituídas as matrizes de formação do professor de ensino secundário, inclusive do licenciado em Matemática.

Nossa atenção aos textos oficiais, apóia-se nas indicações de Julia (2001), que os considera “uma perspectiva interessante para se entender a cultura escolar como objeto histórico” (p. 9). Segundo esse autor, “Não existe na história da educação estudo mais tradicional que o das normas que regem as escolas ou os colégios, pois nós atingimos mais facilmente os textos reguladores e os projetos pedagógicos que as próprias realidades” (JULIA, 2001, p. 19).

Na década de 70, tais determinações legais ainda caminhavam com passos lentos, como aponta o depoimento de uma das licenciandas da turma (1970-1973), do Curso Licenciatura em Matemática, em uma dentre as Instituições de Ensino Superior do interior paranaense, na qual, as práticas da Matemática Moderna efetivadas, constituem o objeto da pesquisa que ora apresentamos.

*Quando eu estava no último ano, que a gente fazia o estágio do curso de Licenciatura, a aula que eu expus era sobre conjuntos e eu usei o que estava no auge: os conjuntos e a seleção brasileira, ainda do tempo do Pelé, que usei como motivação e exemplo prático, para trabalhar união e intersecção de conjuntos. Você tinha que ter criatividade para montar a aula porque a formação não favorecia exemplos práticos da aplicabilidade da Teoria dos Conjuntos. Quais conjuntos eu trabalhei?... A seleção brasileira que era de 70, que disseram ser a melhor que houve até hoje, e o Santos, que tinha a maioria dos jogadores na seleção. Quem assistiu a aula, achou criativo, pois deu a idéia, deu praticidade, coisa que a licenciatura não fazia (Entrevistado C, 2007).*

Ao perguntarmos para essa entrevistada, de onde vinha sua postura como educadora em relação à motivação nas aulas, nos respondeu:

*Eu aprendi a importância da motivação na Escola Normal e na vida; a Escola Normal é a base para qualquer profissional da educação. Eu acho que o professor de 5ª `8ª série ou de universidade que passou por um estudo do ensino de 1ª à 4ª série na Escola Normal, é diferente. Ainda bem que voltou o Magistério. É uma grande formação (Entrevistada C, em 2007).*

Esse depoimento nos faz refletir sobre as realizações possíveis, enquanto existirem professores criteriosos, maduros, criativos e comprometidos com o seu fazer pedagógico.

Segundo Chervel (1990, p. 205), “as práticas da motivação e da incitação ao estudo são uma constante na história dos ensinos”. Ao exteriorizar seu pensamento, esse autor prossegue, dizendo:

A história das práticas de motivação e de incitação ao estudo atravessa de lado a lado toda a história das disciplinas (...) O debate teórico sobre a duração desejável dos procedimentos de estimulação em aula não cessou desde os jesuítas (...) O estudo da evolução das disciplinas, conteúdos e exercícios, mostra que as práticas de estimulação do interesse do aluno estão constantemente em ação nos arranjos mínimos ou importantes que elas sofrem. (CHERVEL, 1990, p. 205).

O relato incluindo a prática da motivação mostra, também, usando as palavras desse autor, “o caráter eminentemente criativo do sistema escolar”, representado aqui pela atitude da professora, então licencianda, a respeito de um conteúdo, no caso, união e intersecção de conjuntos, que poderia na visão do matemático, ser tratado por si só.

Ainda, segundo Chervel,

Porque são criações espontâneas e originais do sistema escolar é que as disciplinas merecem um interesse todo particular. E porque o sistema escolar é detentor de um poder criativo insuficientemente valorizado até aqui é que ele desempenha na sociedade um papel que não se percebeu que era duplo: de fato ele forma não somente os indivíduos, mas também uma cultura que vem por sua vez penetrar, moldar, modificar a cultura da sociedade global (CHERVEL, 1990, p. 184).

Com a reforma universitária, criada pela Lei 5.540/ 68 (CARVALHO, 1975), que promoveu mudanças na organização das universidades e dos cursos superiores, dividindo-as em departamentos, e direcionando-as para o mercado de trabalho, veio a criação das licenciaturas curtas, com menor tempo de curso, interpretada como uma solução de emergência para atender o descompasso que se estabelecia e tendia a aumentar entre a expansão da rede de ensino até a 8ª série e o ritmo e a forma de preparação de docentes. Pelo seu desempenho sofrível, essa modalidade de formação de professores, trouxe entre outras conseqüências, segundo Romanowski (2007), “uma desestruturação na formação dos professores” (p. 79), por aligeirarem os processos de formação, provocando debates acirrados, até a extinção desses cursos em 1980.

Para Martins (2004), a década de oitenta pode ser considerada como um importante momento histórico no Brasil, marcado pela abertura política do regime militar instalado em 1964, e pelo acirramento de lutas de classe no país. Nesse contexto, uma das palavras de

ordem era “unidade teoria-prática” (grifos nossos), ampliando-se as discussões das questões didáticas. Segundo a autora, “ênfata-se a necessidade de formar educadores críticos e conscientes do papel da educação na sociedade, e mais, comprometidos com as necessidades das camadas populares cada vez mais presentes na escola e dela excluídos” (MARTINS, 2004, p. 46). Se durante o regime militar buscava-se um professor tecnicamente competente, comprometido com o programa político-econômico do país; com a abertura política, a preocupação gira em torno da formação de um professor politicamente comprometido com a transformação social.

Ainda segundo essa autora, nesse momento histórico, “a dimensão política do ato pedagógico agora é objeto de discussão e análise. Para tanto, a contextualização da prática pedagógica passa a ser fundamental; busca-se compreender a íntima relação entre a prática escolar e a estrutura social mais ampla” (MARTINS, 2004, p. 47). Ainda nesse cenário, surgem novos objetos de estudo, em que o próprio fazer passa a ser fundamental como elemento educativo.

Nesse contexto, de acordo com Romanowski (2007), muitos estudos e propostas para os cursos de licenciatura foram alvos de debates, enfatizando-se denúncias sobre o tecnicismo educacional, que permeava a organização da escola e o trabalho dos professores, além do baixo investimento em educação e a desprofissionalização docente.

A partir dos anos 90, as propostas sobre formação docente passaram a rever a relação teoria e prática, assim descrita por essa autora:

Assim, a prática assumiu uma nova concepção, não mais como campo de aplicação da teoria, mas ela mesma como espaço de formação. Os temas em discussão nos anos de 1990 incluem a relação ensino-pesquisa, o estudo da realidade pedagógica, os estudos sobre a formação prática do professor, a complexidade da função docente e as preocupações com a formação continuada do professor (ROMANOWSKI, 2007, p. 81).

Essa valorização da prática, como espaço de formação, modificou os rumos da licenciatura, ganhando grande acolhida as proposições sobre o professor reflexivo, como também, o desenvolvimento das disciplinas pedagógicas e a própria prática pedagógica, ao longo e não ao final dos cursos de licenciatura. Vale lembrar, que a LDB, Lei 9394/96, em seu Art. 61 (NISKIER, 1997, p. 49), contempla como um dos fundamentos da formação de profissionais da educação, “a associação entre teorias e práticas” e garante através do seu Art. 65, que a formação docente incluirá prática de ensino.

Atualmente, os processos de formação de professores incluem a valorização da pesquisa, como elemento favorecedor do desenvolvimento do professor como agente de mudança e como produtor da teoria crítica em educação, pois ajuda a encontrar soluções e a lidar com pressupostos e representações.

Uma das pesquisas realizadas por Ludke (2004), citado por Romanowski (2007), sobre a investigação efetuada por professores que atuam em cursos de licenciatura, evidencia que esses professores admitem a importância da pesquisa para a formação docente, apesar de ainda não haver consenso sobre o tipo de pesquisa mais adequado para o magistério da educação básica, como princípio de formação continuada. Os resultados indicaram, também, que a organização dos currículos dos cursos de licenciatura continua não privilegiando o desenvolvimento da inclusão da pesquisa como eixo da formação docente.

Há que ser considerado, no entanto, “que o movimento da realização da pesquisa pelos professores colocou novas perspectivas no campo da ação docente, em que investigar, questionar, confrontar são ações necessárias, independente de se atribuir o rótulo de pesquisa a esse tipo de atividade” (ROMANOWSKI, 2007, p. 159).

Assim visto, a formação acadêmica para exercer uma função transformadora, deve contar com docentes sensíveis aos acontecimentos sociais, científicos, tecnológicos, políticos e econômicos de relevância naquele momento histórico e comprometidos com o fato de que “há a necessidade de formar um docente inquiridor, questionador, que problematize criticamente sua prática, para o desenvolvimento de uma atitude ativa, autônoma, criativa e comprometida” (ROMANOWSKI, 2007, p. 159).

Embora a dominância desse tema em congressos educacionais e em publicações, a realidade que se nos apresenta, é que “apesar da mudança de discurso, o que percebemos nos processos de formação de professores, é a continuidade, uma prática predominantemente retrógrada e centrada no modelo de racionalidade técnica que cinde teoria e prática” (FIORENTINI, 2003, p. 9).

De acordo com esse autor,

a verdade é que ainda sabemos muito pouco sobre como transformar o discurso em práticas efetivas, ou melhor, como produzir discursos autênticos, e sem ambigüidade semântica, a partir de investigações e experiências concretas que contemplem as novas concepções do professor como profissional autônomo e investigador de sua própria prática (FIORENTINI, 2003, p. 9).

A vivência dos 40 anos dedicados à docência em Matemática, à participação em muitos encontros de capacitação de professores, decorrentes do exercício de técnico

pedagógico em Núcleo Regional de Educação, e a outras funções pedagógicas no ambiente escolar, nos forneceu evidências que, embora lentamente, já existem ganhos nessa escalada de mudança de concepções, pois, atualmente, o número de professores que admitem que seus discursos mudaram e procuram identificar e superar os obstáculos que os impedem de transformarem seus discursos em efetivas práticas, vem aumentando dia após dia.

Os estudos realizados por Gatti (1997), repetimos, levam-na a considerar que as Licenciaturas em geral, ocupam nas universidades um lugar de ‘curso menor, e a fragmentação da formação, com a separação, sem articulação conveniente, entre as disciplinas de conteúdos básicos e conteúdos de disciplinas pedagógicas, tem sido o fator mais apontado como determinante dos problemas de formação profissional dos docentes para o ensino fundamental e médio.

Considera, também, que “os colegiados de curso , quando existentes, não se mostram capazes de equacionar questões sobre a formação teórica e pedagógica nas licenciaturas, imperando a *rotina e a repetição mecânica das estruturas*, já falidas, de formação e das disciplinas” (GATTI, 1997, p. 52, grifos da autora).

Levantando como ponto relevante a questão *quem educa o educador*, considera a formação falha dos docentes formadores dos futuros professores, indicando que para uma melhor capacitação teórico-prática desses professores do ensino superior exigem-se decisões rápidas e ações congruentes, enfatizando três pontos:

- a) a ausência, em nível dos cursos e instituições, de uma proposta, de uma perspectiva, de um perfil profissional do docente a ser formado (às vezes até será preciso criar a consciência de que se está formando um professor); b) a falta de integração das áreas de conteúdo e das disciplinas pedagógicas dentro de cada área e entre si; c) a formação dos formadores (GATTI, 1997, p. 53, grifos da autora).

Concordamos com a autora, que a revisão e a mudança destas condições é ponto básico para melhor qualificação nas licenciaturas, particularmente, se associadas a uma visão do papel social que os cursos de formação de professores representam, ao cumprirem seu principal objetivo, entendido como, o de preparar os formadores de cidadãos, não apenas aqueles que um dia adrentarão uma universidade, mas, aqueles que no seu dia a dia, constroem essa sociedade que é de todos.

### 3.3. Formação do Professor de Matemática

Vivemos um momento ímpar de reflexão e discussão sobre a formação de professores, pois esta constitui uma preocupação fundamental na comunidade educacional contemporânea, e, em se tratando da formação de professores de Matemática, aumenta o calor dos debates, visto as tradicionais referências ao fracasso escolar atribuídos a essa disciplina.

Segundo Fiorentini (2003), atualmente, a formação de professores de Matemática recebe muitas críticas pela desatualização dos cursos de licenciatura e da não viabilização do rompimento com tradições pedagógicas, favorecendo a resistência dos professores recém formados às inovações curriculares. Sob sua ótica, os formadores de professores de Matemática são injustamente apontados, pois, constituem “um dos grupos profissionais que mais procuram se aventurar por novos caminhos e com outros olhares em relação à formação do professor, aos seus saberes e à sua prática docente” (FIORENTINI, 2003, p. 10).

Essas críticas ao conservadorismo de práticas pedagógicas dirigidas aos cursos de formação de professores de Matemática, responsabilizando-os pela conservação de tradições e resistência às inovações, se devem, em parte, pela priorização dada ao conhecimento específico dos conteúdos programados, em detrimento da atenção ao tratamento didático-metodológico dos mesmos.

Segundo Cury (2001), após sucessivas mudanças nos currículos dos cursos de Licenciatura em Matemática, por decisões do Ministério da Educação ou por decisão das próprias Instituições de Ensino Superior, chegou-se a uma estrutura que, em geral, privilegiava as disciplinas matemáticas nos primeiros semestres do curso, e, nos últimos semestres as disciplinas pedagógicas – Psicologia Educacional, Estrutura e Funcionamento do Ensino Fundamental ou Médio, Didática e Prática de Ensino – além de outras que procuravam fazer a ponte entre a área específica e a área pedagógica, como a Metodologia do Ensino de Matemática.

Na perspectiva dessa autora,

Nas licenciaturas em Matemática, os professores que lecionavam as disciplinas de Matemática Pura e Aplicada, ainda que tivessem experiência com o ensino básico, não externavam suas preocupações com a formação pedagógica dos licenciados pois, em geral, consideravam que sua responsabilidade era com os conteúdos matemáticos a serem apresentados. Deixavam, assim, aos colegas que lecionavam disciplinas didático-pedagógicas, a tarefa de discutir todos os aspectos do processo ensino-aprendizagem de Matemática (CURY, 2001, p. 11).

Entendemos que esta visão compartimentada do conhecimento, ainda nos dias de hoje, tem comprometido a relação de interdisciplinaridade, que daria mais sentido ao estudo das disciplinas matemáticas distintas, bem como, descarrega o professor de se preocupar com suas atitudes pedagógicas, induzindo-o talvez a esquecer que o principal objetivo de um curso de licenciatura é a formação de professores, é preparar os profissionais para atuar no ensino básico.

Para Cury (2001), o fato do quadro de professores das disciplinas matemáticas dos primeiros cursos de Licenciatura ser composto, em grande parte, por engenheiros e bacharéis em Ciências Físicas e Matemáticas, muitas vezes com significativa bagagem de conhecimentos na área, mas, sem formação pedagógica, contribuiu para o estabelecimento e uma cultura de valorização acentuada do conteúdo matemático em detrimento da metodologia de ensino. Destaca também, que o conjunto de influências sofridas pelos professores faz parte da concepção dominante em cada época. Assim, por longo tempo, muitos professores, apesar de jovens, recém formados, assumiram em suas aulas uma postura autoritária e uma visão absolutista de que o conhecimento matemático estava pronto, acabado, formado por verdades incontestáveis.

A partir da década de 80, com a intensificação de congressos, cursos, palestras ou artigos publicando investigações sobre o ensino de Matemática, em grande parte, decorrentes dos cursos de Pós-Graduação, as discussões sobre a formação de professores ganharam impulso, e os docentes das disciplinas específicas começaram a se sentir mais diretamente envolvidos com a formação dos licenciandos, surgindo, inclusive propostas diferenciadas de trabalho, como é o caso da Licenciatura em Matemática na UNICAMP, apontado por Gatti (1997).

Segundo essa autora, realizou-se uma reformulação global na Licenciatura em Matemática na Universidade de Campinas, introduzindo-se a idéia de desenvolvimento de projetos integrados – projetos de ensino – como forma de superação da desvinculação da formação especial e da pedagógica, que se instala pela falta de integração na universidade das diferentes áreas envolvidas na formação de professores.

Em encontros sistemáticos, os professores do Instituto de Matemática orientam os alunos com relação ao aprofundamento dos conceitos referentes aos temas objetos de estudo, e os professores da Faculdade de Educação orientam os alunos quanto ao estudo das diferentes possibilidades de abordagens didáticas, implicando orientações de teorias de desenvolvimento da criança e do adolescente, teorias da aprendizagem, questões sócio-

lógicas, de antropologia cultural, etc. “Estes encontros garantem uma integração real entre as áreas, uma vez que, neles, conteúdos específicos e conteúdos pedagógicos são abordados conjuntamente” (GATTI, 1997, p. 77).

Nos dias atuais, muitos professores apresentam discursos inovadores, mas, pelas pressões representadas pelas suas experiências de ensino, pelos modelos de professores que tiveram e, até, pela imagem do professor de matemática enraizada na sociedade, não conseguem modificar a sua prática. “Alguns formadores universitários contribuem ainda hoje, para formar professores sem terem qualquer outra experiência de sala de aula a não ser o seu passado como alunos” (PERRENOUD, 1993, p. 147).

Como disse Beatriz D’Ambrósio:

Dificilmente um professor de Matemática formado em um programa tradicional estará preparado para enfrentar os desafios das modernas propostas curriculares. As pesquisas sobre a ação de professores mostram que em geral o professor ensina da maneira como lhe foi ensinado. Predomina, portanto, um ensino em que o professor expõe o conteúdo, mostra como resolver alguns exemplos e pede que os alunos resolvam inúmeros problemas semelhantes. Nessa visão de ensino, o aluno recebe instrução passivamente e imita os passos do professor na resolução de problemas ligeiramente diferentes dos exemplos. Predomina o sucesso por memória e repetição (D’AMBROSIO, 1993, p. 38).

Visto dessa forma, os licenciados podem assumir as concepções de seus mestres, concebendo a Matemática e o seu ensino, a partir das experiências vivenciadas como alunos. Como disse o eminente Professor Ubiratan D’Ambrósio (1998):

Todo professor, ao iniciar sua carreira, vai fazer na sala de aula, basicamente, o que ele viu alguém, que o impressionou, fazendo. E vai deixar de fazer algo que viu e não aprovou. (...) Mas sem dúvida o racional, isto é, aquilo que se aprendeu nos cursos, incorpora-se à prática docente (D’AMBRÓSIO, 1998, p. 91).

Depoimento oral feito por um dos entrevistados, ex-licenciando da turma focalizada na presente investigação, ao falar sobre as aulas de Fundamentos de Matemática Elementar, reitera a declaração de D’ Ambrósio: “*o modo simpático e claro com que o professor dessa matéria a transmitia, despertava na gente mais gosto pela matéria e até um querer imitá-lo na sua didática, pois gostava muito de suas aulas e a gente aprendia*” (Entrevistado A, 2006).

Nesse mesmo sentido, acredita-se que “num curso superior, o aluno busca, além de conhecimentos técnicos e titulação, também, um símbolo idealizado de profissional a quem imitar” (BAZZO, 1998, p. 251, apud CURY, 2001, p. 13). Entendendo-se daí, os muitos casos

de prevalência do carisma da competência profissional do professor formador, sobre a formação didático-pedagógica formal que ele apresenta.

Moura (1995) nos lembra, que

a certeza de que o conhecimento está em constante transformação ou em criação, deve dar ainda a consciência a este educador matemático de que a sua formação é um conceito relativo, pois deverá estar constantemente buscando novos conhecimentos para poder empreender cada vez melhor a sua ação educativa (MOURA, 1995, p. 21).

Concordamos com as palavras de Moura (1995), em que o papel do professor nessa nova sociedade tecnológica, requer dele uma postura aberta à aprendizagem constante e a uma troca efetiva com o aluno que, por muitas vezes, encontra-se à frente dele, face suas experiências já realizadas como produto de uma sociedade informatizada.

Dessa forma, a abertura do professor formador à atualização, revelando sua sensibilidade às mudanças contextuais, sua louvável postura de aprendiz e, também, seu entendimento de conhecimento como algo inconcluso, inacabado, são características apontadas como significativas para o favorecimento de sua ação pedagógica e de seu papel de formador de formadores de cidadãos.

Moura também nos lembra, que tem sido comum nos últimos anos um decréscimo no número de formandos nas licenciaturas em Matemática.

### **3.4. Formação de professores em tempo de Matemática Moderna**

O Movimento da Matemática Moderna, após vinte anos de trajetória no Brasil e em outros países, foi aos poucos perdendo vigor, e dentre outros fatores de seu insucesso, conforme indicações de Pinto (2007), o despreparo dos professores para ensinar a Matemática Moderna, tem sido um dos mais lembrados.

Buscando melhor compreender essa polêmica questão, essa autora analisou o cenário brasileiro de formação de professores de Matemática, no momento da disseminação do movimento, bem como as ações desencadeadas para que a Matemática Moderna chegasse com sucesso às salas de aula brasileiras. Para tanto, analisou nos relatórios das duas primeiras Conferências Interamericanas sobre Educação Matemática, realizadas em 1961, na Colômbia, e, em 1966, no Peru, os discursos pronunciados sobre as questões de formação e preparação

dos professores nos anos 60, em nosso país, pelos representantes brasileiros: Professor Omar Catunda, orador da Primeira Conferência, que abordou a formação inicial de futuros docentes de Matemática; Professora Martha Maria de Souza Dantas e Professor Osvaldo Sangiorgi, oradores na Segunda Conferência, que abordaram a preparação de professores em serviço, caracterizando os cursos de Matemática Moderna oferecidos pelos catedráticos aos professores do ensino secundário, nos anos 60, no Brasil.

Segundo Pinto (2007), “Omar Catunda apresentou um quadro crítico da situação do professor de Matemática no Brasil” (p. 246), alegando que a formação de futuros professores não era satisfatória, referindo-se entre outros fatores, à carência de professores para o ensino secundário, informando que apenas 20% dos professores de Matemática no Brasil possuíam formação superior, e que por muito tempo, os professores sem uma preparação especializada eram autorizados a lecionar, através de decretos ministeriais, admitindo-se também, a entrada de licenciandos de física, pedagogia, ciências sociais, desde que houvesse em seus programas de formação uma parte mínima de ensino de matemática.

Colocou também o referido orador, fatores como a falta de valorização da carreira docente, a excessiva jornada de trabalho e os encargos docentes extra-classe, como favorecedores dessa lastimável situação, alegando que o quadro por ele apresentado poderia ser resolvido a longo prazo e que uma das soluções seria incentivar a pesquisa entre os matemáticos professores. Continuou sua exposição, observando que no Brasil, não havia sido discutido de forma organizada a introdução da Matemática Moderna nos currículos escolares, fez referências, entre outras, ao papel de Osvaldo Sangiorgi como articulador do Curso de Lógica Elementar ministrado por George Springer aos professores secundários, à estrutura inadequada para a formação de professores do Curso de Licenciatura da USP e, à defasagem dos conteúdos matemáticos elementares apresentadas pelos candidatos à Licenciatura.

Segundo Pinto (2007), “em relação ao Movimento da Matemática Moderna, Catunda disse que a estrutura do ensino elementar brasileiro era muito frágil para resistir a uma reforma radical” (p.247). No entanto, admitia concordar que a álgebra fosse introduzida de maneira mais moderna, baseando-se nas noções fundamentais de conjuntos, e que em relação à geometria os alunos praticamente não aprendiam nada, daí advogar por ‘pelo menos Euclides’ ao invés do ‘Abaixo Euclides’<sup>25</sup>, referindo-se à famosa frase de Dieudonné, em seu *Pour une conception nouvelle de l’enseignement des mathématiques, Mathématique Nouvelles*.

---

<sup>25</sup> DIEUDONNÉ, J. Pour une conception nouvelle de l’enseignement des mathématiques, Mathématique Nouvelles. Paris: OECE, 1961, p. 37.

Prosseguindo em seu relato, a autora complementa:

Ao encerrar seu discurso, Catunda defendeu a formação do professor em um curso de três ou quatro anos, em que nos dois primeiros, os licenciandos tivessem uma formação matemática junto com os professores do Bacharelado. Não mencionou como seriam os dois últimos, apenas ressaltou a necessidade de introdução de disciplinas especiais, como os seminários de revisão das matemáticas elementares, além de um contato mais freqüente da universidade com os professores secundários em exercício, por meio de cursos de férias, conferências e debates (PINTO, 2007, p.248).

Na conclusão dos trabalhos dessa Primeira Conferência, segundo Pinto (2007), foram emitidas recomendações, aos governos e autoridades competentes, sobre a formação de professores, quanto à divulgação da importância social da carreira de professor e que o professor do ensino médio fosse formado exclusivamente nas universidades; e sobre os professores em exercício, que se regularizassem os contatos entre os professores do ensino secundário e universitários, devendo aqueles concorrer a cursos regulares e especiais de aperfeiçoamento, além de que, deveriam ser tomadas medidas para elevar o nível sócio-econômico dos professores, com melhoria de salários, regimes de ascensão na carreira, regime de dedicação exclusiva, diminuição de carga horária e garantia de estabilidade.

Analisando o relatório da Segunda Conferência Interamericana sobre Educação Matemática, Pinto (2007) relata que a Professora Martha Dantas, da Universidade Federal da Bahia, abordou o treinamento em métodos modernos dado aos professores do ensino secundário pelas universidades, diante da solicitação feita no terceiro Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática, para que fosse revista a estruturação dos cursos de matemática nas Faculdades de Filosofia, de modo a que estas incluíssem em seus currículos, um estudo de matemática moderna para os professores secundários.

Dantas, colocou também, críticas à Lei de Diretrizes e Bases – Lei 4024/61 (BRASIL, 2006), em vigor no Brasil nessa época, por não estimular o professor do ensino secundário a buscar especialização, lembrando a problemática educação de professores e a então complexidade em prepará-los para ensinar matemática moderna. Prosseguindo em seu discurso, mencionou experiências concretas em desenvolvimento no Brasil, como os cursos realizados em São Paulo pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática - GEEM<sup>26</sup>, e outras ações desencadeadas e cursos realizados em diversos estados brasileiros, com apoio de

---

<sup>26</sup> Sobre os cursos realizados pelo GEEM, ver LIMA, Flainer R. de. *GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática e a formação de professores durante o Movimento da Matemática Moderna*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - São Paulo: PUC/SP, Setembro de 2006.

organismos governamentais, incluindo na programação desses cursos, com duração de um mês, tópicos da teoria dos conjuntos, lógica matemática, probabilidade, álgebra moderna e álgebra linear.

Salientou, ainda, essa oradora, que antes de receber novas informações, havia necessidade de que os professores sobrepujassem as deficiências de raciocínio, abstração e generalização presentes em sua educação.

Informa também, a autora, que o Professor Osvaldo Sangiorgi, em sua apresentação do tema ‘ Progresso do ensino da matemática no Brasil, exaltou o sucesso que o MMM vinha alcançando nesse país, dizendo-se orgulhoso pela fase de modernização em que o mesmo se encontrava, em relação ao ensino da Matemática, apesar da imprecisão do alcance desse progresso, devido à sua vasta extensão territorial. Forneceu dados relativos a um triênio de progressos educacionais em Matemática, salientando entre outros, que, a taxa percentual de professores de Matemática com ensino superior, passou de 22% para 47% em três anos, embora o *déficit* de docentes licenciados continuasse a existir, comentando também a Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário (CADES) voltada para o preparo dos professores ainda não licenciados e realizado em várias regiões do país.

Além de se referir aos 13 Institutos de Pesquisa Matemática, e o alto nível dos Colóquios Brasileiros de Matemática, promovidos pelo Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), significou os Congressos Brasileiros do Ensino de Matemática como espaços importantíssimos de diálogo entre os professores universitários e professores secundários. Também foram considerados sinais de progresso por Sangiorgi, os grupos de estudos e as Classes Experimentais por eles orientadas, criados em diversas capitais de estados brasileiros, publicações que circulavam no país sobre a Matemática Moderna, a programação adotada desde 1963 e, em vigor em 70% das escolas, além das iniciativas da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, como os programas de TV Escolar que ofereciam aulas de Matemática Moderna para professores e alunos.

Continuando suas referências para descrever a trajetória do MMM no Brasil, citou as reuniões promovidas pela Sociedade Brasileira para o Progresso da Ciência (SBPC), os cursos e as publicações relativas à Matemática, do Instituto Brasileiro de Educação, Ciência e Cultura - IBECC – *Unesco*, o *Primeiro Curso de Atualização em Matemática Moderna para Pais*, a 1ª Olimpíada de Matemática Moderna, a exigência da Matemática Moderna nos Concursos de Ingresso para o Magistério Secundário Oficial e a presença dos conteúdos modernos nos Exames Vestibulares.

De acordo com Pinto (2007), as resoluções da Segunda Conferência, dirigidas aos Ministérios da Educação, Universidades, às Fundações de Amparo à Pesquisa em Educação Matemática e Organizações Internacionais como OEA, UNESCO, AID, expandiu as recomendações da Conferência em Bogotá, na Colômbia, justificando que na América do Sul, com diferença de intensidade entre os países, além da carência quantitativa, os professores continuam a ter uma preparação deficiente, faltando professores para escrever bons livros-texto e participar ativamente da redação de currículos; sobre o aperfeiçoamento dos professores secundários em exercício, a recomendação foi a organização de programas e a intensificação de cursos já existentes, bem como a criação de centros permanentes ligados às universidades e o uso de meios tecnológicos para o aperfeiçoamento de professores em grande escala.

Concluindo a análise das duas Primeiras Conferências Interamericanas de Educação Matemática, que revelaram muito sobre a formação de professores em tempos de Matemática Moderna, Pinto (2007) faz várias ponderações, dentre as quais, destacamos:

(...) Um fato real é que o movimento fracassou no Brasil. Por que teria fracassado se foram propostas soluções emergenciais para a formação dos futuros docentes e para a atualização dos docentes já em exercício ? (...) a inexpressiva discussão das questões pedagógicas, fator que aliado à precariedade do sistema educacional brasileiro de então, possivelmente colocava em risco, desde o início, o tão arrojado intento de modernização do ensino da matemática secundária. (...) tanto os discursos sobre formação e treinamento de professores em serviço como as recomendações das Conferências, subestimaram a força da tradição pedagógica enraizada na cultura escolar (...) Qual referencial que orientou a formação/preparação dos professores para o ensino da Matemática Moderna : a prática do matemático ou do professor ? (...) O vocabulário corrente utilizado pelos formadores, durante o movimento, como treinar, aperfeiçoar, capacitar, são reveladores indícios de que a educação, pedagogia e didática , não se constituíram espaços integradores nos cursos de formação e preparação de professores brasileiros durante o MMM. (PINTO , 2007, p. 254-255).

Diante do visível apresentado, concordamos com a autora sobre a precipitação que cerca as afirmações, de quem quer que seja, quanto à incapacidade dos professores para ensinar Matemática Moderna.

Além dessa preciosa análise das duas Primeiras Conferências Interamericanas de Educação Matemática, realizadas em 1961 e 1966, respectivamente em Bogotá e Lima, feita por PINTO (2007), esclarecendo muito sobre a formação de professores em tempos de Matemática Moderna, o que se conhece sobre a formação de professores decorrente do MMM, é que a mesma estava mais voltado a uma preparação emergencial em serviço, cursos relâmpagos, grupos de estudos, estudos individuais, e através de relatórios de conferências, congressos, simpósios , encontros, etc. Pouco, ou quase nada, se sabe sobre a recepção das

idéias modernizadoras nos cursos de nível superior, que tradicionalmente formaram o docente para atuar no Ensino Fundamental e Médio, ou seja, o Curso de Licenciatura em Matemática.

Assim, o que buscamos com o trabalho que ora apresentamos, é a compreensão de como os futuros professores ou docentes, já em exercício, alunos dos cursos de Licenciatura na época, perceberam as idéias e conteúdos atrelados a esse significativo movimento; levantar indícios da apropriação dessas idéias feita pelos professores formadores e formandos; analisar as práticas pedagógicas efetivadas durante a formação daqueles que viabilizaram o trabalho com a Matemática Moderna nas salas de aula da educação básica<sup>27</sup>.

Dessa forma, acreditamos estar contribuindo para a compreensão da trajetória e das heranças deixadas nas atuais práticas pedagógicas, por esse movimento que revolucionou o ensino da Matemática no século XX.

---

<sup>27</sup> Educação Básica conforme a indicação do Art. 21 da LDB, Lei 9394/96, é a parte da educação escolar que consiste na Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio.

#### 4 PRÁTICAS DE MATEMÁTICA MODERNA NO CURSO DE LICENCIATURA

A pesquisa que ora desenvolvemos, tem como cenário uma das Instituições de Ensino Superior do interior paranaense, e o estudo das práticas pedagógicas referentes à Matemática Moderna pode auxiliar a desvelar as idéias modernizadoras da Matemática que aí circularam no início da década de setenta, e que podem ter concorrido para a formação de concepções pedagógicas, sobre o processo ensino-aprendizagem de Matemática, dos licenciandos, futuros e ou então professores do ensino secundário naquela época.

Introduzindo novas perspectivas ou reforçando aspectos da cultura escolar já existentes, essas práticas podem, através de seu estudo, indicar elementos que auxiliem a desnaturalização de fenômenos coexistentes com as práticas pedagógicas atuais de Matemática; ou seja, podem favorecer um conhecimento do passado, que venha elucidar o presente.

A Instituição de Ensino Superior escolhida para desenvolvermos essa pesquisa, é considerada pólo irradiador de cultura para vários municípios paranaenses, os quais, por sua vez, atuam como multiplicadores dessa influência, atingindo, portanto, muitos pontos do Paraná.

Essa Instituição, por várias décadas, constituiu o maior anseio de todos os segmentos da sociedade do município onde está localizada; foi por muito tempo o tema central de reuniões estudantis, dos artigos da imprensa local e das campanhas políticas, por se tratar da principal reivindicação dos jovens que aspiravam continuação de estudos e que, por motivos diversos estavam impossibilitados de prosseguir-los fora de seu município de origem.

Tomando cada vez mais espaço, essa idéia viabilizou-se através da sensibilização de um dos representantes políticos do município, que reuniu as comprovações necessárias de que a região possuía condições de abrigar e até manter uma entidade de ensino superior.

Muitas dificuldades foram encontradas, sendo a mais séria, a formação de um Corpo Docente especializado para todas as disciplinas, conforme exigência da Câmara do Ensino Superior, pois esses professores teriam que vir de cidades distantes e ser muito bem remunerados.

Encaminhou-se um projeto à Assembléia Legislativa do Paraná em 30/01/1967 e, depois de um ano e meio de tramitação burocrática e vários manifestos públicos da comunidade, inclusive passeatas e campanha de contribuição popular para a formação de um

fundo econômico para aparelhar um moderno edifício para o funcionamento do curso superior, os municípios receberam com muita alegria, em 30 de maio de 1968, a notícia da criação de uma Faculdade de Filosofia, definida em regime de Fundação. Em 15 de julho desse mesmo ano, o governador Paulo C. Pimentel sancionou a Lei 5804/68<sup>28</sup> que criou essa Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, para manter os cursos de Licenciatura em Ciências, Geografia, História, Letras e Licenciatura em Pedagogia.

Como o Curso de Licenciatura em Pedagogia, na época, não despertava interesses, foi preciso propor à Assembléia Legislativa que fizesse sua substituição pelo Curso de Matemática, que era o mais procurado e o mais necessário de acordo com o mercado de trabalho. Assim, votou-se a Lei 5888<sup>29</sup>, de 13/12/68 alterando a Lei 5804 de 15/07/68, fixando as trinta e cinco cadeiras que constituiriam os currículos mínimos dos cursos de Matemática, Geografia, História e Letras, dessa Faculdade.

O próximo passo foi a montagem do “Processo de Autorização para o Funcionamento”, que teria que ser apresentado ao Conselho Estadual de Educação, onde deveriam constar, entre outros, o quadro completo de Professores para todas as disciplinas do currículo das quatro séries dos cursos criados. Para a organização do Corpo Docente, buscou-se ajuda de uma Universidade Estadual, também do interior paranaense, que indicou professores graduados naquela Casa de Ensino, visto que, o número de pessoas portadoras dos títulos exigidos para o Magistério Superior na localidade da nova faculdade, não supria nem em parte as suas necessidades.

Esse Processo deu entrada no Conselho Estadual em outubro de 1968, e quando já estava em vias de ser relatado em plenário, essa competência foi transferida para a esfera federal, de acordo com a Lei Federal 5540<sup>30</sup> de 18/11/1968, da Reforma do Ensino Superior.

O Parecer 13/69<sup>31</sup> da Câmara de Ensino Superior do Conselho Estadual, entre as justificativas para um parecer favorável ao “Processo de Autorização para Funcionamento”, destacou que : a entidade possuía capacidade financeira para manter os cursos que pretendia ministrar e tinha à sua disposição edifícios apropriados ao ensino a ser ministrado; o elenco de disciplinas abrangia disciplinas dos currículos mínimos em vigor e havia elementos docentes

---

<sup>28</sup> Documento encontrado no Arquivo Histórico da Instituição pesquisada, ou em PARANÁ. Leis, decretos. Lei nº. 5804, de 15 de julho de 1968. Curitiba, 1968.

<sup>29</sup> Documento encontrado no Arquivo Histórico da Instituição pesquisada, ou em PARANÁ. Leis, decretos. Lei nº. 5888, de 13 de dezembro de 1968. *Diário Oficial* nº. 238, de 14/12/1968. Curitiba, 1968.

<sup>30</sup> NISKIER *Ensino Superior: Legislação e Jurisprudência*, V.1. Editora Revista dos Tribunais. São Paulo:, 1975.

<sup>31</sup> Documento encontrado no Arquivo Histórico da Instituição pesquisada.

de idoneidade moral atestada e em condições de exercer assiduamente suas funções, sendo os candidatos portadores de diplomas correspondentes a cursos superiores; a localidade onde seria instalada a Faculdade, era sede de município com uma população estimada em 114.015 habitantes, sendo considerada verdadeiro centro da Região Centro-Oeste do Estado do Paraná, com influência marcante em pelo menos uma dezena de municípios vizinhos, sendo sempre considerada pelo Estado, como sede de região para fins de planejamento, localização de órgãos e execução de serviços públicos; sua localização dispunha de aeroporto e estrada de rodagem asfaltada ligando-a à Curitiba, à Foz do Iguaçu e à Assunção (Paraguai).

O item 9 desse Parecer, referente às *Necessidades dos Cursos para a Região*, diz que:

A área de influência de uma Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras em (...), que tenha por finalidade precípua a formação de professores qualificados para o ensino médio, abrange forçosamente (...) área de influência que abriga pelo menos 1/3 da população do Estado, ou seja 2.000.000 de habitantes. (...) Em toda essa área não existem em funcionamento Faculdade de Filosofia ou cursos superiores que formem professores qualificados para o ensino médio. O número de estabelecimentos de ensino médio existentes na zona de influência é superior a uma centena, entre colégios, escolas normais e colégios comerciais, enquanto que o número de Professores licenciados não atinge a 10% da totalidade. Tratando-se de região com aumento populacional mais acentuado do Estado do Paraná nesta década (...) com o ensino de grau médio já bastante difundido, não há dúvidas quanto à real necessidade de professores licenciados pelos quatro cursos propostos, quer do ponto de vista de deficiência em profissionais de nível superior, quer do ponto de vista cultural e, ainda, em face das necessidades de aprimoramento do ensino médio na região (PARECER 13/69, de 09/05/1969. Processo n°. 427/68- Câmara de Ensino Superior – Conselho Estadual de Educação do PR).

O texto evidencia a deficitária situação de formação de professores para o ensino secundário em tempo do Movimento da Matemática Moderna, decorrentes das dificuldades existentes na década de 60 do século XX para a formação de professores em nível superior.

Dando continuidade ao Processo de Autorização para o Funcionamento da instituição, o mesmo foi, então, encaminhado ao Conselho Federal de Educação, no Rio de Janeiro, onde a Câmara de Planejamento do Ensino Superior o aprovou, em 09/07/1969. Dois meses depois, o Decreto Lei n°. 842<sup>32</sup> de 09/09/1969, alterou a Lei 5540, devolvendo a competência antes referida, ao Conselho Estadual de Educação, onde finalmente recebeu o Parecer favorável sob n°. 170/69<sup>33</sup>.

---

<sup>32</sup> Documento encontrado no Arquivo Histórico da Instituição pesquisada

<sup>33</sup> Idem.

Encaminhou-se, sem seguida, esse Processo, para a autorização final do Poder executivo e, finalmente em 16 de janeiro de 1970, saiu o Decreto Presidencial nº. 66.083<sup>34</sup>, assinado pelo General Emílio Garrastazu Médici, Presidente da República Federativa do Brasil e por Jarbas Passarinho, Ministro da Educação e Cultura.

Em fevereiro de 1970, foi solenemente instalada a referida Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, que na seqüência, procurou cumprir as normas oficiais que regem o Sistema do Ensino Superior, abrindo o primeiro Concurso Vestibular, para ele afluindo surpreendente número de candidatos, oriundos daquele município e pelo menos mais vinte outros municípios paranaenses.

Quando as turmas pioneiras já chegavam ao final de seus cursos, o Conselho Federal de Educação emitiu o Parecer 2.425<sup>35</sup> de 3 de dezembro de 1973, favorável ao reconhecimento dos Cursos de Matemática, História, Geografia e Letras, o qual fundamentou o Decreto Federal de nº. 73.494<sup>36</sup>, concedendo o esperado reconhecimento.

Consolidou-se assim, o velho sonho da população daquela comunidade do interior paranaense, ganhando um *glamour* especial, a Colação de Grau das turmas pioneiras de professores licenciados, ocorrida em 15 de dezembro de 1973.

O histórico da Instituição referida, que ora apresentamos, foi possível graças aos arquivos históricos que essa instituição mantém, bem como, através do Livro (...) *15 Anos de História*, escrito pelas Professora Gracita Gruber Marcondes e Alcioly Gruber Abreu, em 1985, como parte das comemorações dos quinze anos de funcionamento dessa Fundação Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras do interior paranaense.

Em relação à importância do Curso de Licenciatura em Matemática dessa instituição, quanto à divulgação das idéias atreladas ao Movimento da Matemática Moderna, foco do nosso estudo, os ex-licenciandos entrevistados ao serem solicitados a falar sobre como tinham os professores do ensino Fundamental de 5ª à 8ª série e Ensino Médio se apropriado das idéias modernizadoras da Matemática, e que contribuições ao seu desempenho como professor da educação básica poderiam ser atribuídos à sua formação acadêmica, no que diz respeito à Teoria dos Conjuntos, um dos principais eixos temáticos do Movimento da Matemática Moderna, obtivemos a seguinte resposta:

---

<sup>34</sup> Documento encontrado no Arquivo Histórico da Instituição pesquisada.

<sup>35</sup> Idem.

<sup>36</sup> BRASIL, Leis, decretos. Decreto nº. 73.494, de 17 de janeiro de 1974. *Diário Oficial* nº. 176, Brasília, 18 de janeiro de 1974.

*Essas idéias chegaram até os professores principalmente através do livro didático e, claro, através das aulas de Fundamentos, na Licenciatura (...) As aulas de Fundamentos foram básicas na apresentação das idéias modernistas da Matemática (...) e cursos que eram oferecidos aos professores da educação básica, como extensão universitária (...) (Entrevistado A, 2006).*

Que imagem esse curso de Licenciatura deu aos seus alunos, futuros professores, sobre a Matemática Moderna, sobre o seu valor formativo, sobre as finalidades e métodos do seu ensino? Em outras palavras: qual foi a aculturação realizada? Ou, que pressão a formação desses professores exerceu sobre a cultura escolar desse tempo? São perguntas que nos fazemos, embora de antemão concordemos, que “o modo como os alunos constroem seu saber evidencia evoluções complexas e mal conhecidas onde o ensino do professor intervém sem que ele meça exatamente como” (CHERVEL, 1990, p. 209).

Mesmo assim, nos propusemos a desenvolver uma modesta análise das práticas da Matemática Moderna desenvolvidas na disciplina Fundamentos de Matemática Elementar, realizada no primeiro ano desse curso, em 1970, época em que o MMM estava em plena disseminação nas escolas brasileiras.

Até o presente momento, segundo os registros contidos no “dossiê” elaborado por ex-aluno do curso, nos documentos oficiais de instrução e normatização da instituição e depoimentos de ex-alunos, foi possível reconstruir traços das práticas pedagógicas que introduziram a Matemática Moderna na disciplina Fundamentos de Matemática Elementar. Para essa reconstituição histórica, consideramos as seguintes categorias: características da turma pesquisada, os conteúdos programáticos, a indicação bibliográfica e as finalidades da disciplina.

#### **4.1. A primeira turma da Licenciatura em Matemática**

Os dados que caracterizam a turma em questão, foram obtidos nos arquivos do Órgão de Apoio Acadêmico e da Secretaria Geral da Instituição, em Históricos Escolares e, para uma melhor interpretação desses dados, em depoimentos de ex-alunos da turma pesquisada.

Nos documentos consultados, o Curso de Licenciatura em Matemática possuía uma carga horária total de 2640 horas, divididas em quatro períodos letivos anuais, e, a primeira turma de licenciados em Matemática possuía 43 (quarenta e três) alunos matriculados no 1º

Ano, dentre os quais, 36 (trinta e seis) concluíram o curso no tempo mínimo de 4 (quatro) anos. Um terço do total matriculados eram residentes em outros 13 (treze) municípios, totalizando assim, com os alunos do município sede, 14 (quatorze) municípios paranaenses beneficiando-se da formação docente fornecida por essa Instituição; vale lembrar, que 90% dos licenciandos já eram professores de Matemática que atuavam na rede pública estadual de educação paranaense e ou na rede particular de ensino.

A disciplina Fundamentos de Matemática Elementar contemplava prioritariamente conteúdos e práticas de Matemática Moderna principalmente no primeiro ano, dispondo de uma carga horária correspondente a 150 h e de 130 h no 2º ano, no qual foram tratados outros temas priorizados pelo MMM, tais como Lógica Matemática.

O Professor formador dessa disciplina utilizava primaziadamente aulas expositivas, enriquecendo a comunicação oral com anotações dos títulos e subtítulos das unidades de conteúdos, definições, propriedades, exercícios e demonstrações no quadro de giz. Segundo depoimentos de ex-alunos, sua habilidade para tal superava o normal, sendo considerado como um exemplo didático a ser seguido.

## 4.2 Conteúdos Programáticos

A ementa<sup>37</sup> da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar do 1º Ano do Curso de Licenciatura em Matemática em 1970, de acordo com documentos do Arquivo Histórico da Instituição, contemplava os seguintes conteúdos:

1. Conjuntos e Subconjuntos:
  - Noções fundamentais;
  - Partes de um conjunto.
2. Operações com conjuntos:
  - Intersecção de conjuntos;
  - Reunião de conjuntos;
  - Diferença de conjuntos;

---

<sup>37</sup> Essa ementa faz parte de um encadernamento com muitas páginas, que contém a ementa de cada disciplina daquele ano de curso, a relação de alunos, com frequência e aproveitamento (notas) em cada disciplina, sob o título “Relatório de 1970” ( Arquivo Histórico da Instituição).

- Produto cartesiano de conjuntos;
- Operações com famílias de conjuntos.

### 3. Relações:

- Noções fundamentais;
- Diferentes espécies de relações;
- Diagramas.

### 4. Funções:

- Noções fundamentais;
- Diferentes tipos de funções;
- Operações;
- Estruturas.

### 5. Lógica Matemática:

- Noções fundamentais;
- Álgebra das proposições.

Segundo o Parecer nº. 292/62 (BRASIL, 1974b), do Conselho Federal de Educação, os currículos mínimos das Licenciaturas compreendiam as matérias fixadas para o bacharelado, “convenientemente ajustadas em sua amplitude e os estudos profissionais que habilitem ao exercício do magistério nos estabelecimentos de Ensino Médio” (CANDAUI, 1987, p.19). Isso sugere que a prioridade dada pelo professor da referida disciplina, ao realizar um trabalho mais demorado com a Teoria Elementar dos Conjuntos, comprometendo outros conteúdos que poderiam ser aprofundados, possivelmente foi em função das necessidades dos licenciandos, a maioria já professores em exercício no ensino de primeiro e segundo graus (hoje ensino fundamental e médio), em dominar melhor um conhecimento novo, tendo em vista que a Matemática Moderna chegava para a maioria deles, via livro didático.

*Quando eu entrei na Faculdade, é que realmente fui ter um contato maior, tirar dúvidas e aprofundar a Matemática Moderna. É claro, pois através do livro didático do aluno era muito elementar... era o básico do básico. Então, no curso de Licenciatura plena em Matemática, de 1970 a 1973, que a gente tinha um conteúdo específico que trabalhava Matemática Moderna bem mais aprofundado. A disciplina era Fundamentos de Matemática Elementar e o conteúdo era Teoria dos Conjuntos, Relações e Funções. E foi nessa disciplina que a gente tirou dúvidas, aprendeu e dominou essa matéria que a gente já vinha trabalhando de forma rudimentar, vendo o que tinha no livro do aluno (Entrevistado C, 2007).*

Os quatro primeiros tópicos da ementa, com exceção dos dois últimos itens do tópico nº. 4, operações e estruturas, relativo às funções, parecem ter sido realmente abordados pelo professor formador dessa disciplina, conforme indicam os registros do ex-aluno, elaborados há quase 40 anos.

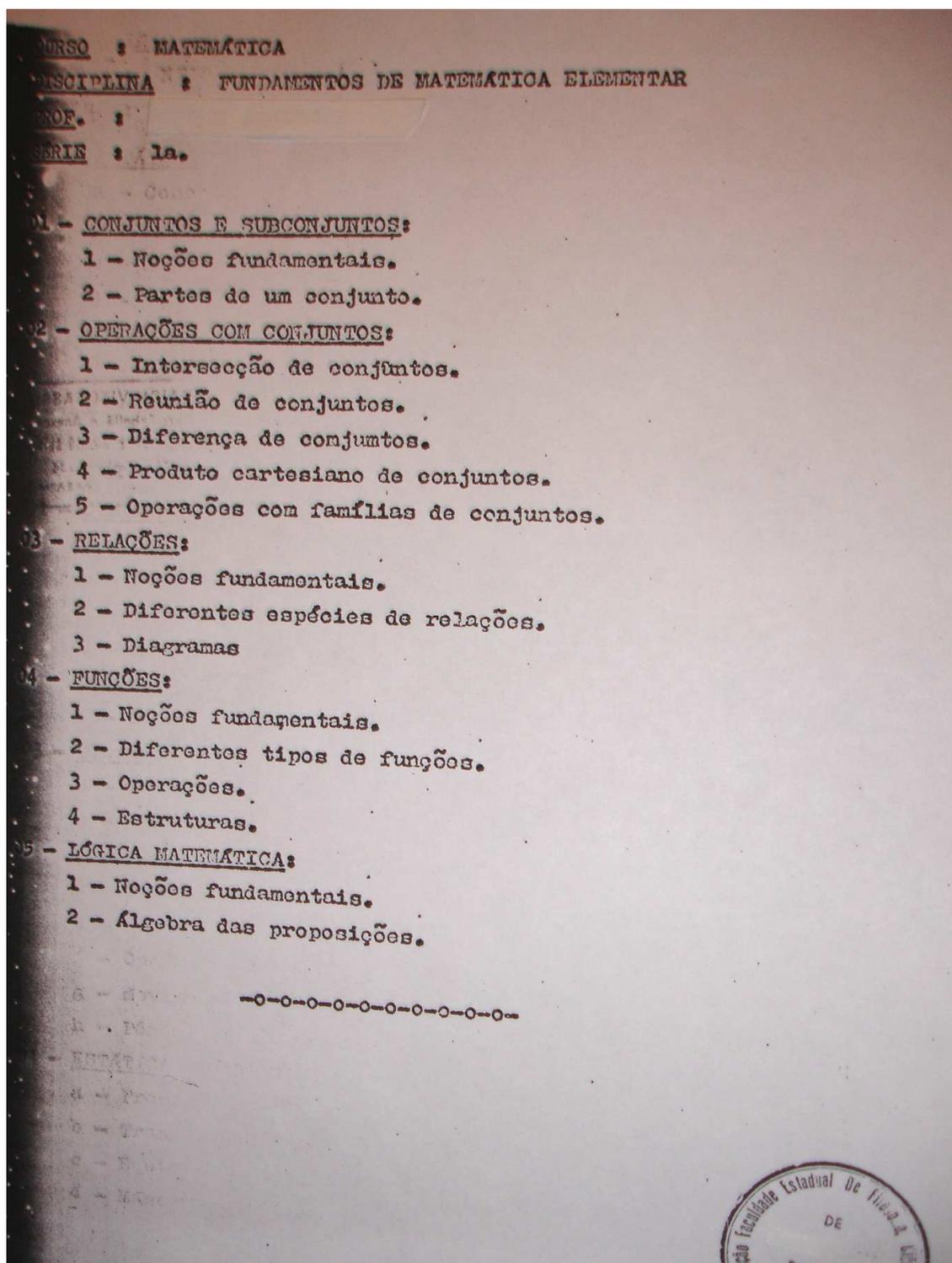


Figura 1 - Ementa da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar

Descreveremos a seguir, os tópicos e sub-tópicos abordados pelo professor formador da disciplina de Fundamentos de Matemática Elementar, de acordo com nossa fonte de pesquisa (Ver ANEXO B)<sup>38</sup>.

- *Teoria Elementar dos Conjuntos*: conceitos intuitivos de conjunto, elemento e relação de pertinência; definições de conjuntos finitos e infinitos; definição de conjuntos iguais, as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva da igualdade; definições de conjuntos desiguais, conjunto vazio, subconjunto, subconjunto próprio, apresentação do conjunto de potência, conjuntos comparáveis e não comparáveis, conjuntos disjuntos, conjunto universal ou conjunto universo; diagramas de Venn-Euler; diagramas em Linhas.
- *Operações com conjuntos*: intersecção e depois união, apresentando suas propriedades idempotente, comutativa, associativa e distributiva; definições de diferença entre dois conjuntos e de complementar ou complemento de um conjunto; demonstrações de teoremas que provém diretamente das Leis da Álgebra de Conjuntos, ou seja, das Leis Idempotentes, Associativas, Comutativas, Distributivas, de Identidade e Complementaridade. A simbologia dos conjuntos ( símbolo de pertence, não pertence, está contido, não está contido, etc.) permeia todos os itens abordados, seja nas definições, seja nos exercícios ou demonstrações.
- *Funções*: definição através da associação entre elementos de dois conjuntos, notação, domínio, contradomínio, representação em diagramas, imagem, verificar entre várias situações de correspondência entre os elementos de dois conjuntos, quais representam ou não funções; tipos de funções: sobrejetiva (sobrejetora ou sobre), injetiva (injetora ou biunívoca) e bijetora ou bijetiva; funções iguais, definição de “imagem inversa”; funções constantes, função idêntica ou identidade, função inversa, função composta ou função produto.
- *Produto Cartesiano*: definição de par ordenado e produto cartesiano; gráfico ou diagrama em rede do produto cartesiano; diagrama em árvore; propriedades do produto cartesiano (demonstração da propriedade distributiva do produto cartesiano em relação à intersecção e em relação à união, e da propriedade da inclusão entre produtos cartesianos).
- *Gráfico de função* definido como conjunto de pares ordenados; gráficos de funções do tipo linear, quadrática, modular, exponencial, logarítmica e funções circulares diretas.

---

<sup>38</sup> ANEXO B – bloco de páginas referentes às aulas de Fundamentos de Matemática Elementar da Instituição pesquisada - 1970.

- *Função proposicional* ou sentença aberta (definição); conjunto verdade de uma função proposicional de duas variáveis;
- *Relações*: definição e representação; conjunto solução de uma relação como conjunto de pares ordenados; construção de gráficos de relações; domínio e contra-domínio de uma relação; relação inversa; relação reflexiva, simétrica, anti-simétrica, transitiva; relação de equivalência.

Na análise da ementa da disciplina, observamos que, além de conter a Teoria dos Conjuntos, altamente valorizada pelos livros didáticos para o Ensino Secundário da época, e que, por si só, já interessaria aos futuros professores, propunha o estudo de Funções, que, de longa data e por importantes personagens da História da Educação Matemática, foi indicado como significativo unificador do ensino da Matemática.

No começo do século XX, o eminente matemático alemão Félix Klein<sup>39</sup>, segundo Schubring (2004, p.12), já propunha uma reforma em que toda a instrução matemática fosse orientada para o pensamento funcional. O brasileiro Euclides Roxo, a quem de certa forma devemos a unificação da Aritmética, da Álgebra, Geometria e Trigonometria na disciplina Matemática, e a sua inclusão em todas as séries do ensino secundário, nos finais da década de 20 e década de 30, durante a Reforma Francisco Campos<sup>40</sup>, também defendia as idéias de Klein.

A noção de função deve, na opinião de Klein ser adotada como idéia axial no ensino da Matemática, capaz de estabelecer o elo unificador dos vários assuntos tratados na escola secundária, de modo a ser a alma do corpo em que se organiza a matéria. Além da aptidão para ligar todos os assuntos em um todo, a educação do pensamento funcional merece ser feita na escola secundária, não só tendo em vista as exigências práticas e culturais da vida moderna, mas pela sua aptidão para constituir um meio altamente educativo para o pensamento lógico e por ser um verdadeiro método de estudo (ROXO, 2004, p.170-171 apud VALENTE,2004)<sup>41</sup>.

Para Braga (2006), essa concepção de pensamento funcional, entendido como um método a ser desenvolvido paulatina e gradativamente ao longo do curso secundário,

---

39 Félix Klein – Primeiro Presidente do IMUK (SCHUBRING, 2004, p. 17).

40 Reforma Francisco Campos, foi uma das mais importantes tentativas de se organizar o sistema educacional brasileiro. As mudanças no ensino secundário provocadas pela Reforma Campos, foram instituídas pelo Decreto 19890, de 18 de abril de 1931 e consolidada pelo Decreto 21.241 de 4 de abril de 1932 (ROMANELLI, 1995, p. 131).

41 Texto originalmente publicado em PEIXOTO, Afrânio et. al (1937): Um grande problema nacional (estudos sobre o ensino Secundário). Rio de Janeiro: Pougetti, (1937).

“configura-se apenas como uma metodologia, não tem vínculo explícito a algum conteúdo, já que, por princípio, está relacionado a todos”(p. 147).

Levando-se em consideração Chervel (1990), quando diz que a interpretação dos fatos educacionais se opõe no ensino ao papel da ‘pedagogia’, e que há uma longa tradição “ sobre um corte estrito entre a instrução, de um lado, considerada como um conteúdo, e a pedagogia, de outro, que não seria senão a forma de transmissão desse conteúdo” (p.205), entende-se a dificuldade da implementação do pensamento funcional no ensino secundário na época, quando ainda não parecia ser dominante o pensamento de que “ a realidade premente da prática docente não permite essa separação, a não ser comprometendo igualmente a existência das finalidades” (p. 206).

Continuando em seu posicionamento, Braga (2006), admite que é justo registrar que o caráter vanguardista de Euclides Roxo e a sua atuação obstinada “foram determinantes para a penetração do conceito de *função* nos programas oficiais brasileiros” (p. 149).

Durante os estudos e discussões ligados ao movimento internacional de reformulação e modernização curricular, que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna, o estudo de funções também foi visto como elemento unificador da Matemática; desta vez, com um outro tratamento, tendo por base a Teoria dos Conjuntos.

A Teoria dos Conjuntos, segundo Guimarães (2007, p. 22-45), foi amplamente enfatizada pelo Grupo Bourbaki, que, com a parceria importantíssima do psicólogo francês Jean Piaget e suas teorias sobre as estruturas operatórias da inteligência, defendia uma matemática estruturalista, tendo por base estruturas mães: lógica, algébrica e topológica, que sustentariam o “edifício matemático”, modernizando e unificando a matemática escolar, anteriormente fragmentada.

Segundo Guimarães (2007, p. 22-28) a proposta de reforma delineada em Royaumont e a sua especificação em Dubrovnik, foi fortemente influenciada pelas idéias estruturalistas dominantes na época, em particular no que se refere à Matemática e à Psicologia, à qual, assim se referiu:

O trabalho de Jean Piaget assumiu uma visibilidade significativa (...) Ainda a propósito da influência e do papel que as idéias piagetianas terão tido como fundamento psicológico da reforma que então se visava, cabe aqui inferir que, em 1952, Piaget defendeu a correspondência entre as estruturas matemáticas conhecidas, base de toda a ‘arquitetura’ bourbakista da Matemática, e as estruturas operatórias da inteligência (...) (GUIMARÃES, 2007, p. 23).

É conhecida e muito citada a posição de Piaget, de que “se o edifício da Matemática assenta sobre estruturas que por sua vez correspondem às estruturas da inteligência, é sobre a organização progressiva destas estruturas operatórias que é necessário basear a didáctica da Matemática” (PIAGET, 1965, p. 32).

A seqüência de conteúdos trabalhada na disciplina Fundamentos, como apontam os registros da ementa e das aulas, apresenta algumas similaridades com as intenções do Movimento da Matemática Moderna, quando vistos na perspectiva de Fiorentini. Para esse autor, os principais propósitos do movimento foram os seguintes:

- a) Unificar os três campos fundamentais da matemática. Não uma integração mecânica, mas a introdução de elementos unificadores como Teoria dos Conjuntos, Estruturas Algébricas, Relações e Funções. b) Dar mais ênfase aos aspectos estruturais e lógicos da matemática em lugar do caráter pragmático, mecanizado, não justificado e regrado, presente, naquele momento, na matemática escolar. c) O ensino de 1º e 2º graus deveria refletir o espírito da matemática contemporânea que, graças ao processo de algebrização, tornou-se mais poderosa, precisa e fundamentada logicamente (FIORENTINI, 1995, p.13-14).

Quando dizemos “algumas similaridades” em relação à perspectiva de Fiorentini, justificamos com o seguinte questionamento:

A metodologia utilizada pelo professor formador ao trabalhar com a Teoria dos Conjuntos, Relações e Funções foi a de uma integração mecânica entre esses conteúdos ou utilizou-os como elemento unificador da Matemática?

Falar da Teoria dos Conjuntos e Funções, nos remete ao Seminário de Royaumont e seu desdobramento em Dubrovnik, que seqüenciou no ‘Programa Moderno de Matemática para o Ensino Secundário’ (OECE, 1961b apud GUIMARÃES, 2004, p. 22).

Segundo Guimarães (2007), nesse Seminário promovido pela OECE, Organização Européia de Cooperação Econômica, com o objetivo de realizar um inquérito sobre a situação do ensino de Matemática nos seus países membros, um dos participantes do evento, o matemático Willy Servais, em seu pronunciamento em defesa do estudo da Álgebra, apoiado nas idéias de Gustave Choquet<sup>42</sup>, propôs o estudo da Teoria dos Conjuntos, argumentando que esta deveria se tornar familiar aos alunos, tão cedo quanto possível. A Teoria de Conjuntos, segundo Servais, serve para a introdução de noções de lógica elementar, cujo conhecimento

---

<sup>42</sup> Gustave Choquet - Membro do CIEAEM (Comissão Internacional para o Estudo e Melhoria do Ensino de Matemática), em 1950, cuja primeira reunião foi presidida por Jean Piaget e Gustave Choquet e da qual também fizeram parte: Zoltan Paul Dienes, Emma Castelnuovo, Jean Dieudonné, Caleb Gattegno e Georges G. Papy, dentre outros ( DAMBROS, 2006, p. 27).

‘sem excesso’, considerava ‘ser uma das componentes importantes da vida intelectual’, servindo, portanto, de ‘base para os estudos matemáticos’ (OECE, 1961a, p. 71 apud GUIMARÃES, 2004, p. 35).

Servais também propunha a introdução da noção de Função, com base na Teoria dos Conjuntos, logo no início do programa. Desse modo, considerando como pré-requisitos as noções de Conjunto, de Função, de Produto Cartesiano, de Relações e de Operações, afirmava que ‘a Álgebra desempenhará, na Matemática, o papel que cada vez mais se lhe reconhece’(OECE, 1961a, p.74 apud GUIMARÃES, 2007, p. 35).

De acordo com Guimarães (2007, p. 37), daquele trabalho da ênfase na Álgebra decorre, além da idéia da introdução precoce da teoria dos conjuntos, a valorização da linguagem matemática e da sua simbologia própria. Dieudonné, um dos líderes do grupo Bourbaki, por ocasião dos trabalhos em Dubrovnik de elaboração de um programa de Matemática Moderna, chama atenção para que ‘se deve introduzir logo que possível a linguagem e as notações’ (DIEUDONNÉ, 1961, p. 41 , apud GUIMARÃES, 2007, p.37). Segundo Guimarães, nas conclusões do seminário, consta que os símbolos associados à teoria dos conjuntos devem ser apresentados tão cedo quanto possível, seguindo-se lhes os símbolos lógicos, justificando-se sua utilização, do seguinte modo:

Estes símbolos e a sua utilização darão um novo rosto à Matemática escolar. Não está aí, no entanto, o fim visado. Os símbolos são necessários, porque eles representam conceitos que dão ao pensamento mais clareza e mais precisão, e porque ligam e unificam os conceitos matemáticos para o aluno que os vê reaparecer em cada um dos ramos estudados. Além do mais, eles são indispensáveis mais tarde nos estudos matemáticos universitários (OECE, 1961a, p. 117 apud GUIMARÃES, 2007, p. 37).

Apesar dessas referências significarem mais para o estudo da Matemática no ensino secundário, apresentamo-las como ilustração da importância e do enfoque dados aos temas Teoria dos Conjuntos e Funções, na época em que se desencadeou o MMM.

Retomando os conteúdos priorizados na disciplina Fundamentos, no curso de Licenciatura foco de nossa análise, registramos também, a divergência entre a ordem dos conteúdos apresentados na ementa da disciplina, e a organização desses conteúdos dadas pelo o professor formador, ao apresentar antes de Relações, o estudo de Funções, o qual é abordado de forma intuitiva, porém utilizando como base a Teoria dos Conjuntos.

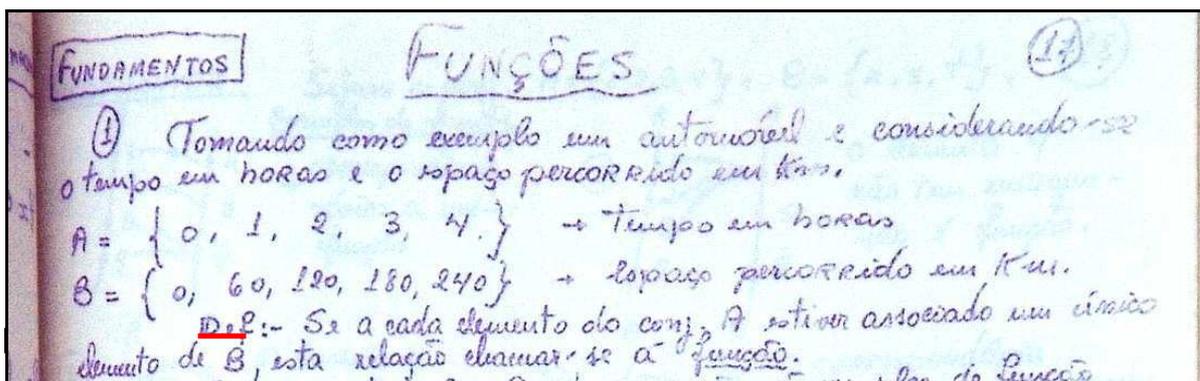


Figura 2 - Definição de função (abordagem intuitiva)

Na seqüência, introduz produto cartesiano e suas propriedades, voltando ao estudo das funções, quando “define gráfico de funções como um conjunto de pares ordenados” (figura 3), prosseguindo então com o estudos dos gráficos de variadas funções, iniciando, por fim, o estudo das Relações.

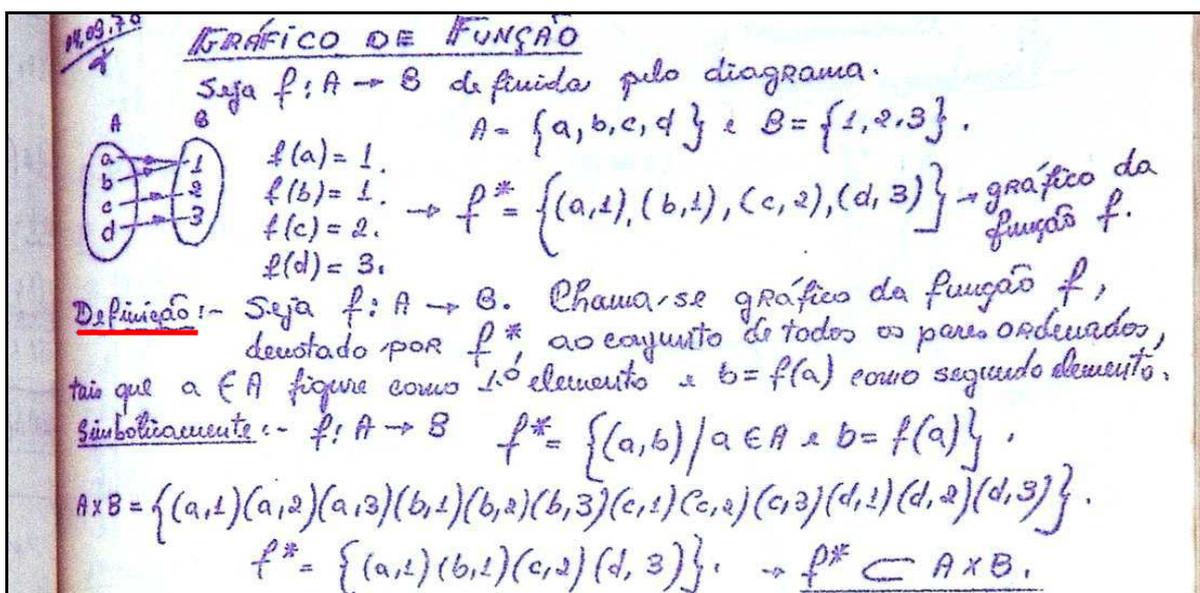


Figura 3 - Definição de gráfico de função

Essa seqüência, primeiro Funções e depois Relações, nos chamou atenção porque não é a costumeira trazida pelos livros didáticos. Trata-se da seqüência trazida pelo livro didático indicado aos licenciandos, o que de certa forma justifica sua escolha.

Indagando nossos entrevistados a respeito dessa seqüência, dois não lembraram e um deles inferiu que: “era próprio do Professor N fazer algumas inversões na seqüência de conteúdos, em relação ao apresentado nos livros didáticos, pois tinha seu jeito próprio de dar

a matéria. Inclusive, trabalhou primeiro a intersecção de conjuntos e depois a união” (Entrevistado A, 2006).

Esse comentário nos remete à Tardif (2005), quando diz: “em seu trabalho, um professor se serve de sua cultura pessoal, que provém de sua história de vida e de sua cultura escolar anterior” (TARDIF, 2005, p. 262). Complementa o autor:

Um professor raramente tem uma teoria ou uma concepção unitária de sua prática; ao contrário, os professores utilizam muitas teorias, concepções e técnicas, conforme a necessidade, mesmo que pareçam contraditórias para os pesquisadores universitários. Sua relação com os saberes não é de busca de coerência, mas de utilização integrada no trabalho, em função de vários objetivos que procuram atingir simultaneamente (TARDIF, 2005, p. 263).

Essa colocação de Tardif vem melhor elucidar o entendimento do depoimento do ex-licenciando entrevistado, quando faz referências à prática profissional do professor, como sendo construída com saberes variados e heterogêneos;

Um elemento que se observa nas figuras 1, 2, 3 e em grande parte do ANEXO I é o farto uso de definições (Figura 4), que, pode-se dizer, era uma das “marcas registradas” dessas aulas, e que comentaremos no capítulo 5.

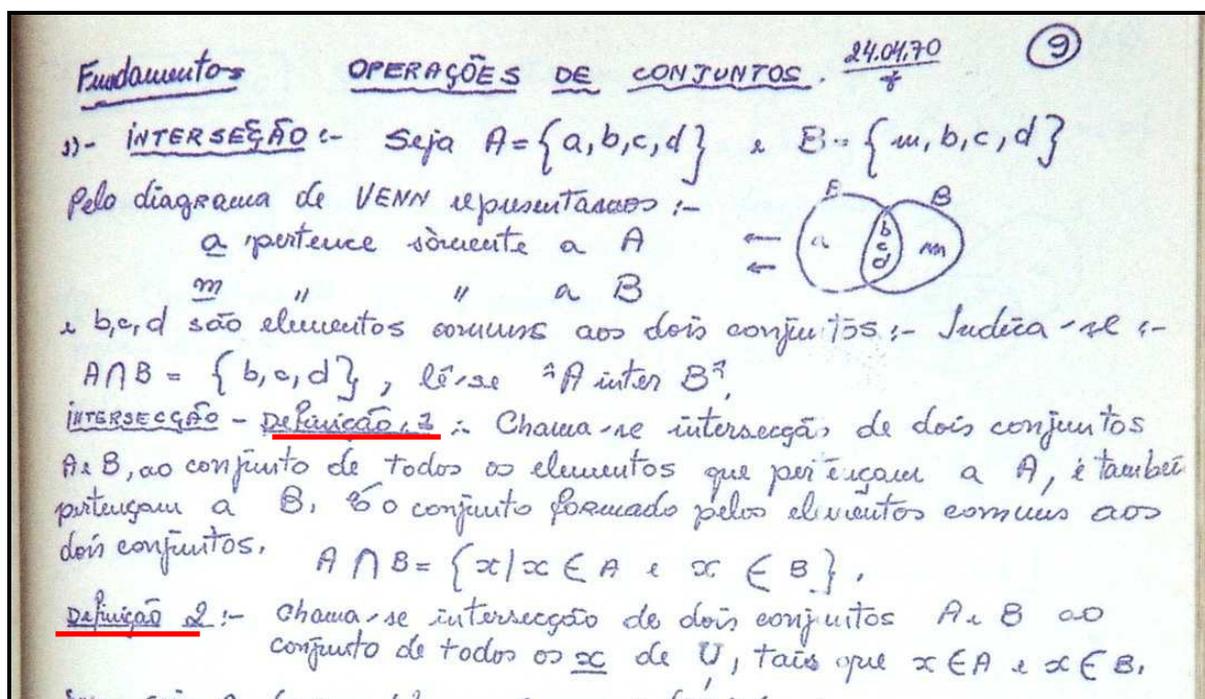


Figura 4 - Uso acentuado de definições.

Outro fato que atrai nossa atenção, ao considerarmos o número de aulas previstas<sup>43</sup> para a disciplina e por se tratar de um curso superior, é a redutividade da ementa. Teria sido levado em conta pelo professor formador a defasagem de conteúdos considerados de ensino secundário, que os licenciandos poderiam apresentar em função do longo tempo sem estudos específicos, bem como decorrer de uma prática docente da matemática voltada às etapas mais elementares de ensino, tendo em vista que a maioria dos licenciandos já eram professores na educação básica?

A valorização dada à Teoria dos Conjuntos, Funções e Relações pela ementa que estamos analisando e a atenção dada a esses eixos temáticos presente nos registros das aulas, podem ser considerados indícios significativos da relação entre o conteúdo programático da disciplina Fundamentos e os conteúdos atrelados ao MMM, que ganhavam espaços consideráveis nos livros didáticos destinados ao ensino ginásial e colegial da época; essa perspectiva poderia possibilitar, talvez, a interpretação do estabelecimento de uma relação dialética entre essa disciplina do Curso de Licenciatura e a Escola Média, aliás, argumento muito utilizado nos dias atuais nas discussões das propostas de formação de professores.

### **4.3. Referências Bibliográficas indicadas pelo professor formador:**

Durante o desenvolvimento dessa pesquisa deparamo-nos em muitos momentos, principalmente nas entrevistas com atores daquele passado, com referências claras e consistentes a respeito do importante papel que o livro didático de matemática desempenhou na disseminação do MMM, sinalizando para uma concordância significativa com os estudos de Chervel (1990) sobre a história das disciplinas escolares, quando diz: “dos diversos componentes de uma disciplina escolar, o primeiro na ordem cronológica, senão na ordem de importância, é a exposição pelo professor ou pelo manual de um conteúdo de conhecimentos” (p. 202).

Segundo esse autor,

---

<sup>43</sup> Aulas previstas: 159; aulas dadas: 151 (95% das previstas). Informações obtidas no Relatório de 1970, localizado no Setor Arquivo Histórico da Instituição.

Em cada época, o ensino dispensado pelos professores é, grosso modo, idêntico, para a mesma disciplina e para o mesmo nível. Todos os manuais ou quase todos dizem a mesma coisa, ou quase isso. Os conceitos ensinados, a terminologia adotada, a coleção de rubricas e capítulos, a organização do *corpus* de conhecimento, mesmo os exemplos utilizados ou os tipos de exercícios praticados são idênticos, com variações aproximadas (CHERVEL, 1990, p.203).

Na época em que o MMM estava em disseminação no Brasil, grande parte dos livros didáticos que traziam as idéias modernizadoras da Matemática apresentava características como as que foram referidas por Chervel, fenômeno, que ele denomina ‘vulgata’.

De acordo com um dos protagonistas do movimento, licenciando em Matemática em 1970, no interior paranaense, esses livros serviam de guia para alguns professores da educação básica planejarem suas aulas, conforme indica o seguinte depoimento:

*O conhecimento sobre a Teoria dos Conjuntos, adquirido em Fundamentos da Matemática Elementar, na licenciatura, foi muito importante para o preparo das minhas aulas de 5ª à 8ª série e 2º Grau, hoje falado Ensino Médio, pois os conteúdos apresentados nos livros didáticos para os alunos e que serviam de guia para o planejamento das aulas, já não eram novidades (...) (Entrevistado A, dezembro, 2006).*

Esse depoimento denota, de certa forma, um dos papéis assumidos pelo livro didático em tempo de Matemática Moderna.

Talvez, por conter o estigma da modernidade, fator importante num país voltado intensamente à busca do desenvolvimento, os livros didáticos que traziam a Matemática Moderna espalharam-se pelos mais distantes recônditos do território brasileiro, levando professores a utilizá-los em suas aulas, mesmo parte deles, desconhecendo a origem e a essência das idéias modernizadoras sobre o ensino de Matemática, como sugerem as palavras de um outro licenciando em Matemática do interior paranaense, do período 1970-1973:

*Quando eu entrei na Faculdade, é que realmente fui ter um contato maior, tirar dúvidas e aprofundar a Matemática Moderna. É claro, pois através do livro didático do aluno era muito elementar... era o básico do básico. Então, no curso de Licenciatura plena em Matemática, de 1970 a 1973, que a gente tinha um conteúdo específico que trabalhava Matemática Moderna bem mais aprofundado. A disciplina era Fundamentos de Matemática Elementar e o conteúdo era Teoria dos Conjuntos, Relações e Funções. E foi nessa disciplina que a gente tirou dúvidas, aprendeu e dominou essa matéria que a gente já vinha trabalhando de forma rudimentar, vendo o que tinha no livro do aluno (Entrevistado C, outubro de 2007).*

Esse depoimento nos remete a Pinto (2005) quando diz que a Matemática Moderna ancora primeiramente nos grandes centros do país, e depois começa a ser difundida nas

escolas mais longínquas, “a maioria delas recebendo-a de sobressalto, via livro didático”(p. 29).

Ao comentar a conveniência de examinar a evolução das disciplinas escolares, e em particular, os manuais escolares, Julia (2001) considera que “o manual escolar não é nada sem o uso que dele for realmente feito, tanto pelo aluno como pelo professor” (p. 34). Essa posição nos levou a olhar mais atentamente as questões que envolvem o livro didático e o papel por ele assumido em tempos de Matemática Moderna, mais especificamente no curso de Licenciatura, focalizado nesse trabalho.

Atualmente, conforme Bittencourt (2004), o livro didático vem despertando o interesse de muitos pesquisadores, que têm identificado a importância desse instrumento de comunicação, de produção e transmissão de conhecimentos, integrando a tradição escolar há, pelo menos dois séculos e, por representar “um objeto cultural contraditório que gera intensas polêmicas e críticas de muitos setores, mas tem sido sempre considerado como um instrumento fundamental no processo de escolarização”. Na perspectiva dessa autora,

Por ser um objeto de ‘múltiplas facetas’, o livro didático é pesquisado enquanto produto cultural; como mercadoria ligada ao mundo editorial e dentro da lógica de mercado capitalista; como suporte de conhecimentos e de métodos de ensino das diversas disciplinas e matérias escolares; e, ainda, como veículo de valores, ideológicos ou culturais (BITTENCOURT, 2004, p. 1).

Considerando que esse componente da cultura escolar é portador de alto significado, principalmente quando representa um veículo de disseminação de conteúdos propostos por um movimento internacional, da envergadura que assumiu o Movimento da Matemática Moderna, que atingiu o Brasil, desde a Educação Primária até o Ensino Superior, não há como abordar questões que envolvem o livro didático, nas décadas de 60 e 70, sem levar em conta a influência da política de estado norte-americana sobre as questões educacionais brasileiras.

Para Romanelli (1995, p. 212-213), entre os diversos acordos e planos de assistência técnica estabelecidos entre os governos brasileiro e norte americano, a partir de 1964, o de maior repercussão na educação brasileira, foi o denominado MEC-USAID.

De acordo com o Dicionário Interativo da Educação Brasileira<sup>44</sup>, conforme Menezes e Santos (2002), MEC/USAID é a sigla de um acordo que incluiu uma série de convênios realizados a partir de 1964, durante o regime militar de governo, entre o Ministério da Educação (MEC) e a United States Agency for International Development (USAID). Os convênios, conhecidos

---

<sup>44</sup> *Dicionário Interativo da Educação Brasileira* - EducaBrasil. São Paulo: Midiamix Editora, 2002, Disponível em: <<http://www.educabrasil.com.br/eb/dic/dicionario.asp?id=325>>, acesso em 14/2/2008.

como acordos MEC/USAID, tinham o objetivo de implantar o modelo norte americano nas universidades brasileiras através de uma profunda reforma universitária.

Segundo estudiosos, pelo acordo MEC/USAID, o ensino superior exerceria um papel estratégico porque caberia a ele forjar o novo quadro técnico que desse conta do novo projeto econômico brasileiro, alinhado com a política norte-americana. Além disso, visava a contratação de assessores americanos para auxiliar nas reformas da educação pública, em todos os níveis de ensino.

Esse acordo, segundo Góes (1999), articulou-se de forma a abranger todos os níveis de ensino, desde o treinamento de professores até a produção e veiculação de livros didáticos, contribuindo para uma desnacionalização do campo educacional. Para a implantação do programa, o acordo impunha ao Brasil a contratação do assessoramento norte-americano.

Entre as decorrências desse acordo, conforme indicação de Cassiano (2005, p. 295-296), foi estabelecida em 1966, a Comissão do Livro Técnico e do Livro Didático – COLTED, financiada pelo Ministério da Educação e pela agência americana USAID, com a colaboração do Sindicato Nacional dos Editores de Livros –SNEL.

Conforme Freitag et al (1993), a COLTED, contando com confortável disponibilidade financeira, que tinha como parte de seu projeto de atividades a instalação de bibliotecas escolares, assim como a montagem e execução de treinamentos para instrutores e professores, atraiu denúncias e críticas de educadores brasileiros, que viam por trás da ajuda da USAID, o controle americano da educação brasileira e, obviamente, dos livros didáticos, que sofriam um controle rigoroso de conteúdo.

Compreendendo o livro didático, como “veículo portador de um sistema de valores, de uma ideologia, de um a cultura”(BITTENCOURT, 1993, p. 3), como um dispositivo veiculador de conhecimentos e técnicas considerados essenciais pela sociedade em determinada época, e, considerando como Barra e Lorenz (1986), que esse material influi na filosofia do ensino, na seleção e organização dos conteúdos e na metodologia empregada pelos professores em sala de aula, e, ainda vislumbrando seu potencial de comercialização, é fácil entender que tenha sido alvo de interesse por parte de um sistema governamental inserido em um movimento político mais amplo, no âmbito de uma sociedade capitalista. Por outro lado, o reforço à importância de conhecimentos ligados à ciência e à tecnologia, pode ser compreendido como uma estratégia política para obscurecer o entendimento do momento de repressão ditatorial pelo qual passava a sociedade brasileira.

Diante do exposto, não nos surpreendemos, quando ouvimos de um entrevistando, docente em exercício no ensino ginásial e colegial daquela época e, ex-aluno de uma turma de Licenciatura em Matemática que iniciou o curso em 1970:

*O livro que o Professor de Fundamentos de Matemática Elementar indicava, era Teoria dos Conjuntos de Seymour Lipschutz, que era uma referência, um apoio para as aulas que o professor formador dava. O livro era a base para as aulas que eram dadas...O domínio que a gente tinha da matéria era muito restrito, pois até então, o livro didático dos nossos alunos era o nosso guia. Antes, não tinha como comparar, estudar... O livro didático do aluno era também o livro do professor, porque era um trabalho conjunto: o aluno aprendia e o professor aprendia junto (Entrevistado C, 2007).*

O livro didático, utilizado na disciplina Fundamentos de Matemática Elementar, era *Teoria dos Conjuntos*, com sua edição original publicada em 1964, nos Estados Unidos, por Schaum Publishing Company, com o título *Set Theory And Related Topics*, do autor Seymour Lipschutz, PH. D.; Departamento de Matemática do Polytechnic Institute of Brooklyn.

A referida obra é traduzida pelo Engenheiro Fernando Vilain Heusi da Silva, sob o título *Teoria dos Conjuntos*, Coleção Schaum, editado por Ao Livro Técnico S. A. , Rio de Janeiro, com direitos reservados em 1967 e reimpressão em 1968, e indica em seu prefácio, sua utilidade como livro texto e de referência para qualquer nível.

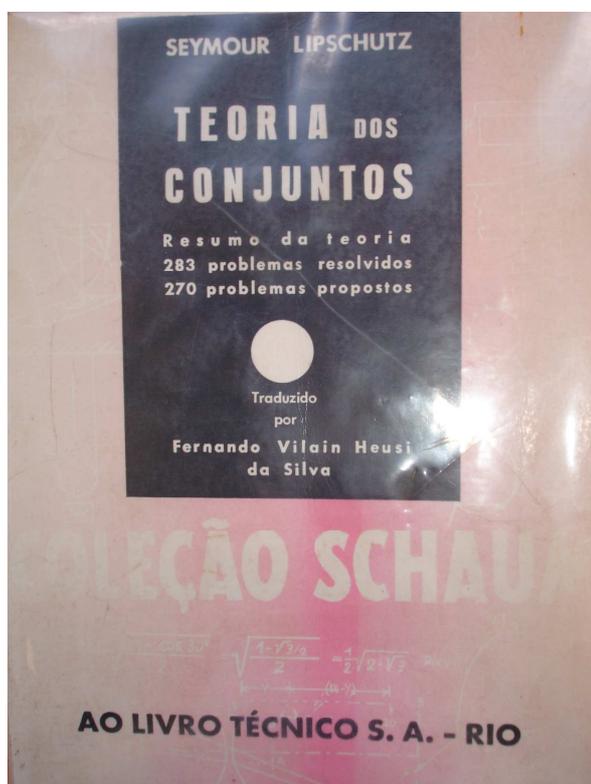


Figura 5 – Capa do livro indicado em Fundamentos de Matemática Elementar.

Além da procedência, chama-nos também a atenção, o fato, de que a Editora Ao Livro Técnico S.A. foi apontada por Oliveira et al. (1984), apud Cassiano (2005, p. 297), como uma das 6(seis) editoras que se destacaram, de 1971 até 1981, entre 40 (quarenta) editoras parceiras regulares do Estado, no processo de co-edição de 50% dos títulos do PLIDEF<sup>45</sup>, em dez anos do programa.

Assim, a referência bibliográfica apontada coaduna-se com o contexto acadêmico vivido no ano 1970 no Brasil, que se apoiava num plano de modernização das universidades, envolto num modelo de modernização das relações capitalistas de produção, orientado pela Lei 5540/68 (CARVALHO, 1975). Essa Lei, ao reorganizar o Ensino Superior buscando atender principalmente os acordos MEC-USAID, fixou normas de organização e funcionamento do ensino superior e a sua articulação com a escola média, entendido que o curso superior tinha um papel estratégico a formação dos quadros técnico-profissionais brasileiros, alinhando-os com a política norte- americana.

Logo, adotar no ensino superior um manual didático cuja origem era o país com o qual o Brasil mantinha estreitas relações para efetivar seu discurso modernizador e de desenvolvimento associado ao capital internacional, era perfeitamente compreensível, em uma instituição que havia recém sido criada e organizada conforme os parâmetros ditados pela Lei 5540/68 (CARVALHO, 1975).

Estaria esse livro entre aqueles que a COLTED viabilizou na instalação de bibliotecas?

Buscamos essa informação nos documentos do Arquivo Histórico e na biblioteca da Instituição, e não encontramos nenhum registro que levasse a tal conclusão. Os volumes encontrados, de edição de 1967, 1968, 1970 e 1972 não trazem nenhuma marca que os identifiquem como livros do referido programa.

Por outro lado, o próprio título do livro, *Teoria dos Conjuntos*, recomendado aos licenciandos em Matemática na disciplina Fundamentos de Matemática Elementar era extremamente sugestivo, tendo em vista, que a maioria dos alunos já atuava como docentes no Ensino Ginásial (hoje de Ensino Fundamental de 5<sup>a</sup> à 8<sup>a</sup> série) e no Ensino Colegial (hoje

---

<sup>45</sup> PLIDEF – Programa do Livro Didático para o Ensino Fundamental. Em 1971, a COLTED foi extinta, sendo o Instituto Nacional do Livro – INL – encarregado de desenvolver o Programa de co-edição do livro didático, em ação conjunta com as editoras. Para todos os níveis de ensino foram criados programas especiais de co-edição: para o Ensino Médio, PLIDEM; para o Ensino Superior, PLIDES; para o Supletivo, PLIDESU e para o ensino de Computação, PLIDECOM. De todos esses programas, o único que permaneceu ativo foi o PLIDEF. Em 1976, essas atribuições passaram para a Fundação Nacional do Material Escolar – FENAME -, que firmava convênio com as secretarias de Educação, para que os livros fossem distribuídos aos ‘alunos carentes’ da rede oficial de ensino de 1º grau- PLIDEF -, sendo que os Estados tinham de participar financeira e materialmente (CASSIANO, 2005, p. 296-297). In: **Em Questão**, Porto Alegre, v. 11, n.2, p.281-312, jul./dez. 2005, disponível em <[http://www6.ufrgs.br/emquestao/pdf\\_2005\\_v11\\_n2/4\\_reconfiguracao.pdf](http://www6.ufrgs.br/emquestao/pdf_2005_v11_n2/4_reconfiguracao.pdf)>.

Ensino Médio), e necessitavam conhecer melhor a Matemática Moderna, uma vez que a mesma já havia sido introduzida nos programas escolares desses níveis de ensino.

Logo, se estivéssemos questionando o porquê ou porquês desse professor formador ter adotado aquele didático para apoiar suas aulas, poderíamos ter várias possibilidades de respostas ao nosso questionamento, que vão, desde a qualidade pedagógica do material reconhecida pelo professor formador, à modernidade da obra, à influência americana exercida pelos acordos MEC-USAID, à compatibilidade com a ementa da disciplina, até a adequação da obra às necessidades técnicas dos licenciandos, já professores no desempenho de suas funções docentes no ensino secundário, naquele momento, às voltas com a Teoria dos Conjuntos, elemento de destaque do Movimento da Matemática Moderna. No entanto, como apenas o referido professor poderia elucidar essa questão, e não foi possível entrevistá-lo por uma série de motivos, não podemos responder essa questão.

Esse livro é composto de três partes, sendo que a Parte I aborda Teoria Elementar dos Conjuntos, contemplando na seguinte seqüência, como sub-unidades: Conjuntos e Subconjuntos, Operações básicas de Conjuntos, Conjuntos de números, Funções, Conjuntos Produto e Gráficos de Funções, Relações, Teoria Avançada de Conjuntos e Complemento Sobre a Teoria das Funções, Operações.

A Parte II aborda Cardinais, Ordinais, Indução Transfinita, através das seguintes sub-unidades: Números Cardinais, Conjuntos Ordenados Parcial e Totalmente, Conjuntos Bem Ordenados e Números Ordinais, Axioma da Escolha, Lema de Zorn, Teorema da Boa-Ordem, Paradoxos da Teoria dos Conjuntos.

A Parte III aborda Tópicos Relacionados, conforme as seguintes sub-unidades: Álgebra das Proposições, Quantificadores, Álgebra de Boole e Raciocínio Lógico.

O professor formador teve-se em suas aulas para o primeiro ano de licenciatura, apenas na Parte I, tópicos que eram propostos, na época, em manuais didáticos destinados ao Ensino Secundário, 1º e 2º Ciclos, denotando o caráter elementar da abordagem realizada, nesse curso de formação de professores.

Não foi contemplada a Parte II nos estudos subseqüentes dessa disciplina, e a Parte III foi abordada parcialmente, conforme um segundo volume de registros referentes às aulas dadas nas disciplinas do 2º Ano (1971), compilados pelo licenciando já referido nesse trabalho.

Como interpretar então, o não aprofundamento dos conteúdos matemáticos nessa disciplina, tendo em vista que, apesar do manual didático usado como referência pelo professor formador em suas aulas, como disse o próprio autor no prefácio, tratar-se de um livro texto de referência para qualquer nível, constituído numa lógica de apresentação

progressiva da complexidade do assunto, foi favorecido uma apropriação de apenas, aproximadamente, 50% da obra utilizada?

O que parece ter acontecido, segundo o depoimento de um dos licenciandos da turma focalizada, nesse específico caso da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar do curso de Licenciatura em Matemática, foi uma adequação em menor proporção e grau de aprofundamento dos conteúdos, em virtude da especificidade do grupo de licenciandos que compunha a turma, como denota o depoimento de um deles, ao ser questionado com base nos registros das aulas, sobre essa questão:

*Acredito que o não aprofundamento da matéria, pelo menos não tanto quanto estava apresentada no livro, foi porque a nossa turma nunca havia estudado a Teoria dos Conjuntos mais a fundo... mais detalhadamente, pois os livros didáticos que até aquela época a gente utilizava para dar aulas no colegial, ou não traziam esse assunto ou pincelavam rapidamente. Mesmo os livros para o ginásio, não fazia tanto tempo que traziam a Teoria dos Conjuntos... talvez uns três anos. E para o colegial, quando a gente começou a faculdade, que eu lembro, ainda não tinha livros para o aluno com esse assunto... assim tão detalhado. O que se usava como apoio para as aulas era o Ary Quintella e pouco antes de começar a Faculdade, o Jairo Bezerra, de capa amarelo escuro, que até foi o mais usado para a gente se preparar para o vestibular. e uns outros que não lembro o nome. Eles traziam uma matemática mais antiga; inclusive, esses assuntos Produto Cartesiano, Relações, ... o que eu sabia era dos livros do Osvaldo Sangiorgi para o ginásio. Fui conhecer melhor esse assunto na faculdade, em Fundamentos e nesse livro da Coleção Schaum. Por isso, eu acho que não deu para o professor de Fundamentos aprofundar o tema, pois a gente estava muito cru... e não era só eu... a turma toda era assim. E tem outra coisa: dávamos aula o dia todo, e não sobrava tempo para estudar sozinho. Era o que o professor recomendava, e olha lá! (Entrevistado C, 2008).*

Nos livros de Matemática de Ary Quintella e Jairo Bezerra, que o entrevistado apresentou e indicou como utilizados pelos professores do colegial em suas aulas, identificamos do primeiro autor citado, um volume referente ao primeiro ano colegial, edição da Companhia Editora Nacional, São Paulo, 1965, a qual não apresenta estudos sobre a Teoria dos Conjuntos e equações logarítmicas e exponenciais são apresentadas sem referências às funções correspondentes; do segundo autor, um volume único para 1º, 2º e 3º anos dos cursos Clássico e Científico, da mesma editora, 1968. Neste, identificamos duas páginas e meia, onde são abordadas superficialmente noções elementares de conjunto, inclusive utilizando de forma dúbia, as relações de pertinência e inclusão. Esse texto precede o capítulo destinado às Funções, indicado no índice pelo autor, para ser estudado no 3º ano do Colegial.

Visto dessa forma, os licenciandos, a maioria já professores em exercício no ensino secundário, conheciam da Teoria dos Conjuntos, basicamente, o que lhes apresentavam os livros didáticos dos seus alunos do ensino ginásial. Talvez o depoimento acima elucide

parcialmente, o porquê do pouco rendimento em termos de aprofundamento de conteúdo matemático e a abordagem mais elementar adotada pelo professor formador, viabilizando através das aulas uma apropriação parcial dos conteúdos propostos no livro texto de Lipschutz.. Desse modo, as restrições quanto à utilização desse material na íntegra, talvez, em parte, assim se expliquem : “o único limite verdadeiro com o qual se depara a liberdade pedagógica do mestre é o grupo de alunos que ele encontra diante de si” (CHERVEL, 1990, p. 195).

Assim, é possível supor que o professor formador tenha priorizado apenas o aprofundamento dos tópicos apresentados por Lipschutz na Parte I do referido livro, que apresentava os conteúdos que estavam sendo imediatamente utilizados pelos licenciandos em seu trabalho pedagógico no ensino secundário, em detrimento da Parte II e III com maior aprofundamento da Teoria dos Conjuntos, como a Hipótese do Contínuo, Conjuntos ordenados parcialmente e totalmente ordenados, Números cardinais e ordinais, indução transfinita, etc, em função do trabalho do mestre, ser o a tensão de um “corpo a corpo com o grupo” (CHERVEL,p. 195) e que “o grupo em si mesmo, enquanto tal, constitui uma peça essencial no dispositivo disciplinar”( p. 195) .

Complementando seu pensamento, aquele autor comenta que : “no coração do processo que transforma as finalidades em ensino, há a pessoa do docente” (CHERVEL, 1990, p. 191), que tem diante de si apenas um verdadeiro limite para sua liberdade pedagógica: o grupo de alunos que encontra à sua frente.

Admite ainda esse autor, que os períodos em que são confiadas à escola finalidades novas, decorrentes de objetivos impostos por uma conjuntura política ou renovação do sistema educacional, ou ainda, entendemos, como aconteceu a reorganização curricular desencadeada pelo Movimento da Matemática Moderna, são períodos privilegiados para o historiador das disciplinas, que dispõe de documentação explícita sobre os novos objetivos e, também porque, “o docente é forçado a se lançar por sua própria conta em caminhos ainda não trilhados, ou a experimentar as soluções que lhe são aconselhadas” (p. 192); é também, momento em que surge um turbilhão das iniciativas, e as que se destacam positivamente, permitem reconstruir a natureza exata da finalidade daquele ensino.

Na perspectiva do autor:

A realidade de nossos sistemas educacionais não coloca os docentes, a não ser excepcionalmente, em contato direto com o problema das relações entre as finalidades e ensinos. A função maior da ‘formação dos mestres’ é de lhes entregar as disciplinas inteiramente elaboradas, perfeitamente acabadas, as quais funcionarão

sem incidentes e sem surpresas por menos que eles respeitem o seu ‘modo de usar’ (CHERVEL, 1990, p. 191).

O livro *Teoria dos Conjuntos* é citado como bibliografia de base, em didáticos para o ensino de nível colegial ou 2º ciclo, quando se passou a dedicar um espaço para maior detalhamento da Teoria dos Conjuntos nesses manuais; por exemplo: *Matemática 2º Grau*, 1ª Série, de Castrucci, Rosa Neto, Mendonça e Smith, editado pela FTD em 1975; *Matemática Segundo Grau*, Volume I, de Schor e Tizziotti, editado pela Atica em 1975.

Esse livro de Lipschutz, continuou sendo referência bibliográfica para a disciplina Fundamentos de Matemática em cursos de Licenciatura, pelo menos até o final do século passado, como no curso na USP<sup>46</sup> – Universidade de São Paulo.

Diferindo da ementa, percebe-se nos registros das aulas que, a seqüência dos conteúdos programáticos adotada pelo professor formador, com exceção da ordem das operações com conjuntos, é a mesma apresentada no livro didático referido, incluindo o estudo de funções antes do estudo de relações, fato que atrai nossa atenção, pois, bem como na ementa, os livros didáticos contemporâneos ao movimento, em sua grande maioria, traziam o conteúdo Relações precedendo às Funções.

Os motivos que levaram o professor formador a essa opção diferenciada pode constituir a problemática de outra pesquisa, pois, a singularidade da seqüência de conteúdos adotada pode conter elementos que venham apontar novas possibilidades de estudos.

Incluímos em anexo (ANEXO A) o índice do livro *Teoria dos Conjuntos*, porque normalmente ele expressa uma síntese do pensamento do autor, quanto aos objetivos da obra e suas expectativas dos efeitos ao que e a quem se destinam; neste caso, consideramos que o mesmo contém informações que julgamos serem esclarecedoras sobre o seu conteúdo, sinalizando para algumas concepções teórico-metodológicas do autor, o que, no nosso entendimento, justifica sua apresentação na íntegra.

---

<sup>46</sup> Disponível em <<http://sistemas.usp.br/jupiterweb/jupdisciplina?sgldis=SMA0341>>, acesso em 23/05/2007.

## Prefácio

---

A teoria dos conjuntos se reporta aos primórdios da matemática. Os conceitos da teoria dos conjuntos, tais como funções e relações, aparecem explícita ou implícitamente em cada ramo da matemática. Este texto trata da teoria dos conjuntos de uma maneira informal e não axiomática.

Embora o conteúdo esteja dividido em três partes, o desenvolvimento lógico não é prejudicado, ao mesmo tempo que aumenta sua utilidade como livro texto e de referência para qualquer nível. A Parte I contém uma introdução às operações elementares de conjuntos e uma discussão detalhada do conceito de uma função e de uma relação. A Parte II desenvolve a teoria dos números cardinais e ordinais à maneira clássica de Cantor. Considera ainda conjuntas parcialmente ordenadas e o axioma de escolha e seus equivalentes, incluindo o lema de Zorn. A Parte III trata dos tópicos que são normalmente associados à teoria elementar dos conjuntos. Logicamente, a apresentação particular de certos tópicos está influenciada pelas preferências do autor. Por exemplo, as funções são apresentadas antes das relações e não são definidas inicialmente como conjuntos de pares ordenados.

Cada capítulo principia com proposições claras de definições pertinentes, princípios e teoremas, junto com material ilustrativo e descritivo, seguindo-se conjuntos de problemas graduados, resolvidos e suplementares. Os problemas resolvidos servem para ilustrar e ampliar a teoria, focalizando os pontos nos quais o estudante se sente continuamente inseguro e provendo a repetição de princípios básicos tão vitais ao aprendizado eficiente. Entre os problemas incluem-se inúmeras demonstrações de teoremas e derivações dos resultados básicos. Os problemas suplementares servem como uma revisão completa do material de cada capítulo.

Figura 6 – 1ª página do Prefácio do Livro “Teoria dos Conjuntos”

Inclui-se aqui muito mais material do que pode ser coberto na maioria dos cursos iniciais. Agiu-se assim a fim de fazer com que o livro seja mais flexível, tornando-se uma obra de referência mais útil, e também com a finalidade de estimular um interêsse adicional aos tópicos.

Sugerimos, como referência, os seguintes livros, sendo os de Halmos e Kamke especialmente recomendados como leitura auxiliar para a Parte II:

Bourbaki, N., *Theorie des Ensembles*, Hermann, Paris, 1958

Halmos, P. R., *Naive Set Theory*, Van Nostrand, 1960

Hansdorff, F., *Set Theory*, Chelsea, 1957

Kamke, E., *Theory of Sets*, Dover, 1950

Kuratowski, C., *Introduction to Set Theory and Topology*, Addison-Wesley, 1962

Natanson, I. P., *Theory of Functions of a Real Variable*, Chap. 1.2.14, Ungar, 1955.

Quero aproveitar esta oportunidade para agradecer a muitos amigos e colegas pelas inestimáveis sugestões e pela revisão crítica do manuscrito. Aos funcionários da Schaum Publishing Company estendo os meus agradecimentos particulares pela sua excelente cooperação.

SEYMOUR LIPSCHUTZ

Instituto Politécnico de Brooklyn

Janeiro, 1964

Figura 7 – 2ª página do Prefácio do livro “Teoria dos Conjuntos”

Conforme indicações do prefácio, o autor ressalta que os conceitos de Teoria dos conjuntos, Funções e Relações permeiam explícita ou implicitamente os diversos ramos da matemática, coadunando-se com as afirmações de Fiorentini (1995) sobre os conteúdos que estariam envolvidos com os principais propósitos do MMM.

Ainda quanto à apresentação do Prefácio, Lipschutz (1968) comenta o modo como apresenta os capítulos, indicando que esse livro pode ser referência para qualquer nível, o que

de certa forma também explica sua escolha de apresentação da Teoria dos Conjuntos, segundo ele, “de uma maneira informal e não axiomática”.

O autor se refere à utilização de proposições claras de definições pertinentes, princípios e demonstrações de teoremas e derivações dos resultados básicos, junto com material ilustrativo e descritivo; tece considerações em relação à finalidade dos problemas apresentados no livro (com resolução), bem como os problemas complementares utilizados para revisão, denotando preocupações com as dificuldades de entendimento do estudante.

Considera que a repetição de princípios básicos seria fundamental para uma aprendizagem eficaz, denotando uma concepção de aprendizagem que também parece ser, como apontam os registros das aulas de Fundamentos da Matemática Elementar, a do professor formador, sugerindo uma tendência formalista, com valorização da memorização, mas com inovações trazidas pela atenção dispensada à linguagem simbólica e às estruturas algébricas.

A menção, feita pelo autor no Prefácio, à utilização de “material ilustrativo”, provavelmente refere-se ao uso extenso de diagramas que permeou toda sua apresentação do estudo da Teoria dos Conjuntos e Funções, recurso didático, também intensamente utilizado pelo professor formador em suas aulas e, até hoje, utilizado por professores e autores de livros, na apresentação desses temas.

Ainda no Prefácio, Lipschutz (1968), faz referências às funções serem apresentadas antes de relações e que não são definidas inicialmente como conjuntos de pares ordenados, justificando que a apresentação particular de certos tópicos, está influenciada pelas preferências do autor.

Entre as referências citadas por Lipschutz, está o *Theorie des Ensembles*, do grupo francês Bourbaki, reafirmando a influência deste grupo no contexto da Educação Matemática naquele período.

Com base no exposto pelos depoimentos dos entrevistados, aqui apresentados, protagonistas do Movimento da Matemática Moderna no interior paranaense, somos levados a supor que o livro didático exerceu um papel significativo para os professores que apresentaram conteúdos atrelados ao MMM aos estudantes dos diversos níveis de escolaridade, sendo inclusive, utilizado por alguns, como referência para o planejamento das aulas.

Visto dessa forma, é possível admitir, também, a influência que esse veículo comunicador exerce sobre a constituição da história das disciplinas e conseqüentemente sobre

a história do ensino, quando entendemos como Chervel (1990), que a história dos conteúdos é o componente central da história das disciplinas.

O fato do professor formador não ter cumprido uma programação voltada para o aprofundamento do conhecimento científico, como é o esperado num curso superior, e nem tão pouco, ter viabilizado a apropriação de todos os tópicos apresentados no manual didático escolhido para apoiar suas aulas, pode ser interpretado, dentre outras maneiras, como a que “os professores dispõem de uma ampla liberdade de manobra: a escola não é o lugar da sujeição e da coação e o professor não é o agente de uma didática que lhe seria imposta de fora” (JULIA, 2001, p. 33). Corroborando o que já foi dito por Chervel (1990, p. 195) e admitido por Julia (2001, p. 33), parece mesmo ser influente na ação pedagógica do professor, o grupo de alunos que tem diante de si.

Entre as referências citadas por Lipschutz, está o *Theorie des Ensembles*, do grupo francês Bourbaki, reafirmando a influência deste grupo no contexto da Educação Matemática, daquele período.

Embora muitas considerações ainda possam ser feitas, não colocamos em questão a qualidade pedagógica do livro indicado nessa disciplina, reconhecendo a compatibilidade da escolha e a utilização do mesmo, nas práticas da Matemática Moderna do professor formador da primeira turma de Licenciatura em Matemática da instituição investigada.

#### **4.4. Finalidades educativas da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar**

Segundo Certeau (1982), “antes de saber o que a história diz de uma sociedade, é necessário saber como funciona dentro dela” (p. 76). Nessa perspectiva, para os estudos históricos que estamos desenvolvendo, a informação sobre os conteúdos abordados nesse curso de Licenciatura em Matemática é significativa, pois evidencia uma adequação entre os estudos feitos pelos licenciandos de Matemática, na época, e suas necessidades técnico-profissionais daquele momento, pois os conteúdos listados eram também os recentemente incluídos nos livros didáticos e nos programas curriculares do ensino ginásial e secundário das escolas brasileiras.

Para esse historiador, “nas épocas de movimento ou de revolução, as rupturas de ação coletiva ou individual se tornam o princípio da inteligibilidade histórica”(CERTEAU, 1982, p.58).

Se entendermos como uma das finalidades dos cursos de licenciatura na época, recém reorganizados pela Lei 5540/68<sup>47</sup>, a formação técnica de profissionais para suprir a defasagem quantitativa de mão de obra especializada que correspondesse às exigências do mercado de trabalho, em um país voltado a uma política de desenvolvimento extremamente ligada à modernização da produção do capital, somos levados a inferir que esse curso estava alinhado com as expectativas da política governamental vigente, formando os professores que retornariam como capital humano a serviço da educação brasileira, modificando hábitos, concepções e fazeres pedagógicos.

O exposto nos remete aos estudos de Chervel (1990), quanto às possibilidades de se pensar que é ao redor das finalidades da sociedade que se elaboram as políticas educacionais, os programas e os planos de estudo, e que se realizam a construção e a transformação históricas da escola. E que através dos conteúdos, das práticas pedagógicas, do caráter criativo do sistema escolar, vai se “formando uma cultura que vem por sua vez penetrar, moldar, modificar a cultura da sociedade global” CHERVEL (1990, p.184).

Esse autor, ao tratar das finalidades do ensino escolar, assim se posiciona:

A instituição escolar é, em cada época, tributária de um complexo de objetivos que se entrelaçam e se combinam numa delicada arquitetura da qual alguns tentaram fazer um modelo. É aqui que intervém a oposição entre educação e instrução. O conjunto dessas finalidades consigna à escola a sua função *educativa* (grifos do autor). Uma parte somente entre elas obriga-a a dar uma instrução. Mas essa instrução está inteiramente integrada ao esquema educacional que governa o sistema escolar, ou o ramo estudado. As disciplinas escolares estão no centro desse dispositivo. Sua função consiste em cada caso em colocar um conteúdo de instrução a serviço de uma finalidade educativa (CHERVEL, 1990, p.188, grifos do autor).

Nesse caso, entendemos que pode ter sido ao redor das finalidades do Estado, que esse curso compreendeu as próprias finalidades. Apesar de que, havia sim, uma parcela da sociedade, representada pelos licenciandos, interessada em conhecer melhor os conteúdos que estavam trabalhando na educação básica; e também por parte dos pais ou responsáveis pelos

---

<sup>47</sup> A Lei 5.540/68, estabelecida durante o regime militar de governo iniciado em 1964, alinhada aos acordos MEC-USAID, fixou normas de organização e funcionamento do Ensino Superior e sua articulação com a escola média.

alunos dos graus iniciais de escolarização, que em função da divulgação sobre a Matemática Moderna na imprensa, cobravam atualização dos professores.

Quais as finalidades educativas do tratamento pedagógico dado à Teoria dos Conjuntos na disciplina Fundamentos? Vulgarizar o conhecimento dessa teoria? Cumprir a ementa da disciplina? Atualizar os licenciandos em relação aos novos conteúdos, principalmente, a Teoria dos Conjuntos, recém incorporada aos livros didáticos da educação elementar e às reformulações curriculares que vinham acontecendo?

A reflexão e os questionamentos que ora fazemos, apóia-se em Chervel, quando diz:

Mas as finalidades de ensino não estão todas forçosamente inscritas nos textos. Assim, novos ensinamentos às vezes se introduzem nas classes sem serem explicitamente formulados. Além disso, pode-se perguntar se todas as finalidades inscritas nos textos são de fato finalidades 'reais' (CHERVEL, 1990, p.189).

Não podemos portanto ceder à superficialidade, considerando apenas os registros concretos para entender as finalidades do ensino. Como disse aquele autor, o estudo das finalidades não pode pois, de forma alguma, abstrair os ensinamentos reais, pois a educação dada e recebida nos estabelecimentos escolares é "um conjunto complexo que não se reduz aos ensinamentos explícitos e programados" (CHERVEL, 1990, p. 188).

Quais eram, afinal, as finalidades do Movimento da Matemática Moderna ?

Ao comentar seus estudos sobre o Seminário de Royaumont, Guimarães (2007) aborda as finalidades do ensino de Matemática, consideradas nesse significativo evento:

Do ponto de vista interno a Escola e ao ensino de Matemática, evidenciam-se, na proposta de Royaumont e na sua especificação de Dubrovnik, um propósito principal global e algumas orientações curriculares centrais. O propósito principal tinha em conta essencialmente a continuação de estudos dos alunos e as necessidades do ensino superior, e visava acabar ou reduzir, o desfasamento que existia entre a Matemática dos programas das escolas secundárias e aquela que se estudava nas universidades. A esse respeito, numa das conclusões gerais do seminário, a propósito do programa que foi aí delineado, é dito que esse programa 'está em harmonia com as matemáticas universitárias modernas'(OECE,1961<sup>a</sup>, p. 111) (GUIMARÃES, 2007, p.31)

Esses dados apresentados por Guimarães (2007, p. 22), nos levam a acreditar que nesse encontro de professores e matemáticos em Royaumont e suas especificações em Dubrovnik, respectivamente em 1959 e 1960, considerou-se que a maior finalidade da reforma no ensino de Matemática, era adequar os programas de Matemática do ensino

secundário aos avanços internos da própria Matemática, visando um melhor preparo dos alunos para seus estudos universitários.

Essa finalidade do ensino de Matemática no nível secundário de escolarização, visando preparação dos estudantes para os estudos universitários, evidentemente privilegiada no Seminário de Royaumont, justificada pela necessidade de acabar ou reduzir a diferença entre a modernização já realizada nos cursos universitários de Matemática e os programas das Escolas secundárias, pode ser vista, também, como idéia inspiradora de que através de uma formação adequada de professores de Matemática para o nível secundário de ensino ampliaria as possibilidades daquela finalidade referida ser atendida.

Em outras palavras, estamos levantando possibilidades da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar do Curso de Licenciatura em Matemática de um dos estabelecimentos de Ensino Superior do interior paranaense, através das práticas pedagógicas da Matemática Moderna, em 1970, ter como uma de suas finalidades a inculcação de idéias modernizadoras do ensino de Matemática, naqueles que, na condição de atuais ou futuros professores de Matemática no ensino secundário, seriam encarregados da preparação dos estudantes desse nível de ensino para os estudos universitários.

Não podemos deixar de lembrar, que os alunos desse curso de Licenciatura, iniciado em 1970, desconheciam o novo tratamento dado aos conteúdos Teoria dos Conjuntos, Relações e Funções, ou o conheciam muito recentemente apenas via livro didático dos seus alunos, em função de sua formação secundária ser antecedente a implementação dessas idéias em níveis escolares primário e secundário, como atestam os depoimentos dos ex-licenciandos, ao falar do restrito domínio que tinha da matéria a ensinar aos estudantes naquela época.

Sendo assim, além dos livros didáticos com os quais estavam trabalhando em sua ação docente e dos cursos promovidos por editores e pelos Grupos de disseminação das idéias modernizadoras da Matemática, como o GEEM de São Paulo, o NEDEM do Paraná e o GEMPA do Rio Grande do Sul, o curso de graduação era uma possibilidade de atualização profissional.

Desse modo, a disciplina Fundamentos de Matemática Elementar do Curso de Licenciatura em Matemática que estamos nos referindo, ao priorizar aqueles conteúdos, e valorizar amplamente a linguagem e a simbologia matemática, poderia ter como finalidade, possibilitar a introdução mais efetiva da Matemática Moderna nos graus antecedentes de escolarização, objetivando o preparo dos estudantes para seus futuros estudos, através do melhor preparo de seus professores.

O próprio texto da Lei nº. 5540/68 que fixava normas de organização e funcionamento do Ensino Superior e sua articulação com a Escola Média, em seu Art.11, previa que “As universidades organizar-se-ão com as seguintes características: (...) e) universalidade de campo, pelo cultivo das áreas fundamentais dos conhecimentos humanos, estudados em si mesmos ou em razão de ulteriores aplicações e de uma ou mais áreas técnico-profissionais; f) flexibilidade de métodos e critérios, com vistas às diferenças individuais dos alunos, as peculiaridades regionais e às possibilidades de combinação dos conhecimentos para novos cursos e programas de pesquisa”.

Enfim, a proposta político-pedagógica para o ensino superior daquele momento, voltava-se mais para a formação do técnico (inclusive o professor), e do pesquisador, exigidos cada vez mais pelas novas aplicações da Matemática na indústria e em outros ramos da atividade econômica.

De acordo com as pesquisas de Duarte<sup>48</sup> sobre a promoção do Movimento da Matemática Moderna na Bahia, principalmente por Omar Catunda e Martha Dantas, intencionando introduzir as idéias modernizadoras no ensino secundário, denotavam-se esforços para “encontrar um consenso geral sobre os conceitos a serem introduzidos, levando em consideração as recomendações de reuniões internacionais e nacionais” (DUARTE, 2007, p. 165). Percebemos indícios de que havia por parte dos professores universitários de Matemática, preocupações com a disseminação das idéias da Matemática Moderna, e em sintonizar as ações brasileiras aos eventos internacionais em relação ao tema.

Teria a finalidade de melhor preparar os estudantes para os cursos universitários, movido o interesse da comunidade acadêmica brasileira de matemática, a ponto de fazê-la empenhar-se na divulgação das idéias modernizadoras para o ensino de Matemática em nível secundário? Ou, seria a crença real nos valores intrínsecos à Matemática e ao seu ensino advindos das novas propostas apoiadas na valorização da unidade da Matemática através da Teoria dos conjuntos, sua linguagem e simbologia, das Relações e Funções, das Estruturas Algébricas?

De acordo com um dos ex-licenciandos da turma referida, Doutor em Educação Matemática pela UNICAMP desde 1988, professor atuante em cursos de Licenciatura em Matemática e cursos pós-graduados, incluindo Especialização e Mestrado em Educação em duas universidades do interior paranaense, ao falar do Movimento da Matemática Moderna:

---

<sup>48</sup> Aparecida Rodrigues Silva Duarte, doutora em Educação pela PUCSP, e estudiosa do MMM.

*Os grupos que mais estudaram o Movimento foram os grupos das universidades. Foi um movimento em que os professores (entenda-se, do atual ensino fundamental e médio) foram meros executores e não participando no movimento de estudar, de planejar, faltou entendimento. O grande problema de nossas reformas é o professor ter que fazer as coisas impostas pelos vários órgãos, mas não participando do processo. E quem não participa não se envolve. Quando você participa de uma discussão, você vai se envolvendo, torna aquilo parte sua. Mas naquilo que você é meramente um cumpridor de determinações, não ocorre realmente um envolvimento (Entrevistado B, março de 2007).*

Quanto ao envolvimento dos professores universitários na disseminação da Matemática Moderna, o maior destaque fica com Osvaldo Sangiorgi, presidente do GEEM (LIMA, 2007, p. 193) que, após participar em cursos internacionais já referidos no capítulo 2, foi o principal articulador do MMM, contando inclusive, de acordo com Nakashima (2007, p. 213-214), com acesso, apoio e um trânsito admiráveis na imprensa nacional.

Apesar de não terem sido encontrados registros esclarecedores entre a documentação oficial da Instituição de Ensino Superior, local de onde falamos em nossa pesquisa, explicitando a relação entre a ementa da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar e as supostas finalidades que apresentamos, percebe-se, no registro das práticas em sala de aula, a forte relação entre essas práticas e as necessidades reconhecidas pelos ex-licenciandos entrevistados.

Como afirma o historiador francês Dominique Julia (2001),

*Convém ainda não nos deixarmos enganar inteiramente pelas fontes, mais freqüentemente normativas, que lemos. A história das práticas culturais é, com efeito, a mais difícil de se reconstruir porque ela não deixa traço: o que é evidente em um dado momento tem necessidade de ser dito ou escrito? (JULIA, 2001, p. 15).*

Esse autor, como já nos referimos anteriormente, aponta como uma das vias particularmente interessantes de serem seguidas para o entendimento da cultura escolar, a análise dos conteúdos escolares e das práticas escolares, ou, dizendo de outra forma, o estudo das disciplinas escolares, entendida por ele como “um produto específico da escola, que põe em evidência o caráter eminentemente criativo do sistema escolar” (JULIA, 2001, p.33).

Na perspectiva desse autor, consideramos que os cadernos de alunos contendo os conteúdos priorizados pelo professor, os exercícios por ele propostos e o livro didático que utilizou, fornecem informações preciosas sobre as finalidades educativas daquela disciplina e de forma mais ampla, de toda a escola.

Ouvindo ex-licenciandos da turma pesquisada sobre suas expectativas em relação ao curso e as impressões sobre as práticas da Matemática Moderna nele desenvolvidas, percebemos uma sutil reivindicação quanto às finalidades que o curso deveria priorizar.

*As pessoas pensam que ensinar Matemática é transmitir conteúdo matemático. Quando você se coloca na posição de educador matemático, ensinar Matemática é bem diferente, Tem várias dimensões envolvidas no ato de ensinar. Por que estou ensinando isso? Para que vou ensinar isso? Para quem vou ensinar isso? Como vou ensinar isso? Quando vou ensinar isso? Então, as dimensões sociológicas, filosóficas, psicológicas que estão envolvidas no processo, tornam-no não tão simples quanto se imagina ser o ensino da Matemática. A Matemática Moderna estava voltada às estruturas da Matemática, com a Matemática em si, numa visão mais internalista da Matemática. Não sou matemático. Sou professor de Matemática. Uma coisa é você ensinar Matemática e outra coisa é você fazer a ciência matemática.(Entrevistado B, 2007).*

O comentário feito pelo entrevistado B, nos reporta às considerações de Pinto (2007), sobre a visão bastante generalizada na cultura escolar de que “para ensinar matemática basta dominar o conteúdo matemático” (p. 255).

Outro entrevistado destaca o papel diferenciado que o professor formador pode representar na prática educativa daqueles que está formando:

*A coisa parecia inicialmente meio estranha... A gente pensava o que aquilo tinha a ver com a realidade do aluno e com o dia a dia do estudante. E realmente a gente não via muita ligação entre a Teoria dos Conjuntos e os problemas cotidianos...A minha preocupação maior era corresponder ao desempenho do professor. O professor estava expondo, fazendo o seu trabalho e ele iria me cobrar o trabalho dele. Então, eu teria que nas provas pagar o que o professor havia dado. Era importante o desempenho do professor ali, eu creio, em desenvolver o gosto pela matéria, e, também, no incentivo para a transmissão daquela matéria em nossa prática na sala de aula (Entrevistado A, dezembro 2006).*

Esses depoimentos, sinalizam para a necessidade de uma atenção maior aos aspectos pedagógicos da formação, observados também por outro entrevistado, em cujo depoimento já apresentado anteriormente, ressalta a valorização da contextualização dos conteúdos matemáticos, reconhecendo não ter encontrado no curso de Licenciatura, orientações nesse sentido.

Que espaço a disciplina Fundamentos abriu à criatividade dos licenciandos? Qual era a “tônica” naquele momento histórico da Educação Matemática na Academia? Era a formação do matemático? Era a formação do professor?

Citada por Chervel (1990, p. 187), lembramos da célebre frase de Jules Ferry<sup>49</sup> aos inspetores e diretores de escola normal: ‘O que nós vos pedimos a todos, é de nos fazer homens antes de nos fazer gramáticos’, ou seja, que sejam priorizadas a reflexão, o julgamento, a faculdade de expressar claramente que sabem e o que pensam, pois, mais que estudos aprofundados em qualquer área, o estudante necessita de uma visão mais ampla sobre cada disciplina escolar e o que ela lhe oferece para entendimento e interação com as circunstâncias políticas, sociais, culturais e econômicas em que está inserido como cidadão.

Talvez, Ferry, nessas circunstâncias dissesse em relação ao ensino secundário: “O que nós vos pedimos a todos, é de nos fazer cidadãos antes de nos fazer matemáticos” (grifos nossos) e em relação ao curso de licenciatura: “O que nós vos pedimos a todos, é de nos fazer professores antes de nos fazer matemáticos” (grifos nossos).

Enfim, os registros das práticas da Matemática Moderna, efetivadas na disciplina Fundamentos de Matemática do curso de Licenciatura que ora analisamos, não nos permitem afirmar que as finalidades educativas do ensino de Matemática, tenham contemplado a formação da disciplina mental ou elevação do espírito, nem que trataram a Matemática como ferramenta para atuar no cotidiano. Ao que indicam os registros e os depoimentos dos ex-alunos, priorizaram o estudo da Matemática por ela mesma, valorizam o entendimento de suas próprias estruturas e da unidade matemática.

O professor formador parece ter adequado os conteúdos curriculares às necessidades imediatas do seu público, o que poderia ser interpretado, dentre outras formas, como indícios de relações com as finalidades maiores de um curso de licenciatura emergente, ou seja, preparar os licenciandos, para ministrar aulas de Matemática Moderna, atualizando quanto aos conteúdos e favorecendo um melhor desempenho das funções docentes de professores que já atuavam no ensino de primeiro e segundo graus, naquele período que solicitava uma educação científica voltada à sociedade tecnológica em acelerado desenvolvimento.

---

<sup>49</sup> Jules Ferry(1832-1893) foi advogado, jornalista e político francês, Ministro da educação que tornou a escola francesa religiosamente neutra. Foi adepto do positivismo de Auguste Comte, que o inspirou nas suas reformas do sistema educativo francês. Disponível em: <[http://pt.wikipedia.org/wiki/Jules\\_Ferry](http://pt.wikipedia.org/wiki/Jules_Ferry)>, acesso em 06/10/07.

## 5 A APROPRIAÇÃO DA MATEMÁTICA MODERNA NA LICENCIATURA

O conceito dado por Chartier (1990) ao termo “apropriação”, está associado aos diversos significados atribuídos e ao uso diferenciado que os sujeitos fazem das idéias e dos objetos que lhe são colocados cotidianamente, ou dos modelos que lhe são impostos. Assim pensado, o Movimento da Matemática Moderna e as idéias sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, dele advindos, certamente assumiram variadas faces, em função dos diversos olhares, possibilitando desvios da leitura original.

Entendemos que a diversidade de apropriações feitas de uma mesma idéia decorre, entre outros fatores, das concepções já consolidadas e incorporadas ao longo da vida. Assim, vemos uma relação muito forte no binômio concepção-apropriação, onde uma é alimento para a outra, independente da ordem que as tomemos. Em outras palavras, entendemos a relação “concepção-apropriação”, como uma relação dialética, em que as apropriações que fazemos são orientadas pelas concepções que temos, as quais, são decorrentes das apropriações que fazemos. Nessa perspectiva, analisar as práticas pedagógicas da Matemática Moderna, implica em considerar esse binômio.

Desde longa data, pesquisadores no campo educacional, levantam possibilidades sobre a relação interativa entre as concepções dos professores e as práticas pedagógicas por eles exercidas. Segundo o matemático português João Pedro da Ponte (1994), nos anos 80 do século XX, em Portugal, desenvolveu-se uma importante linha de investigação<sup>50</sup>, que procurava estudar o relacionamento existente entre as concepções dos professores e suas práticas pedagógicas. Para esse autor, as concepções estruturam o sentido que damos às coisas, porém, também atuam como elemento bloqueador em relação a novas realidades ou a certos problemas, limitando as nossas possibilidades de atuação e compreensão; mas, conclui dizendo: “A perspectiva geral é a de que as concepções acerca da Matemática influenciam fortemente as concepções acerca do ensino desta disciplina e que estas, em última análise, determinam as práticas” (PONTE, 1992)<sup>51</sup>.

---

<sup>50</sup> PONTE, J. P. *O Professor de Matemática: Um Balanço de Dez Anos de Investigação*. Artigo publicado na revista *Quadrante*, Vol. 3, Nº. 2, pp. 79-114, 1994. Disponível em: <[www.educ.fc.pt/docentes/jponte/94-Ponte\(Quadrante-profs\).doc](http://www.educ.fc.pt/docentes/jponte/94-Ponte(Quadrante-profs).doc)>, acesso em 08/10/2007.

<sup>51</sup> PONTE, J. P. *Concepções dos Professores de Matemática*. Artigo publicado em 1992, em J. P. Ponte (Ed.), *Educação matemática: Temas de investigação* (pp. 185-239). Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. Disponível em: <[www.spce.org.pt/sem/91.Ponte.pdf](http://www.spce.org.pt/sem/91.Ponte.pdf)>, acesso em 08/10/2007.

Há, entretanto, autores como Alba Thompson (1982), referida por Pontes (1992), como realizadora da primeira investigação importante nesse sentido, que entende que a relação entre as concepções e ações do professor não é simples mas complexa; mas considera, no entanto, que o estudo que realizou suporta a idéia de que as concepções (conscientes ou inconscientes) acerca da Matemática e seu ensino desempenham um papel significativo, embora sutil, na determinação do estilo de cada professor.

Afinal, de onde vêm as concepções? Não será das experiências, ou ainda, das práticas? Há, na perspectiva de Ponte (1992), a possibilidade da relação entre concepções e práticas ser uma relação dialética, ou seja, de que modo novas práticas suscitam novas concepções?

Partindo do pressuposto que as concepções determinam as práticas, levantamos também, a possibilidade de que através do registro escrito de práticas desenvolvidas, seja provável detectar alguns traços de concepções do professor que as efetivou, ou, dizendo de outra forma, indícios de como se deu a apropriação das idéias veiculadas pelo MMM.

Assim, reconstituir a história dessas práticas implica na busca de compreensão da apropriação das idéias veiculadas por esse Movimento, feita pelos diversos atores que vivenciaram esse processo e do uso que fizeram em sua ação pedagógica, seja reforçando concepções ou modificando aspectos da cultura escolar já existentes.

Chervel (1990) alega que os períodos de renovação do sistema educacional são momentos privilegiados para o historiador, por entendê-los como portadores de objetivos declarados circunstancialmente e, por forçarem o docente a se lançar por sua própria conta em caminhos ainda não trilhados. As mudanças propostas pelo Movimento da Matemática Moderna, ao serem introduzidos nos livros didáticos da Educação básica, podem ter redirecionado o currículo de formação de professores de Matemática, modificando substancialmente os programas das disciplinas de tais cursos, que por sua vez, podem ter modificado a apropriação que os professores da educação básica possam ter feito das idéias modernizadoras da Matemática, veiculadas pelos livros didáticos destinados àquele nível educacional.

Na perspectiva histórico-cultural, o estudo considera o que afirmou Chervel: “no coração do processo que transforma as finalidades em ensino, há a pessoa do docente” (1990, p. 191), que tem diante de si apenas um verdadeiro limite para sua liberdade pedagógica: o grupo de alunos que encontra à sua frente.

Visto desse modo, pesquisar as práticas pedagógicas efetivadas nesse período, pode contribuir para o desvelamento das reais finalidades educacionais daquela época. E, particularmente, se o foco da pesquisa são práticas desenvolvidas em uma determinada

disciplina em um curso de licenciatura, é possível encontrar indícios de como este curso cumpria seu objetivo maior e explícito de formação docente.

Pelo fato de já termos abordado, no capítulo anterior, os conteúdos tratados na disciplina, foco de nossa análise, e traçado algumas considerações sobre as escolhas feitas pelo professor formador, abordaremos mais o aspecto das formas de apropriação-utilização dessas idéias.

A ementa da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar, contendo Teoria dos Conjuntos, Funções e Relações, constitui uma das marcas que podem ser interpretadas como compatibilização de escolha dos conteúdos feitas pelo professor formador com o ideário modernizador do ensino da Matemática. Consideramos relevante essa informação, levando em conta que a Teoria dos Conjuntos constituía um conhecimento relativamente novo para os licenciandos, pois segundo os entrevistados, a maioria conhecia o assunto apenas via livro didático dos alunos, com os quais desenvolviam sua ação docente.

A apresentação da Teoria dos Conjuntos pelo professor formador, partia de conceitos primitivos (termos e relações não definidas) e, apesar da não utilização declaradamente explícita das palavras axioma e teorema, percebem os postulados, com base nos quais, extraem-se outras sentenças que são demonstradas. O uso prevaletente de definições, também expressa marcas da axiomatização, significativamente reverenciada nas propostas de modernização da Matemática., segundo Guimarães (2007) um dos pontos chave da concepção bourbakista. Não consideramos que o tratamento pedagógico dado à Teoria dos conjuntos pelo professor formador desse curso de Licenciatura, tenha sido “rigorosamente axiomático”, devido, entre outros fatores, às várias introduções de definições, partindo da observação de diagramas, de exemplos numéricos, com apelo à intuição e não apenas decorrentes de postulados envolvendo os conceitos primitivos, conforme ilustramos a seguir (figura 8).

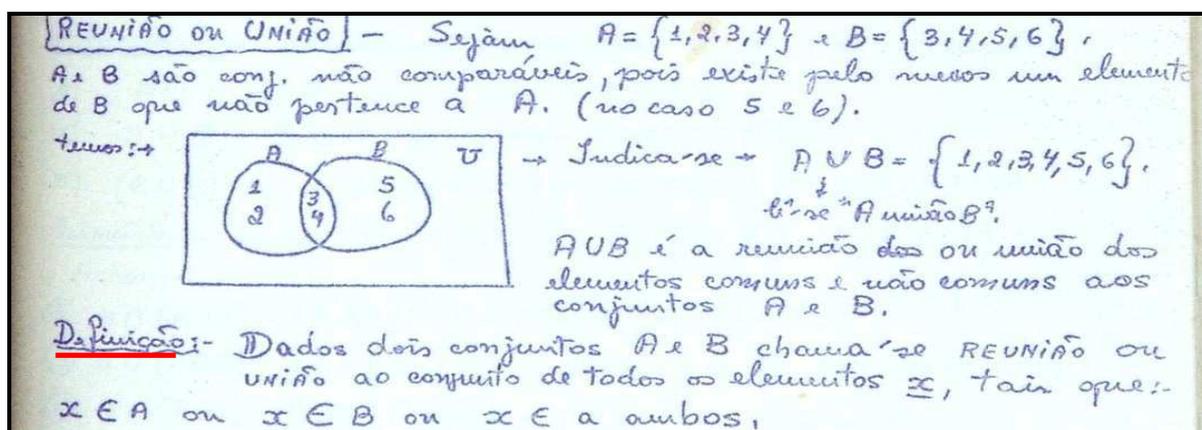


Figura 8 – Abordagem intuitiva seguida de definição

A simbologia e linguagem, características da Teoria dos Conjuntos, são utilizadas, permeando constantemente as proposições, definições, exercícios e demonstrações, inclusive denotando uma preocupação especial do professor em utilizá-las, por exemplo, quando a mesma definição é apresentada por ele em duas formas: utilizando palavras e na seqüência, usando a simbologia dos conjuntos, o que corresponde em nosso entendimento, a uma apropriação da “valorização da linguagem e simbologia matemáticas”, uma preocupação com a formalização.

Para Kline (1976), outro auxílio visando à precisão, fortemente explorado pela nova matemática, é o simbolismo. Diz esse autor, que embora se admita que um certo simbolismo seja útil e até necessário, no uso excessivo de símbolos, o currículo de matemática moderna fez da virtude um vício. Verificamos essa ocorrência na figura 9.

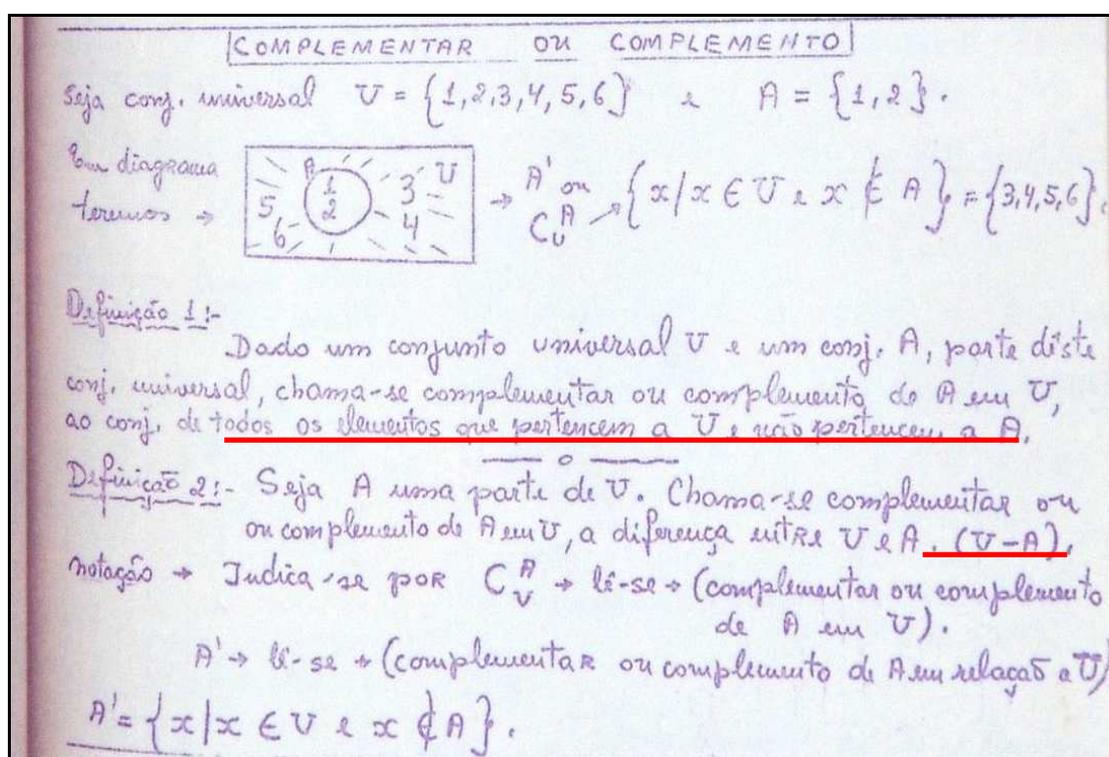


Figura 9 – Preocupação com o uso da simbologia

A ênfase no uso da linguagem e simbologia, sugere a presença da concepção formalista, tendo como orientação a própria lógica do conhecimento matemático.

A provável intenção do professor formador com a contextualização de alguns tópicos da Teoria dos Conjuntos pode ser percebida, na medida em que potencializou na aplicação dessa Teoria (ver Figura 10), a utilização de importantes ferramentas matemáticas, como operações com números reais e complexos, a resolução de equações do 2º grau, biquadradas, exponenciais e trigonométricas, bem como a utilização de determinantes.

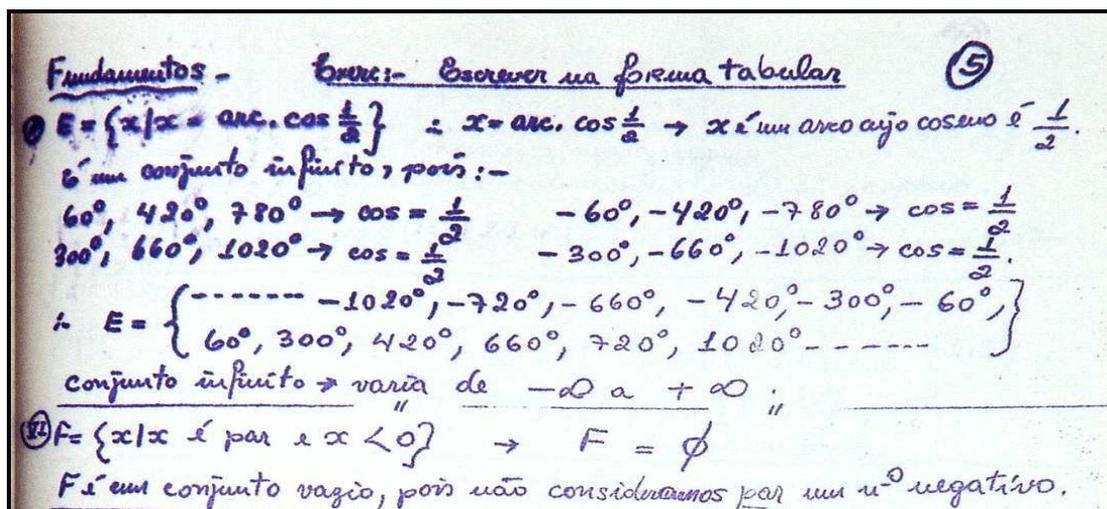


Figura 10 – Contextualização da Teoria dos Conjuntos na visão do matemático

A figura 10, também, sinaliza uma preocupação com a integração dos conteúdos matemáticos, talvez numa tentativa de usar a Teoria dos Conjuntos como elemento unificador da matemática.

A esse respeito, é também destacado por Guimarães( 2007, p. 33), que nas conclusões do Seminário de Royaumont, junto ao reconhecimento de que a unidade da Matemática é um dos traços característicos da Matemática mais atual, salientou-se que “nos anos mais iniciais do seu ensino, a unidade da Matemática só deve ser respeitada na medida em que decorra de um trabalho intuitivo prévio junto aos alunos” (OECE, 1961a, p. 113). Sobre essa questão, o relatório é claro, quando diz: ‘Não é necessário respeitar, no iniciar da Matemática, uma unidade que não resulte da intuição, nem das noções instintivas de quantidade e de espaço’ (OECE, 1961a, p. 113 apud GUIMARÃES, 2007, p. 33).

Por outro lado, essa figura, sugere uma visão valorativa da Matemática voltada para a própria matemática, evidenciando, talvez, o possível comprometimento do professor formador em assegurar o conhecimento da Teoria dos Conjuntos na visão do matemático, aquele que vê sentido no ensino da matemática por ela mesma, ou seja, uma abordagem internalista da Matemática.

Segundo a concepção de um dos ex-licenciados:

*A Matemática Moderna estava voltada às estruturas da Matemática, com a Matemática em si, numa visão mais internalista (...) Uma coisa é você ensinar Matemática e outra coisa é você fazer a ciência matemática (...) Como professor de Licenciatura, a minha grande preocupação sempre foi trabalhar com o ensino da Matemática; não sou matemático, sou professor de Matemática. As pessoas pensam que ensinar Matemática é transmitir conteúdo matemático. Quando você se coloca na posição de educador matemático, ensinar Matemática é bem diferente. Tem várias dimensões envolvidas no ato de ensinar. Por que estou ensinando isso? Para*

que vou ensinar isso? Para quem vou ensinar isso? Como vou ensinar isso? Quando vou ensinar isso? Então, as dimensões sociológicas, filosóficas, psicológicas que estão envolvidas, tornam o processo não tão simples quanto se imagina ser o ensino da Matemática. As licenciaturas trabalham pouco as teorias de aprendizagem. O professor muitas vezes desenvolve uma prática mas não sabe porque a desenvolve. Porque deu certo lá ele faz aqui, com alunos diferentes, com interesses diferentes. Tenta fazer igual... e tem que dar certo! O professor precisa de teoria, para que sua prática reproduza uma concepção clara de ensino, de aprendizagem e da própria Matemática. Para isso é preciso todo um preparo na Licenciatura, na formação dos professores. (Entrevistado B, março, 2007).

A persistência do uso nas definições, pelo professor formador, de frases bi-condicionais do tipo “se e somente se” utilizada nas proposições lógicas e observáveis nas figuras 11 e 12, pode estar ligada à idéia de que “ a Teoria dos Conjuntos, juntamente com a Lógica, formaram a base dos Fundamentos da Matemática” (CASTRUCCI, 1967).

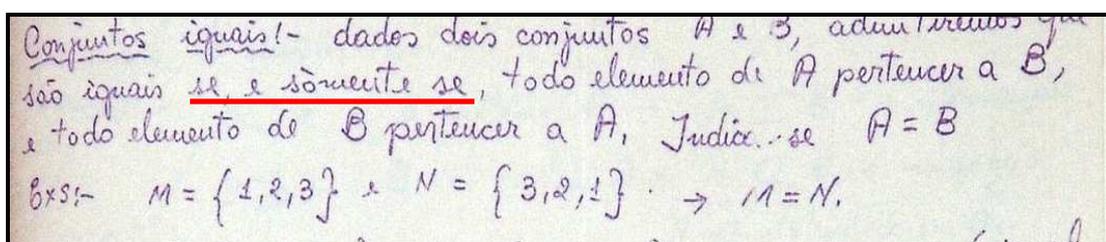


Figura 11 - A utilização da expressão “se e somente se”.

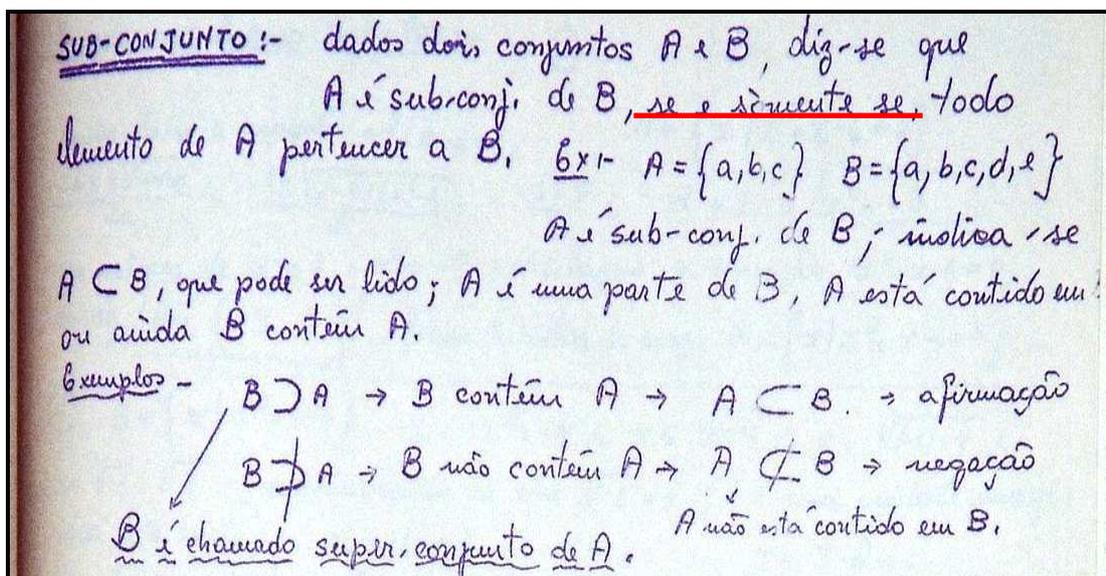


Figura 12 - Reutilização da expressão “se e somente se”.

De acordo com a concepção bourbakista:

O estudo do que consegue chamar-se os ‘fundamentos das matemática’, que vem realizando-se ininterruptamente desde o começo do século XX, não pode ser concluído sem um esforço paralelo de sistematização da Lógica, ao menos naquelas suas partes que dizem respeito ao encadeamento das proposições matemáticas. Tampouco podem separar-se da história da Teoria dos Conjuntos e da formalização em matemática da ‘Lógica Matemática’ (BOURBAKI, 1969, p. 11, grifos do autor, tradução nossa).

A parte da ementa destinado ao tratamento da Lógica foi apenas iniciada, desenvolvendo-se seu estudo em Fundamentos II, disciplina do 2º ano do curso.

Os textos das aulas, iniciam com proposições claras de conceitos ou definições, sempre acompanhadas de exemplos numéricos ou literais, talvez para aliviar o grau da abstração. É o que parece mostrar a figura 13.

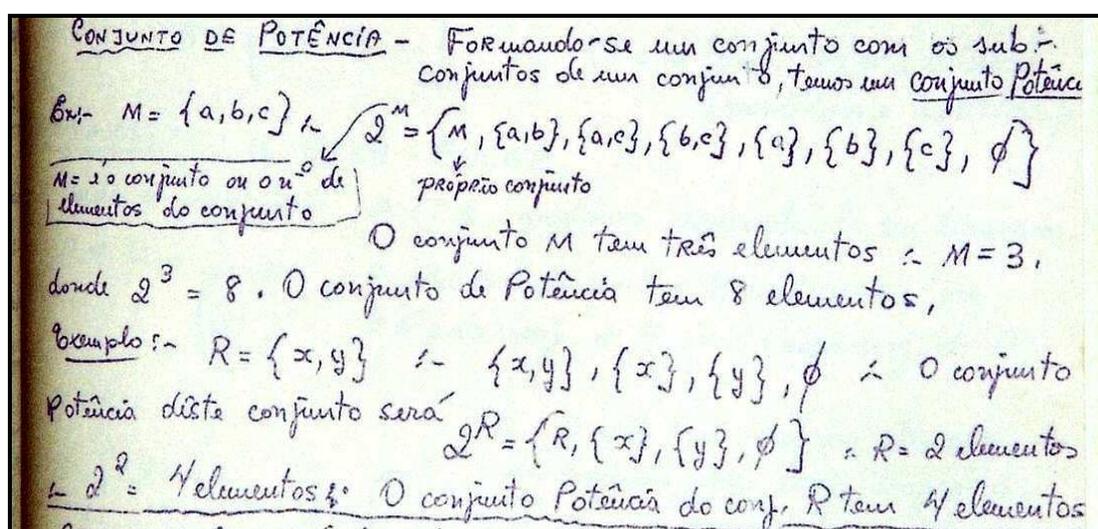


Figura 13 – Exemplificação numérica de conceitos.

A preocupação com a indução e exemplificação das novas proposições pode ser considerada uma “marca registrada” no trabalho pedagógico desse professor formador.

As propriedades estruturais das operações com conjuntos (Idempotentes, Associativa e Comutativa), de acordo com a figura 14, são apresentadas a partir da observação de exemplos numéricos ou literais, sinalizando, mais uma vez, para uma provável concepção de aprendizagem e elaboração de novos conceitos, a partir de situações observáveis, tal como mostram também, as figuras 4, 8 e 9.

EXERCÍCIOS SOBRE PROPRIEDADES ESPECÍFICAS DA UNIÃO OU REUNIÃO.

Sejam  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{4, 6, 8\}$  e  $C = \{4, 5, 6\}$  e  $U = \{\text{naturais}\}$ .

Ache  $\rightarrow$  I)  $A \cup \emptyset =$  próprio conj.  $A = \{2, 3, 4\}$ .

II)  $A \cup U =$  próprio conjunto  $U = \{\text{naturais}\}$ .

III)  $A \cup A =$  próprio conj.  $A = \{2, 3, 4\}$       IV)  $A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8\}$

I)  $B \cup A = \{4, 6, 8, 2, 3\}$       III)  $(A \cup B) \cup C = \{2, 3, 4, 6, 8\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$

III)  $A \cup (B \cap C) = \{2, 3, 4\} \cup \{4, 5, 6, 8\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$       - o -

Propriedades - observando os exercícios III, IV e II, temos:

I)  $A \cup A = A \rightarrow$  IDEMPOTENTE.

II)  $A \cup B = B \cup A \rightarrow$  prop. COMUTATIVA.

III)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \rightarrow$  prop. ASSOCIATIVA.

Figura 14 – Atenção às propriedades.

A propriedade distributiva da união em relação à intersecção e da intersecção em relação à união, e do produto cartesiano em relação à união e a intersecção são apresentadas a partir de demonstrações utilizando as definições das operações com conjuntos e suas propriedades, como mostram as figuras 15 e 16.

Exercício - provar que  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

1ª parte -  $\forall x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A$  ou  $x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A$  ou  $\begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases}$

$\begin{cases} x \in A \text{ ou } x \in B \\ x \in A \text{ ou } x \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \cup B) \\ x \in (A \cup C) \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow$

$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$       (1)

2ª parte -  $(A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow \forall x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \cup B) \\ x \in (A \cup C) \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x \in A \text{ ou } x \in B \\ x \in A \text{ ou } x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in A$  ou  $\begin{cases} x \in B \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in A$  ou  $x \in (B \cap C) \Rightarrow$

$x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$       (2)

donde, comparando (1) e (2), temos:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  c.q.d.

• Propriedade distributiva da "Reunião" em relação à "intersecção".

Figura 15 – Demonstrações de propriedades da União e Intersecção.

Guimarães, apoiado na concepção bourbakista, define estrutura matemática, da seguinte forma:

Sendo uma estrutura matemática definida por um conjunto de propriedades a que determinadas relações, entre os elementos de um dado conjunto, obedecem – qualquer que seja a sua natureza – todos os teoremas deduzidos dos seus axiomas são gerais, no sentido de que se aplicam a quaisquer relações entre outros elementos que obedecem às propriedades da estrutura considerada ( GUIMARÃES, 2007, p. 26).

Fundamentos:- PROPRIEDADES DO PRODUTO CARTESIANO (27)  
31.08.20

①  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$   
 Propriedade distributiva de  $\times$  em relação à interseção.

Parte a - demonstr.  $\forall (a,b) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow a \in A \wedge b \in (B \cap C) \Rightarrow$   
 $a \in A \wedge \begin{cases} b \in B \\ b \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in A \wedge b \in B \\ a \in A \wedge b \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a,b) \in (A \times B) \\ (a,b) \in (A \times C) \end{cases} \Rightarrow$   
 $(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C) \therefore A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)$

Parte b -  $\forall (a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow \begin{cases} (a,b) \in (A \times B) \\ (a,b) \in (A \times C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in A \wedge b \in B \\ a \in A \wedge b \in C \end{cases}$   
 $\begin{cases} a \in A \wedge b \in B \\ a \in A \wedge b \in C \end{cases} \Rightarrow a \in A \wedge \begin{cases} b \in B \\ b \in C \end{cases} \Rightarrow a \in A \wedge b \in (B \cap C) \Rightarrow$   
 $(a,b) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow$   
 $(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C) \rightarrow$  pela definição de igualdade  
 $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Figura 16 – Demonstração de propriedades do Produto Cartesiano.

Algumas demonstrações são acompanhadas de comprovações numéricas, aparentemente com a intenção de clarificá-las, de fortalecer no aluno a compreensão do teorema, ilustrado na figura 17, pela demonstração de uma das Leis de Morgan.

② - Provar que  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ , considerando  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$   
 $A = \{1, 3, 4, 8\}$  e  $B = \{2, 3, 4, 7\}$ .

a)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$ .  
 b)  $(A \cup B)' = \{5, 6\}$ .  
 c)  $A' = \{2, 5, 6, 7\}$ .  
 d)  $B' = \{1, 5, 6, 8\}$ .  
 e)  $A' \cap B' = \{5, 6\}$

$A' \cap B' = (A \cup B)'$

1ª parte -  $\forall x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Rightarrow$   
 $x \in (A' \cap B') \therefore (A \cup B)' \subset (A' \cap B')$

2ª parte -  
 $\forall x \in (A' \cap B') \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow$   
 $x \in (A \cup B)' \therefore (A' \cap B') \subset (A \cup B)'$  pela def. de igualdade  $\rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$

Figura 17 - Demonstrações acompanhadas de experimentações numéricas.

Lamentamos não ser possível questionar o professor formador sobre a origem de sua apropriação dessa estratégia didática que consiste em acompanhar demonstrações com experimentações numéricas, a qual foi considerada em Dubrovnik, em 1961, como “um elemento inovador” (grifos nossos). Conforme Guimarães:

A referência ao trabalho experimental aparece também com frequência como recomendação metodológica, ainda que entendida de modos diferentes: como manipulação de objetos ou outros materiais concretos, como elaboração de esquemas ou gráficos e até como experimentação com números. Este último tipo de experimentação, sublinhe-se, é considerado um elemento inovador pelos autores do programa de Dubrovnik (GUIMARÃES, 2007, p. 39).

Deixamos claro, que nossas referências à Royaumont e Dubrovnik não tem a intenção de estabelecer um paralelo entre esses eventos e as práticas pedagógicas do professor formador, mesmo porque, muitas outras mediações foram construídas nesses dez anos que se passaram entre o recorte temporal desse estudo e aqueles encontros.

Nossos comentários são feitos no sentido de evocar situações que possam situar o leitor temporalmente, quanto às estratégias metodológicas utilizadas pelo professor formador, isto é, se sua ação pedagógica assumia características consideradas tradicionais ou contemporâneas, relativamente à época em que baseamos nosso estudo, e pelo fato daqueles eventos poderem ser considerados como parte das discussões relacionadas ao MMM.

Quanto a segunda e terceira partes da ementa, ou seja Funções e Relações, é marcante a utilização de ilustrações com diagramas antecedendo e acompanhando as definições. Entendemos que o professor formador lançou mão à intuição dos alunos, através de diagramas, para apresentar determinados conceitos e na seqüência os formalizou. Sobre esse aspecto metodológico, Dieudonné enunciou que :

Não podemos desenvolver frutuosamente uma teoria matemática sob a forma axiomática senão quando o aluno já está familiarizado com a questão, à qual ela se aplica, trabalhando durante algum tempo numa base experimental ou semi-experimental, isto é, *fazendo constantemente apelo à intuição* (DIEUDONNE, 1961, p. 40, itálico no original, apud GUIMARÃES, 2007, p 40).

Nesse sentido, Morris Kline (1976, p. 42-71), em seu clássico *O fracasso da Matemática Moderna*, dedica um capítulo em defesa da abordagem intuitiva dos conceitos matemáticos. Esse autor considera, que os conceitos mais intuitivos, como os números inteiros, frações e conceitos geométricos foram aceitos e utilizados primeiro. E os menos intuitivos (irracionais, negativos, complexos, o uso dos coeficientes, conceitos do cálculo)

levaram vários séculos quer para serem criados, quer para serem aceitos. E quando foram aceitos, não foi a lógica que induziu os matemáticos a adotá-los, porém, os argumentos por analogia, o sentido físico de alguns conceitos e a obtenção de resultados científicos exatos, ou seja, “foi a evidência intuitiva que induziu os matemáticos a aceitá-los” (p. 58). Para esse autor, a lógica sempre veio muito depois das criações e foi mais difícil de adquirir.

O autor pondera, que instruir uma pessoa cientificamente não quer dizer, de forma alguma, que tenha que confrontá-la, desde o começo, com uma sistemática fria e cientificamente aprimorada. Não será com simples verbosidades lógicas que iremos eliminar dificuldades que os matemáticos levaram muitos séculos para vencer. Defende ainda, que a lógica não dita o conteúdo da matemática, pois o uso é que determina a estrutura lógica. A organização lógica é uma reflexão tardia. Exemplo: em relação à propriedade comutativa da multiplicação, aceitamos que  $3 \times 4 = 4 \times 3$ , não porque a propriedade comutativa o sustenta, mas porque já experimentamos essa verdade.

Outro posicionamento do autor, é que a abordagem lógica da matemática, dá ao estudante, uma impressão falsa de como a matemática se desenvolveu, parecendo que sempre esteve pronta, acabada. No caso das demonstrações de teoremas, eles são apresentados aos estudantes já na sua forma polida, simplificada, e o estudante fica a pensar que a matemática é mesmo coisa de gênios, que são tocados magicamente, não para ele, pobre coitado.

Outro argumento contra a abordagem lógica, é a de que ela produz complicações práticas. Pedir ao estudante que cite axiomas nas operações elementares é como pedir a um adulto que justifique cada ato que efetua depois que se levanta. É o caso da centopéia que ao ser elogiada pelo sapo quanto ao fato de saber usar cada um dos seus cem pés, começou a pensar sobre qual pé usaria em seguida e não conseguiu mover-se. Há muito se reconhece a necessidade de fazer automaticamente parte do trabalho a ser realizado. Na perspectiva de Kline, os limites de uma estrutura axiomática atuam como uma camisa de força da mente, pois tolhem a criatividade, que pressupõe flexibilidade na solução de problemas.

Comenta, também, esse autor, que os modernistas defendem que, pode-se saborear a matemática como um jogo, executado em conformidade com certas regras. Quanto a essa perspectiva, entende o autor que a apresentação lógica e ordenada da matemática pode parecer bela e constituir uma atração para o matemático, mas serve como um anestésico para o estudante. Concordamos com Klein (1976), quando pondera que esses argumentos contra uma abordagem exclusivamente dedutiva da matemática não visam implicar que se deva rejeitar o emprego da prova dedutiva, mas mantê-la em seu lugar.

Outra indicação feita por Kline, diz respeito à utilização do uso de figuras, gráficos, diagramas, considerados por ele, como significativos para favorecer a aprendizagem, parecendo ser também a percepção de ensino-aprendizagem do professor formador, conforme sugerem as figuras 18 e 19.

TIPOS DE FUNÇÕES

Sejam os conj.  $A = \{1, 3, 5\}$  e  $B = \{2, 6, 10\}$  e seja  
 $f: A \rightarrow B$ , definida,  $\forall x \in A, f(x) = 2x$ .

$f(x) = 2x$ .  
 $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$ .  
 $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$ .  
 $f(5) = 2 \cdot 5 = 10$ .

— Todo  $y$  que pertence a  $B$  é imagem de algum elemento  $x$  que pertence a  $A$ .

Obs: - não pode sobrar elemento em  $B$ .

Nestas condições, dizemos que a função é SOBRESJETIVA,

① SOBRESJETORA ou SÓBRE.

Def: - Uma função  $f: A \rightarrow B$  se diz Sobresjetiva, sobresjetora ou sóbre, se e somente se todo elemento  $y$  que pertence a  $B$ , é imagem de algum elemento  $x$  que pertence a  $A$ , pela aplicação  $f$ . Obs: - O contradomínio é todo o conjunto  $B$ .

Figura 18 – Utilização de diagramas no estudo de funções.

Julgamos interessante observar, que pelos vestígios encontrados, a utilização de diagramas como recurso didático parece ter criado força nas aulas de Matemática, no que toca ao estudo de funções, a partir do MMM. Inclusive, nos livros didáticos para o ensino colegial citados pelo entrevistado na página 85 (oitenta e cinco) desse texto, dos autores Ari Quintella (1965) e Jairo Bezerra (1968), bem como Thales Mello Carvalho (1969), outro autor adotado para o ensino colegial até o final da década de 60, não há utilização desse tipo de recurso para auxiliar a aprendizagem.

Obs: -

correspondência  
 $\{ \text{um a um} \}$   $f: A \rightarrow B, y = x^2$  } FUNÇÃO

correspondência  
 $\{ \text{vários a um} \}$   $f: A \rightarrow B, y = x^2$  } FUNÇÃO

Relação  
 $\{ \text{um a vários} \}$   $R$  de  $A$  em  $B, x < y$  } RELAÇÃO

Figura 19 – Diagramas para diferenciar relação de função.

De acordo com diversos livros didáticos brasileiros consultados, a presença desse recurso parece ter ganhado impulso a partir da utilização dos diagramas de Venn ou Euler (ou imitações), principalmente, com o objetivo de visualização no estudo da Teoria dos Conjuntos, passando quase a representar um “ícone” da Matemática Moderna.

No capítulo *Raciocínio Lógico*, Lipschutz (1968. p.323-329), o autor do manual didático indicado pelo professor formador aos licenciandos, apresenta os diagramas Venn, como sendo “muitas vezes usado para determinar a validade de um argumento” em proposições lógicas.

De acordo com Castrucci :

A Lógica Matemática, cujas raízes estão em Leibniz, continuada pelas obras de Boole, De Morgan, Frege e outros, como pioneiros, é, também, um tema, que nos seus aspectos mais elementares deve ser trazido desde cedo ao conhecimento dos alunos(CASTRUCCI, 1967, introdução).

Quanto a diagrama, esse matemático e professor, fez a seguinte apropriação:

A representação de conjuntos por partes do plano como já fizemos chama-se *diagrama*. Tem a vantagem intuitiva da visualização das propriedades. No caso em que se usam somente *círculos*, os diagramas são chamados de *Euler ou de Venn* (CASTRUCCI, 1967, p. 37, grifos do autor).

O que nos parece claro, enfim, é que esse recurso de apelo à intuição, parece ter sido valorizado em tempos de Matemática Moderna e continua sendo utilizado até os dias atuais, em manuais didáticos<sup>52</sup> e aulas de matemática, principalmente para solucionar situações problemas através de união e/ou intersecção de conjuntos e no estudo de funções.

Prosseguindo com a análise das apropriações, acreditamos ter indícios para supor, que a apropriação feita pelo professor formador sobre relação, segundo indicações da figura 20, seja compatível com a que foi feita por Lipschutz:

Alguns autores chamam a expressão  $P(x,y)$  de uma relação. Consideram, implicitamente, que as variáveis  $x$  e  $y$ , têm amplitude, respectivamente sobre alguns conjuntos  $A$  e  $B$ , isto é, que  $P(x,y)$  é uma função de proposições definidas em algum conjunto produto  $A \times B$ . Nos restringimos à terminologia anterior, onde  $P(x,y)$  é simplesmente uma sentença aberta e, desse modo, “uma relação compõe-se de  $P(x,y)$  e dois conjuntos dados  $A$  e  $B$ ” (LIPSCHUTZ, 1968, p. 115, grifos nossos).

---

<sup>52</sup> Como exemplo, citamos: a) SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio. **Matemática: Marcondes, Gentil, Sérgio**. Série Novo Ensino Médio. Volume único. São Paulo: Editora Ática, 2000. (De acordo com as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio). b) LONGEN, Adilson. **Matemática: Ensino Médio**. Coleção Nova Didática, 1ª série. Curitiba: Editora Positivo, 2004. (Livro didático gratuito do Governo do Paraná).

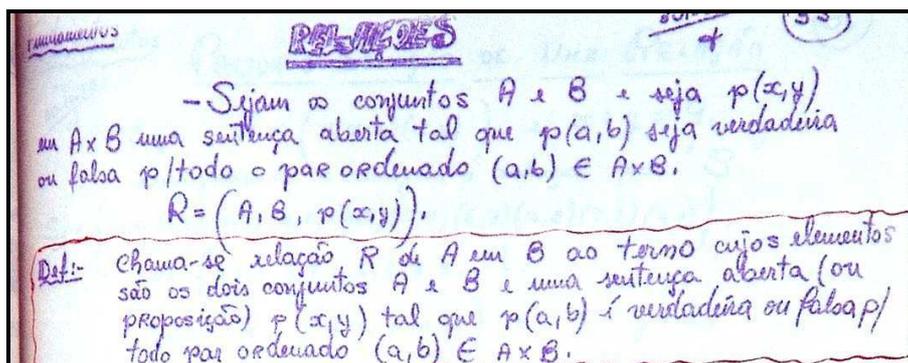


Figura 20 – Definição de relação.

Nos registros que ora analisamos, os gráficos de relações e funções, foram um dos poucos contactos com a Geometria nesse primeiro ano de estudos da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar no curso de Licenciatura em Matemática pesquisado.

Além deles, a exemplificação da propriedade transitiva na relação de equivalência, utilizando a representação simbólica de paralelismo e perpendicularismo, e, a aplicação do Teorema de Pitágoras para mostrar as relações trigonométricas entre a secante e a tangente e entre a cossecante e a cotangente, constituem raros momentos em que se estabeleceu uma relação entre os conteúdos de Álgebra e Geometria, pelo professor formador, nas aulas. (Ver p. 32 do ANEXO I).

Assim, a proposta de um ensino tão precoce quanto possível das relações que unem a Geometria à Álgebra, um programa unificado, um programa que respeite a unidade da Matemática não tiveram neste primeiro ano letivo do curso de Licenciatura em Matemática, pelo menos no que diz respeito à disciplina Fundamentos de Matemática Elementar, a repercussão desejada. Porém, apresentaremos um elemento, que embora tenha ocorrido em 1971, segundo ano do curso em questão, merece ser aqui registrado, conforme poderá ser notado pelas palavras do ex-aluno, o mesmo que organizou o material que hoje nos permite dialogar com o passado.

Ao ser solicitado a falar sobre o Movimento da Matemática Moderna no que se refere à Geometria, esse licenciando nos disse chegou aos professores dos cursos ginásial e secundário, nos disse que:

*Então, as aulas de Fundamentos foram básicas na apresentação das idéias modernizadoras da Matemática ... e cursos que eram oferecidos aos professores da educação básica, como extensão universitária. Tive a oportunidade de fazer um Curso de Cálculo Vetorial aplicado à Geometria Plana, em 1971, segundo ano da Licenciatura., tendo o privilégio de ouvir e assistir como conferencista, o Professor Osny Antônio Dacol da Universidade Federal do Paraná. Lembrando do Professor Osni Dacol, recordo que tenho o primeiro volume do Ensino Moderno da*

*Matemática, do Núcleo de Estudos e Difusão do Ensino da Matemática , o NEDEM, lançado pela Editora do Brasil. Esse livro está autografado pelo Professor Osny ...e é algo de bastante valor que a gente tem... (Entrevistado A, 2006)*

Este depoimento representa uma evidência do envolvimento do coordenador do NEDEM na disseminação das idéias modernizadoras da Matemática no Paraná, e constitui um indício de que a Geometria começava a ser apresentada de acordo com as novas perspectivas, ou seja, na forma vetorial, como propôs veementemente Dieudonné (1961, p. 37).

A única referência à historicidade da Matemática feita pelo professor formador, segundo as fontes que utilizamos, foi a menção de nomes de matemáticos para designar métodos de resolução e Leis, ignorando qualquer relação dessa ciência com outras áreas de conhecimento, ou com a própria história da Matemática; o mesmo ocorrendo com o livro didático sugerido aos licenciandos, cuja única exceção, foi o comentário sobre a origem do nome produto cartesiano ligado a Descartes, ignorando as relações da Matemática com o passado, com a história e com a cultura na qual ela vem sendo envolta.

Pelos depoimentos dos ex-alunos e os registros das aulas, percebemos indícios que podem levar a supor a influência do livro didático indicado aos licenciandos na apresentação do conteúdo pelo professor formador, os quais podem ser observados, na semelhança do enunciado de várias definições e de exemplos, na utilização de nomenclatura diferenciada (forma tabular de um conjunto, superconjunto, conjunto universal, conjunto de potência, etc.), na seqüência e inclusão de tópicos, no estudo de funções antecedendo o estudo de relações, na definição inicial de função, como correspondência entre os elementos de dois conjuntos e sem referência a par ordenado, na definição de gráfico de função e de conjunto solução de uma relação como conjunto de pares ordenados e, na utilização intensa de diagramas para ilustrar operações com conjuntos e funções, bem como, nas solicitações de demonstrações de propriedades das operações com conjuntos ou das Leis da Álgebra de Conjuntos.

A metodologia de aulas expositivas marcadamente utilizada na apresentação dos conteúdos, sugere que a perspectiva do processo ensino-aprendizagem é a da transmissão do conhecimento, e a repetitividade de modelos pré-estabelecidos nos exercícios e demonstrações que sugerem uma valorização da memorização, nos leva a supor que, para o professor já referido, a repetição contribua para a aprendizagem. Ao falar sobre as aulas do curso de licenciatura investigado, um dos licenciandos, assim se pronunciou:

*Eram aulas expositivas, até porque, na época que fiz a Faculdade não se via outra maneira de aula. O professor falava bastante, colocava a matéria no quadro, a gente copiava ... e era a única maneira. Não tinha sentido para a vida prática, com*

*o cotidiano não tinha ligação nenhuma. Poderia ter algum exemplo, se você formatasse.(...) A grande crítica do ensino da Matemática Moderna, que não teve o sucesso que se esperava é porque estava fora da realidade. Não formava para o cotidiano, não dava bagagem para estudos posteriores. Não era pré-requisito...eu acho que não era realmente, pois eu não percebi isso durante o curso. Qual era o objetivo então? Dizem .. e pelo que eu li, que o objetivo era entender melhor a Matemática através das estruturas, fazer com que o aluno raciocinasse, que tivesse um entendimento que melhorasse o estudo dele em toda a Matemática. Eu acho que não aconteceu. E para a prática ? O que se pode tirar? Ou ele vai levar para a vida prática ou vai ser subsídio para ele continuar estudando. Você estudar uma coisa só porque está nos livros mas não tem utilidade, não tem por quê. As propriedades ele tem que ter noção para trabalhar. Por exemplo: a propriedade comutativa, o que ele tem que saber é que dois vezes quatro não vai alterar se ele fizer quatro vezes dois.(...) (Entrevistado C, 2007).*

Nesse sentido, Kline (1976), comenta que o conteúdo e o espírito do currículo da matemática moderna podem convir ao matemático erudito, mas ignorou-se a relação com o mundo real. Esse autor considera, que não se pode esquecer que a matemática não é um corpo de conhecimento auto-suficiente, isolado. Ela existe primariamente para ajudar o homem a compreender e dominar o mundo físico, e até um certo ponto, os mundos econômico e social. Durante os últimos anos, muitos dos líderes de currículos reconheceram ter negligenciado de assinalar as aplicações da matemática. Do ponto de vista pedagógico, segundo Kline esta abordagem é infeliz porque esquece a grande necessidade de dar motivação e significado à matemática.

Vale lembrar, que os materiais didáticos existentes na época e disponíveis naquela instituição, segundo indicação das fontes citadas, parecem mesmo terem sido a fala do professor, o quadro de giz e o giz colorido. No entanto, a postura do professor e sua habilidade na utilização de tais recursos se mostravam suficientes, na época, para envolver os alunos licenciandos em situações de aprendizagem, pois os entrevistados são unânimes em afirmar sua satisfação em tê-lo como professor e beneficiar-se de suas aulas.

E o tecnicismo educacional? Até que ponto, percebemos sua presença nas práticas analisadas? Afinal, essa tendência pedagógica tem sido identificada por muitos autores como a pedagogia oficial pós-revolução de 64, sendo apontada por Fiorentini (1995, p. 16) , como “presença marcante” (grifos nossos) desde o final da década de 60 até o final da década de 70, e reconhecida pela ênfase às ‘tecnologias de ensino’, sobretudo aquelas relativas ao planejamento e à organização e controle do processo ensino aprendizagem.

Quanto a esse aspecto, retornamos à perspectiva de Chervel (1990) sobre os textos oficiais nem sempre serem concordantes com a realidade escolar experimentada; mas, reconhecemos que, de certo modo, a disciplina Fundamentos de matemática Elementar pode ter procurado cumprir a finalidade do ensino superior segundo a Lei 5540/68, de que a

universidade preparasse e integrasse o indivíduo à sociedade, tornando-o capaz e útil ao sistema.

Do que foi observado e aqui exposto, um elemento que pode causar perplexidade, é a mescla de concepções que parecem ter norteado o tratamento metodológico empregado na disciplina em estudo. Contudo, não pode ser esquecido, segundo Certeau (1982), que o referencial teórico sob o qual analisamos as concepções e apropriações que julgamos perceber nos vestígios do passado não são os mesmos que certamente deram sustentação ao trabalho pedagógico, em estudo.

Nesse sentido, julgamos necessário esclarecer que as referências feitas, nesse texto, a matemáticos e/ou professores, autores e eventos na área, não tem o intuito de compará-las com a apropriação da Matemática Moderna expressa nas práticas ocorridas nessa disciplina, foco do nosso estudo. O que buscamos com essa ação, é situar o conjunto de idéias que circulavam no meio educacional matemático na época analisada, para uma melhor compreensão dessas mesmas práticas.

Pelos indícios percebidos, as apropriações e concepções didático-metodológicas do professor formador, nos parecem ser compatíveis com os pressupostos teórico-metodológicos sobre o ensino da Matemática, circundantes à época analisada nesse estudo.

O formalismo observável na ênfase à linguagem e simbologia e na abordagem internalista de uma Matemática por ela mesma, nos remete a Fiorentini e seus estudos sobre a caracterização de tendências pedagógicas, apresentados em seu trabalho intitulado *Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil*:

Segundo Fiorentini:

A concepção formalista moderna manifesta-se na medida em que passa a enfatizar a Matemática pela Matemática, suas fórmulas, seus aspectos estruturais, suas definições (iniciando geralmente por elas), em detrimento da essência e do significado epistemológico dos conceitos. Isto, porque se preocupa exageradamente com a linguagem, com o uso correto dos símbolos, com a precisão, com o rigor, sem dar atenção aos processos que os produzem, porque enfatiza o lógico sobre o psicológico, o formal sobre o social, o sistemático-estruturado sobre o histórico; porque trata a matemática como se ela fosse “neutra” e não tivesse relação com interesses sociais e políticos (FIORENTINI, 1995, p. 16)

Também entendemos ter elementos para perceber a metodologia como contemporânea ao momento histórico focalizado, visto o ensino ser centrado no professor, que utiliza a exposição dos conteúdos de forma oral e no quadro de giz, fazendo uso de estratégias ditas “mais modernas” na época, como a utilização de diagramas como apelo à intuição. Tanto

contemplou a axiomatização indicada para graus mais elevados de escolaridade, como também utilizou a abordagem intuitiva dos conteúdos. Em algumas situações o professor formador parece ter valorizado a memorização através de exercícios repetitivos, o que denota ao nosso olhar atual um posicionamento mais tradicional, mas ao mesmo tempo, utiliza demonstrações acompanhadas de exemplificações numéricas, o que foi considerado na década de 60, uma inovação metodológica.

Assim, de um modo geral, a percepção que temos das concepções-apropriações presente nas práticas analisadas, apontam para uma compatibilidade entre as mesmas e o momento pedagógico de reformulação e modernização pelo qual passou o ensino da Matemática durante a década de 60 e 70 do século XX,

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente estudo focalizou as práticas da Matemática Moderna desenvolvidas em um curso de Licenciatura em Matemática no interior paranaense, em 1970, época em que o Movimento da Matemática Moderna encontrava-se em plena expansão entre as escolas brasileiras, visando contribuir para a escrita da história desse importante marco histórico da Educação Matemática no século XX.

Esse Movimento de cunho internacional, gerado em parte pela insatisfação de uma sociedade, ávida por desenvolvimento científico-tecnológico, em relação à instrução matemática institucionalizada, propiciou mudanças na matemática escolar dos diferentes níveis da educação brasileira nas décadas de 60 e 70 do século passado, ganhando intensidade e introduzindo novos desafios aos cursos de formação de professores.

A Instituição investigada configura-se, como um dos raros estabelecimentos paranaenses de ensino superior que ofereciam Licenciatura em Matemática no interior do estado, ao tempo do Movimento da Matemática Moderna, época em que o número de professores licenciados supria uma parcela insignificante das necessidades do estado do Paraná. Contou por esse motivo, com alunos provindos de diversas regiões paranaenses, numa grande maioria já professores atuantes na Educação Básica, entendida no contexto atual como Ensino Fundamental e Médio, que nessa Instituição buscavam os conhecimentos necessários para um melhor desempenho de suas funções docentes e a titulação necessária para o reconhecimento profissional.

Com o objetivo de conhecer e compreender como as idéias do movimento foram apropriadas no referido curso, o presente estudo centrou-se na análise das práticas pedagógicas efetivadas na disciplina Fundamentos de Matemática Elementar, que introduziu na formação, os modernos conceitos matemáticos disseminados pelo MMM.

Utilizamos para o desenvolvimento deste trabalho, procedimentos da abordagem histórico-cultural, importante vertente interpretativa para a escrita da história da Educação Matemática, em especial para a historiografia do Movimento da Matemática Moderna, apoiados nos conceitos fundamentais da História Cultural, dentre eles, o conceito de *cultura* fornecido por GEERTZ (1989), o de *cultura escolar* em Julia (2001), o de *disciplina escolar* em Chervel (1990), o de *apropriação* em Chartier (1995), o de *operação historiográfica* em

Certeau (1982) e as indicações de Valente (2005) sobre a metodologia para a história da educação matemática.

Para tanto, utilizamos como fontes de pesquisa, documentos oficiais, localizados nos Arquivos da Instituição, depoimentos de ex-alunos, registros de aulas elaborado por um dos licenciandos, que revelaram características das aulas desenvolvidas pelo professor formador da disciplina que abordou os conceitos modernos, em especial a Teoria dos Conjuntos, um dos principais eixos temáticos do Movimento. As fontes utilizadas no presente estudo, fornecem indícios de como ocorreu a introdução do Movimento da Matemática Moderna no primeiro ano de atividades curriculares do curso e também da Instituição, recém criada nos moldes da Lei nº. 5540/68 que reestruturou o Ensino Superior no Brasil.

Essas fontes nos permitiram dialogar com o passado, cujos traços ainda percebemos nas atuais práticas do ensino de Matemática, revelando as características da turma de licenciandos em Matemática no período 1970-1973, os conteúdos da Matemática Moderna apresentados pelo professor de Fundamentos de Matemática Elementar, a bibliografia utilizada nessas aulas, as finalidades educativas implícitas ou explícitas na referida disciplina responsável pela introdução da Matemática Moderna aos licenciandos. Também, apontaram-se concepções didático-metodológicas que orientavam o trabalho do professor formador dessa disciplina, e principalmente, as apropriações feitas das idéias do Movimento da Matemática Moderna, pelo professor formador e pelos licenciandos.

Para um maior conhecimento do MMM, foram significativas as pesquisas realizadas por estudiosos desse momento ímpar na Educação Matemática, dentre os quais, destacamos Búrigo (1989), Pinto(2005,2006,2007), Valente ( 2006) e a equipe do GHEMAT – Grupo de Pesquisa de História da Educação Matemática no Brasil, que agregou professores de diversos estados brasileiros, como também, matemáticos de Portugal e Espanha, em busca de vestígios da trajetória percorrida pelo Movimento.

Como afirmaram Chervel (1990) e Julia (2001), a materialidade da cultura escolar representada pelos conteúdos e exercícios escolares é mesmo comparável à “caixa preta da escola”, quando se busca compreender o que ocorre realmente nesse espaço particular, em relação aos seus grandes objetivos e reais finalidades.

O estudo revelou que no Curso de Licenciatura pesquisado, foi a disciplina Fundamentos de Matemática Elementar que apresentou a Matemática Moderna aos licenciandos, e dentre outros conteúdos, focalizou a Teoria dos Conjuntos, Relações e Funções, eixos temáticos referenciados nas propostas elaboradas para o ensino da Matemática no curso secundário, ligados ao Movimento da Matemática Moderna.

Assim, o estudo mostrou que os cursos de Licenciatura da década de 1970, no Brasil, contribuíram para a disseminação das principais mudanças propostas pelo Movimento da Matemática Moderna, na medida em que, reorganizaram seus currículos, incluindo conteúdos programáticos que atualizaram os licenciandos, em grande parte já professores atuantes no ensino de 1º e 2º graus da época. Isso sugere um alinhamento desses cursos à Lei nº. 5540/68, que fixa normas de organização e funcionamento do ensino superior e sua articulação com a escola média, pois os estudos feitos pelos licenciandos na disciplina Fundamentos de Matemática Elementar, do referido curso, eram compatíveis com suas necessidades técnico-profissionais daquele momento, visto que os conteúdos listados e estudados eram também naquele período, os principalmente recomendados para serem incorporados aos programas do ensino secundário das escolas brasileiras.

Nessa direção, o estudo dessa disciplina pode ter adquirido mais sentido para os licenciandos, na medida em que era possível estabelecer uma ponte entre o que aprendiam e o que ensinavam. Também, favoreceu uma fundamentação, se não total, ao menos inicial, para acompanhar os acréscimos curriculares referentes à Teoria dos Conjuntos, Relações e Funções, que foram mais intensamente disseminados, a partir da década de 1970, na programação de Matemática para o 2º Grau, conforme apontam diversos didáticos publicados nessa década.

Se considerarmos que o professor formador, tenha procurado adequar os conteúdos curriculares às necessidades imediatas do seu público, levando em conta o momento ímpar que os educadores matemáticos viviam, envoltos em inúmeras interrogações trazidas pelas mudanças nos livros didáticos e programas curriculares, esse estudo o estaria caracterizando, como um profissional da educação sensível às mudanças contextuais, e de certa forma, comprometido com a articulação entre o Curso Superior de formação de professores e a Escola Média.

Considerando que tenha sido essa sua real intenção, poderíamos supor, que assim procedendo, poderia estar procurando atender às finalidades maiores de um curso de licenciatura emergente, atender as expectativas dos licenciandos, ou seja, prepará-los para o ensino da Matemática Moderna.

Em relação ao livro didático, este estudo evidencia em pelo menos três momentos, a relevância desse material no contexto educacional da época pesquisada. Foi citado por um dos entrevistados, como “guia” para o planejamento das aulas em tempos de Matemática Moderna; foi lembrado no relatório da Segunda Conferência Interamericana de Matemática realizada em 1966, quando a Comissão diz que os professores continuam a ter uma

preparação deficiente, faltando professores para escrever bons livros-texto, e, há indícios de que tenha influído para modificar a ordem dos conteúdos programáticos, inicialmente proposta na ementa da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar, no curso de licenciatura pesquisado.

Assim observado, reportamo-nos ao momento atual, com os seguintes questionamentos: o livro didático continua sendo guia para o planejamento de aulas e o planejamento anual dos conteúdos curriculares das disciplinas ? Atualmente há mais professores preparados para escrever bons livros-texto?

A opção pelo livro *Teoria dos Conjuntos* , como apoio para o desenvolvimento das aulas de Fundamentos de Matemática Elementar, pode ter sido, pelo fato do referido manual, como destacou o próprio autor, no prefácio, ser “um livro texto de referência para qualquer nível” (LIPSCHUTZ, 1968, p. v) , o que favoreceu sua utilização pelos licenciandos, que, apesar, de já desenvolverem atividades docentes no ensino secundário, de acordo com os depoimentos, só conheciam a Teoria dos Conjuntos pelos livros didáticos de seus alunos.

Considerando tratar-se de um curso superior, a apropriação parcial dos conteúdos do livro indicado aos licenciandos pelo professor formador, imprimiu um caráter elementar e não aprofundado aos conteúdos, também percebido na ementa da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar e nos os registros das aulas. Mesmo reconhecendo que o grupo de alunos que o professor tem diante de si pode constituir um limite às ações docentes, indicamos complementação dessa pesquisa, para que mais vestígios desse passado sejam obtidos, de modo, a talvez tornar mais compreensível essa questão.

Por outro lado, o título do livro indicado reforça a idéia da marcante presença que a Teoria dos Conjuntos assumiu na época do movimento, bem como, sugere que o livro contribuiu para a veiculação e disseminação dos conteúdos programáticos priorizados pelo Movimento da Matemática Moderna, nesse curso de Licenciatura em Matemática.

Procuramos apresentar alguns componentes do conjunto de idéias que circulavam no meio educacional matemático na época analisada, pois entendemos que isso possa viabilizar uma melhor compreensão das práticas analisadas, das apropriações do professor formador que levaram a essas práticas e a apropriação que os licenciandos delas fizeram.

Pelos indícios percebidos, as apropriações e concepções didático-metodológicas do professor formador, nos parecem ser compatíveis com os pressupostos teórico-metodológicos sobre o ensino da Matemática, circundantes à época analisada nesse estudo.

A análise dos registros das aulas leva a supor que as mesmas eram permeadas por uma concepção formalista, compatível com o contexto da Educação Matemática da época, que

valorizava a transmissão dos conteúdos, a linguagem e a simbologia matemáticas, através de uma abordagem internalista, orientada pela lógica do conhecimento matemático voltado para si mesmo.

Em algumas situações o professor formador parece ter valorizado a memorização através de exercícios repetitivos, o que denota ao nosso olhar atual um posicionamento mais tradicional, mas, que lembramos: fazem m parte de uma concepção formalista.

Entendemos ter elementos para caracterizar a metodologia como contemporânea ao momento histórico focalizado, visto a utilização de aulas expositivas, recurso muito utilizado pelos professores até o final da década de 60 , ter contemplado a axiomatização indicada para graus mais elevados de escolaridade, como também utilizado a abordagem intuitiva dos conteúdos, e, ainda, ter enriquecido as aulas com o uso de estratégias ditas “mais modernas” na época, como a utilização de diagramas como apelo à intuição e demonstrações acompanhadas de experimentações numéricas, considerados inovações metodológicas naquela década.

Assim, de um modo geral, a percepção que temos das concepções-apropriações presente nas práticas analisadas, apontam para uma adequação entre as mesmas e o momento histórico de reformulação e modernização pelo qual passou o ensino da Matemática durante a década de 60 e 70 do século XX, ou seja, numa perspectiva da construção do edifício matemático voltado para si mesmo.

O estudo possibilita, também, a interpretação de que a apropriação do MMM pelo professor formador da disciplina Fundamentos de Matemática Elementar, do curso de Licenciatura pesquisado, possa ter viabilizado diretamente a inserção dos alunos desse curso nas propostas internacionais de modernização da Matemática e, indiretamente, outros professores paranaenses, na medida em que esses licenciandos interagiram com seus pares nas escolas onde desenvolviam sua ação docente.

Em última instância, o estudo mostrou que a disciplina escolar estudada, ao atender as necessidades imediatas dos alunos, cumpriu uma finalidade histórica das licenciaturas, a de, naquele momento, preparar tecnicamente o professor de Matemática para atuar no ensino de 1º e 2º grau.

O estudo aqui apresentado, traz representações de uma realidade vivenciada em tempo de Matemática Moderna, retratando condições específicas de uma disciplina do Curso de Licenciatura de uma Instituição de Ensino Superior no interior paranaense, em 1970, não pretendendo de forma alguma, generalizar essas condições para as demais regiões e centros brasileiros. A diversidade de situações, com suas peculiaridades regionais e diferenças

culturais, é que compõe o todo da trajetória desse importante movimento de renovação do ensino da Matemática, e o estudo dessas diferenças e semelhanças talvez possibilite sua melhor compreensão.

A análise apresentada não tem a pretensão de esgotar o assunto. Pelo contrário, novas questões foram suscitadas, levantando possibilidades para outras pesquisas que enfoquem a temática da Matemática Moderna na formação de professores em curso de licenciatura, contribuindo para escrita da História da Educação Matemática brasileira.

Aprendemos com erros e com acertos, pelos bons e maus exemplos. E ao sentir-se na condição de estudante, cada licenciando provavelmente concluiu o que copiar ou o que desprezar, apropriando-se das idéias modernizadoras da Matemática levando em conta sua concepção particular de ser professor.

## REFERÊNCIAS

- ALBERTI, Verena. **Manual de História Oral**. 3. ed. Rio de Janeiro: Editora FGV, 2005.
- BARRA, Vilma M.; LORENZ, Karl M. Produção de materiais didáticos de ciências, período: 1950 a 1980. **Ciência e cultura**, São Paulo: v. 38, n. 12, Dez. 1986, p. 1970-1983.
- BAZZO, Walter A. **Ciência, tecnologia e sociedade: e o contexto da educação tecnológica**. Florianópolis: Ed. da UFSC, 1998.
- BEZERRA, Jairo. **Curso de Matemática: para primeiro, segundo e terceiro anos dos cursos clássico e científico**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1968.
- BITTENCOURT, Circe Maria Fernandes. **Livro didático e conhecimento histórico: uma história do saber escolar**. Tese de Doutorado em Educação – USP. São Paulo, 1993.
- \_\_\_\_\_.(apresentação) História, produção, e memória do livro didático. **Educação e Pesquisa**. vol.30 no.3 .Set/Dez. 2004.São Paulo: USP, 2004. Em :<<http://redalyc.uaemex.mx/redalyc/src/inicio/ArtPdfRed.jsp?iCve=29830307>> ISSN 1517-9702
- BLOCH, Marc. **Apologia da História ou o ofício do historiador**. Rio de Janeiro: Zahar, 2001.
- BOURBAKI, Nicolas. **Elementos de historia de las matemáticas**. Versión española de Jesús Hernández. Madrid: Alianza Editorial, S. A., 1969.
- \_\_\_\_\_. The Architecture of Mathematics. In: F. Le Lionnais (ed.). **Great Currents of Mathematical Thought**. (Vol. 1). Nova Iorque: Dover, 1971, p. 23-36.
- BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Ed.Edgard Blücher, 1974.
- BRAGA, Ciro. **Função: a alma do ensino da Matemática**. São Paulo: Annablume; Fapesp, 2006.
- BRASIL, CFE. Parecer 292/62. **Currículos mínimos dos cursos de nível superior**. Brasília, 1974b, p. 213-216.
- BRASIL, CNE. **Resolução nº. 2/97**. Disponível em :< <http://portal.mec.gov.br>> Acesso em 30/03/08.
- \_\_\_\_\_. CNE/CP. **Resolução nº. 1/99**. Disponível em : <<http://portal.mec.gov.br>> Acesso em 30/03/08.
- \_\_\_\_\_. Decreto nº. 3.276/99. **Legislação do Ensino Superior**. Disponível em: <http://www.pedagogiaemfoco.pro.br/lindice.htm#decretos> Acesso em 20/02/2008.

\_\_\_\_\_. Decreto-Lei nº. 1190/39. **Legislação Federal de Ensino Superior**. São Paulo: USP, 1953a, (p. 233-249).

\_\_\_\_\_. Decreto-Lei nº. 9092/46. **Legislação Federal de Ensino Superior**. São Paulo: USP, 1953b, (p. 292-293).

\_\_\_\_\_. Decreto-Lei nº. 9053/46. **Lex: Coletânea de legislação**. São Paulo: . Ed. LEX. Ed. rev. de 1937, p. 273-274.

\_\_\_\_\_. Decreto nº. 73.494, de 17 de janeiro de 1974. **Diário Oficial nº. 176**, Brasília, 18 de janeiro de 1974.

\_\_\_\_\_. **Lei 4024/61**. Disponível em :<[http://mariacecilio.blogspot.com/2006/11/lei-federal-n-402461\\_09.html](http://mariacecilio.blogspot.com/2006/11/lei-federal-n-402461_09.html)> . Acesso em 28/02/2008.

\_\_\_\_\_. **Lei 5692/71**. Disponível em :  
< [http://www.pedagogiaemfoco.pro.br/15692\\_71.htm](http://www.pedagogiaemfoco.pro.br/15692_71.htm)> . Acesso em 28/02/2008.

\_\_\_\_\_. Parecer 627/69. **Currículos mínimos dos cursos de nível superior**. Brasília, 1974c, p. 216-218.

BÚRIGO, Elisabete Zardo. Matemática Moderna: progresso e democracia na visão de educadores brasileiros nos anos 60. **Revista Teoria&Educação**. Porto Alegre: Panorâmica, 1990, n.2, p.225-265.

\_\_\_\_\_. O Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Encontro de Certezas e Ambigüidades. **Revista Diálogo Educacional/PUCPR**. v. 6, n. 18 (Maio/Agosto, 2006. Curitiba: Champagnat, 2006, p.35-47.

CANDAU, Vera M. F. (coord.) **Novos Rumos da Licenciatura**. Brasília: INEP; Rio de Janeiro: PUCRJ, 1987.

CARVALHO, Guido I. **Ensino Superior – Legislação e Jurisprudência**. V. 1. São Paulo: Editora Revista dos Tribunais, 1975.

CARVALHO, João B. Pitombeira de. As Idéias fundamentais da Matemática Moderna. **BOLETIM GEPEM**, Ano XIII, nº. 23, p. 7-24. Rio de Janeiro, 2º Sem. 1988.

CARVALHO, Thales Mello de. **Matemática : 2º Ciclo**. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas (Serviço de Publicações), 1969.

CASSIANO, Célia C. de Figueiredo. Reconfiguração do mercado editorial brasileiro de livros didáticos no princípio do século XX: história das principais editoras e suas práticas comerciais. In: **Em Questão**, Porto Alegre, v. 11, n.2, p.281-312, jul./dez. 2005. Disponível em: < [http://www6.ufrgs.br/emquestao/pdf\\_2005\\_v11\\_n2/4\\_reconfiguracao.pdf](http://www6.ufrgs.br/emquestao/pdf_2005_v11_n2/4_reconfiguracao.pdf)> . Acesso em 04/02/2008.

CASTRUCCI, Benedito. **Elementos de Teoria dos Conjuntos**. 3. ed. São Paulo: GEEM de São Paulo, 1967.

CASTRUCCI, Benedito. et al. **Matemática: 2º grau – 1ª série**. São Paulo: Editora FTD S.A., 1975.

CERTEAU, Michel de. **A escrita da história**. Tradução de Maria de Lourdes Menezes. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1982.

CHARTIER, Roger. **A história cultural: entre práticas e representações**. Lisboa: Difel, 1990.

\_\_\_\_\_. Cultura Popular. **Revista Estudos Históricos**, Rio de Janeiro, vol. 8, n. 16, 1995, p. 179-192.

CHERVEL, André. A história das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. In: **Teoria & Educação**. Porto Alegre, nº. 2, 1990, p. 177-229.

CURY, Helena N. (org.). **Formação de professores de Matemática: uma visão multifacetada**. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

DAMBROS, Adriana A. **O conhecimento do desenvolvimento histórico dos conceitos matemáticos e o ensino da Matemática: possíveis relações**. Tese (Doutorado em Educação). Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2006.

D'AMBRÓSIO, Beatriz S. Formação de Professores de Matemática para o Século XXI: o Grande Desafio. **Pro-Posições**, Revista quadrimestral da UNICAMP, Campinas, SP, Vol. 4, Nº. 1 (10), março de 1993.

\_\_\_\_\_. **The Dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education**. Thesis (Doctor of Philosophy) – Indiana University, 1987.

D'AMBRÓZIO, Ubiratan. Algumas notas históricas sobre a emergência e a organização da pesquisa em educação matemática, nos Estados Unidos e no Brasil. **Revista Brasileira de Educação**. Nº. 27, Set/Out/Nov/Dez/2004, p.71-73.

\_\_\_\_\_. **Educação Matemática: Da teoria à prática**. 4.ed. Campinas, SP: Papirus, 1998.

DARSIE, M.M.P.; CARVALHO, A.M.P. A reflexão na construção dos conhecimentos profissionais do professor de matemática em curso de formação inicial. **Zetetiké**, vol.6, nº. 10, Campinas, FE/Unicamp, jul./dez. 1998, p. 57-76.

DEWEY, John. **Democracia e Educação**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1959.

DIEUDONNÉ, J. **Pour une conception nouvelle de l'enseignement des mathématiques, Mathématique Nouvelles**. Paris: OECE, 1961, p. 31-47.

DUARTE, Aparecida R. S. A participação do matemático Omar Catunda no MMM da Bahia. In: MATTOS, J. M.; VALENTE, W.R.(orgs.). **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos**. São Paulo: Zapt Editora, 2007.

FERNANDES, Florestan. Formação de profissionais e especialistas nas faculdades de filosofia. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Rio de Janeiro, Jan./Março, 1962.

FERREIRA, Ana Célia da C. **Propostas Pedagógicas de Geometria no Movimento Paranaense de matemática Moderna**. Dissertação de Mestrado. PUC/PR. Curitiba, 2006.

FERREIRA, Ana Cristina. Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de Matemática. In: FIORENTINI, Dario (org.). **Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino da Matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**. Ano 3, n.4. São Paulo: UNICAMP, 1995, p. 1-37.

\_\_\_\_\_.(org.). **Formação de professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares**. Campinas, SP: Mercado de Letras, 2003.

FREITAG, B. et al. **O livro didático em questão**. São Paulo: Cortez, 1993.

GATTI, Bernadete A. **Formação de professores e carreira: problemas e movimentos de renovação**. Coleção Formação de Professores. Campinas, SP: Autores Associados, 1997.

GEERTZ, Clifford. **A interpretação das culturas**. Rio de Janeiro: LTC Editora S.A. ,1989.

GINZBURG, Carlo. Sinais: Raízes de um paradigma indiciário. In: GINZBURG, Carlo. **Mitos, emblemas, sinais: Morfologia e História**. São Paulo: Companhia das Letras, 1989, p. 143-180.

GÓES, Moacyr. 1964- Os acordos MEC-USAID: Em direção aos anos de chumbo. In : CUNHA, Luiz Antônio de; GÓES, Moacyr de . **O golpe na educação**. 10. Ed. Rio de Janeiro: J. Zahar, 1999.

GUIMARÃES, Henrique M. Por uma Matemática nova nas escolas secundárias – Perspectivas e orientações curriculares da Matemática Moderna. In: VALENTE, Wagner R.; MATTOS, José M. (orgs.). **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos**. São Paulo: Zapt Editora, 2007.

IME/USP. **Projeto Pedagógico da Licenciatura em Matemática do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo**. São Paulo,1998. Disponível em: < [http://www.ime.usp.br/~cerri/lic/projeto\\_pedagogico.html](http://www.ime.usp.br/~cerri/lic/projeto_pedagogico.html)> . Acesso em : 30 jan. 2007.

JULIA, Dominique. A Cultura Escolar como Objeto Histórico. Tradução de Gizele de Souza. **Revista Brasileira de História da Educação**. Nº. 1. Janeiro/junho 2001. Campinas, SP: Autores Associados, 2001.

KLINE, Morris. **O Fracasso da Matemática Moderna**. São Paulo, SP: Ibrasa, 1976.

LIMA, Flainer R. de. **GEEM – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática e a formação de professores durante o Movimento da Matemática Moderna**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - São Paulo: PUC/SP, Setembro de 2006.

\_\_\_\_\_. Os cursos oficiais do Grupo de Estudos do Ensino da Matemática – GEEM. In: MATTOS, J. M.; VALENTE, W.R.(orgs.). **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos**. São Paulo: Zapt Editora, 2007.

LIPSCHUTZ, Seymour. **Teoria dos Conjuntos**. Coleção Schaum. Trad. Fernando Vilain Heusi da Silva. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1968.

LONGEN, Adilson. **Matemática: Ensino Médio**. Coleção Nova Didática, 1ª série. Curitiba: Editora Positivo, 2004.

LUDKE, Menga. Investigando sobre o professor e a pesquisa. In : ROMANOWSKI, J.P.; MARTINS, P.L.O.; JUNQUEIRA, S.R.A.(Org.). **Conhecimento local e conhecimento universal: pesquisa, didática e ação docente**. Curitiba: Champagnat, 2004, p. 181-192.

MARTINS, Pura L. O. Princípios didáticos na ação docente: conhecimento como expressão da ação humana. In : ROMANOWSKI, J. P.; MARTINS, P. L. O.; JUNQUEIRA, S. R. A. (Orgs.). **Conhecimento local e conhecimento universal: pesquisa, didática e ação docente**. Vol. 1. Curitiba: Champagnat, 2004, p. 43-57.

MATTOS, J. M.; VALENTE, W.R.(orgs.). **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos**. São Paulo: Zapt Editora, 2007.

MENEZES, Ebenezer Takuno de; SANTOS, Thais Helena dos."MEC/USAID" (verbete). **Dicionário Interativo da Educação Brasileira** - EducaBrasil. São Paulo: Midiamix Editora, 2002, <http://www.educabrasil.com.br/eb/dic/dicionario.asp?id=325>, visitado em 14/2/2008.

MIGUEL, Maria E.B. O significado da Educação Pública no Império (Paraná – Província). In: FARIA FILHO, L. M. (org.) **Pesquisa em História da Educação: perspectivas de análise, objetos e fontes**. Belo Horizonte: Edições H.G., 1999.

\_\_\_\_\_. **Tendências Pedagógicas na Educação Brasileira: permanências e mudanças**. Trabalho de exame de Professor Titular na PUCPR. Curitiba, 2004.

MOURA, Manoel Oriosvaldo de. A Formação do Profissional de Educação Matemática. **Temas e Debates** – SBEM – N° 7 – 1995, p. 16-26.

NAKASHIMA, Mario N. O papel da imprensa no Movimento da Matemática Moderna. In: MATTOS, J. M.; VALENTE, W.R.(orgs.). **A Matemática Moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos**. São Paulo: Zapt Editora, 2007.

NISKIER, Arnaldo. **LDB: a Nova Lei da Educação**. 2. ed. Rio de Janeiro:Consultor, 1997.

NOVOA, Antônio. **Os professores e sua formação**. 2ª Ed. (Nova Enciclopédia, 39). Lisboa-Portugal: Dom Quixote, 1991.

OECE, (Organização Européia para a Cooperação Econômica). **Mathématiques Nouvelles**. Paris: OECE, 1961a.

OECE, (Organização Europeia para a Cooperação Económica). **Um programme moderne de Mathématiques pour l' enseignement secondaire**. Paris: OECE, 1961b.

OLIVEIRA, João B. Araújo; GUIMARÃES, Sonia P. Dantas; BOMÉNY, Helena M. Bousquet. **A política do livro didático**. 2.ed. Campinas: UNICAMP/ Summus, 1984.

PAIS, Luiz Carlos. Transposição Didática. In, MACHADO, Silvia D. A. **Educação Matemática: uma introdução**. São Paulo: EDUC, 2002.

PERRENOUD, P. **Práticas pedagógicas, profissão docente e formação: perspectivas sociológicas**. Lisboa: Dom Quixote, 1993.

PIAGET, Jean. Lês structures mathématiques et les structures opératoires de l' intelligence. In: CATTEGNO, C. et al. (Ed.). **L' Enseignement des Mathématiques: nouvelles perspectiv**. Neuchatel: Delachaux et Niestlé, 1965, pp. 11-33.

PINTO, Neuza Bertoni. Formação e preparação de professores para o ensino da Matemática Moderna no Brasil. In: **UNIÓN – Revista Íberoamericana de Educación Matemática**. Federación Íberoamericana de Sociedades de Educación Matemática – FISEM, nº. 9, março de 2007, pp. 145-256.

\_\_\_\_\_. Marcas históricas da Matemática Moderna no Brasil. **Revista Diálogo Educacional/PUCPR**. v. 5, n. 16 (Set./dez. 2005). Curitiba: Champagnat, 2005, p.25-38.

\_\_\_\_\_. O Movimento Paranaense de Matemática Moderna: O Papel do NEDEM. **Revista Diálogo Educacional/PUCPR**. v. 6, n. 18 (Maio/Agosto, 2006). Curitiba: Champagnat, 2006, p.113-122.

PONTE, J. P. Concepções dos professores de matemática e processos de formação. In: BROWN, M.; FERNANDES, D.; MATOS, J. F.; PONTE, J. P. **Educação Matemática: Temas de investigação** (pp. 185-239). Lisboa: IIE e Secção de Educação Matemática da SPCE, 1992.

\_\_\_\_\_. O Professor de Matemática: Um Balanço de Dez Anos de Investigação. **Revista Quadrante**, Vol. 3, Nº. 2, pp. 79-114, 1994. Disponível em: < [www.educ.fc.pt/docentes/jponte/94-Ponte\(Quadrante-profs\).doc](http://www.educ.fc.pt/docentes/jponte/94-Ponte(Quadrante-profs).doc)>, acesso em 08/10/2007.

QUINTELLA, Ari. **Matemática : Primeiro Ano Colegial**. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1965.

ROMANELLI, Otaíza O. **História da Educação no Brasil** (1930/1973).17 ed. Petrópolis: Vozes, 1995.

ROMANOWSKI, Joana P. **Formação e profissionalização docente**. 3.ed. Curitiba: Editora IBPEX, 2007.

ROXO, Euclides. A Matemática e o curso secundário. In: VALENTE, W. R. **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil**. Brasília: UnB Editora, 2004.

SANGIORGI, Osvaldo. **Matemática – Curso Moderno**. Vol. 2. ;8.ed. São Paulo: Companhia Editora Nacional, 1970.

SANTOS, Carlos Alberto Marcondes dos; GENTIL, Nelson; GRECO, Sérgio Emílio. **Matemática: Marcondes, Gentil, Sérgio**. Série Novo Ensino Médio. Volume único. São Paulo: Editora Ática, 2000. (De acordo com as Diretrizes Curriculares para o Ensino Médio).

SCHOR, D.; TIZZIOTTI, J.G. **Matemática: Segundo Grau, Volume I**. São Paulo: Editora Ática, 1975.

SCHUBRING, Gert. O primeiro movimento internacional de reforma curricular em Matemática e o papel da Alemanha. In: VALENTE, W. R. **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil**. Brasília: UnB Editora, 2004.

SILVA, Maria Célia L. da. Movimento da Matemática Moderna - possíveis leituras de uma cronologia. **Revista Diálogo Educacional/PUCPR**. v. 6, n. 18 (Maio/Agosto, 2006. Curitiba: Champagnat, 2006, p.49-63.

SKINNER, B. F. **Science and Human Behavior**. Nova York: The MacMillan Co, 1953.

\_\_\_\_\_. **Tecnologia do Ensino**. São Paulo: Edusp, 1972.

SOARES, Flávia dos S. A divulgação da Matemática Moderna na Imprensa Periódica. In: V CIBEM –Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática. **Anais...** Porto – Portugal, 2005.

SOUZA, Rosa F. de. Cultura escolar e currículo: aproximações e inflexões nas pesquisas históricas sobre conhecimentos e práticas escolares. **II Congresso Brasileiro de História da Educação**. (mimeo.) Natal, 2002, 10 p.

SUCUPIRA, N. Da faculdade de filosofia à faculdade de educação. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**. Rio de Janeiro, p. 260-276, abr./junho., 1969.

TARDIF, Maurice. **Saberes docentes e formação profissional**. 5. ed. Petrópolis: Vozes, 2005.

TEIXEIRA, A. Uma perspectiva da educação superior no Brasil. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Rio de Janeiro, jul/set., 1968.

THOMPSON, A. G. **Teacher's Beliefs and Conceptions: A synthesis of the Research in Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching**. New York: Macmillan, 1982.

VALENTE, Wagner R. (org.) **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil**. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 2004.

\_\_\_\_\_. A Matemática Moderna nas escolas do Brasil: um tema para estudos históricos comparativos. **Revista Diálogo Educacional/PUCPR**. v. 6, n. 18 (Maio/Agosto, 2006. Curitiba: Champagnat, 2006, p.19-33.

\_\_\_\_\_. **História da Educação Matemática: Interrogações metodológicas.** Texto para Grupo de Estudos da Universidade Nova de Lisboa, Junho de 2005.

VIDAL, Diana G. **Culturas escolares : estudo sobre práticas de leitura e escrita na escola pública primária (Brasil e França, final do século XIX).** Coleção Memória da Educação. Campinas, SP:Editora Autores Associados, 2005.

VIÑAO FRAGO, Antonio. Fracasas Lãs Reformas Educativas: La respuesta de um historiador.In: Sociedade Brasileira de História da Educação (orgs.). **Educação no Brasil. História e historiografia.** (pp. 21-52). Campinas, São Paulo: Editora Autores Associados/S.B.H.E., 2001, (pp. 21-52).

## **APÊNDICE**

## **APÊNDICE A**

### **Roteiro para realização de entrevista semi-estruturada**

**PRÁTICAS DE APROPRIAÇÃO DA MATEMÁTICA MODERNA NA  
LICENCIATURA**

**Roteiro para entrevista**

- A) Local e data.
- B) Entrevista nº. ....
- C) Dados pessoais e profissionais do(a) Entrevistado(a).
- D) Nome e situação acadêmica do pesquisador(a).
- E) A presente entrevista é referente ao contexto do Projeto “Práticas de apropriação da Matemática Moderna na Licenciatura” – Programa de Pós-Graduação em Educação da Pontifícia Universidade Católica do Paraná. sob a orientação da Professora Doutora Neuza Bertoni Pinto.
- F) Solicitar confirmação do entrevistado quanto a ter sido aluno da primeira turma do Curso de Licenciatura em Matemática na instituição pesquisada.
- G) Orientar a explanação do entrevistado, formulando-lhe as questões:
- Que características apresentava a primeira turma de licenciandos em Matemática nessa Instituição?
  - Falar das lembranças sobre o Movimento da Matemática Moderna.
  - Como as idéias da Matemática Moderna chegaram aos professores da educação básica?
  - Qual disciplina do curso de licenciatura em Matemática estava voltada para proposições do MMM e como eram essas aulas?
  - Que contribuições ao desempenho como professor da Educação Básica poderiam ser atribuídas à formação acadêmica, no que diz respeito às práticas pedagógicas da Matemática Moderna?
  - Como era ensinada a Matemática Moderna na Licenciatura ?
  - Que apoios didáticos eram utilizados na disciplina Fundamentos da Matemática Elementar?
  - Como se dava a formação pedagógica dos licenciandos?
  - Resgatamos registros das anotações feitas pelos professores formadores, no quadro se giz, durante as aulas. Quem os elaborava e por quê?  
Outras perguntas decorrerão das respostas fornecidas.

**APÊNDICE B****Termo de consentimento livre e esclarecido - TCLE (Permissão para entrevista)**

**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE):  
PERMISSÃO PARA ENTREVISTA GRAVADA E PUBLICAÇÃO**

Eu, ..(*nome do sujeito da pesquisa, nacionalidade, idade, estado civil, profissão, endereço, RG*), estou sendo convidado a participar de um estudo denominado **“PRÁTICAS DE APROPRIAÇÃO DA MATEMÁTICA MODERNA NA LICENCIATURA”**, cujos objetivos e justificativas são: analisar a apropriação das práticas da Matemática Moderna, desenvolvidas na disciplina Fundamentos de Matemática Elementar no Curso de Licenciatura em Matemática em uma das Instituições de Ensino Superior do interior paranaense, período 1970-1973, com a finalidade de contribuir para a História do Movimento da Matemática Moderna e a História da Educação Matemática.

A minha participação no referido estudo será no sentido de CONCEDER ENTREVISTAS GRAVADAS, respondendo perguntas sobre minhas impressões sobre o Movimento da Matemática Moderna, na condição de ex-aluno da primeira turma de Licenciandos em Matemática de uma Instituição de Ensino Superior no interior paranaense, no período 1970-1973.

Fui alertado de que, da pesquisa a se realizar, posso esperar alguns benefícios, tais como: ter colaborado gratuitamente para a obtenção de fontes para a referida pesquisa. Os dados que eu fornecer serão utilizados na redação da Dissertação de MESTRADO EM EDUCAÇÃO ou em outro trabalho científico da Professora ELENIR TEREZINHA PALUCH SOARES, que a partir da data de sua aprovação por instituição competente se tornará público.

Recebi, por outro lado, os esclarecimentos necessários sobre os possíveis desconfortos e riscos decorrentes do estudo, levando-se em conta que é uma pesquisa, e os resultados positivos ou negativos somente serão obtidos após a sua realização. Assim, identifico-me como o Entrevistado (A, B ou C), cujos depoimentos serão publicados na referida dissertação ou outro trabalho científico, aceitando o risco de ser identificado por leitores, mesmo o meu nome não sendo apresentado. Também fui informado de que posso me recusar a participar do estudo, ou retirar meu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar, e de, por desejar sair da pesquisa, não sofrerei qualquer prejuízo à assistência que venho recebendo. Foi-me esclarecido, igualmente, que eu posso optar por métodos alternativos, que são: não aceitar participar da pesquisa ou discordar da transcrição das entrevistas, propondo nova transcrição.

A pesquisadora responsável e envolvida com o referido projeto é ELENIR TEREZINHA PALUCH SOARES, atualmente, aluna do Programa de Pós-Graduação em Educação da PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ, e com ela poderei manter contato, pelos telefones (42)36234859 e (42) 99225859.

É assegurada a assistência durante toda pesquisa, bem como me é garantido o livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas conseqüências, enfim, tudo o que eu queira saber antes, durante e depois da minha participação. Enfim, tendo sido orientado quanto ao teor de todo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do já referido estudo, manifesto meu livre consentimento em participar, estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, por minha participação.

No entanto, caso eu tenha qualquer despesa decorrente da participação na pesquisa, haverá ressarcimento na forma seguinte: a pesquisadora assumirá despesas com transporte e hospedagem, caso tenha que me afastar de meu domicílio. De igual maneira, caso ocorra algum dano decorrente da minha participação no estudo, serei devidamente indenizado, conforme determina a lei.

Local e data.

*Nome e assinatura do sujeito da pesquisa*

Nome(s) e assinatura(s) do(s) pesquisador(es) responsável(responsáveis)

**APÊNDICE C**

**Termo de consentimento livre e esclarecido - TCLE (Permissão para uso de Arquivo Pessoal)**

**TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO (TCLE):  
PERMISSÃO PARA USO E PUBLICAÇÃO DE DOCUMENTOS DE ARQUIVO  
PESSOAL**

Eu, ...(*nome do sujeito da pesquisa, nacionalidade, idade, estado civil, profissão, endereço, RG*), estou sendo convidado a participar de um estudo denominado “PRÁTICAS DE APROPRIAÇÃO DA MATEMÁTICA MODERNA NA LICENCIATURA”, cujos objetivos e justificativas são: analisar a apropriação das práticas da Matemática Moderna, desenvolvidas na disciplina Fundamentos de Matemática Elementar no Curso de Licenciatura em Matemática em uma das Instituições de Ensino Superior do interior paranaense, período 1970-1973, com a finalidade de contribuir para a História do Movimento da Matemática Moderna e a História da Educação Matemática.

A minha participação no referido estudo será no sentido de conceder DOCUMENTOS DO MEU ARQUIVO PESSOAL, CONTENDO OS REGISTROS FEITOS NO QUADRO DE GIZ, DURANTE AS AULAS DESENVOLVIDAS NO CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA, NUMA INSTITUIÇÃO DE ENSINO SUPERIOR DO INTERIOR PARANAENSE NO PERÍODO 1970-1973, na condição de ex- aluno da primeira turma de Licenciandos em Matemática dessa Instituição.

Fui alertado de que, da pesquisa a se realizar, posso esperar alguns benefícios, tais como: ter colaborado gratuitamente para a obtenção de dados referentes às práticas da Matemática Moderna desenvolvidas no Curso de Licenciatura em Matemática, numa instituição de ensino superior do interior paranaense, no período 1970-1973. Declaro que eu mesmo elaborei o referido material, atendendo aos mais sólidos preceitos de fidelidade e autenticidade. Os documentos que eu fornecer serão utilizados na redação da Dissertação de MESTRADO EM EDUCAÇÃO ou em outro trabalho científico da Professora ELENIR TEREZINHA PALUCH SOARES, que a partir da data de sua aprovação por instituição competente se tornará público.

Recebi, por outro lado, os esclarecimentos necessários sobre os possíveis desconfortos e riscos decorrentes do estudo, levando-se em conta que é uma pesquisa, e os resultados positivos ou negativos somente serão obtidos após a sua realização. Mesmo assim, aceito ceder os documentos do meu arquivo pessoal acima especificados, mesmo que o seu uso venha levar à minha identificação pelos leitores onde esse material for publicado.

Também fui informado de que posso me recusar a participar do estudo, ou retirar meu consentimento a qualquer momento, sem precisar justificar, e de, por desejar sair da pesquisa, não sofrerei qualquer prejuízo à assistência que venho recebendo.

A pesquisadora responsável e envolvida com o referido projeto é **ELENIR TEREZINHA PALUCH SOARES**, atualmente, aluna do Programa de Pós-Graduação em Educação da PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ, e com ela poderei manter contato, pelos telefones (41)36234859 e (41) 99225859.

É assegurada a assistência durante toda pesquisa, bem como me é garantido o livre acesso a todas as informações e esclarecimentos adicionais sobre o estudo e suas conseqüências, enfim, tudo o que eu queira saber antes, durante e depois da minha participação. Enfim, tendo sido orientado quanto ao teor de todo o aqui mencionado e compreendido a natureza e o objetivo do já referido estudo, manifesto meu livre consentimento em participar, estando totalmente ciente de que não há nenhum valor econômico, a receber ou a pagar, por minha participação.

No entanto, caso eu tenha qualquer despesa decorrente da participação na pesquisa, haverá ressarcimento na forma seguinte: a pesquisadora assumirá despesas com transporte e hospedagem, caso tenha que me afastar de meu domicílio. De igual maneira, caso ocorra algum dano decorrente da minha participação no estudo, serei devidamente indenizado, conforme determina a lei.

Local e data.

*Nome e assinatura do sujeito da pesquisa*

*Nome(s) e assinatura(s) do(s) pesquisador(es) responsável(responsáveis)*

## **ANEXOS**

## **RELAÇÃO DE ANEXOS**

**ANEXO A** - Índice do livro Teoria dos Conjuntos de Seymour Lipschutz – (3 páginas)

**ANEXO B** - Cópias dos registros das anotações feitas pelo professor formador de Fundamentos de Matemática Elementar, no quadro de giz ( 42 páginas).

**ANEXO A**  
**Índice do livro Teoria dos Conjuntos de Seymour Lipschutz – ( 3 páginas)**

## PARTE I

## TEORIA ELEMENTAR DOS CONJUNTOS

<b>Capítulo 1 — Conjuntos e Subconjuntos</b> .....	<b>1</b>
Conjuntos. Notação. Conjuntos Finitos e Infinitos. Igualdade de Conjuntos. Conjunto Nulo. Subconjuntos. Subconjunto Próprio. Comparabilidade. Teorema e Demonstração. Conjuntos de Conjuntos. Conjunto Universal. Conjunto de Potência. Conjuntos Disjuntos. Diagramas de Venn-Euler. Diagramas de Linha. Desenvolvimento Axiomático de Teoria de Conjunto.	
<b>Capítulo 2 — Operações Básicas de Conjuntos</b> .....	<b>23</b>
Operações de Conjuntos. União. Interseção. Diferença. Complemento. Operações em Conjuntos Comparáveis.	
<b>Capítulo 3 — Conjuntos de Números</b> .....	<b>41</b>
Conjuntos de Números. Números Reais, $R$ . Inteiros, $Z$ . Números Racionais, $Q$ . Números Naturais, $N$ . Números Irracionais, $Q'$ . Diagrama de Linha dos Sistemas de Números. Números Decimais e Reais. Desigualdades. Valor Absoluto. Intervalos. Propriedades dos Intervalos. Intervalos Infinitos. Conjuntos Limitados e Ilimitados.	
<b>Capítulo 4 — Funções</b> .....	<b>62</b>
Definição de uma Função. Representações, Operadores, Transformações. Funções Iguais. Amplitude de uma Função. Funções Biunívocas. Funções Sobre. Função Identidade. Funções Constantes. Função Produto. Associatividade dos Produtos de Funções. Inverso de uma Função. Função Inversa. Teoremas Sobre a Função Inversa.	
<b>Capítulo 5 — Conjuntos Produto e Gráficos de Funções</b> ....	<b>92</b>
Pares Ordenados. Conjunto Produto. Diagramas Coordenados. Gráfico de uma Função. Propriedades do Gráfico de uma Função. Gráficos e Diagramas Coordenados. Propriedades de Gráficos em Diagramas Coordenados. Funções como Conjuntos de Pares Ordenados. Conjuntos. Produto em Geral.	

<b>Capítulo 6 — Relações</b> .....	<b>113</b>
Funções de Proposições, Sentenças Abertas, Relações, Conjuntos Solução e Gráficos de Relações, Relações como Conjuntos de Pares Ordenados, Relações Inversas, Relações Reflexivas, Relações Simétricas, Relações Anti-simétricas, Relações Transitivas, Relações de Equivalência, Domínio e Amplitude de uma Relação, Relações e Funções.	
<b>Capítulo 7 — Teoria Avançada de Conjuntos</b> .....	<b>144</b>
Álgebra de Conjuntos, Princípio da Dualidade, Conjuntos com Índice, Operações Generalizadas, Partições, Relações de Equivalência e Partições.	
<b>Capítulo 8 — Complemento Sobre a Teoria das Funções, Operações</b> .....	<b>160</b>
Funções e Diagramas, Restrições e Extensões de Funções, Funções Conjunto, Funções Reais, Álgebra das Funções Reais, Regra do Domínio Máximo, Funções Características, Funções de Escolha, Operações, Operações Comutativas, Operações Associativas, Operações Distributivas, Elementos Identidade, Elementos Inversos, Operações e Subconjuntos.	
PARTE II	
CARDINAIS, ORDINAIS, INDUÇÃO TRANSFINITA	
<b>Capítulo 9 — Números Cardinais</b> .....	<b>187</b>
Conjuntos Equivalentes, Conjuntos Enumeráveis, O Contínuo, Números Cardinais, Aritmética Cardinal, Desigualdades e Números Cardinais, Teorema de Cantor, Teorema Schröder-Bernstein, Hipótese do Contínuo.	
<b>Capítulo 10 — Conjuntos Ordenados Parcial e Totalmente</b> ..	<b>209</b>
Conjuntos Ordenados Parcialmente, Conjuntos Ordenados Totalmente, Subconjuntos de Conjuntos Ordenados, Subconjuntos Ordenados Totalmente, Primeiro e Último Elementos, Elementos Maximal e Minimal, Limites Superiores e Inferiores, Conjuntos Semelhantes, Tipos Ordenados.	
<b>Capítulo 11 — Conjuntos Bem-Ordenados. Números Ordinais</b>	<b>233</b>
Conjuntos Bem-Ordenados, Indução Transfinita, Elementos Limite, Segmentos Iniciais, Semelhança entre um Conjunto Bem-Ordenado e seu Subconjunto, Comparação de Conjuntos Bem-Ordenados, Números Ordinais, Desigualdades e Números Ordinais, Adição Ordinal, Multiplicação Ordinal, Estrutura dos Números Ordinais, Construção Auxiliar de Números Ordinais.	

## ÍNDICE

IX

**Capítulo 12 — Axioma da Escolha. Lema de Zorn. Teorema da Boa-Ordem** ..... 254

Produtos Cartesianos e Funções Escolha. Axioma de Escolha. Lema de Zorn. Teorema da Boa-Ordem. Números Cardinais e Ordinais. Alephs.

**Capítulo 13 — Paradoxos na Teoria dos Conjuntos** ..... 263

Introdução. Conjunto de todos os Conjuntos (Paradoxo de Cantor). Paradoxo de Russel. Conjunto de Todos os Números Ordinais (Paradoxo de Burali-Forti). Conjunto de Todos os Números Cardinais. Família de Todos os Conjuntos Equivalentes a um Conjunto. Família de Todos os Conjuntos Semelhantes a um Conjunto Bem-Ordenado.

## PARTE III

## TÓPICOS RELACIONADOS

**Capítulo 14 — Álgebra de Proposições** ..... 269

Proposições. Conjunção  $p \wedge q$ . Disjunção  $p \vee q$ . Negação  $\sim p$ . Condicional  $p \rightarrow q$ . Bicondicional  $p \leftrightarrow q$ . Polinômios e Polinômios de Boole. Proposições e Tabelas de Verdade. Tautologias e Contradição. Equivalência Lógica. Álgebra de Proposições. Implicação Lógica. Proposições Lógicamente Verdadeiras e Lógicamente Equivalentes.

**Capítulo 15 — Quantificadores** ..... 298

Funções Proposicionais e Conjuntos Verdade. Quantificador Universal. Quantificador Existencial. Negação de Proposições que Contêm Quantificadores. Contra-Exemplo. Notação. Funções Proposicionais Contendo Mais de Uma Variável.

**Capítulo 16 — Álgebra de Boole** ..... 309

Definição. Dualidade numa Álgebra de Boole. Teoremas Básicos. Ordem numa Álgebra de Boole. Projeto de Circuitos de Interruptores.

**Capítulo 17 — Raciocínio Lógico** ..... 322

Argumentos. Argumentos e Diagramas Venn. Argumentos e Proposições. Argumentos e Quantificadores. Proposições Condicionais e Variações.

**Índice Alfabético** ..... 335

**ANEXO B**

**Cópias dos registros das anotações feitas pelo professor formador de Fundamentos de Matemática Elementar, no quadro de giz (42 páginas).**



Fundamentos da Matemática Elementar

(1)

Teoria Elementar dos Conjuntos.

Conceito:- Intuitivamente, consideramos um conjunto como sendo uma coleção, classe ou lista de objetos ou elementos que formam esse conjunto.

Elementos ou membros:- são os objetos que formam o conjunto.

- Ex:-
- a) os números :- 1, 3, 5, 7, 13.
  - b) as vogais :- a, e, i, o, u.
  - c) as disciplinas :- Port; Mat; História.
  - d) as soluções do sistema  $\begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$ .
  - e) os rios do Paraná.
  - f) as cidades do Brasil.
- Observamos que os três primeiros elementos  $a, b, c$  são bem definidos, enquanto os três últimos  $d, e, f$  são definidos por uma propriedade declarada.

Notação:- Os conjuntos são designados pelas letras A, B, C, D --- os elementos são designados " " a, b, c, d ---

- Exemplos :-
- $A = \{1, 3, 5, 7, 13\}$
  - $B = \{a, e, i, o, u\}$
  - $C = \{\text{Port; Mat; Hist.}\}$

A, B, e = Forma tabular de um conjunto.

- Formas de construção de um conjunto
- D =  $\{(x, y) \mid \begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}\}$
  - E =  $\{x \mid x \text{ é um rio, e } x \text{ é do Paraná}\}$
  - F =  $\{x \mid x \text{ é uma cidade, e } x \text{ é do Brasil}\}$

RELAÇÃO DE PERTINÊNCIA:- x é um elemento qualquer de A

Representamos  $\Rightarrow x \in A \Rightarrow x$  pertence a A, ou x é elemento de A.

contrário  $\Rightarrow x \notin A \Rightarrow x$  não pertence a A, e x não é elemento de A.

Exemplo:- 0) Seja  $A = \{a, b, c\}$ , observamos neste conjunto que:-  
 $a \in A$ ;  $b \in A$ ;  $\emptyset \notin A$ .

1) Seja  $B = \{x \mid x \text{ é par}\}$  observamos:-

$2 \in B$ ;  $5 \notin B$ ; e  $6 \in B$ .

Fundamentos 1-

(2)

Conjunto finito:- conjunto que tem um n<sup>o</sup> limitado de elementos ou termos

Ex:-  $M = \{1, 2, 3, 4\}$ ;  $N = \{x | x \text{ é um n}^{\circ} \text{ natural } < 20\}$ .

Conjunto infinito:- conjunto constituído por n<sup>o</sup> ilimitado de termos

Ex:-  $A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$ ;  $B = \{x | x \text{ é ímpar}\}$ .

Conjuntos iguais:- dados dois conjuntos A e B, admitiremos que são iguais se, e somente se, todo elemento de A pertencer a B, e todo elemento de B pertencer a A. Indica-se  $A = B$

Ex:-  $M = \{1, 2, 3\}$  e  $N = \{3, 2, 1\} \rightarrow M = N$ .

$E = \{a, b, c, a\}$  e  $F = \{a, b, c, b\} \rightarrow E = F$ , que é igual ainda a outro conjunto  $G = \{a, b, c\}$ , donde  $E = F = G$ .

PROPRIEDADES:- 1) Reflexiva - todo conjunto A é igual a si mesmo  $A = A$ .

2) Simétrica - se A é igual a B, então B é igual a A.

3) Transitiva:- se  $A = B$  e se  $B = C$ , então  $A = B = C$ , ou  $A = C$ .

notação:- um conjunto A é diferente de um conj. B. Representa-se:  $A \neq B$ .

Conjuntos desiguais:-  $A = \{a, b, c\}$  e  $B = \{a, b, c, d\}$ .

$d \in B$  e  $d \notin A$ . - O conjunto A é diferente do conjunto B quando, ou se, e somente se, existir pelo menos um elemento destes conjuntos que pertence a um deles e não pertence ao outro, Ex:-  $R =$  conj. dos n<sup>os</sup> reais, e  $Q =$  conj. dos n<sup>os</sup> racionais, da forma  $(\frac{a}{b})$ , sendo a e b diferentes de zero, donde  $R \neq Q$ .

Ex:-  $\sqrt{2}$  é um n<sup>o</sup> irracional, donde  $\sqrt{2} \in R$  e  $\sqrt{2} \notin Q$ , portanto R e Q são conj. desiguais.

Exemplo =  $N =$  conj. dos n<sup>os</sup> naturais 0, 1, 2, 3, 4, ...

$Z =$  " dos n<sup>os</sup> inteiros: ... -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...

$N \neq Z$

Conjunto Vazio - é um conjunto sem elementos.

Exemplos- seja um conjunto L:  $L = \{x | x \text{ é par e } x < 6 \text{ e } x > 4\}$   
para  $x = 5$ , não satisfaz, portanto o conjunto L é vazio

Representa-se  $L = \emptyset$

Fundamentos

(3)

SUB-CONJUNTO :- dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , diz-se que  $A$  é subconj. de  $B$ , se e somente se, todo elemento de  $A$  pertencer a  $B$ . Ex:  $A = \{a, b, c\}$   $B = \{a, b, c, d, e\}$   
 $A$  é subconj. de  $B$ ; indica-se  $A \subset B$ , que pode ser lido;  $A$  é uma parte de  $B$ ,  $A$  está contido em  $B$  ou ainda  $B$  contém  $A$ .

Exemplos -  $B \supset A \rightarrow B$  contém  $A \rightarrow A \subset B$   $\rightarrow$  afirmação  
 $B \not\supset A \rightarrow B$  não contém  $A \rightarrow A \not\subset B \rightarrow$  negação  
 $B$  é chamado superconjunto de  $A$ .  $A$  não está contido em  $B$ .

SUB-CONJUNTO PRÓPRIO :-

$$A = \{a, b, c\} \text{ e } B = \{a, b, c, d, e\}$$

$$A \subset B \text{ e } A \neq B.$$

Se  $A$  for um sub-conjunto de  $B$ , e se  $A$  for diferente de  $B$ , então  $A$  é um sub-conjunto próprio de  $B$ , ou  $A$  está contido propriamente em  $B$ , ou ainda  $A$  é parte própria de  $B$ . Exemplo:  $N =$  conj. dos n.ºs naturais  $(0, 1, 2, 3, \dots)$

$$\mathbb{Z} = \text{ " dos n.ºs inteiros } (\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$N \subset \mathbb{Z} \text{ e } N \neq \mathbb{Z} \therefore N \text{ é sub-conj. próprio de } \mathbb{Z}$$

Todo o n.º natural é um inteiro, porém, nem todos os inteiros são naturais?

Exemplo:  $\mathbb{Z} =$  conj. dos n.ºs inteiros.

$$\mathbb{Q} = \text{ conj. dos n.ºs racionais (da forma } \frac{a}{b} \text{ sendo } a \text{ e } b \text{ inteiros e } b \neq 0)$$

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \text{ e } \mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}$$

Todo n.º inteiro é racional, porém, nem todo racional é inteiro.

Dos dois exemplos acima notamos que:-

$$N \subset \mathbb{Z} \text{ e } \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}. \text{ Pela propriedade transitiva vemos}$$

$$\text{Se } N \subset \mathbb{Z} \text{ e se } \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}, \text{ então } N \subset \mathbb{Q}.$$

Exemplo 3:-

$$\mathbb{Q} = \text{ conj. dos n.ºs racionais}$$

$$\mathbb{R} = \text{ " " " Reais.}$$

$$\rightarrow \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \text{ e } \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}.$$

Considerando  $\sqrt{2}$  :-

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \text{ e } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}, \text{ donde, do}$$

exemplos 2 e 3 concluímos:-

$$\text{Se } N \subset \mathbb{Q} \text{ e se } \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}, \text{ então}$$

$$N \subset \mathbb{R}, \text{ donde } \boxed{N \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}}$$

Fundamentos:-      Exercícios -

(4)

Resolver na forma tabular:-      (I)

Resolvendo na equação  $x^2+x-6=0$ :       $A = \{x | x^2+x-6=0\}$   

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \therefore \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2} \therefore \frac{-1 \pm 5}{2} \therefore x' = -2 \text{ e } x'' = -3$$

Os valores de  $x' = -2$  e  $x'' = -3$  satisfazem a equação  $x^2+x-6=0$ ,  
 donde:  $A = \{-3, -2\} \rightarrow$  forma tabular do conj.  $A = \{x | x^2+x-6=0\}$ .

(II)  $B = \{x | x^2 = -4\} \therefore x^2 = -4 \therefore x = \sqrt{-4} \therefore x = \sqrt{(-1) \cdot 4}$   
 $x = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4}$  e considerando-se que  $\sqrt{-1} = i$  ( $i$  é uma unidade imagi-  
 nária, não existe)  $\therefore x = i \cdot 2 \therefore x = 2i \therefore x = \pm 2i$ .  
 $B = \{-2i, 2i\} \rightarrow$  forma tabular do conj.  $B = \{x | x^2 = -4\}$

Prova do exere. 2:-  $x^2 = -4$       "  
 para  $x = -2i \rightarrow (-2i)^2 = -4 \therefore 4i^2 = -4 \therefore 4(\sqrt{-1})^2 = -4$ ,  
 $4(-1) = -4 \therefore -4 = -4$ ,      pois  $i = \sqrt{-1}$ ,  
 para  $x = 2i \rightarrow (2i)^2 = -4 \therefore 4i^2 = -4 \therefore 4(\sqrt{-1})^2 = -4$ ,  
 $4(-1) = -4 \therefore -4 = -4$ ,      por convenção.

(III)  $C = \{x | x \text{ é par e } 5 < x < 6\} \rightarrow$  conjunto vazio, não  
 possui elementos.  
 forma tabular  $\rightarrow C = \emptyset$

(IV)  $D = \{x | \begin{vmatrix} 0 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 3x \\ 1 & 0 & x & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0\} \rightarrow$  Aplica-se no determinante a regra de  
 CHIO ou LAPLACE.

$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 3x \\ 1 & 0 & x & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \therefore 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 3x \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 3x \\ 0 & x & 2 \end{vmatrix} = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ 1 & 3x \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 10 \\ 0 & 3x \\ 0 & x & 2 \end{vmatrix} = 0$  Resolva-se os dois  
 determinantes pela  
 regra de SARRUS

$\begin{vmatrix} 2 & 10 & 2 & 1 \\ 1 & 3x & 1 & 3 \\ 1 & 0 & x & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1(18+x-3) = 15+x$

$-2 \begin{vmatrix} 2 & 10 & 2 & 1 \\ 1 & 3x & 1 & 3 \\ 1 & 0 & x & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -2(12-2x^2-2) = -2(10-2x^2)$

$15+x-20+4x^2=0 \therefore 4x^2+x-5=0 \rightarrow \frac{-1 \pm \sqrt{1-4 \cdot 4 \cdot (-5)}}{2} \therefore \frac{-1 \pm \sqrt{81}}{2} \therefore \frac{-1 \pm 9}{2}$

donde:  $D = \{-\frac{5}{4}, 1\}$  é a forma tabular do conj. D.

Fundamentos - Exerc: Escrever na forma tabular

(5)

$$E = \{x \mid x = \arccos \frac{1}{2}\} \quad \therefore x = \arccos \frac{1}{2} \rightarrow x \text{ é um arco cujo cosseno é } \frac{1}{2}$$

é um conjunto infinito, pois:-

$$\begin{array}{ll} 60^\circ, 420^\circ, 780^\circ \rightarrow \cos = \frac{1}{2} & -60^\circ, -420^\circ, -780^\circ \rightarrow \cos = \frac{1}{2} \\ 300^\circ, 660^\circ, 1020^\circ \rightarrow \cos = \frac{1}{2} & -300^\circ, -660^\circ, -1020^\circ \rightarrow \cos = \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\therefore E = \left\{ \dots -1020^\circ, -720^\circ, -660^\circ, -420^\circ, -300^\circ, -60^\circ, \right. \\ \left. 60^\circ, 300^\circ, 420^\circ, 660^\circ, 720^\circ, 1020^\circ \dots \right\}$$

conjunto infinito  $\rightarrow$  varia de  $-\infty$  a  $+\infty$ .

$$F = \{x \mid x \text{ é par e } x < 0\} \rightarrow F = \emptyset$$

F é um conjunto vazio, pois não consideramos par um  $n^\circ$  negativo.

$$G = \{x \mid 3^x + 3^{4-x} = 82\} \quad \therefore 3^x + 3^{4-x} = 82 \quad \therefore 3^x + \frac{3^4}{3^x} = 82, \therefore$$

$$3^x \cdot 3^x + 3^4 = 82 \cdot 3^x \quad \therefore 3^{2x} - 82 \cdot 3^x + 3^4 = 0 \quad \therefore$$

$$3^{2x} - 82 \cdot 3^x + 81 = 0 \quad \rightarrow \text{Resolvemos numa equação exponencial da}$$

$$\text{forma } Ay^2 - B(y) + C = 0. \quad \text{forma } a x^2 + b x + c = 0,$$

$$\text{fazendo } 3^x = y, \text{ temos: } y^2 - 82y + 81 = 0 \quad \therefore \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{82 \pm \sqrt{(-82)^2 - 4(81)}}{2} \quad \therefore \frac{82 \pm \sqrt{6724 - 324}}{2} \quad \therefore \frac{82 \pm \sqrt{6400}}{2} \quad \therefore \frac{82 \pm 80}{2} \quad \begin{cases} y' = 81 \\ y'' = 1 \end{cases}$$

$$\text{Sabendo-se que } 3^x = y, \text{ substituindo por uma das raízes,}$$

$$y' = 81, \text{ temos: } 3^x = 81 \quad \therefore 3^x = 3^4 \quad \therefore \boxed{x = 4}$$

$$\text{Substituindo com } y'' = 1, \text{ temos: } 3^x = y \quad \therefore 3^x = 1 \quad \therefore 3^x = 3^0 \quad \therefore \boxed{x = 0}$$

$$\text{donde } E = \{0, 4\} \rightarrow \text{forma tabular do conjunto } E = \{x \mid x^3 + 3^{4-x} = 82\}$$

Exercício sobre equação exponencial

$$5. \quad 2^{2x} + 3 \cdot 2^x + 5 = 0 \quad \rightarrow \text{é uma equação da forma } a \cdot 2^{2x} + b \cdot 2^x + c = 0,$$

$$A(y^2) + B(y) + C = 0. \quad \text{isto é, as incógnitas são índices de mesma base,}$$

$$\text{temos } 2^x = y \quad \therefore 5y^2 + 3y + 5 = 0, \quad \therefore \text{supondo-se que as raízes desta}$$

$$\text{equação sejam } \begin{cases} y' = 4 \\ y'' = 16 \end{cases}$$

$$\text{Substituindo para } y = 4 \quad \therefore 2^x = 4 \quad \therefore 2^x = 2^2 \quad \therefore \boxed{x = 2}$$

$$\text{" " } y = 16 \quad \therefore 2^x = 16 \quad \therefore 2^x = 2^4 \quad \therefore \boxed{x = 4}$$

OBS: 4 e 16 são valores que satisfazem a equação do 2º grau

$5y^2 + 3y + 5 = 0$ , porém não satisfazem a exponencial, portanto

temos que encontrar os valores que satisfazem a exponencial, no

caso  $x' = 2$  e  $x'' = 4$ .

Fundamentos

Exercícios

(6)

Quantos subconjuntos contém  $M$ , sendo  $M = \{a, b, c\}$

$\{a, b, c\} \rightarrow$  cada conjunto é um sub-conjunto de si próprio.

$\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\emptyset\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}$  R1- 8 subconjuntos.

Idem sendo  $N = \{1, 2, 3, 4\}$  :-

$\{1, 2, 3, 4\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \emptyset$

R1- 16 subconjuntos.

Para se calcular o  $n^o$  de sub-conjuntos de um conjunto, tomamos o  $n^o$  2 como base, elevado ao número que corresponde à quantidade de elementos do conjunto. Exemplos:

Colo um conj. tem :-

2	elementos	=	$2^2$	=	4	=	terá	4	subconjuntos.
3	"	=	$2^3$	=	8	=	"	8	"
4	"	=	$2^4$	=	16	=	"	16	"
5	"	=	$2^5$	=	32	=	"	32	"

CONJUNTO DE POTÊNCIA - Formando-se um conjunto com os sub-conjuntos de um conjunto, temos um conjunto potência

Ex:  $M = \{a, b, c\}$   $\rightarrow 2^M = \{M, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset\}$

$M =$  o conjunto ou o  $n^o$  de elementos do conjunto

próprio conjunto

O conjunto  $M$  tem três elementos  $\therefore M = 3$ .

Logo  $2^3 = 8$ . O conjunto de Potência tem 8 elementos.

Exemplo:  $R = \{x, y\}$  :-  $\{x, y\}, \{x\}, \{y\}, \emptyset$   $\rightarrow$  O conjunto potência deste conjunto será  $2^R = \{R, \{x\}, \{y\}, \emptyset\}$   $\therefore R = 2$  elementos

$\therefore 2^2 = 4$  elementos. O conjunto Potência do conj.  $R$  tem 4 elementos.

CONJUNTOS COMPARÁVEIS - (comparabilidade) - Dados dois conj.  $A$  e  $B$ , dizemos que são comparáveis se  $A \subset B$  ou  $B \subset A$ . Ex:  $A = \{a, b\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ . Em caso contrário dizemos que os conj. são não comparáveis.

CONJUNTOS DISJUNTOS  $A \cap B = \emptyset \rightarrow$  Ex:  $A = \{2, 3\}$  e  $B = \{2, 4, 6\}$ . Dois conj.  $A$  e  $B$  são disjuntos se não houver elementos comuns entre eles. Ex:  $A = \{1, 3, 5, 7\}$  e  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ .

CONJUNTO UNIVERSAL OU CONJUNTO UNIVERSO - Ex:  $A = \{a, e, i, o, u\}$  ;  $B = \{1, 2, 3, \dots\}$ . O conj. universo do conj.  $A$  é  $\{a, e, i, o, u\}$  e o conj. universo do conj.  $B$  é  $\{1, 2, 3, \dots\}$ .

DIAGRAMAS - 16.04.70.

Conjuntos Comparáveis (comparabilidade).

Dados 2 conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que são comparáveis se  $A \subset B$  ou  $B \subset A$ .

$$A = \{a, b\} ; \quad B = \{a, b, c\}$$

Em caso contrário dizemos que não são comparáveis.

$$\text{Ex: } A = \{2, 3\} \quad \text{e} \quad B = \{2, 4, 6\}$$

Conjuntos Disjuntos: - dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , dizemos que eles são disjuntos, se não houver elemento comum.

$$A = \{1, 3, 5, 7\} \quad \text{e} \quad B = \{2, 4, 6, 8\}$$

Conjunto Universal ou Universo -

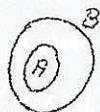
$$A = \{a, e, i, o, u\} \quad \text{e} \quad U = \{\text{alfabeto}\}$$

$$B = \{1, 2, 3, \dots\} \quad \text{e} \quad U = \mathbb{Z} \text{ (conj. dos n.ºs inteiros)} \\ \text{(positivos e negativos)}$$

DIAGRAMAS :- de VENN - EULER

dada a proposição  $A \subset B$ , podemos representá-la em diagrama.

$$A \neq B$$

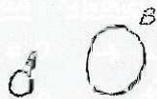


$\rightarrow$   $A$  está contido em  $B$ ;  $B$  contém  $A$ ; ou  
 $A$  é sub-conj. de  $B$ , ou  $B$  é superconj. de  $A$ .

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$B = \{2, 4, 6, 8\}$$

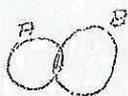
$$A \neq B$$



$A$  e  $B$  não têm nenhum elemento em comum, são conj. disjuntos.

$$A = \{2, 3\}$$

$$B = \{2, 4, 6\}$$



$A$  e  $B$  são conjuntos não comparáveis.

cont.

FUNDAMENTOS - 16, 04, 70.

DIAGRAMAS EM LINHAS

①  $A \subset B \rightarrow$  Representamos em diagramas de linhas.



que se lê: A está contido em B ou B contém A.

②  $A \subset B \wedge B \subset C \rightarrow A \subset C$



que se lê: A está contido em B, que por sua vez está contido em C, donde: A também está contido em C.

③  $A \subset C, B \subset C \wedge B \neq C$

$A = \{1, 2\}$

$B = \{2, 3\}$

$C = \{1, 2, 3, 4\}$

A e B tem igual quantidade de elementos, são subconjuntos de C, devem ficar no mesmo nível.



$A = \{1, 2\}$

$B = \{2, 1\}$

$C = \{1, 2, 3\}$



$A = B$

$A \subset C, B \subset C$

Fundamentos

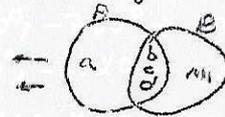
OPERAÇÕES DE CONJUNTOS 24.01.20

(9)

1) - INTERSEÇÃO :- Seja  $A = \{a, b, c, d\}$  e  $B = \{m, b, c, d\}$

Pelo diagrama de VENN representamos :-

$a$  pertence somente a  $A$   
 $m$  " " " a  $B$



e  $b, c, d$  são elementos comuns aos dois conjuntos. :- Indica-se :-

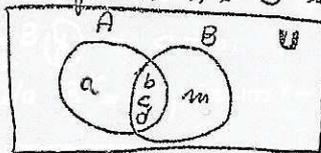
$A \cap B = \{b, c, d\}$ , lê-se "A inter B".

INTERSEÇÃO - Definição 1 :- Chama-se interseção de dois conjuntos  $A$  e  $B$ , ao conjunto de todos os elementos que pertencem a  $A$ , e também pertencem a  $B$ . É o conjunto formado pelos elementos comuns aos dois conjuntos.

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ e } x \in B\}$ .

Definição 2 :- Chama-se interseção de dois conjuntos  $A$  e  $B$  ao conjunto de todos os  $x$  de  $U$ , tais que  $x \in A$  e  $x \in B$ .

Ex: - seja  $A = \{a, b, c, d\}$  e  $B = \{m, b, c, d\}$  (conj. número) o conjunto  $U$  (universo) dos conjuntos  $A$  e  $B$  será o alfabeto latino.



$\therefore A \cap B = \{x \in U | x \in A \text{ e } x \in B\}$

- Obs: -
- ① -  $A \cap B = B \cap A$   
 $A \text{ inter } B = B \text{ inter } A$ .
  - ② -  $(A \cap B) \subset A$  e  $(A \cap B) \subset B$ .

③  $A = \{a, b\}$  e  $B = \{c, d, b, a\}$

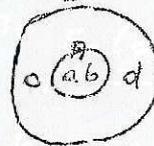
$A \subset B$

$A$  é subconj. de  $B$ ,  $A$  e  $B$  são conjuntos comparáveis, pois  $A \subset B$  e  $B \supset A$

representamos  $\rightarrow$

$A \cap B = \{a, b\}$

$A \cap B = A$ .



④ - Ex: -  $A = \{a, b, c\}$  e  $B = \{m, n, p\}$   $\rightarrow$  são conjuntos disjuntos não há nenhum elemento comum

Representamos :-



$\rightarrow A \cap B = \emptyset$

⑤ Ex: -  $M = \{a, b, c\}$  e  $N = \{a, b, c\}$   $\rightarrow M = N \rightarrow$  são conj. iguais.

representamos em diagramas  $\rightarrow$



$\rightarrow$  coincidentes.

$M \cap N = \{a, b, c\}$

$\therefore \begin{cases} M \cap N = M \\ M \cap N = N \end{cases}$

c/c

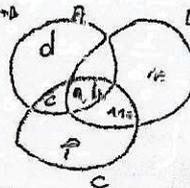
**FUNDAMENTOS**

Exercícios - Sejam  $A = \{a, b, c, d\}$

(10)

$B = \{a, b, m, n\}$  e  $C = \{a, b, c, m, p\}$ .

$A \cap B \cap C = \{a, b\}$  + representamos em diagrama



II - Considerando  $U = \{\text{naturais}\}$  e sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ,  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  e  $C = \{3, 4, 5, 6\}$ .

Calcular →

- a)  $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$ .
- b)  $A \cap U = A = \{1, 2, 3, 4\}$ .
- c)  $A \cap A$ .
- d)  $A \cap B$
- e)  $B \cap A$
- f)  $(A \cap B) \cap C = \{4\}$
- g)  $A \cap (B \cap C)$ .

h)  $A \cap A = A = \{1, 2, 3, 4\}$

i)  $A \cap B = \{2, 4\}$

j)  $B \cap A = \{2, 4\}$

k)  $(A \cap B) \cap C = \{2, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\} = \{4\}$

l)  $A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{4, 6\} = \{4\}$

III - Propriedades da Interseção: - I)  $A \cap A = A \rightarrow$  chama-se IDEMPOTENTE

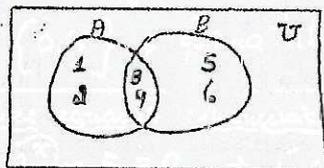
II)  $A \cap B = B \cap A \rightarrow$  propriedade COMUTATIVA.

III)  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \rightarrow$  propriedade ASSOCIATIVA.

**REUNIÃO OU UNIÃO** - Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ .

$A$  e  $B$  são conj. não comparáveis, pois existe pelo menos um elemento de  $B$  que não pertence a  $A$ . (no caso 5 e 6).

temos →



Indica-se →  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ .

le-se "A união B".

$A \cup B$  é a reunião dos ou união dos elementos comuns e não comuns aos conjuntos  $A$  e  $B$ .

Definição: - Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  chama-se REUNIÃO OU UNIÃO ao conjunto de todos os elementos  $x$ , tais que:

$x \in A$  ou  $x \in B$  ou  $x \in$  a ambos.

Obs: - I) Observando-se o conjunto  $A$ , na união, notamos que  $A$  e  $B$  são sub-conjuntos da união.

$A \subset (A \cup B)$  e  $B \subset (A \cup B)$ .

II) -  $(A \cup B) \subset U$ .

III) Sejam  $A$  e  $B$ , tais que  $A \subset B$ , → temos:  $A \cup B = B$ .

## Fundamentos - cont. exers.

(11)

1) Se  $A$  e  $B$  são disjuntos  $\rightarrow A = \{a, b\}$ ,  $B = \{c, d\}$ .

$$\begin{array}{c} A \\ \text{a, b} \end{array} \quad \begin{array}{c} B \\ \text{c, d} \end{array} \rightarrow A \cup B = \{a, b, c, d\}.$$

2) - Sejam  $A$  e  $B$ , tal que  $A = B$ .  $\rightarrow A = \{x, y\}$  e  $B = \{x, y\}$  -

$$A \cup B = \{x, y\} \sim \begin{cases} A \cup B = A \\ A \cup B = B. \end{cases}$$

Exercícios  $\rightarrow$  Sejam  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{4, 6, 8\}$  e  $C = \{4, 5, 6\}$

Calcular:

$$\text{i) } A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8\} \quad \text{iii) } B \cup C = \{4, 5, 6, 8\}.$$

$$\text{ii) } A \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\text{iv) } (B \cup C) \cup A = \{4, 5, 6, 8\} \cup \{2, 3, 4\} =$$

$$\text{ii) } B \cup \emptyset = \text{próprio conj. } B = \{4, 6, 8\}. \quad \text{---} \quad \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}.$$

EXERCÍCIOS SOBRE PROPRIEDADES ESPECÍFICAS DA UNIÃO OU REUNIÃO.

Sejam  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{4, 6, 8\}$  e  $C = \{4, 5, 6\}$  e  $U = \{\text{naturais}\}$ .

Achar  $\rightarrow$  i)  $A \cup \emptyset = \text{próprio conj. } A = \{2, 3, 4\}$ .

ii)  $A \cup U = \text{próprio conjunto } U = \{\text{naturais}\}$ .

iii)  $A \cup A = \text{próprio conj. } A = \{2, 3, 4\}$

$$\text{iv) } A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8\}$$

v)  $B \cup A = \{4, 6, 8, 2, 3\}$

$$\text{vi) } (A \cup B) \cup C = \{2, 3, 4, 6, 8\} \cup \{4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

$$\text{vii) } A \cup (B \cup C) = \{2, 3, 4\} \cup \{4, 5, 6, 8\} = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\} \quad \text{---}$$

Propriedades - observando os exercícios III, IV e VII, temos:

ii)  $A \cup A = A \rightarrow$  IDEMPOTENTE.

iv)  $A \cup B = B \cup A \rightarrow$  prop. COMUTATIVA

vi)  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \rightarrow$  prop. ASSOCIATIVA.

Exercícios  $\rightarrow$  Sejam  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{4, 6, 8\}$  e  $C = \{4, 5, 6\}$  e

Achar:

$$\text{a) } A \cap (A \cup B) = \{2, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4, 6, 8\} = \{2, 3, 4\} = A. \quad U = \{\text{naturais}\}$$

$$\text{b) } A \cup (A \cap B) = \{2, 3, 4\} \cup \{4\} = \{2, 3, 4\} = A. \quad (\text{próprio conj.})$$

$$\text{c) } A \cap (B \cup C) = \{2, 3, 4\} \cap \{4, 5, 6, 8\} = \{4\}. \quad \text{---}$$

$$\text{d) } A \cup (B \cap C) = \{2, 3, 4\} \cup \{4, 6\} = \{2, 3, 4, 6\}.$$

$$\text{e) } (A \cap B) \cup (A \cap C) = \{4\} \cup \{4\} = \{4\}.$$

$$\text{f) } (A \cup B) \cap (A \cup C) = \{2, 3, 4, 6, 8\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6\} = \{2, 3, 4, 6\}.$$

**FUNDAMENTOS**

Relacionando os exercícios anteriores que tem o mesmo resultado, temos:-

(12)

Exerc. (3) e (4)  $\rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .

- Propriedade distributiva da interseção em relação à união.

Exerc. (4) e (5)  $\rightarrow A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

- Propriedade distributiva da união em relação à interseção.

$$\left. \begin{aligned} A \cap (A \cup B) &= A \\ A \cup (A \cap B) &= A \end{aligned} \right\} \text{ leis de absorção.}$$

**RESUMO** - (1) IDEMPOTENTES  $\rightarrow A \cap A = A \cup A = A$ .

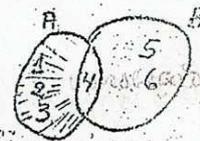
(2) COMUTATIVAS  $\rightarrow A \cap B = B \cap A$  e  $A \cup B = B \cup A$ .

(3) ASSOCIATIVAS  $\rightarrow (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$  e  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ .

(4) DISTRIBUTIVAS  $\rightarrow A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  e  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

**OPERAÇÕES DE CONJUNTOS  $\rightarrow$  (3) DIFERENÇA**

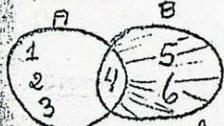
Sejam  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{4, 5, 6\}$ .  $\rightarrow$  Representando em diagrama



**DEFINIÇÃO**  $\rightarrow$  Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$ , chama-se diferença ao conj. de todos os elementos que pertencem a  $A$ , mas que não  $\notin$  a  $B$ .  
 notação  $\rightarrow$  A diferença indica-se por  $A - B$ , que se lê "A menos B", "A diferença B", ou ainda diferença entre  $A$  e  $B$ .

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

**Exemplo**  $\rightarrow$  (2)  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{4, 5, 6\}$ .



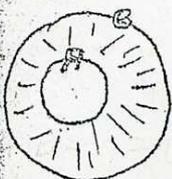
$$\therefore B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\} \therefore B - A = \{5, 6\}.$$

conclusão  $\rightarrow A - B \neq B - A$ , pois  $A$  e  $B$  são conj. não comparáveis.

(3)  $\rightarrow$  Dados dois conj.  $A$  e  $B$ , se a interseção for vazia, os conj. são disjuntos.

$$A \cap B = \emptyset \text{ (conj. disjuntos)} \therefore \begin{cases} A - B = A. \\ B - A = B. \end{cases}$$

(4)  $\rightarrow$  Se  $A \subset B$



$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

$$B - A = \{x \mid x \in B \text{ e } x \notin A\}.$$

$$A - B = \emptyset \therefore B - A = \text{área sombreada.}$$

FUNDAMENTOS — Exercícios sobre a DIFERENÇA.

(13)

Considerando  $\rightarrow U$  (naturais) e dados os conjuntos  $\rightarrow$ :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}; \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}; \quad C = \{3, 6, 9, 12, 15\}.$$

Determinar  $\rightarrow$  ①  $A-B$ . ②  $B-A$ . ③  $B-C$ . ④  $A-C$ . ⑤  $C-A$ .

⑥  $C-B$ . ⑦  $(A-B) \cup (B-A)$  ⑧  $(A-C) \cup (C-A)$ .

Soluções ① -  $A-B = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ .

② -  $B-A = \{x | x \in B \text{ e } x \notin A\} = \{12, 14\}$ .

③ -  $B-C = \{x | x \in B \text{ e } x \notin C\} = \{2, 4, 8, 10, 14\}$ .

④ -  $A-C = \{x | x \in A \text{ e } x \notin C\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\}$ .

⑤ -  $C-A = \{x | x \in C \text{ e } x \notin A\} = \{12, 15\}$  — o —

⑥ -  $C-B = \{x | x \in C \text{ e } x \notin B\} = \{3, 9, 15\}$  — o —

⑦ -  $(A-B) \cup (B-A) = \{x | x \in A \text{ e } x \notin B\} \cup \{x | x \in B \text{ e } x \notin A\} =$

$$\{1, 3, 5, 7, 9\} \cup \{12, 14\} = \{1, 3, 5, 7, 9, 12, 14\}.$$

⑧ -  $(A-C) \cup (C-A) = \{x | x \in A \text{ e } x \notin C\} \cup \{x | x \in C \text{ e } x \notin A\} =$

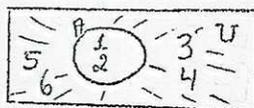
$$\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10\} \cup \{12, 15\} = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 12, 15\}.$$

COMPLEMENTAR OU COMPLEMENTO

Seja conj. universal  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $A = \{1, 2\}$ .

Com diagrama

teremos  $\rightarrow$



$$A' \text{ ou } C_U^A \rightarrow \{x | x \in U \text{ e } x \notin A\} = \{3, 4, 5, 6\}.$$

Definição 1:

Dado um conjunto universal  $U$  e um conj.  $A$ , parte deste conj. universal, chama-se complementar ou complemento de  $A$  em  $U$ , ao conj. de todos os elementos que pertencem a  $U$  e não pertencem a  $A$ .

Definição 2: Seja  $A$  uma parte de  $U$ . Chama-se complementar ou complemento de  $A$  em  $U$ , a diferença entre  $U$  e  $A$ . ( $U-A$ ).

notação  $\rightarrow$  Indica-se por  $C_U^A \rightarrow$  lê-se  $\rightarrow$  (complementar ou complemento de  $A$  em  $U$ ).

$A'$   $\rightarrow$  lê-se  $\rightarrow$  (complementar ou complemento de  $A$  em relação a  $U$ ).

$$A' = \{x | x \in U \text{ e } x \notin A\}.$$

$(A \cap B)'$   $\rightarrow$  Complemento da interseção.

$(A')'$   $\rightarrow$  lê-se complemento do complemento de  $A$ .

$A'$   $\rightarrow$  " " complemento de  $A$ .

$A \cap A'$   $\rightarrow$  " " interseção de  $A$  com o complemento de  $A$ .

**FUNDAMENTOS** Exercícios sobre complementar ou complemento (14)

Sejam  $A = \{2, 3\}$ ,  $B = \{3, 4, 5\}$  e  $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , calcular  $\rightarrow$

- 1)  $A' = \{x | x \in U, x \notin A\} = \{1, 4, 5\}$ . 2)  $B' = \{x | x \in U, x \notin B\} = \{1, 2\}$ .
- 3)  $A \cup A' = \{2, 3\} \cup \{x | x \in U, x \notin A\} = \{2, 3\} \cup \{1, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} = U$ .
- 4)  $A \cap A' = \{2, 3\} \cap \{x | x \in U, x \notin A\} = \{2, 3\} \cap \{1, 4, 5\} = \emptyset$
- 5)  $(A')' = (\{x | x \in U, x \notin A\})' = (\{1, 4, 5\})' = \{2, 3\} = A$  — 0 —
- 6)  $(A \cap B)' = (\{3\})' = \{1, 2, 4, 5\} = A' \cup B'$  . . . . .
- 7)  $A' \cup B' = \{1, 4, 5\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 4, 5\} = (A \cap B)'$ .
- 8)  $(A \cup B)' = (\{2, 3, 4, 5\})' = \{1\} = A' \cap B'$
- 9)  $A' \cap B' = \{1, 4, 5\} \cap \{1, 2\} = \{1\} = (A \cup B)'$

Demonstração das propriedades propostas na matéria já vista.

Igualdade entre dois conjuntos:  $A = B$  se  $A \subset B$  ou  $B \subset A$

Provar que:  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ . Dados os conjuntos  $\rightarrow$

Calcular: I)  $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 8\}$  -  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ;  $B = \{2, 4, 6, 8\}$ ;  $C = \{3, 4, 5, 6\}$

- II)  $A \cap (B \cup C) = \{2, 3, 4\}$  ①
  - III)  $A \cap B = \{2, 4\}$ . IV)  $A \cap C = \{3, 4\}$ .
  - V)  $(A \cap B) \cup (A \cap C) = \{2, 4\} \cup \{3, 4\} = \{2, 3, 4\}$  ②
- comparando com os exercícios;  $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 8\} = \{2, 4\} \cup \{3, 4\}$  ;

1ª parte - tomando o elemento 2, por exemplo  $\rightarrow$   $\forall x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Rightarrow$

\* todo  $x \in \{2, 3, 4\}$

$$x \in A \wedge \begin{cases} x \in B \\ \text{ou} \\ x \in C \\ 2 \in \{3, 4, 5, 6\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in A \wedge x \in B \\ 2 \in \{1, 2, 3, 4\} \wedge 2 \in \{2, 4, 6, 8\} \\ \text{ou} \\ x \in A \wedge x \in C \\ 2 \in \{1, 2, 3, 4\} \wedge 2 \in \{3, 4, 5, 6\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \cap B) \\ 2 \in \{2, 4\} \\ \text{ou} \\ x \in (A \cap C) \\ 2 \in \{3, 4\} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$  ②  
 $2 \in \{2, 4\}$  ou  $2 \in \{3, 4\}$

obs: - somente p/ demonstração.  $\rightarrow$  Todo elemento de I é também elemento de II, portanto I é subconj. de II.  $\rightarrow$

$A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$

FUNDAMENTOS - demonstraco - 2ª parte

(25)

$$(A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow \{ \forall x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \} \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \cap B) \\ x \in \{2,4\} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{ou} \\ x \in (A \cap C) \\ x \in \{3,4\} \end{cases}$$

\* todo  $x \in \{2,4\} \cup \{3,4\}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \in A \wedge x \in B \\ x \in \{1,2,3,4\} \wedge x \in \{2,4,6\} \\ \text{ou} \\ x \in A \wedge x \in C \\ x \in \{1,2,3,4\} \wedge x \in \{3,4,5,6\} \end{cases} \Rightarrow x \in A \begin{cases} x \in B \\ x \in \{2,4,6\} \\ \text{ou} \\ x \in C \\ x \in \{3,4,5,6\} \end{cases}$$

$$x \in A \wedge x \in (B \cup C) \Rightarrow x \in A \cap (B \cup C) \text{ (II)}$$

$x \in \{1,2,3,4\} \wedge x \in \{2,3,4,5,6\}$

\* Todo elemento de III e tambem elemento de IV,

portanto III e subconj. de IV, donde

$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap C) &\subset A \cap (B \cup C) \quad \text{1ª parte. (x)} \\ A \cap (B \cup C) &\subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad \text{2ª parte. (y)} \end{aligned}$$

Pela def. de igualdade de conjuntos, temos  $x=y$  se e somente se  $x \subset y$  e  $y \subset x$ .

donde  $\rightarrow$   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$  c.q.d.

Exerccio - provar que  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .

1ª parte -  $\forall x \in A \cup (B \cap C) \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A \text{ ou } \begin{cases} x \in B \\ \text{e} \\ x \in C \end{cases}$

$$\begin{cases} x \in A \text{ ou } x \in B \\ \text{e} \\ x \in A \text{ ou } x \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \cup B) \\ \text{e} \\ x \in (A \cup C) \end{cases} \Rightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$  (2)

2ª parte -  $(A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow \forall x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow \begin{cases} x \in (A \cup B) \\ \text{e} \\ x \in (A \cup C) \end{cases}$

$$\begin{cases} x \in A \text{ ou } x \in B \\ \text{e} \\ x \in A \text{ ou } x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in A \text{ ou } \begin{cases} x \in B \\ \text{e} \\ x \in C \end{cases} \Rightarrow x \in A \text{ ou } x \in (B \cap C) \Rightarrow x \in A \cup (B \cap C)$$

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \Rightarrow (A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$  (3)

donde, comparando (2) e (3), temos  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$  c.q.d.

\* Propriedade distributiva da "Reunio" em relao  "interseo".

## FUNDAMENTOS

## Demonstrações 1-

16

① - Provar que  $(A-B) \subset A$ .

$$\forall x \in (A-B) \Rightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \Rightarrow x \in A.$$

definição de diferença  
 todo elemento de  $(A-B)$  é elemento de  $A$ .

$$\therefore (A-B) \subset A$$

② - Provar que  $A-B = A \cap B'$ 1ª parte -  $x \subset y$ .

$$\forall x \in (A-B) \Rightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \Rightarrow x \in A \text{ e } x \in B' \Rightarrow x \in (A \cap B')$$

$$\therefore (A-B) \subset (A \cap B')$$

2ª parte  $y \subset x$ .

$$\forall x \in (A \cap B') \Rightarrow x \in A \text{ e } x \in B' \Rightarrow x \in A \text{ e } x \notin B \Rightarrow x \in (A-B).$$

$$(A \cap B') \subset (A-B) \text{ ; pela definição da igualdade } \rightarrow A-B = A \cap B'$$

③ - Provar que  $(A \cup B)' = A' \cap B'$ , considerando  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 

a)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8\}$ .

b)  $(A \cup B)' = \{5, 6\}$ .

c)  $A' = \{2, 5, 6, 7\}$ .

d)  $B' = \{1, 5, 6, 8\}$ .

e)  $A' \cap B' = \{5, 6\}$ .

$$A = \{1, 3, 4, 8\} \text{ e } B = \{2, 3, 4, 7\}.$$

$$A' \cap B' = (A \cup B)'$$

1ª parte -  $\forall x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \notin A \text{ e } x \notin B \Rightarrow x \in A' \text{ e } x \in B' \Rightarrow$$

$$x \in (A' \cap B') \therefore (A \cup B)' \subset (A' \cap B')$$

2ª parte -

$$\forall x \in (A' \cap B') \Rightarrow x \in A' \text{ e } x \in B' \Rightarrow x \notin A \text{ e } x \notin B \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow$$

$$x \in (A \cup B)' \therefore (A' \cap B') \subset (A \cup B)' \text{ ; pela def. de igualdade } \rightarrow (A \cup B)' = A' \cap B'$$

④ - Provar que  $A' - B' = B - A$ considerando  $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 

a)  $A' = \{2, 5, 6, 7\}$

b)  $B' = \{1, 5, 6, 8\}$

c)  $A' - B' = \{2, 7\}$

d)  $B - A = \{2, 7\}$

$$A' - B' = B - A$$

1ª parte  $\forall x \in (A' - B') \Rightarrow x \in A' \text{ e } x \notin B' \Rightarrow$

$$\Rightarrow x \notin A \text{ e } x \in B \Rightarrow x \in B \text{ e } x \notin A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in (B - A) \therefore (A' - B') \subset (B - A)$$

2ª parte:  $\forall x \in (B - A) \Rightarrow x \in B \text{ e } x \notin A \Rightarrow x \notin B' \text{ e } x \in A' \Rightarrow$

$$x \in A' \text{ e } x \notin B' \Rightarrow x \in (A' - B') \therefore (B - A) \subset (A' - B') \therefore$$

$$A' - B' = B - A \text{ c.q.d.}$$

FUNDAMENTOS

FUNÇÕES

(17)

① Tomando como exemplo um automóvel e considerando o tempo em horas e o espaço percorrido em km.

$A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  → Tempo em horas

$B = \{0, 60, 120, 180, 240\}$  → Espaço percorrido em km.

Def: - Se a cada elemento do conj. A estiver associado um único elemento de B, esta relação chamar-se a função.

Os conjuntos A e B acima não são exemplos de função, pois os números estão colocados no conjunto de modo que não se pode estabelecer uma relação entre eles.

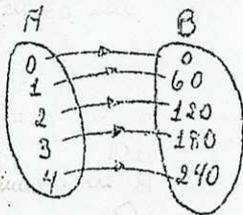
$A = \{1, 2, 3, 7, 9, 8\}$   
 $B = \{13, 17, 18, 19, 21, 16\}$

② notação: - As funções são indicadas do seguinte modo: -

$f: A \rightarrow B$ , que lê-se: f é uma função de A em B, ou B é uma função de A.

A = Domínio da função  
 B = Contradomínio da função.

Representação em diagramas - primeiro exemplo, conj. A e B.

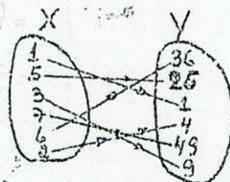


$0 \in A$  corresponde a  $0 \in B$ .

$a \in A$  " " "  $f(a)$  (imagem de a)  
 lê-se "f" de "a".

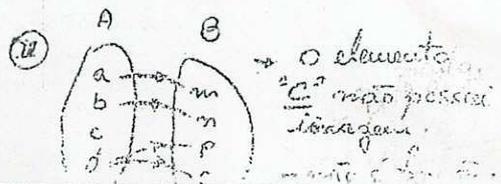
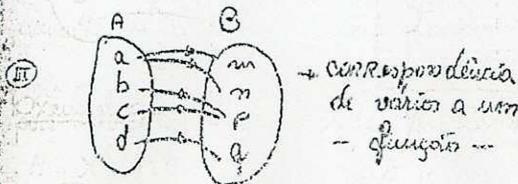
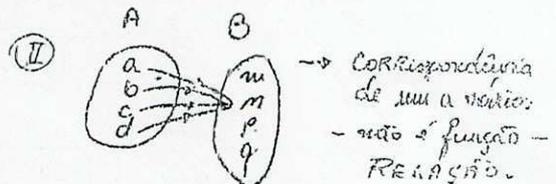
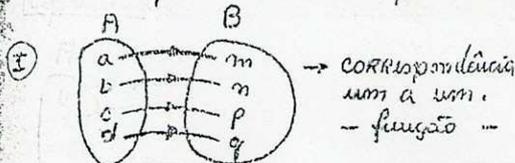
"f" associa a cada n° inteiro o seu produto por 60

Exemplos: - Sejam X e Y os conj. abaixo representados.



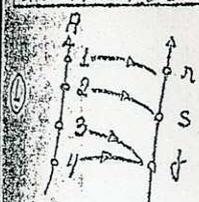
$x \in X \rightarrow$  "f" associa a cada "x" o seu quadrado.  
 $y \in Y \rightarrow$   $1 \in X$  corresponde  $1 \in Y$ .  
 $5 \in X$  " "  $25 \in Y$ .

Sejam os conjuntos  $A = \{a, b, c, d\}$  e  $B = \{m, n, p, q\}$   
 Verificar quais das correspondências abaixo são funções.

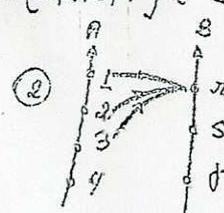


FUNDAMENTOS

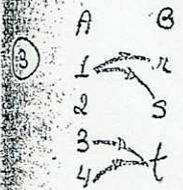
Sejam os conj.  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{r, s, t\}$ . (18)  
 Exemplos de funções.



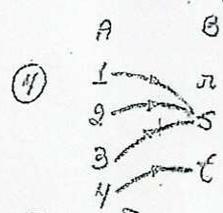
→ correspondência vários a um - função.



O elemento 4 não tem imagem - não é função.



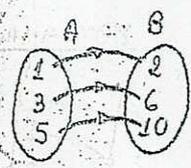
O elemento 2 não tem imagem - não é função.



correspondência vários a um e um a um - função.

TIPOS DE FUNÇÕES

Sejam os conj.  $A = \{1, 3, 5\}$  e  $B = \{2, 6, 10\}$  e seja  $f: A \rightarrow B$ , definida por  $\forall x \in A, f(x) = 2x$ .



$f(x) = 2x$ .  
 $f(1) = 2 \cdot 1 = 2$ .  
 $f(3) = 2 \cdot 3 = 6$ .  
 $f(5) = 2 \cdot 5 = 10$ .

Todo y que pertence a B é imagem de algum elemento x que pertence a A.  
 OBS: - não pode sobrar elemento em B.

Nestas condições, dizemos que a função é SOBREJETIVA,

1) SOBREJETORA ou SÔBRE.

Def: - Uma função  $f: A \rightarrow B$  se diz Sobrejetiva, sobrejetora ou sôbre, se e somente se todo elemento y que pertence a B, é imagem de algum elemento x que pertence a A, pela aplicação f. OBS: - O contradomínio é todo o conjunto B.

Exemplo: - Sejam os conjuntos  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $B = \{0, 1\}$ .

seja  $f: A \rightarrow B$ , assim definida: -



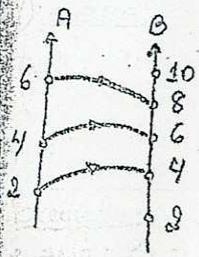
$\forall x \in A, f(x) = 0$ , se x for par.  
 $f(x) = 1$ , se x for ímpar.

Correspondência um a um e vários a um.

1) Função SÔBRE

Exemplo: - Sejam  $A = \{2, 4, 6\}$  e  $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ .

$f: A \rightarrow B$  se  $\forall x \in A, f(x) = x + 2$ .



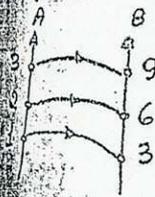
- sobram elementos em B -- NÃO SOBREJETIVA ou NÃO SOBREJETORA.

FUNDAMENTOS

② FUNÇÃO BIUNÍVOCA

(19)

Sejam,  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{3, 6, 9\}$ .  $f: A \rightarrow B$ , se  $\forall x \in A, f(x) = 3x$



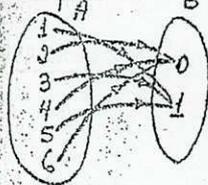
$x_1 = 3 \therefore f(x_1) = 3 \cdot 3 = 9$   
 $x_2 = 2 \therefore f(x_2) = 3 \cdot 2 = 6$   
 $x_3 = 1 \therefore f(x_3) = 3 \cdot 1 = 3$

Uma função se diz BIUNÍVOCA, se e somente se, elementos diferentes do domínio correspondem a imagens diferentes no contra domínio? Pode ser INJETIVA, INJETORA ou BIUNÍVOCA.

③ FUNÇÃO BIJETORA OU BIJETIVA

Uma função se diz bijectora, ou bijectiva, se e somente se for sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.

Exemplo:-



$f: A \rightarrow B$ . se  $\forall x \in A$   $\begin{cases} f(x) = 0, \text{ se } x \text{ for par} \\ f(x) = 1, \text{ se } x \text{ for impar} \end{cases}$

- Todo elemento de B é imagem de algum elemento de A. Função SOBREJETORA.

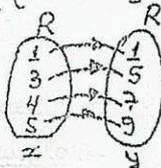
- Elementos diferentes do domínio não correspondem a elementos diferentes no codomínio. Função NÃO INJETORA.

Neste caso a função não é BIJETORA.

Exemplo:-

Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  assim definida  $\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R}\}$  e  $\forall x \in \mathbb{R}$   $f(x) = 2x - 1$ .

$A = \{1, 3, 4, 5\}$ .



$f(x) = 2x - 1$ .

$f(1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ .

$f(3) = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ .

$f(4) = 2 \cdot 4 - 1 = 7$ .

$f(5) = 2 \cdot 5 - 1 = 9$ .

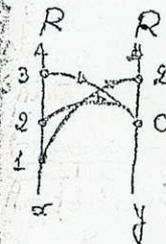
- É SOBREJETORA :- Todo elemento  $y$  é imagem de algum elemento  $x$  e não sobram elem. em B.

- É INJETORA :- A diferentes elementos  $x$  correspondem imagens diferentes em  $y$ .

Seendo sobrejetora e injetora ela é BIJETORA.

Ex-1- Verificar se a função abaixo é sobrejetora, injetora ou bijectora.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , se  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ .  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .  $-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$



$\frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \therefore \begin{cases} x' = 3 \\ x'' = 2 \end{cases}$

- não é injetora - elementos diferentes no domínio não correspondem a elem. dif. no codomínio  
 - é sobrejetora - todo elemento de  $y$  é imagem de algum elemento de  $x$  e não sobram elementos em  $y$ .

Fundamentos. Ex- Verificar se a função abaixo é sobre, injetora, <sup>(20)</sup> ou bijetora.

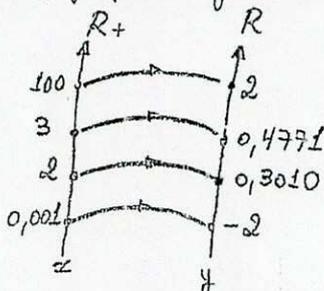
$R_+ \rightarrow R$   $f(x) = \log x$ . (função logarítmica).

$f(2) = \log 2 = 0,3010$ .

$f(3) = \log 3 = 0,4771$ .

$f(100) = \log 100 = 2$ .  
(na base 10)

$f(0,001) = \log 0,001 = -2$ .



Domínio = Reais positivos (não há logaritmo de nº negativo)

Imagem = Reais positivos e negativos.

$\forall y \in R$  é imagem de algum elemento  $x \in R_+$  e não sobram elementos em  $R$ .  
É SOBREJETORA

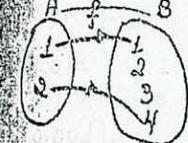
$x_1 \neq x_2$  e  $f(x_1) \neq f(x_2)$   $\rightarrow$  Injetora, e conseqüentemente BIJETORA

2ª Semestre:-

(4) FUNÇÕES IGUAIS

Sejam  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{1, 2, 3, 4\}$ , considerando

$f: A \rightarrow B$  definido por  $f(x) = x^2$ , e considerando



$f(1) = 1$ .  
 $f(2) = 4$ .

$g: A \rightarrow B$ , assim definida:-

$g(x) = 1$  se  $x$  é ímpar.  
 $g(x) = 2x$  se  $x$  é par cujo domínio é o conjunto  $\{1, 2\}$ .

$x = 1 \Rightarrow g(1) = 1$  ( $x$  é ímpar)

$x = 2 \Rightarrow g(2) = 2x = 2 \cdot 2 = 4$  ( $x$  é par).

$f$  e  $g$  são funções iguais

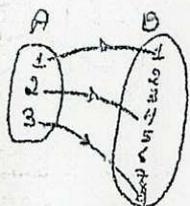
Defi- Dadas as funções  $f$  e  $g$ , de  $A$  em  $B$ , dizemos que são iguais se, e somente se, para todo  $x$  que pertence a  $A$ , tem-se  $f(x) = g(x)$ , desde que definidas no mesmo domínio.

" SIMBOLICAMENTE -  $f = g \iff \forall x \in A, f(x) = g(x)$ .

$f \neq g \iff \forall x \in A, f(x) \neq g(x)$ .

IMAGEM DE UM CONJUNTO POR UMA FUNÇÃO

Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{1, 2, 3, \dots, 8, 9\}$  e  $f: A \rightarrow B$  definida  $f(x) = x^2$ .



$f(1) = 1$ .

$f(2) = 4$ .

$f(3) = 9$ .

$\rightarrow \{1, 4, 9\}$   $\rightarrow$  imagem direta do domínio.

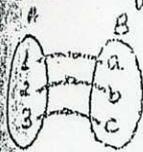
$f(A) = \{1, 4, 9\}$  imagem direta do conj.  $A$ .

$f(A) \subset B$

(22)

é o conj. das imagens dos elementos do domínio, para aplicação  $f$ .

Ex: - Sejam  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{a, b, c\}$ ,  $f: A \rightarrow B$  def. pelo diagrama abaixo

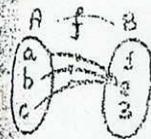


$f(1) = a$ ,  $f(2) = b$ ,  $f(3) = c$ .  
 Imagem inversa  $f^{-1}$   
 $f^{-1}(a) = 1$   
 $f^{-1}(b) = 2$   
 $f^{-1}(c) = 3$   
 $f^{-1}(B) = \{1, 2, 3\}$ .

Definição: - "Imagem inversa" de uma função  $f: A \rightarrow B$  é o conjunto dos elementos de A cujas imagens pertencem ao conjunto B.

⑤ Função CONSTANTES

Sejam  $A = \{a, b, c\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$  e  $f: A \rightarrow B$  def. pelo diagrama



Definição: - Uma função  $f: A \rightarrow B$  dig-se uma constante se e somente se, para todo  $x \in A$ ,  $f(x)$  de  $x$  é um mesmo elemento  $y \in B$ . (Imagem)

Ou, uma função  $f: A \rightarrow B$  dig-se uma constante se, e somente se, o contradomínio for constituído por um único elemento.

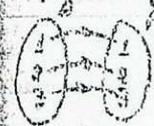
Obs: -  $f(A) = \{2\}$  (conjunto unitário).

Exemplo: - Seja  $f: R \rightarrow R$  definida por  $f(x) = 3$ .



⑥ Função Idêntica ou IDENTIDADE

Seja  $A = \{1, 2, 3\}$  e seja a aplicação  $f: A \rightarrow A$  def. pelo diagrama



$f(1) = 1$ ,  $f(2) = 2$ ,  $f(3) = 3$ .  
 Definição: - Uma função  $f: A \rightarrow B$  dig-se idêntica, se e somente se, para todo  $x \in A$  tem-se  $f(x) = x$ , isto é, a imagem  $f(x)$  de  $x$  é o próprio elemento  $x$ .

⑦ Função INVERSA

Sejam  $A = \{a, b, c\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$  e  $f: A \rightarrow B$  def. pelo diagrama



Imagem direta dos elementos  $f(a) = 1$ ,  $f(b) = 2$ ,  $f(c) = 3$ .  
 Imagem inversa dos elementos  $f^{-1}(1) = a$ ,  $f^{-1}(2) = b$ ,  $f^{-1}(3) = c$ .

$f^{-1}$  é função inversa de  $f: A \rightarrow B$ , é uma aplicação de B em A, e tem-se  $f^{-1}: B \rightarrow A$ .

Quando uma função  $f: A \rightarrow B$  é surjetora e biunívoca, admite função inversa, e  $f^{-1}$  é a função inversa de  $f$ .

**EXERCÍCIOS 1- Exercício -** Achar a fórmula que define a função inversa  $f^{-1}$  para:-

22

1.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  def. por  $f(x) = x^3 + 5$ ,  $\therefore f(x) = y$ .

2.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) = x^3 + 5$ ,  $\therefore y = x^3 + 5$ ,  $\therefore x^3 = y - 5$ .

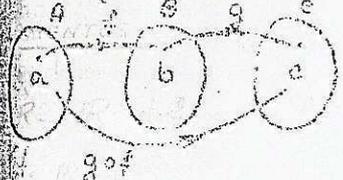
$\sqrt[3]{y-5}$   $\therefore x = f(y) = \sqrt[3]{y-5}$ .  $f(y) = \sqrt[3]{y-5}$   
 $f(x) = \sqrt[3]{x-5}$

Achar a fórmula que define a função inversa  $f^{-1}$  para:-

3.  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $f(x) = 2x - 3$ ,  $\therefore f(x) = y \quad \therefore y = 2x - 3$ ,  $\therefore x = \frac{y+3}{2}$   
 $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$

**8) Função Composta ou Função Produto.**

Sejam  $A, B, C$  conjuntos, e  $f: A \rightarrow B$  e  $g: B \rightarrow C$ .

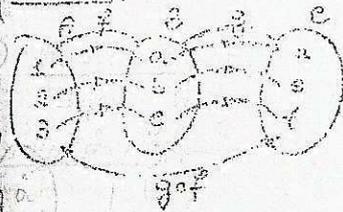


- Para todo  $a \in A$ , corresponde pela  $f$ , um único  $b \in B$ ,  $b = f(a)$ , e a este  $b \in B$ , corresponde pela  $g$  um único  $c \in C$ ,  $c = g(b) = g(f(a))$ .

Portanto, a todo  $a \in A$  corresponde um único  $c \in C$  por intermédio de  $B$ , definindo uma nova função de  $A$  em  $C$ , chamada função composta ou função produto,  $A \rightarrow C$ ,  $c = g(f(a))$ .

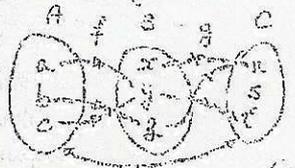
notação:  $g \circ f \rightarrow$  lê-se "g círculo f", ou  $f$  é composta com  $g$ .  $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ .

Exemplo:



$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(a) = a$ ,  
 $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(b) = b$ ,  
 $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(c) = c$ .

Ex: Sejam:



Determinar:  $f(a) = x$ ,  $g(x) = r$ ,  
 $f(b) = y$ ,  $g(y) = s$ ,  
 $f(c) = z$ ,  $g(z) = r$ .

$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(x) = r$ ,  
 $(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(y) = s$ ,  
 $(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(z) = r$ .

Prova:

Fundamentos: dia 02.10.70.

Exercício: 02.10.

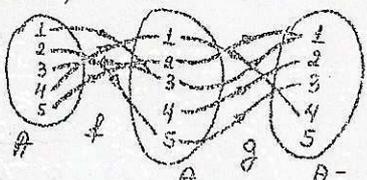
Matemática

Exercício 1

(23)

Seja  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  e sejam as funções  $f: A \rightarrow A$  e  $g: A \rightarrow A$ ,  
 def. por  $f(1)=3; f(2)=5; f(3)=3; f(4)=1$  e  $f(5)=2$ ,  
 $g(1)=4; g(2)=1; g(3)=1; g(4)=2$  e  $g(5)=3$ .  
 Achar as funções compostas  $g \circ f$  ( $f$  composta com  $g$ ).

- $(g \circ f)(1) \because g = f(1) \therefore f(1) = 3 \therefore g = f(1) \therefore g(3) = 1$ .
- $(g \circ f)(2) \because g = f(2) \therefore f(2) = 5 \therefore g(f(2)) \therefore g(5) = 3$ .
- $(g \circ f)(3) \because g = f(3) \therefore f(3) = 3 \therefore g(f(3)) \therefore g(3) = 1$ .
- $(g \circ f)(4) \because g = f(4) \therefore f(4) = 1 \therefore g(f(4)) \therefore g(1) = 4$ .
- $(g \circ f)(5) \because g = f(5) \therefore f(5) = 2 \therefore g(f(5)) \therefore g(2) = 1$ .



$g \circ f: A \rightarrow A$

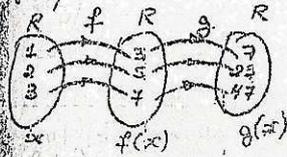
Achar as funções compostas  $f \circ g$ . Mesmas cond. do exc. anterior.  
 $(f \circ g)(1) = f(g(1)) = f(4) = 1$  ;  $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(1) = 3$ ,  
 $(f \circ g)(3) = f(g(3)) = f(1) = 3$  ;  $(f \circ g)(4) = f(g(4)) = f(2) = 5$ ,  
 $(f \circ g)(5) = f(g(5)) = f(3) = 3$ .  
 Obs:  $f \circ g \neq g \circ f$  (não comutativa)

Sejam as funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definidas por  $f(x) = 2x + 1$  e  $g(x) = x^2 - 2$ .

Achar as fórmulas que definem as funções  $g \circ f$  e  $f \circ g$ .

- $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  : considerando  $\mathbb{R} = \{1, 2, 3\}$  :-
- $x=1 \therefore f(x) = 2x+1 \therefore f(1) = 2(1)+1 \therefore f(1) = 3 \rightarrow f(x) = 3$ .
- $x=2 \therefore " \therefore f(2) = 2(2)+1 \therefore f(2) = 5 \rightarrow f(x) = 5$ .
- $x=3 \therefore " \therefore f(3) = 2(3)+1 \therefore f(3) = 7 \rightarrow f(x) = 7$ .

- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \therefore f(x) = 3 \therefore g(3) \therefore g(x) = x^2 - 2 \therefore g(3) = 3^2 - 2 = 9 - 2 = 7$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \therefore f(x) = 5 \therefore g(5) \therefore g(x) = x^2 - 2 \therefore g(5) = 5^2 - 2 = 25 - 2 = 23$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) \therefore f(x) = 7 \therefore g(7) \therefore g(x) = x^2 - 2 \therefore g(7) = 7^2 - 2 = 49 - 2 = 47$



$f(x) = 2x + 1$   
 $g(x) = x^2 - 2$

$g \circ f: A \rightarrow C : (g \circ f)(x) = g(f(x))$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \therefore f(x) = 2x + 1 \therefore = g(2x + 1)$

$g(2x + 1) = (2x + 1)^2 - 2$

$g(2x + 1) = 4x^2 + 4x - 1$

$(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x - 1$

função  $f \circ g$  : temos  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ , porém  $g(x) = x^2 - 2$  ;  
 $f(x^2 - 2) = 2(x^2 - 2) + 1 = 2x^2 - 4 + 1 = 2x^2 - 3$ .

$(f \circ g)(x) = 2x^2 - 3$  - fórmula que define

fórmula que define

UNDAAMENTOS:- Sejam as funções  $f$  e  $g$ , ambas definidas! -- (24)

$f(x) = x^2 + 2x - 3$ , - Achar as fórmulas que definem as funções compostas  
 $g(x) = 3x - 4$ ,  $g \circ f$  e  $f \circ g$ .

1.  $g \circ f$  :-  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  :- Temos  $f(x) = x^2 + 2x - 3$  :-

$$(g \circ f)(x) = g(x^2 + 2x - 3)$$

Fórmula que define a função composta  $g \circ f$ .

$g(x) = 3x - 4$  :-  $g(x^2 + 2x - 3) = 3x - 4$  :-

$g(x^2 + 2x - 3) = 3(x^2 + 2x - 3) - 4$  :-  $3x^2 + 6x - 9 - 4$  :-  $(g \circ f)(x) = 3x^2 + 6x - 13$

2.  $f \circ g$  :-  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  :-  $(f \circ g)(x) = f(3x - 4)$ . Temos  $f(x) = x^2 + 2x - 3$  :-

$(f \circ g)(x) = f(3x - 4) = x^2 + 2x - 3$  :-

$f(3x - 4) = (3x - 4)^2 + 2(3x - 4) - 3$  :-  $f(3x - 4) = 9x^2 - 24x + 16 + 6x - 8 - 3$  :-

$f(3x - 4) = 9x^2 - 18x + 5$ . Sabendo-se que  $(f \circ g)(x) = f(3x - 4)$  e

$(3x - 4) = 9x^2 - 18x + 5$ , então  $\rightarrow (f \circ g)(x) = 9x^2 - 18x + 5$ , fórmula que define a

Exerc:- Sejam as funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de funções por  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  e  $g(x) = 2x - 3$ .

Sabemos que :-  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$  e  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$  :-

$f(2x - 3) = (2x - 3)^2 + 3(2x - 3) + 1$  :-  $f(2x - 3) = x^2 + 3x + 1$  :-

$(f \circ g)(x) = 4x^2 - 6x + 1$   $\rightarrow$  fórmula que define a função composta  $f \circ g$ .

$(g \circ f)(x) = g(f(x))$  :-

$f(x) = x^2 + 3x + 1$  :-  $g(x^2 + 3x + 1) = 2x - 3$  :-

$g(x^2 + 3x + 1) = 2(x^2 + 3x + 1) - 3$  :-  $2x^2 + 6x + 2 - 3$  :-  $2x^2 + 6x - 1$  :-

$(g \circ f)(x) = 2x^2 + 6x - 1$   $\rightarrow$  fórmula que define a função composta  $g \circ f$ .

Exerc:- Sejam as funções  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de funções por  $f(x) = x^2 + 3x + 1$  e  $g(x) = 2x - 3$ .  
 Achar as fórmulas que definem as funções compostas

1.  $(g \circ g)(x)$  ; 2.  $(f \circ f)(x)$  ; 3.  $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ .

$g(2x - 3) = 2x - 3$  :-  $g(2x - 3) = 2(2x - 3) - 3$  :-  $g(2x - 3) = 4x - 6 - 3$  :-

$g(g(x)) = 4x - 9$  :-  $(g \circ g)(x) = 4x - 9$  :-

fórmula que define a função

fundamentos

Produto Cartesiano

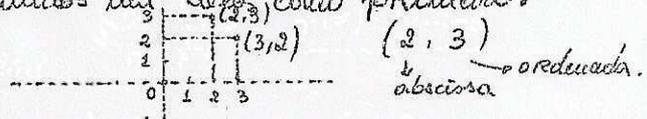
21.08.70  
4

25

PAR :- é o conjunto de dois elementos distintos.  
 $\{a, b\}$        $\{b, a\}$

PAR ORDENADO :- é o conjunto de dois elementos A e B, no qual consideramos um deles, como primeiro.

Notação :-  $(a, b)$     Ex: -  
 $(a, b) \neq (b, a)$



$(a, b) = (c, d)$  se, e somente se,  $a = c$  e  $b = d$ .

PRODUTO CARTESIANO :- Sejam A e B, não vazios.  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{2, 3, 4\}$   
Prod. Cartesiano de A por B é o conjunto de todos os pares ordenados em que o 1.º elemento pertence a A e o 2.º elemento pertence a B.

Notação -  $A \times B$  (produto cartesiano de A por B, ou A vezes B, produto de A por B, etc...)

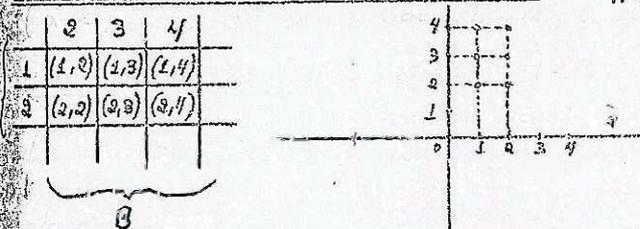
$$A \times B = \{(1,2)(1,3)(1,4)(2,2)(2,3)(2,4)\}$$

Simbolicamente :-  $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$

nº de elementos de A  $\rightarrow n(A) = 2$ .  $\rightarrow n(A \times B) = 6$ .  
" " " " B  $\rightarrow n(B) = 3$ .  
 $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$ .

GRÁFICO OU DIAGRAMA EM REDE

$$A = \{1, 2\}, B = \{2, 3, 4\}$$



Exemplos de Prod. Cart. = ②  $A = \{2, 3, 4\}$ ;  $B = \{1, 2\}$   
 $A \times B = \{(2,1)(2,2)(3,1)(3,2)(4,1)(4,2)\}$ .

③  $A \times B \neq B \times A$ . seja  $A = \{a, b\}$  e  $B = \{1, 2\}$   
 $A \times B = \{(a,1)(a,2)(b,1)(b,2)\}$   
 $B \times A = \{(1,a)(1,b)(2,a)(2,b)\}$

④  $A \times A$ . seja  $A = \{1, 2\}$   $\therefore A \times A = A^2 \therefore A \times A = \{(1,1)(1,2)(2,1)(2,2)\}$   
 $n(A) = 2 \therefore n(A \times A) = 4 \therefore n(A \times A) = (n(A))^2$

⑤  $A \times \emptyset = \emptyset$   $\therefore n(A) = 2$ ;  $n(\emptyset) = 0 \therefore n(A \times \emptyset) = 0$ .

Fundamentos:-

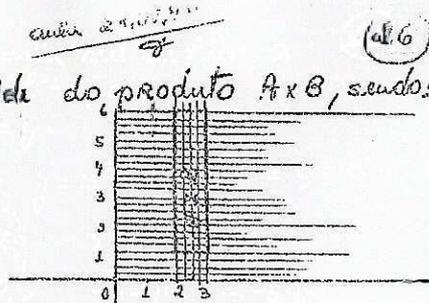
- Construir o diagrama em rede do produto  $A \times B$ , sendo:-

$A = \{x / 2 \leq x \leq 3\}$  2 ----- 3

$B = \{y / 1 \leq y \leq 6\}$  1 ----- 6

$A \times B = \{(x,y) / 2 \leq x \leq 3 \text{ e } 1 \leq y \leq 6\}$

obs:- Interseção da faixa A com B.



- Esboçar no diagrama em rede  $R \times R$  - sombreado no área apropriada o conj. produto.

$\{x / 1 \leq x \leq 4\} \times \{x / -2 \leq x \leq 3\}$

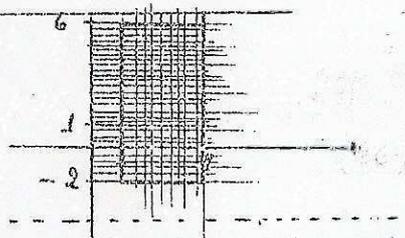
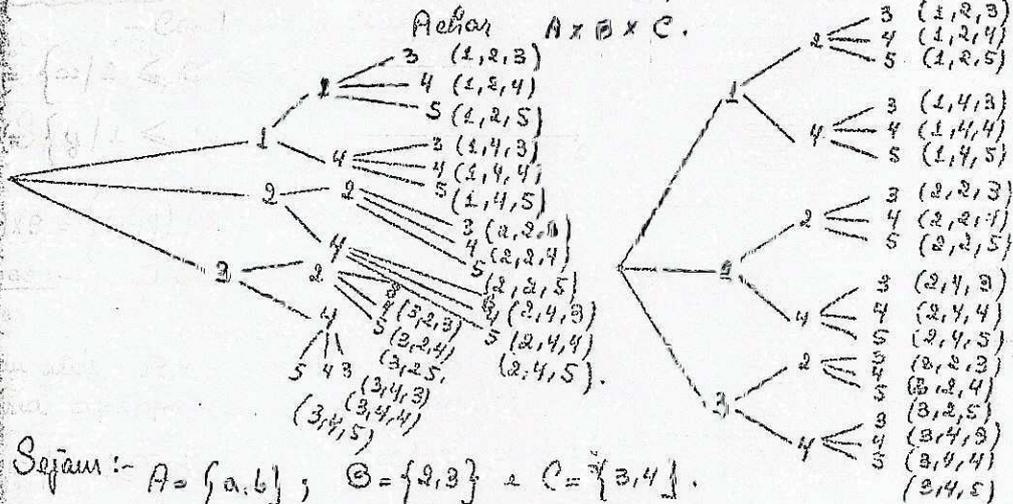


Diagrama em árvore :- Seja  $A = \{1, 2, 3\}$ ;  $B = \{2, 4\}$ ;  $C = \{3, 4, 5\}$ .



Sejam:-  $A = \{a, b\}$ ;  $B = \{2, 3\}$  e  $C = \{3, 4\}$ .

- Achar:- (1)  $A \times (B \cup C)$  (2)  $A \times (B \cap C)$   
 (3)  $(A \times B) \cup (A \times C)$  (4)  $(A \times B) \cap (A \times C)$ .

(1) -  $A \times (B \cup C) \therefore \{a, b\} \times \{2, 3, 4\} \rightarrow \{(a, 2)(a, 3)(a, 4)(b, 2)(b, 3)(b, 4)\}$ .

(2) -  $(A \times B) \cup (A \times C) \therefore \{(a, 2)(a, 3)(b, 2)(b, 3)\} \cup \{(a, 3)(a, 4)(b, 3)(b, 4)\}$   
 $\{(a, 2)(a, 3)(a, 4)(b, 2)(b, 3)(b, 4)\}$ .

(3) -  $A \times (B \cap C) \therefore \{a, b\} \times \{3\} \therefore (A \times B) \cap (A \times C) \therefore \{(a, 3)(b, 3)\}$ .

(4)  $(A \times B) \cap (A \times C) \therefore \{(a, 3)(b, 3)\}$ .

$\therefore A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$  e  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ .

(1) = (2)      (3) = (4)

Sejam:-

Fundamentos:- PROPRIEDADES DO PRODUTO CARTESIANO

(17)  
31.08.20  
9/

①  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Propriedade distributiva de  $\times$  em relação à interseção.

Parte a - demonstr.  $\forall (a,b) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow a \in A \wedge b \in (B \cap C) \Rightarrow$

$$a \in A \wedge \begin{cases} b \in B \\ b \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in A \wedge b \in B \\ a \in A \wedge b \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a,b) \in (A \times B) \\ (a,b) \in (A \times C) \end{cases} \Rightarrow$$

$$(a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C) \quad \therefore \boxed{A \times (B \cap C) \subset (A \times B) \cap (A \times C)}$$

Parte b -  $\forall (a,b) \in (A \times B) \cap (A \times C) \Rightarrow \begin{cases} (a,b) \in (A \times B) \\ (a,b) \in (A \times C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in A \wedge b \in B \\ a \in A \wedge b \in C \end{cases}$

$$\begin{cases} a \in A \wedge b \in B \\ a \in A \wedge b \in C \end{cases} \Rightarrow a \in A \wedge \begin{cases} b \in B \\ b \in C \end{cases} \Rightarrow a \in A \wedge b \in (B \cap C) \Rightarrow$$

$$(a,b) \in A \times (B \cap C) \Rightarrow$$

$$\boxed{(A \times B) \cap (A \times C) \subset A \times (B \cap C)} \rightarrow \text{pela definição de igualdade}$$

$$\underline{A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)}$$

② 2ª propriedade:-  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

parte a:-  $\forall (a,b) \in A \times (B \cup C) \Rightarrow a \in A \wedge b \in (B \cup C) \Rightarrow$

$$a \in A \wedge \begin{cases} b \in B \\ \text{ou} \\ b \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \in A \wedge b \in B \\ \text{ou} \\ a \in A \wedge b \in C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a,b) \in (A \times B) \\ \text{ou} \\ (a,b) \in (A \times C) \end{cases} \Rightarrow (a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$\underline{A \times (B \cup C) \subset (A \times B) \cup (A \times C)}$$

parte b:-  $\forall (a,b) \in (A \times B) \cup (A \times C) \Rightarrow \begin{cases} (a,b) \in (A \times B) \\ \text{ou} \\ (a,b) \in (A \times C) \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} a \in A \wedge b \in B \\ \text{ou} \\ a \in A \wedge b \in C \end{cases} \Rightarrow a \in A \wedge \begin{cases} b \in B \\ \text{ou} \\ b \in C \end{cases} \Rightarrow a \in A \wedge b \in (B \cup C) \Rightarrow$$

$$(a,b) \in A \times (B \cup C) \quad \therefore \underline{(A \times B) \cup (A \times C) \subset A \times (B \cup C)}$$

$$\underline{A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)}$$

③ 3ª propriedade:- propriedade da inclusão.

$$A = \{a, b\}; B = \{1, 2\} \rightarrow A \subset C \text{ e } B \subset D.$$

$$C = \{a, b, c\}; D = \{1, 2, 3\} \quad A \times B = \{(a,1)(a,2)(b,1)(b,2)\}$$

$$\text{se } A \subset C \text{ e } B \subset D, \text{ então } C \times D = \{(a,1)(a,2)(a,3)(b,1)(b,2)(b,3)(c,1)(c,2)(c,3)\}$$

$$(A \times B) \subset (C \times D)$$

Fundamentos demonstração - 3ª prop.

(23)

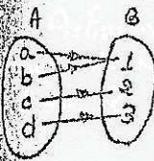
Se  $(a, b) \in (A \times B) \Rightarrow a \in A$  e  $b \in B \Rightarrow$

Como  $A \subset C$ , então  $a \in C$   
 "  $B \subset D$ , "  $b \in D \Rightarrow (a, b) \in (C \times D) \Rightarrow (A \times B) \subset (C \times D)$

11.09.70

GRÁFICO DE FUNÇÃO

Seja  $f: A \rightarrow B$  definida pelo diagrama.



$f(a) = 1$   
 $f(b) = 1$   
 $f(c) = 2$   
 $f(d) = 3$

$A = \{a, b, c, d\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$ .

$\rightarrow f^* = \{(a, 1), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}$  - gráfico da função  $f$ .

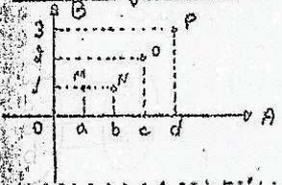
Definição:- Seja  $f: A \rightarrow B$ . Chama-se gráfico da função  $f$ , denotado por  $f^*$  ao conjunto de todos os pares ordenados, tal que  $a \in A$  figure como 1.º elemento e  $b = f(a)$  como segundo elemento.

Simbolicamente:-  $f: A \rightarrow B$   $f^* = \{(a, b) / a \in A \text{ e } b = f(a)\}$ .

$A \times B = \{(a, 1)(a, 2)(a, 3)(b, 1)(b, 2)(b, 3)(c, 1)(c, 2)(c, 3)(d, 1)(d, 2)(d, 3)\}$ .

$f^* = \{(a, 1)(b, 1)(c, 2)(d, 3)\}$ ;  $\rightarrow f^* \subset A \times B$ .

Seu diagrama:-



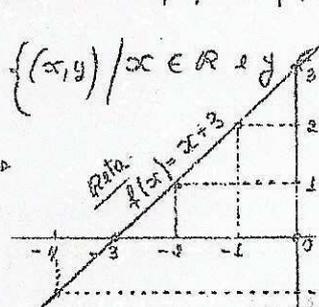
data de 11.09.70

Exercício:- Seja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  def. por  $f(x) = x + 3$ .

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \in \mathbb{R}$   $y \in \mathbb{R}$   $\therefore f^* = \{(x, y) / x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$ .

x	y
-4	-1
-3	0
-2	1
-1	2
0	3

$\rightarrow$  Seu diagrama  $\rightarrow$



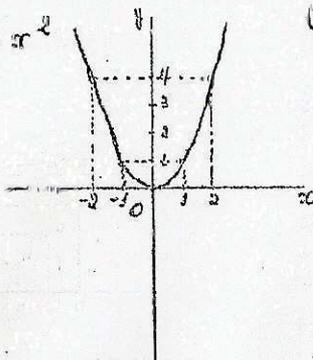
$f^* = \{ \dots (-4, -1) \dots (-3, 0) \dots (-2, 1) \dots (-1, 2) \dots \}$ .

Traçar o gráfico das funções:- ①  $f(x) = x^2$ ; ②  $f(x) = |x|$ ; ③  $f(x) = x - 2|x|$ ;

④  $f(x) = x^2 - 2x - 1$ , sendo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

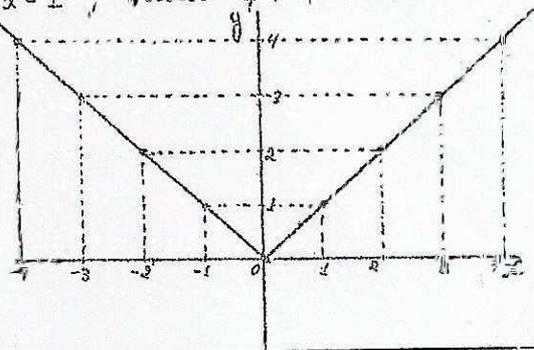
①  $f(x) = x^2$

x	y
-3	9
-1	1
0	0
1	1
2	4



②  $f(x) = |x|$

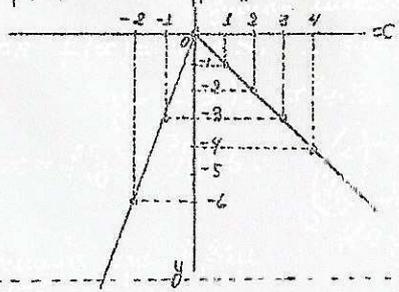
x	y
-4	4
-3	3
-2	2
-1	1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4



Matrizes -

③  $f(x) = x - 2 | x$

x	y
4	-4
3	-3
2	-2
1	-1
0	0
-1	-3
-2	-6



Aula do dia 15.02.90

Funções Transcendentes :-  
Toda função não algébrica e transcendente.

(a) Função exponencial :-

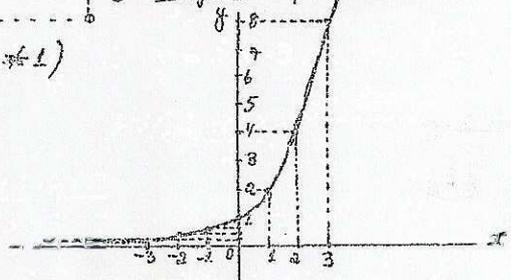
$f: R \rightarrow R \therefore f(x) = y = a^x \quad (a \neq 1)$

1º caso :-  $a > 1$

x	y = f(x)
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8

$y = a^x$   
 $y = 2^x \therefore a > 1$   
 $y = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

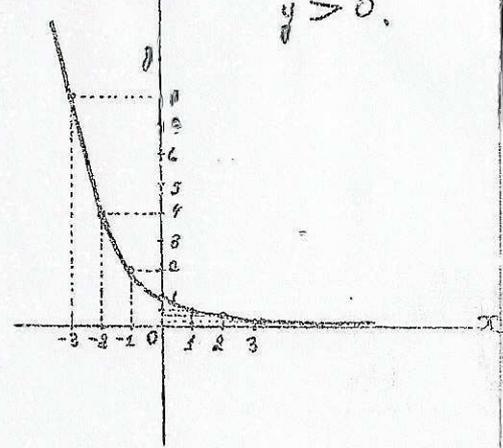
→ gráfico →



2º caso :-  $a < 1$

x	y
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

$y = (\frac{1}{2})^x$   
 $P/x = -3 \therefore y = (\frac{1}{2})^{-3} = y = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3}$   
 $y = \frac{1}{\frac{1}{8}} \therefore y = 8$   
 $P/x = -2 \therefore y = (\frac{1}{2})^{-2} \therefore y = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2}$   
 $y = 4$



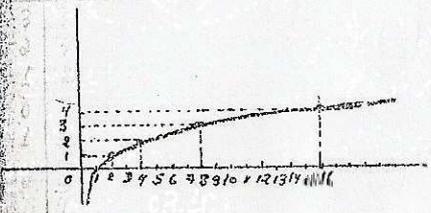
(b) Função logarítmica :- é toda função cujo domínio está situado entre 0 e +∞.

Representa-se :-  $f(x) = y = \log_a^x \quad \therefore \text{ex: } y = \log_2^x$

Tabela de correspondência :-

x	0	1	2	4	8	16	32	64	128	...
y	-∞	0	1	2	3	4	5	6	7	...

P.G., q = 2 (base) - Progressão geométrica  
 P.A., r = 1 (início de zero)



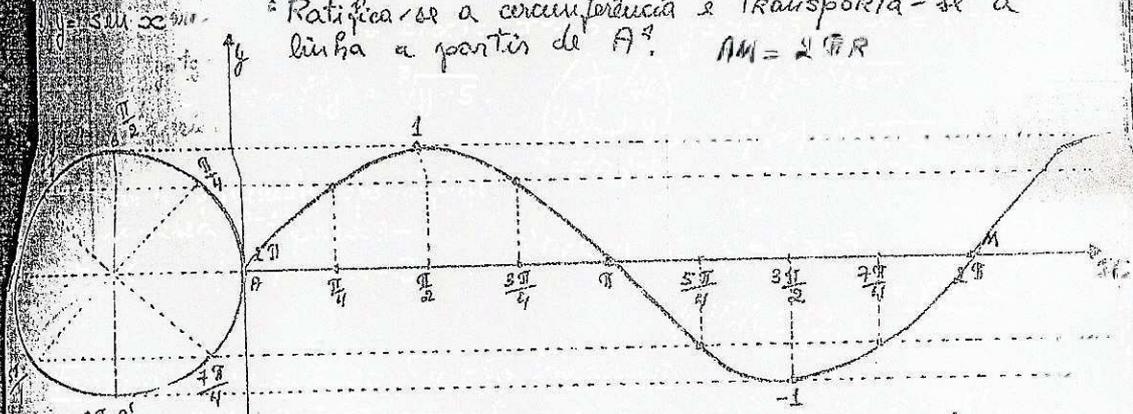
x	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	...
y	-∞	-4	-3	-2	-1	...

30

admitidos

3) Funções Circulares diretas.

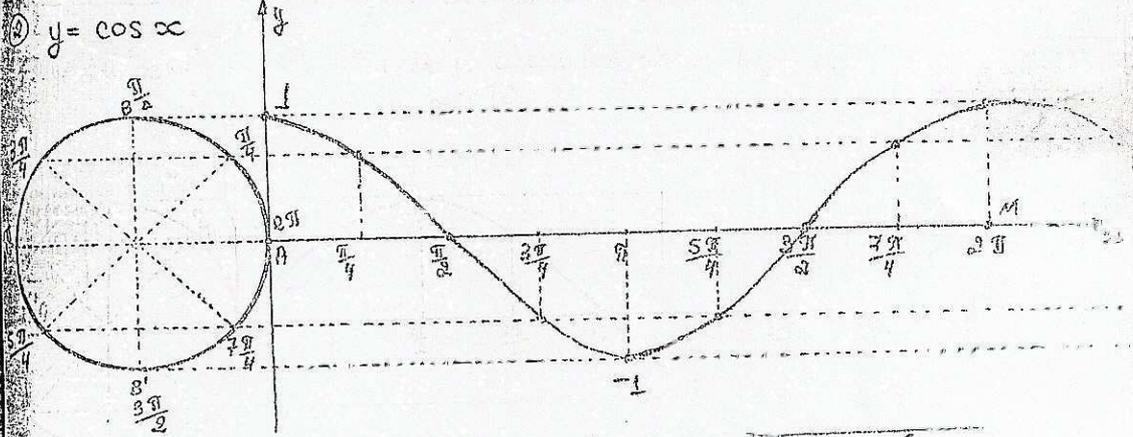
• Ratiifica-se a circunferência e transporta-se a linha a partir de A?  $AM = 2 \pi R$



• A curva representativa da função  $y = \text{sen } x$ , recebe o nome de SENÓIDE.

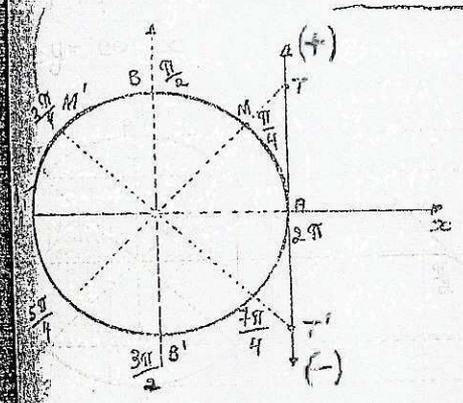
Função periódica, de período  $2\pi$

①  $y = \cos x$



CO-SENÓIDE

$\cos x$	1	0	-1	0	1	...
----------	---	---	----	---	---	-----



Tangente.

$\overline{AT}$  = tangente de  $\widehat{AB}$  (+)

$\overline{AT'}$  = tangente de  $\widehat{AM'}$  (-)

Tangente de  $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$  é igual ao raio do círculo; = 1.

Tangente de  $\frac{5\pi}{4} = 1$

Tangente de  $\frac{3\pi}{4}$  e  $\frac{7\pi}{4} = -1$ .

fundamentos!- ③ Gráfico da função!-

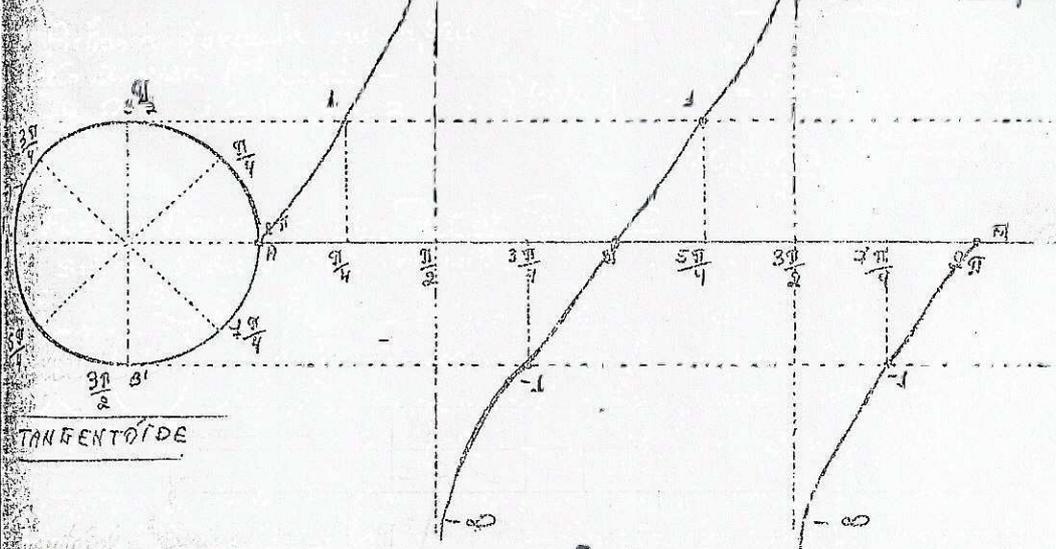
(31)

$y = \text{tg } x$

$\text{arco } x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	$2\pi$
$y = \text{tg } x$	0	1	$\pm \infty$	-1	0	1	$\pm \infty$	-1	0

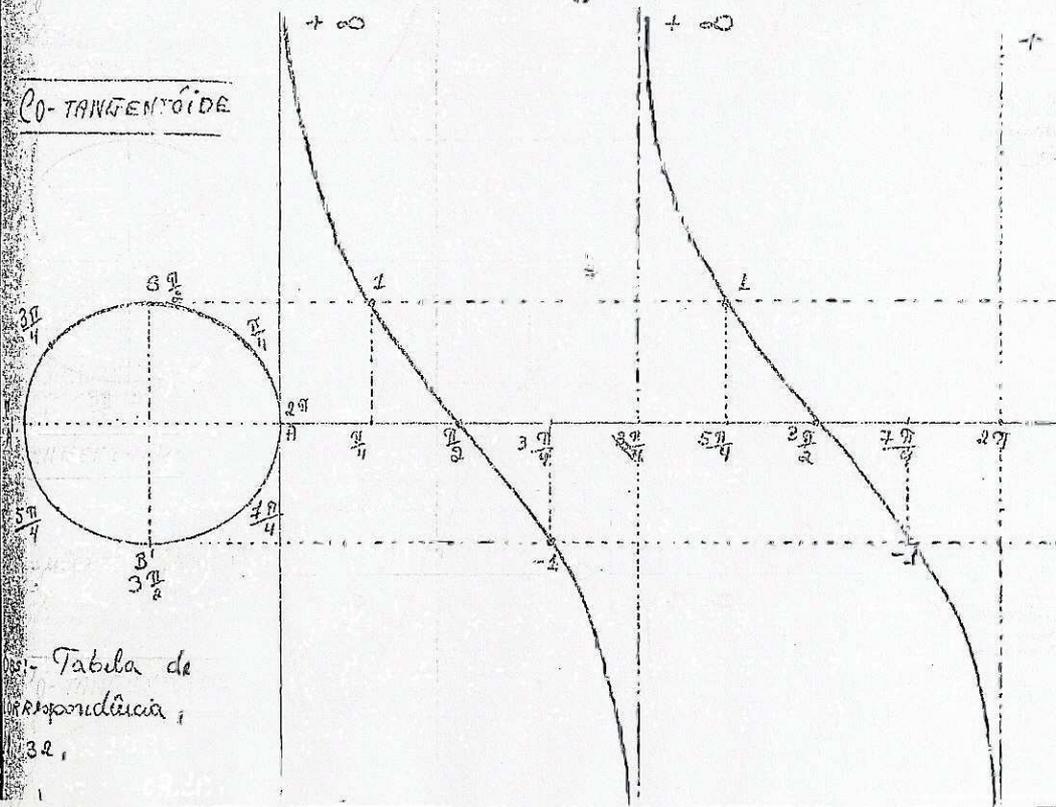
Tangente de  $\pi$  período igual a  $\pi^2$

$AM = 2\pi R \rightarrow$  circunferência satisfazida



TANGENTE

CO-TANGENTE



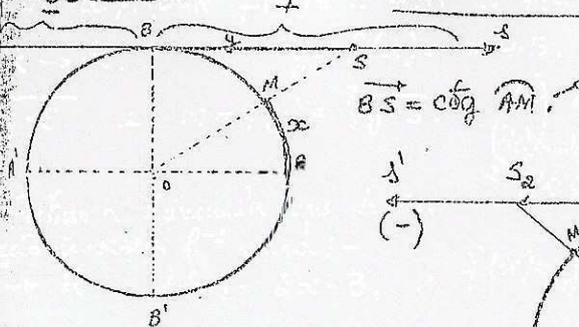
Tabula de correspondência, 32,

Fundamentos

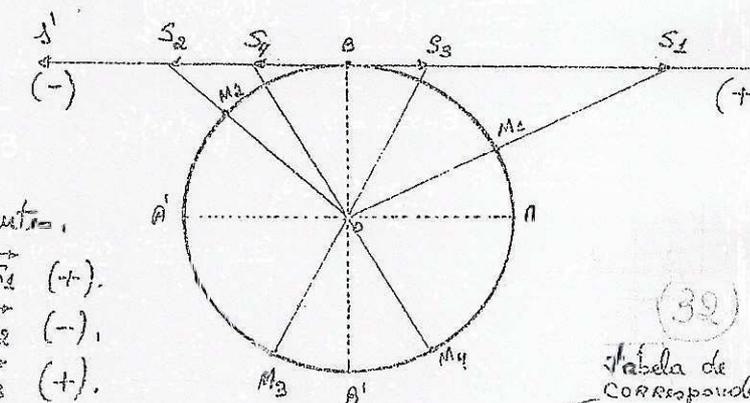
CO-TANGENTE

Ver. V. /  $\phi$

(32)



$$ctg \alpha = \frac{y}{x} \rightarrow y = ctg \alpha \cdot x$$



$s'$  = eixo das cotangentes,

1º quadrante,  $ctg \widehat{AM}_1 = \overrightarrow{BS}_1 (+)$ .

2º " "  $ctg \widehat{AM}_2 = \overrightarrow{BS}_2 (-)$ .

3º " "  $ctg \widehat{AM}_3 = \overrightarrow{BS}_3 (+)$ .

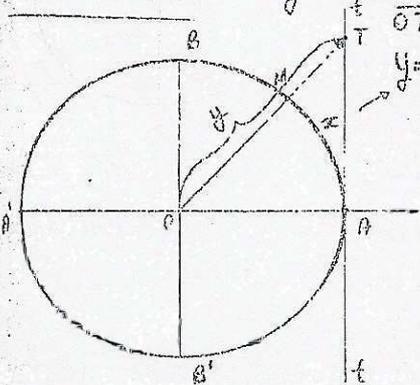
4º " "  $ctg \widehat{AM}_4 = \overrightarrow{BS}_4 (-)$

(32)

Tabela de correspondência

$\cos \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{2}$	$2\sqrt{3}$
$y = ctg \alpha$	$\pm \infty$	1	0	-1	$\mp \infty$	1	0	-1	$\mp \infty$

SECANTÓIDE



$$y = \sec \alpha$$

$$\overrightarrow{OT} = \sec \widehat{AM}$$

Considerando-se

o  $\Delta OAT$ , e aplicando o teorema de Pitágoras, vem:

$$y^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AT}^2$$

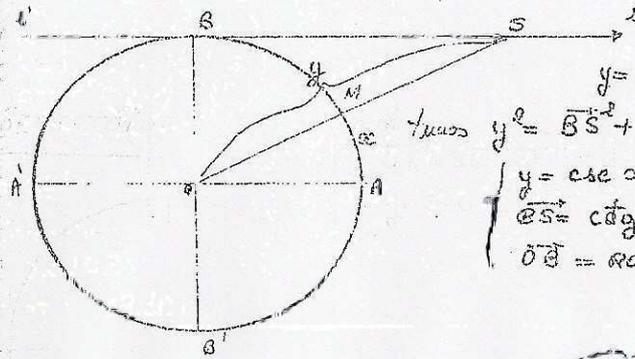
$$y = \sec \alpha$$

$$OA = \text{raio} = 1$$

$$AT = \text{tg } \alpha$$

$$\boxed{\sec^2 \alpha = 1 + \text{tg}^2 \alpha}$$

(32)



$$y = \csc \widehat{AM} \therefore y = \csc \alpha$$

$$y^2 = \overline{BS}^2 + \overline{OB}^2$$

$$y = \csc \alpha \therefore \csc^2 \alpha = \text{ctg}^2 \alpha + 1$$

$$\overline{BS} = \text{ctg } \alpha$$

$$\overline{OB} = \text{raio} = 1$$

$$\boxed{\csc^2 \alpha = 1 + \text{ctg}^2 \alpha}$$

2

Indicamentos

f.p. (33)

Sejam os conjuntos :-  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{2, 3, 4\}$   
 e seja o produto cartesiano de  $A \times B$   
 $A \times B = \{(1, 2)(1, 3)(1, 4)(2, 2)(2, 3)(2, 4)(3, 2)(3, 3)(3, 4)\}$ .

Consideremos  $x$  um elemento genérico que pertence a  $A$  e  
 um elemento genérico que pertence a  $B$ .  $x \in A$  e  $x \in B$ .  
 Do que conjunto produto, por observação, podemos estabelecer  
 as seguintes proposições :-

Exemplos :-  $(1, 2)(2, 3)$  estes pares satisfazem a "proposição" ou "sentença":  
 $x$  é menor que  $y$  ( $x < y$ ) (VERDADEIRA).

$(2, 2)(3, 3)$  satisfazem a proposição ou sentença  $\rightarrow x$  é igual a  $y$ .  
 $(x = y)$  VERDADEIRA.

$(1, 2)(2, 4)$  satisfazem a proposição ou sentença  $\rightarrow y$  é o dobro de  $x$ .  
 $(y = 2x)$  (VERDADEIRA).

$(1, 2)(2, 2)$  satisfazem a proposição ou sentença  $\rightarrow x$  é divisor de  $y$  -  
 $(x \mid y)$  (VERDADEIRA)

$(2, 3)(3, 4)$  satisfazem a proposição  $\rightarrow \text{m.c.d.}(x, y) = 1$  -  
 $(x \text{ D } y = 1)$  (VERDADEIRA)

- Representamos o conjunto destas proposições por  $\rightarrow p(x, y)$ .  
 A proposição pode ser verdadeira ou falsa.

Ex :-  $(3, 2)$  este par não satisfaz a proposição ou sentença ( $x < y$ )  
 $\rightarrow x$  é menor que  $y$  - (FALSA).

$(1, 4)(1, 3)$  não satisfaz a proposição ou sentença  $\rightarrow x$  é igual a  $y$   
 $(x = y)$  (FALSA).

- Também estas proposições representamos por  $\rightarrow p(x, y)$ .

Função proposicional ou sentença aberta.

Def:- chama-se função proposicional ou sentença aberta  
 em  $A \times B$ , uma expressão denotada por  $p(x, y)$  tal que  
 $p(a, b)$  é falsa ou verdadeira para todo o par ordenado  $(a, b) \in A \times B$

Assim :- Se o par  $(a, b) \in A \times B$  é tal que  $p(a, b)$  é  
 verdadeiro diz-se que  $(a, b)$  satisfaz  $p(x, y)$

Se  $(a, b) \in A \times B$  é tal que  $p(a, b)$  é falso, diz-se  
 que o par  $(a, b)$  não satisfaz  $p(x, y)$ .

26.10.70

$\alpha$

— / —

Fundamentos

Conjunto Verdade de uma função proposicional de duas variáveis. (Vp.)

(37)

- Chama-se conjunto verdade ou conjunto solução de uma função proposicional ou sentença aberta  $p(x, y)$  em  $A \times B$ , o conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b) \in A \times B$  que satisfazem  $p(x, y)$  tais que  $p(a, b)$  é uma proposição verdadeira.

ex:  $V_p = \{(1,2)(1,3)(1,4)(2,3)(2,4)(3,4)\}$   $p(x, y) \quad x < y$

Exemplos

(I) Sejam os conjuntos  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{2, 3, 4\}$   
função proposicional  $(x < y)$

o conjunto verdade terá que satisfazer a proposição  $(x < y)$   $x$  e  $y$  elementos de  $A \times B = \{(1,2)(1,3)(1,4)(2,2)(2,3)(2,4)(3,2)(3,3)(3,4)\}$ .

$V_p = \{(1,2)(1,3)(1,4)(2,3)(2,4)(3,4)\}$

(II) Idem p/ a função proposicional  $(x = y)$

$V_p = \{(2,2)(3,3)\}$

(III) Idem p/ func. prop.  $(y = 2x)$

$A \times B = \{(1,2)(1,3)(1,4)(2,2)(2,3)(2,4)(3,2)(3,3)(3,4)\}$

$V_p = \{(1,2)(2,4)\}$

(IV) Idem p/ func. prop. m.d.c.  $(x, y) = 1$

$V_p = \{(1,2)(1,3)(1,4)(2,3)(3,2)(3,4)\}$

(V) Idem func. prop.  $x \geq y$

$V_p = \{(2,2)(3,2)(3,3)\}$

(VI) o conj. verdade da func. prop. m.d.c.  $(x, y) = 2$ , considerando os conjuntos  $A = \{2, 3, 4\}$  e  $B = \{1, 2, 6\}$ .

- temos  $A \times B = \{(2,1)(2,2)(2,6)(3,1)(3,2)(3,6)(4,1)(4,2)(4,6)\}$ .

$V_p = \{(2,2)(2,6)(4,2)(4,6)\}$

(VII) Sejam os conj.  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{3, 4\}$ .

o  $V_p$  da função prop.  $x+1 < y$

$A \times B = \{(1,3)(2,4)(3,3)(3,4)\}$

$V_p = \{(1,3)(2,4)(3,4)\}$

Simbolicamente

$V_p = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B \text{ e } x+1 < y\}$

matemáticos

RELACIONES

30.10.08 (35)

- Sejam os conjuntos  $A$  e  $B$  e seja  $p(x,y)$  em  $A \times B$  uma sentença aberta tal que  $p(a,b)$  seja verdadeira ou falsa p/ todo o par ordenado  $(a,b) \in A \times B$ .

$$R = (A, B, p(x,y)).$$

Def: Chama-se relação  $R$  de  $A$  em  $B$  ao termo cujos elementos são os dois conjuntos  $A$  e  $B$  e uma sentença aberta (ou proposição)  $p(x,y)$  tal que  $p(a,b)$  é verdadeira ou falsa p/ todo par ordenado  $(a,b) \in A \times B$ .

Sejam os conj.  $A = \{1, 2, 3\}$  e  $B = \{2, 3, 4\}$ .

$$A \times B = \{(1,2) (1,3) (1,4) (2,2) (2,3) (2,4) (3,2) (3,3) (3,4)\}. \quad (35)$$

$$p(x,y) \longrightarrow x < y$$

$$p(1,2) \longrightarrow \text{verdadeira.}$$

$$p(3,2) \longrightarrow \text{falsa.}$$

$$R = (A, B, p(x,y)).$$

Se  $p(a,b)$   $p(1,2)$  for verdadeira então diremos que satisfaz a relação  $R$ . Representamos  $\rightarrow a R b$ , que se lê "a está na relação  $R$  com b", ou a e b estão na relação  $R$ . No caso  $p(1,2)$  verdadeira temos  $1 R 2$ .

Se  $p(a,b)$   $p(3,2)$  for falsa, diremos que não satisfaz a relação  $R$ .  $\rightarrow 3 \not R 2$ . Representa-se  $a \not R b$ , que se lê "a não está na relação  $R$  com b", ou a e b não estão na relação  $R$ .

- Seja  $R = (N, N, p(x,y))$ , onde  $N$  é o conjunto dos naturais e  $p(x,y)$  é a sentença aberta  $x$  divide  $y$ , ou simbolicamente  $(x|y)$ .

Verificar se os pares abaixo satisfazem ou não a relação  $R$ .  $(1,3) (2,4) (3,2) (5,7) (2,3) (2,6)$ .

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \quad (\text{naturais})$$

$$M = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \quad (\text{naturais})$$

1 R 3 em  $x|y$   
 2 R 4 em  $x|y$   
 2 R 6 "  $x|y$

3  $\not R$  7 em  $x|y$   
 5  $\not R$  7 em  $x|y$   
 2  $\not R$  3 em  $x|y$

di

Fundamentos

CONJUNTO SOLUÇÃO DE UMA RELAÇÃO

(56)

Seja  $R = (N, N, p(x, y))$  e  $x + y = 9$ .

Designamos o conjunto solução por  $S_1$ .

$$S_1 = \{(0, 9) (1, 8) (2, 7) (3, 6) (4, 5) (5, 4) (6, 3) (7, 2) (8, 1) (9, 0)\}.$$

$$N = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \dots\}.$$

Seja  $R = (N, N, p(x, y))$  e  $x = y + 1$ .

$$S_2 = \{(1, 0) (2, 1) (3, 2) (4, 3) (5, 4) (6, 5) (7, 6) (8, 7) (9, 8) \dots\}.$$

$S_2$  é infinito. São os pares cuja diferença é a unidade.

Seja  $R = (N, N, p(x, y))$  e  $\begin{cases} x + y = 9 \\ x = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + y + 1 = 9 \\ y = 4 \end{cases}$

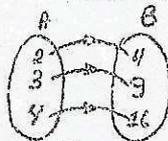
Solução (5, 4). (5, 4) interseção de  $S_1$  e  $S_2$ .

Seja  $R = (A, B, p(x, y))$ , onde  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{2, 3, 4\}$  e  $p(x, y)$  é a sentença aberta  $x < y$ .

$$S = \{(1, 2) (1, 3) (1, 4) (2, 3) (2, 4)\}.$$

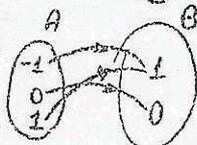
**Definição** :- Chama-se conjunto solução de uma relação  $R$  de  $A$  em  $B$ , o conjunto de todos os pares ordenados  $(a, b) \in A \times B$  que satisfazem  $R$ . (tais que  $p(a, b)$  é verdadeira).  
nota  $\rightarrow S \subset A \times B$ .

ex: -



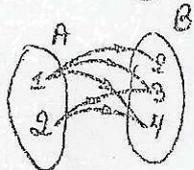
correspondência  
"um a um"

$$f: A \rightarrow B, y = x^2 \} \text{ FUNÇÃO}$$



correspondência  
"vários a um"

$$f: A \rightarrow B, y = x^2 \} \text{ FUNÇÃO}$$



"um a vários"

Relação

$$R \text{ de } A \text{ em } B, x < y \} \text{ RELAÇÃO}$$

Fundamentos

GRÁFICO DE UMA RELAÇÃO

(37)

Seja  $R = (A, B, \rho(x, y))$ , onde  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{2, 3, 4\}$  e  $\rho(x, y)$  é a sentença aberta  $x < y$ .

$S = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$ .

É o conjunto de pontos do diagrama cartesiano que pertencem a  $S$  de  $R$ .

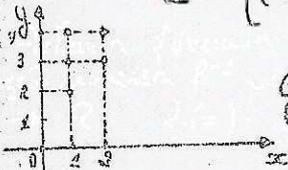
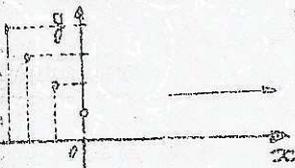


Gráfico  $R(A, B, \rho(x, y))$

Exemplos: - (I) Seja a relação  $R = (R, R, \rho(x, y))$  onde  $R$  é o conjunto dos inteiros e  $\rho(x, y)$  é a sentença aberta  $x + y = 1$ .

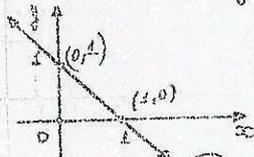
Determinar: - a) - conjunto soluções,  $\rightarrow S = \{ \dots (-3, 4), (-2, 3), (-1, 2), (0, 1), \dots \}$   
 b) - gráfico.



$\rightarrow$  (não é uma reta, não há frações no conjunto  $S$ )

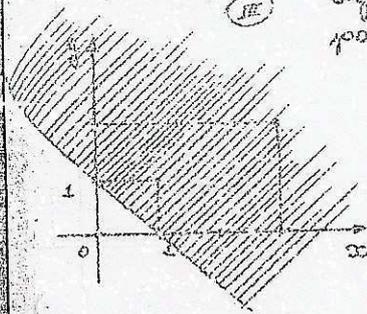
(II) Seja a relação  $R = (R^+, R^+, \rho(x, y))$ , onde  $R^+$  é o conjunto dos reais e  $\rho(x, y)$  é a sentença aberta  $x + y = 1$ .

Determinar o gráfico: -  $S = \{ \dots (0, 1), \dots (1, 0) \dots \}$



$(a, b) \in R \times R, x + y = 1$

Seja  $R$  a relação no conjunto dos reais definida por  $x + y > 1$ . Determinar o gráfico: -



$0 + 1 > 1 \rightarrow$  falsa.  $0 \notin 1$  (zero não está na relação  $R$  como)

$1 + 0 > 1 \rightarrow$  falsa.  $1 \notin 0$

$-1 - 2 > 1 \rightarrow$  - - -  $-1 \notin -2$ .

$1 - 4 > 1 \rightarrow$  - - -

$1 + 1 > 1$  verdadeira. Resp: o gráfico é o conj. de todos os p. do plano acima da reta, inclusive os p. da própria reta.

$3 + 2 > 1$  - - -

(III) Seja a relação  $R$  em  $N$  ( $N$  conjunto dos n's naturais) def. pela sentença aberta  $x + 3y = 12$ .

Determinar o conjunto  $S$ .

$S = \{(a, b) \in A \times B \text{ e } a R b\}$

$x + 3y = 12 \therefore \frac{x}{3} + y = 4$   
 $\frac{x}{3} = 4 - y \therefore y = 4 - \frac{x}{3}$

$S = \{(12, 0), (9, 1), (6, 2), (3, 3), (0, 4)\}$ .

Fundamentos

DOMÍNIO DE UMA RELAÇÃO

06.11.70

38

Indica-se  $\rightarrow D(R)$ . No conjunto  $S = \{(1,0)(9,1)(6,2)(3,3)(0,4)\}$

$D(R) = \{0, 3, 6, 9 \text{ e } 12\}$ . Def: É o conjunto formado pelos primeiros elementos de cada par, ou, por todos os primeiros elementos de cada par que satisfaz a relação.

CONTRA-DOMÍNIO DE UMA RELAÇÃO

Indica-se  $\rightarrow C(R)$ . No conj  $S = \{(1,0)(9,1)(6,2)(3,3)(0,4)\}$

$C(R) = \{0, 1, 2, 3 \text{ e } 4\}$ . Def: É o conjunto formado por todos os segundos elementos de cada par que satisfaz  $R$ .

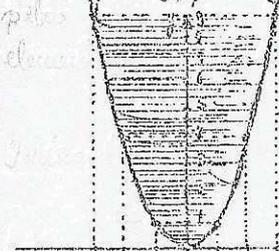
RELAÇÃO INVERSA

Indica-se  $\rightarrow R^{-1}$

$R^{-1} = \{(0,12)(1,9)(2,6)(3,3)(4,0)\}$ . Def: É o conjunto de todos os pares  $(b,a)$  tais que  $(a,b)$  satisfaz  $R$ .

EXERCÍCIOS - Seja a relação  $R$  no conjunto dos reais definida pela sentença aberta  $y \geq x^2$ .

$R = \{(x,y) / x,y \in \mathbb{R} \text{ e } y \geq x^2\}$ . Construa o gráfico.



$x^2 \leq y$        $x^2 \leq y$   
 $0 = 0$        $-1 = 1$   
 $1 = 1$        $-2 = 4$   
 $2 = 4$        $-3 = 9$   
 $3 = 9$

- Sejam as relações em  $R$  (conj. dos  $n^{\text{os}}$  reais)

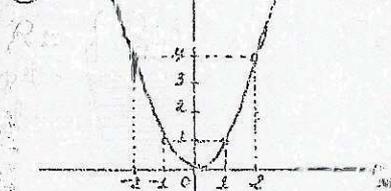
$R_1 = \{(x,y) / x,y \in \mathbb{R} \text{ e } y \geq x^2\}$

$R_2 = \{(x,y) / x,y \in \mathbb{R} \text{ e } y \leq x+2\}$

Construa:-

- a) O gráfico da relação  $R_1$
- b) " " " "  $R_2$
- c) " " de  $R_1 \cap R_2$ .

a)



x	y
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

- Seja o ponto de coordenada

$(1,4)$ . Temos:  $x=1$ ,  $y=4$ .

$y > x^2 \text{ e } 4 > 1^2 \text{ e}$

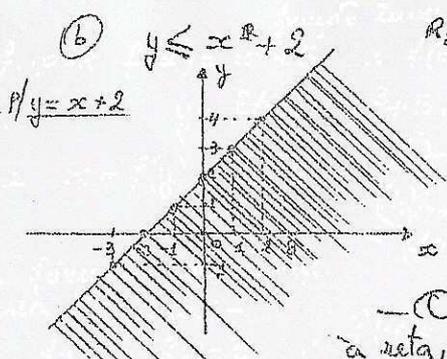
$4 > 1 \rightarrow$  verdadeira,

portanto  $(1,4) \in R$

$y > x^2 \rightarrow$  seja o ponto de coordenadas  $(3,2)$ . Temos:  $x=3$ ,  $y > 3 \rightarrow$  falsa

Fundamentos

x	y
-3	-1
-2	0
-1	1
0	2
1	3
2	4



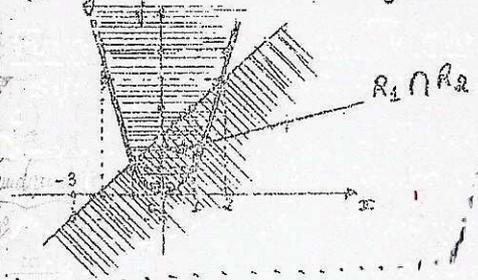
$R_2 = \{(x,y) / x,y \in \mathbb{R} \wedge y \leq x+2\}$  (39)

$P / y < x+2$  → testamos na origem isto é, coordenadas  $(0,0)$ .

$y < x+2$   
 $0 < 0+2 \wedge 0 < 2$  (verdadeira)

→ O gráfico será todo o plano inferior à reta, inclusive os pontos da própria reta.

→ O gráfico da interseção de  $R_1$  e  $R_2$  será: —



EXERCÍCIO PROPOSTO

— Sejam as relações em  $\mathbb{R}$  (conj. de n.ºs reais).

$R_1 = \{(x,y) / x,y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^2 \leq 25\}$

$R_2 = \{(x,y) / x,y \in \mathbb{R} \wedge y \geq \frac{4x^2}{9}\}$

Construir os gráficos de  $R_1$ ,  $R_2$  e  $R_1 \cap R_2$ .

— Construir os gráficos das relações: —

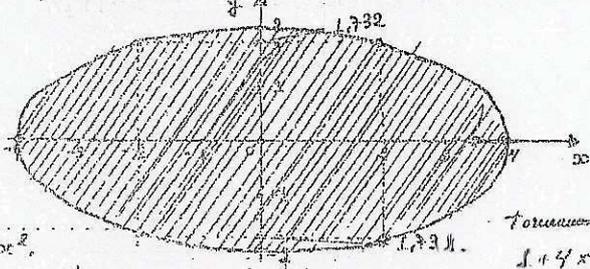
a)  $R_1 = \{(x,y) / x,y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + 4y^2 \leq 16\}$

b)  $R_2 = \{(x,y) / x,y \in \mathbb{R} \wedge x^2 - y^2 \geq 4\}$

c)  $R_3 = \{(x,y) / x,y \in \mathbb{R} \wedge y \geq \tan x\}$

②  $x^2 + 4y^2 = 16$ .  $4y^2 = 16 - x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{16 - x^2}{4} \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{16 - x^2}{4}}$

x	y
-4	0
-2	$\pm \sqrt{3} = \pm 1,732$
0	$\pm 2$
2	$\pm \sqrt{3} = \pm 1,732$
4	0

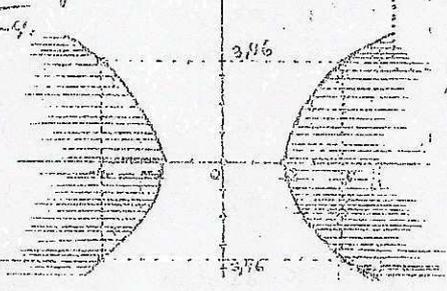


ELIPSE

$P / x^2 + 4y^2 \leq 16$ .  
 tomamos o ponto  $P(2,1)$   
 $1 + 4 \times 1^2 \leq 16$   
 $1 + 4 \leq 16 = 5 \leq 16$   
 $\perp R_1 \rightarrow$  verdadeira

③  $x^2 - y^2 = 4 \wedge -y^2 = 4 - x^2$   
 $y = \pm \sqrt{x^2 - 4}$

x	y
-4	$\pm 3,46$
-2	0
2	0
4	$\pm 3,46$



$P / x^2 - y^2 \geq 4$  tomamos por exemplo  $(-4,1)$ .  
 $16 - 1 \geq 4 \rightarrow -4 R_1 \rightarrow$  verdadeira  
 $(1,1) \rightarrow 1 - 1 \geq 4 \rightarrow$  falsa.

13,1170

40

Fundamentos

TIPOS DE RELAÇÕES

Seja  $R$  uma relação em  $N$  (naturais) definida pela sentença aberta " $x$  divide  $y$ "  $\rightarrow (x|y)$  nota:  $x|y$  lê-se " $x$  divide  $y$ ".

$$R = \{(x,y) / x,y \in N \text{ e } x|y\}$$

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \rightarrow N \times N = \{(1,1)(1,2)(1,3)(1,4)(1,5) \dots (2,1)(2,2)(2,3)(2,4)(2,5) \dots (3,1)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5) \dots\}$

$R = \{(1,1)(1,2)(1,3) \dots (2,2)(2,4)(2,6) \dots (3,3)(3,6)(3,9) \dots\}$

$1 \in N \quad 2 \in N \quad 3 \in N \quad \hat{E}$  este tipo de relação chama-se RELAÇÃO REFLEXIVA

Def: Uma relação  $R$  em  $A$  diz-se reflexiva se, e somente se, para todo  $a \in A$  tem-se  $(a,a) \in R$ .

Exemplo: A relação  $R$  em  $N$  (naturais) definida pela sentença aberta " $(x|y)$   $x$  divide  $y$ " é reflexiva porque para todo natural tem-se os pares  $(1,1)(2,2)(3,3)(4,4) \dots$  que pertencem a  $R$ , isto é,  $1 R 1; 2 R 2; 3 R 3; 4 R 4$ .

Quando todo elemento de um conjunto estiver relacionado consigo mesmo pela relação  $R$ , a relação é reflexiva.

Contra-exemplo: Seja  $R$  uma relação em  $N$  definida pela sentença aberta " $x < y$ ".

$$R = \{(x,y) / x,y \in N \text{ e } x < y\}$$

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \rightarrow N \times N = \{(1,1)(1,2)(1,3) \dots (2,1)(2,2)(2,3) \dots (3,1)(3,2)(3,3) \dots\}$

$R = \{(1,2)(1,3) \dots (2,3)(2,4) \dots (3,4)(3,5) \dots\}$

$1 \in N \quad (1,1) \notin R$   
 $2 \in N \quad (2,2) \notin R$   
 $3 \in N \quad (3,3) \notin R$  não é reflexiva

Exemplo: Seja  $R$  uma relação em  $N$  definida pela sentença aberta " $x+y=5$ ".

$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\} \rightarrow R = \{(x,y) / x,y \in N \text{ e } x+y=5\}$

$R = \{(1,4)(2,3)(3,2)(4,1)\}$  a relação é simétrica

2) RELAÇÃO SIMÉTRICA — Uma relação  $R$  em  $A$  diz-se simétrica se, e somente se  $(a,b) \in R$  então  $(b,a) \in R$

Exemplo: Seja  $R$  uma relação em  $N$  definida pela sentença aberta " $x$  divide  $y$ " ( $x|y$ )

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \rightarrow R = \{(x,y) / x,y \in N \text{ e } x|y\}$

Fundamentos - temos  $R = \{(1,1)(2,2)(1,3)(1,4) \dots (2,2)(2,4)(2,6) \dots (3,3)(3,6) \dots\}$  (41)

$(1,2) \in R \rightarrow (2,1) \notin R$        $(2,4) \in R \rightarrow (4,2) \notin R$ .  
 A relação não é simétrica.

3) RELAÇÃO ANTI-SIMÉTRICA - Seja  $R$  uma relação em  $N$  definida pela sentença aberta  $x \mid y$  (divisão exata)

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\} \rightarrow N \times N = \{(1,1)(1,2)(1,3) \dots (2,1)(2,2)(2,3) \dots (3,1)(3,2)(3,3) \dots (4,1)(4,2) \dots\}$   
 $R = \{(x,y) / x \mid y \in N \wedge x \mid y\} \rightarrow R = \{(1,1)(1,2)(1,3) \dots (2,2)(2,4) \dots (3,3)(3,6) \dots\}$ .

$x \mid R 1 \wedge 1 \mid R x \Rightarrow x = 1$ ;  $1 \mid R x \wedge x \mid R 1 \Rightarrow x = 1 \neq 2$ .  
 $a \mid R b \wedge b \mid R a \Rightarrow a = b$ ;  $a \mid R b \wedge b \nmid R a \Rightarrow a \neq b$ .

- A relação é anti-simétrica -

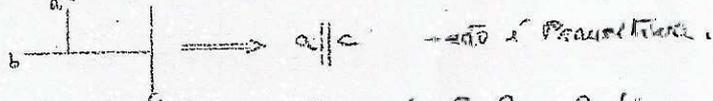
Def: Uma relação  $R$  em  $A$  diz-se anti-simétrica se e somente se  $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$ , ou se  $a \neq b$ , os pares  $(a,b)$  e  $(b,a)$  não devem satisfazer simultaneamente a relação.

4) RELAÇÃO TRANSITIVA - Seja  $R$  uma relação em  $A$  definida pela sentença aberta  $x < y$ .

$R = \{(1,2)(2,3) \dots (2,3)(2,4) \dots\}$        $a \mid R b \wedge b \mid R c \Rightarrow a \mid R c$ .  
 $a \mid R b \wedge b \mid R c \Rightarrow a \mid R c$ .  
 $b \mid R c \wedge c \mid R d \Rightarrow b \mid R d$ .

Def: Uma relação  $R$  em  $A$  diz-se transitiva se, e somente se  $(a,b) \in R$  e  $(b,c) \in R$  então  $(a,c) \in R$ .

contra-exemplo :- seja  $a \perp b$  e  $b \perp c \Rightarrow a \parallel c$ .



Exemplo

5) RELAÇÃO DE EQUIVALÊNCIA - Uma relação  $R$  em  $A$  diz-se de equivalência se, e somente se for simultaneamente:

- a) Reflexiva  $\rightarrow$  Se  $a \in A \Rightarrow (a,a) \in R$ .
- b) Simétrica  $\rightarrow$  Se  $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$ .
- c) Transitiva  $\rightarrow$  Se  $(a,b) \in R$  e  $(b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$ .

Exemplo - Seja  $T$  o conjunto de todas as retas do plano Euclidico e seja  $R$  uma relação em  $T$ , definida pela sentença  $x \parallel y$  e  $x$  é paralela a  $y$ . ( $x \parallel y$ )

$R = \{(x,y) / x,y \in T \wedge x \parallel y\}$

- 1) Reflexiva  $\rightarrow a \parallel a$ . - Toda reta é paralela a si mesma.
- 2) Simétrica  $\rightarrow a \parallel b$  então  $b \parallel a$ .
- 3) Transitiva  $\rightarrow a \parallel b$  e  $b \parallel c$  então  $a \parallel c$ .