

PUCPR – Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PPGEPS – Programa de Pós Graduação em Engenharia de
Produção e Sistemas



CRISTIANE GARBIN LANGNER

SÍNTESE DE CONTROLADORES \mathcal{H}_2 E \mathcal{H}_∞
PARA SISTEMAS SUJEITOS A INCERTEZAS
E/OU RESTRIÇÕES NO DOMÍNIO DO TEMPO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas da Pontifícia Universidade Católica do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção e Sistemas.

CURITIBA

2004

CRISTIANE GARBIN LANGNER

**SÍNTESE DE CONTROLADORES \mathcal{H}_2 E \mathcal{H}_∞
PARA SISTEMAS SUJEITOS A INCERTEZAS
E/OU RESTRIÇÕES NO DOMÍNIO DO TEMPO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas da Pontifícia Universidade Católica do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção e Sistemas.

Área de Concentração: Automação e Controle de Processos

Orientador: Prof. Dr. Humberto Xavier de Araújo

CURITIBA

2004

Langner, Cristiane Garbin
L284s Síntese de controladores H_2 e H_∞ para sistemas sujeitos a incertezas
2004 e/ou restrições no domínio do tempo / Cristiane Garbin Langner ;
orientador, Humberto Xavier de Araújo. -- 2004.
 xxiii, 173 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) -- Pontifícia Universidade Católica do Paraná,
Curitiba, 2004
Inclui bibliografia

1. Sistemas lineares. 2. Sistemas lineares de controle. 3. Controle H_2 .
4. Controle H [Símbolo infinito]. I. Araújo, Humberto Xavier de.
II. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Programa de Pós-Graduação
em Engenharia de Produção e Sistemas. III. Título.

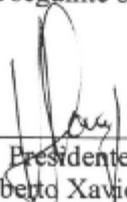
CDD 21. ed. – 629.832

TERMO DE APROVAÇÃO

CRISTIANE GARBIN LANGNER

SÍNTESE DE CONTROLADORES ROBUSTOS H_2 E H_∞ PARA SISTEMAS SUJEITOS A INCERTEZAS E/OU RESTRIÇÕES NO DOMÍNIO DO TEMPO

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas, do Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, pela seguinte banca examinadora:



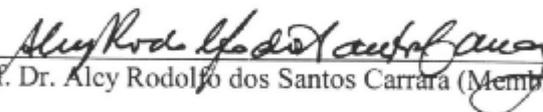
Presidente da Banca
Prof. Dr. Humberto Xavier de Araújo (Orientador)



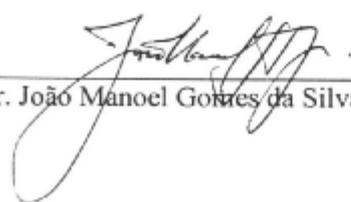
Prof. Dr. Gustavo Henrique da Costa Oliveira (Membro Titular)



Prof. Dr. Leandro dos Santos Coelho (Membro Titular)



Prof. Dr. Aley Rodolfo dos Santos Carrara (Membro Titular)



Prof. Dr. João Manoel Gomes da Silva Jr. (Membro Titular)



Curitiba, 15 de setembro de 2004.

Ao meu marido Jonerlam.

... aprendi que o mais valioso não é **o que temos** em
nossas vidas, mas sim, **quem temos** em nossas vidas.

(Ademir Goulart)

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Dr. Humberto Xavier de Araújo pelo estímulo e parceria, além de sua constante orientação e permanente incentivo para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Professor PhD. Alcy Rodolfo dos Santos Carrara e MSc. Lucas Weihmann da PUCPR, aos colegas do LACTEC Walter Antônio Kapp e Winderson E. dos Santos, além dos bolsistas Erwann Pierre Caille e Camila da Costa Silveira, e aos colegas da AUTOMATISA e UFSC que tiveram fundamental participação no desenvolvimento do primeiro tema proposto, o qual infelizmente não pôde ser concluído. Espero que não faltem oportunidades para podermos, novamente, trabalharmos juntos.

Ao Professor Dr. Leandro dos Santos Coelho pelas inúmeras sugestões e contribuições realizadas durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao LACTEC – Instituto de Tecnologia para o Desenvolvimento por ter liberado muitas das minhas horas de trabalho e pelo auxílio concedido, sem o qual este trabalho não poderia ter sido realizado, e aos meus colegas e amigos do Departamento de Eletrônica que supriram, muitas vezes, a minha falta.

À PUCPR, pela bolsa de mestrado concedida.

Aos meus amigos e colegas de mestrado Marcos José Mannala, Eduardo de Oliveira Pacheco e Gustavo José Pereira, pela colaboração e apoio durante a fase das disciplinas e pelo companheirismo e boas conversas que tivemos durante estes dois anos.

Ao meu marido e familiares, por terem suportado o meu mau-humor nos períodos em que estive sob grande pressão e pela minha ausência em inúmeras ocasiões.

A todos os demais, não nomeados, que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

Sumário

AGRADECIMENTOS.....	VII
SUMÁRIO	IX
LISTA DE FIGURAS	XIII
LISTA DE TABELAS.....	XV
LISTA DE SÍMBOLOS	XVII
LISTA DE ABREVIATURAS	XIX
RESUMO	XXI
ABSTRACT	XXIII
CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO 2 - SISTEMAS CONTÍNUOS: DEFINIÇÕES PRELIMINARES.....	7
2.1 INTRODUÇÃO	7
2.2 DEFINIÇÕES BÁSICAS	8
2.2.1 <i>Continuidade</i>	8
2.2.2 <i>Conjunto compacto</i>	8
2.2.3 <i>Conjunto convexo</i>	9
2.2.4 <i>Combinação convexa</i>	9
2.2.5 <i>Pontos interiores</i>	10
2.2.6 <i>Funções convexas</i>	10
2.2.7 <i>Mínimo local e global</i>	11
2.3 ESTABILIDADE SEGUNDO LYAPUNOV	11
2.4 SISTEMAS INCERTOS	13
2.4.1 <i>Incertezas do tipo politopo</i>	14
2.5 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES - LMIS	15

2.5.1	<i>Objetivos das LMIs</i>	17
2.5.2	<i>Descrição Geral</i>	17
2.6	ESTABILIDADE QUADRÁTICA	19
2.6.1	<i>Estabilidade quadrática: sistemas com incertezas do tipo politopo</i>	21
2.6.2	<i>Problema de otimização</i>	23
2.7	INVARIÂNCIA POSITIVA	23
2.7.1	<i>Domínios da invariância</i>	24
2.7.2	<i>\mathcal{D}-invariância positiva</i>	27
2.8	ESTABILIDADE QUADRÁTICA COM REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA	28
2.8.1	<i>Realimentação de saída estática</i>	28
2.8.2	<i>Realimentação dinâmica de saída</i>	31
2.9	CONCLUSÃO	34
CAPÍTULO 3 - OTIMIZAÇÃO EM \mathcal{H}_2 E \mathcal{H}_∞		37
3.1	INTRODUÇÃO	37
3.2	OTIMIZAÇÃO EM \mathcal{H}_2	37
3.2.1	<i>O problema de controle \mathcal{H}_2 por realimentação de estado</i>	38
3.2.1.1	<i>Solução via análise convexa</i>	42
3.2.1.2	<i>Controle \mathcal{H}_2 a custo garantido</i>	44
3.2.2	<i>O problema de controle \mathcal{H}_2 por realimentação de saída</i>	46
3.3	OTIMIZAÇÃO EM \mathcal{H}_∞	48
3.3.1	<i>O problema de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estado</i>	49
3.3.1.1	<i>Problema geral de controle \mathcal{H}_∞ ótimo</i>	51
3.3.1.2	<i>Problema de controle \mathcal{H}_∞ subótimo</i>	52
3.3.1.3	<i>Solução via análise convexa</i>	53
3.3.1.4	<i>Sistemas incertos</i>	53
3.3.2	<i>O problema de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída</i>	54
3.4	CONCLUSÃO	56
CAPÍTULO 4 - ALGORITMOS GENÉTICOS		59
4.1	INTRODUÇÃO	59
4.2	COMPUTAÇÃO EVOLUTIVA: DEFINIÇÃO DO PARADIGMA	60
4.3	ALGORITMOS GENÉTICOS	65

4.3.1 Principais conceitos	66
4.3.2 Etapas	67
4.3.3 Tipos de representação	68
4.3.4 Operadores Genéticos	69
4.3.4.1 Seleção	69
4.3.4.2 Cruzamento	72
4.3.4.3 Mutação	74
4.4 CONCLUSÃO	77
CAPÍTULO 5 - SÍNTESE DE CONTROLADORES \mathcal{H}_2 E \mathcal{H}_∞.....	79
5.1 INTRODUÇÃO	79
5.2 CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_2 E \mathcal{H}_∞ POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA	80
5.2.1 Controle robusto \mathcal{H}_2	81
5.2.2 Controle robusto \mathcal{H}_∞	82
5.2.3 Algoritmo híbrido.....	83
5.2.3.1 Geração da população inicial	83
5.3 CONTROLE \mathcal{H}_2 E \mathcal{H}_∞ COM RESTRIÇÕES NO DOMÍNIO DO TEMPO.....	84
5.3.1 Realimentação de estado.....	85
5.3.1.1 Controle \mathcal{H}_2 com restrições.....	101
5.3.1.2 Controle \mathcal{H}_∞ com restrições.....	103
5.3.2 Realimentação de saída dinâmica.....	104
5.3.2.1 Controle \mathcal{H}_2 com restrições	109
5.3.2.2 Controle \mathcal{H}_∞ com restrições.....	111
5.3.3 Algoritmo de síntese	112
5.3.3.1 Realimentação de estado.....	113
5.3.3.2 Realimentação de saída.....	113
5.4 CONCLUSÃO	115
CAPÍTULO 6 - RESULTADOS	117
6.1 INTRODUÇÃO	117
6.2 CONTROLADORES \mathcal{H}_2 E \mathcal{H}_∞ POR REALIMENTAÇÃO DE SAÍDA	117
6.2.1 Exemplo 1	117
6.2.2 Exemplo 2.....	123

6.2.3 Exemplo 3	126
6.2.4 Exemplo 4	130
6.3 CONTROLADORES \mathcal{H}_2 E \mathcal{H}_∞ COM RESTRIÇÕES NO DOMÍNIO DO TEMPO	133
6.3.1 Estabilização por realimentação de estado.....	133
6.3.1.1 Exemplo 1	133
6.3.1.2 Exemplo 2	139
6.3.1.3 Exemplo 3	146
6.3.2 Estabilização por realimentação de saída	152
6.3.2.1 Exemplo 1	152
6.3.2.2 Exemplo 2	156
CONCLUSÃO GERAL.....	161
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	163

Lista de Figuras

Figura 2.1: Conjuntos convexo e não convexo.	9
Figura 2.2: Combinações convexas.	10
Figura 2.3: Exemplo de poliedro convexo.	14
Figura 2.4: Sistema em malha fechada.	32
Figura 4.1: Exemplo de aplicação do método da roleta.	70
Figura 6.1: Sistema em malha fechada com realimentação de saída.	119
Figura 6.2: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma H_2	120
Figura 6.3: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma H_∞	122
Figura 6.4: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma H_2	125
Figura 6.5: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma H_2	128
Figura 6.6: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma H_∞	129
Figura 6.7: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma H_2	132
Figura 6.8: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de estado com otimização da norma H_2	137
Figura 6.9: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de estado com otimização da norma H_∞	139
Figura 6.10: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de estado com otimização da norma H_2	142

Figura 6.11: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de estado com otimização da norma H_∞	144
Figura 6.12: Sistema de malha fechada para realimentação de estado.	145
Figura 6.13: Comparação entre as saídas dos sistemas sem e com restrição para o caso de realimentação de estado com otimização da norma H_∞	145
Figura 6.14: Comparação entre os estados dos sistemas sem e com restrição para o caso de realimentação de estado com otimização da norma H_∞	146
Figura 6.15: Comparação entre os controles dos sistemas sem e com restrição para o caso de realimentação de estado com otimização da norma H_∞	146
Figura 6.16: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de estado com otimização da norma H_2	150
Figura 6.17: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de estado com otimização da norma H_∞	152
Figura 6.18: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma H_2	155
Figura 6.19: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma H_∞	159

Lista de Tabelas

Tabela 6.1 – Resultados do limitante superior da norma H_2 para controladores de diferentes dimensões.....	120
Tabela 6.2 – Normas H_2 ótimas nos vértices.....	120
Tabela 6.3 – Resultados do limitante superior da norma H_∞ para controladores de diferentes dimensões.....	122
Tabela 6.4 – Normas H_∞ nos vértices.....	122
Tabela 6.5 – Resultados do limitante superior da norma H_∞ para controladores de diferentes dimensões.....	126
Tabela 6.6 – Normas H_∞ nos vértices.....	126
Tabela 6.7 – Resultados do limitante superior da norma H_2 para controladores de diferentes dimensões.....	128
Tabela 6.8 – Resultados do limitante superior da norma H_∞ para controladores de diferentes dimensões.....	130

Lista de Símbolos

\mathcal{N}_+	Conjunto de números inteiros não negativos
\mathfrak{R}_+	Conjunto de números reais não negativos
\mathfrak{R}_+^*	Conjunto de números reais positivos
\mathfrak{R}^n	Espaço vetorial de dimensão n
$\mathfrak{R}^{n \times m}$	Espaço de matrizes reais de dimensão $n \times m$
I_n	Matriz unitária: $I \in \mathfrak{R}^{n \times m}$
$0_{n \times m}$ (0_n)	Matriz nula: $0 \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ ($0 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$)
M^T	Matriz transposta de M : $(M^T)_{ij} = M_{ji}$
M^*	Matriz complexa conjugada transposta: $M(j\omega)^* = M(-j\omega)^T$
$M > (\geq) 0$	M simétrica e (semi) definida positiva, isto é, $M = M^T$ e $z^T M z > (\geq) 0$, $\forall z \in \mathfrak{R}^n, z \neq 0$
$M > (\geq) N$	M, N simétricas e $M - N > (\geq) 0$
$\text{Tr}(M)$	Traço de $M \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, isto é, $\sum_{i=1}^n M_{ii}$
$\det(M)$	Determinante da matriz quadrada M
$\ v\ $	Norma euclidiana do vetor v
$ x $	Valor absoluto do número real x
$D_1 \times D_2$	Produto cartesiano
$D - \{x\}$	D à exceção de x
$x \mathbf{p}(\mathbf{p}) y$	Posto de M .
$\text{Co}\{\cdot\}$	Desigualdades elemento a elemento
	Envelope convexo

Lista de Abreviaturas

AE	Algoritmo Evolucionário (ou Evolutivo)
AG	Algoritmo Genético
CE	Computação Evolucionária (ou Evolutiva)
EAR	Equação Algébrica de Riccati
LMI	<i>Linear Matrix Inequalities</i> (Desigualdades Matriciais Lineares)
LQ	Linear Quadrático
LQG	Linear Quadrático Gaussiano
RMS	<i>Root Mean Square</i> (Raiz da Média Quadrada)

Resumo

Este trabalho trata da síntese de controladores robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares contínuos, com incertezas paramétricas e/ou sujeitos a restrições no estado, no controle e na saída. Primeiramente, os problemas de otimização \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ via realimentação dinâmica de saída são abordados para sistemas com incertezas paramétricas do tipo politopo. Em seguida, a síntese de controladores robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por realimentação de estado e por realimentação de saída é tratada, levando-se em consideração restrições no domínio do tempo e as mesmas incertezas paramétricas. Para os problemas que envolvem realimentação dinâmica de saída, os controladores projetados podem ser de ordem reduzida ou completa. A abordagem usada é baseada no conceito de estabilidade quadrática. No tratamento das restrições no estado, no controle e na saída, associa-se ao sistema incerto uma função de Lyapunov quadrática, definindo-se um conjunto elipsoidal positivamente invariante, incluso no domínio de linearidade do modelo. Neste caso, as leis de controle por realimentação de estado e de saída são construídas de tal maneira que o sistema em malha fechada não sature e que as restrições de estado e saída sejam respeitadas. Baseado em Algoritmos Genéticos (AGs) e desigualdades matriciais lineares (LMIs), um algoritmo híbrido é proposto para síntese de controladores robustos. Este algoritmo é aplicado em vários exemplos retirados da literatura de controle.

Palavras-Chave: sistemas lineares, incertezas paramétricas, controle robusto, estabilidade quadrática, invariância positiva, restrições no domínio do tempo, controle ótimo \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Abstract

This work deals with the robust control \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ design for continuous-time linear systems subject to parameter uncertainty and/or state, control and output constraints. In the first part, optimization \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ problems by dynamic output feedback are considered for systems under polytopic parameter uncertainties. Right after, robust controller \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ synthesis by state feedback and output feedback is dealt with taking into account time control constraints and the same parameter uncertainties. For problems involving dynamic output feedback, the designed controller can be of reduced order or full order. The approach used is based on the concept of quadratic stability. In the state, control and output constraints treatment, a Lyapunov quadratic function is associated to the system, defining an ellipsoidal positively invariant set, included in the linearity domain of the model. In that case, the control laws by state and output feedback are built in such a way that the closed-loop system does not saturate and that the state and output constraints are respected. Based on genetic algorithms (GAs) and linear matrix inequalities (LMIs), a hybrid algorithm is proposed for synthesis of robust controllers. This algorithm is applied in several samples borrowed from the control literature.

Key-words: linear systems, parameter uncertainties, robust control, quadratic stability, positive invariance, time domain constraints, optimal control \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ .

Capítulo 1

Introdução

Projetar controladores robustos para sistemas sujeitos a incertezas paramétricas tem sido um dos principais objetivos da teoria de controle robusto multivariável nas últimas décadas. O termo robusto está associado à capacidade do controlador em assegurar a estabilidade e/ou desempenho do sistema tanto para o seu modelo nominal quanto para toda família de modelos que o representa.

A estabilidade de sistemas sempre foi um campo de estudo importante. Considerando-se que seu início se dá com os primeiros trabalhos sobre equações diferenciais, pode-se afirmar que um resultado bastante significativo neste campo foi aquele de Lyapunov, publicado em 1893 [LYA66]. Desde então, muitos trabalhos foram realizados a fim de estabelecer métodos de síntese de controladores que explorem da melhor maneira possível as propriedades em malha fechada.

As técnicas desenvolvidas no domínio da frequência mostraram-se particularmente vantajosas e simples para a resolução dos problemas de controle para os sistemas lineares invariantes no tempo e monovariáveis. Entretanto, as primeiras tentativas de generalização destas técnicas pareceram pouco atrativas para a aplicação em sistemas multivariáveis. Isso explica, em parte, o grande interesse reservado às metodologias de síntese no domínio do tempo, no início dos anos 60. De fato, muitas pesquisas conduziram a diferentes resultados significativos, tanto de um ponto de vista conceitual quanto prático, sendo que o mais notável foi provavelmente o controle LQG (Linear Quadrático Gaussiano).

A abordagem LQG tem diversas vantagens, entre as quais a possibilidade de agir no comportamento dinâmico do sistema controlado, através de uma seqüência de tentativas, guiadas pela escolha dos parâmetros que correspondem ao índice do desempenho (matrizes

ponderadas) ou à descrição das incertezas (intensidades dos ruídos). Além disso, o esforço de cálculo para a determinação do controlador é relativamente pequeno. Entretanto, as limitações desta abordagem são bem conhecidas. Uma das mais significativas pode surgir quando o comportamento do sistema se afasta, mesmo para pequenas variações, daquele descrito pelo modelo, causando uma degradação no desempenho. Como acontece em outros métodos tradicionais, a falta de robustez do controle LQG encontra-se no fato de que se supõe o conhecimento de um modelo do sistema suficientemente preciso, isto é, que não leva em consideração as incertezas do modelo ou as perturbações imprevisíveis sobre sistema.

A incerteza que afeta um sistema pode ter sua origem nos erros de modelagem, nas variações paramétricas, nas incertezas sobre os parâmetros por causa da precisão, nas aproximações de modelagem tais como linearização ou eliminação de dinâmicas elevadas. Sendo assim, é necessário representar tais incertezas de maneira adequada, de acordo com a sua origem, a fim de elaborar uma lei de controle que as leve em consideração.

A necessidade de satisfazer os critérios especificados no domínio da frequência e, simultaneamente, de garantir a robustez do sistema controlado sujeito a incertezas e/ou variações dos parâmetros, durante a síntese das leis de controle, conduziu a maioria das pesquisas de forma a superar a dicotomia tradicional entre as abordagens frequencial e temporal [COL97]. Durante estas últimas décadas, após um esforço intenso neste sentido, muitos resultados surgiram assegurando a robustez em estabilidade e em desempenho (ver referências em [SIL89] e [COL97]). A abordagem quadrática [BAR85], [PET87] é um exemplo desses resultados.

No contexto de sistemas incertos, as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ podem fornecer uma medida de desempenho na avaliação de controladores. A motivação técnica para a utilização dessas normas é exatamente discutida em [BER89a], [DOY94], [KHA91] e [SCH95].

Com o conceito da estabilidade quadrática, que corresponde à existência de uma única função quadrática de Lyapunov para todo o conjunto aceitável das incertezas, uma parametrização convexa para a busca dos ganhos robustos foi obtida, no caso das incertezas do tipo politopo [BER89], [PER89], para sistemas contínuos e discretos. Isso possibilitou a resolução dos problemas de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , por realimentação de estados, no contexto dos sistemas incertos [GER92a], [GER92b], [GAR94], [CHI96] e [SCH95]. Nota-se que, nos anos 80, foi demonstrado que o problema de controle LQG é um caso particular de uma classe mais geral de problemas estudados na teoria de controle \mathcal{H}_2 . No contexto de realimentação

de saída, alguns resultados importantes podem ser encontrados em [CHI96], [CHI99], [GER98], [SCH97] e em suas referências. Entretanto, para o problema mais geral de síntese de controladores robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , por realimentação de saída, não se tem uma solução ótima global, no caso de incertezas do tipo politopo. A mesma mudança de variável possível na síntese por realimentação de estado não se aplica neste caso. A mudança de variável proposta em [MAS95] e [SCH95a], desenvolvida para a realimentação de saída, envolve as matrizes A e B_2 do sistema, não permitindo a sua generalização direta para o caso incerto.

Um outro aspecto importante, que ocorre na maioria das aplicações práticas [REI00a] é a existência de restrições no estado, no controle e até mesmo na saída. Isto pode ser devido às determinadas limitações físicas e/ou não-linearidades inerentes ao sistema a ser controlado. Estas restrições podem ocorrer, por exemplo, quando os atuadores não são dimensionados adequadamente, limitando assim a energia fornecida ao controle. Além da degradação do desempenho, negligenciar estas restrições pode até mesmo levar à instabilidade por causa de disfunções, tais como ciclos limites, relacionados à natureza não-linear do sistema controlado [TAR91].

Nas últimas décadas, o estudo da estabilidade de sistemas lineares sujeitos às restrições no estado e no controle despertou bastante interesse. Em muitos trabalhos publicados, duas abordagens sobressaem. Na primeira, a saturação dos controladores e o comportamento não-linear do sistema são levados em consideração. A metodologia usada foi, na maioria dos trabalhos, baseada na invariância positiva e na contractividade, conceitos diretamente relacionados com o conceito de estabilidade segundo Lyapunov [GUT85], [BUR96], [BER95], [SIL97], [FAN03], [HUA02] e [SIL03]. Na segunda, o objetivo é a prevenção da saturação, e, conseqüentemente, o estudo do comportamento linear do sistema em malha fechada. Nesta abordagem, a invariância positiva tem um papel significativo. Em geral, a lei de controle é gerada de forma a garantir a invariância positiva de um conjunto de estados iniciais aceitáveis, para que as restrições no estado e no controle não sejam violadas. Assim, a estabilidade e o comportamento linear do sistema são assegurados somente localmente. Este conceito foi inicialmente proposto por Mignot [MIG83] para determinar a solução de um problema de controle restrito, antes de ser desenvolvido nas teses de Chéganças [CHE85] e Benzaouia [BEN88]. Esta abordagem também foi estudada em [AND71], [VAS89], [TAR94] e [CAS93], para os conjuntos positivamente invariantes do tipo

poliedral, e em [GUT85] para os conjuntos elipsoidais. Outros trabalhos que tratam da síntese de controladores para sistemas com restrições são [SCH02], [SZN03], [BIT99] e [KOS01].

Todas as referências citadas anteriormente, no contexto dos sistemas com restrições, não levam em consideração as incertezas do modelo. De fato, até recentemente, muitos dos trabalhos encontrados na literatura tratavam cada problema separadamente. Entretanto, pelas razões especificadas anteriormente, é interessante, do ponto de vista prático, desenvolver novas metodologias levando-se em consideração simultaneamente estes dois aspectos para a síntese de leis de controle estabilizantes. É neste contexto de controle robusto com restrições que se baseiam os trabalhos [SZN91], [BIT92], [SZN93], [MIL94], [TAR97], [ARA98], [REI01] e [REI00b].

Este trabalho pode ser dividido em duas partes. Na primeira, é proposto um procedimento alternativo destinado a resolver os problemas de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por realimentação dinâmica de saída, para sistemas sujeitos a incertezas paramétricas do tipo politopo. Baseada no conceito de \mathcal{D} -invariância positiva, uma metodologia é apresentada na segunda parte deste trabalho, para síntese de controladores robustos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , para sistemas com restrição no domínio do tempo. Ambos os procedimentos são baseados em otimização através de Algoritmos Genéticos (AGs), explorando o caráter bilinear das restrições existentes em cada problema. Os princípios básicos dos AGs foram inicialmente publicados por Holland [HOL62] em 1962. Os AGs foram aplicados em um grande número de metodologias de controle na melhoria do desempenho do sistema em malha fechada [CHE95], [DUH02], [HUN00], [KRO99] e [PED02]. Nenhuma das referências citadas anteriormente trata do problema de controle robusto com restrições utilizando AGs.

O capítulo 2 apresenta algumas definições preliminares relacionadas com os sistemas dinâmicos contínuos. Neste, são introduzidos vários conceitos básicos e ainda aqueles de estabilidade segundo Lyapunov, desigualdades matriciais lineares (LMIs), estabilidade quadrática, invariância positiva e \mathcal{D} -invariância, quando o sistema está sujeito a perturbações aditivas. A incerteza considerada neste trabalho é do tipo politopo. Por fim, este capítulo é concluído com a apresentação do conceito de estabilidade quadrática com realimentação de saída, e sua tradução a um problema de controle por realimentação de estado com restrição estrutural na matriz de Lyapunov.

Os problemas de otimização em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são definidos no capítulo 3.

No capítulo 4 são apresentados os conceitos básicos da computação evolucionária (ou evolutiva), justificando o uso dos algoritmos genéticos.

O capítulo 5 apresenta a os procedimentos propostos de síntese de controladores para sistemas contínuos a partir dos fundamentos teóricos descritos nos primeiros capítulos. Estes procedimentos são baseados em AGs e nas desigualdades matriciais lineares. Para cada tipo de problema, os algoritmos híbridos são implementados e testados em diversos exemplos retirados da literatura. Isto está ilustrado no capítulo 6.

Capítulo 2

Sistemas contínuos: definições preliminares

2.1 Introdução

Este capítulo fornece alguns resultados e definições preliminares relativos aos sistemas lineares contínuos no tempo, importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

Inicialmente, são lembradas algumas definições básicas associadas a funções e, em seguida, o conceito de estabilidade segundo Lyapunov é revisto. Logo após, uma descrição sucinta dos sistemas dinâmicos lineares sujeitos a incertezas paramétricas estruturadas é apresentada, com atenção para as incertezas do tipo politopo, no espaço de estado. Este tipo de incerteza cobre uma grande classe de sistemas incertos.

Aborda-se, na seqüência, os conceitos de desigualdade matricial linear (LMI – *Linear Matrix Inequality*) e de estabilidade quadrática e sua aplicação na estabilização de sistemas incertos. Apesar de restritiva, por exigir a existência de uma função de Lyapunov única para toda realização do sistema em seu domínio de incerteza, a abordagem quadrática possibilita a parametrização convexa de uma classe de ganhos estabilizantes para o sistema com incertezas do tipo politopo. Diretamente relacionado com o conceito de estabilidade, o conceito de invariância positiva é fundamental para o estudo de sistemas com restrições no domínio do tempo (estado, controle e saída). Este conceito é apresentado neste capítulo, assim como sua extensão para sistemas sujeitos a perturbações, denominada de \mathcal{D} -invariância positiva. O interesse no estudo dos domínios positivamente invariantes elipsoidais reside no fato de que são melhores adaptados do que os domínios poliedrais, na síntese de controladores robustos, especialmente quando se deseja assegurar conjuntamente a robustez no desempenho do sistema. Finalmente, alguns resultados relativos à estabilidade quadrática por realimentação

de saída são apresentados. Todos estes aspectos são abordados sob a forma de desigualdades matriciais lineares (LMIs), pois as técnicas associadas disponíveis de programação convexa são particularmente eficazes.

2.2 Definições básicas

Algumas definições básicas são lembradas nesta seção.

2.2.1 Continuidade

Uma função f que mapeia um espaço normado S em um espaço normado T é contínua em $x_0 \in S$ se para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que $\|x - x_0\| < \delta$ implica em $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. A função f é contínua se for contínua para todo $x_0 \in S$.

Deve-se notar que a continuidade é dependente da definição de norma no espaço normado S e T . Observa-se que a função $f : S \rightarrow T$ é contínua em $x_0 \in S$ se e somente se para toda seqüência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $x_n \in S$, que converge para x_0 quando $n \rightarrow \infty$, tem-se que $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$.

2.2.2 Conjunto compacto

Um conjunto S em um espaço linear normado X é dito compacto se para toda seqüência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ em S existe uma subseqüência $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ que converge para um elemento $x_0 \in S$.

Se o espaço linear normado X é de dimensão finita, então $S \subset X$ é compacto se e somente se S é fechado e limitado.

Um conjunto S é fechado se $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow x$ implica em $x \in S$.

Um conjunto S é limitado se existir um escalar b tal que para todo $x \in S$, $\|x\| \leq b$.

2.2.3 Conjunto convexo

Um conjunto S em um espaço linear vetorial é dito convexo se

$$\{x_1, x_2 \in S\} \Rightarrow \{x := \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in S \text{ para todo } \alpha \in (0,1)\}.$$

Em termos geométricos, isto indica que para dois pontos quaisquer de um conjunto convexo, o segmento de reta que conecta estes dois pontos também pertence ao conjunto (figura 2.1).

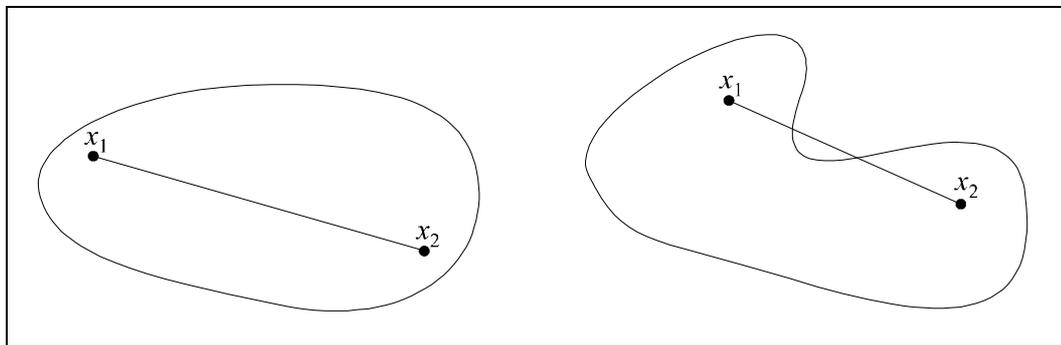


Figura 2.1: Conjuntos convexo e não convexo.

Geralmente, um conjunto vazio é considerado convexo. O ponto $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ com $\alpha \in (0,1)$ é denominado de combinação convexa dos pontos x_1 e x_2 .

2.2.4 Combinação convexa

Seja S um subconjunto do espaço vetorial e seja $x_1, \mathbf{L}, x_n \in S$. Se $\alpha_1, \mathbf{L}, \alpha_n$ for um conjunto de números reais não negativos com $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ então

$$x := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$$

é denominado de combinação convexa de x_1, \mathbf{L}, x_n .

Sejam n pontos x_1, \dots, x_n em S . É possível verificar que o conjunto de todas as combinações convexas de x_1, \dots, x_n é também convexo, ou seja,

$$C := \{x \mid x \text{ é uma combinação convexa de } x_1, \dots, x_n\}$$

é convexo. A figura 2.2 ilustra três casos de combinação convexa.

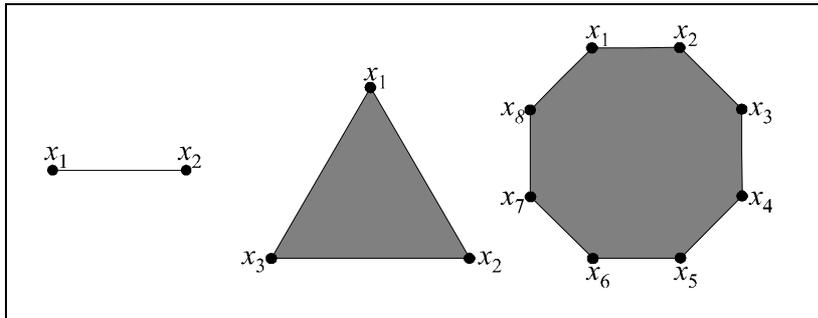


Figura 2.2: Combinações convexas.

2.2.5 Pontos interiores

Seja S um subconjunto de um espaço normado X . O ponto $x \in S$ é chamado de ponto interior de S se existe um $\varepsilon > 0$ tal que todos os pontos $y \in X$ com $\|x - y\| < \varepsilon$ também pertençam a S . O interior de S é a coleção de todos os pontos interiores de S .

2.2.6 Funções convexas

A função $f : S \rightarrow \mathfrak{R}$ é dita convexa se

1. S é convexo e
2. para todo $x_1, x_2 \in S$ e $\alpha \in (0, 1)$ tem-se

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2). \quad (2.1)$$

A função f é estritamente convexa se a desigualdade (2.1) é estrita para $x_1 \neq x_2$.

É importante notar que o domínio de uma função convexa é, por definição, um conjunto convexo.

2.2.7 Mínimo local e global

Seja S um subconjunto do espaço normado \mathcal{X} . A função $f : S \rightarrow \mathfrak{R}$ tem um mínimo local em $x_0 \in S$ se existir $\varepsilon > 0$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x) \tag{2.2}$$

para todo $x \in S$ com $\|x - x_0\| < \varepsilon$. Este é um mínimo global de f se (2.2) for verdadeira para todo $x \in S$. f tem um mínimo local em $x_0 \in S$ se existir uma vizinhança \mathcal{N} de x_0 tal que $f(x_0) \leq f(x)$ para todos os pontos $x \in S \cap \mathcal{N}$. Nota-se que de acordo com esta definição todo mínimo global é também um mínimo local. A noção de máximo local e máximo global de uma função é dada de maneira similar.

Seja $f : S \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função convexa. Se f tem um mínimo local em $x_0 \in S$, então $f(x_0)$ é também um mínimo global de f . Se f é estritamente convexa, então x_0 é único. Esta proposição não faz nenhuma indicação sobre a existência de pontos $x_0 \in S$ que minimizem f . É dito simplesmente que todo mínimo local de f é também um mínimo global. Isto mostra que é suficiente calcular o mínimo local de uma função convexa para determinar seu mínimo global.

2.3 Estabilidade segundo Lyapunov

Considera-se o sistema autônomo estacionário, definido pela seguinte equação diferencial:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (2.3)$$

onde $f : U \rightarrow \mathfrak{R}^n$ é uma função localmente Lipschitz, definida no domínio $U \subset \mathfrak{R}$. Supõe-se que $x_e \in U$ seja um ponto de equilíbrio do sistema (2.3), ou seja:

$$f(x_e) = 0. \quad (2.4)$$

Em relação à estabilidade segundo Lyapunov do ponto x_e , tem-se a definição a seguir.

Definição 2.1 [KHA92]: *O ponto de equilíbrio x_e do sistema (2.3) é dito:*

- i. estável, se, para todo escalar $\varepsilon > 0$, existe um outro $\delta = \delta(\varepsilon)$ tal que

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq 0;$$

- ii. instável, se ele não é estável;
 iii. assintoticamente estável, se é estável e δ pode ser escolhido tal que

$$\|x_0 - x_e\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) \rightarrow x_e.$$

Apresenta-se na seqüência o teorema sobre estabilidade local, baseado no segundo método de Lyapunov.

Teorema 2.1 [KHA92]: *Seja x_e um ponto de equilíbrio do sistema (2.3). Seja $v : U \rightarrow \mathfrak{R}$ uma função contínua, com suas derivadas parciais também contínuas, na vizinhança de $U \subset \mathfrak{R}^n$ de x_e , tal que*

$$v(x_e) = 0 \quad \text{e} \quad v(x) > 0, \forall x \in U - \{x_e\}.$$

Se

$$\dot{v}(x) \leq 0, \forall x \in U - \{x_e\},$$

então x_e é estável. Se

$$\dot{v}(x) < 0, \forall x \in U - \{x_e\},$$

então x_e é assintoticamente estável.

Os resultados relativos à estabilidade global podem ser obtidos a partir do teorema 2.1, substituindo-se o U por \mathfrak{R}^n e acrescentando-se a condição $v(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow +\infty$.

2.4 Sistemas incertos

Seja o sistema dinâmico contínuo sujeito a incertezas estruturadas paramétricas, definido pela equação de estado:

$$\dot{x}(t) = A(r(t))x(t) + B_2(s(t))u(t), \quad (2.5)$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estado $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor de controle, $A(r) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é a matriz dinâmica do sistema, $B_2(s) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ é a matriz de controle, $r \in \mathcal{R} \subset \mathfrak{R}^{n_r}$ e $s \in \mathcal{S} \subset \mathfrak{R}^{n_s}$ são os vetores de parâmetros incertos das matrizes dinâmica e de controle, respectivamente. Os conjuntos \mathcal{R} e \mathcal{S} são compactos e as funções $r(t): [0, \infty) \rightarrow \mathcal{R}$ e $s(t): [0, \infty) \rightarrow \mathcal{S}$ são mensuráveis segundo Lebesgue.

As matrizes $A(r)$ e $B_2(s)$ podem ser decompostas em torno do sistema nominal (A, B_2) , quando este é definido, da seguinte maneira:

$$\begin{cases} A(r(t)) = A + \Delta A(r(t)) \\ B_2(s(t)) = B_2 + \Delta B_2(s(t)). \end{cases} \quad (2.6)$$

Supõe-se que o par (A, B_2) seja estabilizável e constante. A maneira como $r(t)$ e $s(t)$ influenciam no sistema caracteriza diferentes tipos de incertezas.

Neste trabalho, o foco são as incertezas estruturadas paramétricas do tipo politopo [BER89, PER89].

2.4.1 Incertezas do tipo politopo

A partir do modelo geral (2.5), adota-se a hipótese que as componentes dos vetores de incerteza $r(t) \in \mathcal{R}$ e $s(t) \in \mathcal{S}$ pertencem a um intervalo fechado, isto é:

$$\begin{aligned} \underline{r}_i \leq r_i(t) \leq \bar{r}_i, \quad i = 1, 2, \mathbf{L}, n_r, \\ \underline{s}_j \leq s_j(t) \leq \bar{s}_j, \quad j = 1, 2, \mathbf{L}, n_s. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Os domínios \mathcal{R} e \mathcal{S} , definidos em (2.7), são poliedros convexos com $N = 2^{n_r}$ e $M = 2^{n_s}$ vértices, respectivamente (Figura 2.3).

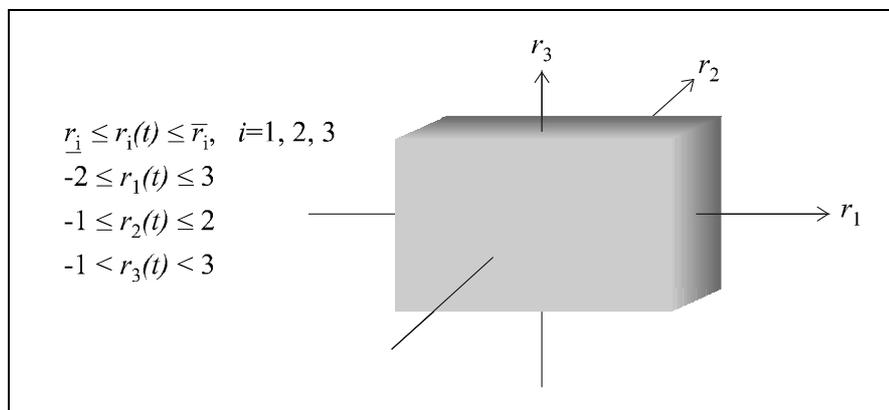


Figura 2.3: Exemplo de poliedro convexo.

Com a hipótese suplementar que os elementos das matrizes $A(\cdot)$ e $B_2(\cdot)$ são funções lineares de $r(t)$ e $s(t)$, as relações (2.7) definem também as matrizes vértices A_i e B_{2j} , $i = 1, 2, \dots, N$, e $j = 1, 2, \dots, M$, que correspondem aos vértices dos poliedros \mathcal{R} e \mathcal{S} .

Assim, as matrizes $A(\cdot)$ e $B_2(\cdot)$ pertencem a conjuntos convexos limitados, definidos por:

$$\mathcal{D}_A = \left\{ A \in \mathfrak{R}^{n \times n} : A = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i, \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}, \quad (2.8)$$

$$\mathcal{D}_B = \left\{ B_2 \in \mathfrak{R}^{n \times m}; B_2 = \sum_{j=1}^M \theta_j B_{2j}, \sum_{j=1}^M \theta_j = 1, \theta_j \geq 0 \right\}. \quad (2.9)$$

Com esta descrição para as incertezas, o modelo geral (2.5) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 u(t) \\ A \in \mathcal{D}_A, B_2 \in \mathcal{D}_B. \end{cases} \quad (2.10)$$

2.5 Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs

Uma grande variedade de problemas, que surgem na teoria de Sistema de Controle, pode ser reduzida a alguns problemas padrões de otimização convexos ou quasi-convexos que envolvem LMIs. Uma vez que estes problemas de otimização resultantes podem ser resolvidos numericamente de forma eficaz usando-se os métodos dos pontos interiores, tal redução constitui uma solução atrativa para o problema original.

A aplicação de LMIs na análise de sistemas dinâmicos começa em aproximadamente 1890, quando Lyapunov publicou o seu primeiro trabalho introduzindo o que agora é conhecido como teoria de Lyapunov. Ele mostrou que a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = Ax(t) \quad (2.11)$$

é estável (quer dizer, todas as trajetórias convergem para a origem) se e somente se existir uma matriz P definida positiva tal que

$$A^T P + PA < 0. \quad (2.12)$$

A condição $A^T P + PA < 0$, $P > 0$, é uma desigualdade de Lyapunov em P e é uma forma especial de LMI que pode ser resolvida explicitamente. Realmente, pode-se escolher qualquer $Q = Q^T > 0$ e então resolver a equação linear $A^T P + PA = -Q$ para a matriz P definida positiva, se o sistema (2.11) for estável. Em resumo, a primeira LMI usada para analisar a estabilidade de um sistema dinâmico foi a desigualdade de Lyapunov (2.12) que pode ser resolvida analiticamente (pela resolução de um conjunto de equações lineares).

Em resumo, os principais eventos na história das LMIs na teoria de controle foram:

- 1890: a primeira LMI aparece; solução analítica da LMI de Lyapunov através da equação de Lyapunov;
- Década de 40: aplicação dos métodos de Lyapunov a problemas reais da engenharia de controle. Pequenas LMIs resolvidas analiticamente;
- Início da década de 60: o Lema Real-Positivo fornece técnicas gráficas para resolver uma outra família de LMIs;
- Final dos anos 60: a observação de que a mesma família de LMIs pode ser resolvida resolvendo uma EAR (Equação Algébrica de Riccati);
- Início dos anos 80: reconhecimento de que muitas LMIs poderiam ser resolvidas pelo computador através da programação convexa;
- Final dos anos 80: desenvolvimento dos algoritmos de pontos-interiores, poderosos e eficientes, para tratamento das LMIs.

2.5.1 Objetivos das LMIs

As desigualdades Matriciais Lineares [BOY94] emergiram como ferramentas de projeto poderosas em áreas que variam de engenharia de controle até identificação de sistemas e projeto estrutural. Três fatores fazem da LMI uma técnica atraente:

- uma grande variedade de especificações de projetos e restrições pode ser expressa como LMIs;
- uma vez formulado em termos de LMIs, um problema pode ser resolvido, de forma exata, através de algoritmos eficientes de otimização convexa (os “*LMI solvers*”);
- embora falta solução analítica para a maioria dos problemas com múltiplas restrições ou objetivos, eles são freqüentemente tratáveis na estrutura de LMI. Assim os projetos baseados em LMIs são uma valiosa alternativa para os métodos analíticos clássicos.

2.5.2 Descrição Geral

Uma desigualdade matricial linear (LMI) é qualquer restrição do tipo:

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (2.13)$$

onde $x \in \mathfrak{R}^m$ é um vetor de escalares desconhecido (as variáveis de decisão ou de otimização) e $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $i = 0, \mathbf{L}, m$, são matrizes simétricas dadas.

O símbolo de desigualdade em (2.13) significa que $F(x)$ é definida positiva, ou seja, o menor autovalor de $F(x)$ é positivo.

Nota-se que as restrições $F(x) < 0$ e $F(x) > G(x)$ são casos especiais da equação (2.13) uma vez que elas podem ser reescritas como $-F(x) > 0$ e $F(x) - G(x) > 0$, respectivamente.

A LMI (2.13) é uma restrição convexa em x desde que $F(x_1) > 0$ e $F(x_2) > 0$ implicam que $F(\frac{x_1+x_2}{2}) > 0$. Como resultado:

- seu conjunto de soluções, chamado de conjunto factível, é um subconjunto convexo do \Re^m ;
- achar uma solução x qualquer para (2.13) é um problema de otimização convexo.

A propriedade de convexidade tem uma conseqüência importante. Embora (2.13) não tenha nenhuma solução analítica em geral, pode ser resolvido numericamente com garantias de se encontrar uma solução quando esta existe. Nota-se que um sistema de restrições do tipo LMI pode ser considerado como uma única LMI desde que

$$\begin{cases} F_1(x) > 0 \\ \mathbf{M} \\ F_k(x) > 0 \end{cases} \text{ seja equivalente a } F(x) = \text{diag}(F_1(x), \mathbf{L}, F_k(x)) > 0,$$

onde $\text{diag}(F_1(x), \mathbf{L}, F_k(x))$ denota a matriz bloco-diagonal com $F_1(x), \mathbf{L}, F_k(x)$ em sua diagonal. Conseqüentemente, múltiplas restrições de LMI podem ser impostas no vetor das variáveis de decisão x sem destruir a convexidade.

Quando as matrizes F_i são do tipo diagonal, a LMI $F(x) > 0$ é justamente um conjunto de desigualdades lineares.

Algumas desigualdades não-lineares (convexas) podem ser convertidas para a forma de LMI usando o complemento de Schur [BOY94], ou seja, a LMI

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0, \quad (2.14)$$

onde $Q(x) = Q(x)^T, R(x) = R(x)^T$ e $S(x)$, depende de forma afim de x , é equivalente a

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0. \quad (2.15)$$

Na maioria das aplicações de controle, as LMIs não surgem naturalmente na forma canônica (2.13), mas especialmente na forma $L(X_1, \mathbf{L}, X_m) > R(X_1, \mathbf{L}, X_m)$, onde $L(\cdot)$ e $R(\cdot)$ são funções afins de algumas variáveis matriciais estruturadas (X_1, \mathbf{L}, X_m) . Um exemplo simples é a desigualdade de Lyapunov (2.16):

$$A^T X + PX < 0. \quad (2.16)$$

Em (2.16), a matriz X desconhecida é uma matriz simétrica. Definindo (X_1, \mathbf{L}, X_m) como as entradas escalares, independentes, de X , esta LMI poderia ser reescrita na forma (2.13), mas ainda é mais conveniente e eficiente descrevê-las em sua forma natural (2.16), que é a notação utilizada no LMI Lab (LMI Control Toolbox para uso com o MatLab [GAH95]).

Se for encontrada uma solução x para o sistema LMI (2.17) o problema é dito factível.

$$A(x) > 0 \quad (2.17)$$

2.6 Estabilidade quadrática

Nesta seção, o conceito de estabilidade quadrática, introduzido por Hollot e Barmish [HOL80], e sua aplicação a sistemas lineares sujeitos a incertezas paramétricas são apresentados.

Considera-se o sistema linear incerto:

$$\dot{x}(t) = A(r(t))x(t) + B_2(s(t))u(t), \quad (2.18)$$

onde $A(\cdot)$ e $B_2(\cdot)$ são funções contínuas, $r(t) \in \mathcal{R}$ e $s(t) \in \mathcal{S}$, e \mathcal{R} e \mathcal{S} são conjuntos compactos.

A definição de estabilidade quadrática é dada a seguir [BAR85]:

Definição 2.2: *O sistema (2.18) é quadraticamente estabilizável se existem uma lei de controle contínua, função do estado, $p(\cdot): \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$ com $p(0) = 0$, uma matriz simétrica definida positiva P e uma constante real $\alpha > 0$ tais que*

$$x^T \left[A(r(t))^T P + P A(r(t)) \right] x + 2x^T P B_2(s(t)) p(x) \leq -\alpha \|x\|^2, \quad (2.19)$$

$$\forall x \neq 0 \in \mathfrak{R}^n, \forall r(t) \in \mathcal{R}, \forall s(t) \in \mathcal{S} \text{ e } \forall t.$$

Demonstra-se com facilidade que se a relação (2.19) é verdadeira, então $v(x) = x^T P x$ é uma função de Lyapunov para o sistema (2.18) em malha fechada, garantindo assim a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $x = 0$, quaisquer que sejam as incertezas admissíveis. No caso em que os sistemas são precisamente conhecidos (A e B_2 são matrizes constantes conhecidas), a relação (2.19) torna-se uma condição necessária e suficiente de estabilidade.

O conceito de estabilidade quadrática corresponde então à existência de uma função quadrática de Lyapunov única, com a qual pode-se testar a estabilidade do sistema (2.18) em malha fechada, para o todo o conjunto de incertezas admissíveis.

Antes de analisar a estabilidade quadrática para os sistemas sujeitos a incertezas do tipo politopo, o seguinte resultado geral estabelecido por Barmish [BAR85] é apresentado.

Define-se inicialmente \mathcal{B} como sendo o envelope convexo de $B_2(s)$, $s \in \mathcal{S}$, e \mathcal{N}_B , o espaço nulo de $B_2(s)^T$, ou seja:

$$\mathcal{N}_B = \{x \neq 0 \in \mathfrak{R}^n : B_2^T x = 0, B_2 \in \mathcal{B}\} \quad (2.20)$$

Teorema 2.2 [BAR85]: *O sistema incerto (2.18) é quadraticamente estabilizável se e somente se existe uma matriz simétrica definida positiva W tal que:*

$$x^T [A(r(t))W + WA(r(t))^T] x < 0, \quad (2.21)$$

$\forall r(t) \in \mathcal{R}$ e $x \in \mathcal{N}_B$.

A demonstração é apresentada em [BAR85].

Esta condição necessária e suficiente é sem dúvida um resultado muito importante na teoria de estabilidade quadrática, apesar de não fornecer as ferramentas matemáticas necessárias para a construção da matriz W e da lei de controle $u(t) = p(x(t))$ [PER89].

Em relação à estabilidade quadrática utilizando-se uma lei de controle linear, tem-se a seguinte definição que é uma extensão da Definição 2.2.

Definição 2.3 [ARA98]: *O sistema incerto (2.18) é quadraticamente estabilizável através de uma lei de controle linear se é quadraticamente estabilizável e se a lei de controle tem a forma $u(t) = Kx(t)$, onde $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ é uma matriz constante.*

Esta noção de estabilidade quadrática via uma lei de controle linear conduz, como será visto na seqüência, a uma parametrização dos ganhos K estabilizantes para os sistemas incertos com incertezas do tipo politopo. Entretanto, a abordagem quadrática conduz apenas a uma condição suficiente de estabilidade robusta.

2.6.1 Estabilidade quadrática: sistemas com incertezas do tipo politopo

Seja o sistema dinâmico descrito pela equação:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 u(t) \\ A \in \mathcal{D}_A, B_2 \in \mathcal{D}_B, \end{cases} \quad (2.22)$$

onde os conjuntos \mathcal{D}_A e \mathcal{D}_B são definidos, respectivamente, por (2.8) e (2.9).

Para este tipo de sistema, o teorema a seguir [PER89, BER89], dá uma condição necessária e suficiente para a estabilidade quadrática através de uma lei de controle linear $u(t) = Kx(t)$. Além disto, o teorema fornece uma maneira de calculá-la.

Teorema 2.3 [BER89]: *O sistema linear descrito por (2.22) é quadraticamente estabilizável por realimentação de estado linear se e somente se existem uma matriz simétrica definida positiva $W_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e uma matriz $W_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ tais que*

$$\begin{aligned} A_i W_1 + W_1 A_i^T + B_{2j} W_2 + W_2^T B_{2j}^T < 0, \quad i = 1, 2, \mathbf{L}, N, \\ j = 1, 2, \mathbf{L}, M. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Se estas condições são satisfeitas, o ganho robusto $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ é dado por $K = W_2 W_1^{-1}$.

A demonstração se encontra em [BER89].

Nota-se que as expressões (2.23) são convexas em W_1 e W_2 . De fato, elas constituem desigualdades matriciais lineares (LMIs) em W_1 e W_2 [BOY94, GAH95].

Denota-se por C_p o conjunto dos pares (W_1, W_2) , $W_1 = W_1^T$, $W_1 > 0$ que satisfazem as expressões (2.23). Se $C_p \neq \emptyset$, isto é, se as LMIs são factíveis, então a função $v(x) = x^T W_1^{-1} x$ é uma função de Lyapunov para o sistema (2.22), com a realimentação de estado $u(t) = W_2 W_1^{-1} x(t)$. Assim, tem-se uma parametrização convexa de todos os ganhos por realimentação de estado lineares quadraticamente estabilizantes para o sistema (2.22).

A seguir, define-se o conjunto dos ganhos por realimentação de estado que estabilizam quadraticamente o sistema (2.22):

$$\mathcal{K}_p = \left\{ K \in \mathfrak{R}^{m \times n} : K = W_2 W_1^{-1}, (W_1, W_2) \in C_p \right\}. \quad (2.24)$$

No caso de sistemas precisamente conhecidos, o teorema 2.3 fornece uma parametrização convexa de todos os ganhos por realimentação de estado lineares estabilizantes.

2.6.2 Problema de otimização

Seja o problema de otimização paramétrica do tipo:

$$\min_{s. a (W_1, W_2) \in C_p} f(W_1, W_2), \quad (2.25)$$

onde a escolha do critério $f(W_1, W_2)$ é feita, por exemplo, em função do desempenho desejado. Para que o problema de otimização seja convexo, é necessária a escolha de $f(W_1, W_2)$ convexo. A pesquisa de (W_1, W_2) será feita em um conjunto convexo C_p . Este procedimento de síntese tem como vantagem a possibilidade de inserção de restrições adicionais ao problema inicial.

2.7 Invariância Positiva

Nesta seção são revistas as noções de invariância positiva e de \mathcal{D} -invariância positiva, conceitos ligados àquele de estabilidade.

Considerando-se o sistema linear autônomo descrito por:

$$\dot{x}(t) = A(r(t))x(t), \quad r(t) \in \mathcal{R}_c \quad (2.26)$$

onde $A(\cdot)$ é uma função contínua e $r(t)$ é o vetor de parâmetros incertos que satisfaz as hipóteses que asseguram a existência e a unidade das soluções da equação (2.26).

Definição 2.4 [KHA92]: Um conjunto não vazio $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ é positivamente invariante para o sistema (2.26) se $\forall x_0 \in \Omega$, as trajetórias do sistema $x(t; x_0) \in \Omega, \forall t \geq t_0$.

A próxima definição refere-se a um conjunto positivamente invariante e assintoticamente estável.

Definição 2.5: Seja $\Omega \subset \mathcal{R}^n$ um conjunto não vazio, contendo o ponto de equilíbrio $x = 0$. Este conjunto constitui um domínio positivamente invariante e assintoticamente estável para o sistema (2.26) se

$$\forall x_0 \in \Omega \Rightarrow x(t; x_0) \in \Omega, \forall t \geq t_0, \text{ e } \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0) \rightarrow 0.$$

Nota-se que, em geral, a invariância positiva não implica na estabilidade segundo sentido Lyapunov.

A caracterização da invariância positiva como um subconjunto do espaço de estado é essencial para tratar, por exemplo, problemas como a síntese de leis de controle para sistemas lineares sujeitos a restrições no domínio do tempo, como será visto adiante.

2.7.1 Domínios da invariância

No caso de sistemas autônomos (2.26), os domínios da invariância positiva e de estabilidade assintótica podem, por exemplo, ser determinados a partir de funções de Lyapunov associadas aos sistemas considerados.

Proposição 2.1 [KHA92]: Seja $v(x)$ uma função de Lyapunov para o sistema (2.26) e seja Ω um domínio convexo definido por:

$$\Omega = \{x \in \mathfrak{R}^n : v(x) \leq c, c > 0\}. \quad (2.27)$$

Se $\dot{v}(x) < 0$ ($\dot{v}(x) \leq 0$), $\forall x \in \Omega, x \neq 0$, então Ω é um domínio positivamente invariante e assintoticamente estável (estável) para as trajetórias do sistema (2.26).

Assim, para os sistemas autônomos, a condição de estabilidade assintótica segundo Lyapunov implica na existência de um conjunto positivamente invariante dado por (2.27).

Por outro lado, nota-se que as funções de Lyapunov não fornecem domínios de invariância positiva e de estabilidade que sejam ilimitados ou com o ponto de equilíbrio $x = 0$ pertencente à sua fronteira [TAR91].

Na seqüência, são apresentados os conjuntos elipsoidais positivamente invariantes. Estes conjuntos podem ser gerados a partir de funções quadráticas de Lyapunov do tipo $v(x) = x^T P x, P = P^T > 0$.

Assim, considerando o conjunto elipsoidal, centrado na origem, dado por:

$$\Omega = \{x \in \mathfrak{R}^n : x^T W_1^{-1} x \leq c, W_1 = W_1^T > 0, c > 0\}, \quad (2.28)$$

onde $W_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$.

Com relação à invariância positiva de Ω para o sistema (2.26), obtém-se o resultado seguinte:

Proposição 2.2: *O conjunto elipsoidal definido em Ω (2.28) é positivamente invariante para o sistema incerto (2.26) se e somente se a matriz W_1 satisfaz*

$$A(r)W_1 + W_1A(r)^T \leq 0, \quad \forall r \in \Omega, \quad (2.29)$$

ou seja, de maneira semelhante:

$$A(r)^T P + PA(r) \leq 0, \forall r \in \Omega, \quad (2.30)$$

onde $P = W_1^{-1}$.

Este resultado vem do teorema 2.2 e da proposição 2.1. Claro que, se é suposto que as desigualdades (2.29) ou (2.30) são estritamente negativas, o conjunto Ω definido por (2.28) também é um domínio da estabilidade assintótica para o sistema (2.26).

A noção de estabilidade quadrática através do controle linear pode ser interpretada como uma condição de existência de um controlador K que assegure a invariância positiva e a estabilidade assintótica de um conjunto elipsoidal Ω , conforme (2.28).

Seja o sistema autônomo e incerto:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) \\ A \in \mathcal{D}_A, \end{cases} \quad (2.31)$$

onde o politopo \mathcal{D}_A é definido por (2.8).

Proposição 2.3: *O conjunto elipsoidal Ω definido em (2.28) é positivamente invariante para o sistema (2.31) se e somente se a matriz W_1 satisfaz as seguintes LMIs:*

$$A_i W_1 + W_1 A_i^T \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.32)$$

ou, de maneira equivalente:

$$A_i^T P + PA_i \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.33)$$

onde $P = W_1^{-1}$.

A demonstração é simples e é baseada na proposição 2.2 e no fato de que o conjunto \mathcal{D}_A é convexo. Por outro lado, a desigualdade estrita das LMIs (2.32) ou (2.33) garante também a estabilidade assintótica do domínio Ω para o sistema (2.31).

2.7.2 \mathcal{D} -invariância positiva

Até agora, foi abordada a invariância associada aos sistemas lineares autônomos. Considerando-se um sistema linear não-autônomo descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) \\ w(t) \in \mathcal{D}, \end{cases} \quad (2.34)$$

onde $w(t) \in \mathfrak{R}^l$ é o vetor de perturbação. O conjunto \mathcal{D} é suposto fechado e convexo, contendo $w = 0$.

Para o sistema (2.34), os domínios de invariância positiva são ligados ao domínio de perturbação \mathcal{D} . Com a introdução do conceito de \mathcal{D} -invariância positiva [FEU76], [BLA90], é possível, como será visto adiante, fazer a síntese de controladores para sistemas sujeitos a restrições no domínio do tempo e ainda levar em consideração os critérios de desempenho em relação à perturbação $w(t)$.

Definição 2.6 [BLA90]: *Um conjunto não vazio $\Omega \subset \mathfrak{R}^n$ é positivamente \mathcal{D} -invariante para o sistema (2.34) se*

$$\forall x_0 \in \Omega \Rightarrow x(t; x_0; w) \in \Omega, \forall w(t) \in \mathcal{D}, \forall t \geq t_0. \quad (2.35)$$

Assim, o domínio Ω é positivamente \mathcal{D} -invariante para o sistema (2.34) se todas as trajetórias $x(t; x_0; w)$ inicializadas neste domínio lá permaneçam, qualquer que seja a perturbação $w(t)$. Nota-se que para $\mathcal{D} = \{0\}$, o conceito de \mathcal{D} -invariância positiva é equivalente àquele de invariância positiva definida previamente.

2.8 Estabilidade quadrática com realimentação de saída

O acesso a todos os estados do sistema nem sempre é possível. Neste caso, tem-se a possibilidade de resolver o problema de estabilização através da realimentação de saída.

Nesta seção, o problema é formulado utilizando-se o conceito de estabilidade quadrática, com leis de controle por realimentação de saída estática e dinâmica, para os sistemas sujeitos a incertezas paramétricas do tipo politopo.

2.8.1 Realimentação de saída estática

Seja o sistema linear incerto descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ y(t) = C_y x(t) \\ z(t) = Cx(t) + D_1 w(t) + D_2 u(t) \\ A \in \mathcal{D}_A, B_2 \in \mathcal{D}_B, \end{cases} \quad (2.36)$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $w(t) \in \mathfrak{R}^l$, $y(t) \in \mathfrak{R}^p$ e $z(t) \in \mathfrak{R}^q$ são, respectivamente, os vetores de estado, de controle, de perturbação, de saída medida e de saída controlada. Supõe-se que C_y seja uma matriz de posto cheio.

A lei de controle desejada (2.36), que estabiliza quadraticamente o sistema, é do tipo:

$$u(t) = Ly(t), L \in \mathfrak{R}^{m \times p}. \quad (2.37)$$

Inicialmente, realiza-se a mudança de variável $\tilde{x} = Mx$, sendo M uma matriz inversível da forma:

$$M = \begin{bmatrix} N \\ C_y \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

onde $N \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times n}$ é uma matriz constante. Esta hipótese não é restritiva, pois esta transformação de similaridade é sempre factível [ARA98].

O sistema resultante é dado por:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1 w(t) + \tilde{B}_2 u(t) \\ y(t) = \begin{bmatrix} 0_{p \times (n-p)} & I_p \end{bmatrix} \tilde{x}(t) \\ z(t) = \tilde{C}\tilde{x}(t) + D_1 w(t) + D_2 u(t), \end{cases} \quad (2.39)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= MAM^{-1} \\ \tilde{B}_1 &= MB_1 \\ \tilde{B}_2 &= MB_2 \\ \tilde{C} &= CM^{-1}, \end{aligned}$$

com $\tilde{A} \in \mathcal{D}_{\tilde{A}}$ e $\tilde{B}_2 \in \mathcal{D}_{\tilde{B}}$. $\mathcal{D}_{\tilde{A}}$ e $\mathcal{D}_{\tilde{B}}$ são domínios poliédricos convexos, obtidos pela transformação M , cujos vértices são dados, respectivamente, por \tilde{A}_i , $i = 1, 2, \mathbf{L}, N$ e \tilde{B}_{2j} , $j = 1, 2, \mathbf{L}, M$.

Pode-se demonstrar que o problema de controle por realimentação de saída pode ser escrito como um problema de controle por realimentação de estado com uma restrição na estrutura na matriz de ganho. Este resultado está enunciado no seguinte teorema.

Teorema 2.4 [ARZ92]: *O sistema (2.36) é estabilizável quadraticamente por realimentação de saída estática $u(t) = Ly(t)$, $L \in \mathfrak{R}^{m \times p}$, se e somente se o sistema (2.39) é quadraticamente estabilizável pela realimentação de estado $u(t) = \begin{bmatrix} 0 & L \end{bmatrix} \tilde{x}(t)$.*

A prova deste teorema encontra-se em [ARZ92].

Utilizando-se a parametrização definida nas seções precedentes, uma condição de estabilidade quadrática por realimentação de saída é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 2.5: *O sistema incerto (2.36) é quadraticamente estabilizável por realimentação de saída estática $u(t) = Ly(t)$ se e somente se existe uma matriz definida positiva \tilde{W}_1 e uma matriz $\tilde{W}_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ tais que:*

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i \tilde{W}_1 + \tilde{W}_1 \tilde{A}_i^T + \tilde{B}_{2j} \tilde{W}_2 + \tilde{W}_2^T \tilde{B}_{2j}^T < 0, \quad i=1, 2, \mathbf{L}, N, \\ j=1, 2, \mathbf{L}, M, \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$e \tilde{W}_2 \tilde{W}_1^{-1} = [0 \quad L].$$

A demonstração deste teorema segue diretamente dos teoremas 2.3 e 2.4 [CAM95].

Observação 2.1 [CAM95]: *O problema de estabilização por realimentação de saída estática para o sistema (2.36) é equivalente à busca de um ganho por realimentação de estado estabilizante para o sistema (2.39), com a estrutura $[0 \quad L]$. Esta restrição sobre o ganho é uma função não linear e não convexa com relação as matrizes desconhecidas \tilde{W}_1 e \tilde{W}_2 juntamente com as equações (2.41) e (2.42). Uma maneira de contornar esta restrição é impor a seguinte estrutura para as matrizes \tilde{W}_1 e \tilde{W}_2 :*

$$\tilde{W}_1 = \begin{bmatrix} [\bullet]_{(n-p)} & 0 \\ 0 & [\bullet]_p \end{bmatrix}, \quad (2.41)$$

$$\tilde{W}_2 = [0_{m \times (n-p)} \quad [\bullet]_{m \times p}] \quad (2.42)$$

Com as restrições (2.41) e (2.42), obtém-se então uma condição suficiente de estabilidade quadrática por realimentação de saída, colocada na forma de LMI.

Teorema 2.6 [CAM95]: *Se existem uma matriz definida positiva $\tilde{W}_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e uma matriz $\tilde{W}_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ que satisfazem as restrições (2.41) e (2.42), tais que:*

$$\begin{aligned} \tilde{A}_i \tilde{W}_1 + \tilde{W}_1 \tilde{A}_i^T + \tilde{B}_{2j} \tilde{W}_2 + \tilde{W}_2^T \tilde{B}_{2j}^T < 0, \quad i=1, 2, \mathbf{L}, N, \\ j=1, 2, \mathbf{L}, M, \end{aligned} \quad (2.43)$$

então o sistema (2.36) é quadraticamente estabilizável por realimentação de saída estática e o ganho é dado por $[0 \quad L] = \tilde{W}_2 \tilde{W}_1^{-1}$.

Nota-se que a escolha da matriz N (2.38) tem influência na existência das matrizes \tilde{W}_1 e \tilde{W}_2 , uma vez que as estruturas destas são definidas por (2.41) e (2.42) [CAM95]. Por outro lado, as restrições (2.41) e (2.42) permitem-nos associar ao teorema 2.4 um problema de otimização cujas restrições preservam a propriedade de convexidade.

2.8.2 Realimentação dinâmica de saída

Nesta subsecção, é abordado o problema de estabilidade quadrática por realimentação de saída usando-se um compensador dinâmico. Considerado-se o sistema incerto geral (2.36) e um compensador dinâmico de ordem nc , descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = A_k \zeta(t) + B_k e(t) \\ u(t) = C_k \zeta(t) + D_k e(t), \end{cases} \quad (2.44)$$

onde $\zeta(t) \in \mathfrak{R}^{nc}$, $e(t) \in \mathfrak{R}^p$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ e A_k, B_k, C_k e D_k são matrizes desconhecidas de dimensões apropriadas (Figura 2.4). O modelo do sistema de malha fechada resultante da combinação das equações (2.36) e (2.44), com $e(t) = r(t) - y(t)$, $r \in \mathfrak{R}^p$ e $\zeta(0) = 0$, é dado por:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\zeta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_2 D_k C_y & B_2 C_k \\ -B_k C_y & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{nc \times l} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} B_2 D_k \\ B_k \end{bmatrix} r(t) \\ z(t) = [C - D_2 D_k C_y \quad D_2 C_k] \begin{bmatrix} x(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} + [D_1] w(t) + [D_2 D_k] r(t), \end{cases} \quad (2.45)$$

onde $A \in \mathcal{D}_A$ e $B_2 \in \mathcal{D}_B$.

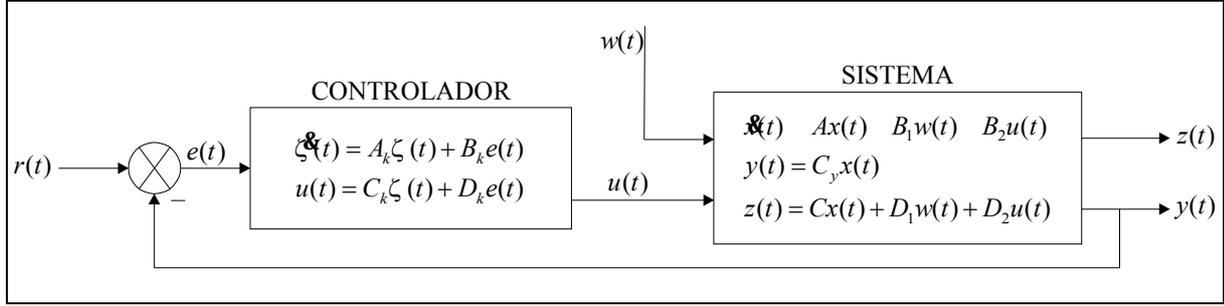


Figura 2.4: Sistema em malha fechada.

Rearranjando-se os termos nas equações (2.45), obtém-se:

$$\begin{cases} \dot{x}_f(t) = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{nc} \end{bmatrix} x_f(t) + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{nc \times l} \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix} u_f(t) \\ y_f(t) = \begin{bmatrix} -C_y & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix} x_f(t) + \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} r(t) \\ z(t) = \begin{bmatrix} C & 0_{q \times nc} \end{bmatrix} x_f(t) + \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} D_2 & 0_{q \times nc} \end{bmatrix} u_f(t), \end{cases} \quad (2.46)$$

onde $x_f(t)$ e $u_f(t)$ são definidos por:

$$x_f(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \zeta(t) \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

e

$$u_f(t) = \begin{bmatrix} D_k & C_k \\ B_k & A_k \end{bmatrix} y_f(t), \quad (2.48)$$

com $A \in \mathcal{D}_A$ e $B_2 \in \mathcal{D}_B$.

Conseqüentemente, o problema de estabilização quadrática por compensação dinâmica é equivalente ao problema de estabilização quadrática por realimentação de saída estática onde o ganho é dado por:

$$L_k(t) = \begin{bmatrix} D_k & C_k \\ B_k & A_k \end{bmatrix}. \quad (2.49)$$

Definindo-se

$$\begin{aligned} A_f &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{nc} \end{bmatrix}; & B_{1f} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{nc \times l} \end{bmatrix}; & B_{2f} &= \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix}; & C_f &= [C \quad 0_{q \times nc}] \\ C_{yf} &= \begin{bmatrix} -Cy & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix}; & D_{yf} &= \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}; & D_{fu} &= [D_2 \quad 0_{q \times nc}] & D_{fw} &= [D_1] \end{aligned} \quad (2.50)$$

o sistema (2.46) pode, então, ser reescrito como segue:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_f(t) = A_f x_f(t) + B_{1f} w(t) + B_{2f} u_f(t) \\ y_f(t) = C_{yf} x_f(t) + D_{yf} r(t) \\ z(t) = C_f x_f(t) + D_{fw} w(t) + D_{fu} u_f(t). \end{cases} \quad (2.51)$$

Teorema 2.7 [CAM95]: *O sistema (2.36) é quadraticamente estabilizável por realimentação dinâmica de saída, usando o compensador descrito por (2.44), se e somente se o sistema (2.51) for quadraticamente estabilizável por realimentação de saída estática.*

Pela mudança das variáveis $\tilde{x}_f = M_f x_f$,

$$M_f = \begin{bmatrix} N_f \\ C_{2f} \end{bmatrix}, N_f \in \mathfrak{R}^{(n-p) \times (n+nc)}, \quad (2.52)$$

obtem-se:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_f(t) = \tilde{A}_f \tilde{x}_f(t) + \tilde{B}_{1f} w(t) + \tilde{B}_{2f} u_f(t) \\ y_f(t) = \begin{bmatrix} 0_{(p+nc) \times (n-p)} & I_{(p+nc)} \end{bmatrix} \tilde{x}_f(t) + D_{yf} r(t) \\ z(t) = \tilde{C}_f \tilde{x}_f(t) + D_{f1} w(t) + D_{f2} u_f(t), \end{cases} \quad (2.53)$$

com as matrizes $\tilde{A}_f \in \mathfrak{R}^{(n+nc) \times (n+nc)}$, $\tilde{B}_{1f} \in \mathfrak{R}^{(n+nc) \times l}$, $\tilde{B}_{2f} \in \mathfrak{R}^{(n+nc) \times (m+nc)}$ e $\tilde{C}_f \in \mathfrak{R}^{q \times (n+nc)}$ definidas, como anteriormente, à partir de A_f , B_{1f} , B_{2f} e C_f , respectivamente.

Assim, para o problema de estabilização quadrática por realimentação dinâmica de saída, como no caso dos sistemas com incertezas do tipo politopo, pode-se também fazer uso da observação 2.1 sobre a estrutura das matrizes de ganho e, conseqüentemente, usar os resultados estabelecidos anteriormente para o problema de estabilização quadrática por realimentação de saída estática da subsecção 2.8.1. Logo, para o caso de realimentação dinâmica de saída, as restrições de estrutura sobre a forma do ganho são expressas por:

$$W_{1f} = \begin{bmatrix} [\bullet]_{(n-p)} & 0 \\ 0 & [\bullet]_{(p+nc)} \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

$$W_{2f} = [0_{(m+nc) \times (n-p)} \quad [\bullet]_{(m+nc) \times (p+nc)}]. \quad (2.55)$$

2.9 Conclusão

Este capítulo foi dedicado à introdução de noções de base que serão usadas nos próximos capítulos para tratar os problemas de síntese de controladores para sistemas lineares contínuos.

Inicialmente, algumas definições relacionadas com funções foram apresentadas e, em seguida, um breve resumo sobre as desigualdades matriciais lineares foi introduzido, salientando as suas grandes vantagens na formulação de problemas de controle.

Após ter apresentado o conceito de estabilidade segundo Lyapunov, foram recordados alguns resultados sobre a estabilidade quadrática de sistemas sujeitos a incertezas paramétricas do tipo politopo. A noção de invariância positiva foi introduzida e comparada à estabilidade quadrática, o que permitiu definir os conjuntos de invariância positiva e de estabilidade para os sistemas incertos. Brevemente, também foi revisto o conceito de \mathcal{D} -invariância positiva relacionado a sistemas com perturbações. Finalmente, a estabilização robusta para realimentação de saída estática e dinâmica foi abordada.

O conceito de estabilidade quadrática permite resolver o problema de estabilização robusta por realimentação de estado ou de saída. Entretanto, diferentemente da realimentação de estado, somente condições suficientes de estabilidade quadrática foram obtidas para a realimentação de saída. O interesse pela abordagem quadrática reside, por um lado, no fato de que problemas de síntese podem levar à resolução de problemas de otimização convexos e, por outro lado, na sua estreita ligação com a invariância positiva para os sistemas incertos. Como será visto mais adiante, a invariância positiva permite estabelecer resultados relativos à estabilidade de sistemas incertos sujeitos a restrições no domínio do tempo. Os sistemas com restrições sujeitos a perturbação serão tratados considerando-se a noção de \mathcal{D} -invariância positiva. Finalmente, todos os resultados foram apresentados sob a forma de LMIs. Realmente, a formulação de problemas de otimização a partir de LMIs é especialmente adaptada à integração de restrições adicionais preservando a convexidade do problema.

Capítulo 3

Otimização em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

3.1 Introdução

As normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ formam um critério de desempenho para problemas de redução de modelos, controle e posicionamento. Existem diferentes formas de estimar estas normas, porém neste trabalho são usadas as desigualdades matriciais lineares (LMIs), que podem ser calculadas através de algoritmos de otimização convexa.

Neste capítulo, a definição das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , e sua utilização na formulação de problemas de controle, é apresentada. Os problemas de controle ótimos \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são abordados no contexto de sistemas lineares contínuos sujeitos a incertezas paramétricas do tipo politopo. O controle, em ambos os problemas, é obtido por realimentação de estado e por realimentação dinâmica de saída.

3.2 Otimização em \mathcal{H}_2

Nesta seção, um critério de desempenho baseado em uma restrição sobre a norma \mathcal{H}_2 de uma certa matriz de transferência é apresentado. Os problemas de otimização associados consistem em determinar um controlador por realimentação de estado e por realimentação de saída que minimize esta norma \mathcal{H}_2 . Na seqüência, a abordagem LQG (Linear Quadrática Gaussiana) é apresentada em um contexto mais geral àquele da otimização \mathcal{H}_2 . Sua extensão

para o caso de sistemas incertos é analisada com o nome de controle \mathcal{H}_2 a custo garantido. O problema de otimização \mathcal{H}_2 também é revisto, de forma sucinta.

A teoria de controle ótimo \mathcal{H}_2 foi bastante estudada entre os anos 60 e 80 através do problema de controle ótimo do tipo LQG, que no caso determinista torna-se LQ (Linear Quadrático) [ATH71, AND71, DOY78]. A partir dos anos 80, alguns resultados significativos e inovadores aparecem nesta área e surge a teoria de controle \mathcal{H}_2 [DOY89].

De fato, a otimização LQG equivale a uma minimização da norma \mathcal{H}_2 do sistema em malha fechada. Esta interpretação suprime o elemento estocástico da abordagem LQG e reduz o papel das matrizes de intensidade, aquelas que descrevem os ruídos brancos do problema LQG, a parâmetros de síntese.

Levando-se em consideração a parametrização dos ganhos estabilizantes proposta anteriormente, a formulação \mathcal{H}_2 permite tratar o problema LQ, em um contexto de sistemas precisamente conhecidos, como um problema de otimização convexa, para o qual os métodos de resolução são particularmente eficazes.

A idéia de estender a teoria LQ para o caso de sistemas com incertezas paramétricas foi proposta por Chang e Peng [CHA72], com o nome de controle a custo garantido. Entretanto, esta extensão é complexa, pois tanto o critério a minimizar, quanto o conjunto de ganhos estabilizantes não possuem propriedades matemáticas que facilitem o seu tratamento [MAK87]. Por outro lado, a formulação \mathcal{H}_2 permite tratar o problema de controle a custo garantido via análise convexa para os sistemas sujeitos a incertezas do tipo politopo [GER92a], no caso da uma abordagem quadrática.

Nota-se que no caso de sistemas sem incertezas, para a realimentação de estado, tem-se uma condição necessária e suficiente, e para a realimentação de saída, uma suficiente, na formulação da restrição de estabilidade.

3.2.1 O problema de controle \mathcal{H}_2 por realimentação de estado

Inicialmente, o problema de controle \mathcal{H}_2 por realimentação de estado é apresentado para o caso de sistemas precisamente conhecidos. O ganho de realimentação de estado ótimo

é obtido a partir da solução de uma equação de Riccati associada ao problema. Para isto, considera-se o sistema linear descrito pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_2(t) = C_2 x(t) + D_{22} u(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $w(t) \in \mathfrak{R}^l$ e $z_2(t) \in \mathfrak{R}^q$ são, respectivamente, os vetores de estado, de controle, de perturbação e de saída controlada. Supõe-se que todas as matrizes do sistema sejam precisamente conhecidas, de dimensões apropriadas, e que $D^T D > 0$, isto é, D tem posto cheio. Admite-se igualmente que o par (A, B_2) seja estabilizável e que $\text{posto}(B_1) = n$ (as perturbações agem em todo o espaço de estado).

Com uma lei de controle por realimentação de estado linear $u(t) = Kx(t)$, pode-se definir as matrizes em malha fechada:

$$\begin{cases} A_f = A + B_2 K \\ C_{2f} = C_2 + D_{22} K. \end{cases} \quad (3.2)$$

A matriz de transferência entre w e z_2 é dada por:

$$H_f(s) = C_{2f}(sI - A_f)^{-1} B_1. \quad (3.3)$$

Supondo-se que o ganho K estabilize assintoticamente o sistema (3.1), a norma \mathcal{H}_2 de $H_f(s)$ é definida como:

$$\|H_f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Tr}[H_f(j\omega)^* H_f(j\omega)] d\omega, \quad (3.4)$$

onde $H_f(j\omega)^* = H_f(-j\omega)^T$.

A norma \mathcal{H}_2 pode ser caracterizada a partir da entrada de perturbação pela aplicação de sinais do tipo impulso. Em outras palavras, considerando as entradas

$w = B_{1i}\delta(t)$, $i = 1, 2, \dots, l$, B_{1i} sendo a i -ésima coluna do B_1 e $\delta(t)$, a função impulso, a norma \mathcal{H}_2 de $H_f(s)$ pode ser igualmente expressa por [DOY89]:

$$\|H_f\|_2^2 = \sum_{i=1}^l \|z_{2i}\|_2^2, \quad (3.5)$$

onde z_{2i} é a saída controlada associada a cada perturbação impulsional.

O cálculo da norma \mathcal{H}_2 de $H_f(s)$ também pode ser efetuado pelas seguintes expressões [DOY89]:

$$\|H_f\|_2^2 = \text{Tr}(C_{2f}L_C C_{2f}^T) = \text{Tr}(B_1^T L_O B_1), \quad (3.6)$$

onde L_C e L_O são, respectivamente, os gramianos de controlabilidade de (A_f, B_2) e de observabilidade de (C_f, A_f) , associados ao sistema (3.1), definidos por:

$$L_C = \int_0^{\infty} e^{A_f t} B_1 B_1^T e^{A_f^T t} dt, \quad (3.7)$$

$$L_O = \int_0^{\infty} e^{A_f^T t} C_{2f}^T C_{2f} e^{A_f t} dt, \quad (3.8)$$

As matrizes L_C e L_O satisfazem as seguintes equações de Lyapunov:

$$A_f L_C + L_C A_f^T + B_1 B_1^T = 0, \quad (3.9)$$

$$A_f^T L_O + L_O A_f + C_{2f}^T C_{2f} = 0. \quad (3.10)$$

Define-se \mathcal{K} como o conjunto de ganhos por realimentação de estado que estabilizam assintoticamente o sistema (3.1). O problema de controle \mathcal{H}_2 por realimentação de estado consiste em determinar o ganho $K \in \mathcal{K}$ que minimize a norma \mathcal{H}_2 da matriz de transferência $H_f(s)$. Este problema pode ser escrito como:

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \|H_f\|_2^2. \quad (3.11)$$

A solução ótima do problema (3.11) é dada por:

$$K = -(D_{22}^T D_{22})^{-1} (B_2^T P + D_{22}^T C_2), \quad (3.12)$$

onde $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é a matriz simétrica definida positiva, solução única da equação de Riccati:

$$A^T P + PA - (B_2^T P + D_{22}^T C_2)(D_{22}^T D_{22})^{-1} (B_2^T P + D_{22}^T C_2) + C_2^T C_2 = 0. \quad (3.13)$$

Nota-se também que o ganho de realimentação de estado (3.12) pode ser obtido como solução do problema LQ seguinte:

$$\begin{aligned} \min_u \int_0^\infty [x^T \quad u^T] \begin{bmatrix} C_2^T C_2 & C_2^T D_{22} \\ D_{22}^T C_2 & D_{22}^T D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} dt \\ \text{s. a } \dot{x}(t) = Ax(t) + B_2 u(t), x(0) = x_0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Neste caso, o valor mínimo do critério de desempenho quadrático é dado para $J^* = x_0^T P x_0$, embora o ganho de realimentação de estado ótimo não dependa da condição inicial x_0 . Além disto, a equação (3.13) pode ser reescrita sob a forma

$$(A + B_2 K)^T P + P(A + B_2 K) + (C_2 + D_{22} K)^T (C_2 + D_{22} K) = 0. \quad (3.15)$$

a partir da qual, levando-se em consideração a equação (3.8), pode-se concluir que $P = L_0$ e

$$\|H_f\|_2^2 = J^* \text{ para } B_1 = x_0.$$

3.2.1.1 Solução via análise convexa

Nesta subseção, o problema de controle \mathcal{H}_2 por realimentação de estado é transformado em um problema de otimização convexa, para o caso de sistemas precisamente conhecidos. Este resultado foi obtido por Peres e Geromel [PER94]. Para isto, a norma \mathcal{H}_2 é expressa como uma função convexa de variável desconhecida e é usada a parametrização convexa dos ganhos estabilizantes, apresentada nas seções precedentes.

O teorema a ser apresentado, com uma formulação LMI, é uma extensão direta do resultado estabelecido em [PER94], para o caso em que a hipótese de ortogonalidade não é levada em consideração ($C_2^T D_{22} = 0$).

Teorema 3.1: *A solução do problema de controle \mathcal{H}_2 definido em (3.11) é dada pela solução ótima do problema de otimização convexa*

$$\begin{aligned} \min_{W_1, W_2, W_3} \quad & \text{Tr}(W_3) \\ \text{s. a} \quad & \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_1 C_2^T + W_2^T D_{22}^T \\ C_2 W_1 + D_{22} W_2 & W_3 \end{bmatrix} > 0, \tag{3.17}$$

$$A W_1 + W_1 A^T + B_2 W_2 + W_2^T B_2^T + B_1 B_1^T < 0, \tag{3.18}$$

onde $W_1 = W_1^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $W_1 > 0$, $W_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $W_3 = W_3^T \in \mathfrak{R}^{q \times q}$. Se (W_{1s}, W_{2s}, W_{3s}) é a solução do problema ótimo (3.16), então o ganho estabilizante dado por $K = W_{2s}W_{1s}^{-1}$ é a solução do problema (3.11) e $\|H_f\|_2^2 = \text{Tr}(W_{3s})$.

A demonstração deste teorema é similar àquela apresentada em [PER94], entretanto algumas observações são pertinentes.

Observação 3.1 [ARA98]: *A partir da condição de estabilidade ligeiramente modificada (3.18) e da equação de Lyapunov (3.9), fica simples mostrar que $W_1 \geq L_c$. Por outro lado, utilizando-se o complemento de Schur, a LMI (3.17) resulta em:*

$$W_3 \geq (C_2W_1 + D_{22}W_2)W_1^{-1}(C_2W_1 + D_{22}W_2)^T.$$

A partir das expressões (3.6), pode-se concluir, com $K = W_2W_1^{-1}$, que:

$$\begin{aligned} \|H_f\|_2^2 &= \text{Tr}[(C_2 + D_{22}K)L_c(C_2 + D_{22}K)^T] \\ &\leq \text{Tr}[(C_2 + D_{22}K)W_1(C_2 + D_{22}K)^T] \\ &\leq \text{Tr}[(C_2 + D_{22}W_2W_1^{-1})W_1(C_2 + D_{22}W_2W_1^{-1})^T] \\ &\leq \text{Tr}[(C_2W_1 + D_{22}W_2)W_1^{-1}(C_2W_1 + D_{22}W_2)^T] \\ &\leq \text{Tr}(W_3), \end{aligned}$$

e a igualdade é verificada na solução W_{3s} .

Observação 3.2: *O problema (3.16) não é estritamente convexo. Entretanto, o ganho de realimentação de estado ótimo $K = W_2W_1^{-1}$ é único [PER94].*

Observação 3.3: *Para um dado controlador K , a norma \mathcal{H}_2 da função de transferência $H_f(s)$, não ultrapassa $\text{Tr}(W_3)$ se existem duas matrizes simétricas $W_1 > 0$ e W_3 tais que*

$$\begin{bmatrix} (A + B_2K)W_1 + W_1(A + B_2K)^T & B_1 \\ B_1^T & -I \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_1(C_2 + D_{22}K)^T \\ (C_2 + D_{22}K)W_1 & W_3 \end{bmatrix} > 0.$$

3.2.1.2 Controle \mathcal{H}_2 a custo garantido

No caso de sistemas incertos, o problema de controle \mathcal{H}_2 pode ser tratado como um problema de controle \mathcal{H}_2 a custo garantido que consiste em buscar uma lei de controle que limite as variações da norma \mathcal{H}_2 para todo domínio de incerteza.

Este problema é apresentado com uma formulação de LMI, no contexto da parametrização dos controladores por realimentação de estado, segundo o conceito de estabilidade quadrática, proposta nas seções precedentes.

Seja o sistema incerto descrito pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z_2(t) = C_2x(t) + D_{22}u(t), \end{cases} \quad (3.19)$$

onde $A \in \mathcal{D}_A$, $B_2 \in \mathcal{D}_B$ e os conjuntos \mathcal{D}_A e \mathcal{D}_B são definidos, respectivamente, por (2.8) e (2.9). Supõe-se que o par (A, B_2) seja estabilizável, $\forall A \in \mathcal{D}_A, \forall B_2 \in \mathcal{D}_B$ e que $D^T D > 0$.

A matriz de transferência entre a perturbação w e a saída controlada z_2 é expressa, com $u(t) = Kx(t)$, $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, por

$$H_f(s) = C_{2f}(sI - A_f)^{-1}B_1, \quad (3.20)$$

onde $A_f = A + B_2K$ e $C_{2f} = C_2 + D_{22}K$, $A \in \mathcal{D}_A$, $B_2 \in \mathcal{D}_B$.

O problema de controle \mathcal{H}_2 a custo garantido para o caso de incertezas paramétricas do tipo politopo é enunciado a seguir.

Teorema 3.2 [ARA98]: *Determinar um ganho $K^* \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e um escalar $0 \leq \beta \leq +\infty$ tais que*

$$K^* = \text{Arg} \min_{K \in \mathcal{K}_P} \left\{ \beta : \|H_f\|_2 \leq \beta, \forall A \in \mathcal{D}_A, \forall B_2 \in \mathcal{D}_B \right\}. \quad (3.21)$$

A solução deste problema se encontra em [GER92a], com a hipótese suplementar de ortogonalidade $C_2^T D_{22} > 0$. Uma extensão direta deste resultado, sem considerar esta hipótese, é apresentado no teorema a seguir.

Teorema 3.3 [ARA98]: *Seja (W_{1p}, W_{2p}, W_{3p}) a solução ótima do problema de otimização convexa:*

$$\begin{aligned} & \min_{W_1, W_2, W_3} \text{Tr}(W_3) \\ & \text{s. a} \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_1 C_2^T + W_2^T D_{22}^T \\ C_2 W_1 + D_{22} W_2 & W_3 \end{bmatrix} > 0 \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} A_i W_1 + W_1 A_i^T + B_{2j} W_2 + W_2^T B_{2j}^T + B_1 B_1^T < 0, \quad i=1, 2, \mathbf{L}, N, \\ j=1, 2, \mathbf{L}, M, \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde $W_1 = W_1^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $W_1 > 0$, $W_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $W_3 = W_3^T \in \mathfrak{R}^{q \times q}$. Então o ganho estabilizante dado por $K = W_{2p} W_{1p}^{-1}$, com $\beta_2 = \text{Tr}(W_{3p})$, é a solução do problema de controle \mathcal{H}_2 a custo garantido (3.22).

A demonstração deste teorema é similar àquela do teorema 4 em [GER92a], levando-se em consideração a observação 3.1 do teorema 3.1.

Quando se trata de sistemas precisamente conhecidos ($N=1$ e $M=1$), o limite superior β da norma \mathcal{H}_2 é a solução do problema de otimização \mathcal{H}_2 , dado pelo teorema 3.1.

3.2.2 O problema de controle \mathcal{H}_2 por realimentação de saída

Nesta subseção, o problema de controle \mathcal{H}_2 por realimentação dinâmica de saída para sistemas sujeitos a incertezas paramétricas é descrito. Considera-se o sistema linear descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ y(t) = C_yx(t) \\ z_2(t) = C_2x(t) + D_{22}u(t), \end{cases} \quad (3.25)$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $w(t) \in \mathfrak{R}^l$, $y(t) \in \mathfrak{R}^p$, $z_2(t) \in \mathfrak{R}^q$, C_y é uma matriz conhecida de posto cheio e $A \in \mathcal{D}_A$ e $B_2 \in \mathcal{D}_B$.

Seja um compensador dinâmico descrito por:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = A_k\zeta(t) + B_k e(t) \\ u(t) = C_k\zeta(t) + D_k e(t), \end{cases} \quad (3.26)$$

onde $\zeta(t) \in \mathfrak{R}^{nc}$ e A_k, B_k, C_k e D_k são matrizes desconhecidas de dimensões apropriadas. Supõe-se que $\zeta(0) = 0$.

A matriz de transferência entre a perturbação w e a saída controlada z_2 é dada por:

$$H_f(s) = \bar{C}_{2f}(sI - \bar{A}_f)^{-1}\bar{B}_{1f}, \quad (3.27)$$

onde

$$\bar{A}_f = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{2j} & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix} L_k \begin{bmatrix} -C_y & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \mathbf{L}, N, \\ j = 1, 2, \mathbf{L}, M, \end{matrix}$$

$$\bar{B}_{1f} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{nc \times l} \end{bmatrix},$$

$$\bar{C}_{2f} = [C_2 \quad 0_{q \times nc}] + [D_{22} \quad 0_{q \times nc}] L_k \begin{bmatrix} -C_y & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix},$$

com

$$L_k = \begin{bmatrix} D_k & C_k \\ B_k & A_k \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(m+nc) \times (p+n)}.$$

O problema de controle \mathcal{H}_2 a custo garantido, por realimentação dinâmica de saída, consiste em determinar um ganho L_k estabilizante (A_f seja assintoticamente estável, $\forall A \in \mathcal{D}_A$ e $\forall B_2 \in \mathcal{D}_B$) que limite as variações da norma \mathcal{H}_2 de $H_f(s)$ (3.27) para todo domínio de incertezas. Uma solução para este problema é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 3.4 [SCH97][GER98]: *Seja (\bar{W}_1, \bar{L}_k) a solução ótima do problema de otimização*

$$\begin{aligned} & \min_{W_1, L_k} \text{Tr}(\bar{C}_{2f} W_1 \bar{C}_{2f}^T) \\ & \text{s. a} \end{aligned}$$

$$\bar{A}_f W_1 + W_1 \bar{A}_f^T + B_{1f} B_{1f}^T < 0,$$

para todos os pares (A_i, B_{2j}) , $i = 1, 2, \mathbf{L}, N$, e $j = 1, 2, \mathbf{L}, M$, onde $W_1 = W_1^T \in \mathfrak{R}^{(n+nc) \times (n+nc)}$, $W_1 > 0$. Então, \bar{L}_k define o controlador (3.26) ótimo que soluciona o problema de controle \mathcal{H}_2 a custo garantido e $\|H_f\|_2^2 \leq \beta^2 = \text{Tr}(\bar{C}_{2f} \bar{W}_1 \bar{C}_{2f}^T)$.

A demonstração deste teorema segue os mesmos passos daquela do teorema 3.3.

3.3 Otimização em \mathcal{H}_∞

Em adição à norma \mathcal{H}_2 , que é dada como uma caracterização do ganho médio do sistema, a norma \mathcal{H}_∞ também é importante para os sistemas, pois provê a medida do pior caso no ganho do sistema.

O problema de controle \mathcal{H}_∞ e sua ligação à robustez foi introduzido por George Zames em seu trabalho seminal no final dos anos 70 [ZAM81].

Primeiramente a teoria foi apresentada inteiramente no domínio da frequência, e o cálculo de controladores ótimos \mathcal{H}_∞ foi baseado na teoria de funções analíticas e em métodos teóricos de operadores. Estes métodos eram bastante complicados e deram somente uma introspecção limitada na estrutura das soluções. Por o exemplo, antes da introdução da solução no espaço de estado em 1988, não se sabia que a ordem de um controlador era necessária para obter-se um limite da norma \mathcal{H}_∞ . Uma exposição excelente destes métodos é dada em [FRA87].

A conexão entre o problema \mathcal{H}_∞ e a teoria de jogos linear quadrática foi observada primeiramente por Petersen [PET87], e o problema \mathcal{H}_∞ de realimentação de estado estática foi apresentado então em Khargonekar *et al.* [KHA88] e em Zhou e Khargonekar [ZHO88]. A solução geral no espaço de estado para o problema do controle ótimo \mathcal{H}_∞ foi obtida por Glover e Doyle [GLO88] e desenvolvida completamente no clássico artigo de Doyle *et al.* [DOY89] e pela versão preliminar da conferência em Doyle *et al.* [DOY88].

A solução no espaço de estado revolucionou a computação numérica prática de controladores ótimos \mathcal{H}_∞ . Visto que o cálculo de um controlador ótimo \mathcal{H}_∞ antes de 1988 era uma tarefa extremamente difícil, a solução no espaço de estado tem aproximadamente a mesma complexidade que o problema de controle linear quadrático padrão. Entretanto, os artigos originais [DOY88, DOY89] não fizeram muito para aumentar a compreensão geral do controle \mathcal{H}_∞ devido a sua complexidade. De fato, o artigo [DOY89] foi chamado de “o mais importante artigo ilegível na historia da ciência do controle”. Desde então, o aumento da compreensão do problema tornou possível apresentar o controlador ótimo \mathcal{H}_∞ de forma significativamente simples. Esta aproximação foi desenvolvida gradualmente por pesquisadores na década de 90.

Ironicamente, o problema do controle ótimo \mathcal{H}_∞ , que foi originalmente introduzido no domínio da frequência para tratar dos casos de robustez em que os métodos de controle lineares quadráticos prevalentes no domínio do tempo não atendiam, é resolvido hoje pelos algoritmos que têm uma semelhança próxima aos mesmos procedimentos usados para resolver precisamente muitos problemas de controle lineares quadráticos.

A teoria de jogos linear quadrática, com a qual a solução no espaço de estado \mathcal{H}_∞ é semelhante, foi largamente desenvolvida na década de 60. A referência padrão neste campo é o livro [BAS82]. Após a conexão entre o problema e a teoria de jogos dinâmica ter sido realizada, aquele se tornou mais fácil, pois muito da teoria requerida já estava disponível na literatura da teoria de jogos. Em particular, o resultado ótimo da realimentação de estado (teorema 3.6) foi desenvolvido inteiramente na teoria de jogo linear quadrática clássica. Uma apresentação completa da aproximação da teoria de jogos ao controle \mathcal{H}_∞ pode ser encontrada em [BAS91].

Na seqüência, os problemas de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estado e por realimentação de saída são apresentados no contexto das desigualdades matriciais, considerando-se os sistemas lineares contínuos sujeitos a incertezas paramétricas do tipo politopo.

3.3.1 O problema de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estado

Inicialmente, o problema de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de estado é apresentado para o caso de sistemas precisamente conhecidos.

Considera-se o sistema linear descrito pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ z_\infty(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t), \end{cases} \quad (3.28)$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $w(t) \in \mathfrak{R}^l$ e $z_\infty(t) \in \mathfrak{R}^q$ são, respectivamente, os vetores de estado, de controle, de perturbação e de saída controlada. Supõe-se que todas as matrizes do sistema

sejam precisamente conhecidas, de dimensões apropriadas. Admite-se igualmente que o par (A, B_2) seja estabilizável e que o par (A, C_1) seja detectável.

Com uma lei de controle por realimentação de estado linear $u(t) = Kx(t)$, pode-se definir as matrizes em malha fechada:

$$\begin{cases} A_f = A + B_2 K \\ C_{1f} = C_1 + D_{11} K. \end{cases} \quad (3.29)$$

A matriz de transferência entre w e z_∞ é dada por:

$$H_f(s) = C_{1f}(sI - A_f)^{-1} B_1 + D_{11}. \quad (3.30)$$

Supondo-se que o ganho K estabilize assintoticamente o sistema (3.28), a norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência $H_f(s)$ é o maior ganho RMS:

$$\|H_f\|_\infty = \sup_{\substack{u \in \mathcal{L}_2 \\ u \neq 0}} \frac{\|z_\infty\|_{\mathcal{L}_2}}{\|u\|_{\mathcal{L}_2}}, \quad (3.31)$$

onde \mathcal{L}_2 é o espaço dos sinais com energia finita e $z_\infty(t)$ é a saída do sistema para a entrada $u(t)$. Esta norma corresponde ao pico do ganho da resposta em frequência $H_f(j\omega)$, isto é:

$$\|H_f\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}_+} \sigma_{\max}(H_f(j\omega)), \quad (3.32)$$

onde σ_{\max} é o máximo valor singular da resposta em frequência do sistema $H_f(j\omega)$.

Em sua formulação padrão, o problema de controle \mathcal{H}_∞ é definido como um problema de rejeição de distúrbio, ou seja, pode ser interpretado como uma minimização do efeito do distúrbio w , como medida do “pior caso”, na saída z_∞ . Para um sistema monovariável, a norma \mathcal{H}_∞ pode ser obtida a partir do ganho máximo do diagrama de Bode associado.

A partir da definição (3.32), tem-se que

$$\|H_f\|_\infty < \gamma \Leftrightarrow I - \gamma^{-2} H_f(j\omega) * H_f(j\omega) \geq 0, \quad \omega \in \mathfrak{R}_+.$$
 (3.33)

Assim, a norma \mathcal{H}_∞ pode ser obtida por busca exaustiva de $\sigma_{\max}(H_f(j\omega))$, para $\omega \in [w_{\min}, w_{\max}]$. A norma \mathcal{H}_∞ também pode ser calculada utilizando-se o Hamiltoniano, conforme o teorema a seguir.

Teorema 3.5 [ZHO96]: *Sejam o sistema linear dado por (3.28) e a função de transferência em malha fechada associada (3.30), com A_f assintoticamente estável e $\gamma > 0$. Defina-se a matriz Hamiltoniano*

$$M_\gamma = \begin{bmatrix} A_f & \gamma^{-2} B_1 B_1^T \\ -C_{1f}^T C_{1f} & -A_f^T \end{bmatrix}. \quad (3.34)$$

Então, $\|H_f\|_\infty < \gamma$ se e somente se M_γ não possui nenhum autovalor sobre o eixo imaginário.

Pelo teorema 3.5, o γ pode ser calculado iterativamente partindo-se de um $\gamma > 0$ inicial, calculando os autovalores de M_γ , variando-se γ e repetindo o cálculo até a precisão desejada.

3.3.1.1 Problema geral de controle \mathcal{H}_∞ ótimo

O problema de controle ótimo consiste em encontrar um controlador qualquer $K(s)$ que estabilize o sistema (3.28) e minimize $\|H_f\|_\infty$, ou seja:

$$\min_{K(s) \in \mathcal{K}} \|H_f\|_\infty. \quad (3.35)$$

Nota-se que, em geral, a solução ótima do problema acima não é única para sistemas multivariáveis. Além disto, encontrar o controlador ótimo \mathcal{H}_∞ é numericamente e teoricamente complicado, como demonstrou Glover e Doyle em [GLO89]. Isto difere da teoria de controle \mathcal{H}_2 , na qual o controlador ótimo é único e pode ser obtido pela solução de equações de Riccati, sem iterações. Assim, um problema de otimização que aproxima da solução ótima do problema (3.35) é definido como Problema de Controle \mathcal{H}_∞ Subótimo.

3.3.1.2 Problema de controle \mathcal{H}_∞ subótimo

Dado um $\gamma > 0$, encontrar um controlador estabilizante, se este existe, tal que $\|H_f\|_\infty < \gamma$.

Pode-se calcular o menor limite superior para a norma $\|H_f\|_\infty$ pela minimização de γ .

Para o caso de sistemas precisamente conhecidos, tem-se o seguinte resultado baseado na equação do tipo Riccati:

Teorema 3.6 [DOY89]: *Para um γ dado, supõe-se que o par (A_f, C_{1f}) seja observável. Então,*

$$\|H_f\|_\infty \leq \gamma \quad (3.36)$$

se e somente se a equação de Riccati

$$A_f^T P + P A_f + (P B_1 + C_{1f}^T D_{11})(\gamma^2 I - D_{11}^T D_{11})^{-1} (B_1^T P + D_{11}^T C_{1f}) + C_{1f}^T C_{1f} = 0 \quad (3.37)$$

admite solução simétrica definida positiva $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$.

A demonstração se encontra em [DOY89].

Este teorema não é útil na síntese de um ganho $K \in \mathcal{K}$ que garanta $\|H_f\|_\infty < \gamma$. Um resultado importante nesta direção, obtido a partir de manipulações nas equações (3.36) e (3.37), é dado a seguir.

3.3.1.3 Solução via análise convexa

Teorema 3.7 [CHI96], [SCH95]: *Seja $\gamma > 0$ dado, e supõe-se que (A, B_2) seja controlável e (A, C_1) seja observável. Então, existe um ganho $K \in \mathcal{K}$ tal que $\|H_f\|_\infty \leq \gamma$ se e somente se existirem $W_1 = W_1^T > 0$ e W_2 solução da LMI*

$$\begin{bmatrix} AW_1 + W_1A^T + B_2W_2 + W_2^TB_2^T & B_1 & (C_1W_1 + D_{12}W_2)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ C_1W_1 + D_{12}W_2 & D_{11} & -\gamma^2I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.38)$$

Em caso afirmativo, o ganho estabilizante solução do problema de controle \mathcal{H}_∞ é dado por $K = W_2W_1^{-1}$.

A demonstração deste teorema é simples, e pode ser obtida usando-se o complemento de Schur (subseção 2.5.2) e a equação (3.37).

3.3.1.4 Sistemas incertos

Considera-se o sistema incerto, com incertezas do tipo politopo, descrito pelas equações:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z_\infty(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t), \end{cases} \quad (3.39)$$

onde $A \in \mathcal{D}_A$, $B_2 \in \mathcal{D}_B$ e os conjuntos \mathcal{D}_A e \mathcal{D}_B são definidos, respectivamente, por (2.8) e (2.9). Supõe-se que o par (A, B_2) seja estabilizável, $\forall A \in \mathcal{D}_A, \forall B_2 \in \mathcal{D}_B$.

Teorema 3.8 [CHI96], [SCH95]: *Seja $\gamma > 0$ dado, e supõe-se que (A, B_2) seja controlável e (A, C_1) seja observável, $\forall A \in \mathcal{D}_A, \forall B_2 \in \mathcal{D}_B$. Então A_f é quadraticamente estável se e somente se existirem $W_1 = W_1^T > 0$ e W_2 solução das LMIs*

$$\begin{bmatrix} A_i W_1 + W_1 A_i^T + B_{2j} W_2 + W_2^T B_{2j}^T & B_1 & (C_1 W_1 + D_{12} W_2)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ C_1 W_1 + D_{12} W_2 & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.40)$$

$i = 1, 2, \mathbf{L}, N$, e $j = 1, 2, \mathbf{L}, M$. Em caso afirmativo, o ganho estabilizante solução do problema de controle \mathcal{H}_∞ é dado por $K = W_2 W_1^{-1}$ e $\|H_f\|_\infty \leq \gamma$.

A demonstração pode ser obtida utilizando-se os resultados do teorema 3.7 nos vértices (A_i, B_{2j}) e a definição de combinação convexa.

Observação 3.4: *Para um dado controlador K , o ganho RMS em malha fechada entre w e z_∞ não ultrapassa γ se e somente se existe uma matriz simétrica W_1 , definida positiva, tal que*

$$\begin{bmatrix} (A + B_2 K) W_1 + W_1 (A + B_2 K)^T & B_1 & W_1 (C_1 + D_{12} K)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ (C_1 + D_{12} K) W_1 & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0.$$

3.3.2 O problema de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída

Nesta subseção será visto o problema de controle \mathcal{H}_∞ com realimentação de saída para sistemas com incertezas paramétricas, realizado usando-se um compensador dinâmico.

Considera-se o seguinte sistema controlado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ y(t) = C_y x(t) \\ z_\infty(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t), \end{cases} \quad (3.41)$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $w(t) \in \mathfrak{R}^l$, $y(t) \in \mathfrak{R}^p$, $z_\infty(t) \in \mathfrak{R}^q$ e C_y é uma matriz conhecida de posto cheio.

Seja um compensador dinâmico descrito por:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = A_k \zeta(t) + B_k e(t) \\ u(t) = C_k \zeta(t) + D_k e(t), \end{cases} \quad (3.42)$$

onde $\zeta(t) \in \mathfrak{R}^{nc}$ e A_k, B_k, C_k e D_k são matrizes desconhecidas de dimensões apropriada. Supõe-se que $\zeta(0) = 0$.

A matriz de transferência entre a perturbação w e a saída controlada z_∞ , para a qual se deseja minimizar a norma \mathcal{H}_∞ , é dada por:

$$H_f(s) = \bar{C}_{1f}(sI - \bar{A}_f)^{-1} \bar{B}_{1f} + \bar{D}_{11f}, \quad (3.43)$$

onde

$$\bar{A}_f = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{2j} & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix} L_k \begin{bmatrix} -C_y & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \mathbf{L}, N, \\ j = 1, 2, \mathbf{L}, M, \end{matrix}$$

$$\bar{B}_{1f} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{nc \times l} \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_{11f} = [D_{11}]$$

$$\bar{C}_{1f} = [C_1 \quad 0_{q \times nc}] + [D_{12} \quad 0_{q \times nc}] L_k \begin{bmatrix} -C_y & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix},$$

com

$$L_k = \begin{bmatrix} D_k & C_k \\ B_k & A_k \end{bmatrix} \in \mathfrak{R}^{(m+nc) \times (p+n)}.$$

O problema de controle robusto \mathcal{H}_∞ , por realimentação dinâmica de saída, consiste em determinar um controlador dinâmico L_k que estabilize assintoticamente o sistema (3.43) e que limite as variações da norma \mathcal{H}_∞ de $H_f(s)$ (3.43) para todo domínio de incerteza. O teorema a seguir apresenta uma formulação baseada em desigualdades matriciais para o problema de controle robusto \mathcal{H}_∞ .

Teorema 3.9 [CHI96], [SCH95]: *Seja (\bar{W}_1, \bar{L}_k) a solução ótima do problema de minimização*

$$\begin{aligned} & \min_{W_1, L_k} \gamma \\ & \text{s. a} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_f W_1 + W_1 \bar{A}_f^T & \bar{B}_{1f} & W_1 \bar{C}_{1f}^T \\ B_{1f}^T & -I & \bar{D}_{11f}^T \\ \bar{C}_{1f} W_1 & \bar{D}_{11f} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0,$$

todos os pares (A_i, B_{2j}) , $i = 1, 2, \mathbf{L}, N$, e $j = 1, 2, \mathbf{L}, M$, onde $W_1 = W_1^T \in \mathfrak{R}^{(n+nc) \times (n+nc)}$, $W_1 > 0$. Então, \bar{L}_k define o controlador (3.42) ótimo que soluciona o problema de controle robusto \mathcal{H}_∞ e $\|H_f\| \leq \gamma$.

A demonstração deste teorema pode ser feita a partir do teorema 3.8 e da definição de combinação convexa.

3.4 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os conceitos básicos necessários ao entendimento das normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , que servirão como critérios de desempenho nos projetos de

controladores desenvolvidos neste trabalho. Ênfase foi dada na apresentação dos resultados sob a forma de desigualdades matriciais pelas vantagens já discutidas anteriormente.

É importante salientar que os problemas de otimização em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por realimentação de estado podem ser formulados como problemas de otimização convexa tanto para sistemas precisamente conhecidos quanto para sistemas sujeitos a incertezas paramétricas do tipo politopo.

A mesma formulação convexa não se aplica para o caso de realimentação dinâmica de saída. Os problemas de otimização em \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída foram escritos utilizando-se as desigualdades matriciais, porém estas normalmente não são convexas em L_k e W_1 .

Capítulo 4

Algoritmos Genéticos

4.1 Introdução

Neste capítulo, são apresentados os conceitos básicos da computação evolucionária (ou evolutiva). Os três principais paradigmas são mencionados e algoritmos básicos, de cada um, são implementados para comparação de desempenho, sendo considerada a melhor aptidão após o mesmo número de gerações. A aptidão corresponde a minimização da função objetivo, a qual é baseada nos conceitos de normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , definidos nos capítulos anteriores. Adota-se, por ter apresentado os melhores resultados, o algoritmo genético como padrão para a resolução dos problemas abordados neste trabalho.

Realiza-se, na seqüência, uma descrição detalhada dos algoritmos genéticos, abordando-se os principais conceitos, etapas de implementação, tipos de representação e operadores, justificando-se, em cada caso, as escolhas para a implementação do algoritmo genético utilizado, visando às características dos problemas tratados.

Como o problema a ser resolvido faz o papel do ambiente, e cada indivíduo da população é associado a uma solução candidata, um indivíduo vai estar mais adaptado ao ambiente sempre que ele corresponder a uma solução mais eficaz para o problema. Com a evolução, a cada geração obtêm-se soluções candidatas provavelmente mais eficazes, embora não exista a garantia de se chegar à solução ótima ao final do processo evolutivo. Entretanto, partindo-se do princípio que os problemas a serem resolvidos são suficientemente complexos, a ponto de dificultar uma formulação matemática abrangente e o atendimento de requisitos básicos de tratabilidade por ferramentas convencionais, a abordagem a partir da computação

evolutiva torna-se atraente, já que a aplicação de técnicas de solução conhecidas, dedicadas e capazes de garantir a obtenção de uma solução ótima, não é possível nestes casos.

4.2 Computação Evolutiva: definição do paradigma

Os métodos de otimização e busca estocástica baseados nos princípios e modelos da evolução biológica natural têm recebido crescente interesse nas últimas décadas, devido principalmente a sua versatilidade para a resolução de problemas complexos, nas áreas de otimização e aprendizado de máquina. O desenvolvimento de modelos computacionais, inspirados nos mecanismos evolutivos, caracteriza-se pela configuração de algoritmos de otimização robustos e sistemas adaptativos [MIC96].

Os problemas de otimização são baseados em três pontos principais: a codificação do problema, a função objetivo que se deseja maximizar (ou minimizar) e o espaço de soluções associado.

Os algoritmos evolutivos (AEs), metodologias da área de computação evolucionária ou evolutiva (CE), não são algoritmos computacionais em seu significado usual, mas formam uma classe de métodos regidos por princípios similares, constituindo uma família de modelos computacionais inspirados na evolução, que incorporam uma solução potencial para um problema específico numa estrutura semelhante à de um cromossomo e aplicam operadores especiais a essas estruturas de forma a preservar informações críticas relativas à solução do problema. Estes princípios oriundos do “mundo biológico” são baseados na teoria da evolução Darwiniana. Os AEs tentam abstrair e imitar alguns dos mecanismos evolutivos na resolução de problemas que requerem adaptação, busca e otimização [BAC97].

Após esta fase, este campo do conhecimento permaneceu relativamente desconhecido ou inexplorado pela maioria da comunidade científica, por mais de três décadas. Este fato deve-se, principalmente, à falta de plataformas computacionais poderosas, naquela época, da formalização e caracterização deficiente de cada metodologia evolutiva nos primeiros estudos nesta área.

Os trabalhos fundamentais de Holland, Rechenberg, Schwefel e Fogel, serviram à realização de mudanças neste cenário, durante a década de 70. Atualmente, observa-se um crescimento do número de publicações, aplicações e conferências no campo da CE.

A CE está baseada nas idéias da seleção natural e sua aplicação em um ambiente artificial [FOG98, GOL89]. A seleção natural é vista como um processo de otimização [BRE62], no qual os indivíduos da população vão melhorando gradualmente para adaptarem-se ao meio.

Para a CE, um indivíduo é uma solução potencial de um problema, codificado conforme a operação do algoritmo, e o meio onde este se desenvolve compõem a função objetivo e as restrições, as quais dirão quão apto é o indivíduo para sobreviver.

A CE envolve métodos que são populacionais, o que significa que trabalham com várias soluções ao mesmo tempo. Tal fato evita atingir um valor ótimo local. Uma vantagem significativa da computação evolutiva está na possibilidade de resolver problemas pela simples descrição matemática do que se quer buscar como solução, não havendo necessidade de se indicar explicitamente os passos até o resultado, que certamente seriam específicos para cada caso. É lógico que os AEs correspondem a uma seqüência de passos até a solução, mas estes passos são os mesmos para uma ampla gama de problemas, fornecendo robustez e flexibilidade. Sendo assim, a CE deve ser entendida como um conjunto de técnicas e procedimentos genéricos a serem aplicados na solução de problemas complexos, para os quais outras técnicas conhecidas são ineficazes ou nem sequer são aplicáveis.

Os progressos verificados nos anos 90 confirmaram a potencialidade dos AEs na solução de problemas de elevada complexidade, assim como evidenciaram suas limitações [BAC97]:

- por serem métodos estocásticos, seu desempenho varia de execução para execução (para evitar isto, neste trabalho foi utilizado o mesmo gerador de números aleatórios com a mesma semente);
- apresentam dificuldades para a determinação do ótimo global, sem a utilização de uma metodologia de otimização local;
- necessitam da análise de todas as amostras do processo a cada avaliação da aptidão (limitação relevante para aplicações de controle em tempo real, fato que não é abordado pelos exemplos tratados neste trabalho).

Durante a execução de um algoritmo evolutivo, aplicam-se à população alguns operadores, através dos quais novas soluções são obtidas. Estas novas soluções podem ser conservadas ou descartadas por meio de um mecanismo de seleção. Este processo ocorre por um certo número de repetições que, no contexto da computação evolutiva, são denominadas de gerações.

Em relação aos operadores, os mais comuns para a representação real são a recombinação e a mutação. Na recombinação é feita uma mistura de dois ou mais indivíduos, chamados de pais, para serem obtidos um ou mais indivíduos novos, chamados de filhos. A mutação é uma alteração aleatória em um ou mais indivíduos.

As características mencionadas são comuns aos três paradigmas clássicos da computação evolutiva. Tais paradigmas são:

- Programação evolutiva

Foi proposta por Lawrence J. Fogel [FOG66], com o objetivo principal de desenvolver máquinas de estados finitos. Mais tarde, David Fogel descreveu o algoritmo de programação evolutiva para otimização numérica [FOG92].

Algoritmo 1 – Programação evolutiva

Gerar a população inicial com distribuição uniforme

Avaliar a população inicial

Repetir

 Aplicar operador de mutação

 Avaliar cada filho

 Realizar a seleção

Até ser cumprida a condição de parada

O algoritmo da programação evolutiva é mostrado no Algoritmo 1. A população inicial é de tamanho μ . O operador de mutação obtém um filho para cada indivíduo (quer dizer, são obtidos μ filhos no total), e está baseado em uma variável aleatória com distribuição normal [FOG98]. Nota-se que neste caso não se aplica recombinação, porque a programação evolutiva simula a evolução das espécies, e espécies diferentes não são capazes de recombinarem-se uma com as outras.

A seleção realiza-se por meio de uma série de torneio estocástico que leva em consideração os μ pais e os μ filhos. Ao término do processo de seleção tem-se novamente μ indivíduos que passarão à geração seguinte.

- Estratégias evolutivas

Foram desenvolvidas por Ingo Rechenberg [REC73], quem primeiro propôs a estratégia evolutiva $(1+1)$, que evoluía um único indivíduo.

Mais tarde apareceram as estratégias evolutivas (μ, λ) e $(\mu + \lambda)$, que já utilizavam uma população com mais de um indivíduo.

Algoritmo 2 – Estratégias evolutivas

Gerar a população inicial com distribuição uniforme

Avaliar a população inicial

Repetir

Aplicar operador de mutação

Aplicar operador de recombinação (opcional)

Avaliar cada filho

Realizar a seleção

Até ser cumprida a condição de parada

O algoritmo das estratégias evolutivas é o Algoritmo 2. A população inicial é de tamanho μ , e os operadores de recombinação e mutação geram λ filhos.

Se durante a seleção só se levam em conta os λ filhos para formar a nova população, trata-se de uma estratégia evolutiva (μ, λ) . Se a seleção leva em conta tanto os pais quanto os filhos, consiste de uma estratégia evolutiva $(\mu + \lambda)$.

O mecanismo de seleção é determinístico, ao contrário da programação evolutiva, sendo que os melhores indivíduos μ passam à geração seguinte. O operador principal é o de mutação, e está baseado em uma variável aleatória com distribuição normal, igual à programação evolutiva. O operador de recombinação é secundário, ou seja, tem menor importância do que o de mutação e, de fato, pode ser omitido.

- Algoritmos genéticos

Foi proposto por John Holland [HOL62] com o objetivo de resolver problemas de aprendizagem de máquina.

Algoritmo 3 – Algoritmo genético

Gerar a população inicial com distribuição uniforme

Avaliar a população inicial

Repetir

 Realizar a seleção

 Aplicar operador de recombinação

 Aplicar operador de mutação

 Avaliar cada filho

Até ser cumprida a condição de parada

O algoritmo genético é mostrado no Algoritmo 3. Nos algoritmos genéticos os indivíduos são codificados, via de regra, em forma de cadeia binária, real ou inteira. Ao contrário da programação evolutiva e das estratégias evolutivas que não requerem codificação alguma. Até agora, uma grande variedade de formas de representação, métodos de seleção, operadores de recombinação e de mutação foram propostos para os algoritmos genéticos [BAC97].

Nota-se que no algoritmo genético, dependendo das probabilidades de recombinação e mutação, a recombinação costuma ser o operador principal e a mutação, o operador secundário.

Os três tipos de algoritmos foram testados para o caso da realimentação de estado com minimização \mathcal{H}_2 e como o desempenho do algoritmo genético mostrou-se superior, todos os demais casos foram executados com a utilização do algoritmo genético.

4.3 Algoritmos genéticos

Os Algoritmos Genéticos (AGs) são algoritmos de busca que utilizam princípios inspirados na genética natural para busca de soluções para os problemas. A idéia básica é manter a população de estrutura conhecida que se desenvolve, no ciclo seguinte, através de um processo de competição e variação controlada. Cada estrutura na população representa uma solução candidata para o problema concreto e tem uma aptidão associada para determinar quais estruturas serão usadas para formar as novas estruturas na competição. As novas estruturas são criadas usando-se operadores genéticos como, por exemplo, seleção, cruzamento e mutação. AGs são empregados freqüentemente com sucesso em problemas de busca e otimização [SAN97], pois têm habilidade para explorar a informação acumulada em torno de um espaço de busca inicialmente desconhecido. Esta é sua característica chave, particularmente em espaços de busca grandes, complexos e pouco conhecidos, onde ferramentas de busca clássicas (por exemplo, enumerativas e heurísticas) são inapropriadas, oferecendo uma aproximação válida para problemas que requerem técnicas de busca eficientes.

Um algoritmo genético começa com uma população de soluções geradas aleatoriamente, os cromossomos, e avança através das melhores soluções pela aplicação de operadores genéticos, baseados nos processos genéticos que ocorrem na natureza. Nestes algoritmos é mantida uma população de soluções para um dado problema e esta população passa por uma evolução em forma de seleção natural. Em cada geração, soluções relativamente boas reproduzem-se para gerar descendentes que poderão substituir as soluções relativamente ruins. Uma avaliação ou função de aptidão executa o papel do ambiente para distinguir entre as soluções boas e ruins. A função objetivo de um problema de otimização é construída a partir dos parâmetros envolvidos no problema. Ela fornece uma medida da proximidade da solução em relação a um conjunto de parâmetros. A função objetivo permite o cálculo da aptidão bruta de cada indivíduo, que fornecerá o valor a ser usado para o cálculo de sua probabilidade de ser selecionado para reprodução. O processo de evolução da população corrente para a próxima população constitui uma geração na execução de um algoritmo genético.

Embora existam muitas variações possíveis no algoritmo genético básico, o mecanismo base opera na população de genótipos ou fenótipos (que representam possíveis

soluções para o problema) e consiste de três operações: avaliação da aptidão individual, formação de uma população intermediária, recombinação e mutação.

Neste trabalho a função objetivo ($J(x)$) calcula um limitante superior da norma \mathcal{H}_2 ou da norma \mathcal{H}_∞ da função de transferência que relaciona a saída e a perturbação. Essas normas estão definidas no capítulo 3.

Como o que se deseja encontrar é uma solução que minimize a função $J(x)$, o cálculo da aptidão de cada indivíduo é dado pela equação (4.1):

$$\text{aptidão} = \frac{1}{1 + J(x)}. \quad (4.1)$$

4.3.1 Principais conceitos

Cromossomo (genótipo) – cadeia de bits que representa uma solução possível para o problema (utilizado nas representações binárias).

Gene – representação de cada parâmetro de acordo com o alfabeto utilizado (binário, inteiro ou real).

Fenótipo – cromossomo codificado.

População – conjunto de pontos (indivíduos) no espaço de busca.

Geração – iteração completa do AG que gera uma nova população.

Aptidão bruta – saída gerada pela função objetivo para um indivíduo da população.

Aptidão normalizada – aptidão bruta normalizada, entrada para o algoritmo de seleção.

Aptidão máxima – melhor indivíduo da população corrente.

Aptidão média – aptidão média da população corrente.

Deve ser observado que cada cromossomo, chamado de indivíduo no AG, corresponde a um ponto no espaço de soluções do problema de otimização. O processo de solução adotado nos algoritmos genéticos consiste em gerar, através de regras específicas, um conjunto de indivíduos, população, de forma a promover uma varredura do espaço de soluções.

4.3.2 Etapas

Os algoritmos genéticos são tipicamente implementados com as seguintes etapas:

1. o problema a ser resolvido é definido e traduzido através de uma função objetivo que indica a aptidão de cada solução em potencial;
2. a população de soluções candidatas é inicializada sujeita a certas restrições. Tipicamente, cada amostra é codificada como um vetor x , designado genótipo, cujos elementos são descritos como genes;
3. cada genótipo, $x_i, i = 1, \mathbf{L}, P$, na população é decodificado em uma forma apropriada para avaliação e então, é designado um valor de aptidão, $\frac{1}{1 - f(x_i)}$, conforme o objetivo;
4. a cada genótipo é designada uma probabilidade de reprodução, $p_i, i = 1, \mathbf{L}, P$, de tal forma que a chance deste ser selecionado é proporcional à aptidão do mesmo relativa a outro genótipo na população. Se a aptidão de cada genótipo é um número estritamente positivo a ser maximizado, esta função é executada através de seleção por roleta (figura 4.1); caso contrário, outras técnicas estão disponíveis;
5. de acordo com as probabilidades designadas de reprodução, $p_i, i = 1, \mathbf{L}, P$, uma nova população de genótipos é gerada. Os genótipos selecionados geram descendentes via o uso de operadores genéticos específicos, como por exemplo, cruzamento e mutação. O operador de cruzamento é aplicado a dois genótipos (pais) e cria dois novos genótipos (descendentes). A mutação é aplicada a um único genótipo, alterando um gene para um novo valor, também solução. Tipicamente valores para as probabilidades de cruzamento e mutação estão na faixa de 0,6 a 0,95 e 0,001 a 0,01, respectivamente [JON75, SCH92];

6. o processo termina se uma solução satisfatória é alcançada ou se o tempo computacional determinado foi atingido. Caso contrário, o processo retorna ao passo três, no qual os novos genótipos são pontuados e o procedimento repete-se.

4.3.3 Tipos de representação

Existem três tipos de representações básicas para os indivíduos:

- canônica ou binária [HOL75, GOL89]: noções do teorema de esquemas e construção de blocos;
- ponto flutuante ou real [MIC96]: maior compatibilidade, precisão e rapidez no tratamento de valores reais;
- inteira [MIC96]: para problemas de escalonamento e do tipo caixeiro viajante.

A essa representação se dá o nome de alfabeto do AG. De acordo com a classe de problema que se deseje resolver pode-se usar qualquer um dos três tipos.

O uso de cadeias binárias não é universalmente aceito na literatura sobre AGs. Michalewicz ([MIC92], p.82) indica que para problemas de otimização de valores reais, a representação de ponto flutuante supera em desempenho a representação binária, por ser mais consistente, mais precisa e conduzir a uma solução mais rápida. Mas Michalewicz [MIC92] também alerta que o desempenho de AGs piora quando o espaço de estado de possíveis soluções é extremamente grande, como requerido para otimização numérica de alta precisão de muitas variáveis. O tamanho do espaço de estado sozinho não determina a eficiência do AG, sem levar em consideração a escolha da representação. Muitos pesquisadores em AGs substituíram as cadeias binárias sugeridas por Holland [HOL75] e conseguiram resultados razoáveis para problemas difíceis [MON91, SYS91, WRI91, MIC92].

Todos os casos abordados neste trabalho são caracterizados como problemas de otimização de valores reais. Além disso, o espaço de estado de possíveis soluções é extremamente grande. Dadas estas características, foi adotada unicamente a representação real para a implementação dos AGs.

4.3.4 Operadores Genéticos

4.3.4.1 Operador de Seleção

A seleção emprega o princípio de sobrevivência dos indivíduos mais aptos, através de uma metáfora aos procedimentos de reprodução e seleção natural, de acordo com o grau de adaptação do indivíduo ao ambiente. O objetivo é enfatizar as melhores soluções que constituem uma população. O operador de seleção é uma combinação de dois conceitos diferentes: reprodução e seleção.

A maioria dos métodos de seleção é projetada para escolher preferencialmente indivíduos com maiores notas de aptidão, embora não exclusivamente, a fim de manter a diversidade da população e evitar a convergência prematura para pontos ótimos locais.

Os métodos mais comuns de seleção encontrados na literatura [BAC97] são descritos a seguir, sendo que neste trabalho foi utilizado o método do tipo roleta.

Seleção do tipo Roleta

Um método de seleção muito utilizado é o Método da Roleta [KWO96], onde indivíduos de uma geração são escolhidos para fazer parte da próxima geração, através de sorteio baseado em roleta.

Neste método, cada indivíduo da população é representado na roleta proporcionalmente ao seu índice de aptidão. Assim, aos indivíduos com alta aptidão é dada uma porção maior da roleta, enquanto aos de aptidão mais baixa é dada uma porção relativamente menor da roleta.

Este método apresenta uma forte tendência à convergência prematura, uma vez que a incidência de bons indivíduos de uma geração tende a crescer exponencialmente para a próxima geração.

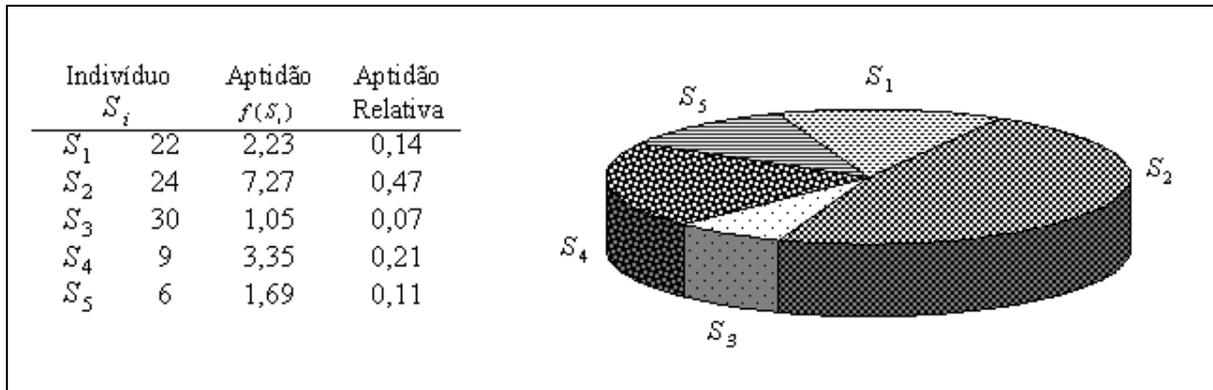


Figura 4.1: Exemplo de aplicação do método da roleta.

Seleção proporcional à aptidão pode ser problemática. Há duas considerações práticas:

1. seleção por roleta depende de valores positivos do indivíduo;
2. adicionar simplesmente uma constante de valor elevado à função objetivo pode eliminar a seleção, com o algoritmo executando simplesmente uma trajetória aleatória.

Alguns métodos tem sido desenvolvidos para compensar estes problemas. Por exemplo, a aptidão de todos os pais pode ser relativamente escalada à aptidão média da população [GOL89], ou uma seleção proporcional pode ser baseada na classificação pela aptidão. Seleção baseada na classificação também elimina problemas com funções que tem grandes compensações.

Seleção do tipo Torneio

O método de seleção Torneio corresponde ao retorno do melhor indivíduo escolhido entre um subconjunto da população (usualmente considerado com 2 elementos). Este subconjunto é escolhido, a princípio, sem determinação de um critério único de seleção: seleção aleatória ou roleta. O torneio com dois elementos é conhecido na literatura como torneio binário.

Conforme [GOL89], o método torneio busca dar condições aos indivíduos de menor valor da função de aptidão de serem selecionados no processo de evolução.

Seleção do tipo Amostragem Determinística

O método de seleção Amostragem Determinística pode ser descrito em duas etapas. Na primeira etapa, parte da população selecionada é criada utilizando-se a função de aptidão

média (f_{med}) de cada indivíduo (f_i / f_{med}). Posteriormente, o restante da população é preenchido com base na parte fracionária.

Resumindo:

1ª Etapa: cada indivíduo apresentará f_i / f_{med} cópias para a população selecionada (considerar somente a parte inteira - INT);

2ª Etapa: o complemento da população restante é criado com base no valor fracionário de f_i / f_{med} . Para preencher a população, podem-se definir regras com indivíduos com parte fracionária mais alta, mais baixa ou até mesmo utilizar-se da seleção tipo roleta para seleção do restante da população.

Seleção do tipo Amostragem Aleatória

O método de seleção Amostragem Aleatória baseia-se na escolha aleatória entre os membros da população. Assim, cada indivíduo apresenta uma probabilidade $1/n_{pop}$ de ser escolhido para compor a população de seleção, com n_{pop} igual ao total de membros da população.

Seleção do tipo Amostragem Estocástica

Este método de seleção é análogo àquele de Amostragem Determinística, onde primeiramente a parte da população de seleção é criada utilizando-se da função de aptidão média de cada indivíduo f_i / f_{med} , fazendo $\text{INT}(f_i / f_{med})$ cópias de cada indivíduo. As vagas restantes na população são preenchidas com base na probabilidade da parte fracionária mais alta, mais baixa ou até mesmo utilizando-se da seleção tipo roleta. Em outras palavras:

1ª Etapa: cada indivíduo apresentará $\text{INT}(f_i / f_{med})$ cópias para a população selecionada;

2ª Etapa: a complementação da população restante é criada com base no valor fracionário de f_i / f_{med} . Para preencher a população, pode-se definir regras com indivíduos com parte fracionária mais alta, mais baixa ou até mesmo utilizar-se da seleção tipo roleta. Assim, se $\text{rand()} < \text{Prob}(\text{parte fracionária})$ $\text{rand()} < \text{Prob}(\text{partefracionária}) \Rightarrow$ o indivíduo é selecionado para compor a população ($\text{rand}()$ é uma função para geração de números aleatórios com distribuição uniforme).

Um problema matemático com a seleção de pais para reproduzir em proporção à sua aptidão relativa é que este procedimento não pode assegurar convergência assintótica ao ótimo global [RUD94]. O melhor cromossomo na população pode ser perdido a qualquer geração, e não há nenhuma garantia que alguma melhora conseguida em uma dada geração seja mantida nas futuras gerações. Isso pode ser superado pelo emprego do método chamado de seleção elitista [GRE86] que simplesmente sempre retém o melhor cromossomo na população. Este procedimento garante convergência assintótica [EIB91, FOG94, RUD94], mas a velocidade específica de convergência varia por problema e é geralmente desconhecida.

Nos AGs implementados foi utilizada a seleção por roleta e elitista, onde o melhor indivíduo da população anterior é mantido, substituindo o pior indivíduo da nova geração.

4.3.4.2 Operador de Cruzamento

O cruzamento é responsável pela troca de material genético entre os indivíduos, com maior probabilidade de reproduzirem os indivíduos mais aptos ao ambiente.

Neste trabalho foram testadas probabilidades de cruzamento adaptativas [SRI94], mas resultados melhores foram alcançados com o cruzamento sendo realizado por todos os indivíduos da população, ou seja, $p_c = 1$ ou 100% (p_c : probabilidade de cruzamento).

Os algoritmos genéticos são diferenciados pela ênfase no cruzamento, com a mutação servindo como um operador de apoio para garantir que todas as possibilidades permitidas (alelos) possam entrar na população [HOL75]. A probabilidade normalmente designada ao cruzamento e à mutação reflete tal visão filosófica. Entretanto, a escolha do operador de cruzamento não é direta.

Holland [HOL75] e outros (por exemplo, [GOL83] e [GRE85]) propõem que algoritmos genéticos canônicos trabalhem por identificação de bons “building blocks” (blocos construtores) e por, eventualmente, combinarem estes para obter “building blocks” maiores. Esta hipótese sugere que um operador de cruzamento de um ponto executará melhor que um operador que pega cada *bit* de cada pai com probabilidade igual (cruzamento uniforme), porque aquele pode manter seqüências (blocos) de “código bom” que são associadas com desempenho acima da média e não atrapalha sua ligação. Syswerda [SYS89] conduziu experimentos de otimização de funções com cruzamento uniforme, dois pontos de cruzamento

e um ponto de cruzamento. O cruzamento uniforme geralmente provê melhores soluções com menor esforço computacional. Além disso, nota-se que seleções de código que residem ao extremo oposto do cromossomo são mais prováveis de serem divididas sob cruzamento de um ponto do que são as seções que estão próximas à região mediana do cromossomo. Holland [HOL75] propõe um operador de inversão que reverte o indicador de posição para uma seção do cromossomo de forma que ligações poderiam ser construídas entre genes arbitrários. Mas a inversão não tem sido útil na prática [DAV91].

A seguir são apresentados alguns operadores de cruzamento para algoritmos genéticos com representação em ponto flutuante [MIC92]:

(i) cruzamento simples: é selecionado um par de indivíduos $x = (x_1, \mathbf{L}, x_k, x_{k+1}, \mathbf{L}, x_q)$ e $y = (y_1, \mathbf{L}, y_k, y_{k+1}, \mathbf{L}, y_q)$ recombinados a partir do k -ésimo parâmetro. Os indivíduos descendentes resultantes desta recombinação são:

$$\begin{cases} x = (x_1, \mathbf{L}, x_k, y_{k+1}, \mathbf{L}, y_q) \\ y = (y_1, \mathbf{L}, y_k, x_{k+1}, \mathbf{L}, x_q) \end{cases}$$

(ii) cruzamento aritmético: define o cruzamento como uma combinação linear de dois vetores, $x = (x_1, \mathbf{L}, x_k, x_{k+1}, \mathbf{L}, x_q)$ e $y = (y_1, \mathbf{L}, y_k, y_{k+1}, \mathbf{L}, y_q)$. Após esta operação, têm-se os descendentes descritos por:

$$\begin{cases} x = \alpha_{ra} \cdot x + (1 - \alpha_{ra}) \cdot y \\ y = \alpha_{ra} \cdot y + (1 - \alpha_{ra}) \cdot x \end{cases}$$

Neste operador pode-se ter um parâmetro $\alpha_{ra} \in [0;1]$, que é uma constante (cruzamento aritmético uniforme) ou uma variável que depende do tamanho da população (cruzamento aritmético não-uniforme).

(iii) cruzamento heurístico: gera apenas um (ou mesmo nenhum) novo indivíduo, através da extrapolação linear de dois indivíduos. Considerando-se $x = (x_1, \mathbf{L}, x_k, x_{k+1}, \mathbf{L}, x_q)$ e $y = (y_1, \mathbf{L}, y_k, y_{k+1}, \mathbf{L}, y_q)$, após esta operação tem-se um indivíduo resultante factível regido pela expressão:

$$z = ra \cdot (y - x) + y$$

onde ra é um número aleatório, tal que $ra \in [0,1]$. Caso a solução gerada não seja factível, deve-se gerar um novo número aleatório para a obtenção de um novo indivíduo.

(iv) inversão: consiste de somente um operador. Sendo o indivíduo $x = (x_1, \mathbf{L}, x_k, x_{k+1}, \mathbf{L}, x_q)$ selecionado para inversão, então o vetor resultante é $x' = (x_1, \mathbf{L}, x_{k-1}, x_j, x_{j-1}, \mathbf{L}, x_{j-k}, x_{j+1}, \mathbf{L}, x_q)$, onde $j \in (1, q)$ e $k \leq j$.

Para os problemas tratados neste trabalho foram testados todas os operadores de cruzamento citados e, por ter apresentado os melhores resultados, é utilizado primeiramente o cruzamento aritmético. Depois de efetuado o cruzamento, testa-se a factibilidade do novo indivíduo e caso este seja infactível, repete-se o cruzamento com um outro número aleatório. Se a infactibilidade ocorrer após três tentativas, utiliza-se o cruzamento simples, também com três tentativas. Caso todos sejam infactíveis, o cruzamento não é realizado.

4.3.4.3 Operador de Mutação

A mutação modifica o valor dos genes do indivíduo e visa restaurar o material genético perdido (ou não explorado) em uma população. Este operador, quando projetado de forma apropriada, pode prevenir a convergência prematura do AG para soluções subótimas e manter a diversidade da população.

A convergência prematura é um outro importante ponto de interesse em algoritmos genéticos. Isso ocorre quando a população de genótipos alcança uma configuração, tal que cruzamentos não produzem descendentes que possam superar o desempenho de seus pais, como é o caso de uma população homogênea. Sob tal circunstância, toda forma padrão de cruzamento simplesmente regenera os pais atuais. Qualquer outra otimização conta com a mutação somente, podendo ser um tanto lenta. A convergência prematura é freqüentemente observada nas pesquisas em algoritmos genéticos [JON75, PIT90, BIC90, DAV91] devido à reprodução exponencial do melhor cromossomo observado juntamente com a forte ênfase no

cruzamento. Davis [DAV91] recomenda que quando a população converge em um cromossomo que requeira uma mutação simultânea para melhorá-lo, o processo é praticamente completado e cada mutação deveria ser reiniciada usando uma semente aleatória diferente ou deveriam ser empregados métodos do tipo escalada para procurar melhorias.

A técnica utilizada neste trabalho para manter a diversidade da população e sustentar a capacidade de convergência do AG foi a de probabilidade de mutação adaptativa. Com a utilização da probabilidade de mutação (p_m) adaptativa, elimina-se o problema da escolha de um valor ótimo para a p_m , pois tal escolha é sempre crítica e afeta o comportamento e o desempenho do AG.

Dentre as técnicas de probabilidade de mutação adaptativa escolheu-se a determinada pela equação (4.2), dada em [SRI94], por ser fácil de implementar e atender adequadamente ao seu propósito para o caso em estudo:

$$\begin{aligned} p_m &= k_3(f_{\max} - f)/(f_{\max} - \bar{f}), & f \geq \bar{f} \\ p_m &= k_4, & f < \bar{f} \end{aligned} \quad (4.2)$$

onde f , f_{\max} e \bar{f} referem-se à aptidão (*fitness*), aptidão máxima e aptidão média respectivamente e $k_3, k_4 \leq 1$ foram ambos definidos em [SRI94] como sendo 0,5.

A seguir, são apresentados alguns operadores de mutação para algoritmos genéticos com representação em ponto flutuante:

(i) mutação uniforme: seja $x = (x_1, \mathbf{L}, x_k, \mathbf{L}, x_q)$ um indivíduo, a mutação uniforme gera um novo indivíduo a partir de outro. Após ser selecionado um indivíduo x , escolhe-se aleatoriamente um componente k deste indivíduo para obtenção de um novo valor, tal que:

$$x' = (x_1, \mathbf{L}, x'_k, \mathbf{L}, x_q)$$

onde x'_k é um valor aleatório dentro dos limites do parâmetro k .

(ii) mutação não-uniforme: o componente x_k é selecionado para mutação, resultando num vetor $x' = (x_1, \mathbf{L}, x'_k, \mathbf{L}, x_q)$, tal que:

$$x'_k = \begin{cases} x_k + \Delta(t, \max \lim(k) - x_k), & \text{se } z = 0, \\ x_k + \Delta(t, x_k - \min \lim(k)), & \text{se } z = 1, \end{cases}$$

onde z é um dígito binário aleatório (0 ou 1), $\min \lim(k)$ e $\max \lim(k)$ são os valores mínimo e máximo dos limites do parâmetro x'_k , respectivamente. A função $\Delta(t,y)$ retorna um valor no intervalo $[0,y]$ tal que a probabilidade de $\Delta(t,y)$ inicia em zero e é incrementada de acordo com o número de gerações t , tal que:

$$\Delta(t,y) = y \cdot ra \cdot \left[1 - \frac{t}{Nger} \right]^{-b},$$

onde ra é um número gerado aleatoriamente no intervalo $[0;1]$, $Nger$ é o número máximo de gerações e b é um parâmetro escolhido pelo usuário, que determina o grau de dependência com o número de gerações. Esta propriedade leva o operador a efetuar uma busca uniforme no espaço inicial, quando t é pequeno e, mais localmente nas gerações posteriores.

(iii) mutação de contorno: nesta mutação seleciona-se aleatoriamente uma variável j com distribuição uniforme, em $[0;1]$, e em seguida atribui-se a variável j o limite máximo ou mínimo do parâmetro. O procedimento é resumido em:

$$x'_i = \begin{cases} \min \lim(i), & \text{se } i = j \text{ e } ra < 0,5 \\ \max \lim(i), & \text{se } i = j \text{ e } ra \geq 0,5 \\ x_i, & \text{para os outros valores} \end{cases} \quad x'_k = \begin{cases} \max \lim(k), & \text{se } k = j \text{ e } ra < 0,5 \\ \min \lim(k), & \text{se } k = j \text{ e } ra \geq 0,5 \\ x_k, & \text{para os outros valores} \end{cases}$$

Para os algoritmos genéticos implementados neste trabalho, foi utilizada somente a mutação uniforme onde x'_k foi gerado através da soma de um número aleatório $a \in [-20,20]$ ao valor original x_k . Como a chance de obter um novo indivíduo ineficaz é elevada, devido ao grande número de restrições dos problemas tratados, tenta-se efetuar a mutação de um mesmo indivíduo cinco vezes (parâmetro obtido experimentalmente), sendo que o número aleatório a' é decrementado a cada tentativa de mutação através da seguinte equação:

$$a' = \frac{a}{2^m},$$

onde a' representa o número a ser incrementado/decrementado de x_k gerando x'_k e m representa a m -ésima tentativa de mutação. Para o caso em questão, os indivíduos negativos são inactíveis. Todo indivíduo negativo, gerado por uma mutação, é descartado.

4.4 Conclusão

Neste capítulo foram apresentados os conceitos básicos da computação evolutiva com ênfase nos algoritmos genéticos, por estes terem se mostrado mais adequados, a partir dos resultados experimentais, para a resolução dos casos abordados neste trabalho.

Com a evolução encontra-se, a cada geração, soluções candidatas mais e mais eficazes, embora não exista a garantia de se chegar à solução ótima ao final do processo evolutivo. O algoritmo genético cumpriu o seu papel na busca iterativa, resolvendo de forma adequada e satisfatória os problemas de otimização propostos, os quais mostraram-se suficientemente complexos, a ponto de dificultar a produção de uma formulação matemática abrangente e o atendimento de requisitos básicos de tratabilidade por ferramentas convencionais, onde a aplicação de técnicas de solução conhecidas, dedicadas e capazes de garantir a obtenção de uma solução ótima, não foi possível.

Capítulo 5

Síntese de Controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞

5.1 Introdução

Este capítulo apresenta os principais resultados deste trabalho a respeito da análise de estabilidade e da síntese de leis de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas contínuos sujeitos a incertezas e/ou restrições no estado, no controle e na saída.

O capítulo está dividido em duas partes. A primeira aborda os problemas de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por realimentação dinâmica de saída para sistemas lineares com incertezas paramétricas do tipo politopo. Nenhuma hipótese restritiva é feita sobre a ordem do controlador. Desta forma, o controlador de saída a ser projetado pode ser de ordem reduzida ou completa. Entretanto a escolha da ordem do controlador deve ser feita *a priori*. A solução para estes problemas é proposta via um algoritmo híbrido baseado nos algoritmos genéticos (AGs) e nas desigualdades matriciais lineares (LMIs), que são resolvidas pelos eficazes algoritmos de pontos interiores.

Na segunda parte, os sistemas lineares com restrições no domínio do tempo são tratados. Neste contexto, é apresentada uma metodologia de projeto, baseada no conceito de \mathcal{D} -invariância positiva, que permite determinar leis de controle estabilizantes por realimentação de estado e por realimentação dinâmica de saída, que não violem as restrições de estado e de saída e, ao mesmo tempo, evitem a saturação do controle. A partir de uma condição necessária e suficiente assegurando o comportamento linear da lei de controle, é proposto um problema de otimização, tendo como critério de desempenho uma restrição sobre as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ da matriz de transferência entre a perturbação e a saída controlada. Uma

vez que os sistemas estão sujeitos a restrições no controle é necessário impor restrições adicionais à perturbação ao se considerar a factibilidade do problema de controle. As propriedades deste problema permitem a definição de um procedimento híbrido de resolução, combinando as propriedades dos AGs e sua heurística de busca com a precisão e eficiência dos métodos de tratamento das LMIs.

5.2 Controle robusto \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída

Considera-se nesta seção o problema de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas lineares sujeitos a incertezas paramétricas do tipo politopo (2.7). Deseja-se então encontrar um controlador por realimentação de saída (figura 2.4) que minimize uma das normas da matriz de transferência entre a perturbação e a saída controlada.

Seja o sistema dinâmico incerto dado pelas equações de estado:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ y(t) = C_yx(t) \\ z_2(t) = C_2x(t) + D_{22}u(t) \\ z_\infty(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t), \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $w(t) \in \mathfrak{R}^l$, $y(t) \in \mathfrak{R}^p$, $z_2(t) \in \mathfrak{R}^{q_2}$, $z_\infty(t) \in \mathfrak{R}^{q_1}$, $A \in \mathcal{D}_A$ (2.8) e $B_2 \in \mathcal{D}_B$ (2.9). Supõe-se que C_y tenha posto cheio e todas as matrizes tenham dimensões apropriadas. Admite-se também que o par (A, B_2) seja estabilizável e o par (A, C_1) seja detectável, em todo o espaço de incertezas.

Considera-se o seguinte compensador dinâmico:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = A_k\zeta(t) + B_k e(t) \\ u(t) = C_k\zeta(t) + D_k e(t), \end{cases} \quad (5.2)$$

onde $\zeta(t) \in \mathfrak{R}^{n_c}$ e A_k, B_k, C_k e D_k são matrizes desconhecidas. O erro é determinado por $e(t) = r(t) - y(t)$. Supõe-se que $\zeta(0) = 0$.

Nas próximas subseções, os problemas de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ são reescritos a partir dos resultados do capítulo 3.

5.2.1 Controle robusto \mathcal{H}_2

A partir dos resultados da seção 3.2 e da definição de estabilidade quadrática, o problema de controle robusto \mathcal{H}_2 pode ser formulado como:

Problema 5.1: *Encontrar um controlador robusto L_k , próprio e com estrutura fixa (ordem definida a priori), que minimize a norma \mathcal{H}_2 da matriz de transferência entre a perturbação w e a saída z_2 , $\|H_{z_2w}(s)\|_2$, $\forall A \in \mathcal{D}_A$ e $\forall B \in \mathcal{D}_B$.*

Utilizando-se as desigualdades matriciais e explicitando-se a dependência de L_k , este problema (teorema 3.4) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \min \quad & \text{Tr}(W_3) \\ & L_k, W_1 > 0, W_3 \\ \text{s. a} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} (\bar{A}_i + \bar{B}_{2j}L_k\bar{C}_y)W_1 + W_1(\bar{A}_i + \bar{B}_{2j}L_k\bar{C}_y)^T + \bar{B}_{1j}\bar{B}_{1j}^T < 0, \quad i=1,2,\mathbf{L},N, \\ j=1,2,\mathbf{L},M, \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$W_3 > (\bar{C}_2 + \bar{D}_{22}L_k\bar{C}_y)W_1(\bar{C}_2 + \bar{D}_{22}L_k\bar{C}_y)^T \quad (5.5)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0_{nc} \end{bmatrix}; & \bar{B}_{1f} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{nc \times l} \end{bmatrix}; & \bar{B}_{2j} &= \begin{bmatrix} B_{2j} & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix}; & \bar{C}_2 &= \begin{bmatrix} C_2 & 0_{q \times nc} \end{bmatrix} \\ \bar{C}_y &= \begin{bmatrix} -Cy & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix}; & \bar{D}_{22} &= \begin{bmatrix} D_{22} & 0_{q \times nc} \end{bmatrix} & \text{e} & L_k &= \begin{bmatrix} D_k & C_k \\ B_k & A_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

o controlador estabilizante L_k solução de (5.3) é uma solução do problema de controle robusto \mathcal{H}_2 e $\|H_{z_2w}(s)\|_2^2 \leq \beta^2 = \text{Tr}(W_3)$.

Nota-se que as desigualdades (5.4) e (5.5) não são LMIs em W_1 e L_k conjuntamente, porém para um controlador L_k fixo, o problema (5.3) torna-se um problema de otimização convexa. A mesma observação é válida para uma matriz $W_1 > 0$ fixa, (5.4) e (5.5) são LMIs em L_k .

5.2.2 Controle robusto \mathcal{H}_∞

O problema de controle robusto \mathcal{H}_∞ pode ser reduzido, a partir dos resultados apresentados na seção 3.3, como segue:

Problema 5.2: *Encontrar um controlador robusto L_k , próprio e com estrutura fixa, que minimize um limite superior γ para a norma \mathcal{H}_∞ da matriz de transferência entre a perturbação w e a saída z_∞ , ou seja, $\|H_{z_\infty w}(s)\|_\infty < \gamma$, $\forall A \in \mathcal{D}_A$ e $\forall B \in \mathcal{D}_B$.*

Este problema (teorema 3.9) pode ser reescrito da seguinte forma, utilizando-se as desigualdades matriciais:

$$\begin{aligned} \min_{W_1 > 0, L_k} \quad & \gamma \\ \text{s. a} \quad & \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{bmatrix} (\bar{A}_i + \bar{B}_{2j} L_k \bar{C}_y) W_1 + W_1 (\bar{A}_i + \bar{B}_{2j} L_k \bar{C}_y)^T & \bar{B}_{1f} & W_1 (\bar{C}_1 + \bar{D}_{12} L_k \bar{C}_y)^T \\ \bar{B}_{1f}^T & -I & D_{11}^T \\ (\bar{C}_1 + \bar{D}_{12} L_k \bar{C}_y) W_1 & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \mathbf{L}, N, \\ j = 1, 2, \mathbf{L}, M, \end{array} \quad (5.7)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A}_i &= \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ 0 & 0_{nc} \end{bmatrix}; & \bar{B}_{1f} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{nc \times l} \end{bmatrix}; & \bar{B}_{2j} &= \begin{bmatrix} B_{2j} & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix}; & \bar{C}_1 &= [C_1 \quad 0_{q \times nc}] \\ \bar{C}_y &= \begin{bmatrix} -Cy & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{bmatrix}; & \bar{D}_{12} &= [D_{12} \quad 0_{q \times nc}] & \text{e} & L_k &= \begin{bmatrix} D_k & C_k \\ B_k & A_k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

o controlador estabilizante L_k solução de (5.6) é uma solução do problema de controle robusto \mathcal{H}_∞ e $\|H_{z_w}(s)\|_\infty \leq \gamma$.

Como acontece no problema \mathcal{H}_2 , as desigualdades (5.7) não são LMIs em W_1 e L_k conjuntamente. Com W_1 ou L_k , as inequações (5.7) são LMIs e o problema de otimização (5.6) pode ser resolvido com técnicas convexas, necessitando-se apenas de uma mudança de variável em γ .

5.2.3 Algoritmo híbrido

INICIALIZAÇÃO

- Gerar uma população L_k inicial (aleatória) factível
- Calcular a aptidão de cada indivíduo

ENQUANTO o número máximo de gerações não for atingido

 Armazenar o melhor indivíduo da população

 Executar operador de seleção

 Executar operador de cruzamento

 Executar operador de mutação

 Substituir o pior indivíduo pelo melhor indivíduo armazenado anteriormente

FIM_ENQUANTO

- Resolver as LMIs para o melhor indivíduo

Observação: *As LMIs são recalculadas após um cruzamento ou mutação (subseção 4.3.4.2 e 4.3.4.3), e os indivíduos obtidos somente são efetivados com um resultado factível, caso contrário, os mesmos são descartados.*

5.2.3.1 Geração da população inicial

Para esta inicialização foi necessário usar a transformação de variável (2.52) e as restrições de estrutura sobre W_1 e W_2 (2.54) e (2.55) (subseção 2.8.2). Com estas condições

suficientes, os problemas (5.3) e (5.6) tornam-se convexos e podem ser resolvidos via LMIs. Diferentes matrizes N_f (na transformação) possibilitam uma maior diversidade da população inicial, uma vez que a solução destes problemas dependem da escolha de N_f .

5.3 Controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com restrições no domínio do tempo

Trata-se nesta seção dos problemas de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com restrições no estado, no controle e na saída, para sistemas com realimentação de estado e de saída dinâmica.

Considera-se o sistema dinâmico contínuo sujeito a incertezas paramétricas descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ y(t) = C_yx(t) + D_yu(t) \\ z_2(t) = C_2x(t) + D_{22}u(t) \\ z_\infty(t) = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t), \end{cases} \quad (5.8)$$

onde $A \in \mathcal{D}_A$ e $B_2 \in \mathcal{D}_B$. O par (A, B_2) é suposto estabilizável em todo domínio das incertezas. Supõe-se ainda que o sistema (5.8) está sujeito às seguintes restrições:

- i. o conjunto dos estados admissíveis é definido pelo poliedro

$$\mathcal{D}(g, \rho) = \{x \in \mathfrak{R}^n : g_i^T x \leq \rho_i, \rho_i > 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_g\} \quad (5.9)$$

onde $g_i \in \mathfrak{R}^n$, $g_i \neq 0$, $i = 1, 2, \mathbf{L}, n_g$;

- ii. o vetor de controle $u(t)$ pertence ao conjunto poliedral

$$\mathcal{D}(h, \mu) = \{u \in \mathfrak{R}^m : h_i^T u \leq \mu_i, \mu_i > 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_h\} \quad (5.10)$$

onde $h_i \in \mathfrak{R}^m$, $h_i \neq 0$, $i = 1, 2, \mathbf{L}, n_h$;

- iii. o vetor de saída $y(t)$ pertence ao conjunto poliedral

$$\mathcal{D}(\eta, \xi) = \{y \in \mathfrak{R}^p : \eta_i^T y \leq \xi_i, \xi_i > 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_n\} \quad (5.11)$$

onde $\eta_i \in \mathfrak{R}^p, \eta_i \neq 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_n$;

iv. o conjunto dos estados iniciais admissíveis é dado pelo poliedro compacto

$$\mathcal{D}(g_0, \rho_0) = \{x_0 = x(t_0) \in \mathfrak{R}^n : g_{0i}^T x_0 \leq \rho_{0i}, \rho_{0i} > 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_0\} \quad (5.12)$$

onde $g_{0i} \in \mathfrak{R}^n, g_{0i} \neq 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_0$. Este conjunto também pode ser definido pelo envelope convexo $\text{Co}\{v_1, \mathbf{L}, v_{n_v}\}$, onde $v_i \in \mathfrak{R}^n, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_v$, são os vértices do poliedro $\mathcal{D}(g_0, \rho_0)$.

Por definição, o conjunto $\mathcal{D}(g_0, \rho_0)$ sempre contém a origem, isto é, a origem é um ponto interior de $\mathcal{D}(g_0, \rho_0)$. Obviamente, o conjunto $\mathcal{D}(g_0, \rho_0)$ deve ser um subconjunto de $\mathcal{D}(g, \rho)$.

Tendo em vista as restrições no domínio do tempo apresentadas anteriormente, torna-se necessário impor limites à perturbação e à entrada de referência $r(t)$ admissíveis.

Assim, supõe-se que o vetor de perturbação $w(t)$ pertença ao conjunto convexo

$$\mathcal{D}(w_0) = \{w \in \mathfrak{R}^l : \|w\| \leq w_0, w_0 > 0\} \quad (5.13)$$

Este conjunto define uma hipersfera de perturbação de raio w_0 .

5.3.1 Realimentação de estado

O objetivo desta subsecção é a determinação das leis de controle por realimentação de estado $u(t) = Kx(t) + r(t)$, $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $r(t) \in \mathfrak{R}^m$, tais que o controle não sature, isto é, tais

que $Kx(t) + r(t) \in \mathcal{D}(h, \mu)$, $\forall t \geq t_0$. Neste caso, de acordo com a expressão (5.10), o conjunto $\mathcal{D}(K, h, \mu, r)$, definido no espaço de estado como sendo

$$\mathcal{D}(K, h, \mu, r) = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n : h_i^T Kx + h_i^T r \leq \mu_i, \mu_i > 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_h \right\} \quad (5.14)$$

representa o domínio no qual não há saturação no controle.

Considera-se que a entrada $r(t)$ pertence ao conjunto limitado definido por

$$\mathcal{R} = \left\{ r \in \mathfrak{R}^m : r^T R^{-1} r \leq 1, R = R^T \in \mathfrak{R}^{m \times m}, R > 0 \right\} \quad (5.15)$$

O sistema de malha fechada é dado então pela equação:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A + B_2 K]x(t) + B_1 w(t) + B_2 r(t) \\ y(t) = (C_y + D_y K)x(t) + D_y r(t) \\ z_2(t) = (C_2 + D_{22} K)x(t) + D_{22} r(t) \\ z_\infty(t) = (C_1 + D_{12} K)x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} r(t), \end{cases} \quad (5.16)$$

onde $A \in \mathcal{D}_A$ e $B_2 \in \mathcal{D}_B$.

As restrições de saída (5.11) também podem ser reescritas no espaço de estado:

$$\mathcal{D}(K, \eta, \xi, r) = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n : \eta_i^T (C_y + D_y K)x + \eta_i^T D_y r \leq \xi_i, \xi_i > 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_n \right\} \quad (5.17)$$

Assim, de acordo com (i) e a matriz (5.17) o modelo linear (5.16) que descreve o comportamento do sistema em malha fechada é válido somente para os estados pertencentes ao domínio determinado pela interseção

$$\mathcal{D}(g, \rho) \cap \mathcal{D}(K, h, \mu, r) \cap \mathcal{D}(K, \eta, \xi, r). \quad (5.18)$$

De fato, esta interseção representa o domínio de linearidade do modelo (5.16). Este domínio é também de natureza poliedral e seu contorno depende do ganho de realimentação de estado K . Deve-se observar que a origem é sempre um ponto interior deste domínio.

Nota-se também que quando o controle é limitado, um sistema instável em malha aberta não pode ser estabilizado assintoticamente para todas as condições iniciais $x_0 \in \mathfrak{R}^n$ [GUT85]. Em outras palavras, levando-se em consideração as restrições impostas ao vetor de controle, não é possível fazer com que as trajetórias $x(t)$ tendam a origem para uma condição inicial qualquer.

Os problemas de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ associados ao sistema linear com restrições no domínio do tempo (5.8) são formulados a seguir. Ambos são apresentados em um único enunciado. Nenhuma hipótese sobre a estabilidade em malha aberta é levada em consideração.

As matrizes de transferência entre a perturbação w e as saídas controladas $z_{\bar{p}}$, $\bar{p} = 2$ e $\bar{p} = \infty$, são dadas, respectivamente, por:

$$H_{z_2 w}(s) = C_{2f}(sI - A_f)^{-1} B_1, \quad (5.19)$$

$$H_{z_\infty w}(s) = C_{1f}(sI - A_f)^{-1} B_1 + D_{11}, \quad (5.20)$$

onde $A_f = A + B_2 K$, $A \in \mathcal{D}_A$, $B_2 \in \mathcal{D}_B$, $C_{2f} = C_2 + D_{22} K$ e $C_{1f} = C_1 + D_{11} K$.

O conjunto dos ganhos de realimentação de estado $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, tais que $A + B_2 K$, $\forall A \in \mathcal{D}_A$ e $\forall B_2 \in \mathcal{D}_B$, seja assintoticamente estável é denotado por \mathcal{K} .

Problema 5.3: *Determinar um ganho de realimentação de estado $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ que estabiliza assintoticamente o sistema (5.16) e um escalar positivo finito, limitante da norma $\|H_{z_{\bar{p}} w}(s)\|_{\bar{p}}$, $\bar{p} = 2$ ou $\bar{p} = \infty$, tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:*

- i. K minimiza este limite, $\forall A \in \mathcal{D}_A$ e $\forall B_2 \in \mathcal{D}_B$;
- ii. para uma condição inicial $x_0 \in \mathcal{D}(g_0, \rho_0)$ qualquer, as restrições no estado, no controle e na saída, definidas respectivamente por (5.9), (5.10) e (5.11), não sejam violadas pelas trajetórias do sistema em malha fechada (5.16),

garantindo seu comportamento linear, quaisquer que sejam a perturbação admissível $w(t) \in \mathcal{D}(w_0)$ e $r(t) \in \mathcal{R}$,

Para $\bar{p} = 2$ ($\bar{p} = \infty$) está definido o problema de controle \mathcal{H}_2 (\mathcal{H}_∞) com restrições no domínio do tempo.

Com $\bar{p} = 2$, tem-se:

$$K = \arg \min_{K \in \mathcal{K}} \left\{ \beta : \|H_{z_2 w}(s)\|_2 \leq \beta, \forall A \in \mathcal{D}_A \text{ e } \forall B_2 \in \mathcal{D}_B \right\}. \quad (5.21)$$

Com $\bar{p} = \infty$, tem-se:

$$K = \arg \min_{K \in \mathcal{K}} \left\{ \gamma : \|H_{z_\infty w}(s)\|_\infty \leq \gamma, \forall A \in \mathcal{D}_A \text{ e } \forall B_2 \in \mathcal{D}_B \right\}. \quad (5.22)$$

Deseja-se assim encontrar uma lei de controle robusto $u(t) = Kx(t) + r(t)$ que estabilize assintoticamente $A + B_2K$, $\forall A \in \mathcal{D}_A$ e $\forall B_2 \in \mathcal{D}_B$, e que minimize um limite superior da norma \mathcal{H}_2 (ou da norma \mathcal{H}_∞) da matriz de transferência $H_f(s)$, em todo o domínio da incerteza, garantindo que todas as trajetórias $x(t; x_0)$, $\forall x_0 \in \mathcal{D}(g_0, \rho_0)$, do sistema em malha fechada (5.16) não saiam do domínio de linearidade (5.17), qualquer que seja a perturbação admissível $w(t) \in \mathcal{D}(w_0)$ e $r(t) \in \mathcal{R}$. Assim, a estabilidade assintótica e o comportamento linear do sistema com restrições (5.16) são assegurados apenas localmente para este ganho de realimentação de estado.

Com o objetivo de resolver o problema 5.3, é proposto o seguinte resultado, baseado no conceito de conjunto positivamente \mathcal{D} -invariante.

Teorema 5.1: *O ganho de realimentação de estado $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é uma solução do problema 5.3 se e somente se K minimiza o limitante da norma $\|H_{z_{\bar{p}} w}(s)\|_{\bar{p}}$ ($\bar{p} = 2$ ou $\bar{p} = \infty$) e existe um conjunto qualquer $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, positivamente \mathcal{D} -invariante para o sistema de malha fechada (5.16), tal que*

$$\mathcal{D}(g_0, \rho_0) \subseteq \Omega \subseteq \mathcal{D}(g, \rho), \quad (5.23)$$

$$\Omega \subseteq \mathcal{D}(K, h, \mu, r) \cap \mathcal{D}(K, \eta, \xi, r). \quad (5.24)$$

Demonstração (Necessidade): Seja $K \in \mathcal{R}^{m \times n}$ uma solução do problema 5.3. Definindo-se Ω como o conjunto dos estados factíveis $x(t; x_0; w; r)$ para o sistema incerto em malha fechada (5.16), $\forall t \geq t_0$, $\forall x_0 \in \mathcal{D}(g_0, \rho_0)$, $w(t) \in \mathcal{D}(w_0)$ e $r(t) \in \mathcal{R}$. Com estas hipóteses, prova-se inicialmente que Ω é um conjunto positivamente \mathcal{D} -invariante.

Para todo $\bar{x} \in \Omega$, existe uma condição inicial $x_0 \in \mathcal{D}(g_0, \rho_0)$ e uma seqüência de perturbação $w(t) \in \mathcal{D}(w_0)$ e entrada $r(t) \in \mathcal{R}$, tais que $\bar{x} = x(\bar{t}; x_0; w; r)$, $\bar{t} \geq t_0$. Por outro lado, para todo estado inicial $\bar{x} \in \Omega$ e toda seqüência, $w(t) \in \mathcal{D}(w_0)$ e $r(t) \in \mathcal{R}$, $t \geq \bar{t}$, o estado $x = x(t; \bar{x}; w; r) \in \Omega$, qualquer que seja $t \geq \bar{t}$. Conseqüentemente, Ω é um conjunto positivamente \mathcal{D} -invariante para o sistema (5.16).

Por definição, Ω contém o conjunto $\mathcal{D}(g_0, \rho_0)$. Adicionalmente, supondo-se que exista (x_0, w, r) , $x_0 \in \mathcal{D}(g_0, \rho_0)$, $w(t) \in \mathcal{D}(w_0)$, $r(t) \in \mathcal{R}$ e um $t \geq t_0$ tais que $x(t; x_0; w; r)$ não satisfaça a restrição (5.9) ou (5.10) ou (5.11), então o ganho K não é uma solução do problema 5.3 porque a condição ii) do problema 5.3 é violada, o que contradiz a suposição inicial. Isto implica que as hipóteses $\Omega \subseteq \mathcal{D}(g, \rho)$ e $\Omega \subseteq \mathcal{D}(K, h, \mu, r) \cap \mathcal{D}(K, \eta, \xi, r)$ são também necessárias.

Enfim, para satisfazer a condição i) do problema 5.3, é necessário que $A + B_2 K$ seja assintoticamente estável, $\forall A \in \mathcal{D}_A$ e $\forall B_2 \in \mathcal{D}_B$.

(Suficiência): A demonstração vem diretamente da definição de conjunto positivamente \mathcal{D} -invariante. ■

A idéia consiste então na determinação de uma lei de controle $u(t) = Kx(t) + r(t)$, que minimiza o limite superior da norma (\mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞) e um conjunto de estados Ω incluso na região de linearidade (5.17) para o qual a \mathcal{D} -invariância positiva e a estabilidade assintótica (sem entradas), relacionada com as trajetórias do sistema (5.16), sejam asseguradas.

Desejar obter Ω como o conjunto dos estados alcançáveis à partir de $\mathcal{D}(g_0, \rho_0)$ é uma tarefa difícil, às vezes impossível, de se realizar. É por esta razão que se determina um ganho K e um conjunto Ω associado, positivamente invariante e assintoticamente estável, com uma forma definida *a priori*, que verifica as restrições (5.9), (5.10) e (5.11).

Os domínios de invariância positiva podem ser gerados a partir das funções de Lyapunov associadas com os sistemas estáveis [ARA98]. Na seqüência, com o objetivo de encontrar uma solução para o problema 5.3, serão usados os domínios positivamente invariantes elipsoidais obtidos a partir das funções de Lyapunov quadráticas. As soluções do problema 5.3 são apresentadas considerando-se os conjuntos elipsoidais, centrados na origem, dados por:

$$\Omega = \{x \in \mathfrak{R}^n : x^T P x \leq 1, P = P^T > 0\}, \quad (5.25)$$

onde $P \in \mathfrak{R}^{n \times n}$. Pode-se também definir estes conjuntos como segue:

$$\Omega = \{x \in \mathfrak{R}^n : x^T W_1^{-1} x \leq 1, W_1 = W_1^T > 0\}, \quad (5.26)$$

onde $W_1 = P^{-1}$.

O seguinte teorema apresenta uma condição suficiente para a existência de um ganho K que satisfaz a condição ii) do problema 5.3.

Teorema 5.2: *Seja o sistema incerto restrito definido por (5.16). Se existe uma matriz simétrica definida positiva $W_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e uma matriz $W_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ tais que*

$$g_i^T W_1 g_i \leq \rho_i^2, \quad i=1,2,\mathbf{L},n_g, \quad (5.27)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i=1,2,\mathbf{L},n_v, \quad (5.28)$$

$$\begin{bmatrix} c_i^2 & h_i^T W_2 \\ W_2^T h_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i=1,2,\mathbf{L},n_h, \quad (5.29)$$

com $c_i = \mu_i - \sqrt{h_i^T R h_i}$,

$$\begin{bmatrix} m_i^2 & \eta_i^T (C_y W_1 + D_y W_2) \\ (C_y W_1 + D_y W_2)^T \eta_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i=1,2,\mathbf{L},n_n, \quad (5.30)$$

com $m_i = \xi_i - \sqrt{\eta_i^T D_y R D_y^T \eta_i}$,

$$\begin{bmatrix} A_f W_1 + W_1 A_f^T + \alpha_k W_1 & B_1 & B_2 \\ B_1^T & -\sigma_k I & 0 \\ B_2^T & 0 & -(\alpha_k - \sigma_k w_0^2) R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad \begin{array}{l} i=1,2,\mathbf{L},N, \\ j=1,2,\mathbf{L},M, \end{array} \quad (5.31)$$

então o ganho de realimentação de estado robusto dado pela expressão $K = W_2 W_1^{-1}$ satisfaz a condição ii) do problema 5.3. Além disso, o conjunto Ω obtido a partir da matriz W_1 , definida em (5.26), é positivamente invariante e assintoticamente estável para o sistema em malha fechada (5.16).

Antes de apresentar a demonstração do teorema 5.2, alguns lemas preliminares são propostos. Estes resultados estão associados com as restrições no estado, no controle e na saída, definidas por (5.9), (5.10), (5.11) e (5.12), e os conjunto elipsoidais definidos em (5.26).

Lema 5.1 [NES94]: *O elipsóide Ω , definido por (5.26) está contido no politopo convexo $\mathcal{D}(g, \rho)$ se e somente se*

$$g_i^T W_1 g_i \leq \rho_i^2, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_g. \quad (5.32)$$

A demonstração deste lema é baseada em considerações geométricas, levando-se em consideração que $\mathcal{D}(g, \rho)$ é uma região convexa no espaço de estado.

Lema 5.2: *O elipsóide Ω , definido por (5.26), contém o politopo $\mathcal{D}(g_0, \rho_0)$ se e somente se*

$$\begin{bmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_v. \quad (5.33)$$

Demonstração (Suficiência): Usando o complemento de Schur, as LMIs em W_1 (5.33) podem ser escritas como:

$$v_i^T W_1^{-1} v_i \leq 1, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_v.$$

O que significa que cada vértice v_i pertence ao elipsóide Ω . Sabendo-se que $\mathcal{D}(g_0, \rho_0)$ é um domínio convexo, todo $x_0 \in \mathcal{D}(g_0, \rho_0)$ pode ser obtido por uma combinação convexa dos vértices de $\mathcal{D}(g_0, \rho_0)$, assim:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{n_v} \lambda_i v_i, \sum_{i=1}^{n_v} \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0, \forall_i.$$

Como Ω também é um domínio convexo e $v_i \in \Omega, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_v$, todo $x_0 \in \mathcal{D}(g_0, \rho_0)$ também pertence à Ω .

(Necessidade): Evidente. ■

Observação 5.1: Em relação ao lema 5.2, se for considerada como descrição do politopo $\mathcal{D}(g_0, \rho_0)$ o conjunto das inequações (5.12), este problema de inclusão de $\mathcal{D}(g_0, \rho_0)$ no elipsóide Ω não pode ser colocado na forma de LMI. Além disso, a determinação dos vértices de $\mathcal{D}(g_0, \rho_0)$, à partir da descrição (5.12), pode tornar-se uma tarefa complexa se o número de arestas for grande.

O seguinte lema estabelece uma condição necessária e suficiente que assegura o comportamento linear da lei de controle por realimentação de estado $u(t) = Kx(t) + r(t)$, com $K = W_2 W_1^{-1}$, $W_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $W_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, ao longo das trajetórias contidas no domínio elipsoidal Ω .

Lema 5.3: O elipsóide Ω definido por (5.26) está contido no poliedro $\mathcal{D}(K, h, \mu, r)$, para um ganho de realimentação de estado dado pela expressão $K = W_2 W_1^{-1}$, com $W_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$, se e somente se

$$\begin{bmatrix} c_i^2 & h_i^T W_2 \\ W_2^T h_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_h, \quad (5.34)$$

onde $c_i = \mu_i - \sqrt{h_i^T R h_i}$.

Demonstração: Levando-se em consideração as inequações (5.14), uma função suporte do elipsóide Ω pode ser escrita da seguinte forma:

$$\phi_\Omega(h_i, K, r) = \max_{r \in \mathbb{R}, x \in \Omega} h_i^T Kx + h_i^T r.$$

Primeiramente, o problema de otimização é resolvido. O Lagrangeano do problema é definido por:

$$L(x, r, \lambda_1, \lambda_2) = h_i^T Kx + h_i^T r + \lambda_1(x^T W_1^{-1} x - 1) + \lambda_2(r^T R^{-1} r - 1).$$

onde $\lambda_1 \in \Re$ e $\lambda_2 \in \Re$ são os multiplicadores de Lagrange. Assim, as condições necessárias e suficientes de otimalidade são dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = K^T h_i + 2\lambda_1 W_1^{-1} x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = h_i + 2\lambda_2 R^{-1} r = 0,$$

$$\lambda_1 (x^T W_1^{-1} x - 1) = 0, \quad \lambda_2 (r^T R^{-1} r - 1) = 0.$$

Obtendo-se assim:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{h_i^T K W_1 K^T h_i}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{h_i^T R h_i},$$

$$x = + \frac{W_1 K^T h_i}{\sqrt{h_i^T K W_1 K^T h_i}}, \quad r = + \frac{R h_i}{\sqrt{h_i^T R h_i}}.$$

De onde segue que a solução ótima é dada por:

$$\phi_\Omega(h_i, K, r) = \sqrt{h_i^T K W_1 K^T h_i} + \sqrt{h_i^T R h_i}.$$

Conseqüentemente, o elipsóide Ω está contido em $\mathcal{D}(K, h, \mu, r)$, se e somente se $\phi_\Omega(h_i, K, r) \leq \mu_i, \forall i = 1, 2, \mathbf{L}, n_h$, o que é equivalente a:

$$\sqrt{h_i^T K W_1 K^T h_i} + \sqrt{h_i^T R h_i} \leq \mu_i, \quad i = 1, 2, \mathbf{L}, n_h.$$

Considerando-se o ganho $K = W_2 W_1^{-1}$ e definindo-se $c_i = \mu_i - \sqrt{h_i^T R h_i}$, tem-se

$$h_i^T W_2 W_1^{-1} W_2^T h_i \leq c_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n_h.$$

Usando-se o complemento de Schur, são obtidas as seguintes LMIs em W_1 e W_2 :

$$\begin{bmatrix} c_i^2 & h_i^T W_2 \\ W_2^T h_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_h.$$

■

Lema 5.4: *O elipsóide Ω definido por (5.26) está contido no poliedro $\mathcal{D}(K, \eta, \xi, r)$, para um ganho de realimentação de estado dado pela expressão $K = W_2 W_1^{-1}$, com $W_2 \in \Re^{m \times n}$, se e somente se*

$$\begin{bmatrix} m_i^2 & \eta_i^T (C_y W_1 + D_y W_2) \\ (C_y W_1 + D_y W_2)^T \eta_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_n, \quad (5.35)$$

onde $m_i = \xi_i - \sqrt{\eta_i^T D_y R D_y^T \eta_i}$,

Demonstração: A partir das inequações 5.17, uma função suporte do elipsóide Ω pode ser escrita como:

$$\phi_\Omega(\eta_i, K, r) = \max_{x \in \Omega} \eta_i^T (C_y + D_y K)x + \eta_i^T D_y r.$$

O Lagrangeano do problema de maximização é dado por:

$$L(x, r, \lambda_1, \lambda_2) = \eta_i^T (C_y + D_y K)x + \eta_i^T D_y r + \lambda_1 (x^T W_1^{-1} x - 1) + \lambda_2 (r^T R^{-1} r - 1),$$

onde $\lambda_1 \in \Re$ e $\lambda_2 \in \Re$ são os multiplicadores de Lagrange. Assim, as condições necessárias e suficientes de otimalidade para este problema são dadas a seguir:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = C_{fy}^T \eta_i + 2\lambda_1 W_1^{-1} x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = D_y^T \eta_i + 2\lambda_2 R^{-1} r = 0,$$

$$\lambda_1 (x^T W_1^{-1} x - 1) = 0, \quad \lambda_2 (r^T R^{-1} r - 1) = 0.$$

Obtendo-se assim:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{2} \sqrt{\eta_i^T (C_y + D_y K) W_1 (C_y + D_y K)^T \eta_i}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\eta_i^T D_y R D_y^T \eta_i},$$

$$x = + \frac{W_1 (C_y + D_y K)^T \eta_i}{\sqrt{\eta_i^T (C_y + D_y K) W_1 (C_y + D_y K)^T \eta_i}}, \quad r = + \frac{R D_y^T \eta_i}{\sqrt{\eta_i^T D_y R D_y^T \eta_i}}.$$

Substituindo-se esses valores em $\phi_\Omega(\eta_i, K, r)$, a solução ótima é dada por:

$$\phi_\Omega(\eta_i, K, r) = \sqrt{\eta_i^T (C_y + D_y K) W_1 (C_y + D_y K)^T \eta_i} + \sqrt{\eta_i^T D_y R D_y^T \eta_i}.$$

Assim, o elipsóide Ω está contido em $\mathcal{D}(K, \eta, \xi, r)$, se e somente se $\phi_\Omega(\eta_i, K, r) \leq \xi_i, \forall i = 1, 2, \mathbf{L}, n_n$, o que é equivalente a:

$$\eta_i^T (C_y W_1 + D_y W_2) W_1^{-1} (C_y W_1 + D_y W_2)^T \eta_i \leq m_i^2, \quad i = 1, 2, \mathbf{L}, n_n,$$

para um ganho $K = W_2 W_1^{-1}$, onde $m_i = \xi_i - \sqrt{\eta_i^T D_y R D_y^T \eta_i}$.

Utilizando-se o complemento de Schur, são obtidas as seguintes LMIs em W_1 e W_2 :

$$\begin{bmatrix} m_i^2 & \eta_i^T (C_y W_1 + D_y W_2) \\ (C_y W_1 + D_y W_2)^T \eta_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \mathbf{L}, n_h.$$

■

Observação 5.2: *Quando os lemas precedentes são formulados para um conjunto Ω definido como um elipsóide transladado, com as coordenadas de seu centro desconhecidas, as condições obtidas não são mais convexas, e, conseqüentemente, não podem ser escritas no formato das LMIs.*

O lema a seguir estabelece uma condição suficiente assegurando a \mathcal{D} -invariância positiva de um conjunto elipsoidal Ω , definido por (5.26), para as trajetórias do sistema de malha fechada (5.16), sem levar em consideração as restrições no estado, no controle e na saída.

Lema 5.5: *Seja o conjunto Ω , gerado por uma matriz simétrica definida positiva $W_1 \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, como em (5.26), e o sistema (5.8). Se existir uma matriz $W_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e os escalares $\alpha_k \geq 0, \sigma_k \geq 0, \varepsilon_k \geq 0, k = 1, 2, \mathbf{L}, N * M$, tais que:*

$$\begin{bmatrix} A_f W_1 + W_1 A_f^T + \alpha_k W_1 & B_1 & B_2 \\ B_1^T & -\sigma_k I & 0 \\ B_2^T & 0 & -(\alpha_k - \sigma_k w_0^2) R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \mathbf{L}, N, \\ j = 1, 2, \mathbf{L}, M, \end{array} \quad (5.36)$$

então Ω é um conjunto positivamente \mathcal{D} -invariante para o sistema de malha fechada (5.16), e o ganho K associado é dado pela expressão $K = W_2 W_1^{-1}$.

Demonstração: Seja $v(x) = x^T W_1^{-1} x$ uma função de Lyapunov candidata associada ao sistema de malha fechada (5.16). A derivada de $v(x)$ ao longo das trajetórias do sistema (5.16) é dada por:

$$\mathfrak{V}(x) = x^T (A_f^T W_1^{-1} + W_1^{-1} A_f) x + x^T W_1^{-1} B_1 w + w^T B_1^T W_1^{-1} x + x^T W_1^{-1} B_2 r + r^T B_2^T W_1^{-1} x. \quad (5.37)$$

Para que Ω seja um conjunto positivamente \mathcal{D} -invariante para o sistema (5.16), é suficiente que $\mathfrak{V}(x) \leq 0$, qualquer que seja o vetor x pertencente à fronteira de Ω , isto é, $x^T W_1^{-1} x = 1$, e para toda perturbação admissível $w \in \mathcal{D}(w_0)$ e $\forall r \in \mathcal{R}$,

Conseqüentemente, se $\mathfrak{V}(x) \leq 0$ para todo x tal que $v(x) \geq 1$ e para todo $w \in \mathcal{D}(w_0)$ e $r \in \mathcal{R}$ então Ω é um conjunto positivamente \mathcal{D} -invariante para o sistema (5.16). Isto equivale a:

$$x^T (A_f^T W_1^{-1} + W_1^{-1} A_f) x + x^T W_1^{-1} B_1 w + w^T B_1^T W_1^{-1} x + x^T W_1^{-1} B_2 r + r^T B_2^T W_1^{-1} x \leq 0 \quad (5.38)$$

para um ponto qualquer (x, w, r) tal que $x^T W_1^{-1} x \geq 1$, $w^T w \leq w_0^2$ e $r^T R^{-1} r \leq 1$.

Usando-se o *S-procedure* [YAK92], esta condição pode ser reescrita sem restrições: se existirem escalares $\alpha_k \geq 0$, $\sigma_k \geq 0$ e $\varepsilon_k \geq 0$ tais que

$$x^T (A_f^T W_1^{-1} + W_1^{-1} A_f) x + x^T W_1^{-1} B_1 w + w^T B_1^T W_1^{-1} x + x^T W_1^{-1} B_2 r + r^T B_2^T W_1^{-1} x + \alpha_k (x^T W_1^{-1} x - 1) + \sigma_k (w_0^2 - w^T w) + \varepsilon_k (1 - r^T R^{-1} r) \leq 0, \quad (5.39)$$

$\forall x \in \mathfrak{R}^n$, $\forall w \in \mathfrak{R}^l$ e $\forall r \in \mathcal{R}$, então Ω é um conjunto positivamente \mathcal{D} -invariante para o sistema (5.16). Neste caso, este procedimento assegura somente a suficiência da nova condição.

Com a mudança da variável $z = W_1^{-1} x$, a desigualdade (5.39) torna-se:

$$\begin{bmatrix} z \\ w \\ r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A_f W_1 + W_1 A_f^T + \alpha_k W_1 & B_1 & B_2 \\ & B_1^T & 0 \\ & B_2^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \\ r \end{bmatrix} + \sigma_k w_0^2 - \alpha_k + \varepsilon_k \leq 0. \quad (5.40)$$

Nesta desigualdade fica claro que z , w e r podem assumir quaisquer valores em seus respectivos espaços, o que implica na necessidade da condição $\sigma_k \gamma_0^2 - \alpha_k + \varepsilon_k \leq 0$.

Assim, a desigualdade (5.40) pode ainda ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} A_f W_1 + W_1 A_f^T + \alpha_K W_1 & B_1 & B_2 & 0 \\ B_1^T & -\sigma_K I & 0 & 0 \\ B_2^T & 0 & -\varepsilon_k R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_K w_0^2 - \alpha_K + \varepsilon_k \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.41)$$

Além disso, se a desigualdade (5.41) for satisfeita para uma combinação qualquer $(\bar{\alpha}_K, \bar{\sigma}_K, \bar{\varepsilon}_K)$, então ela também é satisfeita para qualquer ε_K tal que $\bar{\alpha}_K \geq \varepsilon_k + \bar{\sigma}_K w_0^2 \geq \bar{\varepsilon}_k + \bar{\sigma}_K w_0^2$. Assim, pode-se escolher, sem perda de generalidade, $\varepsilon_K = \alpha_K - \sigma_K w_0^2$, obtendo-se para (5.41):

$$\begin{bmatrix} A_f W_1 + W_1 A_f^T + \alpha_K W_1 & B_1 & B_2 \\ B_1^T & -\sigma_K I & 0 \\ B_2^T & 0 & -(\alpha_K - \sigma_K w_0^2) R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (5.42)$$

Nota-se que esta desigualdade deve ser verificada para toda matriz $A_f = A + B_2 K$, $A \in \mathcal{D}_A$ e $B_2 \in \mathcal{D}_B$. Entretanto, uma vez que as incertezas são convexas, pode-se avaliá-la somente nos vértices (A_i, B_{2j}) de $\mathcal{D}_A \times \mathcal{D}_B$. Conseqüentemente, com a mudança da variável $W_2 = K W_1$, a desigualdade (5.42) é equivalente a:

$$\begin{bmatrix} A_i W_1 + W_1 A_i^T + B_{2j} W_2 + W_2^T B_{2j}^T + \alpha_K W_1 & B_1 & B_2 \\ B_1^T & -\sigma_K I & 0 \\ B_2^T & 0 & -(\alpha_K - \sigma_K w_0^2) R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (5.43)$$

$i = 1, 2, \mathbf{L}, N$, $j = 1, 2, \mathbf{L}, M$, e $k = 1, 2, \mathbf{L}, N * M$. O ganho de realimentação de estado é obtido então por $K = W_2 W_1^{-1}$.

Assim, se existem escalares $\alpha_k \geq 0$, $\sigma_k \geq 0$, $k = 1, 2, \mathbf{L}, N * M$, e $W_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ satisfazendo as desigualdades (5.43), então Ω é um conjunto positivamente \mathcal{D} -invariante para o sistema em malha fechada (5.16), para $K = W_2 W_1^{-1}$.

■

Analisando-se o lema 5.5, pode-se chegar às seguintes observações.

Observação 5.3: De acordo com o teorema 2.3, pode-se facilmente verificar que para o $\alpha_k > 0$, $\sigma_k > 0$, $k = 1, 2, \mathbf{L}, N * M$, as desigualdades (5.43) contêm a condição de

estabilidade assintótica para as trajetórias do sistema (5.16), com $w=0$ e $r=0$, pertencentes à região elipsoidal Ω , ou seja:

$$A_i W_1 + W_1 A_i^T + B_{2j} W_2 + W_2^T B_{2j}^T < 0, \quad i=1, 2, \mathbf{L}, N, \quad (5.44)$$

$$j=1, 2, \mathbf{L}, M.$$

Observação 5.4: As desigualdades (5.43) podem ser escritas de forma equivalente:

$$\begin{bmatrix} (A_i + \frac{\alpha_k}{2} I) W_1 + W_1 (A_i + \frac{\alpha_k}{2} I)^T + B_{2j} W_2 + W_2^T B_{2j}^T & B_1 & B_2 \\ B_1^T & -\sigma_K I & 0 \\ B_2^T & 0 & -(\alpha_k - \sigma_K w_0^2) R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (5.45)$$

$i=1, 2, \mathbf{L}, N, \quad j=1, 2, \mathbf{L}, M, \quad \text{e } k=1, 2, \mathbf{L}, N * M.$

Isto significa que todos os autovalores do sistema em malha fechada (5.16) são colocados à esquerda de $-\min(\alpha_k/2)$, no plano complexo, para o ganho de realimentação de estado

$$K = W_2 W_1^{-1}.$$

Assim, partindo dos lemas anteriores, pode-se apresentar a prova do teorema 5.2.

Demonstração do teorema 5.2: Pode-se provar o teorema 5.2, com auxílio do teorema 5.1. De acordo com os lemas 5.1 e 5.2, as LMIs (5.27) e (5.28) garantem que para um ganho de realimentação de estado da forma $K = W_2 W_1^{-1}$, $W_1 = W_1^T > 0$, o conjunto Ω , definido pela matriz W_1 , satisfaz à condição $\mathcal{D}(g_0, \rho_0) \subseteq \Omega \subseteq \mathcal{D}(g, \rho)$. Assim, os estados que pertencem ao domínio elipsoidal Ω também satisfazem as restrições nos estados (5.9) e (5.12).

A condição (5.24), $\Omega \subseteq \mathcal{D}(K, h, \mu, r) \cap \mathcal{D}(K, \eta, \xi, r)$, relacionada com o controle e a saída, é verificada pelas LMIs (5.29) e (5.32) com $K = W_2 W_1^{-1}$, de acordo com os lemas 5.3 e 5.4. Resta, então, provar a \mathcal{D} -invariância e a estabilidade assintótica de Ω para o sistema (5.16), com $K = W_2 W_1^{-1}$, em todo o domínio das incertezas. Isto é feito no lema 5.5. ■

O resultado indicado no teorema 5.2 fornece uma condição suficiente para que um conjunto elipsoidal Ω , da forma (5.26), seja um domínio positivamente \mathcal{D} -invariante e assintoticamente estável, contendo a região de linearidade (5.18), para o sistema de malha

fechada (5.16). Isso deve-se ao fato de que cada restrição no teorema 5.2 representa uma condição suficiente para uma dada matriz W_1 . Além disso, o teorema 5.2 permite resolver o problema 5.1 com um formulação convexa para $\alpha_k > 0$, $k = 1, 2, \mathbf{L}, N * M$, fixos.

5.3.1.1 Controle \mathcal{H}_2 com restrições

O seguinte teorema fornece uma solução para o problema de controle \mathcal{H}_2 com restrições no domínio do tempo por realimentação de estado, para sistemas sujeitos a incertezas do tipo politopo.

Definem-se, inicialmente, os vetores de parâmetros $\alpha_L = [\alpha_1 \alpha_2 \mathbf{L} \alpha_{N * M}]^T$ e $\sigma_L = [\sigma_1 \sigma_2 \mathbf{L} \sigma_{N * M}]^T$ com $\alpha_k \geq 0$ e $\sigma_k \geq 0, \forall k = 1, 2, \mathbf{L}, N * M$.

Teorema 5.3: *Considera-se o sistema incerto restrito com restrições (5.8). Seja $(\hat{W}_1, \hat{W}_2, \hat{W}_3, \hat{\alpha}_L, \hat{\sigma}_L)$ a solução do seguinte problema de otimização*

$$\begin{aligned} \min_{W_1, W_2, W_3, \alpha_L, \sigma_L} \text{Tr}(W_3) \\ \text{s. a.} \end{aligned} \quad (5.46)$$

$$g_i^T W_1 g_i \leq \rho_i^2, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_g, \quad (5.47)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_v, \quad (5.48)$$

$$\begin{bmatrix} c_i^2 & h_i^T W_2 \\ W_2^T h_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_h, \quad (5.49)$$

com $c_i = \mu_i - \sqrt{h_i^T R h_i}$,

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_1 C_2^T + W_2^T D_{22}^T \\ C_2 W_1 + D_{22} W_2 & W_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.50)$$

$$\begin{bmatrix} m_i^2 & \eta_i^T (C_y W_1 + D_y W_2) \\ (C_y W_1 + D_y W_2)^T \eta_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_n, \quad (5.51)$$

com $m_i = \xi_i - \sqrt{\eta_i^T D_y R D_y^T \eta_i}$,

$$A_i W_1 + W_1 A_i^T + B_{2j} W_2 + W_2^T B_{2j}^T + B_1 B_1^T \leq 0, \quad (5.52)$$

$$\begin{bmatrix} A_i W_1 + W_1 A_i^T + B_{2j} W_2 + W_2^T B_{2j}^T & B_1 & B_{2j} \\ B_1 & -\sigma_k I & 0 \\ B_{2j}^T & 0 & -(\alpha_k - \sigma_k w_0^2) R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (5.53)$$

para $i = 1, 2, \mathbf{L}, N$, $j = 1, 2, \mathbf{L}, M$, e $k = 1, 2, \mathbf{L}, N * M$, com $W_1 = W_1^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $W_1 > 0$, $W_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ e $W_3 = W_3^T \in \mathfrak{R}^{q \times q}$. Então o ganho de realimentação de estado linear dado por $K = \hat{W}_2 \hat{W}_1^{-1}$ e $\beta^2 = \text{Tr}(\hat{W}_3)$ são uma solução do problema 5.3. Além disso, o conjunto elipsoidal Ω definido por \hat{W}_1 é positivamente \mathcal{D} -invariante para o sistema em malha fechada (5.16).

Demonstração: As LMIs (5.47) e (5.48) garantem, de acordo com os lemas 5.1 e 5.2, que este conjunto elipsoidal Ω verifica a condição (5.23), isto é, $\mathcal{D}(g_0, \rho_0) \subseteq \Omega \subseteq \mathcal{D}(g, \rho)$. A condição (5.24), $\Omega \subseteq \mathcal{D}(K, h, \mu, r) \cap \mathcal{D}(K, \eta, \xi, r)$, é assegurada pelas LMIs (5.49) e (5.51), para o ganho $K = \hat{W}_2 \hat{W}_1^{-1}$, de acordo com os lemas 5.3 e 5.4.

De acordo com o lema 5.5, a \mathcal{D} -invariância positiva do conjunto Ω para o sistema de malha fechada (5.16), para este mesmo ganho K , é garantida pelas desigualdades (5.53).

Partindo-se do teorema 3.1, com a LMI (5.50) e a condição de estabilidade quadrática modificada (5.52), pode-se deduzir que $(A + B_2 K)$ é assintoticamente estável para $K = \hat{W}_2 \hat{W}_1^{-1}$ e $\|H_{z_w}(s)\|_2^2 \leq \text{Tr}(\hat{W}_3)$, $\forall A \in \mathcal{D}_A$ e $B_2 \in \mathcal{D}_B$. Assim, todas as condições do teorema

5.1 são satisfeitas, implicando que o ganho de realimentação de estado $K = \hat{W}_2 \hat{W}_1^{-1}$ e o limite superior β da norma \mathcal{H}_2 são uma solução do problema 5.3. ■

5.3.1.2 Controle \mathcal{H}_∞ com restrições

A solução do problema de controle \mathcal{H}_∞ com restrições no domínio do tempo por realimentação de estado, para o sistema (5.8) pode ser obtida pelo próximo teorema.

Teorema 5.4: *Considera-se o sistema incerto com restrições (5.8). Seja $(\hat{W}_1, \hat{W}_2, \hat{\alpha}_L, \hat{\sigma}_L)$ a solução do problema de otimização*

$$\begin{aligned} \min_{W_1, W_2, \alpha_L, \sigma_L} \gamma \\ \text{s. a.} \end{aligned} \quad (5.54)$$

$$g_i^T W_1 g_i \leq \rho_i^2, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_g, \quad (5.55)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & v_i^T \\ v_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_v, \quad (5.56)$$

$$\begin{bmatrix} c_i^2 & h_i^T W_2 \\ W_2^T h_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_h, \quad (5.57)$$

com $c_i = \mu_i - \sqrt{h_i^T R h_i}$,

$$\begin{bmatrix} m_i^2 & \eta_i^T (C_y W_1 + D_y W_2) \\ (C_y W_1 + D_y W_2)^T \eta_i & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_n, \quad (5.58)$$

com $m_i = \xi_i - \sqrt{\eta_i^T D_y R D_y^T \eta_i}$,

com

$$\begin{bmatrix} A_i W_1 + W_1 A_i^T + B_{2j} W_2 + W_2^T B_{2j}^T & B_1 & (C_1 W_1 + D_{12} W_2)^T \\ B_1^T & -I & D_{11}^T \\ C_1 W_1 + D_{12} W_2 & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (5.59)$$

$$\begin{bmatrix} A_i W_1 + W_1 A_i^T + B_{2j} W_2 + W_2^T B_{2j}^T & B_1 & B_{2j} \\ B_1 & -\sigma_k I & 0 \\ B_{2j}^T & 0 & -(\alpha_k - \sigma_k w_0^2) R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (5.60)$$

para $i = 1, 2, \mathbf{L}, N$, $j = 1, 2, \mathbf{L}, M$, e $k = 1, 2, \mathbf{L}, N * M$, com $W_1 = W_1^T \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, $W_1 > 0$ e $W_2 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$.

Assim, o ganho de realimentação de estado linear dado por $K = \hat{W}_2 \hat{W}_1^{-1}$ e γ são uma solução do problema 5.3. O conjunto elipsoidal Ω definido por \hat{W}_1 é positivamente \mathcal{D} -invariante para o sistema em malha fechada (5.16).

Demonstração: esta demonstração é similar à do teorema 5.3, e por isto não é apresentada. ■

5.3.2 Realimentação de saída dinâmica

Nesta seção, serão vistos os problemas de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , com restrições no domínio do tempo, por realimentação dinâmica de saída (figura 2.4), para o caso de sistemas incertos, sujeitos a perturbações aditivas.

Considera-se o sistema linear descrito por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ y(t) = C_y y(t) \\ z_2(t) = C_2 x(t) + D_{22} u(t) \\ z_\infty(t) = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t), \end{cases} \quad (5.61)$$

com as restrições

$$x(t) \in \mathcal{D}(g, \rho) \subset \mathfrak{R}^n, \quad (5.62)$$

$$u(t) \in \mathcal{D}(h, \mu) \subset \mathfrak{R}^m, \quad (5.63)$$

$$y(t) \in \mathcal{D}(\eta, \xi) \subset \mathfrak{R}^p, \quad (5.64)$$

$$x_0(t) \in \mathcal{D}(g_0, \rho_0) \subset \mathfrak{R}^n, \quad (5.65)$$

$$z_2(t) \in \mathfrak{R}^{q_1}, \quad z_\infty(t) \in \mathfrak{R}^{q_2},$$

onde os conjuntos poliedrais $\mathcal{D}(g, \rho)$, $\mathcal{D}(h, \mu)$, $\mathcal{D}(\eta, \xi)$ e $\mathcal{D}(g_0, \rho_0)$ são definidos, respectivamente por (5.9), (5.10), (5.11) e (5.12). Supõe-se que $w(t) \in \mathcal{D}(w_0)$ (5.13), $r(t) \in \mathcal{R}$ (5.15) e os pares (A, B_2) , $\forall A \in \mathcal{D}_A$ (2.8) e $\forall B_2 \in \mathcal{D}_B$ (2.9), sejam assintoticamente estabilizáveis. Admite-se ainda que C_y tenha posto cheio.

Seja o compensador dinâmico descrito por:

$$\begin{cases} \dot{\zeta}(t) = A_k \zeta(t) + B_k e(t) \\ u(t) = C_k \zeta(t) + D_k e(t), \end{cases} \quad (5.66)$$

onde $\zeta(t) \in \mathfrak{R}^{n_c}$, com $\zeta(0) = 0$, $e(t) = r(t) - y(t)$, e A_k, B_k, C_k e D_k são matrizes desconhecidas de dimensões apropriadas.

Em malha fechada, o sistema (5.61) resulta em:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_f(t) = \left[\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{nc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{pmatrix} L_k \begin{pmatrix} -C_y & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{pmatrix} \right] x_f(t) + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0_{nc \times l} \end{pmatrix} w(t) + \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{pmatrix} L_k \begin{pmatrix} I_p \\ 0_{nc \times p} \end{pmatrix} r(t) \\ y(t) = [C_y \quad 0_{q \times nc}] x_f(t) \\ z_2 = \left[\begin{pmatrix} C_2 & 0_{q2 \times nc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{22} & 0_{q2 \times nc} \end{pmatrix} L_k \begin{pmatrix} -C_y & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{pmatrix} \right] x_f(t) + \left[\begin{pmatrix} D_{22} & 0_{q2 \times nc} \end{pmatrix} L_k \begin{pmatrix} I_{nc \times p} \\ 0 \end{pmatrix} \right] r(t) \\ z_\infty = \left[\begin{pmatrix} C_1 & 0_{q1 \times nc} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{12} & 0_{q1 \times nc} \end{pmatrix} L_k \begin{pmatrix} -C_y & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{pmatrix} \right] x_f(t) + \left[\begin{pmatrix} D_{12} & 0_{q1 \times nc} \end{pmatrix} L_k \begin{pmatrix} I_{nc \times p} \\ 0 \end{pmatrix} \right] r(t), \end{cases} \quad (5.67)$$

onde $x_f(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix}$ e a saída do controlador $u(t)$ pode ser escrita como:

$$u(t) = \left[\begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times nc} \end{pmatrix} L_k \begin{pmatrix} -C_y & 0 \\ 0 & I_{nc} \end{pmatrix} \right] x_f(t) + \left[\begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times nc} \end{pmatrix} L_k \begin{pmatrix} I_p \\ 0_{p \times nc} \end{pmatrix} \right] r(t), \quad (5.68)$$

onde

$$L_k = \begin{bmatrix} D_k & C_k \\ B_k & A_k \end{bmatrix}. \quad (5.69)$$

As restrições associadas aos estados podem ser reescritas como:

$$x_f(t) \in \mathcal{D}_f(g_f, \rho) = \{x_f \in \mathfrak{R}^{n+nc} : g_{fi}^T x_f \leq \rho_i, \rho_i > 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_g\}, \quad (5.70)$$

$$\begin{aligned} x_{f0} \in \mathcal{D}_f(g_{f0}, \rho_{f0}) = \{x_{f0} \in \mathfrak{R}^{n+nc} : g_{f0i}^T x_{f0} \leq \rho_{0i}, \rho_{0i} > 0, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_0, \\ \text{e } x_{f0i} = 0, i = n_0 + 1, n_0 + 2, \mathbf{L}, n_0 + nc\}, \end{aligned} \quad (5.71)$$

onde

$$g_{fi}^T = [g_i^T \quad 0_{1 \times nc}], i = 1, 2, \mathbf{L}, n_g,$$

$$\mathbf{g}_{f0i}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{0i}^T & \mathbf{0}_{1 \times nc} \end{bmatrix}, i = 1, 2, \mathbf{L}, n_0,$$

Denota - se por $v_{\hat{f}_i}$ são os vértices associados ao poliedro $\mathcal{D}_f(\mathbf{g}_{f0}, \rho_0)$.

O sistema em malha fechada ainda pode ser reescrito de forma sucinta por:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_f(t) = (\bar{A} + \bar{B}_2 L_k \bar{C}_y) \mathbf{x}_f(t) + \bar{B}_{1f} w(t) + \bar{B}_2 L_k \Pi r(t) \\ y(t) = -\Pi^T \bar{C}_y \mathbf{x}_f(t) \\ z_2 = (\bar{C}_2 + \bar{D}_{22} L_k \bar{C}_y) \mathbf{x}_f(t) + \bar{D}_{22} L_k \Pi r(t) \\ z_\infty = (\bar{C}_1 + \bar{D}_{12} L_k \bar{C}_y) \mathbf{x}_f(t) + \bar{D}_{11} w(t) + \bar{D}_{12} L_k \Pi r(t) \end{cases} \quad (5.72)$$

e

$$u(t) = -\Pi^T L_k \bar{C}_y \mathbf{x}_f(t) + \Pi^T L_k \Pi r(t), \quad (5.73)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_{nc} \end{bmatrix}; & \bar{B}_2 &= \begin{bmatrix} B_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{nc} \end{bmatrix}; & \bar{C}_y &= \begin{bmatrix} -C_y & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_{nc} \end{bmatrix}; \\ \bar{B}_{1f} &= \begin{bmatrix} B_1 \\ \mathbf{0}_{nc \times l} \end{bmatrix}; & \bar{C}_2 &= \begin{bmatrix} C_2 & \mathbf{0}_{q2 \times nc} \end{bmatrix}; & \bar{D}_{22} &= \begin{bmatrix} D_{22} & \mathbf{0}_{q2 \times nc} \end{bmatrix}; \\ \bar{C}_1 &= \begin{bmatrix} C_1 & \mathbf{0}_{q1 \times nc} \end{bmatrix}; & \bar{D}_{12} &= \begin{bmatrix} D_{12} & \mathbf{0}_{q1 \times nc} \end{bmatrix}; & \Pi &= \begin{bmatrix} I_p \\ \mathbf{0}_{nc \times p} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Definindo-se

$$\begin{aligned}
\bar{A}_f &= \bar{A} + \bar{B}_2 L_k \bar{C}_y \\
\bar{B}_{2f} &= \bar{B}_2 L_k \Pi \\
\bar{C}_{2f} &= \bar{C}_2 + \bar{D}_{22} L_k \bar{C}_y \\
\bar{D}_{22f} &= \bar{D}_{22} L_k \Pi \\
\bar{C}_{1f} &= \bar{C}_1 + \bar{D}_{12} L_k \bar{C}_y \\
\bar{D}_{12f} &= \bar{D}_{12} L_k \Pi.
\end{aligned} \tag{5.74}$$

As matrizes de transferência entre a perturbação w e as saídas controladas $z_{\bar{p}}$, $\bar{p} = 2$ e $\bar{p} = \infty$, são dadas, respectivamente, por:

$$H_{z_2 w}(s) = \bar{C}_{2f} (sI - \bar{A}_f)^{-1} \bar{B}_{1f}, \tag{5.75}$$

$$H_{z_\infty w}(s) = \bar{C}_{1f} (sI - \bar{A}_f)^{-1} \bar{B}_{1f} + D_{11}, \tag{5.76}$$

onde $A \in \mathcal{D}_A$ e $B_2 \in \mathcal{D}_B$.

Denota-se por \mathcal{K} o conjunto dos controladores por realimentação dinâmica de saída que estabiliza assintoticamente o sistema (5.61).

Os problemas de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ , por realimentação dinâmica de saída envolvendo sistemas com restrições no domínio do tempo são elaborados a seguir e apresentados em um mesmo enunciado.

Problema 5.4: *Determinar um controlador de realimentação de saída $L_k \in \mathfrak{R}^{(m+nc) \times (p+n)}$, de ordem fixa nc , e um escalar positivo finito, limitante da norma $\|H_{z_{\bar{p}} w}(s)\|_{\bar{p}}$, tais que as seguintes condições sejam satisfeitas.*

- i. L_k minimiza este limitante, $\forall A \in \mathcal{D}_A$ e $\forall B_2 \in \mathcal{D}_B$;
- ii. para uma condição inicial qualquer, $x_0 \in \mathcal{D}(g_0, \rho_0)$ e $\zeta(0) = 0$, as restrições no estado, no controle e na saída, definidas respectivamente por (5.62), (5.63) e

(5.64), não sejam violadas pelas trajetórias do sistema em malha fechada (5.67), quaisquer que sejam a perturbação admissível $w(t) \in \mathcal{D}(w_0)$ e entrada de referência $r(t) \in \mathcal{R}$,

Para $\bar{p} = 2$ ($\bar{p} = \infty$) está definido o problema de controle \mathcal{H}_2 (\mathcal{H}_∞) com restrições no domínio do tempo por realimentação de saída.

A lei de controle L_k que resolve este problema tem que estabilizar o sistema (5.61) e minimizar um limite superior da norma \mathcal{H}_2 (ou \mathcal{H}_∞) da matriz de transferência entre a perturbação w e a saída controlada z_2 (ou z_∞), em todo domínio de incerteza.

Além disto, o controlador L_k tem que garantir que todas as trajetórias do sistema $x_f(t; x_{f0})$ permaneçam no domínio de linearidade definido pelas restrições no domínio do tempo, quaisquer que sejam as entradas $w(t)$ e $r(t)$ admissíveis.

5.3.2.1 Controle \mathcal{H}_2 com restrições

A solução para o problema 5.4, tendo como critério de desempenho a norma \mathcal{H}_2 , é apresentada no teorema a seguir.

Sejam os vetores α_L e σ_L definidos por: $\alpha_L = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \mathbf{L} \ \alpha_{N*M}]^T$ e $\sigma_L = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \mathbf{L} \ \sigma_{N*M}]^T$ com $\alpha_i \geq 0$ e $\sigma_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \mathbf{L}, N * M$.

Teorema 5.5: *Considera-se o sistema incerto com restrições (5.61). Seja $(\hat{W}_1, W_3, \hat{L}_k, \hat{\alpha}_L, \hat{\sigma}_L)$ a solução do seguinte problema de otimização*

$$\begin{aligned} \min_{W_1, W_3, \hat{L}_k, \alpha_L, \sigma_L} \quad & \text{Tr}(W_3) \\ \text{s. a.} \quad & \end{aligned} \quad (5.77)$$

$$g_{\hat{f}_i}^T W_1 g_{\hat{f}_i} \leq \rho_i^2, \quad i = 1, 2, \mathbf{L}, n_g, \quad (5.78)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & v_{f_i} \\ v_{f_i}^T & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i=1,2,\mathbf{L},n_v, \quad (5.79)$$

$$h_i^T \Pi^T L_k \bar{C}_y W_1 \bar{C}_y^T L_k^T \Pi h_i \leq \bar{c}_i^2, \quad i=1,2,\mathbf{L},n_h, \quad (5.80)$$

com $\bar{c}_i = \mu_i - w_0 \sqrt{h_i^T \Pi^T L_k \Pi R \Pi^T L_k^T \Pi h_i}$,

$$\begin{bmatrix} W_1 & W_1(\bar{C}_2 + \bar{D}_{22} L_k \bar{C}_y)^T \\ (\bar{C}_2 + \bar{D}_{22} L_k \bar{C}_y) W_1 & W_3 \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.81)$$

$$\eta_i^T \Pi^T \bar{C}_y W_1 \bar{C}_y^T \Pi \eta_i \leq \xi_i^2, \quad i=1,2,\mathbf{L},n_n, \quad (5.82)$$

$$(\bar{A} + \bar{B}_2 L_k \bar{C}_y) W_1 + W_1 (\bar{A} + \bar{B}_2 L_k \bar{C}_y)^T + \bar{B}_{1f} \bar{B}_{1f}^T \leq 0, \quad (5.83)$$

$$\begin{bmatrix} (\bar{A} + \bar{B}_2 L_k \bar{C}_y) W_1 + W_1 (\bar{A} + \bar{B}_2 L_k \bar{C}_y)^T + \alpha_l W_1 & \bar{B}_{1f} & \bar{B}_2 L_k \Pi \\ \bar{B}_{1f}^T & -\sigma_l I & 0 \\ (\bar{B}_2 L_k \Pi)^T & 0 & -(\alpha_l - \sigma_l w_0^2) R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (5.84)$$

para $i=1,2,\mathbf{L},N$, $j=1,2,\mathbf{L},M$, e $l=1,2,\mathbf{L},N * M$, com $W_1 = W_1^T \in \mathfrak{R}^{(n+nc) \times (n+nc)}$, $W_1 > 0$ e $W_3 = W_3^T \in \mathfrak{R}^{q2 \times q2}$. O controlador \hat{L}_k e $\beta^2 = \text{Tr}(\hat{W}_3)$ são uma solução para o problema 5.4, e o conjunto elipsoidal Ω_f definido por \hat{W}_1 é positivamente \mathcal{D} -invariante para o sistema em malha fechada (5.70).

Demonstração: A demonstração deste teorema é similar àquela do teorema 5.3. ■

Nota-se que o problema de controle \mathcal{H}_2 com restrição (5.77) não é convexo em α_L , W_1 e L_k , conjuntamente. Fixando-se o par (α_L, L_k) , o problema (5.77) torna-se um problema

de otimização convexa. Este fato será utilizado na inicialização do algoritmo híbrido de síntese.

5.3.2.2 Controle \mathcal{H}_∞ com restrições

O próximo teorema fornece uma solução para o problema de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação dinâmica de saída, para o sistema (5.61) com restrições no domínio do tempo.

Teorema 5.6: *Sejam o sistema incerto com restrições (5.8) e $(\hat{W}_1, \hat{L}_k, \hat{\alpha}_L, \hat{\sigma}_L)$ a solução do problema de otimização*

$$\begin{aligned} \min_{W_1, L_k, \alpha_L, \sigma_L} \quad & \gamma \\ \text{s. a.} \quad & \end{aligned} \quad (5.85)$$

$$\mathbf{g}_{\hat{f}_i}^T W_1 \mathbf{g}_{\hat{f}_i} \leq \rho_i^2, \quad i = 1, 2, \mathbf{L}, n_g, \quad (5.86)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{v}_{\hat{f}_i} \\ \mathbf{v}_{\hat{f}_i}^T & W_1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \mathbf{L}, n_v, \quad (5.87)$$

$$\mathbf{h}_i^T \Pi^T L_k \bar{C}_y W_1 \bar{C}_y^T L_k^T \Pi \mathbf{h}_i \leq \bar{c}_i^2, \quad i = 1, 2, \mathbf{L}, n_h, \quad (5.88)$$

com $\bar{c}_i = \mu_i - w_0 \sqrt{\mathbf{h}_i^T \Pi^T L_k \Pi R \Pi^T L_k^T \Pi \mathbf{h}_i}$,

$$\boldsymbol{\eta}_i^T \Pi^T \bar{C}_y W_1 \bar{C}_y^T \Pi \boldsymbol{\eta}_i \leq \xi_i^2, \quad i = 1, 2, \mathbf{L}, n_n, \quad (5.89)$$

$$\begin{bmatrix} (\bar{A} + \bar{B}_2 L_k \bar{C}_y) W_1 + W_1 (\bar{A} + \bar{B}_2 L_k \bar{C}_y)^T & \bar{B}_{1f} & W_1 (\bar{C}_1 + \bar{D}_{12} L_k \bar{C}_y)^T \\ \bar{B}_{1f}^T & -I & D_{11}^T \\ (\bar{C}_1 + \bar{D}_{12} L_k \bar{C}_y) W_1 & D_{11} & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (5.90)$$

$$\begin{bmatrix} (\bar{A} + \bar{B}_2 L_k \bar{C}_y) W_1 + W_1 (\bar{A} + \bar{B}_2 L_k \bar{C}_y)^T + \alpha_l W_1 & \bar{B}_{1f} & \bar{B}_2 L_k \Pi \\ \bar{B}_{1f}^T & -\sigma_l I & 0 \\ (\bar{B}_2 L_k \Pi)^T & 0 & -(\alpha_l - \sigma_l w_0^2) R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (5.91)$$

para $i = 1, 2, \mathbf{L}, N$, $j = 1, 2, \mathbf{L}, M$, e $l = 1, 2, \mathbf{L}, N * M$, com $W_1 = W_1^T \in \mathfrak{R}^{(n+nc) \times (n+nc)}$, $W_1 > 0$.

O controlador \hat{L}_k e γ são uma solução do problema de controle \mathcal{H}_∞ com restrições (problema 5.4). O conjunto elipsoidal Ω_f gerado por \hat{W}_1 é positivamente \mathcal{D} -invariante para o sistema em malha fechada (5.70).

Demonstração: A demonstração deste teorema é similar àquela do teorema 5.5 e não será apresentada. ■

O problema (5.85) também não é convexo em L_k , W_1 e α_L conjuntamente. A desigualdade matricial associada ao controle não permite tratar o problema com técnicas convexas mesmo para uma matriz W_1 fixa.

5.3.3 Algoritmo de síntese

Embora o critério de otimização seja linear, o problema (5.46) não é convexo, porque as desigualdades matriciais (5.53) não o são. Desta maneira, é proposto um algoritmo híbrido, baseado nos Algoritmos Genéticos, com o objetivo de resolver este problema.

Este procedimento consiste em fixar a variável α_L de modo que, com cada iteração do algoritmo, um problema de otimização convexo seja resolvido e, ao final de algumas

gerações, tenha-se um valor para o ganho K que minimiza a norma \mathcal{H}_2 ou a norma \mathcal{H}_∞ de forma satisfatória.

5.3.3.1 Realimentação de estado

INICIALIZAÇÃO

- Gerar uma população α_L inicial (aleatória) factível
- Calcular a aptidão de cada indivíduo (resolução das LMIs)

ENQUANTO o número máximo de gerações não for atingido

 Armazenar o melhor indivíduo da população

 Executar operador de seleção

 Executar operador de cruzamento

 Executar operador de mutação

 Substituir o pior indivíduo pelo melhor indivíduo armazenado anteriormente

FIM_ENQUANTO

Observação: Para cada α_L fixo, um problema convexo é resolvido, formulado através das LMIs. Se o problema tiver solução, o α_L é factível.

As LMIs são recalculadas após um cruzamento ou mutação (subsecção 4.3.4.2 e 4.3.4.3), e os indivíduos obtidos somente são efetivados com um resultado factível.

5.3.3.2 Realimentação de saída

INICIALIZAÇÃO

- Gerar uma população inicial (aleatória) factível com α_L e L_k
- Calcular a aptidão de cada indivíduo (resolução das LMIs)

ENQUANTO o número máximo de gerações não for atingido

 Armazenar o melhor indivíduo da população

 Executar operador de seleção

 Executar operador de cruzamento

Executar operador de mutação
 Substituir o pior indivíduo pelo melhor indivíduo armazenado anteriormente
 FIM_ENQUANTO

Observação: Para cada par (α_L, L_k) fixo, um problema convexo é resolvido, formulado através das LMIs. Se o problema tiver solução, o par (α_L, L_k) é factível.

As LMIs são recalculadas após um cruzamento ou mutação (subseção 4.3.4.2 e 4.3.4.3), e os indivíduos obtidos somente são efetivados com um resultado factível.

Devido à dificuldade de obter-se uma população inicial factível a partir do par (α_L, L_k) aleatório, optou-se por uma primeira tentativa simplificada, na qual as restrições envolvendo L_k são suprimidas ((5.80) e (5.84), para o caso \mathcal{H}_2 , e (5.88) e (5.91), para o caso \mathcal{H}_∞), e apenas o α_L é gerado de forma aleatória. Utilizou-se as mesmas restrições de estrutura sobre W_1 e W_2 (2.54) e (2.55) (subseção 2.8.2). Com estas considerações, o problema resultante pode ser resolvido via LMI.

Se o resultado for factível, testa-se o par (α_L, L_k) com todas as restrições do problema \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ , sendo o L_k obtido como resposta da primeira tentativa.

Persistindo a infactibilidade, passa-se a considerar como indivíduo a matriz W_1 . W_1 é gerada aleatoriamente. A factibilidade de cada indivíduo W_1 é testada através da solução dos problemas (5.77), caso \mathcal{H}_2 ou (5.85), caso \mathcal{H}_∞ , sem levar em consideração a restrição sobre o controle ((5.80) ou (5.88)). Caso W_1 seja factível, um par (α_L, L_k) é obtido como resposta.

Observa-se que para uma matriz W_1 fixa, sem as restrições de controle, estes problemas podem ser resolvidos via LMI.

Novamente a factibilidade do par (α_L, L_k) é testada com todas as restrições.

Se mesmo assim não houver ainda uma resposta factível, repete-se o ciclo com um novo α_L aleatório.

5.4 Conclusão

Neste capítulo, o problema de síntese de controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por realimentação dinâmica de saída para sistemas com incertezas paramétricas foi apresentado. A solução proposta foi construída a partir dos conceitos de algoritmos genéticos e desigualdades matriciais lineares, explorando a bilinearidade, em relação ao controlador L_k e a matriz de Lyapunov W_1 , existente na formulação do problema via desigualdades matriciais. Para se chegar a esta formulação foi utilizado o conceito de estabilidade quadrática no tratamento das incertezas do tipo politopo.

Com base no conceito da \mathcal{D} -invariância positiva, foi abordado o problema de síntese de controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas sujeitos a restrições nas entradas e saídas e nos controles. Uma condição suficiente foi estabelecida, garantindo a \mathcal{D} -invariância positiva de um conjunto elipsoidal, contido na região de linearidade, para um sistema com perturbação e incerteza paramétrica. Assim, o controlador foi concebido de forma a garantir a estabilidade assintótica de um conjunto elipsoidal de estados, construído a partir de uma matriz de Lyapunov, sem violar as restrições temporais admissíveis.

Inicialmente, o problema foi abordado no contexto da realimentação de estado. Em seguida, foi apresentada uma extensão dos resultados para o caso de realimentação dinâmica de saída. Explorando a geometria do problema, um algoritmo híbrido foi proposto para a busca de uma solução ótima.

Como acontece para a condição de estabilidade quadrática, o fato de trabalhar com os conjuntos positivamente invariantes do tipo elipsoidal conduz a condições suficientes. Entretanto, com o uso desta abordagem, pode-se tratar diferentes problemas de síntese, para os sistemas sujeitos a restrições, com um procedimento cuja característica principal é função das boas qualidades dos AGs e com a eficiência das técnicas de otimização convexa.

Capítulo 6

Resultados

6.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados vários exemplos extraídos da literatura, relacionados com os diversos problemas abordados no capítulo 5.

Nos algoritmos genéticos utilizados para a resolução dos exemplos, a probabilidade de cruzamento utilizada é $pc = 1$ (ou 100%), conforme visto na seção 4.3.4.2, e a probabilidade de mutação foi considerada adaptativa, conforme seção 4.3.4.3.

6.2 Controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída

6.2.1 Exemplo 1

Considera-se o modelo dinâmico linearizado no espaço de estado, descrito em [GER96], que representa o helicóptero VTOL.

O modelo do sistema é dado por (6.1)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ y(t) = C_yx(t) + D_yu(t) + D_{yw}w(t) \\ z_2 = C_2x(t) + D_{22}u(t) \\ z_\infty = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t), \end{cases} \quad (6.1)$$

onde as matrizes incertas A e B_2 são determinadas por:

$$A = \begin{bmatrix} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4555 \\ 0,0482 & -1,0100 & 0,0024 & -4,0208 \\ 0,1002 & a_{32} & -0,7070 & a_{34} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0,4422 & -0,1761 \\ b_{21} & 7,5922 \\ 5,5200 & -4,4900 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo $-0,6319 \leq a_{32} \leq 1,3681$, $1,22 \leq a_{34} \leq 1,62$ e $2,7446 \leq b_{21} \leq 4,3446$. As demais matrizes são:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_y = [0 \ 1 \ 0 \ 0], \quad D_y = [0 \ 0], \quad D_{yw} = [0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Controle \mathcal{H}_2

Em [GER96] foi projetado um controlador \mathcal{H}_2 ótimo por realimentação de saída estática. Neste caso, o limitante superior da norma \mathcal{H}_2 obtido foi $\beta = 4,500$.

O problema resolvido com a utilização do algoritmo híbrido proposto neste trabalho, para um controlador de dimensão 2 (figura 6.1), apresentou como limitante superior da norma \mathcal{H}_2 o valor $\beta = 3,3873$.

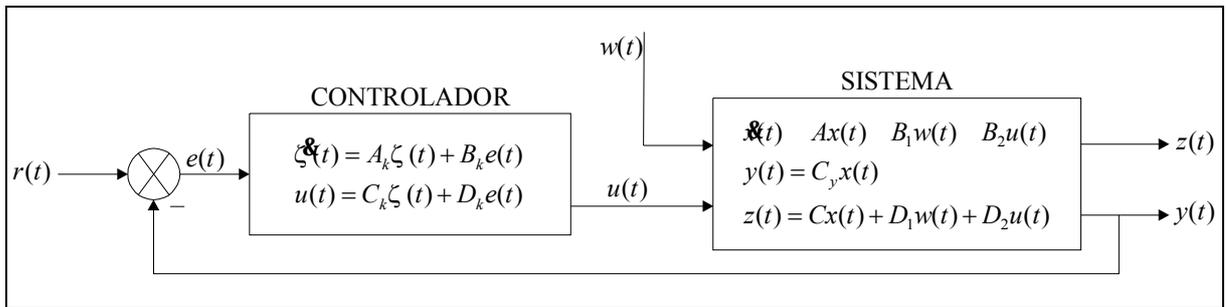


Figura 6.1: Sistema em malha fechada com realimentação de saída.

O controlador dinâmico encontrado foi:

$$A_k = \begin{bmatrix} 897819 & -527418 \\ 197211 & -1158507 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} 332759 \\ 666767 \end{bmatrix},$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -71941 & 422610 \\ 70017 & -411308 \end{bmatrix}, \quad D_k = \begin{bmatrix} -258886 \\ 255406 \end{bmatrix}.$$

Neste exemplo, o algoritmo foi executado durante 20 gerações com uma população de 30 indivíduos. A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.2, no qual nota-se uma convergência prematura da solução. Tal fato justifica-se pela presença de um bom indivíduo na população inicial.

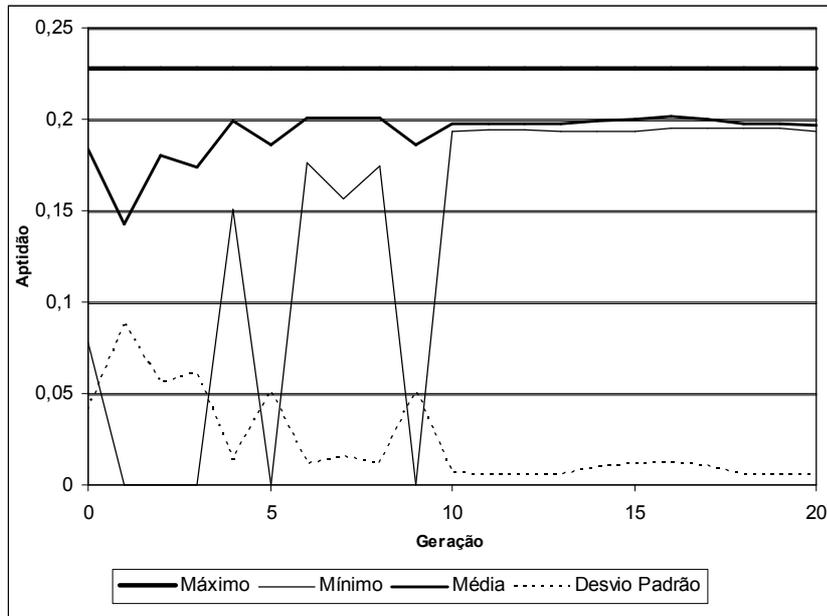


Figura 6.2: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma \mathcal{H}_2 .

A tabela 6.1 mostra os resultados obtidos para este problema considerando-se controladores com dimensões diferentes.

Tabela 6.1 – Resultados do limitante superior da norma \mathcal{H}_2 para controladores de diferentes dimensões.

Ordem do controlador	Limitante superior da norma \mathcal{H}_2
2	$\beta = 3,3873$
3	$\beta = 3,7760$
4	$\beta = 3,6772$

Calculando-se a norma \mathcal{H}_2 ótima nos vértices com o auxílio da função HINFMIX do MatLab[®] [GAH95], obtêm-se os seguintes resultados:

Tabela 6.2 – Normas \mathcal{H}_2 ótimas nos vértices.

	$\beta_{\text{ótimo}}$
$\beta(A_1, B_{21})$	3,2144
$\beta(A_2, B_{21})$	3,2142
$\beta(A_3, B_{21})$	3,2269

$\beta(A_4, B_{21})$	3,2270
$\beta(A_1, B_{22})$	3,2139
$\beta(A_2, B_{22})$	3,2135
$\beta(A_3, B_{22})$	3,2261
$\beta(A_4, B_{22})$	3,2260

Nota-se pela tabela 6.2 que o limitante encontrado para o sistema sujeito a incertezas é bem próximo dos ótimos nos vértices.

Controle \mathcal{H}_∞

Com o mesmo sistema, o algoritmo híbrido proposto neste trabalho, para a resolução do problema de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída, também para um controlador de dimensão 2 (figura 6.1), apresentou como limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ o valor $\gamma = 11,4922$.

O controlador dinâmico encontrado foi:

$$A_k = \begin{bmatrix} 313,2614 & 346,4890 \\ -308,9887 & -341,7630 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} 12852 \\ -11976 \end{bmatrix},$$

$$C_k = \begin{bmatrix} -18,5738 & -20,6692 \\ 139,7615 & 153,0236 \end{bmatrix}, \quad D_k = \begin{bmatrix} -1006,1 \\ 5082,3 \end{bmatrix}.$$

A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.3. Para este exemplo o algoritmo foi executado durante 20 gerações com uma população de 20 indivíduos. Nota-se uma convergência foi prematura da solução, devido à presença de um bom indivíduo na população inicial.

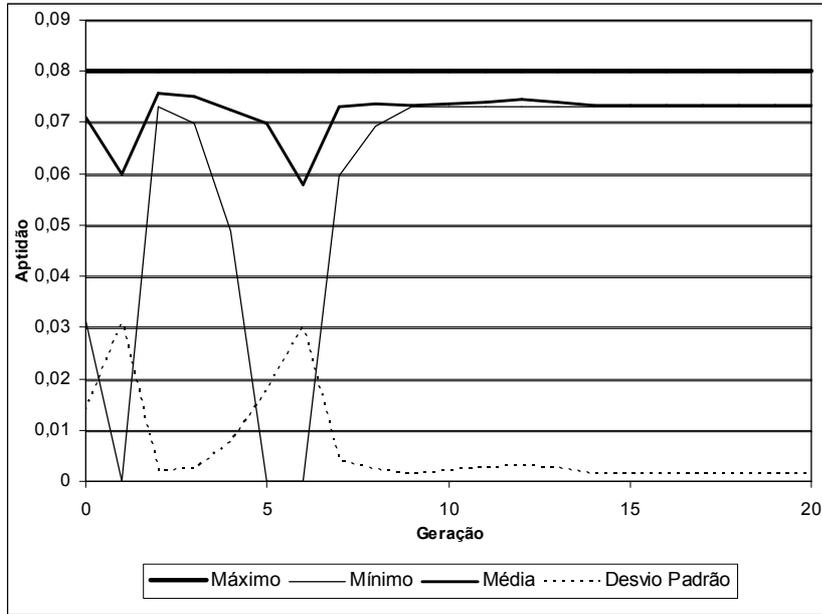


Figura 6.3: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma \mathcal{H}_∞ .

A tabela 6.3 mostra os resultados obtidos para este problema considerando controladores com dimensões diferentes.

Tabela 6.3 – Resultados do limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ para controladores de diferentes dimensões.

Ordem do controlador	Limitante superior da norma \mathcal{H}_∞
2	$\gamma = 11,4922$
3	$\gamma = 11,4506$
4	$\gamma = 11,4078$

Com o controlador obtido para $nc = 4$, têm-se nos vértices os seguintes valores para o limitante da norma \mathcal{H}_∞ :

Tabela 6.4 – Normas \mathcal{H}_∞ nos vértices.

Controlador obtido pelo algoritmo híbrido	Controlador ótimo
$\gamma(A_1, B_{21}) = 11,2722$	$\gamma_{opt} = 10,1351$
$\gamma(A_2, B_{21}) = 11,2722$	$\gamma_{opt} = 10,1342$
$\gamma(A_3, B_{21}) = 10,1059$	$\gamma_{opt} = 10,0006$
$\gamma(A_4, B_{21}) = 10,1059$	$\gamma_{opt} = 10,0016$

$\gamma(A_1, B_{22})=11,1823$	$\gamma_{opt} = 10,1341$
$\gamma(A_2, B_{22})=11,1823$	$\gamma_{opt} = 10,1343$
$\gamma(A_3, B_{22})=10,0684$	$\gamma_{opt} = 9,9988$
$\gamma(A_4, B_{22})=10,0684$	$\gamma_{opt} = 9,9983$

Os γ_{opt} foram calculados com o auxílio do MatLab[®] (função HINFLMI) [GAH95], considerando-se cada vértice como um sistema.

Observa-se pela tabela 6.4, que os controladores obtidos têm um limitante da norma \mathcal{H}_∞ próximo do valor ótimo nos vértices.

6.2.2 Exemplo 2

Considera-se o modelo dinâmico linearizado no espaço de estado, descrito em [OHS98], que corresponde a um sistema de pêndulo invertido.

O modelo do sistema é dado por (6.1), onde a matriz incerta A é determinada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

sendo $a_{32} = -0,0369$, $-0,1183 \leq a_{33} \leq -0,0968$, $0,5336 \cdot 10^{-3} \leq a_{34} \leq 0,6522 \cdot 10^{-3}$, $a_{42} = 30,7744$, $0,3025 \leq a_{43} \leq 0,3697$ e $-0,5444 \leq a_{44} \leq -0,4454$. Os elementos a_{33} e a_{43} e os elementos a_{34} e a_{44} derivam de apenas dois parâmetros distintos [OHS98]. Desta forma, há apenas quatro vértices para a matriz A . As demais matrizes são:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4,9292 \\ -15,4051 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 23,3000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,3200 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Controle \mathcal{H}_2

Em [OHS98], foi considerado o problema de controle \mathcal{H}_2 por realimentação de saída. O controlador obtido em [OHS98] de dimensão 4 tem limitante superior da norma \mathcal{H}_2 de $\beta = 3,6433$.

O problema resolvido com a utilização do algoritmo híbrido proposto neste trabalho, para um controlador de mesma dimensão (figura 6.1), apresentou como limitante superior da norma \mathcal{H}_2 o valor $\beta = 2,2417$.

O controlador dinâmico encontrado foi:

$$A_k = 10^8 \times \begin{bmatrix} -16033 & 3755 & -20189 & 10735 \\ 1532370 & -358886 & 1929598 & -1025996 \\ 173026 & -40523 & 217879 & -115850 \\ 834581 & -195462 & 1050925 & -558793 \end{bmatrix}, \quad B_k = 10^6 \times \begin{bmatrix} -78143 & 6337 \\ 7468691 & -605737 \\ 843322 & -68397 \\ 4067706 & -329905 \end{bmatrix},$$

$$C_k = 10^9 \times [14032 \quad -3286 \quad 17669 \quad -9395], \quad D_k = 10^7 \times [68390 \quad -5547]$$

A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.4. Para este exemplo o algoritmo foi executado durante 30 gerações com uma população de 20

indivíduos. Neste gráfico é possível observar a convergência gradativa do algoritmo em busca da melhor solução.

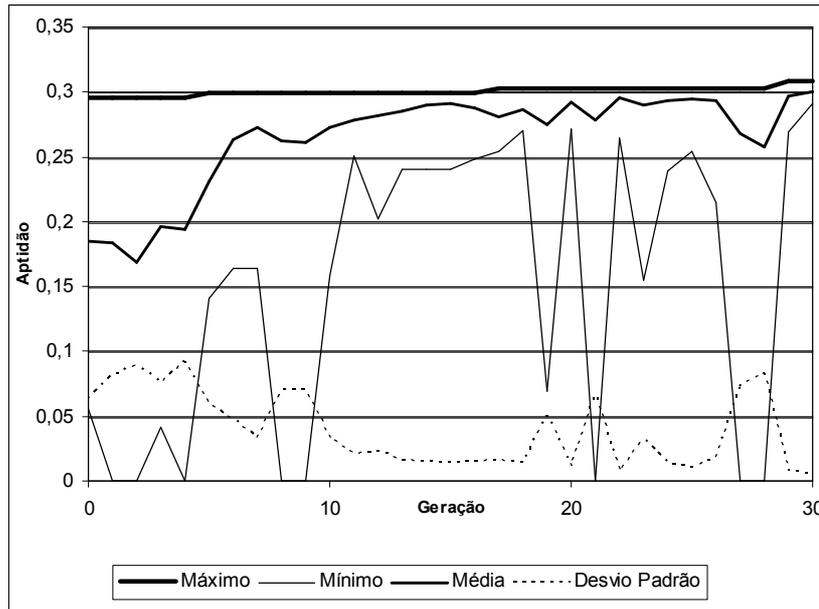


Figura 6.4: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma \mathcal{H}_2 .

Controle \mathcal{H}_∞

Com o mesmo sistema, o algoritmo híbrido proposto neste trabalho, para a resolução do problema de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída, também para um controlador de dimensão 4 (figura 6.1), apresentou como limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ o valor é $\gamma = 1,4763$.

O controlador dinâmico encontrado foi:

$$A_k = 10^9 \times \begin{bmatrix} 0,0218 & 0,0024 \\ -4,2914 & -0,4697 \end{bmatrix}, \quad B_k = 10^9 \times \begin{bmatrix} 0,0025 & 0,0299 \\ -0,4924 & -5,8918 \end{bmatrix},$$

$$C_k = 10^8 \times [-2,0072 \quad -0,2197], \quad D_k = 10^8 \times [-0,2303 \quad -2,7557].$$

A tabela 6.5 mostra os resultados obtidos para este problema considerando controladores com dimensões diferentes, com o algoritmo executado para 10 gerações com uma população de 10 indivíduos.

Tabela 6.5 – Resultados do limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ para controladores de diferentes dimensões.

Ordem do controlador	Limitante superior da norma \mathcal{H}_∞
2	$\gamma = 1,1985$
3	$\gamma = 1,4978$
4	$\gamma = 1,4763$

Com o controlador obtido para $nc = 4$, têm-se nos vértices os seguintes valores para o limitante da norma \mathcal{H}_∞ :

Tabela 6.6 – Normas \mathcal{H}_∞ nos vértices.

Controlador obtido pelo algoritmo híbrido	Controlador ótimo
$\gamma(A_1, B_2) = 1,4750$	$\gamma_{opt} = 1,1817$
$\gamma(A_2, B_2) = 1,4627$	$\gamma_{opt} = 1,1751$
$\gamma(A_3, B_2) = 1,4647$	$\gamma_{opt} = 1,1788$
$\gamma(A_4, B_2) = 1,4729$	$\gamma_{opt} = 1,1765$

Os γ_{opt} foram calculados com o auxílio do MatLab[®] (função HINFLMI) [GAH95], considerando-se cada vértice como um sistema.

Observa-se pela tabela 6.6, que os controladores obtidos têm um limitante da norma \mathcal{H}_∞ próximo do valor ótimo nos vértices.

6.2.3 Exemplo 3

Considera-se o modelo dinâmico incerto no espaço de estado, descrito em [GAL86], que representa a dinâmica do eixo lateral do avião L-1011.

O modelo do sistema é dado por (6.1), onde a matriz incerta A é determinada por:

$$A = \begin{bmatrix} -2,9800 & a_{12} & 0 & -0,0340 \\ -0,9900 & -0,2100 & 0,0350 & -0,0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,3900 & -5,5550 & 0 & -1,8900 \end{bmatrix},$$

onde $-0,57 \leq a_{12} \leq 2,43$,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0,0320 \\ 0 \\ 0 \\ -1,6000 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Controle \mathcal{H}_2

Utilizando-se o algoritmo híbrido proposto neste trabalho, para a busca de um controlador ($nc = 4$) por realimentação dinâmica de saída, obteve-se o seguinte resultado:

$$A_k = \begin{bmatrix} -8669860 & 9182049 & -1758145 & 4740673 \\ 4857463 & -5173839 & 975283 & -2662559 \\ -2849621 & 3016798 & -578258 & 1557911 \\ 617900 & -660472 & 123289 & -339211 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} 9117383 & 1600046 \\ -5125240 & -896914 \\ 2996036 & 525887 \\ -653312 & -114128 \end{bmatrix},$$

$$C_k = [0,0829 \quad 0,6987 \quad 0,5315 \quad 2,7804], \quad D_k = [-2,2477 \quad -1,9466]$$

e o limitante superior da norma \mathcal{H}_2 $\beta = 5,5666$.

Neste exemplo, o algoritmo foi executado durante 30 gerações com uma população de 20 indivíduos. A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.5, no qual nota-se a convergência gradativa para uma melhor solução.

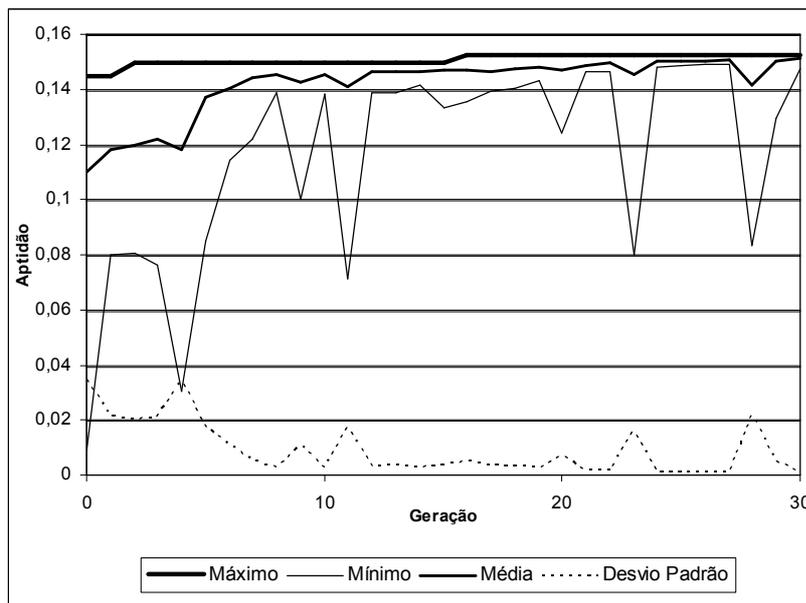


Figura 6.5: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma \mathcal{H}_2 .

A tabela 6.7 mostra os resultados obtidos para este problema considerando-se controladores com dimensões diferentes. Pode-se observar, pela tabela 6.7, que há uma degradação do limitante superior da norma \mathcal{H}_2 com o aumento da ordem do controlador. Isto se deve, provavelmente, ao aumento do número de variáveis do problema, o que dificulta a inicialização e a progressão do algoritmo proposto.

Tabela 6.7 – Resultados do limitante superior da norma \mathcal{H}_2 para controladores de diferentes dimensões.

Ordem do controlador	Limitante superior da norma \mathcal{H}_2
2	$\beta = 4,7655$
4	$\beta = 5,5666$

Controle \mathcal{H}_∞

Para o problema de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída, o algoritmo híbrido fornece o seguinte controlador de dimensão 4:

$$A_k = \begin{bmatrix} -55,3732 & 126,4105 & 2,8989 & -11,7246 \\ 259,5654 & -616,6393 & -14,7054 & 54,2766 \\ 26,9660 & -64,3017 & -2,8756 & 5,6125 \\ -50,9309 & 117,2456 & 2,6529 & -12,3734 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} -28,0977 & -122,0502 \\ 139,5774 & 594,9168 \\ 14,6428 & 62,1753 \\ -26,3892 & -113,8668 \end{bmatrix},$$

$$C_k = [169,9306 \quad -399,0221 \quad -9,3232 \quad 36,2010], \quad D_k = [89,4863 \quad 386,0909]$$

e o limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ é o valor $\gamma = 27,4263$.

Neste exemplo, o algoritmo foi executado durante 30 gerações com uma população de 20 indivíduos. A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.6, no qual nota-se uma convergência prematura da solução. Tal fato justifica-se pela presença de um bom indivíduo na população inicial.

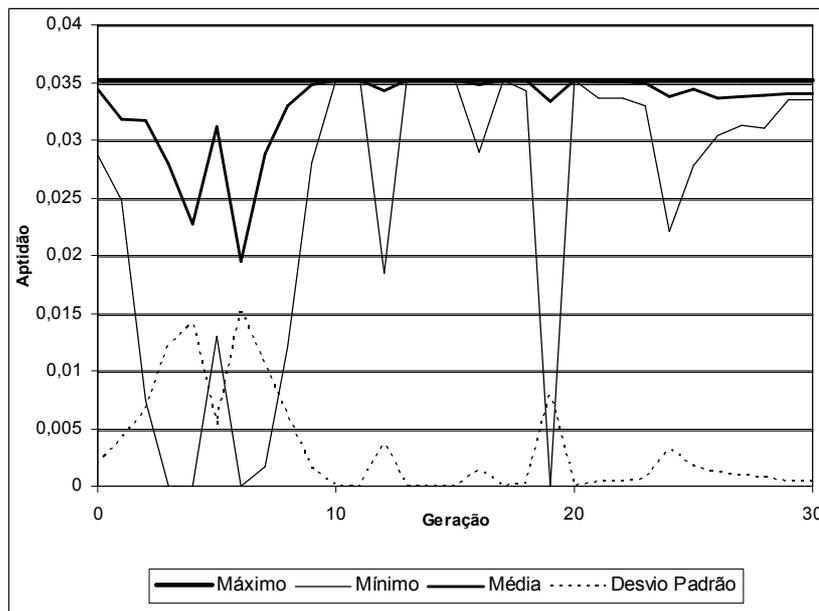


Figura 6.6: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma \mathcal{H}_∞ .

A tabela 6.8 mostra os resultados obtidos para este problema considerando controladores com dimensões diferentes.

Tabela 6.8 – Resultados do limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ para controladores de diferentes dimensões.

Ordem do controlador	Limitante superior da norma \mathcal{H}_∞
2	$\gamma = 27,4263$
3	$\gamma = 27,4263$
4	$\gamma = 27,4263$

Nota-se que o limitante da norma \mathcal{H}_∞ não varia de forma significativa com a dimensão do controlador.

6.2.4 Exemplo 4

Considera-se o modelo linearizado no espaço de estado que descreve o comportamento dinâmico de um satélite com dois corpos rígidos (corpo principal e módulo de instrumentação), descrito em [GAH95].

O modelo do sistema é dado por (6.1), onde a matriz incerta A é determinada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & a_1 & -a_2 & a_2 \\ a_1 & -a_1 & a_2 & -a_2 \end{bmatrix},$$

sendo $0,09 \leq a_1 \leq 0,4$ e $0,0038 \leq a_2 \leq 0,04$. As demais matrizes são:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$C_y = [1 \ 0 \ 0 \ 0], \quad D_y = [0], \quad D_{yw} = [0],$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = [0 \ 1 \ 0 \ 0], \quad D_{11} = [0], \quad D_{12} = [0]$$

Controle \mathcal{H}_2

O problema de controle \mathcal{H}_2 foi resolvido com a utilização do algoritmo híbrido proposto neste trabalho, para um controlador de dimensão 5 (figura 6.1).

O controlador dinâmico encontrado foi:

$$A_k = \begin{bmatrix} -92,6459 & 102,4540 & -116,0864 & -0,7262 & -61,0338 \\ -61,6828 & 68,5365 & -77,2109 & 0,5460 & -41,2936 \\ -7,1951 & 8,5840 & -10,2483 & 0,8499 & -5,8828 \\ 80,7918 & -89,4905 & 99,2891 & -0,2656 & 54,0626 \\ 43,3356 & -48,4963 & 56,6092 & 0,0548 & 29,1617 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} -18,7364 \\ -12,5455 \\ -1,5453 \\ 16,1806 \\ 8,8667 \end{bmatrix},$$

$$C_k = [-70,8789 \ 78,7049 \ -88,6977 \ 0,5978 \ -46,6240], \quad D_k = [-14,2859]$$

e o limitante superior da norma \mathcal{H}_2 associado é $\beta = 16,4540$.

A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.7. Para este exemplo o algoritmo foi executado durante 30 gerações com uma população de 50 indivíduos. Devido ao fato do controlador ser de dimensão elevada ($nc = 5$), houve dificuldade para a determinação de uma população inicial factível. Como ocorreu da população inicial possuir um bom indivíduo, nota-se a convergência prematura da solução, como pode ser visto pelos valores máximos na figura 6.7.

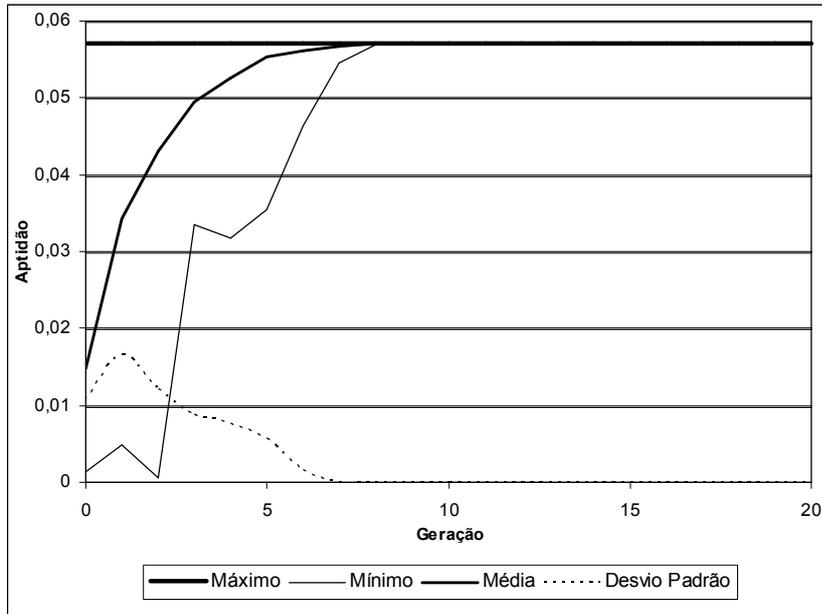


Figura 6.7: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma \mathcal{H}_2 .

Controle \mathcal{H}_∞

Com o mesmo sistema, o algoritmo híbrido proposto neste trabalho, para a resolução do problema de controle \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída, também para um controlador de dimensão 5 (figura 6.1), apresentou como limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ o valor $\gamma = 43,2474$.

O controlador dinâmico encontrado foi:

$$A_k = \begin{bmatrix} 71670 & 86090 & 22040 & 30380 & 35220 \\ 5720 & 6870 & 1760 & 2420 & 2810 \\ -124410 & -149430 & -38260 & -52730 & -61130 \\ -74280 & -89220 & -22840 & -31480 & -36500 \\ -18350 & -22040 & -5640 & -7780 & -9020 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} -7080 \\ -565 \\ 12289 \\ 7337 \\ 1814 \end{bmatrix},$$

$$C_k = [163720 \quad 196650 \quad 50350 \quad 69390 \quad 80450], \quad D_k = [-16173].$$

6.3 Controladores \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com restrições no domínio do tempo

6.3.1 Estabilização por realimentação de estado

6.3.1.1 Exemplo 1

Considera-se o modelo linearizado no espaço de estado que descreve o comportamento dinâmico de um avião no plano vertical, descrito em [LEI03].

O modelo do sistema é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ y(t) = C_yx(t) + D_yu(t) + D_{yw}w(t) \\ z_2 = C_2x(t) + D_{22}u(t) \\ z_\infty = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \end{cases}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,1320 & 0 & -1 \\ 0 & -0,0538 & -0,1712 & 0 & 0,0705 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,0485 & 0 & -0,8556 & -1,0130 \\ 0 & -0,2909 & 0 & 1,0532 & -0,6859 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 0,03593 & 0 & 0,01672 \\ 0 & 0,00989 & 0 \\ 0 & -0,07548 & 0 \\ 0 & 0 & 0,05635 \\ 0,00145 & 0 & 0,06743 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4,419 & 0 & -1,665 \\ 1,575 & 0 & -0,0732 \end{bmatrix},$$

$$C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0,70711 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,70711 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0,70711 & 0 & 0 \\ 0 & 0,70711 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0,70711 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,70711 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0,70711 & 0 & 0 \\ 0 & 0,70711 & 0 \end{bmatrix}.$$

Supõe-se que o sistema esteja sujeito a restrições no domínio do tempo e a uma perturbação confinada à uma esfera de raio $w_0 = 1$.

O conjunto dos estados admissíveis foi definido pela seguinte expressão:

$$\begin{cases} -4,5 \leq x_1(t) \leq 4,5 \\ -4,5 \leq x_2(t) \leq 4,5 \\ -4,5 \leq x_3(t) \leq 4,5 \\ -4,5 \leq x_4(t) \leq 4,5 \\ -4,5 \leq x_5(t) \leq 4,5. \end{cases}$$

As restrições nos controles são dadas por:

$$\begin{cases} -9 \leq u_1(t) \leq 9 \\ -9 \leq u_2(t) \leq 9 \\ -9 \leq u_3(t) \leq 9. \end{cases}$$

As restrições nas saídas são dadas por:

$$\begin{cases} -4,5 \leq y_1(t) \leq 4,5 \\ -4,5 \leq y_2(t) \leq 4,5 \\ -4,5 \leq y_3(t) \leq 4,5. \end{cases}$$

Foi considerada uma região de estados iniciais admissíveis, centrados na origem, definida pelo seguinte envelope convexo:

$$\begin{cases} -1,25 \leq x_{01}(t) \leq 1,25 \\ -1,25 \leq x_{02}(t) \leq 1,25 \\ -1,25 \leq x_{03}(t) \leq 1,25 \\ -1,25 \leq x_{04}(t) \leq 1,25 \\ -1,25 \leq x_{05}(t) \leq 1,25. \end{cases}$$

O sinal de referência deve satisfazer as restrições

$$-2 \leq r_i \leq 2, i = 1, 2, 3. \quad (6.2)$$

Para a aplicação do procedimento descrito no capítulo anterior, considera-se uma esfera circunscrita na região definida por (6.2).

Controle \mathcal{H}_2

O exemplo considerado foi analisado para um caso sem restrições. A função MSFSYN do MatLab[®] [GAH95] foi utilizada para a síntese. Esta função, a partir das equações no espaço de estado, calcula o controlador por realimentação de estado ($u = Kx$) que minimiza a norma \mathcal{H}_2 .

Os resultados obtidos para o caso ótimo foram:

$$K = \begin{bmatrix} 2,7344e-011 & -1,0000 & -4,4538e-010 & 1,7110e-010 & 1,9320e-010 \\ -9,8403e-011 & 1,6022e-011 & -1,0000 & -2,2660e-011 & 1,1277e-010 \\ -1,1430 & -7,3403 & 3,8633 & 0,9031 & 0,9408 \end{bmatrix}$$

como ganho de realimentação de estado e

$$\beta = 6,1104 \cdot 10^{-4}$$

como limitante superior da norma \mathcal{H}_2 .

O sistema com restrições, resolvido com a utilização do algoritmo híbrido proposto neste trabalho, teve os seguintes resultados:

$$K = \begin{bmatrix} 1,1340 & 0,6483 & -0,2825 & -0,7082 & -0,9296 \\ -0,5904 & -2,1536 & -1,1402 & -0,0099 & 0,9102 \\ 2,8042 & -0,0863 & 6,4450 & 1,7339 & -3,5088 \end{bmatrix}$$

como ganho de realimentação de estado e

$$\beta = 4,3056$$

como limitante superior da norma \mathcal{H}_2 .

Com as restrições temporais do problema, é natural que a norma \mathcal{H}_2 degrade.

A região elipsoidal Ω de \mathcal{D} -invariância positiva para o sistema de malha fechada ficou determinada por:

$$W_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5570 & 0,1189 & 0,7046 & 0,1546 & -0,4587 \\ 0,1189 & 0,3445 & 0,0860 & 0,0204 & -0,1425 \\ 0,7046 & 0,0860 & 1,5625 & 0,0080 & -0,7932 \\ 0,1546 & 0,0204 & 0,3380 & 0,1243 & -0,1839 \\ -0,4587 & -0,1425 & -0,7932 & -0,1839 & 0,5312 \end{bmatrix}$$

Para este exemplo o algoritmo foi executado durante 30 gerações com uma população de 10 indivíduos. A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.8, no qual pode-se notar a rapidez com que o algoritmo atinge um valor ótimo e, a partir de tal ponto, a evolução passa a ser significativamente lenta.

Uma particularidade deste exemplo foi a dificuldade na determinação de uma população inicial factível, a qual só foi conseguida concentrando-se os indivíduos iniciais numa faixa de busca mais resumida em comparação com a faixa de busca dos demais exemplos utilizados neste trabalho. Isso justifica a presença de um bom indivíduo na população inicial, mesmo considerando-se populações maiores, que não proporcionaram nenhuma melhora substancial no ganho e ainda aumentaram o tempo de execução do algoritmo.

Conforme visto no capítulo 4, a utilização de um valor de probabilidade de mutação adaptativo força a diversidade da população, evitando uma convergência prematura a um ótimo local. Mesmo assim, ainda relacionado ao fato da dificuldade de obtenção de elementos factíveis, muitas vezes várias mutações ou cruzamentos não puderam ser realizados durante uma geração, pois somente resultados factíveis são efetivados.

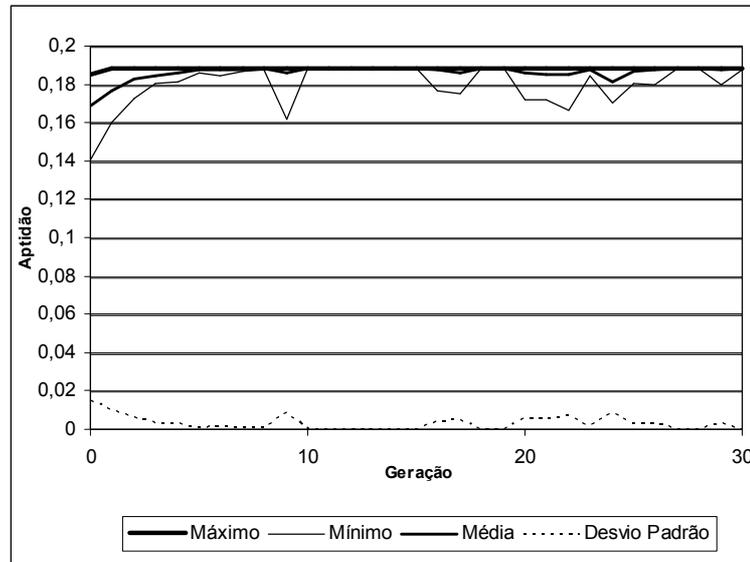


Figura 6.8: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de estado com otimização da norma \mathcal{H}_2 .

O melhor α encontrado pelo algoritmo na solução do problema, foi $\alpha = 1,5103$.

Controle \mathcal{H}_∞

O exemplo considerado também foi analisado para um caso sem restrições. A mesma função MSFSYN do MatLab[®] [GAH95] foi utilizada para a síntese, agora minimizando o ganho RMS.

Os resultados obtidos para o caso ótimo foram:

$$K = \begin{bmatrix} -1,4477e-006 & -1,0000 & 2,6246e-006 & 1,9735e-006 & -4,2745e-007 \\ -2,4944e-007 & -1,2076e-006 & -1,0000 & 3,9179e-007 & -1,6885e-007 \\ -0,8911 & -6,8015 & 3,3955 & 0,9386 & 0,7346 \end{bmatrix}$$

como ganho de realimentação de estado e

$$\gamma = 4,9853 \cdot 10^{-4}$$

como limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ .

O sistema com restrições, resolvido com a utilização do algoritmo híbrido proposto neste trabalho, teve os seguintes resultados:

$$K = \begin{bmatrix} 2,4180 & 3,6476 & -0,0850 & -1,0197 & -2,1128 \\ -1,6531 & -6,3684 & -0,8775 & 0,3844 & 2,3838 \\ 3,0000 & -0,7603 & 6,5396 & 1,5637 & -3,4392 \end{bmatrix}$$

como ganho de realimentação de estado e

$$\gamma = 1,0270$$

como limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ .

A região elipsoidal Ω de \mathcal{D} -invariância positiva para o sistema de malha fechada ficou determinada por:

$$W_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,8198 & 0,5404 & 0,7642 & 0,1390 & -0,6722 \\ 0,5404 & 1,5625 & 0,1391 & -0,0330 & -0,6382 \\ 0,7642 & 0,1391 & 1,5625 & 0,3455 & -0,8466 \\ 0,1390 & -0,0330 & 0,3455 & 0,1288 & -0,1589 \\ -0,6722 & -0,6382 & -0,8466 & -0,1589 & 0,7449 \end{bmatrix}$$

A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.9. Para este exemplo o algoritmo foi executado até 30 gerações com uma população de 20 indivíduos. Novamente ocorreu dificuldade na determinação de uma população inicial factível, sendo necessário reduzir a faixa de busca comparando-se com a faixa de busca utilizada nos demais exemplos deste trabalho. Tais valores foram levantados empiricamente após testes exaustivos. Como consequência da dificuldade de obter-se uma população inicial factível, pode-se notar a rapidez com que o algoritmo atinge um valor ótimo e, a partir de tal ponto, a evolução passa a ser significativamente lenta. Populações maiores não proporcionaram nenhuma melhora substancial no ganho, justamente pelo fato da população inicial estar resumida a uma faixa mais estreita.

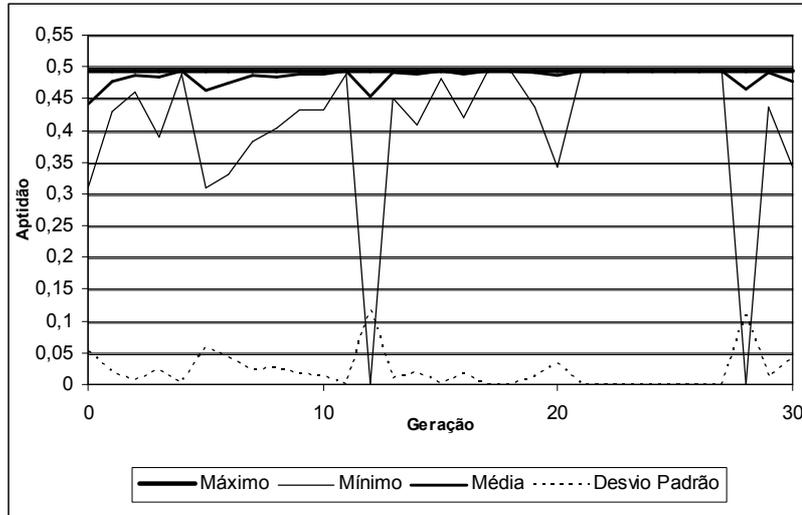


Figura 6.9: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de estado com otimização da norma \mathcal{H}_2 .

O melhor α encontrado como solução do problema com o algoritmo foi $\alpha = 1,9821$.

6.3.1.2 Exemplo 2

Considera-se o sistema contínuo incerto abordado em [PER95], onde é proposto um controle por realimentação de estado para o caso de um problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ sem restrições. Este sistema é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ y(t) = C_yx(t) + D_yu(t) + D_{yw}w(t) \\ z_2 = C_2x(t) + D_{22}u(t) \\ z_\infty = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \end{cases}$$

onde as matrizes incertas A e B_2 são determinadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0,6812 & 0,2944 & -0,9223 \\ 0,8284 & -1,6680 & -0,4420 \\ 0,2091 & 1,5766 & -a_{33} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0,9386 & -2,1884 \\ b_{21} & 0,2947 \\ -1,0445 & -0,2946 \end{bmatrix},$$

com $-1 \leq a_{33}(t) \leq 1$ e $-0,4723 \leq b_{21}(t) \leq 0,9445$. As demais matrizes são:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As restrições no estado são dadas por:

$$\begin{cases} -10 \leq x_1(t) \leq 10 \\ -10 \leq x_2(t) \leq 10 \\ -10 \leq x_3(t) \leq 10. \end{cases}$$

O controle está sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{cases} -20 \leq u_1(t) \leq 20 \\ -20 \leq u_2(t) \leq 20. \end{cases}$$

As restrições nas saídas são dadas por:

$$\begin{cases} -8 \leq y_1(t) \leq 8 \\ -6 \leq y_2(t) \leq 6 \end{cases}$$

e as perturbações pertencem a uma esfera de raio $w_0 = 0,5$.

O sinal de referência deve satisfazer as restrições

$$-2 \leq r_i \leq 2, \quad i = 1, 2. \quad (6.3)$$

Para a aplicação do procedimento descrito no capítulo anterior, considera-se uma circunferência circunscrita na região definida por (6.3).

Além disso, foi considerada uma região de estados iniciais admissíveis, centrados na origem, definida pelo seguinte envelope convexo:

$$\begin{cases} -1,25 \leq x_{01}(t) \leq 1,25 \\ -1,25 \leq x_{02}(t) \leq 1,25 \\ -1,25 \leq x_{03}(t) \leq 1,25. \end{cases}$$

Controle \mathcal{H}_2

O exemplo considerado foi analisado para um caso sem restrições. A função MSFSYN do MatLab[®] [GAH95] foi utilizada para a síntese. Esta função calcula o controlador por realimentação de estado ($u = Kx$) que minimiza a norma \mathcal{H}_2 .

Os resultados obtidos para o caso ótimo foram:

$$K = \begin{bmatrix} -0,7095 & 0,1465 & 1,3637 \\ 2,0359 & 1,6309 & 1,7898 \end{bmatrix}$$

como ganho de realimentação de estado e

$$\beta = 2,4793$$

é o limitante superior da norma \mathcal{H}_2 .

O problema com restrições, resolvido com a utilização do algoritmo híbrido proposto neste trabalho, teve os seguintes resultados:

$$K = \begin{bmatrix} -1,6879 & -1,2869 & 1,8601 \\ 2,9690 & 4,6905 & 5,0628 \end{bmatrix}$$

como ganho de realimentação de estado e

$$\beta = 7,7969$$

como limitante superior da norma \mathcal{H}_2 .

A região elipsoidal Ω de \mathcal{D} -invariância positiva para o sistema de malha fechada ficou determinada por:

$$W_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,3658 & 0,5877 & 0,4272 \\ 0,5877 & 1,5624 & 1,0675 \\ 0,4272 & 1,0675 & 1,5625 \end{bmatrix}$$

A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.10. Para este exemplo o algoritmo foi executado até 30 gerações com uma população de 10 indivíduos. Ao contrário dos casos anteriores, a determinação da população inicial, neste caso, foi mais fácil, podendo-se adotar uma faixa de busca mais ampla. Tais valores foram levantados empiricamente após testes exaustivos. Com uma faixa de busca mais ampla, a convergência mostra-se significativamente mais lenta e os operadores genéticos conseguem produzir resultados mais efetivos.

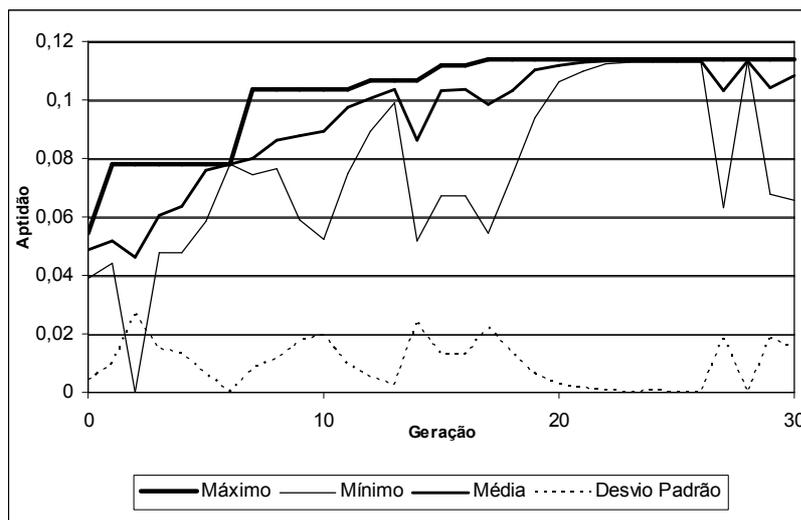


Figura 6.10: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de estado com otimização da norma \mathcal{H}_2 .

O melhor vetor α encontrado como solução do problema, com o algoritmo, foi:

$$\alpha = [7,4074 \quad 6,6035 \quad 5,4895 \quad 7,3569].$$

Controle \mathcal{H}_∞

O exemplo considerado também foi analisado para um caso sem restrições. A mesma função MSFSYN do MatLab[®] [GAH95] foi utilizada para a síntese, agora minimizando o ganho RMS.

Os resultados obtidos para o caso ótimo foram:

$$K = \begin{bmatrix} 49,5089 & 122,2969 & 167,7769 \\ 347,8135 & 844,9172 & 1051,3447 \end{bmatrix}$$

como ganho de realimentação de estado e

$$\gamma = 1,8505$$

é limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ .

O sistema com restrições, resolvido com a utilização do algoritmo híbrido proposto neste trabalho, teve os seguintes resultados:

$$K = \begin{bmatrix} -1,7918 & -1,9388 & 2,7139 \\ 3,3030 & 4,3050 & 5,8860 \end{bmatrix}$$

como ganho de realimentação de estado e

$$\gamma = 2,2820$$

como limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ .

A região elipsoidal Ω de \mathcal{D} -invariância positiva para o sistema de malha fechada ficou determinada por:

$$W_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,3992 & 0,6508 & 0,3859 \\ 0,6508 & 1,5625 & 0,9881 \\ 0,3859 & 0,9881 & 1,5625 \end{bmatrix}$$

A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.11. Para este caso o algoritmo foi executado durante 30 gerações com uma população de 10 indivíduos. A mesma facilidade na determinação da população inicial para o caso \mathcal{H}_2 repete-se para o caso \mathcal{H}_∞ , podendo ser considerada uma faixa de busca mais ampla em comparação à faixa de busca utilizada nos exemplos anteriores. Neste caso, mesmo com uma maior faixa de busca, é possível observar no gráfico (figura 6.11) a convergência prematura, fato justificado pela presença de um bom indivíduo na população inicial. Populações maiores não proporcionaram nenhuma melhora substancial no ganho, a convergência apresentou-se mais lenta e houve aumento demasiado no tempo de processamento.

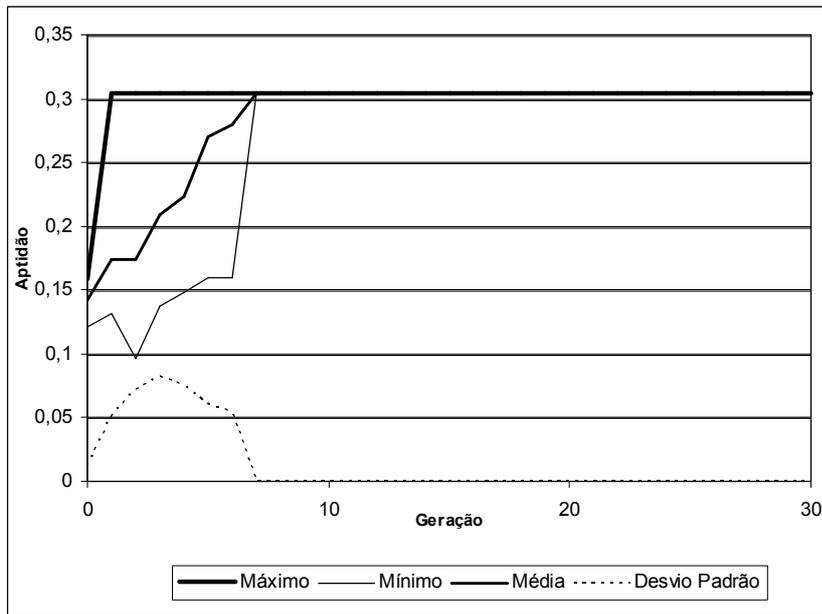


Figura 6.11: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de estado com otimização da norma \mathcal{H}_∞ .

O melhor vetor α encontrado como solução do problema, com o algoritmo tendo as características citadas anteriormente, foi:

$$\alpha = [10,8253 \quad 11,1586 \quad 9,5802 \quad 9,4441 \quad 9,0015 \quad 9,2192].$$

As figuras 6.13, 6.14 e 6.15 ilustram o comportamento do controle, da saída e do estado para o sistema da figura 6.12, para o caso sem e com restrição. Nota-se, que para o caso sem restrição, os valores finais podem ser bastante grandes, como ocorreu com o controle, neste exemplo. Também é importante observar que, para o caso com restrição, os valores das restrições não são violados.

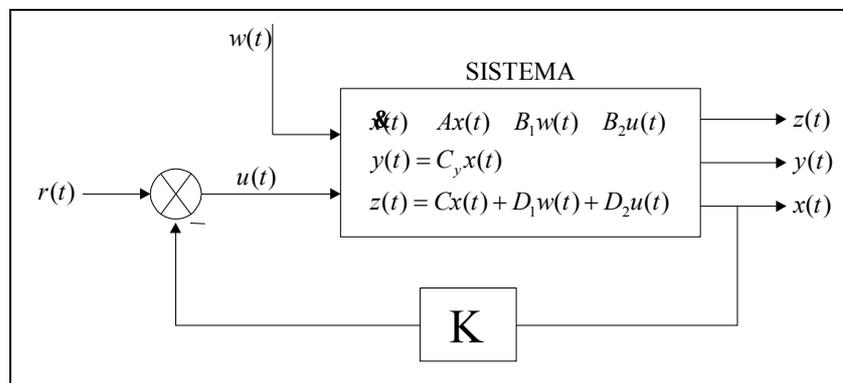


Figura 6.12: Sistema de malha fechada para realimentação de estado.

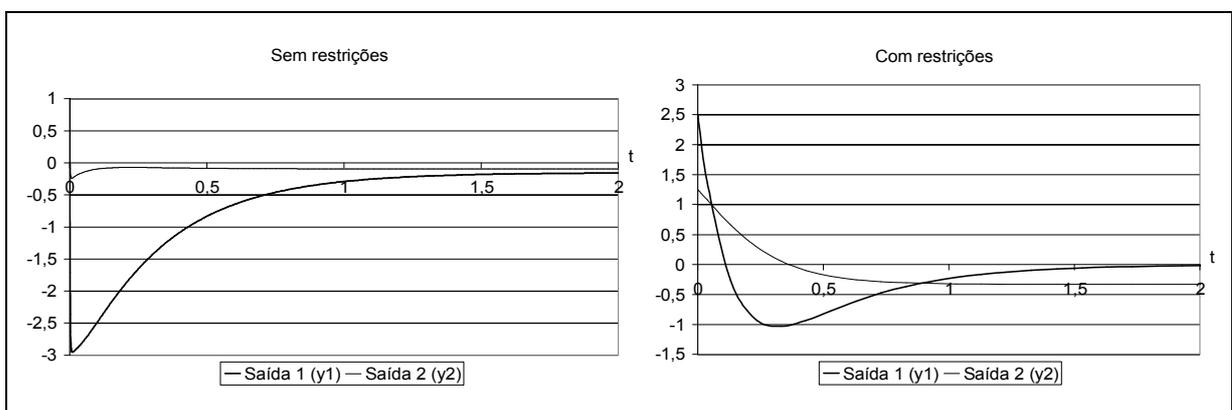


Figura 6.13: Comparação entre as saídas dos sistemas sem e com restrição para o caso de realimentação de estado com otimização da norma \mathcal{H}_∞ .

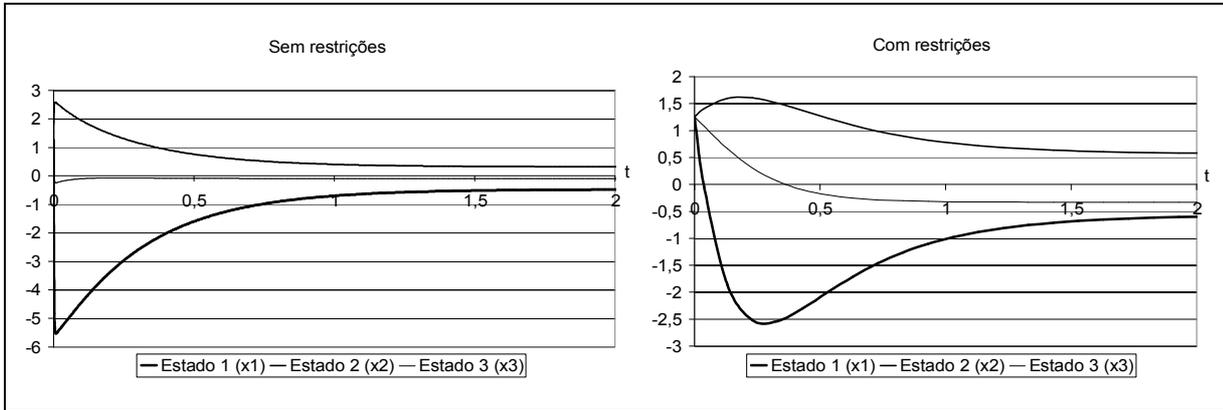


Figura 6.14: Comparação entre os estados dos sistemas sem e com restrição para o caso de realimentação de estado com otimização da norma \mathcal{H}_∞ .

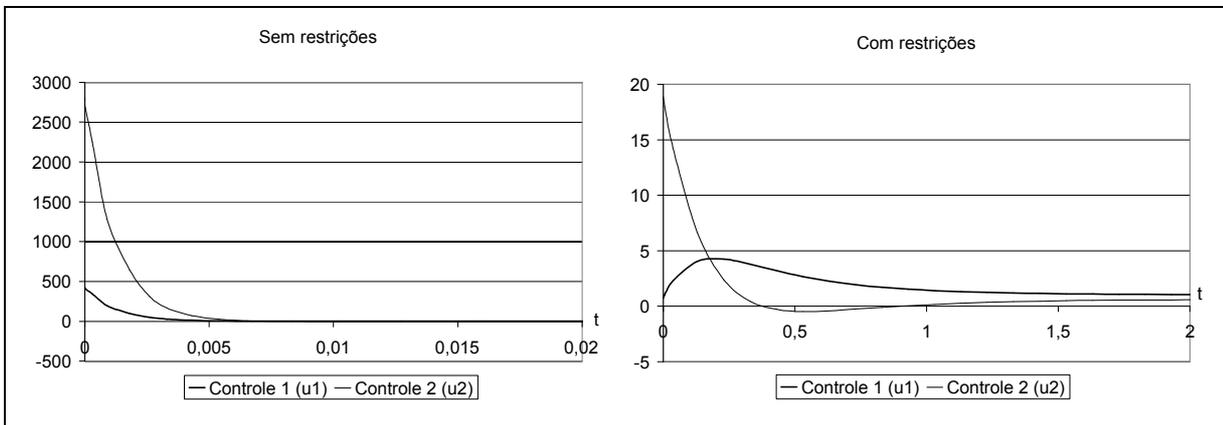


Figura 6.15: Comparação entre os controles dos sistemas sem e com restrição para o caso de realimentação de estado com otimização da norma \mathcal{H}_∞ .

6.3.1.3 Exemplo 3

Considera-se o seguinte sistema restrito sujeito a incertezas do tipo politopo abordado em [MIL94]:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ y(t) = C_yx(t) + D_yu(t) + D_{yw}w(t) \\ z_2 = C_2x(t) + D_{22}u(t) \\ z_\infty = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \end{cases}$$

onde as matrizes incertas A e B_2 são determinadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 9,1 & 0,47 & -a_{13} \\ 7,62 & 0 & 7,56 \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1,82 & 3,61 \\ 1,24 & -3,77 \\ b_{31} & 0 \end{bmatrix},$$

sendo $6,33 \leq a_{13}(t) \leq 6,53$, $2,37 \leq a_{31}(t) \leq 2,87$, $3,03 \leq a_{32}(t) \leq 3,53$, $9,66 \leq a_{33}(t) \leq 10,16$ e $4,71 \leq b_{31}(t) \leq 5,11$. As demais matrizes são:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Supõe-se que o sistema esteja sujeito a restrições no domínio do tempo e a uma perturbação confinada à uma esfera de raio $w_0 = 0,5$.

O conjunto dos estados admissíveis é definido pela seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} -8,75 \\ -10,50 \\ -1,00 \end{bmatrix} \mathbf{p} \begin{bmatrix} 5,69 & 1,97 & -1,68 \\ 2,24 & -1,68 & 5,59 \\ 0 & 0 & 1,00 \end{bmatrix} x(t) \mathbf{p} \begin{bmatrix} 8,75 \\ 10,50 \\ 1,00 \end{bmatrix}$$

As restrições nos controles são dadas por:

$$\begin{cases} -11 \leq u_1(t) \leq 11 \\ -11 \leq u_2(t) \leq 11. \end{cases}$$

As restrições nas saídas são dadas por:

$$\begin{cases} -35 \leq y_1(t) \leq 35 \\ -35 \leq y_2(t) \leq 35 \\ -35 \leq y_3(t) \leq 35 \\ -35 \leq y_4(t) \leq 35 \\ -35 \leq y_5(t) \leq 35. \end{cases}$$

Foi considerada uma região de estados iniciais admissíveis, centrados na origem, definida pelo seguinte envelope convexo:

$$\begin{cases} -1,25 \leq x_{01}(t) \leq 1,25 \\ -1,25 \leq x_{02}(t) \leq 1,25 \\ -1,25 \leq x_{03}(t) \leq 1,25. \end{cases}$$

O sinal de referência deve satisfazer as restrições

$$-1 \leq r_i \leq 1, \quad i = 1, 2. \quad (6.4)$$

Para a aplicação do procedimento descrito no capítulo anterior, considera-se uma circunferência circunscrita na região definida por (6.4).

Controle \mathcal{H}_2

O exemplo considerado foi analisado para um caso sem restrições. A função MSFSYN do MatLab[®] [GAH95] foi utilizada para a síntese. Esta função, calcula o controlador por realimentação de estado ($u = Kx$) que minimiza a norma \mathcal{H}_2 .

Os resultados obtidos para o caso ótimo foram:

$$K = \begin{bmatrix} -2,8176 & -1,0508 & 3,5605 \\ -6,7821 & -0,5562 & -1,3888 \end{bmatrix}$$

como ganho de realimentação de estado e

$$\beta = 1,9058$$

como limitante superior da norma \mathcal{H}_2 .

Para o sistema com restrições, a utilização do algoritmo híbrido proposto neste trabalho, resulta em:

$$K = \begin{bmatrix} -1,5877 & -1,0988 & 4,6311 \\ -8,6263 & -1,3611 & -3,2229 \end{bmatrix}$$

como ganho de realimentação de estado e

$$\beta = 9,7115$$

como limitante superior da norma \mathcal{H}_2 .

A região elipsoidal Ω de \mathcal{D} -invariância positiva para o sistema de malha fechada é determinada por:

$$W_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5625 & 0,4056 & 0,2758 \\ 0,4056 & 0,2019 & 0,0034 \\ 0,2758 & -0,0034 & 1,1760 \end{bmatrix}$$

Neste exemplo o algoritmo foi executado durante 30 gerações com uma população de 10 indivíduos. A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.14. Para este caso também foi possível a utilização de uma faixa de busca mais ampla, o que possibilitou melhor exploração dos operadores genéticos e tornou a convergência gradativa, mesmo com a primeira população contendo um indivíduo com uma aptidão bastante próxima da última alcançada. Populações maiores não proporcionaram nenhuma melhora substancial no ganho, aumentando, ainda, o tempo de processamento.

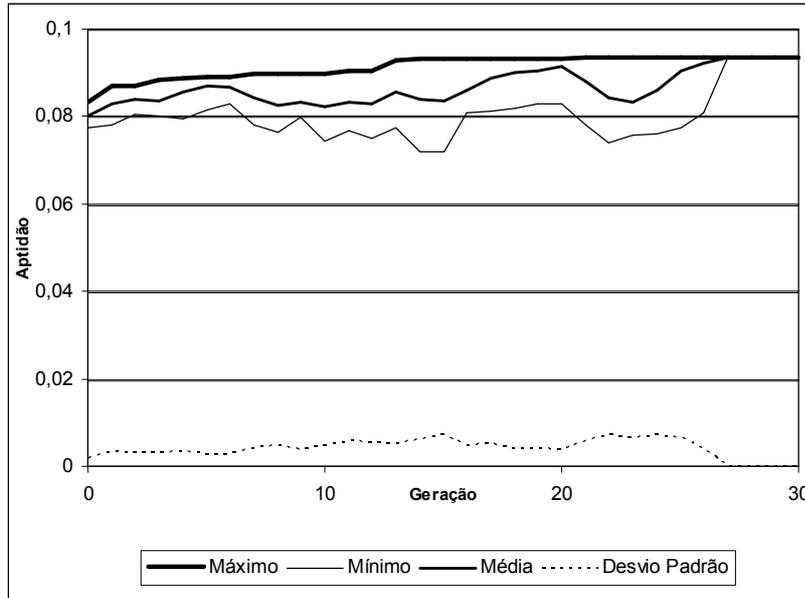


Figura 6.16: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de estado com otimização da norma \mathcal{H}_2 .

O melhor vetor α encontrado como solução do problema com o algoritmo foi:

$$\alpha = [11,9703 \quad 10,3084 \quad 8,5360 \quad 5,2105 \quad 7,9493 \quad 14,1614]$$

Controle \mathcal{H}_∞

O exemplo considerado também foi analisado para um caso sem restrições. A mesma função MSFSYN do MatLab[®] [GAH95] foi utilizada para a síntese, agora minimizando o ganho RMS.

Os resultados obtidos para o caso ótimo foram:

$$K = \begin{bmatrix} 103770 & 99200 & 66615 \\ -358590000 & -342790000 & -230160000 \end{bmatrix}$$

tendo

$$\gamma = 0,1116$$

como limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ .

O problema de controle \mathcal{H}_∞ com restrições, resolvido com a utilização do algoritmo híbrido proposto neste trabalho, tem como solução:

$$K = \begin{bmatrix} -0,0701 & -0,3773 & 6,8600 \\ -11,5496 & -3,6158 & -5,0720 \end{bmatrix}$$

como ganho de realimentação de estado e

$$\gamma = 0,7067$$

como limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ .

A região elipsoidal Ω de \mathcal{D} -invariância positiva para o sistema de malha fechada é determinada por:

$$W_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1,5625 & 0,6023 & 0,5574 \\ 0,6023 & 0,3914 & 0,3110 \\ 0,5574 & 0,3110 & 1,2569 \end{bmatrix}$$

A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.15. Para este caso o algoritmo foi executado durante 30 gerações com uma população de 20 indivíduos. Neste caso, a convergência também foi prematura devido ao fato da população inicial conter um bom indivíduo.

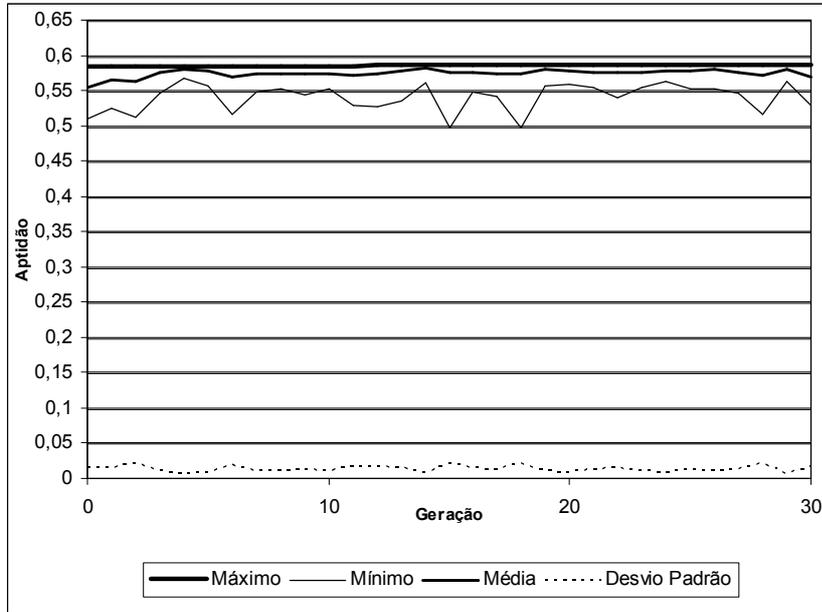


Figura 6.17: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de estado com otimização da norma \mathcal{H}_{∞} .

O melhor vetor α encontrado como solução do problema, com o algoritmo tendo as características citadas anteriormente, foi:

$$\alpha = [10,8523 \quad 11,1586 \quad 9,5802 \quad 9,4441 \quad 9,0015 \quad 9,2192].$$

6.3.2 Estabilização por realimentação de saída

6.3.2.1 Exemplo 1

Considera-se o modelo linearizado no espaço de estado que descreve o comportamento dinâmico de um sistema, descrito em [GER96].

O modelo do sistema é dado por:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1 w(t) + B_2 u(t) \\ y(t) = C_y x(t) + D_y u(t) + D_{yw} w(t) \\ z_2 = C_2 x(t) + D_{22} u(t) \\ z_\infty = C_1 x(t) + D_{11} w(t) + D_{12} u(t) \end{cases}$$

onde as matrizes incertas A e B_2 são determinadas por:

$$A = \begin{bmatrix} -0,0366 & 0,0271 & 0,0188 & -0,4555 \\ 0,0482 & -1,0100 & 0,0024 & -4,0208 \\ 0,1002 & a_{32} & -0,7070 & a_{34} \\ 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} -0,4422 & -0,1761 \\ b_{21} & 7,5922 \\ 5,5200 & -4,4900 \\ 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix},$$

sendo $-0,6319 \leq a_{32}(t) \leq 1,3681$, $0,0038 \leq a_{34}(t) \leq 0,04$ e $2,7446 \leq b_{21}(t) \leq 4,3446$. As demais matrizes são:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_y = [0 \ 1 \ 0 \ 0], \quad D_y = [0 \ 0], \quad D_{yw} = [0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As restrições no estado são dadas por:

$$\begin{cases} -40 \leq x_1(t) \leq 40 \\ -40 \leq x_2(t) \leq 40 \\ -40 \leq x_3(t) \leq 40 \\ -40 \leq x_4(t) \leq 40. \end{cases}$$

O controle está sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{cases} -80 \leq u_1(t) \leq 80 \\ -80 \leq u_2(t) \leq 80. \end{cases}$$

As restrições nas saídas são dadas por:

$$\{-40 \leq y_1(t) \leq 40,$$

e as perturbações pertencem a uma esfera de raio $w_0 = 0,5$.

O sinal de referência deve satisfazer as restrições

$$-2 \leq r_i \leq 2, \quad i = 1.$$

Além disso, foi considerada uma região de estados iniciais admissíveis, centrada na origem, definida pelo seguinte envelope convexo:

$$\begin{cases} -1,25 \leq x_{01}(t) \leq 1,25 \\ -1,25 \leq x_{02}(t) \leq 1,25 \\ -1,25 \leq x_{03}(t) \leq 1,25 \\ -1,25 \leq x_{04}(t) \leq 1,25. \end{cases}$$

Controle \mathcal{H}_2

O sistema resolvido com a utilização do algoritmo híbrido proposto neste trabalho, para um controlador de dimensão 5, teve os seguintes resultados:

$$L = \begin{bmatrix} -1,3236 & 1,8514 & 0,6619 \\ 2,3428 & -1,6433 & -1,1022 \\ 4,8117 & -7,7703 & -2,5516 \\ -3,3198 & -2,6866 & -1,3132 \end{bmatrix}$$

como ganho de realimentação de saída e

$$\beta = 52,3822$$

como limitante superior da norma \mathcal{H}_2 .

A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.16. Para este caso o algoritmo foi executado até 20 gerações com uma população de 10 indivíduos. O aumento do número de gerações ou de indivíduos na população não proporcionou melhoras significativas no resultado final considerando o aumento no tempo de processamento.

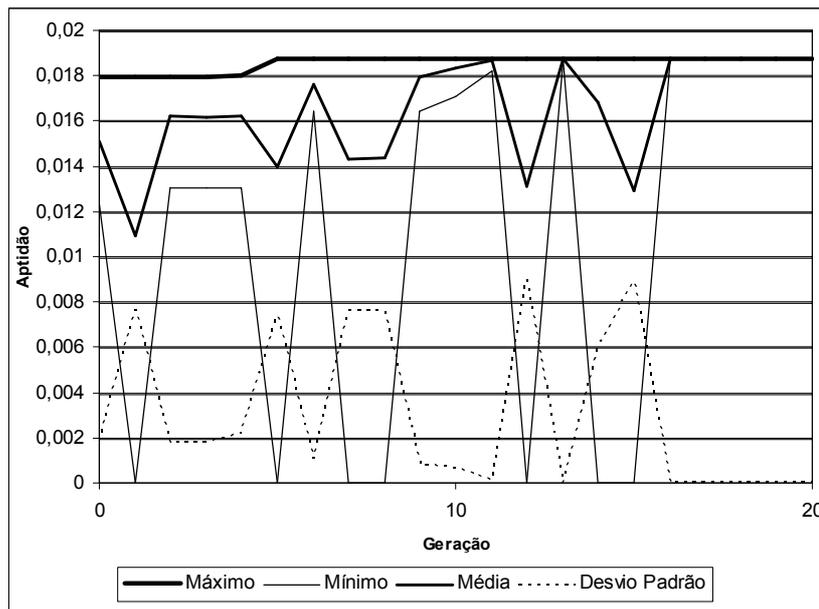


Figura 6.18: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma \mathcal{H}_2 .

O melhor vetor α encontrado como solução do problema, com o algoritmo, foi:

$$\alpha = [0,0875 \quad 0,1009 \quad 0,0772 \quad 0,0941 \quad 0,1087 \quad 0,0962 \quad 0,0731 \quad 0,1069]$$

Para o sistema em malha fechada da figura 6.1, o controlador encontrado foi:

$$A_k = \begin{bmatrix} -7,7703 & -2,5516 \\ -2,6866 & -1,3132 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} 4,8117 \\ -3,3198 \end{bmatrix},$$

$$C_k = \begin{bmatrix} 1,8514 & 0,6619 \\ -1,6433 & -1,1022 \end{bmatrix}, \quad D_k = \begin{bmatrix} -1,3236 \\ 2,3428 \end{bmatrix}.$$

6.3.2.2 Exemplo 2

Considera-se o sistema contínuo incerto abordado em [PER95], onde é proposto um controle por realimentação de estado para o caso de um problema misto $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$ sem restrições. Este sistema é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ y(t) = C_yx(t) + D_yu(t) + D_{yw}w(t) \\ z_2 = C_2x(t) + D_{22}u(t) \\ z_\infty = C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \end{cases}$$

onde as matrizes incertas A e B_2 são determinadas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0,6812 & 0,2944 & -0,9223 \\ 0,8284 & -1,6680 & -0,4420 \\ 0,2091 & 1,5766 & -a_{33} \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0,9386 & -2,1884 \\ b_{21} & 0,2947 \\ -1,0445 & -0,2946 \end{bmatrix},$$

com $-1 \leq a_{33}(t) \leq 1$ e $-0,4723 \leq b_{21}(t) \leq 0,9445$. As demais matrizes são:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{yw} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As restrições no estado são dadas por:

$$\begin{cases} -50 \leq x_1(t) \leq 50 \\ -50 \leq x_2(t) \leq 50 \\ -50 \leq x_3(t) \leq 50. \end{cases}$$

O controle está sujeito às seguintes restrições:

$$\begin{cases} -40 \leq u_1(t) \leq 40 \\ -40 \leq u_2(t) \leq 40. \end{cases}$$

As restrições nas saídas são dadas por:

$$\begin{cases} -40 \leq y_1(t) \leq 40 \\ -30 \leq y_2(t) \leq 30 \end{cases}$$

e as perturbações pertencendo a uma esfera de raio $w_0 = 0,5$.

O sinal de referência deve satisfazer as restrições

$$-2 \leq r_i \leq 2, \quad i = 1, 2. \quad (6.5)$$

Para a aplicação do procedimento descrito no capítulo anterior, considera-se uma circunferência circunscrita na região definida por (6.5).

Além disso, foi considerada uma região de estados iniciais admissíveis, centrada na origem, definida pelo seguinte envelope convexo:

$$\begin{cases} -1,25 \leq x_{01}(t) \leq 1,25 \\ -1,25 \leq x_{02}(t) \leq 1,25 \\ -1,25 \leq x_{03}(t) \leq 1,25. \end{cases}$$

Controle \mathcal{H}_∞

O sistema com restrições, resolvido com a utilização do algoritmo híbrido proposto neste trabalho, teve os seguintes resultados:

$$L = \begin{bmatrix} 0,1844 & -5,2202 & 0,9132 & 1,9913 \\ -2,2781 & -0,4089 & -0,3101 & -0,0778 \\ 0,2446 & -0,0978 & -1,5427 & -0,3378 \\ -0,4218 & -0,4871 & -0,3378 & -1,3303 \end{bmatrix}$$

como ganho de realimentação de estado e

$$\gamma = 14,4035$$

como limitante superior da norma \mathcal{H}_∞ .

A região elipsoidal Ω de \mathcal{D} -invariância positiva para o sistema de malha fechada ficou determinada por:

$$W_1^{-1} = \begin{bmatrix} 0,0074 & 0,0020 & 0,0058 & -0,0035 & 0,0127 \\ 0,0020 & 0,0236 & 0,0089 & 0,0063 & -0,0411 \\ 0,0058 & 0,0089 & 0,0355 & 0,0063 & 0,0055 \\ -0,0035 & 0,0063 & 0,0063 & 0,0251 & -0,0332 \\ 0,0127 & -0,0411 & 0,0055 & -0,0332 & 0,1407 \end{bmatrix}.$$

Neste exemplo o algoritmo foi executado até 30 gerações com uma população de 20 indivíduos. A evolução do algoritmo genético utilizado é ilustrada pelo gráfico da figura 6.17. A pouca melhora obtida no resultado final não compensa o custo computacional para mais gerações.

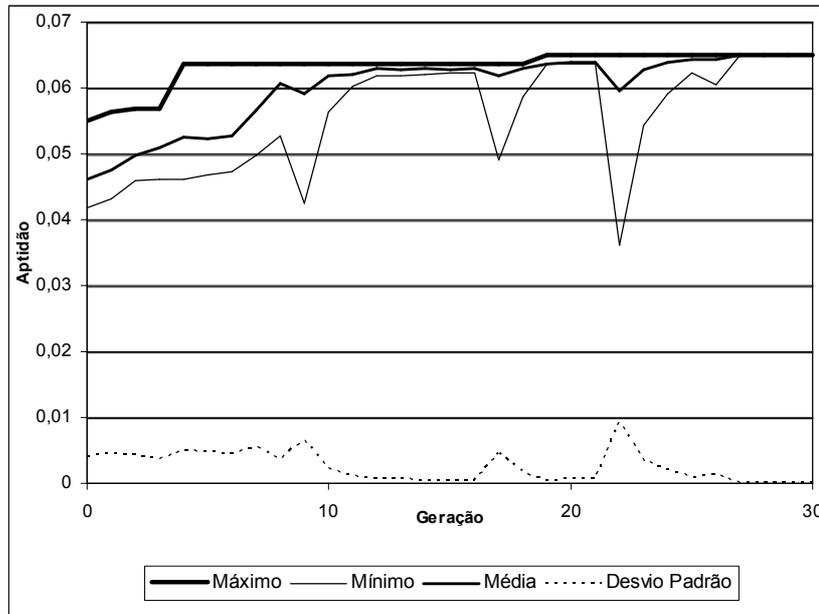


Figura 6.19: Evolução do algoritmo genético para o caso de realimentação de saída com otimização da norma \mathcal{H}_∞ .

O melhor vetor α encontrado como solução do problema, com o algoritmo, foi:

$$\alpha = [1,3992 \quad 1,3517 \quad 1,1522 \quad 1,9013].$$

Para o sistema em malha fechada da figura 6.1, o controlador encontrado foi:

$$A_k = \begin{bmatrix} -1,5417 & -0,3378 \\ -0,3378 & -1,3303 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} 0,2446 & -0,0979 \\ -0,4218 & -0,4871 \end{bmatrix},$$

$$C_k = \begin{bmatrix} 0,9132 & 1,9913 \\ -0,3101 & -0,0778 \end{bmatrix}, \quad D_k = \begin{bmatrix} 0,1844 & -5,2202 \\ -2,2781 & -0,4089 \end{bmatrix}.$$

Conclusão Geral

Neste trabalho foram abordados alguns problemas de síntese de controladores para sistemas contínuos sujeitos a incertezas paramétricas e/ou restrições no domínio do tempo, tendo como critério de desempenho as normas \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ .

Inicialmente, um procedimento de projeto foi proposto para a resolução do problema de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por realimentação dinâmica de saída, para sistemas sujeitos a incertezas do tipo politopo. A mudança de variável feita para o caso de realimentação de estado ($K = W_2 W_1^{-1}$) não é aplicável no contexto de realimentação de saída. Assim, a formulação do problema não pode ser feita via desigualdades matriciais lineares. Entretanto, a bilinearidade resultante da formulação utilizada foi explorada no procedimento de busca.

Considerando-se o conceito de \mathcal{D} -invariância positiva, extensão do conceito de invariância positiva para os sistemas sujeitos às perturbações aditivas, foi então abordado o problema de controle \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ com restrição no domínio do tempo. Trata-se de encontrar uma lei de controle por realimentação de estado ou de saída, que limite as variações da norma \mathcal{H}_2 ou \mathcal{H}_∞ , em todo o domínio de incertezas do sistema, levando-se em consideração as restrições impostas no estado, no controle e na saída. Uma condição suficiente assegurando a \mathcal{D} -invariância positiva de um conjunto elipsoidal, definido por uma matriz de Lyapunov, para um sistema com perturbações, foi então estabelecida. A partir deste resultado, o problema foi expresso através das desigualdades matriciais, sob a forma de um problema de otimização bilinear.

O caráter bilinear das restrições nos problemas de otimização mencionados previamente conduziu ao procedimento proposto, baseado em algoritmos genéticos. A impossibilidade de se assegurar a convergência do algoritmo para um ótimo global da solução, ou mesmo local, e a dificuldade de inicialização, em alguns casos (no problema de otimização \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ por realimentação de saída, com restrições temporais, para sistemas de ordem elevada ou com muitos parâmetros incertos) são as principais limitações deste

procedimento. Embora problemas convexos, representados sob a forma de LMIs, são resolvidos a cada operação de inicialização, recombinação e mutação, o algoritmo mostrou-se razoavelmente poderoso no tratamento destes tipos de problema. O interesse em apresentar um problema de otimização sob a forma de LMIs reside nos métodos de resolução numéricos existentes. Atualmente encontram-se disponíveis diversos métodos de programação convexa, em especial aqueles de pontos interiores [NES94], que são particularmente poderosos e eficazes para a resolução de LMIs. Esta abordagem permite também a incorporação ao problema de novas restrições convexas como, por exemplo, restrições de estrutura nas matrizes de ganho, como é feita na inicialização do algoritmo no caso de realimentação de saída.

Por outro lado, os operadores genéticos foram aplicados somente nas matrizes de ganho K ou L_k no caso de sistemas sem restrição temporais, e em (α_L, K) ou (α_L, L_k) , com as restrições. Isto diminui o esforço computacional durante a execução do algoritmo.

No caso de síntese de controladores por realimentação dinâmica de saída, tanto para o critério de desempenho a norma \mathcal{H}_2 quanto para a norma \mathcal{H}_∞ , não há restrição na ordem do controlador. Isto é uma vantagem em relação a vários métodos de síntese que requerem que o controlador seja de ordem completa, isto é, de ordem maior ou igual que a do processo a ser controlado.

Por fim, considerando a continuação deste trabalho, são listados alguns problemas que merecem ser estudados:

- extensão dos resultados apresentados para tratar o problema \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_∞ para sistemas em tempo discreto;
- utilização de outras técnicas de AGs (por exemplo, AG paralelo), possibilitando um tratamento computacional mais eficiente para problemas de síntese com sistemas de maior ordem;
- análise do custo computacional, levando-se em consideração o tempo e/ou operações de ponto flutuante;
- determinação de domínio de busca de espaço de parâmetros do controlador buscando a melhoria do desempenho do AG;
- inclusão de outros critérios de desempenho, favorecida pela abordagem via desigualdade matriciais utilizada neste trabalho, como por exemplo, aqueles que podem ser traduzidos pela alocação de pólo.

Referências Bibliográficas

- [AND71] ANDERSON, B. D. O.; MOORE, J. B. **Linear Optimal Control**. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1971.
- [ARA98] ARAÚJO, H. X. de. **Sur La Stabilité dès Systèmes Incertains Sujets à des Contraintes sur L'État et la Commande**. Toulouse, France, 1998. Thèse de Doctorat de l'UPS-LAAS, rapport LAAS n. 98010.
- [ARZ92] ARZELIER, D. **Robustesse en performance e en stabilité des systèmes incertains: une approche quadratique**. Toulouse, France, 1992. Thèse de Doctorat de l'UPS-LAAS, rapport LAAS n. 92199.
- [ATH71] ATHANS, M. The role and use of stochastic linear-quadratic-gaussian problem in control systems design. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.16, p. 529-552. 1971.
- [BAC97] BÄCK, Thomas; FOGEL, David; MICHALEWICZ, Zbigniew (eds.). **Handbook of Evolutionary Computation**. Oxford University Press, 1997. ISBN: 0-7503-0392-1.
- [BAR85] BARMISH, B. R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v.46, n.4, p. 399-408. 1985.
- [BAS82] BAŞAR, T.; GOLSDER, J. **Dynamic Noncooperative Game Theory**. London, New York: Academic Press, 1982.
- [BAS91] BAŞAR, T.; BERNHARD, P. **H_∞ Optimal Control and Related Minimax Design Problems: A Dynamic Game Approach**. Boston, Birkhäuser: 1991.
- [BEN88] BENZAOUIA, A. **Le concept d'invariance positive appliqué à des problèmes de commande des systèmes linéaires discrets avec contraintes**. Toulouse, France, 1988. Thèse de Doctorat de l'UPS-LAAS, rapport LAAS n. 88322.

- [BER89] BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. **System and Control Letters**, n.13, p. 65-72. 1989.
- [BER89a] BERNSTEIN, D. S.; HADDAD, W. M. LQG Control with an H_∞ Performance Bound: A Riccati Equation Approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.34, n.3, p. 293-305. 1989.
- [BER95] BERNSTEIN, D. S.; MICHEL, A. N. A chronological bibliography on saturating actuators. **International Journal of Robust and Nonlinear Control**, n.10, p. 375-380. 1995.
- [BIC90] BICKEL, A. S.; BICKEL, R. W. Determination of Near-Optimum Use of Hospital Diagnostic Resources Using the 'GENES' Genetic Algorithm. **Comput. Biol. Med.**, v.20, n.1, p. 1-13. 1990.
- [BIT92] BITSORIS, G.; GRAVALOU, E. Robust linear control under state and control constraints. **Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control**. Tucson, Arizona, USA, 1992. p. 2640-2642.
- [BIT99] BITSORIS, G.; GRAVALOU, E. Design Techniques for the Control of Discrete-Time Systems Subject to State and Control Constraints. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.44, n.5, p. 1057-1061. 1999.
- [BLA90] BLANCHINI, F. Feedback control for linear time-invariant systems with state and control bounds in the presence of disturbances. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.35, n.11, p. 1231-1234. 1990.
- [BOY94] BOYD, S. et al. **Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory**. Philadelphia: SIAM books, 1994.
- [BRE62] BREMERMAN, H. J. **Optimization through evolution and recombination**. Spartan, Washington, D.C.: Marshall C. Yovitis and George T. Jacobi editors, Self-Organizing Systems, 1962. p. 93-106.
- [BUR96] BURGAT, C.; TARBOURIECH, S. **Non-Linear Systems**. London, Grande Bretagne: Chapman&Hall, 1996. 2v.
- [CAM95] CAMOZZI, P. **Systèmes à modélisation incertaine**: commande par placement de poles. Toulouse, France, 1995. Thèse de Doctorat de l'UPS-LAAS, rapport LAAS n. 95426.

- [CAS93] CASTELAN, E. B.; HENNET, J. C. On invariant polyhedral of continuous-time linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.38, n.11, p. 1680-1685. 1993.
- [CHA72] CHANG, S. S. L.; PENG, T. K. C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.17, p. 474-483. 1972.
- [CHE85] CHÉGANÇAS, J. **Sur le concept d'invariance positive appliqué à l'étude de la commande contrainte des systèmes dynamiques**. Toulouse, France, 1985. Thèse de Doctorat de l'UPS-LAAS, rapport LAAS n. 85325.
- [CHE95] CHEN, B. -S.; CHENG, Y. -M.; LEE, C. -H. A Genetic Approach to Mixed H_2/H_∞ Optimal PID Control. **IEEE Control Systems**, p. 51-60. 1995.
- [CHI96] CHILALI, M.; GAHINET, P. H_∞ Design with Pole Placement Constraints: an LMI Approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.41, n.3, p. 358–367, Mar. 1996.
- [CHI99] CHILALI, M.; GAHINET, P.; APKARIAN, P. Robust Pole Placement in LMI Regions. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.44, n.12, p. 2257–2270. 1999.
- [COL97] COLANERI, P.; GEROMEL, J. C.; LOCATELLI, A. **Control theory and design in $R H_2$ and $R H_\infty$** . Grande Bretagne: Academic Press, 1997.
- [DAV91] DAVIS, L. **Handbook of Genetic Algorithms**. New York: Van Nostrand Reinhold, 1991.
- [DOY78] DOYLE, J. C. Guaranteed margins for LQG regulators. **IEEE Transactions on Automatic Control**, 1978.
- [DOY88] DOYLE, J. C. et al. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. **American Control Conference**, p. 1691-1696. 1988.
- [DOY89] DOYLE, J. C. et al. State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.34, n.8, p. 831-847. 1989.
- [DOY94] DOYLE, J. et al. *Mixed H_2 and H_∞ Performance Objectives II: Optimal Control*. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.39, n.8, p. 1575-1586. 1994.
- [DUH02] DU, H.; SHI, X. Low-Order H_∞ Controller Design using LMI and Genetic Algorithm. **15th IFAC World Congress**, 2002.

- [EIB91] EIBEN, A. E.; AARTS, E. H. L.; VAN HEE, K. M. **Global Convergence of Genetic Algorithms**: A Markov chain analysis. H. P. Schwefel and Eds R. Männer, editors, *Parallel Problem Solving from Nature*, 1991.
- [FAN03] FANG, Haijun; LIN, Zongli; HU, Tingshu. Analysis of Linear Systems in the Presence of Actuator Saturation and L_2 -Disturbances. **Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control**, Maui, Hawaii, USA, p. 4711-4716, Dez. 2003.
- [FEU76] FEUER, A.; HEYMANN, M. Ω invariance in control systems with bounded controls. **Journal of Math. and Applications**, v.53, p. 266-276. 1976.
- [FOG66] FOGEL, Lawrence J.; OWENS, Alvin J.; WALSH, Michael J. **Artificial Intelligence Through Simulated Evolution**. New York: John Wiley and Sons, 1966.
- [FOG92] FOGEL, David B. **An analysis of evolutionary programming**. La Jolla, CA, David: B. Fogel and Wirt Atmar, editors, *Proceedings of the First Annual Conference on Evolutionary Programming*, Evolutionary Programming Society, p. 43–51. 1992.
- [FOG94] FOGEL, David B. Asymptotic convergence properties of genetic algorithms and evolutionary programming: Analysis and experiments. **Cybernet. Systems**, v.25, n.3, p. 389-407. 1994.
- [FOG98] FOGEL, Lawrence J. (editor). **Evolutionary Computation. The Fossil Record. Selected Readings on the History of Evolutionary Algorithms**. New York: The Institute of Electrical and Electronic Engineers, 1998.
- [FRA87] FRANCIS, B. A. **A Course in H_∞ Control Theory**. New York: Springer-Verlag, 1987.
- [GAH95] GAHINET, P. et al. **LMI Control Toolbox User's Guide**. Natick, MA, USA: MathWorks, Inc., 1995.
- [GAL86] GALIMIDI, R.; BARMISH, B. R. The constrained Lyapunov problem and its application to robust output feedback stabilization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.31, n.5, p. 410-419. 1986.
- [GAR94] GARCIA, G.; BERNUSSOU, J.; CAMOZZI, P. H_2 guaranteed cost control for uncertain systems with norm bounded uncertainties. **Proceedings of IFAC Symposium on Robust Control Design**. Rio de Janeiro, 1994.

- [GER92a] GEROMEL, J. C.; PERES, P.L.D.; SOUZA, S. R. H_2 guaranteed cost control for uncertain continuous-time linear systems. **Systems and Control Letters**, n.19, p. 23-27. 1992.
- [GER92b] GEROMEL, J. C.; PERES, P.L.D.; SOUZA, S. R. H_2 guaranteed cost control for uncertain discrete-time linear systems. **International Journal of Control**, v.57, n.4, p. 853-864. 1992.
- [GER96] GEROMEL, J. C.; PERES, P. L. D.; SOUZA, S. R. Convex Analysis of Output Feedback Control Problems: Robust Stability and Performance. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.41, n.7, p. 997-1003. 1996.
- [GER98] GEROMEL, J. C.; SOUZA, C. C. de; SKELTON, R. E. Static output feedback controllers: Stability and convexity. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.43, n.1, p. 120-125. 1998.
- [GLO88] GLOVER, K.; DOYLE, J. C. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity. **Systems and Control Letters**, v.11, p. 167-172. 1988.
- [GLO89] GLOVER, K.; DOYLE, J. C. A state space approach to H_∞ optimal control. Three Decades of Mathematical Systems Theory: A Collection of Surveys at the Occasion of the 50th Birthday Jan C. Willems. Springer-Verlag, Lecture Notes in **Control and Information Sciences**, v.135. 1989.
- [GOL83] GOLDBERG, David E. **Computer-Aided Gas Pipeline Operation Using Genetic Algorithms and Rule Learning**. Ann Arbor, 1983. Ph.D. diss., Department Civil Engineering, University of Michigan.
- [GOL89] GOLDBERG, David E. **Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning**. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Co., 1989.
- [GRE85] GREFENSTETTE, J. J. et al. Genetic algorithms for the traveling salesman problem. **Proceedings of the International Conference on Genetic Algorithms**. Lawrence Erlbaum Associates, Mahwah, NJ: 1985.
- [GRE86] GREFENSTETTE, J. J. Optimization of control parameters for genetic algorithms. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, v.16, n.1, p. 122-128. 1986.

- [GUT85] GUTMAN, P. O.; HAGANDER, P. A new design of constrained controllers for linear systems. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.30, n.1, p.22-33. 1985.
- [HOL62] HOLLAND, John H. **Concerning efficient adaptive systems**. Washington, D.C.: M. C. Yovitis, G. T. Jacobi, and G. D. Goldstein, editors, Self-Organizing Systems. Spartan Books, p 215–230. 1962.
- [HOL75] HOLLAND, J. H. **Adaptation in Natural and Artificial Systems**. Ann Arbor: University of Michigan Press, 1975.
- [HOL80] HOLLOT, C. V.; BARMISH, B. R. Optimal quadratic stabilizability of uncertain linear systems. **Proceedings of the 18th Allerton Conference on Communication, Control and Computation**, p. 697-706. 1980.
- [HUA02] HUANG, S.; LAM, J.; CHEN, B. Local Reliable Control for Linear Systems with Saturating Actuators. **Proceedings of the 41nd IEEE Conference on Decision and Control**. Las Vegas, Nevada USA, p. 4154-4159, Dez. 2002.
- [HUN00] HUNG, J. –C.; CHEN, B. –S. Genetic Algorithm Approach to Fixed-Order Mixed H_2/H_∞ Optimal Deconvolution Filter Designs. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v.48, n.12, p. 3451-3461. 2000.
- [JON75] JONG, K. De. **The Analysis of the Behavior of a Class of Genetic Adaptive Systems**. Ann Arbor, Michigan, 1975. Ph.D. thesis, Department of Computer Science, University of Michigan.
- [KHA88] KHARGONEKAR, P. P.; PETERSEN, I. R.; ROTEA, M. A. H_∞ -Optimal control with state feedback. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.33, p. 786-788. 1988.
- [KHA91] KHARGONEKAR, P. K.; ROTEA, M. A. Mixed H_2/H_∞ Control: a Convex Optimization Approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.36, n.7, p. 824-837. 1991.
- [KHA92] KHALIL, H. K. **Nonlinear Systems**. Mac Millan: 1992.
- [KOS01] KÖSE, I.; JABBARI, F. Control of systems with actuator amplitude and rate constraints. **Proceedings of American Control Conference**, Arlington, VA, p. 4914-4919. 2001.

- [KRO99] KROHLING, R. A.; COELHO, L. S.; COELHO, A. A. R. Evolution Strategies for Synthesis of Mixed H_2/H_∞ Fixed-Structure Controllers. **14th IFAC World Congress**, v.F, p. 471-476. 1999.
- [KWO96] KWONG, S.; MAN, K. F.; TANG, K. S. Genetic algorithms: Concepts and applications. **IEEE Transactions on Industrial Electronics**, v.43, n.5, p. 519-534, Oct. 1996.
- [LEI03] LEIBFRITZ, F.; LIPINSKI, W. **Description of the benchmark examples in COMpleib 1.0**. Technical-Report. University of Trier, 2003.
- [LYA66] LYAPUNOV, A. M. *Problème General de la Stabilité du Mouvement (1893)*. New York, USA: Nachdruck Academia Press., 1966. 30v.
- [MAK87] MÄKILÄ, P. M.; TOIVONEN, H. T. Computational methods for parametric LQ problems - a survey. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.32, p. 658-671. 1987.
- [MAS95] MASUBUCHI, I.; SUDA, N.; OHARA, A. LMI-Based Controller Synthesis: A Unified Formulation and Solution. **Proceedings of American Control Conference**, p. 3473-3477. 1995.
- [MIC92] MICHALEWICZ, Zbigniew. **Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs**. New York: Springer-Verlag, 1992.
- [MIC96] MICHALEWICZ, Z. et al. Evolutionary Algorithms for Constrained Engineering Problems. **Computers & Industrial Engineering Journal**, v.30, n.2, p. 851-870, Sep. 1996.
- [MIG83] MIGNOT, J. **Modélisation, identification et commande adaptative d'un module de conversion héliothermique de type Thek**. Toulouse, France, 1983. Thèse de Doctorat de l'UPS-LAAS, n. 2836.
- [MIL94] MILANI, B. E. A. Robust linear regulator design for continuous-time systems under state and control constraints. **Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control**. Floride, USA, p.2067-2068. 1994.
- [MON91] MONTANA, D. J. Automated Parameter Tuning for Interpretation of Synthetic Images. In: **Handbook of Genetic Algorithms**. New York: Van Nostrand Reinhold, 1991. p. 282-311.

- [NES94] NESTEROV, Y.; NEMIROVSKII, A. Interior-point polynomial algorithms in convex programming. **SIAM Studies in Applied Mathematics**. Philadelphia, PA, USA, 1994.
- [OHS98] OHSE, N.; ONO, K. Guaranteed cost controllers under pole placement constraints for uncertain linear systems: An LMI approach. **International Conference on Control Applications**, p. 123-128. 1998.
- [PED02] PEDERSEN, G. K. M.; LANGBALLE, A. S.; WIŚNIEWSKI, R. Synthesizing Multi-Objective H_2/H_∞ Dynamic Controller Using Evolutionary Algorithms. **15th IFAC World Congress**, 2002.
- [PER89] PERES, P. L. D. **Sur la robustesse des systèmes linéaires: approche par programmation linéaire**. Toulouse, France, 1989. Thèse de Doctorat de l'UPS-LAAS, rapport LAAS n. 89384.
- [PER94] PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. An alternative numerical solution to the linear quadratic problem. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.39, p. 198-202. 1994.
- [PER95] PERES, P. L. D.; SOUZA, S. R. Mixed H_2/H_∞ decentralized output feedback control for continuous-time uncertain systems. **IFAC Large Scale Systems**, London, England, p. 569-574. 1995.
- [PET87] PETERSEN, I. R. A stabilization algorithm for a class of uncertainty linear systems. **Systems and Control Letters**, v.AC30, n.3, p. 291-293. 1987.
- [PIT90] PITNEY, G.; SMITH, T. R.; GREENWOOD, D. Genetic Design of Processing Elements for Path Planning Networks. **Proceedings of the International Joint Conference on Neural Networks 1990**. Piscataway, NJ: IEEE, v.3, p. 925-932. 1990.
- [REC73] RECHENBERG, I. **Evolutionsstrategie: Optimierung Technischer Systeme Nach Prinzipien der Biologischen Evolution**. Stuttgart, German: Frommann-Holzboog, 1973.
- [REI00a] REINELT, W. Maximum Output Amplitude of Linear Systems for Certain Input Constraints. **Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control**. Australia, p. 1075-1080. 2000.
- [REI00b] REINELT, W. Robust control of a two-mass-spring systems subject to its input constraints. **Proceedings of the American Control Conference**. USA, 2000.

- [REI01] REINELT, W.; CANALE, M. Robust Control of SISO Systems Subject to Hard Input Constraints. **Proceedings of the European Control Conference**. Portugal, 2001.
- [RUD94] RUDOLPH, G. Convergence Properties of Canonical Genetic Algorithm. **IEEE Transactions on Neural Networks**, v.5, n.1, p. 96-101. 1994.
- [SAN97] SANCHEZ, E.; SHIBATA, T.; ZADEH, L. A. Genetic Algorithms and Fuzzy Logic Systems: soft computing perspectives. In: **Advances in Fuzzy Systems – Applications and Theory**. Singapore: World Scientific, 1997. 7v. 240p. ISBN 9810224230
- [SCH95] SCHERER, C. Multiobjective H_2/H_∞ control. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.40, n.6, p. 1054-1062. 1995.
- [SCH95a] SCHERER, C. Mixed H_2/H_∞ control. **Trends in Control, a European Perspective**, A. Isidori Berlin: Springer-Verlag, 1995. p. 173-216.
- [SCH97] SCHERER, C.; GAHINET, P.; CHILALI, M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.42, n.7, p. 896-911. 1997.
- [SCH02] SCHERER, C. W.; CHEN, H.; ALLGÖWER, F. Disturbance Attenuation with Actuator Constraints by Hybrid State-Feedback Control. **Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control**. Las Vegas, Nevada USA, p. 4134-4139, Dez. 2002.
- [SCH92] SCHRAUDOLPH, N. N.; BELEW, R. K. Dynamic parameter encoding for genetic algorithms. In: **Machine Learning**, v.9, n.1, p. 9-21. 1992.
- [SIL89] SILJAK, D. Parameter space methods for robust control design: a guided tour. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.34, n.7, p. 674-688. 1989.
- [SIL97] SILVA JR., J. M. G. da. **Sur la stabilité locale de systèmes linéaires avec saturation des commandes**. Toulouse, France, 1997. Thèse de Doctorat de l'UPS-LAAS, rapport LAAS n. 97383.
- [SIL03] SILVA JR., J. M. G. da; TARBOURIECH, S. Anti-windup Design with Guaranteed Regions of Stability: an LMI-based Approach. **Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control**. Maui, Hawaii, USA, p. 4451-4456, Dez. 2003.

- [SRI94] SRINIVAS, M.; PATNAIK, L. M. Adaptive Probabilities of Crossover and Mutation in Genetic Algorithms. **IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics**, v.24, n.4, p. 656-667. 1994.
- [SYS89] SYSWERDA, G. Uniform crossover in genetic algorithms. **Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms**, edited by J. D. Schaffer. San Mateo, CA: Morgan Kaufman, 1989. p. 2-9.
- [SYS91] SYSWERDA, G. Schedule Optimization Using Genetic Algorithms. In: **Handbook of Genetic Algorithms**. New York: Van Nostrand Reinhold, 1991. p. 332-349.
- [SZN91] SZNAIER, M.; SIDERIS, A. Suboptimal norm based robust control of constrained systems with an H_∞ cost. **Proceedings of IEEE Conference on Decision and Control**. Brighton, England, 1991. p. 2280-2286.
- [SZN93] SZNAIER, M. A set induced norm approach to the robust control of constrained systems. **SIAM Journal on Control and Optimization**, v.31, n.3, p. 733-746. 1993.
- [SZN03] SZNAIER, M.; AMISHIMA, T.; INANC, T. H_2 Control With Time-Domain Constraints: Theory and an Application. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.48, n.3, p. 355-368. 2003.
- [TAR91] TARBOURIECH, S. **Sur la stabilité des régulateurs à retour d'état saturé**. Toulouse, France, 1991. Thèse de Doctorat de l'UPS-LAAS, rapport LAAS n. 91047.
- [TAR94] TARBOURIECH, S.; BURGAT, C. Positively invariant sets for constrained continuous-time systems with cone properties. **IEEE Transactions on Automatic Control**, v.39, n.2, p. 401-405. 1994.
- [TAR97] TARBOURIECH, S.; GARCIA, G. (Eds). **Control of Uncertain Systems with Bounded Inputs**. Springer-Verlag (LNCIS 227), 1997.
- [VAS89] VASSILAKI, M.; BITSORIS, G. Constrained regulation of linear continuous-time dynamical systems. **Systems and Control Letters**, n.13, p. 247-252. 1989.
- [WRI91] WRIGHT, A. H. Genetic Algorithms for Real Parameter Optimization. In: **Foundations of Genetic Algorithms**. San Mateo, CA: Morgan Kaufmann, 1991. p. 205-218.

- [YAK92] YAKUBOVICH, V. A. Nonconvex optimization problem: the infinite-horizon linear-quadratic control problem with quadratic constraints. **Systems and Control Letters**, n.19, p. 13-22. 1992.
- [ZAM81] ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses. **IEEE Transactions on Automatic Control**, n.26, p. 301-320. 1981.
- [ZHO88] ZHOU, K.; KHARGONEKAR, P. P. An algebraic Riccati equation approach to H_∞ optimization. **Systems and Control Letters**, n.11, p. 85-92. 1988.
- [ZHO96] ZHOU, K.; DOYLE, J. C.; GLOVER, K. **Robust and Optimal Control**. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996.

