ANTONIO TASSINI JUNIOR

ANÁLISE DA PERDA PROGRESSIVA DA RIGIDEZ EM LAMINADOS DEVIDO A TRINCAS TRANVERSAIS NA MATRIZ

Excluído: Área de Concentração : Ciências Exatas ¶
¶
Orientador: Prof. Roberto Dalledone Machado¶

Curitiba
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
2005

ANTONIO TASSINI JUNIOR

ANÁLISE DA PERDA PROGRESSIVA DA RIGIDEZ EM LAMINADOS DEVIDO A TRINCAS TRANVERSAIS NA MATRIZ

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Área de Concentração : Ciências Exatas

Orientador: Prof. Roberto Dalledone Machado

Curitiba
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
2005

Excluído: ... [1]

ANTONIO TASSINI JUNIOR

Formatado: Fonte: 14 pt

ANÁLISE DA PERDA PROGRESSIVA DA RIGIDEZ EM LAMINADOS DEVIDO A TRINCAS TRANVERSAIS NA MATRIZ

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica do Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

COMISSÃO EXAMINADORA:

Prof. João Elias Abdalla Filho
Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Prof. Renato Barbieri
Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Prof. Roberto Dalledone Machado
Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Prof. Miguel Vaz Filho
Universidade do Estado de Santa Catarina

Curitiba, 23 de novembro de 2005

DEDICATÓRIA

Aos meus pais, Antonio e Lúcia

À minha esposa Cristina, constante

incentivadora e

fonte de inspiração.

Excluído: ¶
Dissertação intitulada: “Análise da perda Progressiva da rigidez em laminados devido a trincas transversais na matriz” de autoria do Mestrando Antonio Tassini Júnior, aprovada pela banca examinadora constituída pelos seguintes professores:¶
¶
¶
Mediador: Dr. Roberto Dalledone Machado¶
¶
¶
_¶
PhD. João Elias Abdalla Filho¶
PUC/PR¶
¶
_¶
Dr. Renato Barbieri¶
PUC/PR¶
¶
_¶
Dr. Roberto Dalledone Machado¶
Orientador¶
PUC/PR¶
¶
_¶
PhD. Miguel Vaz Filho¶
UDESC¶
¶
¶
¶
¶
Curitiba, 24 novembro de 2005.¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶

Excluído: ¶
¶

Excluído: ,

Excluído: ¶

Excluído: M

AGRADECIMENTOS

Embora uma dissertação seja, pela sua finalidade acadêmica, um trabalho individual, há contribuições que não podem deixar de ser realçadas. Desta forma, desejo expressar os meus sinceros agradecimentos:

Aos meus pais, que desde o início da vida me educaram de forma coesa, realçando a honestidade e a simplicidade, proporcionando-me alcançar vitórias importantes.

Á minha esposa, amiga, companheira, sempre presente em todos os momentos, mas, acima de tudo, por ser uma incentivadora incondicional e, ainda, pela paciência e compreensão reveladas ao longo destes meses.

Ao Prof. Roberto Machado Dalledone, professor e orientador, que em nenhum momento deixou de me guiar neste trabalho, de transmitir seus conhecimentos, revelando-se um grande amigo que, com certeza, terei para o resto da vida.

A todas as pessoas que fazem parte do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, em especial ao Professor João Elias Abdala Filho, pelo voto de confiança em mim depositado, e também à Sra. Jane Marques da Rocha, que nunca deixou de atender qualquer pedido.

Ao grande amigo Marcelo, sempre presente nos momentos de dúvida, cujo trabalho tive o prazer de dar continuidade.

Aos amigos e companheiros da empresa Electrolux do Brasil S/A, que me incentivaram desde o início a transpor mais esse desafio. E, também, aos novos amigos e companheiros da empresa Petrobrás, que não me deixaram desistir de concluir este curso, principalmente devido à distância física.

Excluído: ¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶
¶

Formatado: Justificado

Excluído: minha

Excluído: ,

Excluído: na minha vida.

Excluído: À

Excluído: .

Excluído: M

Excluído: ,

Excluído: a

Excluído: me negou

Excluído: um

Excluído: meu

Excluído: e

Excluído: meus

Excluído: que tenho na

Excluído: meus

Excluído: a

Excluído: á

Excluído: ¶
À minha mãe pela força a fulano de tal pela dedicação ao...¶

Excluído: ¶

RESUMO

O estudo da durabilidade de laminados formados por fibras contínuas pode ser discutido no contexto da sua rigidez ou perda de rigidez. Desta forma, o problema consiste em determinar como a resistência inicial de um laminado é afetada por um processo de danificação, quando submetido a um carregamento. Este trabalho tem por objetivo apresentar e aplicar teorias sobre a evolução do dano em placas laminadas com trincas transversais em sua matriz.

Excluído: inteiramente

Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt

A modelagem do estudo proposto baseia-se em determinar as relações tensão-deformação de um laminado para posteriormente incluir-se o dano nessa estrutura. O dano é embutido nas equações constitutivas que são derivadas dos princípios da Mecânica do Dano, baseadas nas restrições termodinâmicas. Neste modelo, o dano é caracterizado por um tensor de segunda ordem contendo as variáveis internas de estado que representam localmente o estado de danificação, ou seja, as características geométricas e cinéticas das trincas. A determinação destas variáveis, por intermédio de um estudo numérico, é feita para modo I de carregamento e modos I e III de carregamento acoplados. As leis que regem a evolução do dano são embutidas no modelo para uma perfeita correlação entre o estado de tensões do laminado e a sua perda de rigidez devido a trincas.

Excluído: a teoria

Para a obtenção da solução aproximada utilizou-se o Método Modificado da Função de Green Local. Essa técnica decorre da associação dos métodos dos elementos finitos e dos elementos de contorno, sendo o sistema final de equações associado aos graus de liberdade de contorno. O procedimento implementado é semelhante ao que se faria num programa convencional de elementos finitos, porém a solução final é determinada no contorno.

Formatado: Fonte: Century Schoolbook

Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt

ABSTRACT

The study of durability of laminated continuous fiber composites can be discussed in the context of stiffness or stiffness loss. In this way, the problem is to determine how the initial strength of a lamine is affected by a damage process under a loading history. Therefore, this work has the objetive to present and apply a theory on damage evolution in laminated composite plates with transverse cracks.

The proposed study modeling is based on determine the stress-strain relations of a laminate and than include the damage in the structure. The damage is embedded within the constitutive equations derived from the principles of Continuum Damage Mechanics and thermodynamics constraints. In this model, the damage is enclosed by a second order tensor holding the internal state variables that represent the locally damage state. In other words, the transverse crack geometry and kinematics characteristics. These variables are obtained by numerical analysis under mode I and coupled mode I and III loads. For a perfect correlation between laminate stress components and its stiffness loss due to cracks, damage evolution laws are included in the model.

The Modified Local Green's Function Method is used to get the approximate solution. This technique conbines the Finite Element Method and Boundary Finite Method, and the final equations system are associated with boundary degrees of freedom. The methodology is similar to Finite Element but Boundary Element establishes the final solution.

Excluído: entirely
Excluído: remaining
Excluído: es
Excluído: ve
Excluído: about
Excluído: theory
Excluído: , i
Excluído: the
Excluído: adds
Excluído: but

LISTA DE FIGURAS

Excluído: L
Formatado ... [2]
Excluído: 3
Excluído: 3
Excluído: 3
Excluído: 3
Excluído: 5
Excluído: 5
Excluído: 5
Excluído: 5
Excluído: 7
Excluído: 7
Excluído: 12
Excluído: 12
Excluído: 13
Excluído: 13
Excluído: 21
Excluído: 21
Excluído: 23
Excluído: 23
Excluído: 24
Excluído: 24
Excluído: 26
Excluído: 26
Excluído: 28
Excluído: 28
Excluído: 36
Excluído: 36
Excluído: 37
Excluído: 37
Excluído: 40
Excluído: 40
Excluído: 42
Excluído: 42
Excluído: 45
Excluído: 45
Excluído: 51
Excluído: 51
Excluído: 56
Excluído: 56
Excluído: 70
Excluído: 70
Excluído: 72
Excluído: 72
Excluído: 75
Excluído: 75
Excluído: 78
Excluído: 78

Excluído: 83
Excluído: 83
Excluído: 94
Excluído: 95
Excluído: 95
Excluído: 96
Excluído: 96
Excluído: 97
Excluído: 103
Excluído: 104
Excluído: 109
Excluído: 110
Excluído: 109
Excluído: 110
Excluído: 110
Excluído: 111
Excluído: 112
Excluído: 113
Excluído: 112
Excluído: 113
Excluído: 113
Excluído: 114
Excluído: 113
Excluído: 114
Excluído: 114
Excluído: 115
Excluído: 114
Excluído: 115
Excluído: 115
Excluído: 116
Excluído: 115
Excluído: 116
Excluído: 116
Excluído: 117

LISTA DE TABELAS

Formatado: Centralizado

Formatado: Normal, Espaço Antes: 0 pt, Depois de: 0 pt

Formatado: Fonte: 11 pt

Excluído: 77

Excluído: 77

Excluído: 78

Excluído: 78

Excluído: 79

Excluído: 79

Excluído: 108

Excluído: 109

Excluído: 109

Excluído: 110

Excluído: 126

Excluído: 126

Formatado: Centralizado

LISTA DE SÍMBOLOS

Formatado: Fonte: 11 pt

Formatado: Normal, Espaço Antes: 0 pt, Depois de: 0 pt

V	Volume do elemento representativo
$\{\sigma\}$	Vetor tensão
σ_{ij}	Componentes de tensões num ponto
τ_{ij}	Componentes de tensões transversais num ponto
$\overline{\sigma}_i$	Tensões médias
$\widetilde{\sigma}$	Tensão efetiva
σ_{ij}^{e}	Tensor tensão efetiva
σ_{ij}^{R}	Tensor tensão residual
$\{\varepsilon\}$	Vetor deformação
ε_{ij}	Componentes de deformação num ponto
$\overline{\varepsilon}_i$	Deformações médias
[C]	Matriz das constantes elásticas
C_{ijkl}	Componentes da matriz das constantes elásticas
$[S]$	Matriz de flexibilidade
E	Módulo de elasticidade
G	Módulo de elasticidade transversal
υ	Coeficiente de Poisson
[Q]	Matriz de rigidez de uma lâmina
Q_{ij}	Componentes da matriz rigidez de uma lâmina
θ	Parâmetro de restrição
[T]	Matriz transformação (rotação)
$[\overline{Q}]$	Matriz de rigidez transformada de uma lâmina
$\overline{Q}_{ij}$	Componentes da matriz de rigidez transformada de uma lâmina

Formatado: Rebaixado por 3 pt

Excluído: v

h_{eq}	Espessura equivalente de um laminado
N	Número de lâminas de um laminado
h	Espessura de um laminado real
X_1, X_2 e X_3	Direções dos eixos de referência
u_1, u	Deslocamento na direção “x”
u_2, v	Deslocamento na direção “y”
u_3, w	Deslocamento na direção “z”
z	Coordenada medida ao longo da espessura da placa
{N}	Vetor das resultantes de tensões normais
{M}	Vetor das resultantes de tensões de flexão
{κ}	Vetor das deformações de curvatura
γ	Componente de deformações transversais
θ^0	Rotações da superfície média
[A]	Matriz dos efeitos de membrana
[B]	Matriz dos efeitos acoplados membrana-flexão
[D]	Matriz dos efeitos de flexão
φ	Continuidade
n	Vetor normal à superfície
n_j	Vetor normal à superfície da trinca
S	Área total de uma seção
$\widetilde{S}$	Parcela íntegra da área total S de uma seção
S_0	Área dos defeitos medidos de uma seção
D_n	Variável de dano escalar
F	Força
α_{ij}	Variáveis internas de estado
u_i	Deslocamento de abertura da trinca
S_c	Superfície de uma nova trinca
Δl_2	Incremento de deslocamento na direção local “1”
h	Energia específica livre de Helmholtz
s	Entropia por unidade de massa
s^e	Entropia efetiva

S_T	Entropia total
t_1	Espessura da lâmina 0°
t_2	Metade da espessura da lâmina de 90°
t_t	Espessura de um laminado
t_l	Espessura de uma lâmina
F_j	Forças de corpo
T_0	Temperatura de referência
ΔT	Variação da temperatura
$-Ts$	Energia específica de calor irreversível
μ	Energia específica interna
$\dot{\mu}$	Taxa de troca da densidade de energia interna por unidade de massa
$\dot{v}$	Aceleração
z_1	Eixo na direção "z" local da lâmina 90°
z_2	Eixo na direção "z" local da lâmina 0°
$\dot{\alpha}_{ij}$	Taxa de alteração das variáveis internas de estado
α_2	Variável interna de estado para carregamento modo I
α_6	Variável interna de estado para carregamento modo III
δ	Máximo deslocamento de abertura da trinca normalizado
$\dot{\varepsilon}_{ij}$	Taxa de alteração do tensor deformação
ϕ	Ângulo qualquer
$\mathrm{\rho}$	Densidade de massa de um sólido
ρ	Densidade de trinca normalizada
ψ	Função do perfil de abertura da trinca normalizada
ξ	Distância normalizada do plano médio
ζ	Densidade de trinca
ζ_1	Densidade de trinca local
Ω	Domínio de um sólido
Γ	Superfície (contorno) de um sólido
$\{D^N\}$	Vetor dano de força
$\{D^M\}$	Vetor dano de flexão

Excluído: *u*

Formatado: Rebaixado por 5 pt

Φ_j , ϕ_j	Funções de interpolação
$\{F^a\}$	Vetor força aplicada
$\{F^d\}$	Vetor força de dano
p_i^a	Componentes do vetor força aplicada
p_i^d	Componentes do vetor dano
u_x	Nó de maior deslocamento na direção “x”
u_{0x}	Nó de maior deslocamento da placa não-danificada na direção “x”
F_a	Função de falha
X_{ij}	Propriedades mecânicas dos materiais
X	Resistência longitudinal da lâmina
Y	Resistência transversal da lâmina
C	Resistência ao cisalhamento da lâmina
X_c	Resistência longitudinal à compressão da lâmina
Y_c	Resistência transversal à compressão da lâmina
X_t	Resistência longitudinal à tração da lâmina
Y_t	Resistência transversal à tração da lâmina
$X_{\varepsilon t}$	Deformação longitudinal máxima devido à tração
$Y_{\varepsilon t}$	Deformação transversal máxima devido à tração
$X_{\varepsilon c}$	Deformação longitudinal máxima devido à compressão
$Y_{\varepsilon c}$	Deformação transversal máxima devido à compressão
C_ε	Deformação máxima angular no plano x-y
U	Energia de deformação elástica
P	Força no eixo x
U_0	Densidade de energia de deformação
b	Largura do laminado
L	Comprimento do laminado
G_{Ic}	Taxa de liberação de energia crítica

SUMÁRIO

Excluído: 65
Excluído: 65
Excluído: 68
Excluído: 68
Excluído: 70
Excluído: 70
Excluído: 72
Excluído: 72
Excluído: 75
Excluído: 75
Excluído: 81
Excluído: 81
Excluído: 81
Excluído: 81
Excluído: 82
Excluído: 82
Excluído: 84
Excluído: 84
Excluído: 93
Excluído: 94
Excluído: 93
Excluído: 94
Excluído: 94
Excluído: 95
Excluído: 96
Excluído: 97
Excluído: 98
Excluído: 99
Excluído: 100
Excluído: 101
Excluído: 105
Excluído: 105
Excluído: 107
Excluído: 108
Excluído: 107
Excluído: 108
Excluído: 111
Excluído: 112
Excluído: 111
Excluído: 112
Excluído: 118
Excluído: 119
Excluído: 122
Excluído: 123
Excluído: 125
Excluído: 125
Excluído: 128
Excluído: 128
Formatado ... [4]
Excluído: 132
Excluído: 132
Formatado ... [5]
Excluído: ¶
Formatado ... [6]
Excluído: ¶

1. Introdução

1.1 Motivação

Nos últimos anos, as áreas de Engenharia e Ciências dos Materiais vêm pesquisando materiais que apresentam características mais favoráveis a determinadas aplicações. Materiais compostos são exemplos que confirmam esta observação. Entretanto, por apresentarem comportamento diferenciado em várias direções, compreender os modos de falha e de fratura desses materiais quando sujeito a diferentes condições de carregamento torna-se uma grande preocupação para os projetistas, tendo em vista a otimização e a fabricação dessas estruturas. Portanto, esse trabalho explanará sobre materiais laminados compostos contendo dano interno em sua estrutura, os quais serão tratados nos itens que se seguem.

Excluído: sujeitos a diferentes condições de carregamento torna

1.1.1 Materiais Compostos

Os materiais empregados pela humanidade passam por um grande ciclo de transformação. São extraídos da terra, convertidos em materiais de base para então serem transformados em materiais de engenharia. O ciclo de materiais é um sistema que entrelaça recursos naturais e necessidades humanas. Desta forma, o homem vem desenvolvendo conhecimentos em materiais por intermédio de pesquisas com respeito a sua composição, estrutura e processamento, visando ampliar o campo de aplicação dos mesmos. Neste sentido, vem ocorrendo enorme atividade no campo da pesquisa de materiais compostos, particularmente a partir do Século XX.

Nesse mesmo século [ASM Materials Information (2005)], ocorreu uma grande expansão da indústria química, associada à exploração do petróleo, o que permitiu um grande impulso na descoberta e desenvolvimento de novos polímeros tais como nylon, poliestireno, acrílicos, epóxi, e outros polímeros de alta resistência. Durante esse mesmo período, começaram a surgir fios e fibras de alta resistência, tais como fibras de carbono, que permitiram a fabricação de peças de materiais compostos avançados, associando tais fibras a uma resina ou matriz polimérica.

As estruturas constituídas por tais materiais tornaram-se importantes no mundo industrial durante a Segunda Guerra Mundial, quando a comunidade aeroespacial produziu materiais com resistência significantemente maior do que os já utilizados na construção de aeronaves. Deste então, a parcela de materiais compostos utilizados na indústria aeroespacial vem crescendo rapidamente.

Hoje em dia, o campo de aplicação dos materiais compostos é muito amplo, sendo os mesmos empregados nas mais diversas aplicações, especialmente naquelas que requerem maior tecnologia. Assim, vale mencionar:

A. Aplicações na indústria aeroespacial.

A utilização de materiais mais leves e reforçados na estrutura de aviões, helicópteros (Figura 1-1) e satélites permite, pela diminuição de seu próprio peso, o aumento do volume do tanque de combustíveis ampliando a autonomia do vôo; em aeronaves de passageiros a redução do peso próprio pode ser compensado pelo aumento no número de usuários. Além disso, pode ser feita a utilização de compostos no intuito de melhorar as condições de exposições térmica a que tais aeronaves muitas vezes são submetidas, em conseqüência de elevadas velocidades e altitudes.

Excluído: que pela diminuição de seu próprio peso, aumenta-se

Excluído:

Excluído: a

a) b) c)



Figura 1-1- Aviões comerciais (a), militares (b) (www.embraer.com.br, 10/05/2005) e helicóptero (c) (www.saint-gobanvetrotex.com.br, 10/05/2005)

a) b)


c) d)


Figura 1-2 - Carroceria de automóveis (a) e caminhões (b), painel de automóvel (c) e tampa de comando de válvula (d) (www.saint-gobainvetrotex.com.br, 10/05/2005)

B. Aplicações na indústria automotiva.

Vários componentes dos veículos modernos tais como ilustrados na Figura 1-2, são feitos a partir de materiais compostos, como por exemplo, peças de carrocerias de caminhões e automóveis (de fibra de vidro), pára-choques de veículos, tampas de comando de válvulas, sistemas de pedais, eixos de direção, etc.

C. Aplicações na indústria petroquímica.

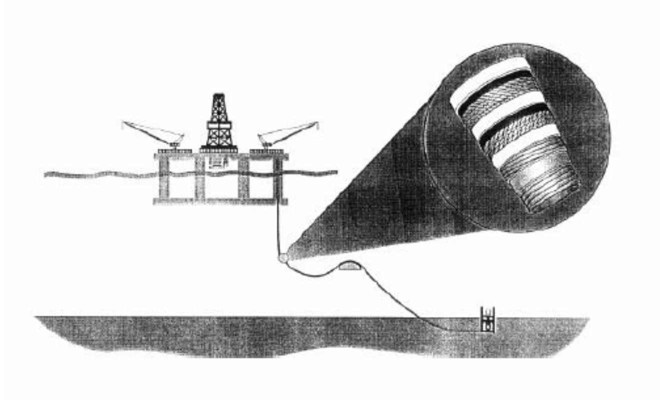
Há mais de trinta anos que tubulações flexíveis vêm sendo utilizadas na exploração de petróleo. Essas tubulações, denominadas "risers", têm como função transportar o petróleo extraído do fundo do oceano (Figura 1-3a). Outro tipo de tubulação que também vem sendo muito utilizada em plataformas, substituindo tubulações de metal, são as de epoxy reforçadas com fibras e vidro (Figura 1-3b).

D. Outras aplicações relevantes

Muitas outras aplicações podem ser citadas como nas indústrias naval, esportiva e até na Bio-Engenharia, onde certos tipos de próteses precisam ser fabricadas reunindo-se propriedades especiais que só um compósito pode atender (Figura 1-4).

Excluído: inúmeras

a)



b)

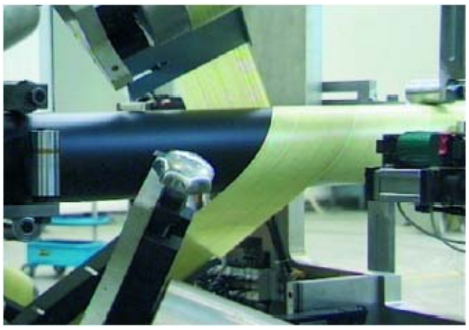


Figura 1-3 - a) risers e b) tubulações de fibra de vidro utilizadas em plataformas (www.ameron.com 10/05/2005)

a)

b)

c)

Figura 1-4 - Barcos (www.vetrotexeurope.com, 10/05/2005), bicicletas (www.spmateriais.pt, 10/05/2005) e próteses ortopédicas (www.metalmat.ufrj.br, 10/05/205)

1.1.2 Danificação em Estruturas Compostas

Sólidos expostos a certas condições de carregamentos sofrem rearranjos na sua estrutura interna. Isto pode ocorrer sob a forma de microtrincas, vazios ou cavidades, formando uma alta concentração de tensão. Tais alterações na microestrutura interna, denominadas de *dano*, enfraquecem o material a nível microscópico. Os danos internos existem como perturbações discretas e, assim, sua análise permanece como um objetivo considerável.

A Mecânica do Dano em Meios Contínuos [Proença (2000)], [Lemaitre (1992)] é um ramo emergente de estudo das análises dos efeitos da deterioração do material em sólidos. Ela leva em conta os efeitos da degradação de modo difuso e progressivo dos sólidos, submetidos a ações de natureza mecânica ou não-mecânica, por meio da redução das propriedades de resistência e rigidez do material. É importante notar, desde logo, a diferença entre a Mecânica do Dano e a Mecânica da Fratura. Enquanto a Mecânica da Fratura lida com condições de propagação de uma fissura macroscópica imersa num meio contínuo íntegro, a Mecânica do Dano se ocupa do efeito, sobre a resposta do material, de um processo de microfissuração distribuída que muitas vezes se desenvolve numa etapa preliminar à formação da fissura discreta.

Nos dias atuais, o comportamento das estruturas de materiais compostos sem danificação (isto é, íntegras ou sãs) é bem compreendido e a avaliação do desempenho mecânico é feita por processos consagrados. Contudo, quando essas estruturas apresentam uma condição danificada, o entendimento do seu comportamento estrutural não é bem claro como no caso anterior. Como conseqüência, a vida útil dos materiais compostos pode ser comprometido, quando da existência de alguma danificação. Como exemplo de estruturas danificadas, a Figura 1-5 mostra placas laminadas compostas contendo trincas transversais em sua matriz.

Excluído: as

Excluído: não se tem o mesm

Excluído: que quando comparado com a condição original. Ou seja, o período de vida estrutural

O comportamento de materiais isotrópicos, elástico-lineares, quando apresentam uma única trinca, é bem explicado pelos modelos da Mecânica da Fratura. Entretanto, a aplicação desta teoria para análise de materiais compostos tem encontrado algumas limitações, já que seu processo de danificação é bastante distinto dos materiais isotrópicos [Tay e Lim (1993)]. Sendo assim, estes materiais necessitam de novas abordagens para que se modele o complexo estado de dano e sua evolução.

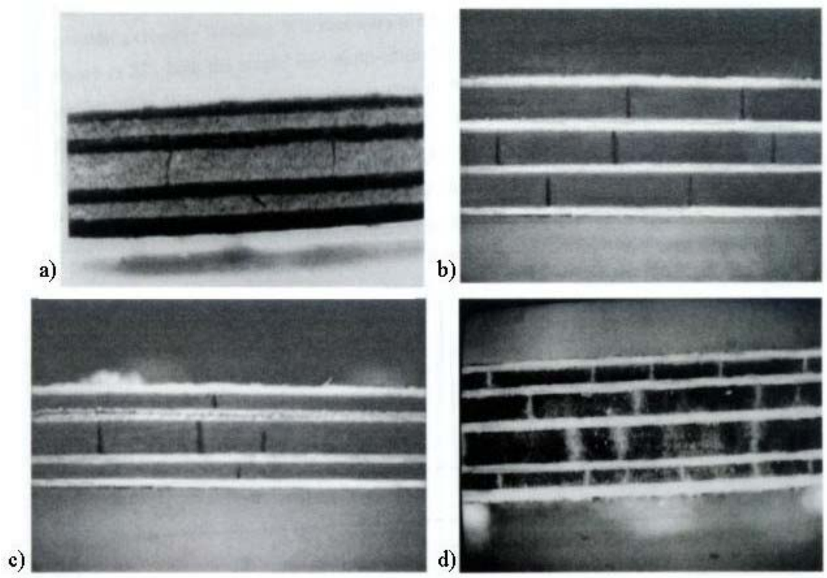


Figura 1-5 - Exemplos de laminados compostos com trincas transversais na matriz: a) Laminado $[0/90/0/90]_s$; b) Laminado $[0/90_40/90_2]_s$; c) Laminado $[0/90_20/90_2]_s$ e d) Laminado $[0/90_2/0/90_4/0/90_3/0/90_2/0]$

1.1.3 Tolerância ao Dano

Como os materiais compostos estão sendo utilizados em componentes estruturais de aeronaves, automóveis, tubulações, e até mesmo em vasos de pressão, um projeto adequado dessas estruturas é necessário para quantificar a sua tolerância ao dano. Na seção anterior, definiram-se, de maneira genérica, as manifestações do dano em materiais compostos. Mas, além disso, há interesse em identificar a natureza fundamental do comportamento desses sistemas com relação à sua tolerância ao dano. Dessa forma, pode-se definir tolerância ao dano como a resistência residual do material após a aplicação de um carregamento durante um determinado período.

Excluído: consiste

Para tanto, a avaliação dessa tolerância requer a capacidade de simular a acumulação do dano nas estruturas quando submetidas a um carregamento. Convém, neste momento, salientar, que o processo de acumulação do dano é diferente do processo de iniciação do dano e do crescimento do dano. Talvez a diferença mais notória seja o fato de que a acumulação como um modo de falha seja geralmente definido pela interação dos microdefeitos [Reifisnider (2002)].

Excluído: rmos

O primeiro modo de dano é o aparecimento de trincas transversais na matriz. Em alguns casos esse tipo de dano pode ser catastrófico como, por exemplo, provocar vazamentos em vasos de pressão. Por outro lado, em estruturas nas quais somente a rigidez é levada em consideração, esse dano irá causar a degradação dessa propriedade, podendo causar problemas futuros. Assim, com o objetivo de se obter estruturas confiáveis, faz-se necessário entender os processos de dano assim como prever o nível de degradação das propriedades mecânicas de um laminado.

Excluído: Durante o serviço, os laminados são submetidos a complexos carregamentos mecânicos que podem ocasionar a sua danificação.

Excluído: Ou seja

1.2 Objetivo

A capacidade estrutural dos materiais compostos pode ser totalmente aproveitada quando seus comportamentos estruturais são bem compreendidos e efetivamente caracterizados. O uso contínuo de estruturas compostas apresentando danos internos é praticável e pode ser uma boa alternativa de custo quando sua vida útil é estendida. Para isso, teorias de dano e sua evolução precisam ser adequadamente aplicadas para prever o fenômeno de trincas transversais em materiais compostos.

Este trabalho tem como objetivo aplicar a Teoria do Dano em Meios Contínuos, proposta por Allen *et al.* (1987a,b) e discutida por Lim e Tay (1996) a laminados compostos contendo trincas transversais na matriz, descrevendo-se o comportamento de tais estruturas através de sua perda de rigidez devido ao acúmulo desse dano quando submetidas a um carregamento monotônico crescente.

Excluído: par

Excluído: .

Assim, são tratados neste trabalho materiais compostos laminados com fibras contínuas contendo dano somente por trincas transversais, desconsiderando outros tipos de dano, tais como delaminações e rompimentos das fibras.

1.3 Organização do trabalho

Inicialmente, no Capítulo 2, realiza-se uma revisão bibliográfica das principais teorias de dano desenvolvidas até o momento atual para materiais compostos laminados, suas aplicações e limitações, novos avanços e direcionamentos de estudos de dano e fratura em materiais utilizados na engenharia.

No Capítulo 3, são evidenciados os principais aspectos dos materiais compostos e algumas de suas características mais favoráveis comparadas aos dos materiais tradicionais. Faz-se menção também acerca das relações tensão-deformação de uma lâmina e de um laminado, simplificações, convenções e teorias aplicadas a placas laminadas.

No Capítulo 4, apresenta-se o modelo de dano baseado nas variáveis internas de estado. Essas são embutidas nas equações constitutivas derivadas dos princípios da Mecânica do Dano em Meios Contínuos baseadas nas restrições termodinâmicas. Assim, expõem-se as relações constitutivas para laminados compostos com trincas transversais. Além disso, é realizada uma descrição de como são calculadas as variáveis internas de estado, onde se apresenta uma proposta numérica através do Método dos Elementos Finitos. Tais variáveis são desenvolvidas para os carregamentos associados ao Modo I e carregamentos acoplados aos Modos I e III.

Excluído: para avaliá-las

A implementação do dano através do Método Modificado da Função de Green Local é desenvolvida no capítulo 5, através da adição do vetor dano ao vetor dos carregamentos aplicados.

A evolução do dano é analisada no Capítulo 6. Para tanto, busca-se quantificar a perda progressiva da rigidez em um laminado levando-se em consideração diversos critérios de falha.

Aplica-se a metodologia proposta no Capítulo 7, onde são obtidos resultados para algumas configurações diversas de laminados compostos. O foco principal é verificar a perda de rigidez de tais laminados sujeitos a trincas transversais em sua matriz.

Excluído: fornecidos

Finalmente, no Capítulo 8, são tecidos alguns comentários finais, apresentando-se a conclusão e sugestões para trabalhos futuros.

2. Revisão Bibliográfica

2.1 Introdução

Este capítulo tem como finalidade apresentar uma breve revisão sobre as teorias de danificação em estruturas compostas, apresentando-se suas vantagens e limitações, e ainda, algumas tendências sobre o estudo de materiais compostos danificados.

O processo de evolução do dano em materiais compostos laminados é muito complexo devido aos vários tipos de danos possíveis nestes materiais como, por exemplo, trincas transversais, delaminação, descolamento entre a fibra e a matriz e ruptura da fibra. Geralmente, o início da danificação de um laminado é caracterizado pelo surgimento de trincas na matriz. Esse processo de danificação é contrário ao observado em materiais homogêneos convencionais onde a falha do material pode ser tratada pela propagação de uma única trinca. Em compósitos, as trincas não irão afetar individualmente o desempenho da estrutura, mas, irão influenciar no aparecimento de novas trincas. É o efeito acumulativo dessas trincas que acarretará a falha da estrutura. Desta maneira, qualquer tentativa em prever a resistência residual de um laminado deve levar em conta este processo de acumulação de dano.

O problema mencionado é usualmente resolvido em duas etapas. A primeira é modelar a degradação da rigidez de um laminado para uma dada concentração de trincas, e a segunda é modelar a evolução do dano em função do incremento do carregamento. Com este foco, durante as últimas duas décadas, o problema das trincas transversais em laminados vem sendo estudado extensivamente, e um número considerável de pesquisas vem utilizando o modelamento matemático para quantificar a redução da rigidez.

Excluído: mencionado problema

2.2 Teorias sobre o Dano

Modelar o dano por trincas transversais é muito complicado devido à influência de diferentes restrições impostas individualmente pelas lâminas danificadas com fibras orientadas em direção genéricas. Possíveis fatores de restrição, tais como espessura da lâmina, orientação e seqüências de empilhamento das lâminas, não são bem compreendidos. Conforme descrito por Lim (1996), em laminados com fibras cruzadas e laminados com fibras orientadas genericamente existem evidências para mostrar que a espessura, a orientação e a seqüência de empilhamento das lâminas necessitam ser considerados. Ou seja, os efeitos de restrição, além de influenciar a resposta ao dano das lâminas danificadas, também podem governar o início da evolução de trincas transversais em laminados compostos em geral. Assim, o início da trinca transversal e o critério de evolução devem considerar os efeitos de restrição em geral nas lâminas individuais dos laminados.

Excluído: a

Excluído: em direção genérica

Excluído: E

Excluído: individuais

Excluído: e a característica

Excluído: e

Excluído: lâminas individuais para

Outro aspecto a ser considerado diz respeito à densidade de trincas, que, quanto maior o seu valor, menor a distância entre as trincas transversais. Esse resultado gera um alto nível de interações entre trincas transversais adjacentes e pode impedir a formação de novas trincas. Interações entre trincas transversais representam um dos principais mecanismos de saturação delas. Além disso, também são esperados que diferentes restrições das lâminas possam gerar diferentes níveis de efeitos nas interações entre as trincas. Outros tipos de dano tais como, a delaminação e a ruptura das fibras, também contribuem para intensificar a extensão das interações entre trincas transversais. Quando o primeiro mecanismo de dano for desencadeado, as interações entre trincas serão iniciadas, o mesmo ocorrendo com o fenômeno de saturação das trincas transversais. Os fenômenos da competição de mecanismos de dano e sua interação no estado de saturação das trincas transversais estão além do escopo deste trabalho.

Excluído: Também,

Excluído: quanto maior a

Especialmente nas indústrias aeroespacial e marinha, estruturas compostas freqüentemente operam sob condições extremas provenientes de carregamentos mecânicos adversos e de temperatura residual induzida. Alguns autores consideraram esses efeitos em seus trabalhos, como por exemplo [Nairn (2000a)], [Nairn (2000b)], [Nairn (2001)]. Nesses casos, além de carregamentos mecânicos e de

Excluído: a

temperaturas residuais induzidas, a análise da evolução do dano por efeito de trocas de temperatura é necessária.

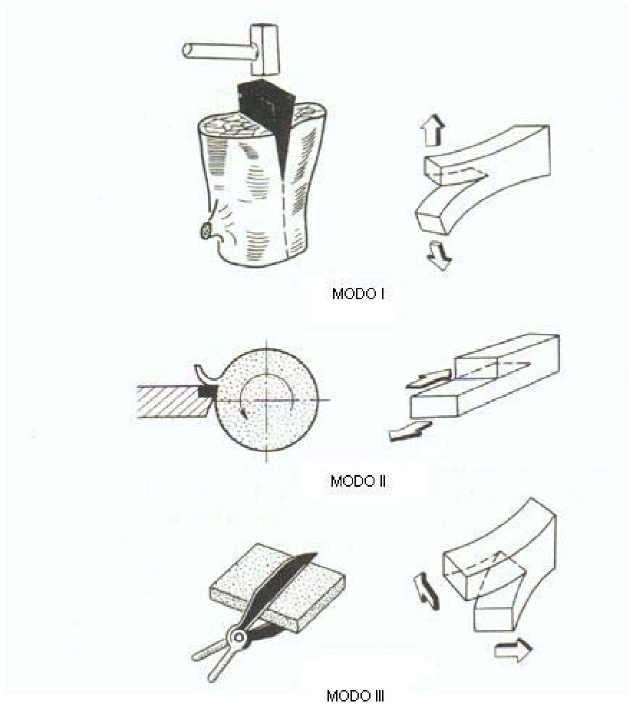


Figura 2-1 - Modos I (abertura), II (cisalhamento no plano) e III (cisalhamento fora do plano) [Parton (1992)]

Analisando-se uma configuração de um carregamento genérico em uma trinca, a resposta estrutural pode ser desmembrada em componentes de carregamentos modo I (as superfícies da trinca são separadas por forças normais ao plano da trinca), modo II (deslizamento das superfícies da trinca sob forças normais à frente da trinca) e modo III (deslizamento das superfícies das trinca sob forças paralelas à frente da trinca), vistos na Figura 2-1. Em laminados compostos genéricos sujeitos a carregamento axial, os modos I e III de carregamentos acoplados atuam em trincas transversais de lâminas com fibras em direção genérica. Até o momento, muitos modelos de dano levam em conta somente o modo I de carregamento para as trincas transversais, aplicando-se somente em laminados

Excluído: s

Excluído: de carregamento

Excluído: somente

compostos com fibras cruzadas [Laws e Dvorak (1988)], [Nairn (1989)], [Talreja *et. al.* (1992)], [Tay *et. al.* (1992)], [Varna e Berglund (1991)]. A fim de se analisar o dano por trincas transversais em laminados compostos genéricos, as teorias propostas precisam considerar modos I e III de carregamentos acoplados em trincas transversais das lâminas individuais com fibras em direção genérica, conforme mostrado na Figura 2-2. O carregamento modo II em trincas transversais está associado com solicitações fora do plano e de torção, e não será considerado neste trabalho.

Excluído: resolver

Excluído: nos laminados

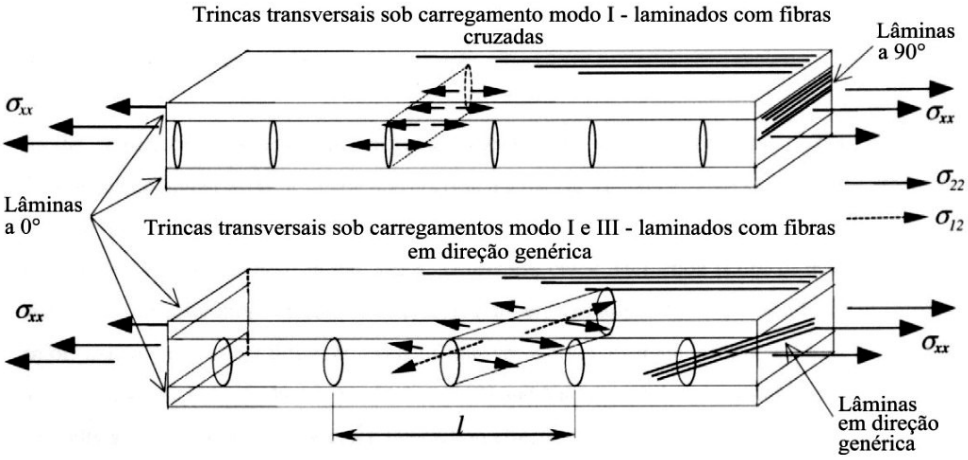


Figura 2-2 - Modos de carregamento em trincas transversais para laminados com fibras cruzadas e laminados com fibras em direções genéricas [Lim (1999)]

Os mecanismos de dano subjacentes descritos anteriormente estão presentes em todos os laminados compostos que contém dano por trincas transversais. Entretanto, nenhuma das literaturas conhecidas atualmente considera todos os mecanismos de dano simultaneamente. Logo, se faz necessária uma análise mais refinada de metodologias que considerem todos os mecanismos de danos identificados.

Excluído: discutidos acima

Excluído: se faz necessária

Muitos métodos teóricos foram propostos com a compreensão dos mecanismos básicos das trincas transversais. Os modelos de dano podem ser divididos em teorias baseadas na camada descontínua, métodos de cisalhamento retardado, mecânica variacional, esquemas autoconsistentes, mecânica do dano em meios contínuos, método dos elementos finitos entre outros. Um resumo de várias metodologias para cada modelo é discutido, e pode ser verificado no trabalho de Silva (2004), ou ainda nos trabalhos dos seguintes autores, Tsai (1965), Dvorak et. al (1985), Wang et. al. (1985), Hashin (1987), Zhang et. al (1992), Praveen e Reddy (1998), Tseng (2000), entre outros.

Excluído: ¶

Excluído: .

2.3 Teorias sobre a Evolução do Dano

O surgimento de trincas transversais na matriz é a primeira ocorrência de dano em laminados contendo camadas orientadas somente em duas direções, paralela e transversal ao carregamento. Além disso, trincas transversais é um tipo de dano progressivo que evolui com o aumento de deformação ou carregamento e, por conseqüência, com o aumento da densidade de trincas. Portanto, as alterações nas propriedades elásticas de um laminado, como o Módulo de Elasticidade ou o Coeficiente de Poisson, estão relacionadas com o número de trincas formadas nas camadas transversais. Vários estudos, baseados em diferentes abordagens, foram realizados para prever a degradação dessas propriedades em um laminado submetido a um carregamento. Alguns deles estão citados a seguir.

Excluído: são as

Excluído: s

Excluído: s

Excluído: s

Excluído: são

O uso da Mecânica da Fratura para determinar o processo da evolução do dano vem obtendo bons resultados para materiais isotrópicos, devido ao fato de que esses materiais podem ser caracterizados por um simples parâmetro, como, por exemplo, o fator de intensidade de tensão. Aproximações numéricas computacionais, tais como o método dos elementos finitos, são utilizadas para se determinar as características do dano. Esses conceitos foram adotados em um modelo computacional elaborado por Tolson (1991) para determinar a tensão máxima admissível de um laminado sujeito à carregamentos variados. Neste caso em particular, foi desenvolvido e utilizado um elemento finito com sete graus de liberdade. Buchholz et al. (1997) também utilizaram esses conceitos na investigação da fratura interlaminar em laminados compostos, o mesmo ocorrendo com Falzon et al. (1999) que desenvolveu um elemento finito tridimensional para avaliar o crescimento e a evolução de trincas.

Excluído: facilmente

Excluído: em

Porém, existe um inconveniente para a utilização da Mecânica da Fratura. Para se obter um campo de tensões exato, é necessário modelar cada trinca com um grande número de elementos. Esse campo de tensões é então utilizado em um critério de falha para determinar o início ou a propagação de trinca. Portanto, esse tipo de análise pode rapidamente tornar-se computacionalmente inviável, devido ao acúmulo de várias trincas que um componente pode ter antes de sua falha. Desta forma, com o intuito de tornar as simulações viáveis, Anderssen (1998), através da análise da Mecânica da Fratura, utilizou o critério da energia de deformação no seu modelo para prever a degradação da rigidez de um laminado devido a trincas na matriz, sendo o surgimento das trincas uma função da tensão aplicada.

Excluído: h

Excluído: á

Excluído: quando d

As Teorias da Mecânica do Dano em Meios Contínuos fornecem subsídios para a resposta média de estados de dano da estrutura. Nelas faltam informações detalhadas da micromecânica e, portanto não levam em conta restrições da trinca transversal e nem efeitos de interação. Além disso, estas teorias exigem leis de crescimento do dano para descrever características de evolução do dano por trincas transversais.

Em alguns estudos, muitas constantes precisam ser determinadas, sendo que algumas não são tão facilmente encontradas. Ao mesmo tempo, desde que leis de crescimento (leis de evolução) são derivadas de observações, diferentes leis de dano podem ser assumidas para representar um mesmo comportamento de dano. Disto resultaram diferentes teorias existentes na literatura. Em muitas destas teorias de dano, adaptações de curvas para as constantes em leis de evolução e funções para as variáveis de estado foram assumidas. Isto introduz muita incerteza nos modelos de dano propostos [Allen *et. al.* (1987a)], [Allen *et. al.* (1987b)], [Talreja (1984a, 1984b)], [Talreja (1985)], [Talreja *et. al.* (1992)].

Excluído: e

Excluído: m

Para superar as deficiências acima mostradas nas teorias de dano, Tay e Lim (1996) propuseram calcular pelo Método dos Elementos Finitos as variáveis internas de estado da Teoria da Mecânica do Dano em Meios Contínuos sugerido por Allen [Allen *et. al.* (1987a)], [Allen *et. al.* (1987b)]. Sua aproximação não necessita de experimentos para se identificar as variáveis internas de estado. A aproximação proposta por Lim e Tay (1996) tem a capacidade de descrever danos por trincas transversais com carregamentos nos modos I e III e permite predizer dano em laminados compostos empilhados genericamente levando em consideração alterações de restrição em lâminas com fibras em direções genéricas.

As alterações de restrição são analisadas em termos de fatores de restrição tais como a espessura da lâmina, a orientação e as variações da seqüência de empilhamento. O trabalho inicial de Tay e Lim, citado anteriormente, conduz à evolução do dano por trincas transversais somente em laminados com fibras cruzadas. Para uma completa análise do dano e sua evolução em laminados compostos em geral, muitas pesquisas deverão ser empreendidas.

Utilizando os conceitos estabelecidos por Allen (1992), Tay (1993) desenvolveu um modelo que permite determinar a perda de rigidez de um laminado utilizando um critério de evolução do dano baseado na energia livre de deformação. O tamanho e a distribuição do dano subcrítico nos laminados permitem a seleção de um elemento de volume representativo do material que é menor, em escala, do que a estrutura, mas grande o suficiente para caracterizar o dano. Esse dano é então quantificado através das variáveis internas de estado, que descrevem os atributos físicos de cada modo de falha. O efeito resultante do dano distribuído é então refletido nas equações constitutivas através destas variáveis. Essa metodologia no cálculo da evolução do dano foi adotada de modo análogo por Allen e Talreja [Allen *et. al.* (1987a)], [Allen *et. al.* (1987b)], [Allen *et. al.* (1988)], [Talreja (1984a, 1984b)], [Talreja (1985)], [Talreja *et. al.* (1990)] e [Talreja *et. al.* (1992)]. Uma análise variacional foi utilizada por Nair (1989) valendo-se da análise de falha da mecânica da fratura baseado no modelo variacional de Hashin (1987).

Excluído: e
Excluído: 1992 e
Excluído: eram

Já o trabalho de Lo *et al.* (1993) fornece informações sobre o histórico da progressão dos eventos de falhas. A análise segue em três fases: relações constitutivas não-lineares são derivadas pela mecânica do dano em meios contínuos, um algoritmo é proposto contendo estas relações constitutivas para análise da estrutura e um critério de falha indica a falha catastrófica da estrutura. Lo et al. empregaram variáveis internas para trincas transversais na matriz e para delaminações. Allen (1994), posteriormente, apresentou um trabalho similar.

Excluído: a história
Excluído: ou

A redução de rigidez de laminados [θ°/90°] simétricos foi analisada por Joffe (1999) como sendo função da densidade de trincas transversais na matriz. A evolução do dano devido ao aumento de deformação foi determinada usando a simulação de Monte Carlo. A determinação da distribuição das tensões na lâmina média é feita tomando-se o modelo de cisalhamento retardado juntamente com o modelo de Hashin. Para tanto, o laminado é dividido em pequenos elementos de acordo com a distribuição de Weibull.

2.4 Outros Enfoques e Direcionamentos sobre o Dano

Muitos estudos estão sendo direcionados para a detecção do dano por métodos não-destrutivos, na busca de parâmetros dinâmicos que identifiquem o dano. Alguns autores adotam autovalores para se determinar a troca da freqüência natural de sistemas danificados. Outros ainda analisaram os autovetores para verificarem as mudanças nos modos de vibrar das estruturas, conforme descrito por Araújo dos Santos *et al.* (2000) e Araújo *et al.* (2000) que utilizam um modelo numérico baseado no método dos elementos finitos com campo de deslocamentos de ordem superior para identificação de seis módulos elásticos do material danificado.

Alguns autores escolheram um método de homogeneização para predizer a resposta constitutiva de lâminas em materiais compostos, como Carrere *et al.* (2002), que apresentam duas soluções multi-escala: uma aproximação seqüencial e uma aproximação integrada. A primeira é composta de um modelo macroscópico clássico que é deduzido das passagens da multi-escala. Tais modelos contêm algumas características microscópicas embora eles sejam escritos como equações puramente fenomenológicas na escala macroscópica. O compósito é, então, descrito na escala estrutural como uma média homogênea. Esta primeira solução apresenta baixo custo computacional, mas as quantidades locais são tratadas na média. A segunda resolve as leis constitutivas na escala local. Isto é possível partindo-se de um modelo analítico que dá as relações entre a escala macroscópica e a microscópica. Também é possível utilizar uma aproximação multinível por elementos finitos. Esta segunda solução oferece uma descrição precisa das quantidades locais, mas requer um alto custo computacional.

Novos avanços caminham para implementação de uma zona coesiva que é empregada para predizer a formação de novas superfícies dentro de corpos. O comportamento não-linear e sem carregamento da zona coesiva resultará na criação de fronteiras internas onde energia suficiente é fornecida para a extensão da trinca.

Esta habilidade de se introduzir ductilidade na ponta da trinca demonstra um grande avanço em processos de solução para evolução do dano [Allen e Searcy (2001)]. Phillips *et. al.* (2000) propuseram um estudo da evolução da degradação na interface, de trincas na matriz e de delaminações onde o modelo proposto, devido à natureza complicada de muitas trincas, envolve uma metodologia de multi-escala: micro-meso-local-global. A degradação da interface na micro-escala é homogeneizada para produzir um modelo de zona coesiva, trincas na matriz na "meso-escala" para desenvolver as equações constitutivas dependentes do dano, delaminações na escala local e a resposta da placa laminada na escala global através de processos de homogeneização.

Excluído: a

Excluído: realização

Resistência de materiais compostos com fibras em estado de tensão e compressão, campos residuais, transformações da deformação devido à mistura fibra/matriz, deformações térmicas, plasticidade, viscoplasticidade durante o processo de carregamento termomecânico e envolvendo dano por fadiga, análise do início do dano e seu crescimento, estruturas laminadas compostas sob carregamentos complexos e em ambientes severos são alguns assuntos que estão sendo cada vez mais aprofundados e incorporados em estudos recentes [Dvorak (2000)]. Diferenças dos comportamentos à compressão e à tração incluindo dano viscoso e efeitos plásticos (condições associadas a problemas de impacto, onde a fratura da fibra é o modo de falha dominante) foram analisados no trabalho de Edlund e Volgers (2003). Nesse estudo a plasticidade na matriz do material é modelada e utilizam-se três variáveis de dano (tensão na fibra, tensão transversal e de cisalhamento) aplicadas ao método dos elementos finitos.

Muitos outros trabalhos envolvendo fratura da matriz, da fibra e delaminações podem ser encontrados na literatura atual. Estudos sobre delaminações [Bolotin (1996)], [Zou et al. (2002)], impacto [de Freitas et al. (2000)], crescimento de trincas [Vejen e Pyrz (2002)], [Dutta e Kushwaha (2004)] também são tratados amplamente pela Mecânica da Fratura. Apesar de grandes esforços para identificar e caracterizar estados de danificação das estruturas, muitos estudos ainda são indispensáveis para se aproximar todas as formas de dano aos encontrados na realidade. Com esse enfoque, este trabalho visa melhorar a compreensão de laminados compostos danificados por trincas transversais na matriz através da Teoria do Dano em Meios Contínuos.

3. Materiais Compostos

3.1 Introdução

Uma razoável familiaridade com os aspectos qualitativos referentes aos materiais compostos, tais como seus constituintes, tipos, lâminas e laminados compostos, suas relações tensão-deformação, são de fundamental importância para o entendimento dos demais capítulos. Portanto, este capítulo visa apresentar os materiais compostos, além de demonstrar algumas hipóteses e simplificações que auxiliam o desenvolvimento deste trabalho.

Excluído: é

Compreende-se por material composto um conjunto de dois ou mais materiais diferentes, combinados em escala macroscópica, para funcionarem como uma unidade, visando obter um conjunto de propriedades que nenhum dos componentes individualmente apresenta [Mendonça (2005)].

Três aspectos fundamentais precisam ser salientados na definição acima, conforme se verá a seguir.

Primeiro, a combinação dos materiais, sendo em escala macroscópica, torna o meio heterogêneo. Portanto, uma liga metálica não pode ser considerada um composto, uma vez que os metais que a constituem são misturados a nível microscópico, resultando num material homogêneo macroscopicamente.

Segundo, o trabalho solidário entre os materiais, numa análise macro-mecânica, não considera a interação entre os diversos componentes de uma lâmina. Assim, esforços de coação interna, tais como os provenientes de deformações térmicas distintas, podem ser desprezados. Se, em termos práticos, essa simplificação é adotada com freqüência, em outras situações, como nos casos de danos, o comportamento microscópico passa a ser fundamental. Esta característica significa, também, a proteção de um material pelo outro contra agentes externos, tais como corrosão, manipulação indevida, etc.

Excluído: Solidariedade

Por terceiro, como ilustrado na Figura 3-1, a qualidade superior do material resultante pode ser observada em algumas das seguintes propriedades:

- Aumento da resistência a esforços externos, à corrosão, à fadiga, à abrasão, e/ou aos efeitos da temperatura;
- Redução do peso próprio e da densidade;
- Aumento da vida útil;
- Elevação da rigidez;
- Melhoria do desempenho térmico e acústico;
- Redução dos custos, e;
- Facilidade de composição.

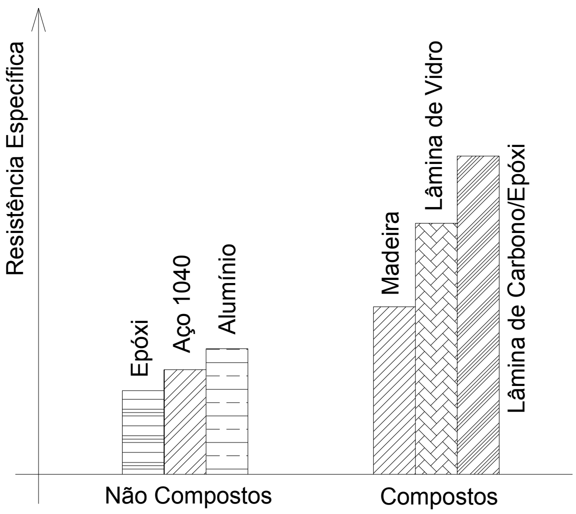


Figura 3-1 - Gráfico comparativo qualitativo sobre resistência específica de alguns materiais [Machado (2001)]

Um compósito pode ser dividido em três componentes fundamentais: reforços, matriz e interface [Hull e Clyne (1996)]. Os reforços são elementos descontínuos, de grande resistência e rigidez e baixo peso. Essencialmente, são os responsáveis pela capacidade resistente das peças de materiais compostos, muito embora não sejam úteis se empregados de forma isolada, pois são muito esbeltos e pequenos e, portanto, não apresentam condições de utilização. Para que os reforços possam ser

Excluído: r

adotados, é necessário que estejam mergulhados numa resina ou matriz que tem por finalidade tornar o meio contínuo, mas devem também ser de baixo peso. A matriz também tem por finalidade a proteção dos reforços ou armações. O trabalho solidário entre a matriz e o reforço se dá ao nível da interface entre os dois. Para que a combinação seja adequada, espera-se uma perfeita adesão entre os materiais, com resistência suficiente na interface e em cada componente.

Excluído: A solidariedade

As propriedades de um compósito dependem de:

- Propriedades das fibras ou dos reforços;
- Propriedades da resina ou matriz;
- Proporção de fibras na resina;
- Geometria e orientação das fibras no composto.

Sendo as fibras os materiais mais resistentes, é de se esperar que quanto maior a presença destas num compósito, melhores sejam as propriedades resultantes. Na prática, não é bem assim. Além de influenciar diretamente no custo final do produto, as fibras dependem do meio contínuo garantido pela resina para poderem absorver as cargas atuantes. Assim, em aplicações na indústria naval, é comum uma proporção de 30% a 40% de fibras por volume de um compósito. Em modernas aplicações da indústria aeronáutica, essa proporção pode chegar a 70%.

A Figura 3-2 mostra os tipos de compósitos pela disposição das fibras. Compósitos laminados com fibras contínuas (da Figura 3.2-a), são constituídos por lâminas com fibras contínuas dispostas na matriz, que são orientadas em direções determinadas e sobrepostas para formar um laminado. Embora este tipo de laminado seja usado extensivamente, a delaminação ou separação das lâminas é ainda um grande problema a ser pesquisado devido à resistência interlaminar ser dominada pela matriz. Compósitos de fibras trançadas (da Figura 3.2-b) não têm lâminas distintas e não são suscetíveis a delaminação, mas sua resistência e rigidez são sacrificadas devido ao fato de que as fibras não são tão bem direcionadas como no composto com fibras contínuas. Compósitos com fibras em pedaço podem ter pequenas fibras randomicamente dispersas na matriz (da Figura 3.2-c). Estes compostos são usados extensivamente em aplicações de alto volume devido ao baixo custo de fabricação, mas suas propriedades mecânicas são consideravelmente pobres comparadas com o composto de fibras contínuas. Finalmente, os compósitos híbridos podem copor-se de fibras em pedaço e contínuas (da Figura 3.2-d) ou tipos de fibras misturadas tais como vidro/grafite.

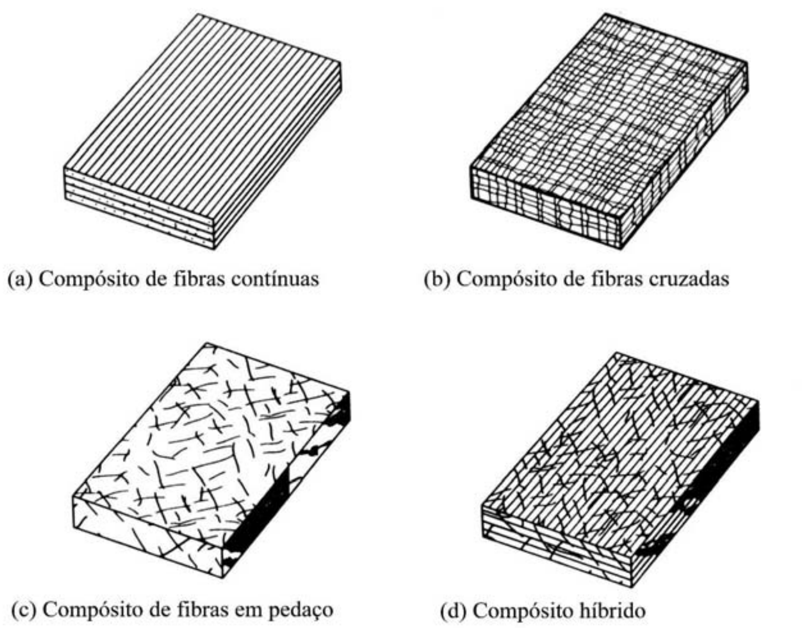


Figura 3-2 - Tipos de compósitos reforçados por fibras [Gibson (1994)]

3.2 Relações Tensão-Deformação de uma Lâmina

Um laminado típico é constituído por várias lâminas, freqüentemente idênticas, variando suas orientações para melhor atender aos requisitos de projeto e fabricação. As propriedades macroscópicas do laminado, como resistência e comportamento elástico, dependem, portanto, das propriedades das lâminas individuais que o compõem. Ou seja, as relações tensão-deformação para uma lâmina unidirecional formam a base para a análise não só para o laminado composto com fibras contínuas, mas, também, para os demais já citados.

Um material composto é obviamente heterogêneo ao nível do material constituinte, com propriedades que se alteram ponto a ponto. Por exemplo, as relações tensão-deformação são diferentes para um ponto no material da fibra assim como para outro no material da matriz. Contudo, as relações tensão-deformação de uma lâmina tratadas de forma "macromecânica" podem ser expressas em termos de tensões e deformações médias e propriedades efetivas de um material homogêneo equivalente e relacionado pelo seu "módulo efetivo".

Excluído: possivelmente

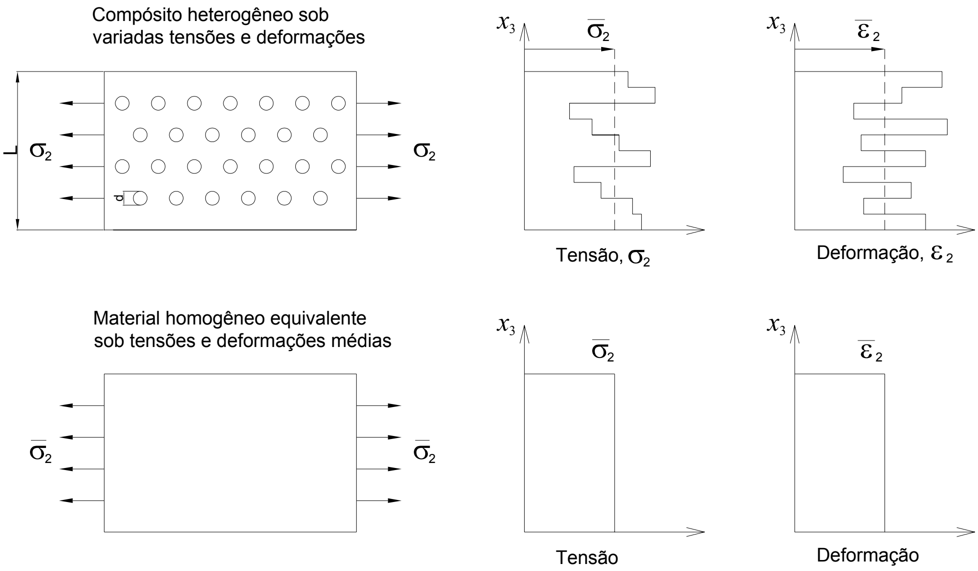


Figura 3-3 - Módulo efetivo de um material homogêneo equivalente [Gibson (1994)]

Como mostrado na Figura 3-3, se a escala de heterogeneidade em um material pode ser caracterizada por uma dimensão de comprimento, *d*, então a dimensão de comprimento, *L*, onde a média macromecânica acontece, deve ser muito maior do que *d*, se as médias de tensões e deformações são relacionadas pelo módulo efetivo de um material homogêneo equivalente. Definindo-se tensões médias, $\bar{\sigma}_i$, e deformações médias, $\bar{\varepsilon}_i$, (i = 1, 2,..., 6) para serem rateadas sobre um volume V, que é caracterizado pela dimensão L, então:

$$\overline{\sigma}_i = \int_V \sigma_i dV / V \qquad (3.1)$$

Formatado: Fonte: 10 pt, Rebaixado por 9 pt

$$\overline{\varepsilon}_i = \int_V \varepsilon_i dV / V \qquad (3.2)$$

Formatado: Fonte: 10 pt, Rebaixado por 9 pt

onde i = 1, 2,..., 6; σ_i e ε_i são os componentes do tensor tensão e tensor deformação em um ponto, respectivamente.

Excluído: ões

Excluído: ões

Se as tensões e deformações médias são usadas no lugar das tensões e deformações em um ponto, a Lei de Hooke generalizada torna-se:

$$\overline{\sigma}_i = C_{ij} \overline{\varepsilon}_i \qquad (3.3)$$

e o módulo elástico C_{ij} então torna-se o "módulo efetivo" de um material homogêneo equivalente de volume *V*.

De acordo com a Mecânica do Contínuo, o estado de tensões num ponto pode ser expresso por nove componentes σ_{ij}, onde i,j = 1, 2, 3., visto na Figura 3-4.

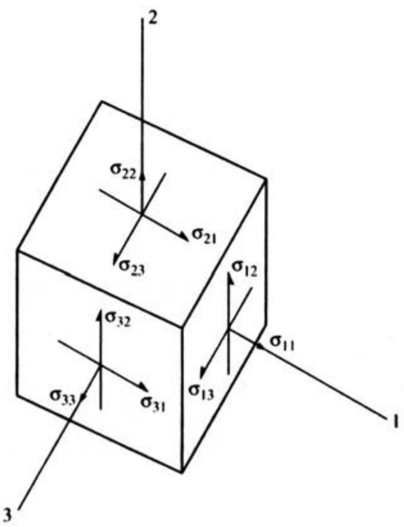


Figura 3-4 – Componentes de tensão num ponto

Para cada componente de tensão σ_{ij} , existe um componente associado de deformação ε_{ij}. Para materiais elásticos, as relações tensão-deformação em um ponto no material podem ser representadas da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} & C_{1132} & C_{1113} & C_{1121} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} & C_{2232} & C_{2213} & C_{2221} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} & C_{3332} & C_{3313} & C_{3321} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{2111} & C_{2122} & C_{2133} & C_{2123} & C_{2131} & C_{2112} & C_{2132} & C_{2113} & C_{2121} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} \\ \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{32} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} \end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

sendo que [C] é a matriz das relações constitutivas e está totalmente preenchida pelas constantes elásticas (tendo 81 componentes). Na prática, não existe a necessidade de se quantificar as 81 constantes elásticas do tensor C_{ijkl} porque várias condições de simetria simplificam essa matriz consideravelmente.

Da condição de equilíbrio, sabe-se que o tensor de tensões é simétrico, isto é, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ o que reduz o número de variáveis independentes para apenas trinta e seis (36 componentes não-nulas na matriz de constantes elásticas).

A Lei de Hooke generalizada estabelece uma relação entre tensões e deformações que pode ser expressa por:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} \tag{3.5}$$

onde $\{\sigma\}$é o vetor tensão, $\{\varepsilon\}$ é o vetor deformação e $[C]$ é a matriz (6x6, 36 componentes) das constantes elásticas (também conhecida como matriz de rigidez).

A relação anterior pode ser descrita de forma inversa sendo $[S]$ a matriz de flexibilidade ("compliance matrix") e $\left[S\right]=\left[C\right]^{-1}$, ou seja,

$$\{\varepsilon\}=\left[S\right]\{\sigma\} \tag{3.6}$$

Pode-se demonstrar (através das funções de densidade da energia de deformação) que a matriz $\left[C\right]$ é simétrica e apresenta algumas características particulares. Para materiais anisotrópicos, dos 36 coeficientes da matriz, apenas 21 são independentes e a matriz toma a seguinte forma:

$$\left[C\right]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & SIM & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

Se existem dois planos ortogonais de simetria de propriedades do material, existirá necessariamente simetria relativa ao terceiro plano mutuamente ortogonal aos outros dois. Um material com essas características de tríplice simetria é dito ortotrópico. Lâminas de material composto reforçado por fibras de alta resistência apresentam essa característica, como visto na Figura 3.5.

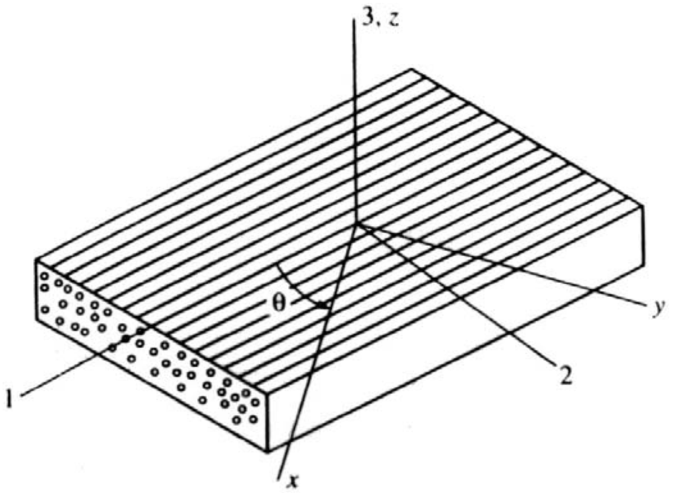


Figura 3-5 – Lâmina de material composto reforçado por fibras

Quando essa característica acontece, a matriz de relações constitutivas se simplifica, apresentando o aspecto indicado a seguir, com apenas nove termos independentes em doze componentes. Esses materiais também são chamados de *especialmente ortotrópicos*, onde os eixos principais do material estão associados com as direções do reforço.

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & SIM & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \qquad (3.8)$$

No caso de laminados, isto é, estrutura de lâminas empilhadas, observa-se que as propriedades do material são praticamente as mesmas em quaisquer direções perpendiculares às fibras. Tem-se, nestes casos, uma situação particular de ortotropia, e os materiais que apresentam estas características são conhecidos como

Excluído: estruturas de lâminas empilhadas, observa *transversalmente isotrópicos*. Para tais materiais, a matriz rigidez se simplifica, reduzindo o número de variáveis independentes a cinco dos 12 componentes não-nulos, na forma:

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23}) & 0 & 0 \\ & SIM & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \qquad (3.9)$$

A situação mais simples é a dos materiais isotrópicos, para os quais qualquer plano é um plano de simetria do material. Nestes casos, o número de variáveis independentes se reduz a dois dos doze termos não-nulos da matriz de rigidez, tornando-se da seguinte forma:

$$[C]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 & 0 \\ & SIM & & & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}) \end{bmatrix} \qquad (3.10)$$

Sejam as seguintes constantes de engenharia:

- E_1, E_2, E_3 - módulos de elasticidade longitudinal nas direções 1, 2 e 3, respectivamente (módulos de Young);
- G_{23}, G_{13}, G_{12} - módulos de elasticidade transversais relativos aos planos

Formatado: Fonte: 10 pt, Rebaixado por 6 pt

Excluído: E_1, E_2, E_3

Excluído: G_{23}, G_{31}, G_{12}

Excluído: transversal relativos

2-3, 3-1, 1-2, respectivamente (módulos de cisalhamento);

- $\upsilon_{23}, \upsilon_{13}, \upsilon_{12}$ - coeficientes de Poisson relativos aos planos 2-3, 3-1, 1-2, respectivamente;

Excluído: ν_{23}, ν_{31}, ν_{12}

Os coeficientes de Poisson, υ_{ij}, são decorrentes das relações entre as deformações transversais e longitudinais nas direções j e i, respectivamente, quando são aplicadas tensões na direção i, isto é:

$$\upsilon_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \text{ com } \sigma_i \neq 0 \text{ e } \sigma_j = 0 \text{, } i \neq j \tag{3.11}$$

Através das constantes de engenharia listadas é possível escrever a matriz das relações constitutivas e, de modo inverso, a matriz de flexibilidade. Desse modo, para o caso tridimensional de tensões tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\upsilon_{21}/E_2 & -\upsilon_{31}/E_3 & & & \\ -\upsilon_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\upsilon_{32}/E_3 & & & \\ -\upsilon_{13}/E_1 & -\upsilon_{23}/E_2 & 1/E_3 & & & \\ & & & 1/G_{23} & & \\ & & & & 1/G_{31} & \\ & & & & & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.12}$$

Formatado: Fonte: 10 pt, Rebaixado por 52 pt

Para materiais ortotrópicos e transversalmente isotrópicos, tem-se $G_{13} = G_{12}$, $E_2 = E_3$, $\upsilon_{21} = \upsilon_{31}$, $\upsilon_{23} = \upsilon_{32}$ e as seguintes relações também são válidas:

$$\frac{\upsilon_{ij}}{E_i} = \frac{\upsilon_{ji}}{E_j} \qquad i, j = 1,2,3 \tag{3.13}$$

Formatado: Fonte: 10 pt, Rebaixado por 16 pt

$$G_{23} = \frac{E_2}{2(1+\upsilon_{32})} \tag{3.14}$$

Formatado: Fonte: 10 pt, Rebaixado por 15 pt

Analogamente, para materiais isotrópicos, $G_{13} = G_{12} = G_{23} = G$; $E_1 = E_2 = E_3 = E$; $\upsilon_{21} = \upsilon_{31} = \upsilon_{23} = \upsilon_{32} = \upsilon$. Neste caso:

Formatado: Fonte: 10 pt, Rebaixado por 6 pt

Excluído: $G_{13} = G_{12} = G_{23} = G$

Excluído: $E_1 = E_2 = E_3 = E$

Excluído: $\nu_{21} = \nu_{31} = \nu_{23} = \nu_{32} = \nu$

$$G = \frac{E}{2(1+\upsilon)} \tag{3.15}$$

Formatado: Fonte: 10 pt, Rebaixado por 14 pt

3.2.1 Lâminas Especialmente Ortotrópicas

É muito comum num projeto de peças laminadas, que cada lâmina seja tratada como submetida a um estado plano de tensões. Neste caso, as relações tensão-deformação apresentadas anteriormente podem ser simplificadas novamente resultando em:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{21} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \tag{3.16}$$

onde:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1}$$

$$S_{22} = \frac{1}{E_2}$$

$$S_{12} = S_{21} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} = -\frac{\nu_{12}}{E_1}$$

$$S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

(3.17)

Logo, as tensões podem ser determinadas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} \tag{3.18}$$

sendo que Q_{ij} são as componentes da matriz de rigidez da lâmina. Em termos das constantes de engenharia, as componentes podem ser escritas como:

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{12} = \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = Q_{21}$$

$$Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{66} = \frac{1}{S_{66}} = G_{12}$$

(3.19)

Neste caso, a caracterização experimental de lâminas ortotrópicas envolve a medida de quatro constantes de engenharia independentes, tais como, E_1, E_2, G_{12} e υ_{12}.

3.2.2 Relações Constitutivas da Lâmina num Sistema de Referências Global

As expressões apresentadas anteriormente foram elaboradas para o caso em que o eixo X_1 está orientado na mesma direção que as fibras. Entretanto, é necessário que as propriedades locais de uma lâmina sejam transformadas para o sistema global. Assim, torna-se importante saber qual o efeito em termos de tensões e de deformações numa direção qualquer orientada segundo os eixos X e Y, tal como indicado na Figura 3.5, rotacionados de um ângulo θ em relação aos eixos principais.

Por meio de rotação do vetor tensão $\{\sigma\}$, obtém-se as tensões para uma direção genérica, considerando-se c = cosθ e s = senθ:

$$\{\sigma\}_{x-y} = [T]^{-1}\{\sigma\}_{X1-X2} \tag{3.20}$$

ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & -2cs \\ s^2 & c^2 & 2cs \\ cs & -cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [T]^{-1} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{Bmatrix} \tag{3.21}$$

onde [T] é a matriz transformação definida como:

$$[T] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2cs \\ s^2 & c^2 & -2cs \\ -cs & cs & (c^2 - s^2) \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

A transformação inversa da relação (3.21) permite que se escreva:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.23}$$

O vetor de deformações se transforma de modo análogo a:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12}/2 \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \tag{3.24}$$

Substituindo-se a equação (3.24) na equação (3.18) e, substituindo-se o resultado na equação (3.21), encontra-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = [T]^{-1}[Q][T] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy}/2 \end{Bmatrix} \tag{3.25}$$

onde [Q] é a matriz de rigidez ou das propriedades elásticas. Desenvolvendo a expressão, chega-se a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.26}$$

onde $\overline{Q}_{ij}$ são as componentes da matriz de rigidez transformada da lâmina, que possuem os seguintes valores:

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + Q_{22}\,\mathrm{sen}^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta \\
\overline{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}(\cos^4\theta + \mathrm{sen}^4\theta) \\
\overline{Q}_{22} &= Q_{11}\,\mathrm{sen}^4\theta + Q_{22}\cos^4\theta + 2(Q_{12} + 2Q_{66})\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta \\
\overline{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\theta \\
\overline{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos\theta\,\mathrm{sen}^3\theta - (Q_{22} - Q_{12} - 2Q_{66})\cos^3\theta\,\mathrm{sen}\,\theta \\
\overline{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\theta + Q_{66}(\mathrm{sen}^4\theta + \cos^4\theta)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

3.3 Análise de um Laminado

3.3.1 Caracterização de um Laminado

Uma das mais freqüentes aplicações de materiais compostos ocorre no caso de placas laminadas. Uma placa laminada, ou simplesmente laminado, nada mais é do que a sobreposição de diversas lâminas ou camadas individuais, associadas entre si nas interfaces através de uma película adesiva. As várias combinações de orientações, espessuras e materiais de cada lâmina que compõem um laminado fazem com que o comportamento deste possua características diferentes das observadas em cada lâmina individualmente. O caso mais freqüente é o empilhamento de lâminas ortotrópicas, com malha unidirecional, de forma ordenada e seqüencial. A Figura 3.6 ilustra o caso de uma placa laminada com as fibras de cada lâmina orientadas segundo uma direção genérica. Num laminado pode existir qualquer número de lâminas. A seqüência deve ser tal que as exigências de projeto sejam atendidas. A orientação das fibras de cada lâmina pode ser qualquer, devendo seguir as previstas em projeto e as necessidades estruturais da peça.

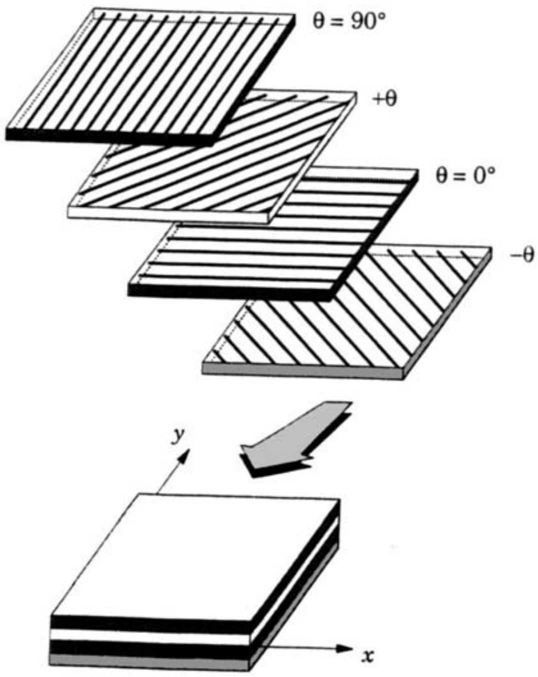


Figura 3-6 – Placa laminada com fibras em direção quaisquer [Reddy (1997)]

É interessante observar que, apesar de cada lâmina ser considerada como um meio heterogêneo, com suas características variando de ponto a ponto, as propriedades resultantes do empilhamento são determinadas como se o material fosse homogêneo. Nesse sentido, o laminado pode apresentar um comportamento mecânico que reflete o acoplamento entre as propriedades de flexão e de membrana, fato este que não é encontrado em materiais verdadeiramente homogêneos e isotrópicos.

Os laminados são referenciados pelas orientações das fibras no empilhamento. A Figura 3.7 ilustra alguns exemplos. Os exemplos ilustrados são para laminados consistindo de camadas de mesmo material. Para laminados híbridos, que contêm lâminas de diferentes materiais, subscrições adicionais para as camadas podem ser utilizadas para identificar o material das lâminas.

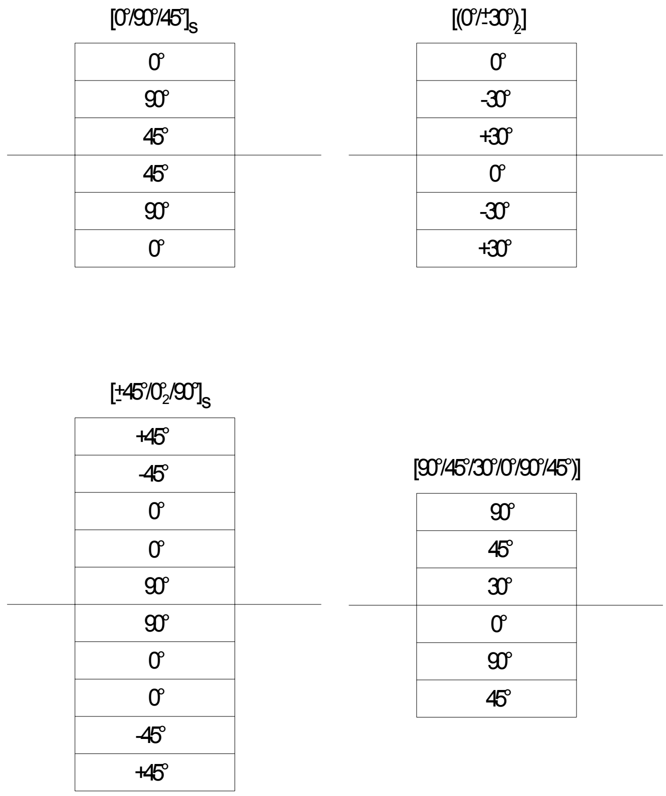


Figura 3-7 – Exemplos de empilhamento em laminados

3.3.2 Comportamento de um Laminado

Uma das áreas de estudo dos materiais compostos na Mecânica Estrutural se concentra, atualmente, no desenvolvimento de modelos numéricos que representem, adequadamente, os elementos estruturais feitos por esses materiais, tais como placas e cascas laminadas, peças com enrijecedores, com aberturas, etc. Além de representarem o comportamento desses elementos às mais diversas solicitações – flexão, cisalhamento, flambagem, efeitos térmicos, delaminações, etc – os modelos devem ser, dentro do possível, simples e precisos.

Não é difícil perceber que os materiais compostos têm um comportamento estrutural muito mais complexo que os homogêneos. A experiência adquirida no trato com materiais homogêneos para resolver os problemas que envolvam materiais compostos anisotrópicos revela-se, muitas vezes, insuficiente e enganosa. É por esse motivo que existem tantas teorias e modelos distintos para análise de tais materiais, e nenhum deles é completo o bastante para resolver todas as situações práticas.

Existem diversas teorias para descrever o comportamento de uma placa laminada, apresentadas em várias referências [Machado (1992)], [Reddy (1997)], [Mendonça (2005)]. Essencialmente, essas teorias podem ser classificadas por *Teorias de Camada Simples Equivalente ou Teorias do Tipo Lâmina Discreta.*

- Teorias de Camada Simples Equivalente: o laminado é tratado com se fosse uma única placa homogênea, cuja propriedades são determinadas por integração ao longo da espessura, a partir das contribuições individuais de cada lâmina. Admite-se que cada lâmina seja elástica e esteja submetida a um estado plano de tensões. A placa resultante assim obtida é, em geral, anisotrópica. Os custos da análise são bastante reduzidos, sendo, por isso, a opção da grande maioria dos pesquisadores quando apenas os resultados globais são importantes (como deslocamentos, rotações, tensões normais e modos de vibração).

  Excluído: s

  Excluído: ,

  As Teorias de Camada Simples consideram a placa como uma estrutura bidimensional, adotando formulações semelhantes às das teorias convencionais de placas homogêneas. O modelo é, dessa forma, mais simples do que os que se baseiam em teorias tridimensionais. Em contrapartida, deve-se atentar para alguns inconvenientes que podem surgir, tais como, a representação incorreta dos esforços nos cantos das placas.

  Na maioria das Teorias de Camadas Simples Equivalentes admite-se que são contínuos os deslocamentos e suas derivadas (as deformações) ao longo da espessura do laminado. No entanto, como as propriedades variam de uma camada para outra, as tensões resultantes, quando calculadas por meio das equações constitutivas, são descontinuas nas interfaces.

- Teorias do Tipo Lâmina Discreta: considera-se, nestes modelos, que o laminado seja constituído de lâminas individuais empilhadas e discretas, não sendo mais tratado como uma única camada, como nos modelos de camada simples equivalente. Os efeitos das deformações cisalhantes são considerados e o ângulo de rotação da normal é considerado constante dentro de cada lâmina. O número de incógnitas do problema é, portanto, proporcional à quantidade de lâminas. Os deslocamentos são contínuos ao longo da espessura, mas suas derivadas não o são. Isto resulta em deformações transversais descontínuas em cada interface, e tensões contínuas, mesmo quando calculadas pelas equações constitutivas. A abordagem nesse tipo de formulação é essencialmente tridimensional e os custos do processo são muito maiores do que nas de camada simples. A compensação é que os resultados interlaminares são muito mais precisos.

Quando as variáveis de interesse do problema são as globais, como por exemplo, deslocamentos, reações de apoio, modos de vibração, etc., as teorias de camada simples são muito adequadas e de baixo custo. Possuem a restrição de não representarem perfeitamente as tensões interlaminares, que são fundamentais nas estruturas laminadas. Porém, para contornar tal inconveniente, exigem um cálculo adicional baseado nas equações de equilíbrio da elasticidade 3-D. Ainda assim, quando forem muito importantes os efeitos locais, como tensões em regiões de descontinuidades geométricas, de força ou de material, outro procedimento deve ser adotado.

Excluído: T

Excluído: C

Excluído: S

O presente trabalho se restringirá ao uso de uma das teorias de camada simples, nas quais o campo de deslocamentos é expandido a partir dos deslocamentos de translação nas direções dos eixos X_1, X_2 e X_3, acrescidos das influências das rotações da superfície normal ao plano médio.

Excluído: T

Excluído: C

Excluído: S

A Figura 3.8 ilustra a equivalência entre uma placa laminada com espessura h (b) constituída de n lâminas individuais (a) e o modelo de camada simples com espessura h_{eq} = h (c).

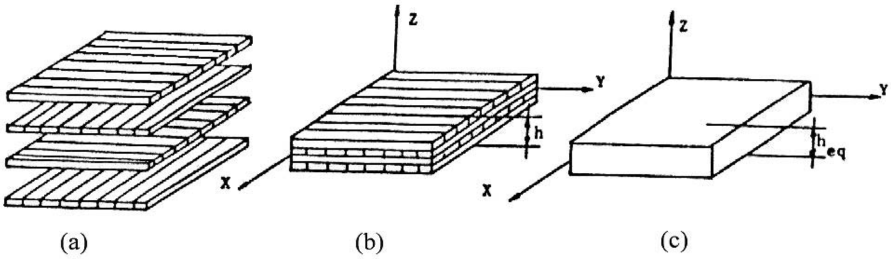


Figura 3-8 – Modelo de camada simples equivalente para placa laminada [Machado (1992)]

Conforme a expansão do campo de deslocamentos, as Teorias de Camadas Simples podem ainda ser classificadas em “Teorias de Primeira Ordem” e “Teorias de Ordem Superior”. As de Primeira Ordem são aquelas que as expansões do campo de deslocamentos são polinômios de primeira ordem. De modo análogo, as de Ordem Superior envolvem expansões polinomiais de terceira, quinta, ou até de ordens maiores.

O aumento da ordem do polinômio acarreta severos custos à análise, de modo que, sempre que possível, deve ser evitado. As teorias de primeira ordem resolvem satisfatoriamente boa parte dos problemas de placas laminadas, especialmente para os casos de laminados simétricos. Nos casos de laminados não simétricos, as Teorias de Ordem Superior são mais apropriadas para avaliar a distribuição de tensões ao longo da espessura do laminado.

Excluído: T
Excluído: P
Excluído: O

3.3.3 Conceitos e Convenções Adotadas

Para efeito deste trabalho serão consideradas as seguintes hipóteses básicas:

A. Um laminado é constituído por um número arbitrário de lâminas de orientações quaisquer. A adesão entre as lâminas é perfeita, não havendo escorregamento relativo entre as mesmas.
B. As películas adesivas são extremamente finas, de modo a não permitir o surgimento de deformações cisalhantes ao longo da sua espessura. Desse

modo, seu efeito pode ser desconsiderado.

C. Uma placa é uma estrutura tridimensional plana, com duas dimensões apresentando ordem de grandeza maior do que a terceira, no caso, a espessura.

D. Admite-se que o comportamento global dessa placa possa ser representado apenas pelo comportamento de sua superfície média, que também é plana.

E. Os deslocamentos nas direções dos eixos de referência X_1, X_2 e X_3, serão indicados por u_i, i = 1, 2, 3, respectivamente, ou seja, $u_1 = u$; $u_2 = v$ e $u_3 = w$.

F. As rotações da normal em relação aos eixos X_1 e X_2, que definem o plano médio da placa, serão representadas por θ_1 e θ_2, ou seja, $\theta_1 = \theta_x$ e $\theta_2 = \theta_y$.

G. Os eixos principais de simetria do material de cada lâmina não precisam coincidir com o eixos de referência adotados, podendo formar entre eles um certo ângulo α qualquer.

H. Admite-se a hipótese de pequenos deslocamentos, o que significa que, quando comparados com a espessura h da placa, os deslocamentos na superfície de referência, u, v e w, serão muito pequenos.

I. Os deslocamentos ao longo do contorno, se existirem, serão contínuos e não produzem deslizamento relativo entre as lâminas.

J. Cada lâmina obedecerá à Lei de Hooke.

K. Não existem tensões cisalhantes σ_{xz} e σ_{yz} nas superfícies livres da placa, quando $z = \pm h/2$.

L. Serão consideradas apenas as Teorias de Primeira Ordem.

M. Consideram-se as deformações transversais ε_{xz} e ε_{yz}, o que significa admitir que as seções originalmente planas antes da deformação permanecem planas após a deformação, mas não necessariamente normais à superfície média da placa.

N. Emprega-se o modelo de placa de Reissner/Mindlin, no qual são corrigidos os efeitos do cisalhamento por meio de coeficientes apropriados para levar em consideração a distribuição de tensões cisalhantes não uniformes ao longo da seção. No modelo de Mindlin (1951), admite-se o valor de $\pi^2/12$, enquanto que no de Reissner (1947), a proposta é o valor de 5/6.

O. As resultantes de tensão ao longo da espessura da placa seguem a convenção de sinais indicada na Figura 3.9.

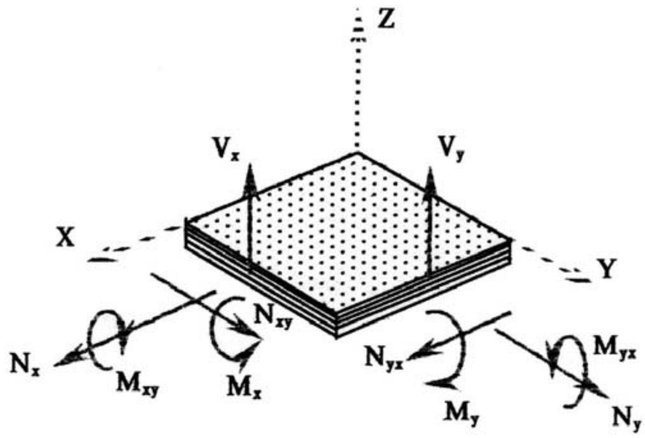


Figura 3-9 – Convenção de sinais [Machado (2001)]

Segundo o modelo de placa adotado, os deslocamentos (u, v, w) = (u_1, u_2, u_3) num ponto P genérico, de coordenadas (x, y, z), pode ser expresso por:

$$u_i(x,y,z) = u_i^0(x,y) + z \cdot \theta_i^0(x,y) \tag{3.28}$$

sendo que:

$u_i^0(x,y)$ = deslocamentos (u, v, w) da superfície média;

$\theta_i^0(x,y)$ = rotações da seção transversal em relação a seção normal a superfície média, sendo $\theta_1^0 = \theta_x^0$; $\theta_2^0 = \theta_y^0$ e $\theta_3^0 = 0$;

z = coordenada medida ao longo da espessura da placa.

As relações deslocamentos-deformações em um ponto qualquer de coordenadas (x, y, z), nestas circunstâncias, podem ser expressas por:

$$\varepsilon_x(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y(x,y,z) = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy}(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz}(x,y,z) = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\gamma_{xz}(x,y,z) = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

(3.29)

Levando-se em consideração o campo de deslocamentos expresso em (3.28) e as relações apresentadas em (3.29), é possível deduzir:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{3.30}$$

ou seja:

$$\begin{Bmatrix} Deformações \\ na \\ placa \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Deformações \\ na \\ Superfície \\ Média \end{Bmatrix} + z \cdot \{Curvatura\}$$

onde:

$$\varepsilon_x^0(x,y) = \frac{\partial u^0}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y^0(x,y) = \frac{\partial v^0}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy}^{0}(x,y)=\frac{\partial u^{0}}{\partial y}+\frac{\partial v^{0}}{\partial x}$$

$$\kappa_{x}(x,y)=-\frac{\partial \theta_{x}}{\partial x}=-\frac{\partial^{2} w^{0}}{\partial x^{2}}$$

$$\kappa_{y}(x,y)=-\frac{\partial \theta_{y}}{\partial y}=-\frac{\partial^{2} w^{0}}{\partial y^{2}}$$

$$\kappa_{xy}(x,y)=-2\frac{\partial^{2} w^{0}}{\partial x \partial y}$$

(3.31)

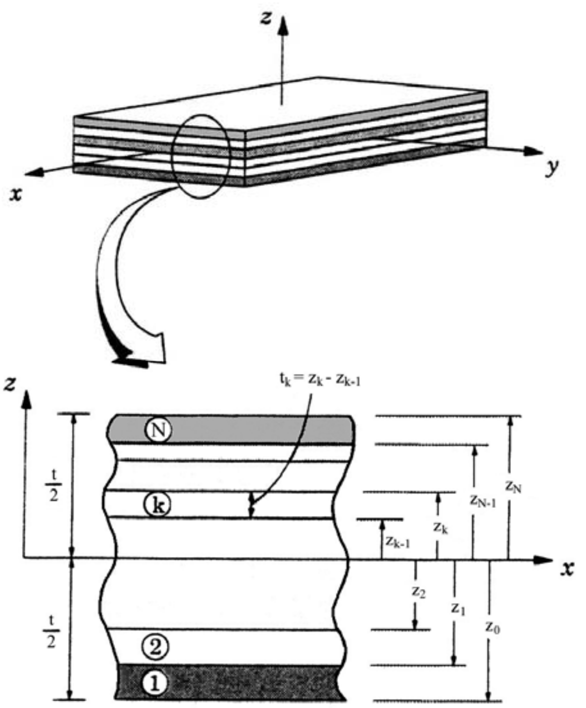


Figura 3-10 – Variáveis relativas a um laminado com N lâminas

Desta forma, as tensões em uma lâmina genérica k, tal como indicada na Figura 3.10, podem ser calculadas, substituindo-se a expressão (3.30) na expressão

(3.26):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}^k \left[\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z^k \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \right] \tag{3.32}$$

As resultantes de tensões no laminado, como um todo, podem ser obtidas por meio de integrais ao longo da espessura da placa:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz \tag{3.33}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} zdz \tag{3.34}$$

Considerando-se que a integral ao longo da espessura pode ser substituída pela soma das integrais ao longo de cada lâmina, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k dz \right] \tag{3.35}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k zdz \right] \tag{3.36}$$

sendo que:

t = espessura do laminado;

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k$$ = tensão na lâmina k;

z_{k-1} = distância da superfície média até a superfície inferior da lâmina k;

z_k = distância da superfície média até a superfície superior da lâmina k, conforme Figura 3.10 mostrada anteriormente.

Substituindo-se as relações tensão-deformação de uma lâmina (3.32) nas expressões (3.35) e (3.36) encontram-se as resultantes de tensão devidas aos efeitos de membrana (forças no plano da placa) e as resultantes de momentos devidas aos efeitos de flexão para o laminado, sendo que elas podem ser agrupadas numa relação matricial como a que se segue:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (3.37)$$

ou na forma:

$$\begin{Bmatrix} N \\ \cdots \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \vdots & B \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ B & \vdots & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ \cdots \\ \kappa \end{Bmatrix} \qquad (3.38)$$

onde:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q_{ij}}\right)_k (z_k - z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q_{ij}}\right)_k (z_k^2 - z_{k-1}^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q_{ij}}\right)_k (z_k^3 - z_{k-1}^3)$$

(3.39)

A submatriz com os coeficientes A_{ij} está relacionada à parcela da rigidez axial da placa, associada aos efeitos de membrana. A submatriz com os coeficientes D_{ij} relaciona-se com os efeitos de flexão e a submatriz B_{ij} é a que corresponde aos efeitos de acoplamento membrana-flexão.

Em laminados simétricos, a matriz B é identicamente nula. O mesmo não acontece em laminados não-simétricos.

4. Particularização do Dano para Laminados

4.1 Introdução

Neste capítulo apresenta-se o formalismo da Mecânica do Dano, partindo-se da definição das variáveis internas de estado e, posteriormente, sua simplificação para o caso de laminados compostos com trincas transversais. As relações constitutivas para laminados compostos com trincas transversais são deduzidas impondo-se restrições termodinâmicas, possibilitando a inserção das variáveis internas de estado nestas relações. Por fim, busca-se definir e caracterizar tais variáveis para o estudo em questão.

4.2 Mecânica do Dano Contínuo

A Mecânica do Dano Contínuo surgiu em resposta ao número crescente de falhas dos elementos estruturais sem a formação de uma trinca principal [Viktor (1995)]. A descrição deste processo ao nível microscópico leva em consideração vários parâmetros, tornando a análise inviável. Portanto, relações analíticas chamadas de equações constitutivas que descrevem o comportamento do contínuo são usadas na referida teoria. Esse tipo de falha estrutural é caracterizado pela acumulação de microtrincas, microporos, discordâncias ou cavidades, formando uma alta concentração de tensão. Tais alterações na microestrutura interna, conceituadas como *dano*, enfraquecem o material a nível microscópico. Os danos internos existem como perturbações discretas e, assim, sua análise permanece como um objetivo a ser considerado.

Excluído: ável

A idéia principal da Mecânica do Dano Contínuo é descrever a evolução do estado do material e a redução da vida útil durante o carregamento utilizando parâmetros do contínuo. A teoria permite descrever localmente, observando-se um *elemento de volume representativo* do material em torno do ponto considerado, a evolução dos fenômenos que se desenvolvem entre um estado inicial, relativo a uma situação de material íntegro, e um estado final, caracterizado pela formação de uma fissura macroscópica que equivale à ruptura do *elemento de volume*. Desta forma é possível quantificar o dano de forma indireta, medindo-se a redução progressiva de uma propriedade mecânica global, como, por exemplo, o módulo de elasticidade.

A transição de um estado de dano distribuído para uma fratura discreta pode ser considerada como o resultado de um processo de localização do dano numa certa região de pequena largura do meio, seguido de sua evolução numa faixa progressivamente mais estreita até a formação da descontinuidade. Em síntese, a diferença entre Mecânica do Dano e Mecânica da Fratura pode ser colocada [Proença (2000)], da seguinte forma:

- Na Mecânica do Dano, a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um campo de defeitos (microfissuras ou poros) considerado continuamente distribuído;
- Na Mecânica da Fratura, a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um único defeito, como uma fissura pontiaguda pré-definida, num meio mecanicamente intacto.

O trabalho pioneiro que introduziu o conceito de Dano foi proposto por Kachanov (1958). Para consideração dos defeitos numa abordagem de meio contínuo, uma variável de dano escalar que leva em conta o dano interno causado pelo crescimento de microtrincas e deslocamentos cinéticos em metais é definida, denominada *continuidade* (φ). Esta variável apresenta localmente um valor unitário para um material completamente livre de defeitos, enquanto que $\varphi = 0$ caracteriza um material sem qualquer capacidade de carga. A quantidade complementar $D = 1 - \varphi$ é, por conseguinte, uma medida do estado local de deterioração ou dano. Para um material completamente livre de defeitos tem-se $D = 0$, enquanto $D = 1$ corresponde a um estado de completa perda de integridade da estrutura interna do material.

4.2.1 Definição do Elemento de Volume Representativo

Considere-se um sólido com defeitos em sua microestrutura. Um *elemento de volume representativo* possui dimensões suficientemente grandes para que se possa admitir homogeneidade para a distribuição dos defeitos nele contidos, mas ao mesmo tempo suficientemente pequenas para que se evitem gradientes elevados de grandezas locais de interesse, como a deformação. Dessa forma, pode-se admitir continuidade para as funções representativas dos fenômenos que ocorrem no elemento e as propriedades nele medidas são valores médios que podem ser associados a um ponto material.

Na Figura 4.1 ilustra-se o conceito de elemento de volume representativo orientado por um versor normal de direção *n*, em torno de um ponto do meio.

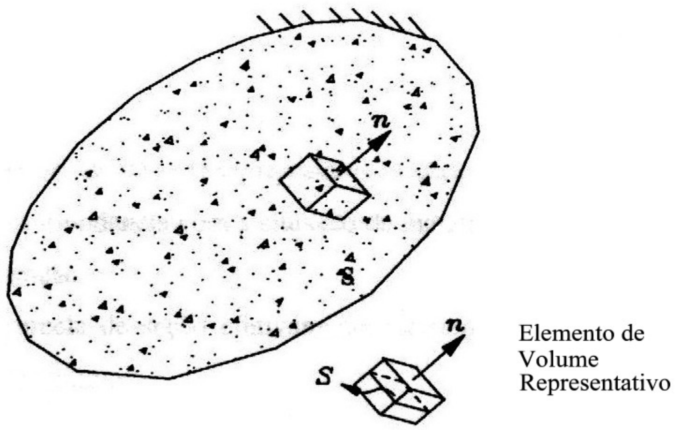


Figura 4-1 - Elemento de volume representativo de um sólido com dano [Proença (2000)]

4.2.2 Definição da Tensão Efetiva

Considera-se uma situação de solicitação uniaxial sobre o elemento de volume definido no item anterior, constituído por forças F aplicadas nas faces opostas orientadas pelo versor *n*. Seja, ainda, S a área total de uma seção genérica de normal *n* no interior do elemento (Figura 4.1 mostrada anteriormente). Nessas condições, $\sigma = F/S$ é a tensão normal nominal em qualquer ponto da seção genérica.

Admitindo-se que o conjunto de defeitos seja totalmente incapaz de transferir tensões, pode-se definir uma tensão dita efetiva levando-se em conta somente a parte íntegra da seção.

Neste sentido, seja $\widetilde{S}$ a parcela íntegra da área total S da seção considerada. Então a diferença $S_0 = S - \widetilde{S}$ define a área dos defeitos medidos.

Pela definição proposta por Lemaitre (1992), o dano D_n, no caso associado a um plano de normal *n*, fica definido pela relação:

$$D_n = \frac{S_0}{S} \tag{4.1}$$

Nota-se que a variável de dano assume valores contidos no intervalo $0 \leq D_n \leq 1$, sendo que $D_n = 0$ tem correspondência com a situação de material íntegro e $D_n = 1$ indica um estado de total deterioração.

Assim sendo, a parcela de seção efetivamente resistente pode ser expressa em função da variável de dano como:

$$\widetilde{S} = S - S_0 = S(1 - D_n) \tag{4.2}$$

Dessa forma, as tensões nominal σ e efetiva $\widetilde{\sigma}$ são definidas por:

$$\sigma = \frac{F}{S} \tag{4.3}$$

e:

$$\widetilde{\sigma} = \frac{F}{\widetilde{S}} \tag{4.4}$$

Levando-se em conta a relação (4.2) segue que:

$$\widetilde{\sigma} = \frac{\sigma}{(1 - D_n)} \tag{4.5}$$

Como a área íntegra é menor do que a nominal, para uma mesma força aplicada, a tensão efetiva num meio danificado resulta comparativamente maior do que a tensão nominal. Em particular, nota-se que:

$\widetilde{\sigma} = \sigma$: para material localmente íntegro;

$\widetilde{\sigma} \rightarrow \infty$: para material totalmente danificado localmente.

Nota-se que no mesmo ponto a variável D_n pode assumir valores diferentes de acordo com a orientação da normal *n*. Essa característica indica uma natureza tensorial para a variável que representa o dano no elemento de volume representativo.

O chamado dano escalar tem correspondência com uma situação em que os microdefeitos apresentam no elemento de volume representativo uma distribuição mais ou menos uniforme, de modo que segundo qualquer plano a medida de dano resulta a mesma, ou seja, independente da orientação da normal n. Em outras palavras, um único valor da variável de dano é suficiente para caracterizar completamente o estado local de deterioração:

$D = D_n \qquad \forall n \qquad$ (dano escalar)

4.2.3 Variáveis Internas de Estado para Laminados com Dano

Em princípio, sempre é possível selecionar uma variável interna de estado que satisfaça as condições dos processos termodinâmicos irreversíveis. Contudo, somente uma variável interna de estado que é dotada com um claro significado físico do mecanismo de dissipação pode efetivamente representar a resposta ao dano. Assim, a seleção de variáveis apropriadas internas de estado que refletem o significado físico do processo de dano é crucial para o desenvolvimento de uma teoria

Excluído: as restrições da termodinâmica irreversível

Excluído: dominante

Excluído: apropriadas

de dano efetiva.

O modelo utilizado para representar laminados compostos com dano no presente trabalho será o de Allen (1987a, 1987b), o qual emprega um conjunto de variáveis internas de estado descrito por quantidades tensoriais de segunda ordem originalmente proposta por Kachanov (1972). Além disso, tal método necessita de poucas constantes e explicitamente incorpora as características cinemáticas da trinca na formulação para as variáveis internas de estado.

Como exposto anteriormente, variáveis internas de estado de tensores de segunda ordem que descrevem a cinemática do processo geral de trincas são adotadas neste trabalho para representar o estado de dano em materiais compostos. As variáveis internas de estado são definidas como:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{V}\int_{S_c} u_i n_j dS \tag{4.6}$$

onde i, j = 1, 2 e 3, V é o volume do elemento representativo, u_i é o deslocamento de abertura da trinca, n_j é a normal à superfície da trinca e S_c é a nova superfície da trinca criada devido ao processo de dano irreversível.

No caso mais amplo, a equação (4.6) expande-se para nove componentes dados por:

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{V}\int_{Sc} \begin{bmatrix} u_1 n_1 & u_1 n_2 & u_1 n_3 \\ u_2 n_1 & u_2 n_2 & u_2 n_3 \\ u_3 n_1 & u_3 n_2 & u_3 n_3 \end{bmatrix} dS \tag{4.7}$$

Para cada tipo de dano, os componentes individuais da última equação representam o dano atribuído para um modo particular de carregamento. Pode-se particularizar a representação da variável interna de estado para melhor entender o seu significado físico. Considerando uma situação hipotética, em que um sólido retangular está sujeito a um carregamento uniaxial σ_{22}, como mostrado na Figura 4.2 e, também, que um dano interno ocorre como uma trinca retangular. Assim, a variável interna de estado para modo I da trinca retangular toma a forma:

$$\alpha_{22} = \frac{1}{V}\int_{S_2} u_2 n_2 dS \tag{4.8}$$

Substituindo os elementos de área e volume na equação (4.8), tem-se:

$$\alpha_{22} = \frac{1}{tdl}\int_0^t u_2.d\,dt \tag{4.9}$$

Integrando e procedendo-se simplificações, chega-se a:

$$\alpha_{22} = \frac{u_2}{l} \tag{4.10}$$

Sabendo-se que a deformação axial global é dada por:

$$\varepsilon_{22} = \frac{\Delta l_2}{l} \tag{4.11}$$

onde:

$\Delta l_2, = \Delta l + u_2$

Δl - deslocamento que o sólido teria se estivesse íntegro

Δl_2 - deslocamento do sólido com trinca

Conclui-se que a variável interna α_{22} da equação (4.10) é uma fração da deformação axial ε_{22}. sendo u_2 uma fração de Δl_2.

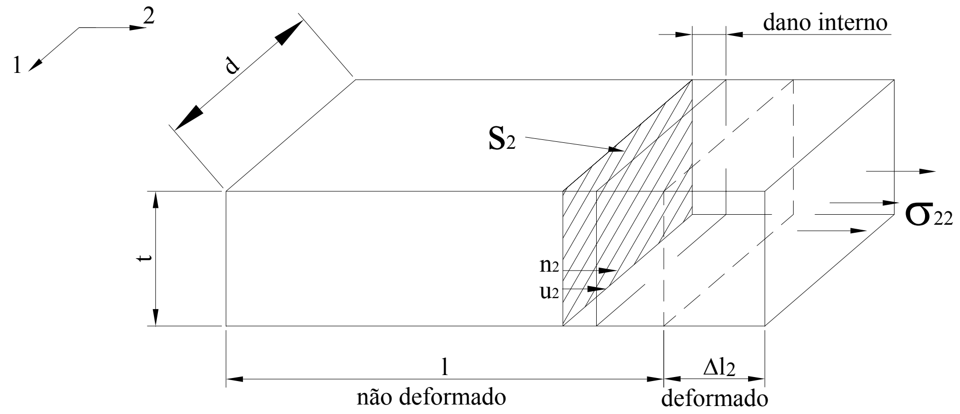


Figura 4-2 - Elemento de volume representativo retangular contendo dano interno sob carregamento de tração [Silva (2004)].

4.2.4 Equação Constitutiva Termomecânica dos Sólidos com Dano Interno

Tendo em vista que o processo de danificação envolve a conservação da energia de deformação, e o fato do dano refletir-se nas equações constitutivas locais, em vez de refletir nas condições de contorno, sugere que ele seja tratado como uma variação da energia dissipada através de processos irreversíveis, ou seja, que essas variáveis representam uma parcela de energia irrecuperável.

No entanto, as seguintes hipóteses são feitas no desenvolvimento da Teoria do Dano para o caso de laminados compostos com trincas transversais [Allen *et. al.* (1987a)]:

- A razão da área da superfície inicial da trinca em relação à superfície externa do corpo é considerada pequena. Isto garante que o corpo seja considerado contínuo e estatisticamente homogêneo no estado não danificado;
- O dano resultante de um corpo é estatisticamente homogêneo na escala local, isto é, pequeno se comparado com a escala do corpo de interesse;

- Sob a condição de homogeneidade estatística na pequena escala, todo o contínuo é baseado nas leis de conservação e também se assume válida essa condição na escala global tal que as alterações no contínuo são refletidas somente através das alterações do comportamento constitutivo;
- Todos os eventos de fratura são denominados dano;
- O modelo é limitado aos compostos de matriz polimérica ou cerâmica a temperaturas bem abaixo da transição vítrea tal que os efeitos de viscoelasticidade são assumidos pequenos;
- A formação de trincas transversais ocorre como fraturas frágeis. Então, a acumulação de deformações plásticas é negligenciável.

Assume-se que a energia específica livre de Helmholtz (h) pode ser expressa como uma função dos tensores de deformação ε_{ij}, das variáveis internas de estado α_{ij} e da temperatura absoluta T do sólido:

$$h = h(\varepsilon_{ij}, \alpha_{ij}, T) \tag{4.12}$$

sendo que $T = T_0 + \Delta T$, T_0 é a temperatura de referência quando as deformações são nulas sem carregamento externo, e ΔT é a variação da temperatura. Em adição, as equações constitutivas devem satisfazer os requisitos de admissibilidade física das leis de conservação, a seguir:

- Conservação da Massa [Moran e Shapiro (1993)]

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \rho d\Omega = 0 \tag{4.13}$$

onde ρ é a densidade do sólido e Ω é o domínio do sólido.

- Conservação do Momento Linear

Excluído: um

$$\sigma_{ij,i} + \rho F_j - \rho \dot{v}_j = 0 \tag{4.14}$$

sendo que σ_{ij} é o tensor tensão, F_j são as forças de corpo e $\dot{v}_j$ são as acelerações.

- Conservação do Momento Angular

Excluído: um

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{4.15}$$

- 1ª Lei da Termodinâmica

$$\rho\dot{\mu} = \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + q_{i,i} + \rho r \tag{4.16}$$

Formatado: Rebaixado por 7 pt

onde $\dot{\mu}$ é a taxa de variação da densidade de energia interna por unidade de massa, $\dot{\varepsilon}_{ij}$ é a taxa de variação do tensor deformação, q é o fluxo de calor e r é a fonte de calor por unidade de massa. Note que $q_{i,i} = \partial q_i / \partial x_i$, e que q é positivo quando o gradiente de temperatura é positivo.

Excluído: troca

Formatado: Rebaixado por 5 pt

Excluído: troca

- 2ª Lei da Termodinâmica

A 2ª Lei da Termodinâmica é baseada no conceito da entropia associada aos processos termodinâmicos irreversíveis. Entropia é considerada uma medida de troca se a dissipação de energia ocorre com respeito à temperatura. Define-se entropia *S* como uma função contínua aditiva:

$$S = \int_{\Omega} \rho s d\Omega \tag{4.17}$$

sendo que *s* é a entropia por unidade de massa, e *Ω* é o domínio do sólido. Além disso, a entropia total produzida S_T é definida como:

$$S_T = \dot{S} - \int_{\Gamma} \left(\frac{\mathrm{q}}{T} \right) \cdot n d\Gamma - \int_{\Omega} \rho \left(\frac{r}{T} \right) d\Omega \geq 0 \tag{4.18}$$

onde q é o fluxo de calor por unidade de área de superfície, n é o vetor normal à superfície e Γ é a superfície do sólido. Esta expressão é referida como a 2ª Lei da Termodinâmica, a qual define que a produção de entropia total é sempre maior ou igual a zero.

Utilizando-se do Teorema da Divergência para transformar as integrais de superfície em integrais de volume, e da definição da energia específica livre de Helmholtz como a soma da energia específica interna μ e a energia específica irreversível de calor $-Ts$,

$$h = \mu - Ts \tag{4.19}$$

Chega-se na seguinte equação, como demonstrado por Proença (2000) e Silva (2004):

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \left(\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial h}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + \frac{\partial h}{\partial T} \dot{T} + s\dot{T} \right) + q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0 \tag{4.20}$$

ou, agrupando os termos:

$$\left(\sigma_{ij} - \rho \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \rho \left(\frac{\partial h}{\partial T} + s \right) \dot{T} - \rho \frac{\partial h}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} + q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0 \tag{4.21}$$

Onde, os dois primeiros termos da equação (4.21) representam a porção reversível dos processos termodinâmicos, enquanto os dois últimos representam os processos dissipativos.

A relação anterior deve ser válida em processos que envolvam uma variação independente de quaisquer das variáveis de estado, incluindo-se, em particular, os processos puramente elásticos, nos quais a dissipação é nula e não existe qualquer alteração da estrutura interna. Assim, igualando-se os dois primeiros termos a zero para manter a condição de reversibilidade, obtêm-se as seguintes relações:

Excluído: s

$$\sigma_{ij}^{e} = \rho \frac{\partial h}{\partial \varepsilon_{ij}} \tag{4.22}$$

e:

$$s^{e} = -\frac{\partial h}{\partial T} \tag{4.23}$$

onde σ_{ij}^{e} e s^{e} são o tensor tensão efetivo e a entropia efetiva, respectivamente. A equação (4.22) apresenta a tensão efetiva σ_{ij}^{e} como função das deformações elásticas ε_{ij}, das variáveis internas de estado α_{ij} e a temperatura *T* (que são funções de *h*).

Para garantir que a desigualdade da equação (4.21) seja sempre satisfeita, uma dissipação positiva é necessária, levando-se em conta o dano interno (processo irreversível), assumindo desprezíveis os gradientes térmicos, a viscoplasticidade e a plasticidade. Portanto:

$$-\rho \frac{\partial h}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} \geq 0 \tag{4.24}$$

O termo $\rho \dfrac{\partial h}{\partial \alpha_{ij}}$ é uma função negativa que representa a dissipação de energia pelo corpo onde o dano ocorre. Assim, a última equação impõe:

$$\dot{\alpha}_{ij} \geq 0 \tag{4.25}$$

para garantir que a equação (4.24) seja positiva. A equação (4.25) sugere que a introdução das variáveis internas de estado somente pode representar a deterioração do sólido, e não processos de recuperação.

Em um evento quando alguma forma de gradiente de temperatura está presente durante os processos termodinâmicos, o último termo da equação (4.26) exigiria:

$$q_i \frac{T_{,i}}{T} \geq 0 \tag{4.26}$$

levando-se em conta dissipação positiva.

Substituindo-se a equação (4.12), energia livre de Helmholtz, na equação da tensão efetiva (4.22), e efetuando as devidas simplificações, como demonstrado por Silva (2004), chega-se na seguinte equação constitutiva dos sólidos com dano interno:

$$\sigma_{ij}^{e} = \sigma_{ij}^{R} + E_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{kl}^{T}\right) + F_{ijkl}\alpha_{kl} \tag{4.27}$$

Onde σ_{ij}^{e} representa o tensor efetivo de tensão e σ_{ij}^{R} o tensor de tensão residual, ε_{ij} representa o tensor de deformação e ε_{kl}^{T} o tensor deformação devido a variação térmica, α_{kl} as variáveis internas de estado, E_{ijkl} e F_{ijkl} são os tensores de rigidez das porções não danificadas e danificadas do corpo, e i, j, k, l = 1, 2 e 3 sendo válida a soma implícita.

Note que as variáveis internas de estado α_{kl} na equação (4.27) não foram definidas funcionalmente, tampouco associadas com um tipo particular de dano. Portanto, as variáveis internas de estado definidas na equação (4.6) podem ser utilizadas para representar danos internos, tais como, vazios, trincas transversais,

Excluído: s

Excluído: es

Excluído: s

Excluído:

Formatado: Rebaixado por 7 pt

Excluído: e deformação

Excluído: é

Excluído: o

Excluído: α_{ij}

rupturas de fibras, desunião da matriz-fibra, etc, sujeitas às hipóteses da Teoria do Dano. Além disso, as equações constitutivas na expressão (4.27) permitem representação de danos internos no espaço tridimensional.

4.2.5 Relações Constitutivas para Lâmina Ortotrópica com Trincas Transversais

As equações constitutivas da expressão (4.27) serão aplicadas para representar a resposta ao dano de trincas transversais na lâmina ortotrópica de laminados compostos. Omitindo-se a temperatura e as tensões residuais, a equação (4.27) é simplificada para:

$$\sigma_{ij}^{e} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} + F_{ijkl}\alpha_{kl} \tag{4.28}$$

Quando as simetrias de tensão e deformação são impostas na última expressão, as equações constitutivas tornam-se:

$$\sigma_{i}^{e} = E_{ij}\varepsilon_{j} + F_{ik}\alpha_{k} \tag{4.29}$$

Em notação contraída, onde i e j variam entre 1 a 6, e k entre 1 a 9. E_{ij} representa a matriz rigidez não danificada da lâmina e F_{ik} a matriz de rigidez danificada. σ_{i}^{e}, ε_{j} e α_{k} são as tensões, as deformações e o vetor das variáveis internas de estado, respectivamente.

Aplicando-se a simetria do material para uma lâmina ortotrópica, considerando-se somente dano por trincas transversais, e simplificando a equação (4.29) corretamente, como demonstrado por Silva (2004), chega-se à seguinte relação:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^e \\ \sigma_2^e \\ \sigma_3^e \\ \sigma_4^e \\ \sigma_5^e \\ \sigma_6^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{56} & F_{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{68} & F_{69} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_5 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_8 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.30}$$

sendo que os componentes do vetor variáveis internas de estado α_1, α_3, α_4, α_6, α_7 e α_9 reduzem-se a zero quando somente trincas transversais são consideradas. No caso de uma lâmina ortrotópica fina, onde as condições de estado plano de tensões (bidimensional) podem ser aplicadas, as relações constitutivas simplificam-se mais ainda para:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^e \\ \sigma_2^e \\ \sigma_6^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & 0 \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & F_{12} & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{68} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} \tag{4.31}$$

onde $\overline{Q}_{ij}$ são os componentes da matriz de rigidez reduzida. Na equação (4.31), os componentes α_2 e α_8 são, respectivamente, as variáveis internas de estado α_{22} e α_{12} para trincas transversais sujeitas ao carregamento dos modos I e III. Se F_{68} e

Excluído: Nota-se que n

α_8 são reescritos como F_{66} e α_6, então a equação (4.31), com os valores de i e j sendo 1, 2 e 6, pode ser expressa em notação contraída como:

$$\sigma_i^e = \overline{Q}_{ij}\varepsilon_j + F_{ij}\alpha_j \tag{4.32}$$

Pode ser mostrado (vide apêndice A) que para trincas transversais na matriz, uma boa aproximação leva a:

Excluído: [

Excluído: Silva (2004)]

$$F_{ij} = -\overline{Q}_{ij} \tag{4.33}$$

Esta hipótese simplifica consideravelmente a teoria, conduzindo a uma descrição completa do estado de dano pelas variáveis de estado internas α_k.

Assim, a equação (4.32) torna-se:

$$\sigma_i^e = \overline{Q}_{ij}\left(\varepsilon_j - \alpha_j\right) \tag{4.34}$$

ou:

$$\sigma_i^e = \overline{Q}_{ij}\left(1 - D_j\right)\varepsilon_j \tag{4.35}$$

sendo que D_j são os componentes de dano na lâmina, definidos como:

$$D_j = \alpha_j \varepsilon_j^{-1} = \frac{\alpha_j}{\varepsilon_j} \tag{4.36}$$

Expandindo-se a equação (4.35), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1^e \\ \sigma_2^e \\ \sigma_6^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11}(1-D_1) & \overline{Q}_{12}(1-D_2) & 0 \\ \overline{Q}_{12}(1-D_1) & \overline{Q}_{22}(1-D_2) & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Q}_{66}(1-D_6) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} \tag{4.37}$$

Alternativamente, a última equação pode ser expressa por:

$$\sigma_i^e = \overline{Q}_{ij}^e \varepsilon_j \tag{4.38}$$

onde $\overline{Q}_{ij}^e$ são componentes da matriz rigidez efetiva dada por:

$$\overline{Q}_{ij}^e = \overline{Q}_{ij}(1-D_j) \tag{4.39}$$

Nota-se que a equação (4.39) necessita de D_1, D_2 e D_6 para caracterizar completamente uma lâmina ortrotópica com dano característico. Quando somente trincas transversais são consideradas, a equação (4.39) reduz-se à determinação de D_2 e D_6 desde que D_1 se relaciona com ruptura da fibra. Como D_2 e D_6 são variáveis internas de estado independentes, o dano devido aos carregamentos de modos I e III podem ser representados individualmente.

Excluído: a

4.2.6 Relações Constitutivas para Laminados Compostos com Trincas Transversais

As relações constitutivas descritas anteriormente podem ser usadas dentro da Teoria Clássica de Placas Laminadas [Tay e Lim (1996)]. Para o caso de laminados compostos danificados, o vetor das resultantes de força {N} e o vetor das resultantes de momento {M} podem ser expressos por:

Excluído: No caso

$$\{N\} = [A]\{\varepsilon^0\} + [B]\{\kappa^0\} + \{D^N\} \tag{4.40}$$

$$\{M\} = [B]\{\varepsilon^0\} + [D]\{\kappa^0\} + \{D^M\} \tag{4.41}$$

Nas equações anteriores, $\{\varepsilon^0\}$ é o vetor de deformações no plano médio, [A] é a matriz rigidez de membrana do laminado, [B] é a matriz rigidez de acoplamento (membrana e flexão), $\{\kappa^0\}$ é o vetor de curvatura, $\{D^N\}$ é o vetor dano de força, [D] é a matriz rigidez de flexão do laminado e $\{D^M\}$ é o vetor dano de momento.

Assim, as quantidades nas equações (4.40) e (4.41) são definidas como:

$$\{N\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\} dz \tag{4.42}$$

$$\{M\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\} z dz \tag{4.43}$$

$$[A] = \sum_{k=1}^{N} (z_k - z_{k-1}) \left[\bar{Q}\right]_k \tag{4.44}$$

$$[B] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (z_k^2 - z_{k-1}^2) \left[\bar{Q}\right]_k \tag{4.45}$$

$$[D] = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} (z_k^3 - z_{k-1}^3) \left[\bar{Q}\right]_k \tag{4.46}$$

$$\{\varepsilon^0\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\} dz \tag{4.47}$$

$$\{\kappa^0\} = \int_{-t/2}^{t/2} \{\kappa_x \quad \kappa_y \quad \kappa_{xy}\} dz \tag{4.48}$$

$$\left\{D^N\right\} = \sum_{k=1}^{N} \left(z_k - z_{k-1}\right) \left[\bar{Q}\right]_k \left\{\bar{\alpha}\right\}_k \tag{4.49}$$

$$\left\{D^M\right\} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right) \left[\bar{Q}\right]_k \left\{\bar{\alpha}\right\}_k \tag{4.50}$$

sendo que $\left[\overline{Q}\right]_k$ é a matriz de rigidez reduzida transformada e $\left\{\overline{\alpha}\right\}_k$ é o vetor das variáveis internas de estado (coordenada global).

A transformação da coordenada local para a global usualmente é verificada por:

$$\left[\bar{Q}\right]_k = \left[T\right]_k^{-1} \left[Q\right]_k \left[T\right]_k \tag{4.51}$$

e:

$$\left\{\overline{\alpha}\right\}_k = \left[T\right]_k \left\{\alpha\right\}_k \tag{4.52}$$

onde $\left[T\right]_k$ é a matriz transformação da coordenada local para a global de cada lâmina do laminado.

O vetor das variáveis internas de estado na coordenada local é dado por:

$$\left\{\alpha\right\}_k = \sum_{\eta=1}^{P} \left\{0 \quad \alpha_{22}^{\eta} \quad \alpha_{12}^{\eta}\right\}_k \tag{4.53}$$

tendo-se P como o número total de tipos de dano sendo considerados.

Assim, a variável interna de estado para carregamento modo I é definida como:

$$\alpha_2 = \frac{1}{V}\int_{S_c} u_2 n_2 dS \tag{4.54}$$

onde u_2 é o deslocamento de abertura da trinca, n_2 é a normal unitária à superfície da trinca, V é o volume do elemento representativo e S_c é a área de superfície da trinca.

E, para carregamento modo III:

$$\alpha_6 = \frac{1}{V}\int_{S_c} u_1 n_2 dS \tag{4.55}$$

onde u_1 é o deslocamento por deslizamento da trinca, n_2 é a normal unitária ao plano da trinca na direção do cisalhamento, V é o volume do elemento representativo e S_c é a área de superfície da trinca.

4.3 Determinação das Variáveis Internas de Estado

Somente com a determinação das variáveis internas torna-se possível caracterizar o dano e, assim, deduzir-se o vetor dano. Para este trabalho, buscou-se uma análise numérica destas variáveis visto ser uma metodologia que incorpora aspectos importantes ao dano, tais como, densidade de trincas e efeitos de restrição nas lâminas danificadas e, ainda, sem a complexidade de efetuarem-se experimentos nestes tipos de materiais.

Existem outras maneiras de se obterem as variáveis internas de estado, tais como experimentos mecânicos ou micromecânicos. Em uma aproximação estruturada, experimentos complexos são necessários. Além disso, com tipos de danos acoplados (ex: modos I e III) ocorrendo simultaneamente, a delineação dos mecanismos do dano é freqüentemente difícil [Kachanov (1986)]. Mesmo se as variáveis internas de estado forem identificadas com sucesso através destes experimentos, suas bases físicas e suas interpretações não serão prontamente óbvias. Assim, a premissa de que a representação de um mecanismo particular de dano é invariante pode ser questionada. Já as constantes utilizadas em funções adquiridas experimentalmente para a obtenção das variáveis internas de estado são muitas vezes usadas sem ênfase na necessidade de se provar suas invariâncias. Esta situação conduz à Teoria da Mecânica do Dano em Meios Contínuos ser associada com técnicas de ajuste de curvas analíticas, sendo as constantes citadas associadas ao material composto em estudo [Talreja et al. (1992)]. Alternativamente, as variáveis internas de estado podem ser calculadas através da micromecânica onde as físicas implícitas dos tipos de dano e modos de carregamento são explicitamente levadas em conta.

De modo alternativo, as variáveis internas de estado podem também ser convenientemente obtidas através de um simples estudo paramétrico por elementos finitos [Tay e Lim (1993)]. Assim, um método numérico é utilizado para calcular as variáveis internas de estado de um dano por trincas transversais. Aproveitando-se da vantagem de serem naturalmente dispersas e de terem espaçamentos aproximadamente iguais, o Método dos Elementos Finitos é usado para análise de trincas transversais em elementos de um volume representativo. A geometria e a cinemática da trinca vinda de uma análise por elementos finitos são então adotadas para calcular as variáveis internas de estado para os modos I e III. A metodologia é estendida para análise de laminados compostos com lâminas internas em direções genéricas [Lim e Tay (1996)]. Para o presente estudo, todo o dano está na forma de trincas transversais na matriz e supõe-se estar restrito às lâminas internas. Uma outra hipótese é a de que o dano seja igualmente distribuído dentro do laminado, ou seja, a distância entre as trincas sempre será constante.

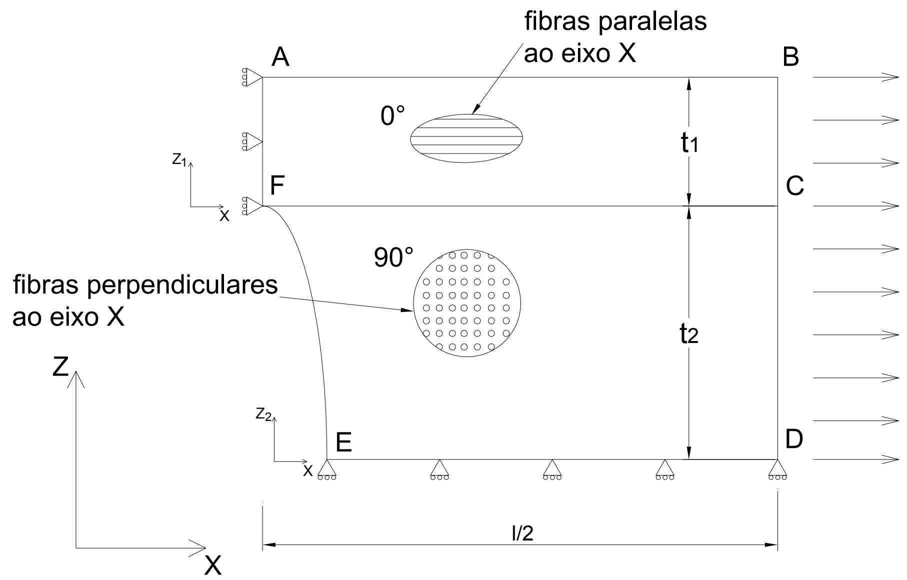
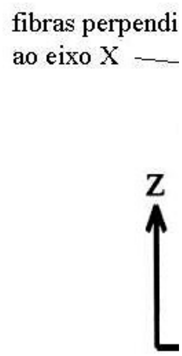


Figura 4-3 – Modelo para um volume representativo de um laminado [0°/90°] – [Lim e Tay (1996)]



Excluído:

4.3.1 Variáveis Internas de Estado para Carregamento Puro Modo I

As variáveis internas de estado para trincas transversais sob o carregamento modo I, definido pela equação (4.6), lembrando-se que a integração é sobre a superfície da trinca transversal S_c, são dadas por:

$$\alpha_2 = \frac{1}{V}\int_{S_c} u_2 n_2 dS \tag{4.56}$$

Substituindo-se os termos da equação (4.56) relativos à trinca transversal dentro do elemento de volume representativo da Figura 4.3 obtém-se:

$$\alpha_2 = \frac{2u_2 b}{bl2t_2}\int_{-t_2}^{t_2} \psi(z_2)dz_2 \tag{4.57}$$

onde u_2 é o máximo deslocamento de abertura da trinca, b é a largura do laminado, l é o espaçamento entre trincas, t_2 é metade da espessura da lâmina interna, ψ é uma função associada ao perfil de abertura da trinca, z_2 é a ordenada do sistema de coordenadas na direção Z relativa à camada a 90°, t_1 é a espessura da lâmina a 0° e z_1 é a ordenada do sistema de coordenadas na direção Z relativa à camada a 0°, tal como definido pela Figura 4.3. Alternativamente, a equação (4.57) pode ser re-escrita da forma:

$$\alpha_2 = \frac{2u_2}{l}\int_{-0.5}^{0.5}\psi(\xi)d\xi \tag{4.58}$$

sendo que a espessura da lâmina interna é expressa em termos da distância normalizada ξ que é definida por:

$$\xi = \frac{z_2}{2t_2} \tag{4.59}$$

Se a integração na equação (4.58) for definida como:

$$C_a = \int_{-0.5}^{0.5}\psi(\xi)d\xi \tag{4.60}$$

onde C_a refere-se a área de abertura da trinca, então, a variável interna de estado para o modo I de dano por trincas transversais em laminados [0°/90°] é dada por:

$$\alpha_2 = 2C_a u_2 \zeta \tag{4.61}$$

tendo-se ζ como a densidade de trinca, definida como:

$$\zeta = \frac{1}{l} \tag{4.62}$$

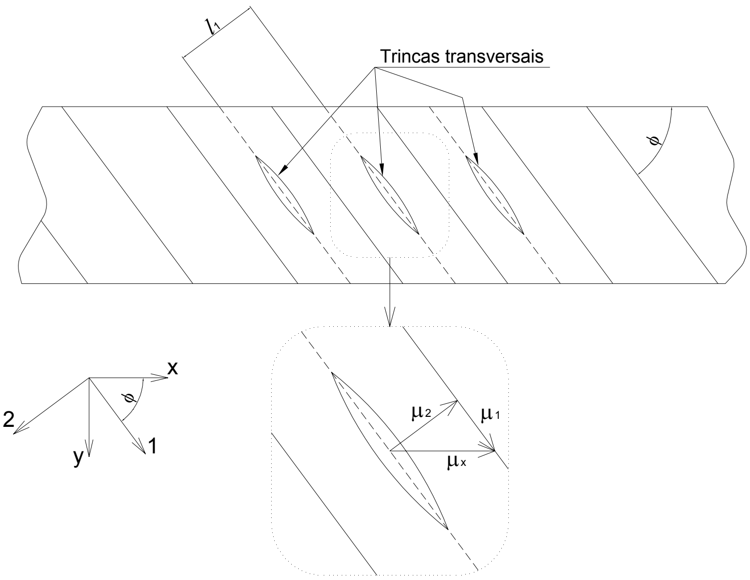
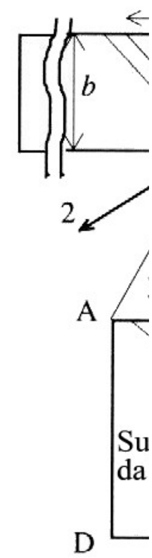


Figura 4-4 – Notação geométrica de uma lâmina com fibras em uma direção genérica [Lim e Tay (1996)]



Excluído:

4.3.2 Variáveis Internas de Estado para Carregamentos Acoplados Modos I e III

Para laminados com lâminas internas em direção genérica (ou seja, $[0°/\phi°]$), consideração adicional deve ser dada para o deslocamento por deslizamento ou carregamento modo III em adição ao modo I (componente do deslocamento por abertura). É assumido que para um laminado sob carregamento uniaxial de tração, os deslocamentos por deslizamento e abertura das trincas são relacionados através de considerações geométricas. A Figura 4.4 mostra a presença de trincas transversais na lâmina ϕ, onde as direções locais *1-2* (da lâmina) são orientadas em um ângulo ϕ das direções globais *x-y* (do laminado).

Para lâminas com direção genérica, a densidade de trincas local ζ_l é definida como:

$$\zeta_l = \frac{1}{l_l} \tag{4.63}$$

sendo que l_1 é o espaçamento local de trincas definido pela Figura 4.4. A densidade de trincas local define a densidade absoluta de uma lâmina danificada no sistema de coordenadas locais 1-2. Contudo, como densidades de trincas são freqüentemente determinadas no sistema de coordenadas global x-y, a definição de densidade de trincas global deverá ser utilizada para todas as análises. A densidade de trinca global ζ ou, simplesmente, densidade de trincas é relacionada com a densidade de trincas local ζ_l por:

$$\zeta = \zeta_l \operatorname{sen}\phi \tag{4.64}$$

Ainda, na Figura 4.4, a resultante do vetor deslocamento das faces da trinca u_x pode ser desmembrada em duas componentes: a paralela e a perpendicular ao eixo *1*. Assim, u_2 denota a abertura ou componente relativo ao modo I do vetor deslocamento, e u_1 representa o deslizamento ou componente relativo ao modo III. A variável interna de estado para o modo I pode então ser definida analogamente como na equação (4.61), tendo-se ϕ como a orientação da lâmina interna, a expressão é dada por:

$$\alpha_2 = 2C_a \frac{u_2\zeta}{\operatorname{sen}\phi} \tag{4.65}$$

Da Figura 4.4, o componente de deslizamento do vetor deslocamento u_1 é relacionado com o componente de abertura u_2 por:

$$u_1 = \frac{u_2 \cos\phi}{\operatorname{sen}\phi} = u_2 \cot\phi \tag{4.66}$$

Desta forma, a variável interna de estado para o modo III é definida como:

$$\alpha_6 = \frac{1}{V} \int_{S_c} u_1 n_2 dS \tag{4.67}$$

Combinando-se as equações (4.66), (4.67) e (4.60), a variável interna de estado para o modo III torna-se:

$$\alpha_6 = 2C_a \frac{u_2 \zeta}{\tan\phi \operatorname{sen}\phi} \tag{4.68}$$

A equação (4.61) é derivada somente para o modo I de carregamento enquanto as equações (4.65) e (4.68) são derivadas para os modos I e III de carregamentos acoplados para dano por trincas transversais de uma lâmina com fibras orientadas numa direção arbitrária. Portanto, as variáveis internas de estado para trincas transversais de laminados $[0°/\phi°]$ são prontamente determinadas uma vez que se conheça a orientação ϕ da lâmina interna, o máximo deslocamento de abertura da trinca u_2, a área de abertura da trinca C_a e a densidade de trincas ζ.

Quando as variáveis internas de estado descritas nas equações (4.61), (4.65) e (4.68) são inseridas nas relações constitutivas da Teoria do Dano em Meios Contínuos, as alterações na rigidez de qualquer laminado composto podem ser estimadas se forem conhecidos o máximo deslocamento da abertura da trinca u_2, a área de abertura da trinca C_a e a densidade de trincas ζ. Através de medidas do máximo deslocamento de abertura da trinca u_2, da área de abertura da trinca C_a e da densidade de trincas transversais ζ em estruturas compostas é possível prever a rigidez residual e, ainda, quanto tempo a estrutura tem de vida útil. Assim, se o máximo deslocamento de abertura da trinca u_2 e a área de abertura da trinca C_a para diferentes densidades de trincas são conhecidas a priori, então a rigidez respectiva de qualquer laminado composto pode ser precocemente estimada.

Excluído: trocas

Excluído: de

Excluído: preditas

Excluído: predita

4.3.3 Cálculo das Variáveis Internas de Estado por Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos pode ser utilizado para obter propriedades cinemáticas, tais como, o máximo deslocamento de abertura da trinca u_2 e a área de abertura da trinca C_a para uma faixa de densidades de trincas. Entretanto, é necessário obter-se valores de u_2 e C_a que sejam aplicáveis para lâminas com fibras em orientações, espessuras e empilhamentos arbitrários. Assim, utiliza-se um procedimento de normalização para relacionar u_2 e C_a como função das densidades de trincas e do parâmetro de restrição da lâmina interna [Lim e Tay (1996)].

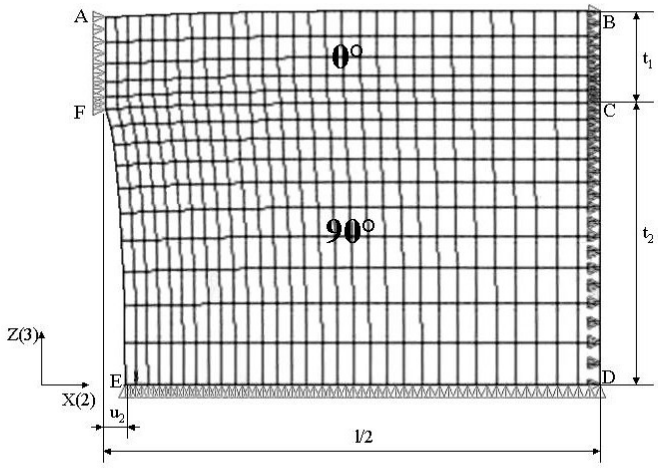


figura 4-5 - Exemplo de malha de elementos finitos deformada para um laminado [0º/90º]$_x$

Para as análises descritas anteriormente, modela-se um elemento de volume representativo, conforme a figura 4-5. O tamanho e a forma do volume representativo dependem das espessuras relativas entre as diferentes lâminas e a densidade de trincas (número de trincas por unidade de volume). Uma série de parâmetros normalizados é definida, tais como:

$$\rho = \frac{2t}{l} \tag{4.69}$$

$$\theta = \frac{t_1}{t_2} \tag{4.70}$$

$$\delta = \frac{u_2}{t_2} \tag{4.71}$$

$$t = t_1 + t_2 \tag{4.72}$$

$$\psi = \frac{u(\xi)}{u_2} \tag{4.73}$$

onde t_1 e t_2 são as espessuras da lâmina 0° e 90°, respectivamente, l é a distância entre duas trincas transversais adjacentes, u_2 é o máximo deslocamento de abertura da trinca, θ é a relação entre as lâminas externa e interna, ρ e δ podem ser considerados como a densidade de trincas adimensional e o máximo deslocamento de abertura da trinca adimensional, respectivamente e ψ é a função normalizada do perfil de abertura da trinca. Assim, $u(\xi)$ é a função do perfil de abertura da trinca e ξ é a distância normalizada do centro da trinca, dado pela equação (4.59). Considerando-se o caso de análise linearmente elástica, δ é diretamente proporcional à deformação aplicada. Os efeitos das variações da densidade de trincas ζ e de restrição θ são levados em conta através da análise de diferentes elementos de volume representativo.

Através das análises experimentais executadas por Lim e Tay (1996), uma função exponencial relacionando o máximo deslocamento de abertura da trinca normalizado δ, com valores de ρ foi proposta:

$$\delta = C_1\left(e^{-a_1\rho}\right) + C_2\left(e^{-b_1\rho}\right) + C_3 \tag{4.74}$$

sendo que as constantes para compostos grafite/epóxi e vidro/epóxi podem ser visualizadas na Tabela 4-1.

Tabela 4-1 – Constantes para o deslocamento de abertura da trinca, δ versus a função da densidade de trincas normalizado ρ [Lim e Tay (1996)]

Material Composto	C_1	C_2	C_3	a_1	b_1
Grafite/Epóxi - Gr/Ep	**-8.86E-2**	**0.21**	**2.20E-2**	**1.95**	**0.74**
Vidro/Epóxi- Gl/Ep	**1.03**	**-0.81**	**2.28E-2**	**0.94**	**1.00**

Da mesma forma, uma função exponencial relacionando o máximo deslocamento de abertura da trinca normalizado δ, com valores de θ foi proposta [Lim e Tay (1996)]:

$$\delta = C_4\left(e^{a_2\theta}\right) + C_5\left(e^{b_2\theta}\right) + C_6 \tag{4.75}$$

onde as constantes para compostos grafite/epóxi e vidro/epóxi podem ser visualizadas na Tabela 4-2.

Também, expressa-se o perfil de abertura da trinca normalizado ψ contra a distância normalizada ξ para compostos Gr/Ep e Gl/Ep através da Figura 4-6. Pode-se observar que a forma do perfil de abertura da trinca é similar entre os dois materiais compostos.

Tabela 4-2 – Constantes para o deslocamento de abertura da trinca, δ versus a razão de restrição θ [Lim e Tay (1996)]

Material Composto	C_4	C_5	C_6	a_2	b_2
Grafite/Epóxi - Gr/Ep	**-4.51E-2**	**-0.17**	**0.30**	**-1.49**	**6.95E-4**
Vidro/Epóxi- Gl/Ep	**-0.14**	**0.00**	**0.20**	**-0.91**	**-0.91**

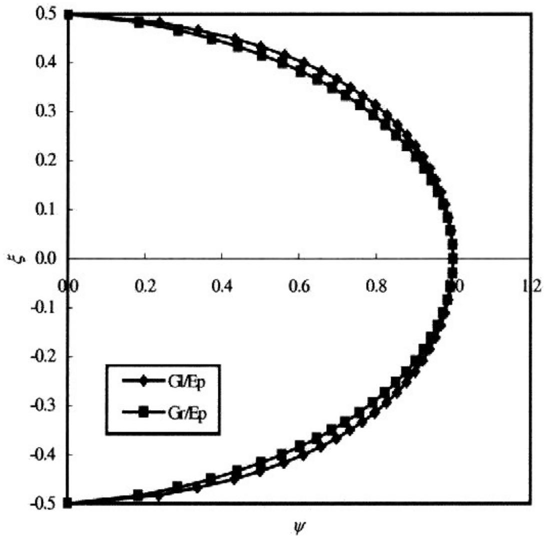


Figura 4-6 – ξ versus ψ (θ=0.333, ρ=1.0) – [Lim e Tay (1996)]

A função do perfil de abertura da trinca normalizada ψ versus a distância normalizada ξ pode ser representada por um polinômio de quarta ordem dado por:

$$\psi = 1.0 + C_7\xi + C_8\xi^2 + C_9\xi^3 + C_{10}\xi^4 \tag{4.76}$$

sendo que C_7, C_8, C_9 e C_{10} são constantes dadas pela Tabela 4-3.

Tabela 4-3 – Constantes para o perfil de abertura da trinca, ψ versus a distância normalizada na direção da espessura ξ [Lim e Tay (1996)]

Material Composto	C_7	C_8	C_9	C_{10}
Grafite/Epóxi - Gr/Ep	**0.00**	**-1.16**	**0.00**	**-10.00**
Vidro/Epóxi-Gl/Ep	**0.00**	**-0.471**	**0.00**	**-12.00**

A área de abertura da trinca C_a é definida como a integração da área sob o perfil de abertura da trinca normalizado ψ , exposto na equação (4.60). Assim, usando a Tabela 4-3, a área de abertura da trinca C_a dos materiais compostos grafite/epóxi (Gr/Ep) e vidro/epóxi (Gl/Ep) torna-se:

$$C_a \approx \frac{4}{5} \tag{4.77}$$

Inserindo-se equação (4.77) nas equações (4.61), (4.65) e (4.68), as variáveis de estado para o modo I e para os modos I e III acoplados tornam-se:

Modo I
$$\alpha_2 = 2C_a u_2 \zeta = \frac{8}{5} u_2 \zeta \tag{4.78}$$

Modo I Acoplado
$$\alpha_2 = 2C_a \frac{u_2 \zeta}{\operatorname{sen}\phi} = \frac{8}{5} \frac{u_2 \zeta}{\operatorname{sen}\phi} \tag{4.79}$$

Modo III Acoplado
$$\alpha_6 = 2C_a \frac{u_2 \zeta}{\tan\phi \operatorname{sen}\phi} = \frac{8}{5} \frac{u_2 \zeta}{\tan\phi \operatorname{sen}\phi} \tag{4.80}$$

Neste trabalho, o máximo deslocamento de abertura da trinca u_2 é determinado através das expressões (4.69), (4.71) e (4.74). A densidade de trinca ζ é função da distância entre duas trincas transversais adjacentes l, cujos valores são atribuídos aleatoriamente para verificação da perda da rigidez do materiais compostos Gr/Ep e Gl/Ep.

5. Implementação do Dano através do Método Modificado da Função de Green Local

5.1 Introdução

Muitos métodos aproximados têm sido utilizados para soluções de problemas da Engenharia moderna. Entre os métodos aproximados mais consagrados destacam-se os de Elementos Finitos, de Elementos de Contorno, das Diferenças Finitas, entre outros. De qualquer forma, por mais poderosos e abrangentes que possam ser, quaisquer métodos aproximados possuem limitações e restrições ao uso. Por esta razão, muita pesquisa tem sido feita nas últimas décadas, seja para aprimorar os métodos consagrados e expandir o seu campo de aplicação, seja para o desenvolvimento de novas propostas e metodologias que venham a preencher lacunas não ocupadas pelos métodos convencionais.

Dentre estes novos desenvolvimentos, surgiu o "Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL)". Tratá-se de um método aproximado de solução, que associa os Métodos dos Elementos Finitos e dos Elementos de Contorno, resolvendo-se o problema através de um sistema de equações integrais de contorno. O MMFGL foi aplicado anteriormente por Machado (1992) para solução de problemas em placas laminadas de materiais compostos. O MMFGL foi também empregado por Silva (2004) para a avaliação da perda de rigidez em laminados com trincas transversais, com resultados que mostraram a viabilidade do método em problemas de laminados com trincas transversais. O presente trabalho estende os estudos anteriores procurando avaliar a evolução das trincas transversais perante carregamentos progressivos.

Excluído: a

O objetivo deste capítulo é apresentar uma implementação da Teoria do

Dano, discutida nos capítulos anteriores, em laminados compostos contendo trincas transversais através do MMFGL. Nos itens a seguir, alguns comentários serão efetuados sobre esse método e sobre considerações de implementação dele. Cabe salientar que os objetivos do presente não são o estudo e o desenvolvimento do MMFGL como foco primordial. O método foi empregado apenas como ferramenta computacional para a solução aproximada do problema do dano em materiais compostos. Assim, será feita, a seguir, uma breve apresentação do MMFGL. Maiores detalhes podem ser encontrados nos trabalhos de Barbieri (1992) e Machado (1992).

5.2 Considerações sobre o Método Modificado da Função de Green Local (MMFGL)

Essencialmente, o MMFGL emprega uma técnica de integração transversa e relações de reciprocidade para determinar, a nível local, a Função de Green, transformando, dessa forma, o operador parcial do problema, num operador parcial ordinário.

Este método foi aplicado anteriormente ao caso de placas laminadas de materiais compostos [Machado (1992)], no qual fez-se uma investigação de vários tipos de teorias para solução de placas laminadas através do MMFGL. Foram estudadas as teorias de camadas simples baseadas em expansões lineares e de ordem superior dos campos de deslocamentos. Como em outras aplicações, o MMFGL mostrou-se bastante eficiente, com elevada precisão, mesmo com malhas muito grosseiras. A Figura 5-1 ilustra esquematicamente a aplicação deste método em placas laminadas de materiais compostos.

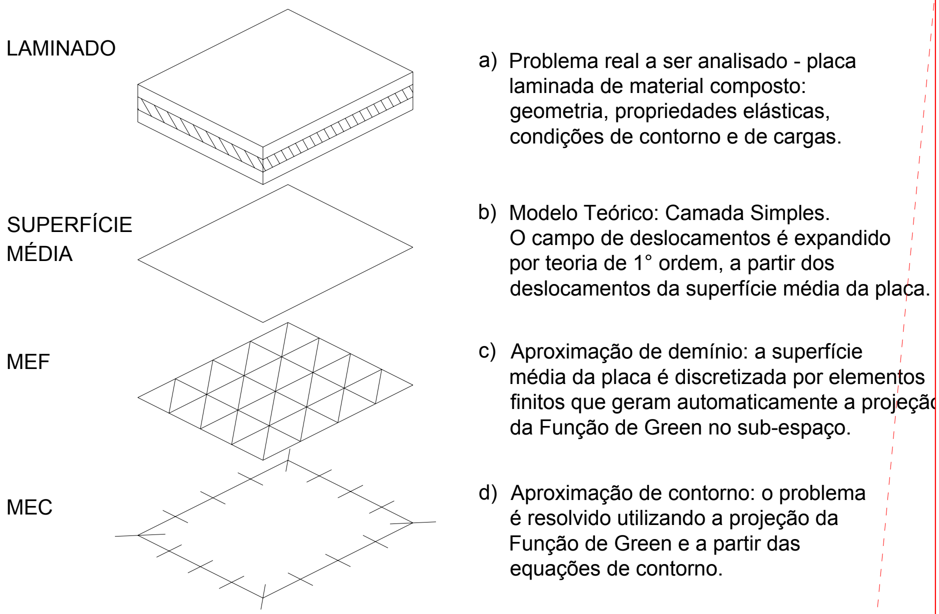


Figura 5-1 - Etapas de solução do problema de uma placa laminada pelo MMFGL [Machado (1992)]

Excluído:

No MMFGL, as matrizes do sistema de equações integrais são determinadas diretamente sem o conhecimento explícito da Função de Green. O MMFGL utiliza elementos finitos no domínio para gerarem, na base do espaço por eles formado, projeções discretas da Função de Green, correspondentes a soluções fundamentais, que serão posteriormente empregadas no sistema de equações integrais associado a discretização no contorno pelo Método dos Elementos de Contorno. Assim, as soluções obtidas por este método são de contorno, mas a determinação das matrizes das Funções de Green está baseada no Método dos Elementos Finitos. Desta forma, justifica-se abordar apenas as questões relativas ao Método dos Elementos Finitos no problema de dano. Isto é feito somando-se o vetor de dano ao vetor de forças aplicadas e será discutido a seguir.

5.3 Desenvolvimento do Modelo de Dano por Elementos Finitos

A formulação das equações diferenciais governantes para um laminado composto com dano segue o mesmo procedimento do que o usado para a formulação para um laminado composto sem nenhum dano. A diferença entre as duas formulações torna-se aparente quando as equações constitutivas são examinadas. Através da incorporação das variáveis internas de estado nas equações constitutivas, o efeito da formação da trinca na matriz em lâminas individuais pode ser modelado. O desenvolvimento de um modelo de dano tem sido muito bem documentado em várias publicações [Allen *et al.* (1987)], [Buie (1988)], [Allen (1994)]. Portanto, somente algumas considerações serão feitas para a formulação do problema de dano por trincas transversais.

Como já comentado anteriormente, os efeitos das trincas são introduzidos nas equações constitutivas através de uma modificação das restrições termodinâmicas localizadas no problema. Assim, a energia livre de Helmholtz é alterada para conter os efeitos mecânicos da formação de trincas na matriz. Tendo-se examinado o procedimento para determinação das variáveis internas de estado no capítulo anterior, tratam-se estas variáveis como já conhecidas no desenvolvimento da formulação por elementos finitos. Assim, somente os deslocamentos nas equações são entidades desconhecidas.

Utiliza-se para formulação das equações em elementos finitos para laminados compostos com trincas transversais, a Teoria Clássica de Placas Laminadas, sendo assim, um caso particular da Teoria de Primeira Ordem. Primeiramente, substituem-se as expressões (4.40) e (4.41) nas equações de equilíbrio [Villaça e Taborda Garcia (1996)]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = p_x^a \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = p_y^a \tag{5.2}$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = p_z^a \tag{5.3}$$

onde N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy} são as resultantes de tensões definidas nas equações (3.35) e (3.36) e, p_x^a, p_y^a, p_z^a são elementos do vetor força de corpo aplicados.

Excluído: resultantes

Mais explicitamente, as componentes dos vetores {N} e {M} apresentados nas equações (4.53) e (4.54) podem ser reescritas como:

$$\begin{aligned} N_x &= A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + A_{16}\gamma_{xy}^0 + B_{11}\kappa_x + B_{12}\kappa_y + B_{16}\kappa_{xy} - \\ &- \sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{11}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{12}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{16}\alpha_{xy}\right\}_k \left(z_k - z_{k-1}\right) \end{aligned} \tag{5.4}$$

$$\begin{aligned} N_y &= A_{12}\varepsilon_x^0 + A_{22}\varepsilon_y^0 + A_{26}\gamma_{xy}^0 + B_{12}\kappa_x + B_{22}\kappa_y + B_{26}\kappa_{xy} - \\ &- \sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{12}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{22}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{26}\alpha_{xy}\right\}_k \left(z_k - z_{k-1}\right) \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} N_{xy} &= A_{16}\varepsilon_x^0 + A_{26}\varepsilon_y^0 + A_{66}\gamma_{xy}^0 + B_{16}\kappa_x + B_{26}\kappa_y + B_{66}\kappa_{xy} - \\ &- \sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{16}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{26}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{66}\alpha_{xy}\right\}_k \left(z_k - z_{k-1}\right) \end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned} M_x &= B_{11}\varepsilon_x^0 + B_{12}\varepsilon_y^0 + B_{16}\gamma_{xy}^0 + D_{11}\kappa_x + D_{12}\kappa_y + D_{16}\kappa_{xy} - \\ &- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{11}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{12}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{16}\alpha_{xy}\right\}_k \left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right) \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} M_y &= B_{12}\varepsilon_x^0 + B_{22}\varepsilon_y^0 + B_{26}\gamma_{xy}^0 + D_{12}\kappa_x + D_{22}\kappa_y + D_{26}\kappa_{xy} - \\ &- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{12}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{22}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{26}\alpha_{xy}\right\}_k \left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right) \end{aligned} \tag{5.8}$$

$$M_{xy} = B_{16}\varepsilon_x^0 + B_{26}\varepsilon_y^0 + B_{66}\gamma_{xy}^0 + D_{16}\kappa_x + D_{26}\kappa_y + D_{66}\kappa_{xy} - \\ -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{16}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{26}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{66}\alpha_{xy}\right\}_k \left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right) \tag{5.9}$$

Substituindo-se as equações (5.4) a (5.9) em (5.1), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A_{11}\varepsilon_x^0 + A_{12}\varepsilon_y^0 + A_{16}\gamma_{xy}^0 + B_{11}\kappa_x + B_{12}\kappa_y + B_{16}\kappa_{xy}\right) - \\ -\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{11}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{12}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{16}\alpha_{xy}\right\}_k \left(z_k - z_{k-1}\right) + \\ +\frac{\partial}{\partial y}\left(A_{16}\varepsilon_x^0 + A_{26}\varepsilon_y^0 + A_{66}\gamma_{xy}^0 + B_{16}\kappa_x + B_{26}\kappa_y + B_{66}\kappa_{xy}\right) - \\ -\frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{16}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{26}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{66}\alpha_{xy}\right\}_k \left(z_k - z_{k-1}\right) = p_x^a \tag{5.10}$$

Aplicando-se as relações deformação-deslocamento apresentadas na equação (3.31), onde u^0, v^0 e w^0 representam o deslocamento na superfície média da placa laminada, obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{11}\frac{\partial u^0}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial v^0}{\partial y} + A_{16}\left(\frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}\right) - \left(B_{11}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}\right)\right] + \\ +\frac{\partial}{\partial y}\left[A_{16}\frac{\partial u^0}{\partial x} + A_{26}\frac{\partial v^0}{\partial y} + A_{66}\left(\frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x}\right) - \left(B_{16}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2} + B_{26}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2} + 2B_{66}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x \partial y}\right)\right] - \\ -\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{11}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{12}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{16}\alpha_{xy}\right\}_k \left(z_k - z_{k-1}\right) - \\ -\frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{16}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{26}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{66}\alpha_{xy}\right\}_k \left(z_k - z_{k-1}\right) = p_x^a \tag{5.11}$$

Da mesma forma, substituindo-se as equações (5.7) à (5.9) em (5.2) e (5.3) e valendo-se das relações deformação-deslocamento (3.31), encontra-se:

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left[A_{16}\frac{\partial u^0}{\partial x}+A_{26}\frac{\partial v^0}{\partial y}+A_{66}\left(\frac{\partial u^0}{\partial y}+\frac{\partial v^0}{\partial x}\right)-\left(B_{16}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}+B_{26}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}+2B_{66}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x\partial y}\right)\right]+
$$
$$
+\frac{\partial}{\partial y}\left[A_{12}\frac{\partial u^0}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial v^0}{\partial y}+A_{26}\left(\frac{\partial u^0}{\partial y}+\frac{\partial v^0}{\partial x}\right)-\left(B_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}+2B_{26}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x\partial y}\right)\right]-
$$
$$
-\frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{16}\alpha_{xx}+\overline{Q}_{26}\alpha_{yy}+\overline{Q}_{66}\alpha_{xy}\right\}_k\left(z_k-z_{k-1}\right)-
$$
$$
-\frac{\partial}{\partial y}\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{12}\alpha_{xx}+\overline{Q}_{22}\alpha_{yy}+\overline{Q}_{26}\alpha_{xy}\right\}_k\left(z_k-z_{k-1}\right)=p_y^a
$$
(5.12)

$$
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[B_{11}\frac{\partial u^0}{\partial x}+B_{12}\frac{\partial v^0}{\partial y}+B_{16}\left(\frac{\partial u^0}{\partial y}+\frac{\partial v^0}{\partial x}\right)-\left(D_{11}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}+2D_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x\partial y}\right)\right]+
$$
$$
+2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left[B_{16}\frac{\partial u^0}{\partial x}+B_{26}\frac{\partial v^0}{\partial y}+B_{66}\left(\frac{\partial u^0}{\partial y}+\frac{\partial v^0}{\partial x}\right)-\left(D_{16}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}+D_{26}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}+2D_{66}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x\partial y}\right)\right]+
$$
$$
+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[B_{12}\frac{\partial u^0}{\partial x}+B_{22}\frac{\partial v^0}{\partial y}+B_{26}\left(\frac{\partial u^0}{\partial y}+\frac{\partial v^0}{\partial x}\right)-\left(D_{12}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x^2}+D_{22}\frac{\partial^2 w^0}{\partial y^2}+2D_{26}\frac{\partial^2 w^0}{\partial x\partial y}\right)\right]-
$$
$$
-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{11}\alpha_{xx}+\overline{Q}_{12}\alpha_{yy}+\overline{Q}_{16}\alpha_{xy}\right\}_k\left(z_k^2-z_{k-1}^2\right)-
$$
$$
-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{16}\alpha_{xx}+\overline{Q}_{26}\alpha_{yy}+\overline{Q}_{66}\alpha_{xy}\right\}_k\left(z_k^2-z_{k-1}^2\right)-
$$
$$
-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{12}\alpha_{xx}+\overline{Q}_{22}\alpha_{yy}+\overline{Q}_{26}\alpha_{xy}\right\}_k\left(z_k^2-z_{k-1}^2\right)=p_z^a
$$
(5.13)

Dentro do desenvolvimento dos sistemas de equações para o método dos elementos finitos [Huebner *et al.* (1995)], definem-se as seguintes funções de interpolação para os deslocamentos (u^0, v^0, w^0) – deslocamentos no plano médio:

$$
u^0=\sum_{j=1}^{M}\Phi_j u_j \qquad (5.14)
$$

$$v^0 = \sum_{j=1}^{M} \Phi_j v_j \tag{5.15}$$

$$w^0 = \sum_{j=1}^{M} \phi_j w_j \tag{5.16}$$

onde (u_j, v_j, w_j) são os deslocamentos nodais, Φ_j e ϕ_j são as funções de interpolação e M é o número de nós em um elemento.

Aplicando-se o cálculo variacional, a forma fraca pode ser construída com as variações $\delta u = \Phi_j$, $\delta v = \Phi_j$ e $\delta w = \phi_j$.

Assim, integrando-se as equações diferenciais governantes (5.11), (5.12) e (5.13) sobre o domínio de cada elemento Ω^e e utilizando-se das variações virtuais descritas anteriormente, obtém-se:

$$\int_{\Omega^e} \sum_{j=1}^{M} \left\{ \begin{gathered} \left[\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\left(A_{11}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + A_{16}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\left(A_{16}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + A_{66}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\right)\right] u_j + \\ + \left[\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\left(A_{16}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + A_{12}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\right) + \frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\left(A_{66}\frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + A_{26}\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\right)\right] v_j + \\ + \left[\begin{gathered} -\frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\left(B_{11}\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + B_{12}\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + 2B_{16}\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y}\right) - \\ -\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\left(B_{16}\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x^2} + B_{26}\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial y^2} + 2B_{66}\frac{\partial^2 \phi_j}{\partial x \partial y}\right) \end{gathered} \right] w_j \end{gathered} \right\} dxdy -$$

$$- \int_{\Omega^e} \left[\begin{gathered} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{N} \left\{ \overline{Q}_{11}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{12}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{16}\alpha_{xy} \right\}_k (z_k - z_{k-1}) \right) - \\ -\frac{\partial \Phi_j}{\partial y}\left(\sum_{k=1}^{N} \left\{ \overline{Q}_{16}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{26}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{66}\alpha_{xy} \right\}_k (z_k - z_{k-1}) \right) \end{gathered} \right] dxdy = \int_{\Omega^e} \Phi_j p_x^a \, dxdy$$

(5.17)

$$\int_{\Omega^e}\sum_{j=1}^{M}\left\{\begin{array}{l}\left[\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\left(A_{16}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+A_{66}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)+\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\left(A_{12}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+A_{26}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)\right]u_j+\\+\left[\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\left(A_{66}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+A_{26}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)+\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\left(A_{26}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}+A_{22}\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)\right]v_j+\\+\left[\begin{array}{l}-\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\left(B_{16}\frac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2}+B_{26}\frac{\partial^2\phi_j}{\partial y^2}+2B_{66}\frac{\partial^2\phi_j}{\partial x\partial y}\right)-\\-\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\left(B_{12}\frac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2}+B_{22}\frac{\partial^2\phi_j}{\partial y^2}+2B_{26}\frac{\partial^2\phi_j}{\partial x\partial y}\right)\end{array}\right]w_j\end{array}\right\}dxdy-$$

$$-\int_{\Omega^e}\left[\begin{array}{l}\frac{\partial\Phi_j}{\partial x}\left(\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{16}\alpha_{xx}+\overline{Q}_{26}\alpha_{yy}+\overline{Q}_{66}\alpha_{xy}\right\}_k\left(z_k-z_{k-1}\right)\right)-\\-\frac{\partial\Phi_j}{\partial y}\left(\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{12}\alpha_{xx}+\overline{Q}_{22}\alpha_{yy}+\overline{Q}_{26}\alpha_{xy}\right\}_k\left(z_k-z_{k-1}\right)\right)\end{array}\right]dxdy=\int_{\Omega^e}\Phi_j p_y^a dxdy \tag{5.18}$$

$$\int_{\Omega^e}\sum_{j=1}^{M}\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2}\left(B_{11}\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial x}+B_{16}\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)+2\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x\partial y}\left(B_{16}\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial x}+B_{66}\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)+\\+\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial y^2}\left(B_{12}\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial x}+B_{26}\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)\end{array}\right]u_j+\\+\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2}\left(B_{16}\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial x}+B_{12}\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)+2\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x\partial y}\left(B_{66}\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial x}+B_{26}\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)+\\+\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial y^2}\left(B_{26}\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial x}+B_{22}\dfrac{\partial\Phi_j}{\partial y}\right)\end{array}\right]v_j+\\+\left[\begin{array}{l}-\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2}\left(D_{11}\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2}+D_{12}\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial y^2}+2D_{16}\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x\partial y}\right)-\\-2\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x\partial y}\left(D_{16}\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2}+D_{26}\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial y^2}+2D_{66}\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x\partial y}\right)-\\-\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial y^2}\left(D_{12}\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2}+D_{22}\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial y^2}+2D_{26}\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x\partial y}\right)\end{array}\right]w_j\end{array}\right\}dxdy-$$

$$-\int_{\Omega^e}\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x^2}\left(\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{11}\alpha_{xx}+\overline{Q}_{12}\alpha_{yy}+\overline{Q}_{16}\alpha_{xy}\right\}_k\left(z_k^2-z_{k-1}^2\right)\right)-\\-\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial x\partial y}\left(\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{16}\alpha_{xx}+\overline{Q}_{26}\alpha_{yy}+\overline{Q}_{66}\alpha_{xy}\right\}_k\left(z_k^2-z_{k-1}^2\right)\right)-\\-\dfrac{\partial^2\phi_j}{\partial y^2}\left(\sum_{k=1}^{N}\left\{\overline{Q}_{12}\alpha_{xx}+\overline{Q}_{22}\alpha_{yy}+\overline{Q}_{26}\alpha_{xy}\right\}_k\left(z_k^2-z_{k-1}^2\right)\right)\end{array}\right]dxdy=\int_{\Omega^e}\phi_j p_z^a dxdy$$

(5.19)

As expressões resultantes podem ser determinadas pelo seguinte sistema de equações algébricas para um elemento finito típico:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{26} \\ K_{61} & K_{62} & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1^a \\ F_2^a \\ F_6^a \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} F_1^d \\ F_2^d \\ F_6^d \end{Bmatrix} \tag{5.20}$$

sendo que K_{ij} são os elementos usuais da matriz rigidez, (d_x, d_y, d_z) são os elementos do vetor deslocamento, $\{F^a\}$ e $\{F^d\}$ são o vetor força aplicada e de dano. Estes vetores podem ser expressos por:

$$F_1^a = \int_{\Omega^e} p_x^a \Phi_j dxdy \tag{5.21}$$

$$F_2^a = \int_{\Omega^e} p_y^a \Phi_j dxdy \tag{5.22}$$

$$F_6^a = \int_{\Omega^e} p_z^a \phi_j dxdy \tag{5.23}$$

$$F_1^d = \int_{\Omega^e} p_x^d \Phi_j dxdy \tag{5.24}$$

$$F_2^d = \int_{\Omega^e} p_y^d \Phi_j dxdy \tag{5.25}$$

$$F_6^d = \int_{\Omega^e} p_z^d \phi_j dxdy \tag{5.26}$$

Nas expressões acima, $\left\{p_x^d, p_y^d, p_z^d\right\}$ são definidos como:

$$
p_x^d = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^{N} \left\{ \overline{Q}_{11}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{12}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{16}\alpha_{xy} \right\}_k + \\ + \dfrac{\partial}{\partial y} \sum_{k=1}^{N} \left\{ \overline{Q}_{16}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{26}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{66}\alpha_{xy} \right\}_k \end{bmatrix} \left(z_k - z_{k-1} \right) \tag{5.27}
$$

$$
p_y^d = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \sum_{k=1}^{N} \left\{ \overline{Q}_{16}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{26}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{66}\alpha_{xy} \right\}_k + \\ + \dfrac{\partial}{\partial y} \sum_{k=1}^{N} \left\{ \overline{Q}_{12}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{22}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{26}\alpha_{xy} \right\}_k \end{bmatrix} \left(z_k - z_{k-1} \right) \tag{5.28}
$$

$$
p_z^d = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} \sum_{k=1}^{N} \left\{ \overline{Q}_{11}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{12}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{16}\alpha_{xy} \right\}_k + \\ + \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \sum_{k=1}^{N} \left\{ \overline{Q}_{16}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{26}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{66}\alpha_{xy} \right\}_k + \\ + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \sum_{k=1}^{N} \left\{ \overline{Q}_{12}\alpha_{xx} + \overline{Q}_{22}\alpha_{yy} + \overline{Q}_{26}\alpha_{xy} \right\}_k \end{bmatrix} \left({z_k}^2 - {z_{k-1}}^2 \right) \tag{5.29}
$$

Assim, considerando-se conhecidas as variáveis internas de estado α_{kl} e substituindo-se as expressões (5.27) a (5.29) nas expressões (5.24) a (5.26), encontra-se o vetor força de dano $\left\{ F_k^d \right\}$, sendo que os coeficientes $\overline{Q}_{ij}$ são os elementos da matriz rigidez transformada. O sistema de equações dado em (5.20) pode ser utilizado com qualquer tipo de elemento cujas funções de forma sejam conhecidas.

Excluído: ão

6. Evolução do Dano

6.1 Introdução

O acúmulo do dano é um processo inerentemente diferente do processo de iniciação do dano e do processo de crescimento do dano. A principal diferença está no fato de que a acumulação de um modo de falha é geralmente definida como a interação de microdefeitos e microeventos. Portanto, a tolerância ao dano de uma estrutura é a discussão de como a sua rigidez é afetada pela acumulação destes microdefeitos durante a aplicação de um carregamento.

Excluído: Talvez, a

Há vários processos que podem causar mudanças nas propriedades e não desempenho de um laminado de fibras contínuas submetido a um carregamento mecânico. Talvez, o mais conhecido seja o desenvolvimento de microdefeitos, tais como microtrincas, delaminação, separação das fibras e da matriz, e a ruptura da matriz, sendo o motivo mais comum de alteração da rigidez em materiais compostos, a formação de microtrincas na matriz.

Excluído: a

Excluído: na

Excluído: *performance*

A maioria das pesquisas realizadas sobre trincas transversais é direcionada para laminados com a configuração de empilhamento, direção de 0º para as lâminas externas e direção de 90º para as lâminas internas, como na Figura 6-1, [Anderssen *et al.* (1998)], [Joffe e Varna (1999)], [Ji *et al.* (1998)] e [Wada *et al.* (1999)]. Para se quantificar o dano, a lâmina é submetida a uma tensão uniaxial de tração. Desta forma, a investigação deste problema pode ser feita em duas etapas: a primeira é modelar a degradação da rigidez para um valor de densidade de trincas, e a segunda é modelar a evolução do dano em função do incremento do carregamento. A primeira etapa já foi elaborada no capítulo 4. Portanto, neste capítulo, apresenta-se modos de determinar a evolução do dano.

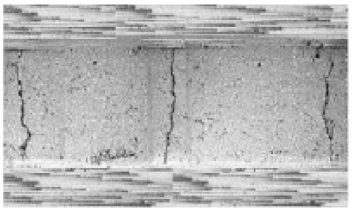


Figura 6-1 - Trincas transversais na matriz das lâminas de 90° [Joffe (1990].

6.2 Degradação devido a Trincas na Matriz

A primeira forma de dano que surge em um laminado é a trinca transversal na matriz, que se forma nas lâminas cuja direção das fibras difere da direção do carregamento. Trincas na matriz representam um dano progressivo que se desenvolve devido ao incremento na deformação do laminado e a medida do seu acúmulo se dá pela densidade de trincas. Portanto, mudanças nas propriedades elásticas de um laminado, como o Módulo de Young ou o coeficiente de Poisson, são relacionadas com o número de trincas formadas nas lâminas transversais. A Figura 6-2 demonstra a natureza básica deste efeito. Ela mostra um laminado 0º/90º/0º com formação de microtrincas na matriz nas lâminas de 90º. A cada trinca formada, surge uma região no material próximo às trincas na qual a tensão relaxa. Essa redistribuição interna das tensões é responsável pela alteração da rigidez global do laminado.

Excluído: Apêndice A: ¶
Excluído: u
Excluído: longitudinal
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt, Não verificar ortografia ou
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Excluído: Figura 6-2
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt, Não verificar ortografia ou
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Excluído: Figura 6-2
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt, Não verificar ortografia ou
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Excluído: Figura 6-2

Excluído: Apêndice A: ¶

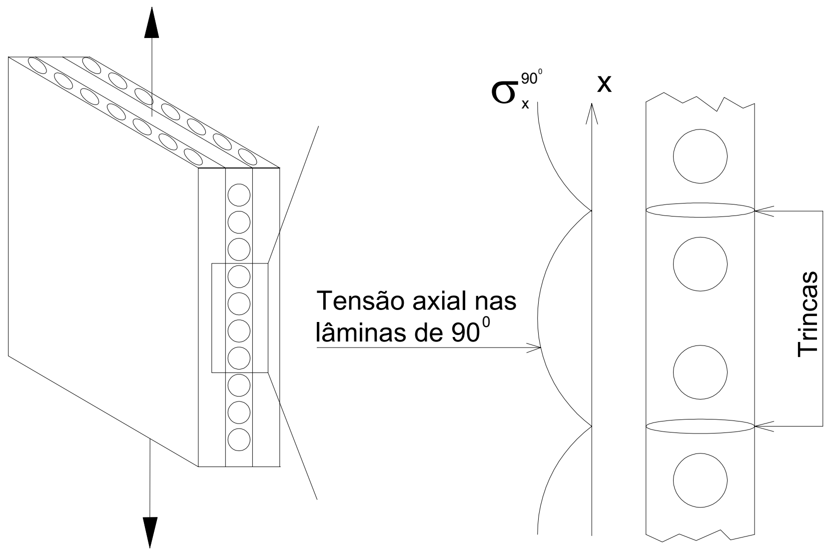


Figura 6-2 - Relação entre as trincas e o relaxamento da tensão [Reifsnider (2002)]

Quando o processo de evolução de trincas é analisado, surge um complicador importante referente a localização de uma nova microtrinca. A localização das novas trincas pode ser realizada aproveitando-se de cálculos estatísticos [Laws e Dvorak (1988)]. Contudo, este procedimento geralmente requer um esforço numérico muito grande. Visto que observações experimentais indicam que as trincas surgem igualmente espaçadas [Nairn (2000b)], [Wada *et al.* (1998)], será aqui também considerado a suposição de que uma nova trinca surgirá entre duas já existentes [Anderssen (1998)], [Joffe e Varna (1999a-b)], [Ji *et al.* (1998)]. Ou seja, assumindo que o laminado em estudo seja perfeitamente simétrico, o espaçamento entre microtrincas será considerado eqüidistante, o que significa que o laminado sempre terá um agrupamento periódico de trincas. Embora esta prática venha sendo adotada em vários métodos analíticos, estudos estão sendo realizados para prever o efeito da distribuição randômica das trincas na rigidez do laminado [Silberschmidt (2005)], [Vinogradov e Hashin (2005)].

Outra importante observação com relação à formação de microtrincas na matriz foi feita por Nairn (2000b), relacionando esse evento com a espessura do

Excluído: ,

laminado, como pode ser visto na figura 6-3. Ele verificou que para lâminas de 90º com espessura superior a 0.5mm, as microtrincas iniciam-se e propagam-se instantaneamente através de toda a seção transversal dessas lâminas [Anderssen (1998)]. Para espessuras entre 0.1 e 0.4mm, microtrincas individuais podem iniciar-se nos bordos livres do laminado, e propagar-se através de toda a sua largura.

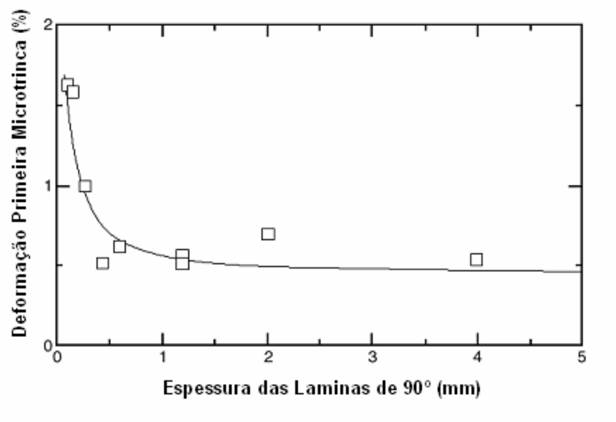


figura 6-3 - Relação entre a espessuras das lâminas de 90º e a formação de microtrincas [Nairn (2000b)].

6.3 Função de Falha para Acumulação do Dano

Como o objetivo deste trabalho é quantificar a acumulação do dano devido ao incremento monotônico do carregamento, a abordagem mais proveitosa para essa atividade é utilizar um critério de falha. Uma aproximação adotada para que um critério de falha seja aplicado para descrever a acumulação do dano pode ser formulada da seguinte maneira:

$$Fa\left(\frac{\sigma_{ij}}{X_{ij}}\right) \tag{6.1}$$

Excluído: Apêndice A: ¶

Excluído: figura 6-3

Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt

Excluído: figura 6-3

Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt

Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt

Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt

Excluído: figura 6-3

Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt, Não verificar ortografia ou

Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt, Não verificar ortografia ou

Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt

Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt

Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt, Não verificar ortografia ou onde Fa é a função de falha, σ_{ij} é a tensão local e X_{ij} refere-se às propriedades mecânicas do material. Contudo, as seguintes observações devem ser consideradas quando da utilização dessa função de falha:

a) As componentes de tensão e de propriedades mecânicas do material usados na equação Fa são consideradas localmente, no sentido de que esses valores representam o estado de tensões e o estado do material que controlam a sua falha final.

b) A função de falha será definida em função do modo de falha. Cada modo de falha terá uma função de falha Fa, possivelmente com formas e valores diferentes para uma dada condição de carregamento.

c) Os estados de tensões e do material a níveis locais, representados por σ_{ij} e X_{ij} respectivamente, serão função do tempo, isto é, assume-se que esses estados dependerão do carregamento aplicado e do comportamento do material.

Excluído: em

Como mencionado, a degradação da rigidez de um componente ocorre devido a um processo progressivo durante sua vida útil. Para materiais homogêneos, esse processo é freqüentemente considerado similar ao crescimento de uma única trinca, que se torna instável quando alcança um comprimento crítico, causando a fratura. Contudo, para materiais compostos, este mecanismo não fornece bons resultados. Além disso, combinações dos modos de falha, discutidos anteriormente, interagem causando alterações nas propriedades do material e na sua distribuição de tensões local. Desta forma, uma das principais dificuldades para este tipo de análise é adotar um critério de falha Fa que descreva a evolução do dano devido a um modo de falha.

Para materiais não homogêneos, pode ser aplicado qualquer critério para os diferentes níveis do material, como, por exemplo, determinar a ruptura da fibra, ou quando ocorrerá o descolamento da fibra da matriz. No caso particular deste trabalho, um critério será utilizado para determinar o surgimento de trincas na matriz. Além disso, esse critério de falha será aplicado no nível da lâmina para se prever a resistência do laminado.

Excluído: Apêndice A: ¶

6.3.1 Critérios de Falha para uma Lâmina Ortotrópica

A análise da rigidez de um laminado é mais complicada do que a análise de um material isotrópico. Como visto no capítulo 3, a resistência de um laminado é conseqüência da sobreposição das lâminas que o formam que, por sua vez, dependem diretamente das propriedades das fibras que o compõem. Por exemplo, a resistência longitudinal de uma lamina formada por fibras contínuas, *X*, é muito maior que a resistência transversal, *Y*. Os valores para resistência a compressão, X_c e Y_c, associados a estas direções serão diferentes dos valores correspondentes para resistência a tração, X_t e Y_t. A resistência ao cisalhamento, *C*, associada às direções principais do material, também é considerada uma propriedade independente. Portanto, estes cinco valores formam a base para a análise simplificada da rigidez de uma lâmina.

Excluído: Ou seja, o

As teorias apresentadas para a previsão de falha de uma lâmina ortotrópica se restringem ao caso biaxial de tensões, e algumas podem ser vistas como adaptações dos critérios de falha usados em materiais isotrópicos, como é o caso da teoria da máxima tensão e a teoria da máxima deformação, ou teorias mais sofisticadas e precisas propostas por Hill e Tsai-Wu. Outros critérios foram propostos, ou estão sendo desenvolvidos [Vinogradov e Hashin (2005)], [Dávila *et al.* (2005)], focando a determinação das superfícies de falha que representam o término do comportamento elástico linear sob um estado multiaxial de tensões. Alguns critérios elaborados para materiais isotrópicos, modificados para materiais compostos, são apresentados a seguir:

- *Teoria da Tensão Máxima:*

Essa teoria afirma que as tensões aplicadas nas direções principais do material devem ser menores que as resistências nas respectivas direções de carga [Mendonça (2005)].

Excluído: Apêndice A: ¶

Falhas em tração	$\sigma_1 \leq X_t$ - direção longitudinal $\sigma_2 \leq Y_t$ - direção transversal
Falhas em compressão	$\sigma_1 \leq X_c$ - direção longitudinal $\sigma_2 \leq Y_c$ - direção transversal
Falhas por cisalhamento	$\tau_{12} < C$ - cisalhamento no plano

(6.2)

- *Critério da Deformação Máxima:*

Esta teoria é análoga à teoria de tensão máxima para compostos e impõe limites nas deformações das direções principais do material [Mendonça (2005)]. A teoria da deformação máxima prevê que a falha ocorrerá se uma das seguintes inequações for violada:

Falhas em tração	$\varepsilon_1 \leq X_{\varepsilon t}$ - direção longitudinal $\varepsilon_2 \leq Y_{\varepsilon t}$ - direção transversal
Falhas em compressão	$\varepsilon_1 \leq X_{\varepsilon c}$ - direção longitudinal $\varepsilon_2 \leq Y_{\varepsilon c}$ - direção transversal
Falhas por cisalhamento	$\gamma_{12} < C_\varepsilon$ - cisalhamento no plano

(6.3)

$X_{\varepsilon t}$, $X_{\varepsilon c}$, $Y_{\varepsilon t}$ e $Y_{\varepsilon c}$ são os valores máximos de deformação nas direções principais 1 e 2, em tração e compressão, obtidos em ensaios uniaxiais. C_ε é o máximo valor de distorção angular no plano 1-2.

Excluído: eforma

- *Critério de Tsai-Hill:*

Uma adaptação, realizada por Tsai, do critério de Hill para lâminas transversalmente ortotrópicas sob o estado plano de tensão, resultou na equação (6.4), onde a expressão do critério é uma igualdade se o estado de tensão está no limiar do ponto crítico de falha [Mendonça (2005)].

Excluído: Apêndice A: ¶

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2}+\frac{\sigma_2^2}{Y^2}-\frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2}+\frac{\tau_{12}^2}{C^2}=1 \qquad (6.4)$$

Formatado: Parágrafo do texto

➤ *Critério de Tsai-Wu*

Um procedimento simples proposto por Tsai e Wu foi o de aumentar o número de termos na equação do critério de falha de Hill [Mendonça (2005)]. Com o uso de aproximações, o critério reduz-se a equação (6.5). Observa-se que quando as resistências à tração e à compressão são idênticas, assume-se a forma do critério de Tsai-Hill.

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2}+\frac{\sigma_2^2}{Y^2}-\frac{\sigma_1\sigma_2}{XY}+\frac{\tau_{12}^2}{C^2}=1 \qquad (6.5)$$

6.3.2 Critério baseado na Energia de Deformação

Estudos recentes vêm indicando que os modos de falha tradicionais, como os já citados, não podem prever com exatidão a resposta de um laminado quando danificado. Como descrito por Nairn [Nairn (2000b)], os resultados de modelos que utilizam a Teoria da Falha da Primeira Lâmina para prever o início da formação de microtrincas não são confiáveis. Isso porque essa teoria não leva em consideração a espessura do laminado, o que contradiz as observações experimentais.

Dessa forma, novos critérios estão sendo elaborados, baseados na taxa de liberação da energia de deformação, para avaliar a formação de uma nova microtrinca [Anderssen *et al.* (1998)], [Ji *et al.* (1998)], [Kobayashi *et al.* (2000)]. Isso devido ao fato de que essa energia liberada é praticamente independente do comprimento da microtrinca [Anderssen *et al.*(1998)]. A partir desta simplificação é possível calcular a taxa de liberação da energia de deformação analisando a energia liberada devido à formação de uma microtrinca.

A energia de deformação elástica U é a energia consumida pela ação de forças externas na deformação elástica do corpo. Essa energia, ou trabalho, é igual à

Excluído: Apêndice A: ¶

força multiplicada pela distância na qual ela atua. Na deformação de corpos elásticos, a força e a deformação aumentam linearmente desde o início do carregamento, de modo que a média da energia é igual à metade do seu produto, como se observa na equação (6.6). Esse valor também é igual à área sob a curva do gráfico tensão-deformação.

$$U = \frac{1}{2} P u \tag{6.6}$$

Para um cubo infinitesimal submetido somente a uma tensão uniaxial ao longo do eixo x, a energia de deformação elástica é dada por:

$$\begin{aligned} dU &= \frac{1}{2} P du \\ dU &= \frac{1}{2}(\sigma_x S)(\varepsilon_x dx) \\ dU &= \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x)(S dx) \end{aligned} \tag{6.7}$$

A equação (6.7) representa a energia elástica total absorvida pelo elemento. Como Sdx é o volume do elemento, a energia de deformação por unidade de volume ou a densidade de energia de deformação U_0 é dada por:

Excluído: N

Excluído: a

$$U_0 = \frac{1}{2}\sigma_x \varepsilon_x = \frac{1}{2}\frac{\sigma_x^2}{E} = \frac{1}{2}\varepsilon_x^2 E \tag{6.8}$$

A energia de deformação elástica para uma distribuição tridimensional de tensões pode ser obtida por analogia:

$$U_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right) \tag{6.9}$$

Como a análise será feita no nível da lâmina, ou seja, em uma distribuição bidimensional (Estado Plano de Tensões), a equação (6.9) reduz-se a:

$$U_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right) \qquad (6.10)$$

O critério de falha que será utilizado neste trabalho para descrever a evolução do dano é o critério proposto por Lim e Tay [Tay et al. (1993)], baseado na energia de deformação. Considere uma placa de laminado composto simétrica de largura b e comprimento L, com a seguinte configuração $[0°_l/90°_m]_s$, onde l e m são inteiros. Quando o laminado é carregado uniaxialmente em tensão, o gráfico tensão-deformação é linear até a falha da primeira lâmina no ponto A (Figura 6-4). Uma trinca transversal é então introduzida nas lâminas de 90°. A densidade de trincas é determinada pela equação (4.63)

$$\zeta_l = \frac{1}{l_l}$$

e o máximo deslocamento da abertura da trinca correspondente a essa densidade de trincas pode ser obtido pela equação (4.74)

$$C_a \approx \frac{4}{5}$$

Esses valores são utilizados para calcular o valor de α_2 de acordo com a equação (4.78)

$$\alpha_2 = 2C_a u_2 \zeta = \frac{8}{5} u_2 \zeta$$

e substituí-lo nas equações (4.49) e (4.40) respectivamente

$$\left\{D^N\right\} = \sum_{k=1}^{N}\left(z_k - z_{k-1}\right)\left[\bar{Q}\right]_k \left\{\bar{\alpha}\right\}_k$$

$$\{N\} = [A]\left\{\varepsilon^0\right\} + [B]\left\{\kappa^0\right\} + \left\{D^N\right\}$$

O resultado é uma redução na rigidez efetiva do laminado na direção do carregamento aplicado, e isto é representado pelo segmento OF na Figura 6-4. Sob a aplicação de um carregamento adicional, essa redução de rigidez pode ser verificada

Excluído: Apêndice A: ¶

no segmento FB na Figura 6-4. Note-se que a linha OI representa a rigidez do laminado onde a contribuição das lâminas de 90° foi omitida. Portanto, a linha OI representa o valor mínimo da rigidez do laminado quando se estuda a perda de rigidez das lâminas de 90°.

Excluído: Figura 6-4
Excluído: Figura 6-4
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt, Não verificar ortografia ou
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt, Não verificar ortografia ou
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt

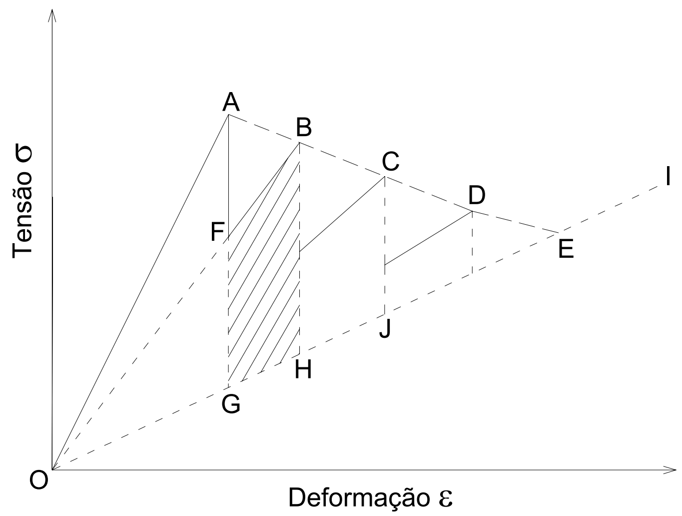


Figura 6-4 - Análise da perda de rigidez em laminados $[0°_l/90°_m]_s$ [Tay *et al.* (1993)]

Assume-se a ocorrência de novas trincas quando, devido ao incremento do carregamento, a área FBHG alcança um valor crítico. Uma nova trinca transversal é formada e a rigidez efetiva se reduz novamente, indicada pela inclinação OC, a qual é calculada pela equação (4.40) com o novo valor de α_2. Denotando a área FBHG da Figura 6-4 como U_{0i}, onde o índice i indica a lâmina em análise, a equação (6.10) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$U_{0i} = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xi}\Delta\varepsilon_{xi} + \sigma_{yi}\Delta\varepsilon_{yi} + \tau_{xyi}\Delta\gamma_{xyi}\right) \qquad (6.11)$$

Excluído: a à
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Excluído: Figura 6-4
Excluído: Figura 6-4
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt, Não verificar ortografia ou
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt, Não verificar ortografia ou
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Excluído: Figura 6-4
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt, Não verificar ortografia ou
Formatado: Fonte: Century Schoolbook, 11 pt
Excluído: 11
Excluído: 11
Excluído: 11

Excluído: Apêndice A: ¶

onde σ_{xi}, σ_{yi} e τ_{xyi} são as tensões na direção *x*, na direção *y* e de cisalhamento no plano *xy* da lâmina *i,* respectivamente, e $\Delta\varepsilon_{xi}$, $\Delta\varepsilon_{yi}$ e $\Delta\gamma_{xyi}$ são as deformações na direção *x*, na direção *y* e no plano *xy* da lâmina *i,* respectivamente. Portanto, podemos definir a quantidade de energia U_i para a formação de uma trinca como:

Excluído: . E

$$U_i = \frac{t}{t_2} L U_{0i} \tag{6.12}$$

Excluído: 12

Excluído: 12

Excluído: 12

onde *t* é a espessura do laminado, t_2 é a soma das espessuras das lâminas de 90° e *L* é o comprimento do laminado. Segundo Tay [Tay *et al.* (1993)], o comprimento *L* é utilizado na equação (6.12) porque, como observado em experimentos, a probabilidade do desenvolvimento de microtrincas na matriz nas lâminas de 90° é diretamente proporcional ao comprimento do laminado. A razão $\frac{t}{t_2}$ também é adotada porque grande parte da energia de deformação do laminado é empregada na formação das microtrincas. Portanto, essa razão representa a parcela da energia de deformação que é empreendida na formação das microtrincas nas lâminas de 90º.

Desta forma, assume-se a formação de uma nova microtrinca quando:

$$U_i \geq G_{Ic} \tag{6.13}$$

Excluído: 13

Excluído: 13

Excluído: 13

onde G_{Ic} é a taxa de liberação de energia crítica no modo I para a formação de uma trinca transversal. O processo de determinação da densidade de trincas é repetido para cada microtrinca formada, usando o mesmo valor de G_{Ic}. Como visto na figura 6-4, uma seqüência de pontos é formada (A, B, C, D, ... , E) até o limite representado pela linha I ser alcançado. A partir deste, as microtrincas na matriz das lâminas de 90º não influenciam mais a rigidez do laminado. Deve-se observar que na prática, o intervalo entre os pontos formados é muito pequeno, tornando a curva tensão-deformação suave, ao contrário da curva mostrada na Figura 6-4.

6.4 Simulação da Propagação do Dano

Um algoritmo foi implementado para viabilizar a análise da perda de rigidez de um laminado. Os passos implementados no programa, representando o método desenvolvido, podem ser visualizados na Figura 6-5. Observa-se que somente após o cálculo das tensões em cada lâmina o critério de falha é utilizado para avaliar possíveis danos no interior do laminado, ou seja, o critério é aplicado para cada lâmina. Caso após o incremento do carregamento, a estrutura não apresente nenhum dano, ou seja, o critéro de falha não é satisfeito, ela é considerada em equilíbrio e um novo incremento no carregamento é aplicado. No caso do surgimento do dano, detectado quando o critério de falha é satisfeito, as propriedades do compósito afetadas por essa ocorrência são degradadas, tendo que ser recalculadas. No caso particular deste trabalho, a degradação das propriedades do material é representada pelas variáveis internas de estado. Após a atualização dessas propriedades, a estrutura é analisada novamente sob a ação do mesmo carregamento. Constatando-se o surgimento de dano adicional após esta reanálise, as propriedades do material são degradas novamente e a estrutura sofre uma nova análise, caso contrário, o carregamento sofre novo incremento. Este ciclo continua até que a rigidez do laminado alcance o valor da rigidez das lâminas de 0º.

Excluído: Apêndice A: ¶

Excluído: Figura 6-4

Excluído: e cada lâmina

Excluído: . C

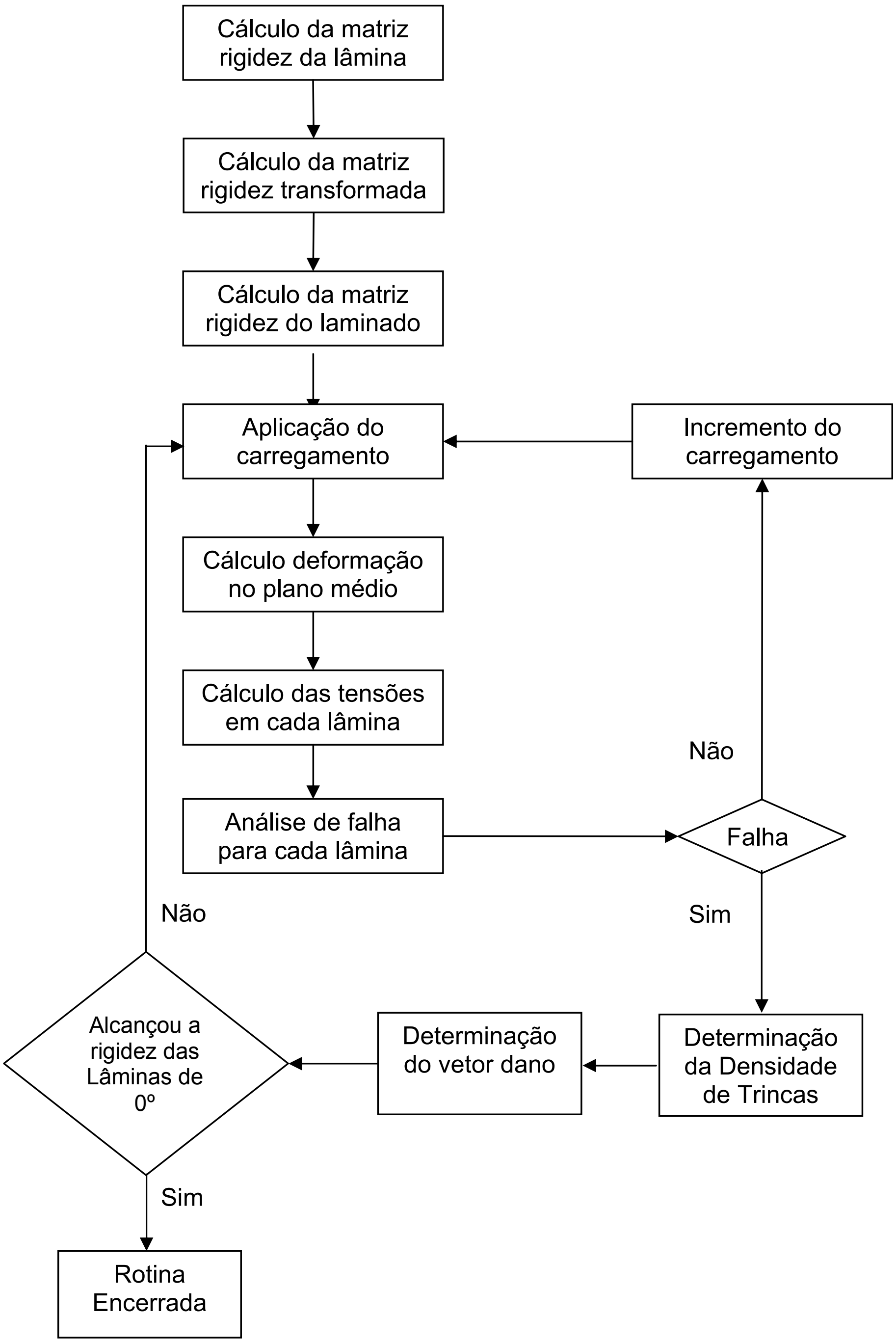


Figura 6-5 - Fluxograma do método proposto implementado.

Excluído: Apêndice A: ¶

7. Aplicações e Resultados

7.1 Introdução

Este capítulo visa apresentar algumas aplicações do modelo desenvolvido nos capítulos anteriores para placas laminadas com dano por trincas transversais na matriz. Para este fim, utiliza-se o Método Modificado da Função de Green Local, aplicado anteriormente por Machado [Machado (1992)] em problemas de placas laminadas, mas aqui alterado considerando-se o dano. Todas as análises foram executadas através de uma Teoria de Primeira Ordem, usando-se um modelo de camada simples baseado em deslocamentos. Tendo em vista tratar-se de um problema não-linear, onde a quantidade de elementos exerce forte influência, utilizaram-se várias malhas de elementos finitos e de elementos de contorno para estudo do processo de convergência. São considerados apenas elementos finitos lagrangeanos quadráticos de 9 (nove) nós na discretização do domínio, enquanto que, no contorno são empregados elementos de 3 (três) nós. Desta forma, como no Método dos Elementos de Contorno, nós duplos são inseridos em pontos de descontinuidade da normal e/ou de condições de contorno. Como exemplo, é mostrado na Figura 7.1, o caso de uma placa quadrada, seu domínio é discretizado por 4 (quatro) elementos finitos e 8 (oito) elementos de contorno. Os resultados das análises são comparados com os modelos de Tay e Lim, e resultados experimentais.

Em todas as aplicações, utilizaram-se:

- Relações tensão-deformação para lâminas ortotrópicas finas sob estado plano de tensão;
- Chapa quadrada de dimensões: 2m de largura por 2m de comprimento (vide Figura 7.2);
- Condições de contorno foram aplicadas levando-se em conta a condição de dupla simetria (vide Figura 7.2);

Excluído: 1

Excluído: 1

- Carregamento uniaxial de tração na direção “x”, em Newtons (vide Figura 7.2);
- Para o cálculo das variáveis internas de estado, empregou-se somente a equação (4.74) para determinar o máximo deslocamento de abertura de trinca;
- O valor de G_{Ic} adotado para a determinação na equação (6.13) é de 250 J/m^2 para laminado de vidro/epóxi, e de 228 J/m^2 para laminado de grafite/epóxi [Tay *et al.* (1993)];
- Os materiais empregados assim como suas propriedades estão listados na Tabela 7.1 e Tabela 7-2;
- Os resultados para perda de rigidez foram levantados a partir de dois nós. O primeiro situado no centro do laminado, a 0.5 m da base, e o segundo a 0.75 m da base, como na Figura 7-3. Desta forma, procurou-se verificar se o comportamento do dano é o mesmo em toda a extensão do laminado.
- O critério de falha é aplicado em todas as lâminas de 90º, uma a uma. Apesar disto, admite-se o surgimento de uma só trinca, instantaneamente, em todas as lâminas de 90º quando o critério é satisfeito;
- Visando tornar as simulações mais rápidas, estas foram realizadas com um passo de carga de 250 N, e formação de 5 trincas simultaneamente, quando satisfeito o critério de falha.
- As simulações foram realizadas até o valor de deformação de 1%.

Tabela 7-1 – Relação dos materiais utilizados - Highsmith e Reifsnider (1982)

Material	**E_{11} (GPa)**	**E_{22} (GPa)**	**G_{12} (GPa)**	**G_{23} (GPa)**	**υ_{12}**
Grafite / Epóxi (Gr/Ep)	**142.00**	**9.85**	**4.48**	**3.37**	**0.3**
Vidro / Epóxi (Gl/Ep)	**41.70**	**13.00**	**3.40**	**3.40**	**0.3**

Tabela 7-2 – Propriedade geométrica dos laminados

Material	Empilhamento	Espessura de uma lâmina	Espessura total laminado
Grafite / Epóxi (Gr/Ep)	**[0º/90º/90º/90º/90º]$_s$**	**0,127 mm**	**1,270 mm**
Vidro / Epóxi (Gl/Ep)	**[0º/90º/90º/90º]$_s$**	**0,203 mm**	**1,624 mm**

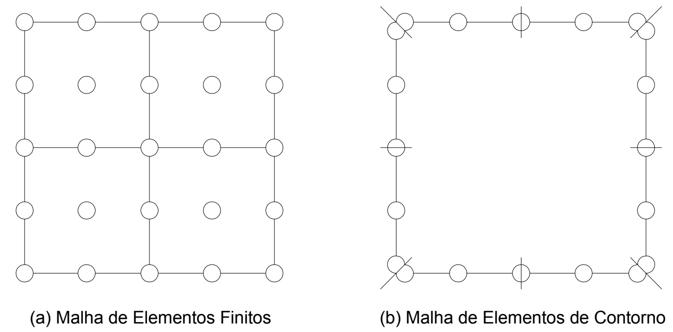


Figura 7-1 - Exemplo de discretização de uma placa, utilizando-se malha 2x2 (4 elementos finitos e 8 elementos de contorno)

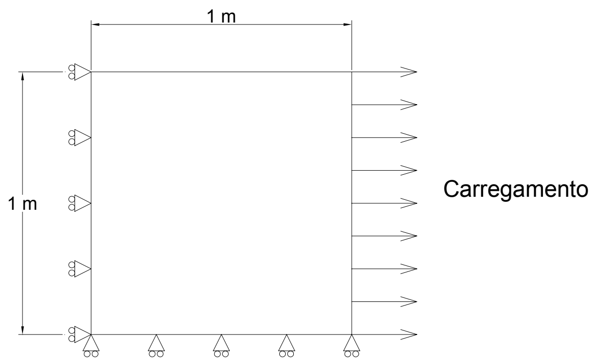


Figura 7-2 - Dimensões e condições de contorno para o problema proposto de placas laminadas com trincas transversais na matriz.

Excluído: Apêndice A: ¶

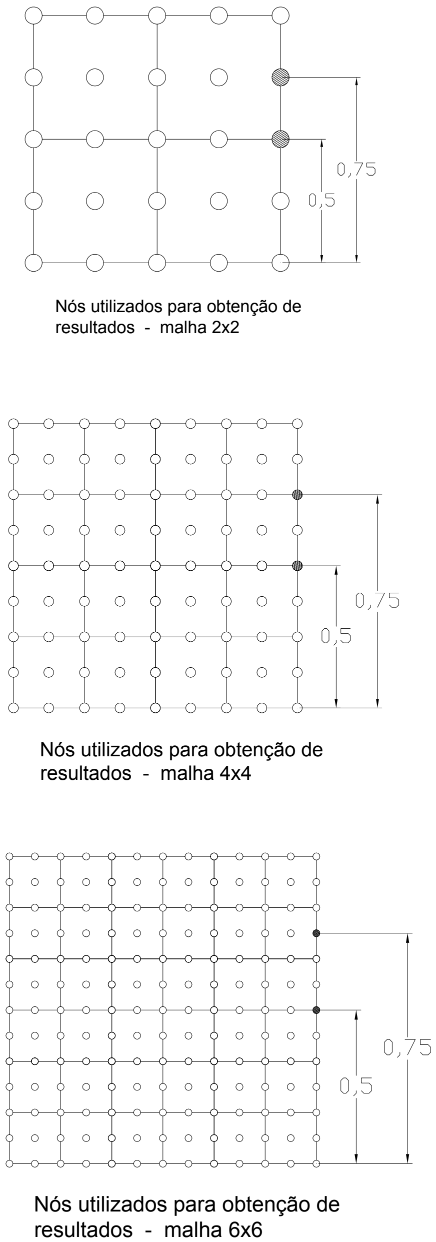


Figura 7-3 – Nós utilizados para obtenção dos resultados

7.2 Aplicações

7.2.1 Laminados sem Dano e Danificados:

Objetivando-se demonstrar a capacidade do modelo desenvolvido em simular a perda de rigidez, realiza-se uma comparação utilizando-se malhas 2x2, 4x4 e 6x6 entre os seguintes casos:

- Caso 1: peça sã, ou seja, laminado sem dano,
- Caso 2: lâminas internas totalmente danificadas, onde somente as lâminas de 0º respondem ao carregamento,
- Caso 3: laminado em processo de evolução do dano.

Os resultados apresentados na Figura 7-4, Figura 7-5 e Figura 7-6 referem-se ao laminado vidro/epóxi com a configuração $[0^o/90^o_4]_s$, obtidos a partir do nó central do laminado. Observa-se que os resultados alcançados para as três malhas demonstram, que método desenvolvido é capaz de descrever o comportamento do laminado quando danificado. Além disso, destaca-se uma queda na rigidez da placa quando a deformação atinge o valor aproximado de 0.225%, como demonstrado em outros trabalhos [Talreja (1985)], [Tay *et al.* (1993)]. Os valores obtidos a partir do nó situado a 0.75m da face inferior do mesmo laminado são visualizados na Figura 7-7, Figura 7-8 e na Figura 7-9. Além de se verificar uma coerência com os resultados anteriores, constata-se uma melhora para as malhas 2x2 e 6x6, ainda que discreta.

Os resultados obtidos a partir do nó central apresentados na Figura 7-10, Figura 7-11 e Figura 7-12 são relativos ao laminado grafite/epóxi com a configuração $[0^o/90^o_4]_s$. Para o nó situado a 0.75m da face inferior do laminado, exibe-se a simulação na Figura 7-13, Figura 7-14 e na Figura 7-15. Neste caso, devido a maior rigidez das lâminas, o método demonstra que as trincas transversais na matriz afetam o laminado de forma menos expressiva do que no laminado de vidro/epóxi.

Torná-se importante observar nessas simulações que, ao contrário do que era do se esperar, em ambos os casos, para vidro/epóxi e para grafite/epóxi, nota-se que a partir de um determinado valor de deformação, a perda de rigidez estabiliza-se, mesmo com o aumento da densidade de trincas.

Excluído: Apêndice A: ¶

Formatado: Com marcadores + Nível: 1 + Alinhado em: 1,88 cm + Tabulação após: 2,51 cm + Recuar em: 2,51 cm

Excluído: laminados sãos (sem dano), laminados totalmente danificados, onde somente as lâminas de 0º respondem ao carregamento e laminados com dano em evolução. Esta comparação é promovida para laminados de mesmo empilhamento, utilizando-se malhas 2x2, 4x4 e 6x6.¶

Excluído: $[0^o/90^o/90^o/90^o]_s$

Excluído: a fidelidade do

Excluído: , nessas últimas análises,

Excluído: Por outro lado, o

Excluído: E

Formatado: Centralizado, Recuo: Primeira linha: 0 cm

Excluído: Apêndice A: ¶

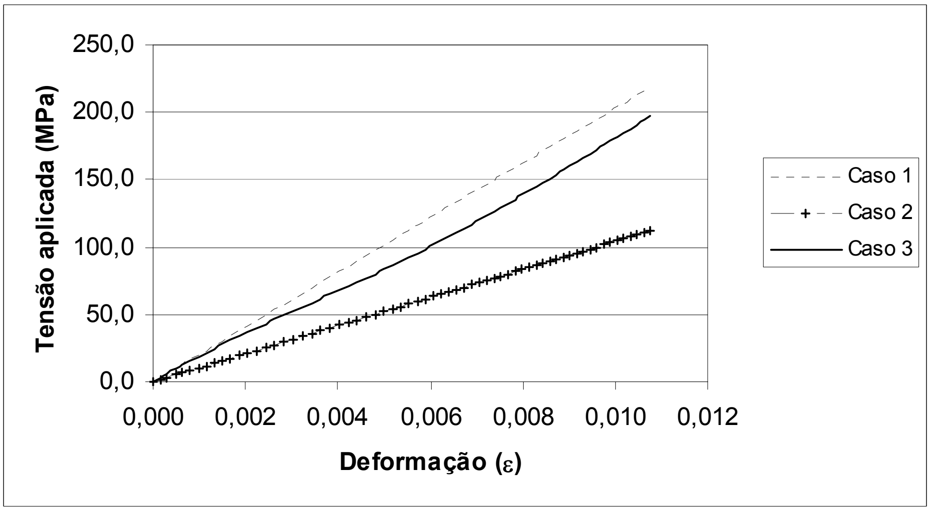
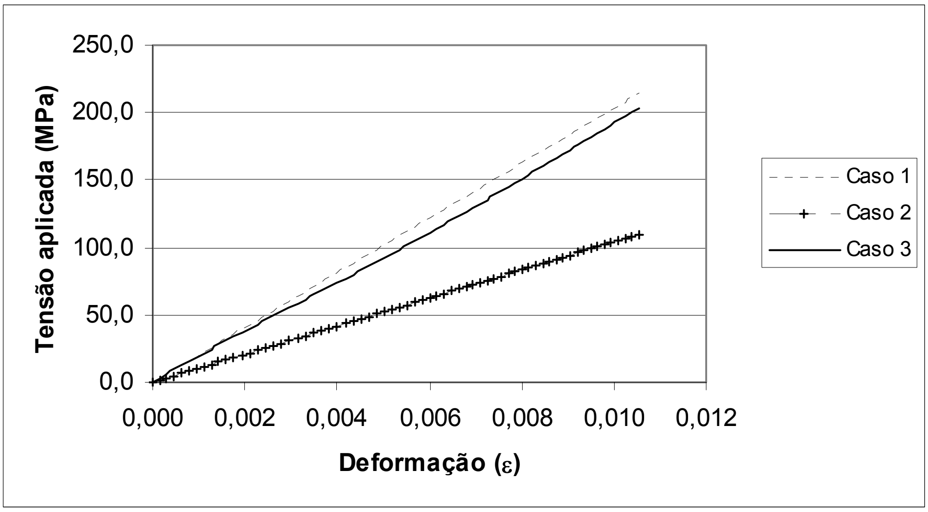
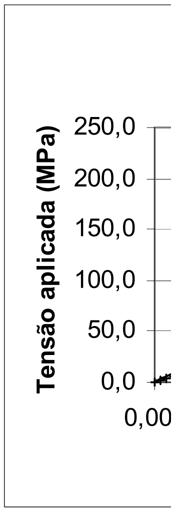


Figura 7-4 - Laminado Gl/Ep [0º/90º$_3$]$_s$ – comparação entre laminados sem dano, totalmente danificados e com dano em evolução, utilizando-se malha 2x2, e nó situado a 0.5m da face inferior do laminado.

Excluído: Erro! Vínculo não válido.¶

Excluído: ¶

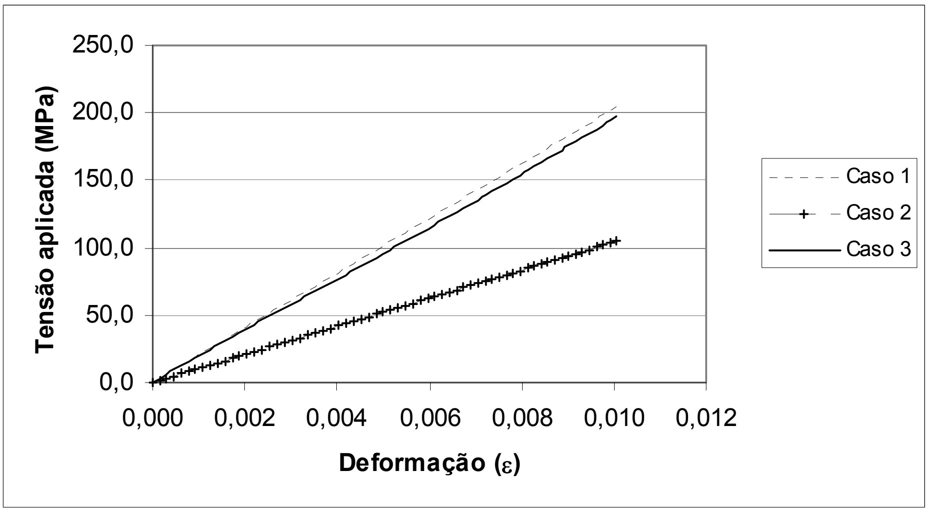




Excluído:

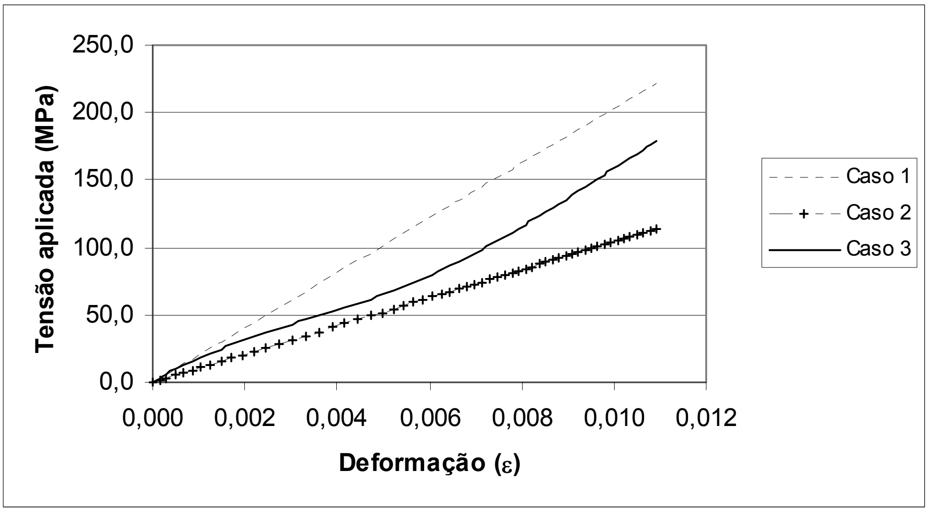
Figura 7-5 - Laminado Gl/Ep [0º/90º$_3$]$_s$ – comparação entre laminados sem dano, totalmente danificados e com dano em evolução, empregando-se malha 4x4, e nó situado a 0.5m da face inferior do laminado.

Excluído: Apêndice A: ¶



Excluído: ¶

Figura 7-6 - Laminado Gl/Ep [0º/90º$_3$]$_s$ – comparação entre laminados sem dano, totalmente danificados e com dano em evolução, empregando-se malha 6x6, e nó situado a 0.5m da face inferior do laminado.

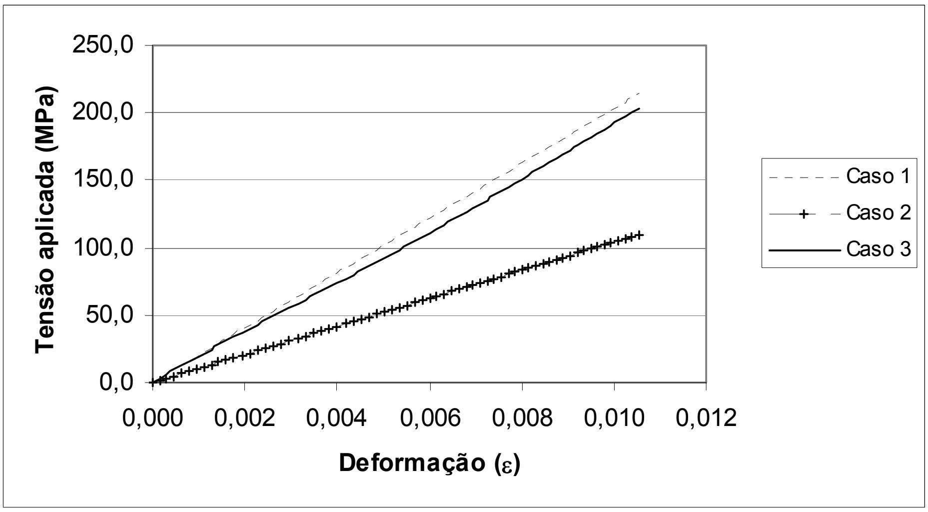


Excluído: ¶

Figura 7-7 - Laminado Gl/Ep [0º/90º$_3$]$_s$ – comparação entre laminados sem dano, totalmente danificados e com dano em evolução, empregando-se malha 2x2, e nó situado a 0.75m da face inferior do laminado.

Excluído: Apêndice A: ¶

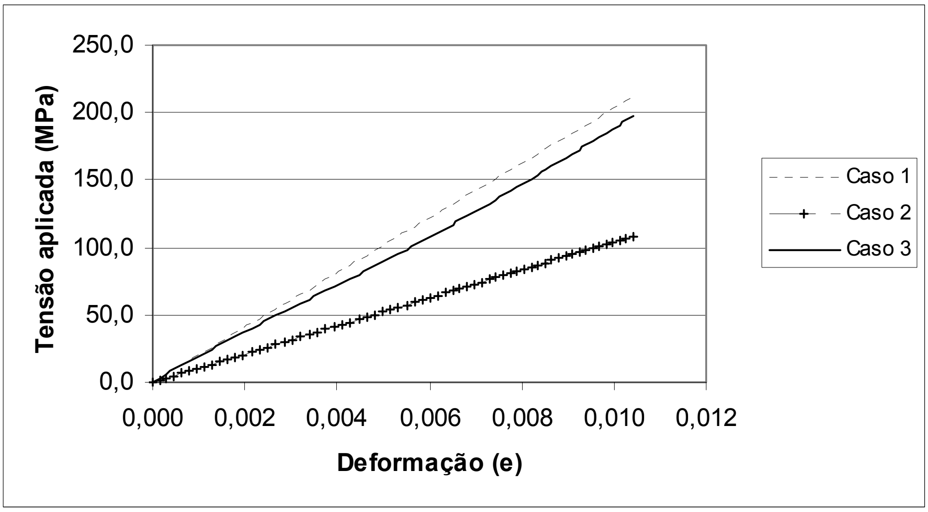
Excluído: ¶



Excluído:

Figura 7-8 - Laminado Gl/Ep [0º/90º$_3$]$_s$ – comparação entre laminados sem dano, totalmente danificados e com dano em evolução, empregando-se malha 4x4, e nó situado a 0.75m da face inferior do laminado.

Excluído: ¶

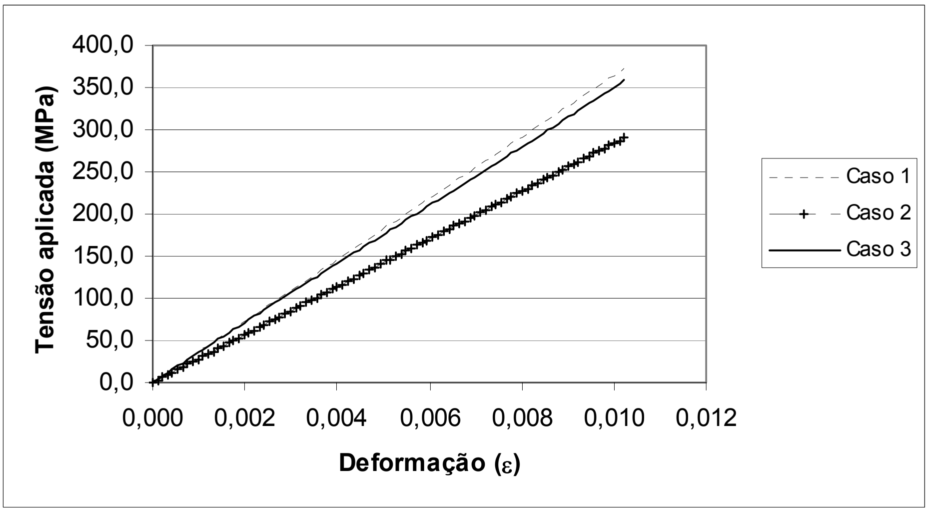


Excluído:

Figura 7-9 - Laminado Gl/Ep [0º/90º$_3$]$_s$ – comparação entre laminados sem dano, totalmente danificados e com dano em evolução, empregando-se malha 6x6, e nó situado a 0.75m da face inferior do laminado.

Excluído: Apêndice A: ¶

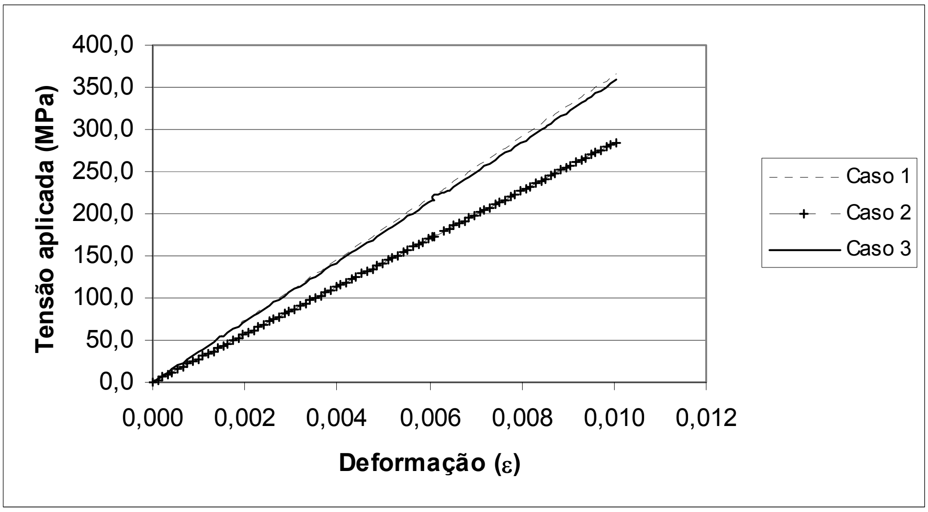
Excluído: ¶



Excluído:

Figura 7-10 - Laminado Gr/Ep [0º/90º$_4$]$_s$ – comparação entre laminados sem dano, totalmente danificados e com dano em evolução utilizando-se malha 2x2, e nó situado a 0.5m da face inferior do laminado.

Excluído: ¶



Excluído:

Figura 7-11 - Laminado Gr/Ep [0º/90º$_4$]$_s$ – comparação entre laminados sem dano, totalmente danificados e com dano em evolução valendo-se da malha 4x4, e nó situado a 0.5m da face inferior do laminado.

Excluído: Apêndice A: ¶

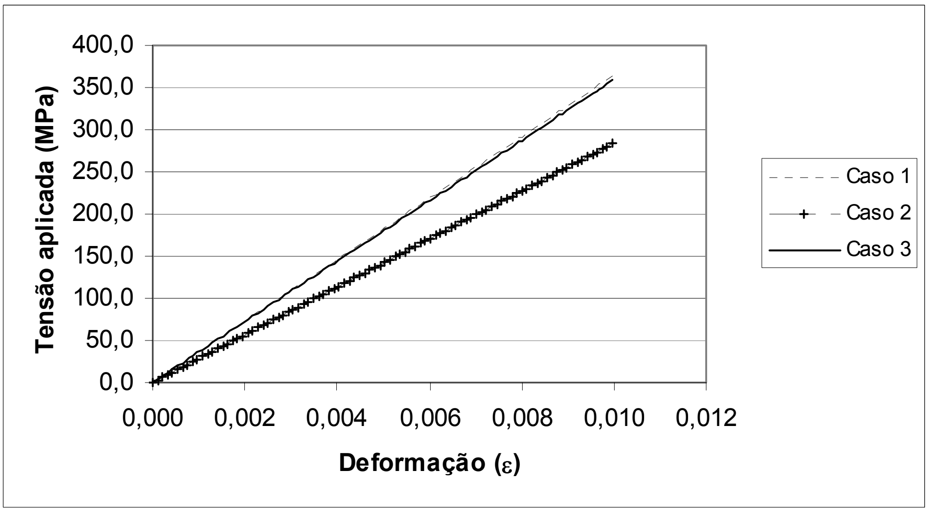


Figura 7-12 - Laminado Gr/Ep [0º/90º$_4$]$_s$ – comparação entre laminados sem dano, totalmente danificados e com dano em evolução valendo-se da malha 6x6, e nó situado a 0.5m da face inferior do laminado.

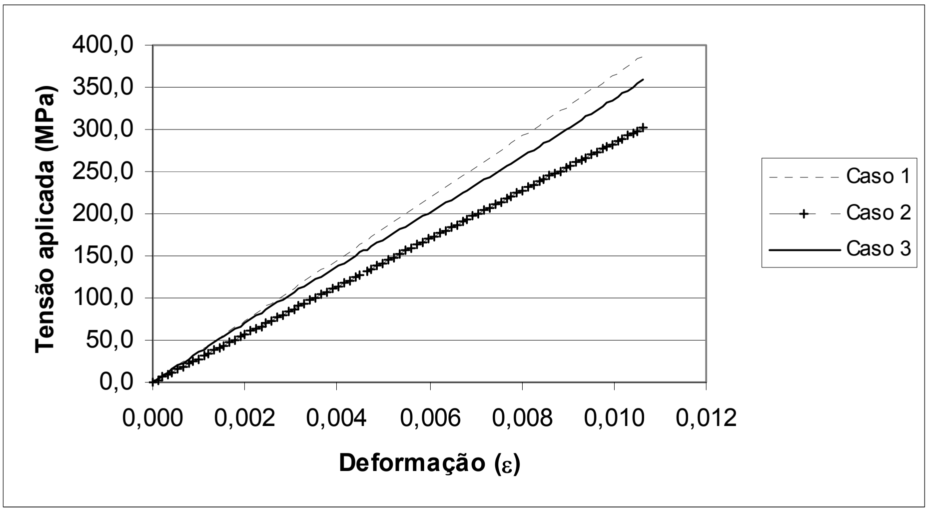
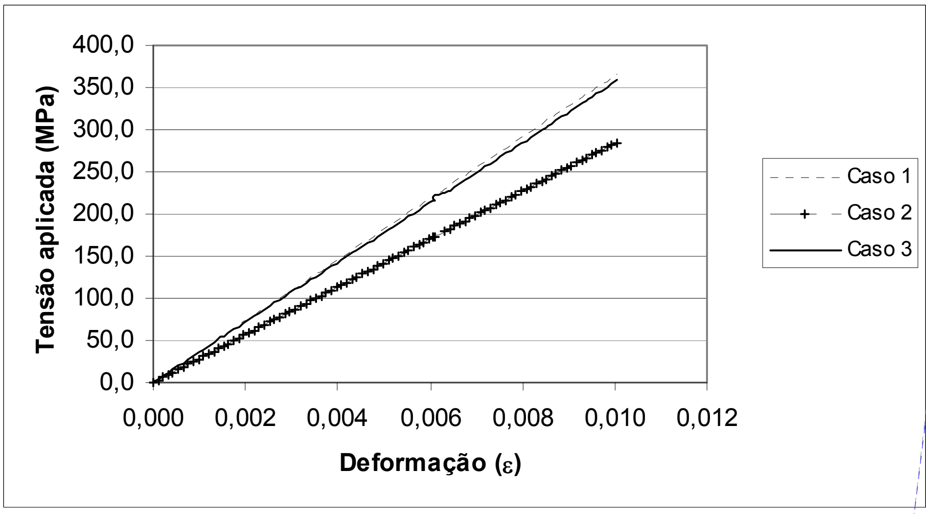
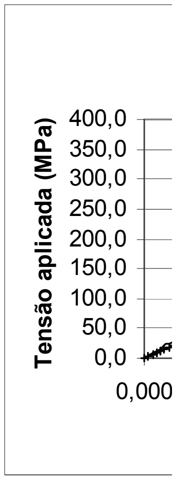


Figura 7-13 - Laminado Gr/Ep [0º/90º$_4$]$_s$ – comparação entre laminados sem dano, totalmente danificados e com dano em evolução valendo-se da malha 2x2, e nó situado a 0.75m da face inferior do laminado.

Excluído: Apêndice A: ¶

Excluído: ¶

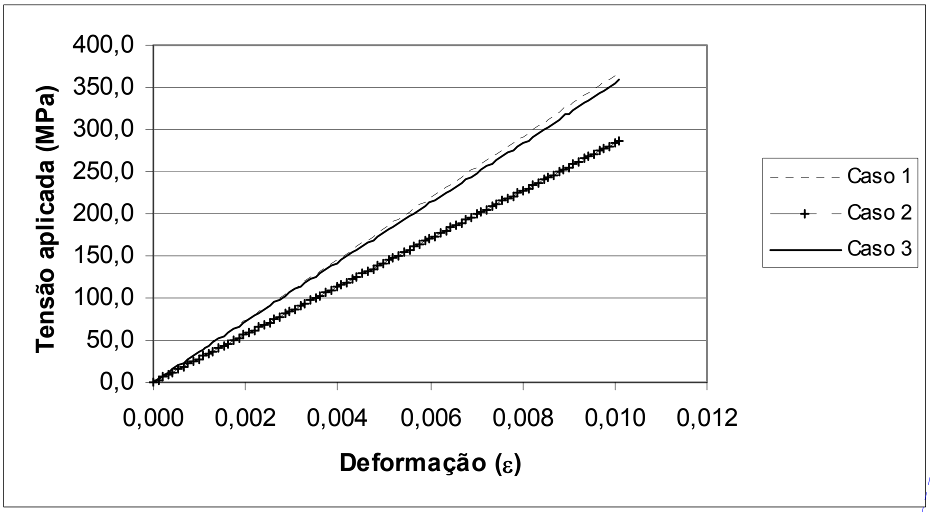


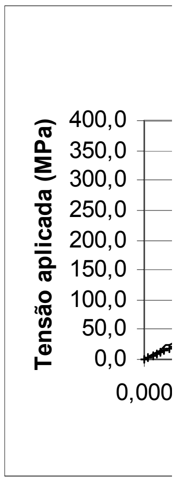


Excluído:

Figura 7-14 - Laminado Gr/Ep [0º/90º$_4$]$_s$ – comparação entre laminados sem dano, totalmente danificados e com dano em evolução valendo-se da malha 4x4, e nó situado a 0.75m da face inferior do laminado.

Excluído: ¶





Excluído:

Figura 7-15 - Laminado Gr/Ep [0º/90º$_4$]$_s$ – comparação entre laminados sem dano, totalmente danificados e com dano em evolução valendo-se da malha 6x6, e nó situado a 0.75m da face inferior do laminado.

7.2.2 Refino dos Modelos:

Para se verificar a convergência dos resultados, primeiramente verificou-se qual passo de carga produziria o melhor resultado, sem onerar o desempenho do programa implementado. Em seguida, utilizou-se malhas com 4 (quatro), 16 (dezesseis) e 36 (trinta e seis) elementos finitos no domínio.

Os resultados para diferentes passos de carga, 10N, 25N, 50N, 125N, 200N e 250N, obtidos no nó a 0.75m da face inferior do laminado, a partir da malha 2x2, são apresentados na Figura 7-16, para laminado de vidro/epóxi $[0^o/90^o_3]_s$, e na Figura 7-17, para laminado de grafite/epóxi $[0^o/90^o_4]_s$. Para os incrementos de 10N, 25N, 50N, 125N e 200N, formá-se uma única trinca quando o critério é satisfeito, ou seja, quando a energia de deformação alcança os valor de 250 J/m^2 para vidro/epóxi e de 228 J/m^2 para grafte/epóxi. Para o incremento de 250N, formam-se 5 trincas, ou seja, quando a energia de deformação alcança o valor de 1250 J/m^2 para vidro/epóxi e de 1140 J/m^2 para grafite/epóxi. Vale a pena ressaltar que esses valores de passo de carga foram escolhidos de tal forma a possibilitar que os resultados fossem colhidos, durante a simulação, de 5000 em 5000N.

A análise demonstra a capacidade do modelo em identificar a quantidade correta de trincas formadas no laminado durante o carregamento, e a viabilidade de substituir a simulação com incremento de carga 10N e formação de uma única trinca quando o critério é atingido, que é o passo de carga que proporciona o menor erro acumulado, pela simulação com incremento de 250N e formação de 5 (cinco) trincas. Nota-se em ambos os laminados, podendo ser verificado com maior nitidez no vidro/epóxi que, quanto menor o incremento, mais precisa é a quantificação de trincas. Isso porque o valor calculado para a energia de deformação aproximá-se muito do valor crítico do critério, quando esse é satisfeito, diminuindo assim o erro acumulado na simulação. Já com passos de carga maiores, o critério de falha da equação (6.13) é satisfeito com valores de energia de deformação significativamente diferentes do valor crítico, aumentando o erro acumulado na simulação, resultando na formação de um número menor de trincas, tendo por conseqüência, uma quantificação de perda de rigidez imprecisa.

Excluído: Apêndice A: ¶

Excluído: ament

Excluído: e

Excluído: , e

Excluído: p

Excluído: s

Excluído: .

Excluído:

Excluído: r

Excluído: Ou seja,

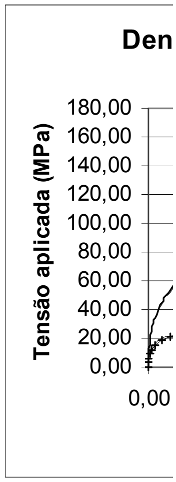
Excluído: mais rapidamente,

Excluído: aior

Excluído: ¶
¶

Excluído: Apêndice A: ¶

Excluído: ¶



Excluído:

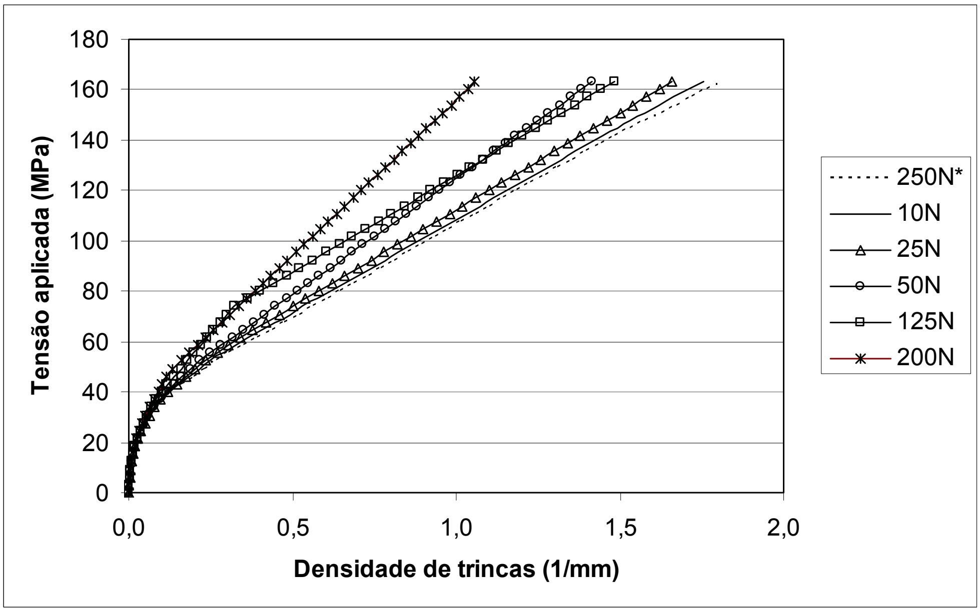
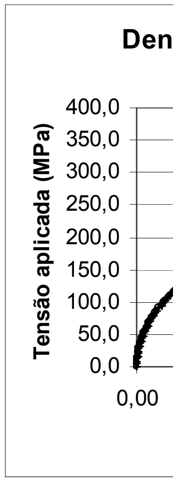


Figura 7-16 - Laminado Gl/Ep [0º/90º3]s – comparação entre incrementos de diferentes cargas (*formação de 5 trincas simultaneamente).

Excluído: ¶



Excluído:

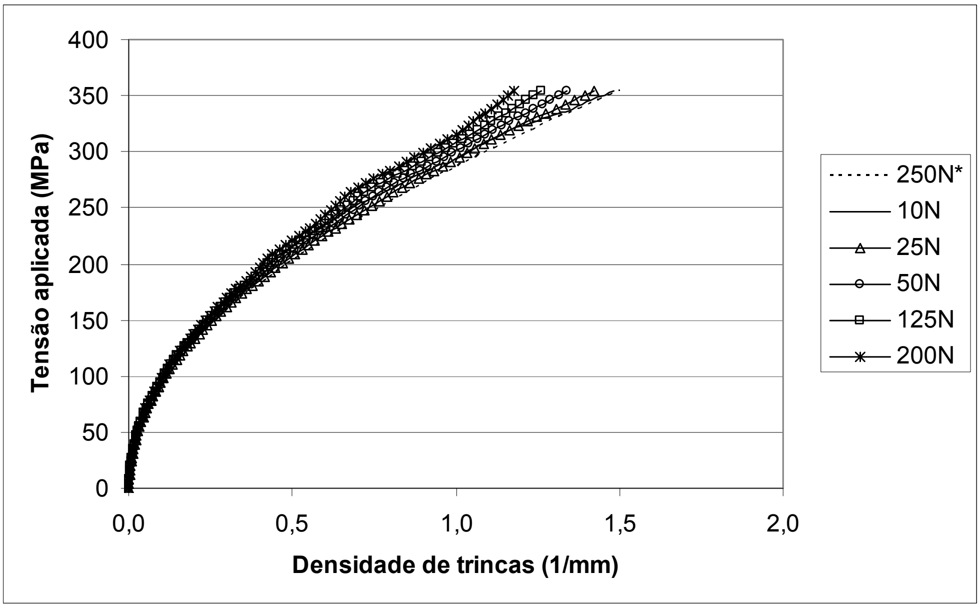
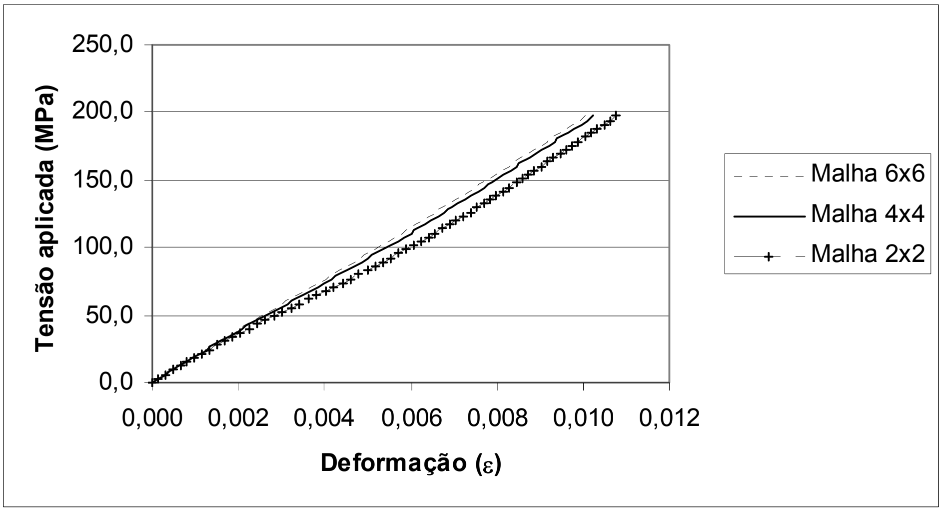


Figura 7-17 – Laminado Gr/Ep [0º/90º4]s – comparação entre incrementos de cargas diferentes (formação de 5 trincas simultaneamente).

Excluído: Apêndice A: ¶

Os resultados referentes ao refino da malha de elementos finitos são mostrados na Figura 7-18 e Figura 7-19, para laminado de vidro/epóxi [0º/90º$_3$]$_s$, e na Figura 7-20 e Figura 7-21, para laminado de grafite/epóxi [0º/90º$_4$]$_s$. O refino da malha mostrá-se eficiente para os dois nós, porém, com resultados levemente melhores no nó situado a 0.75m da face inferior do laminado de vidro/epóxi. Já para o laminado grafite/epóxi, devido a sua maior rigidez, o refino de malha apresenta uma convergência menos acentuada, para qualquer um dos dois nós utilizados.

Excluído: ¶



Excluído:

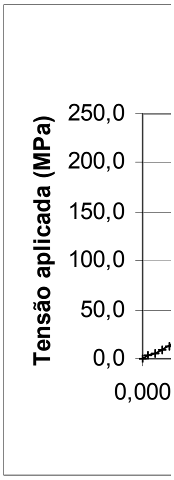
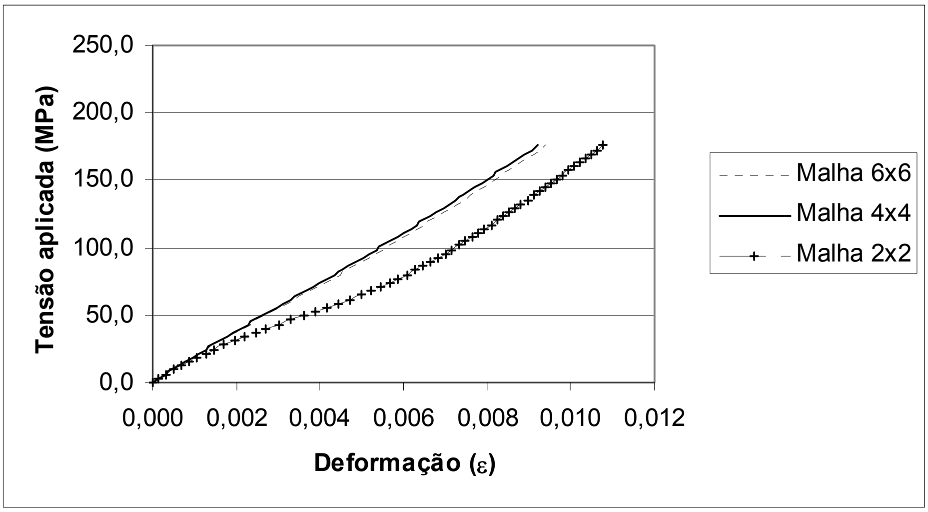


Figura 7-18 – Laminado Gl/Ep [0º/90º$_3$]$_s$ – comparação entre malhas de elementos finitos diferentes para o nó situado a 0.5m da face inferior do laminado.

Excluído: Apêndice A: ¶

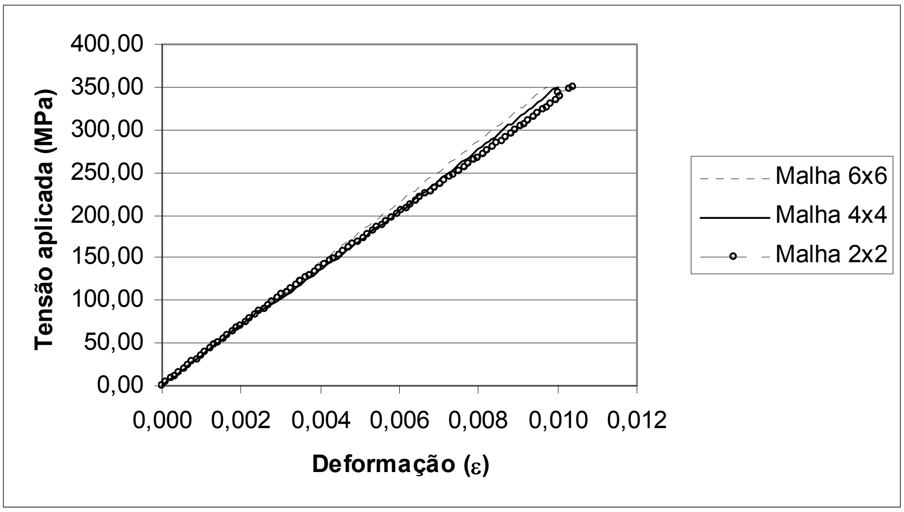
Excluído: ¶



Excluído:

Figura 7-19 - Laminado Gl/Ep [0º/90º$_3$]$_s$ – comparação entre malhas de elementos finitos diferentes para o nó situado a 0.75m da face inferior do laminado.

Excluído: ¶

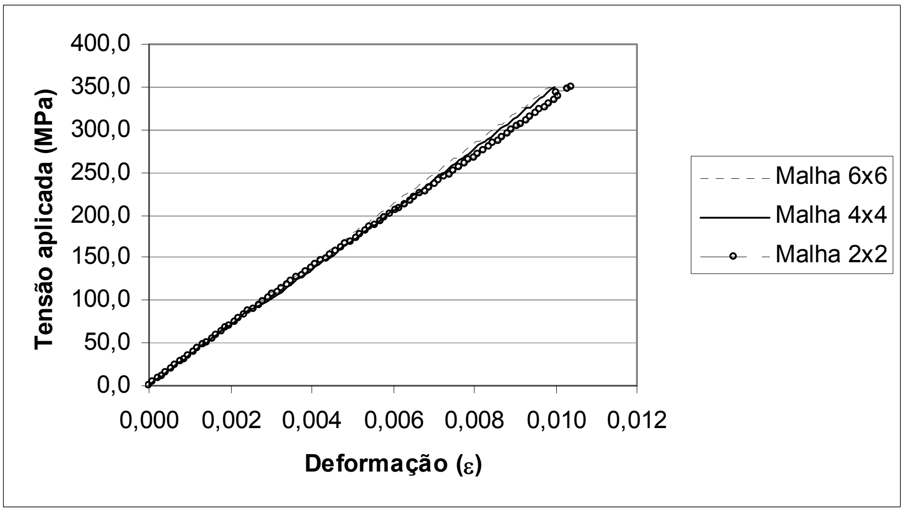


Excluído:

Figura 7-20 - Laminado Gr/Ep [0º/90º$_4$]$_s$ – comparação entre malhas de elementos finitos diferentes para o nó situado a 0.5m da face inferior do laminado.

Excluído: Apêndice A: ¶

Excluído: ¶



Excluído:

Figura 7-21 - Laminado Gr/Ep [0º/90º$_4$]$_s$ – comparação entre malhas de elementos finitos diferentes para o nó situado a 0.75m da face inferior do laminado.

7.2.3 Comparação com outros resultados:

Apesar dos resultados apresentados anteriormente demonstrarem a capacidade do modelo em prever a perda de rigidez de um laminado quando submetido a um carregamento, neste tópico, compara-se estes resultados com outros da literatura que também empregaram este método [Tay e Lim (1993)], e com outros que utilizaram métodos semelhantes, [Talreja (1985)]. A comparação entre resultados é mostrada na Figura 7-22 e Figura 7-23, para laminado de vidro/epóxi [0º/90º$_3$]$_s$, e na Figura 7-24 e Figura 7-25, para laminado de grafite/epóxi [0º/90º$_4$]$_s$.

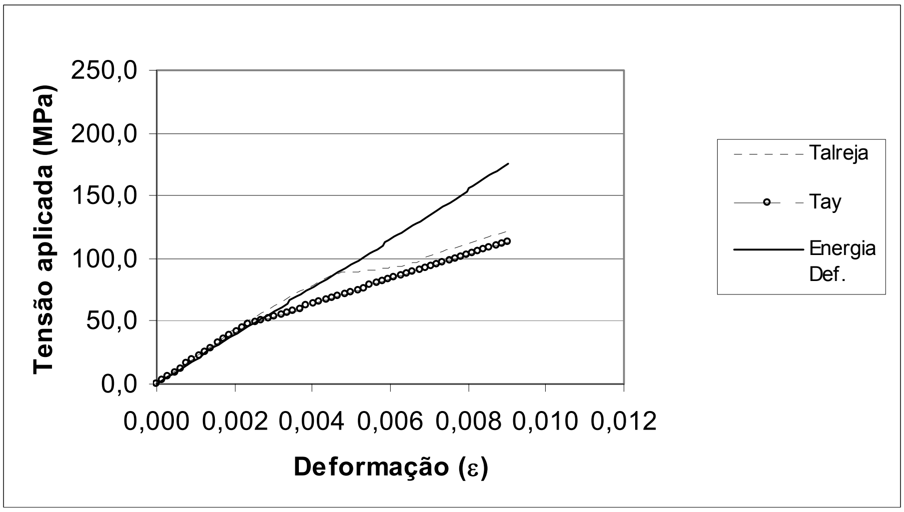
Excluído: *et al.*

Para o laminado vidro/epóxi, os resultados alcançados pelo modelo desenvolvido combinam com os resultados obtidos por Tay e Talreja até a deformação de 0.45%, destacando-se uma tendência de melhores resultados quando o nó a 0.75m da face inferior do laminado é utilizado. Além disso, o início da perda de rigidez captada por Tay, quando a deformação atinge um valor de 0.22%, também foi alcançada pelo modelo desenvolvido, ainda que de uma forma mais suave.

Já para o laminado grafite/epóxi, para qualquer um dos dois nós utilizados, como mostra a Figura 7-24 e Figura 7-25, observa-se que o modelo detecta uma leve

Excluído: Apêndice A: ¶

queda na rigidez do laminado durante toda a simulação, diferindo dos valores conseguidos por Tay, que mostra uma acentuada queda na rigidez do laminado quando a deformação é de aproximadamente 0,44%.



Excluído:

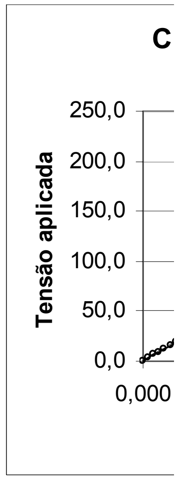
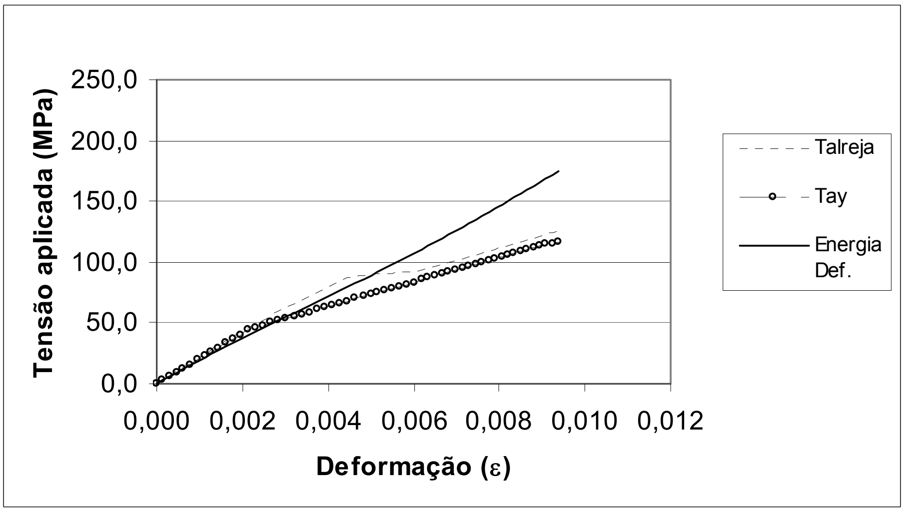


Figura 7-22 - Laminado Gl/Ep $[0^o/90^o{}_3]_s$ – comparação com os resultados da literatura, utilizando malha 6x6, e nó situado a 0.5m da face inferior do laminado.

Excluído: ¶

Excluído: Apêndice A: ¶



Excluído:

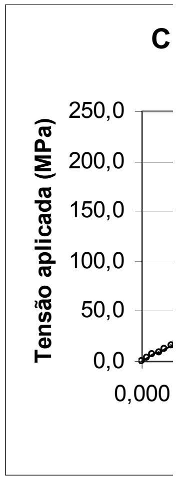
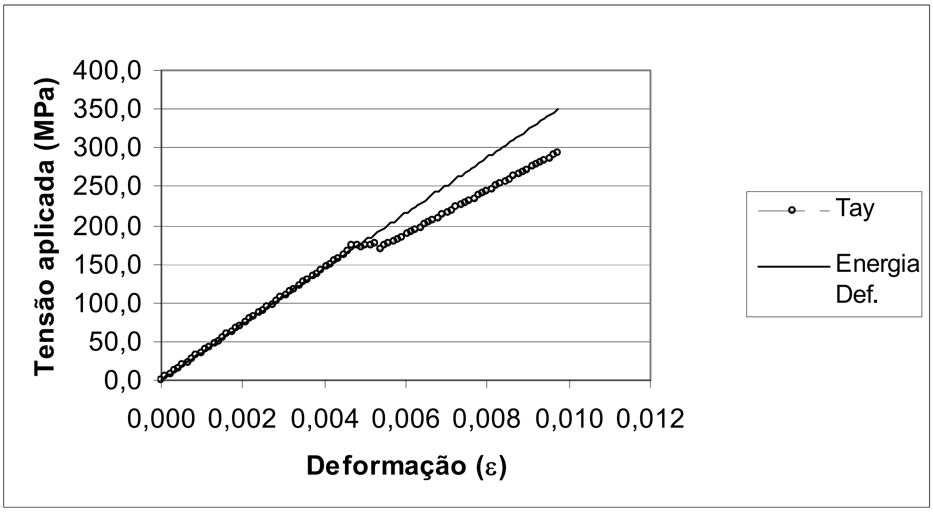


Figura 7-23 - Laminado Gl/Ep [0º/90º$_3$]$_s$ – comparação com os resultados da literatura, utilizando malha 6x6, e nó situado a 0.75m da face inferior do laminado.



Excluído:

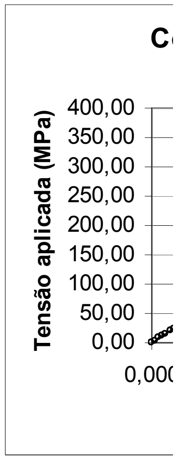
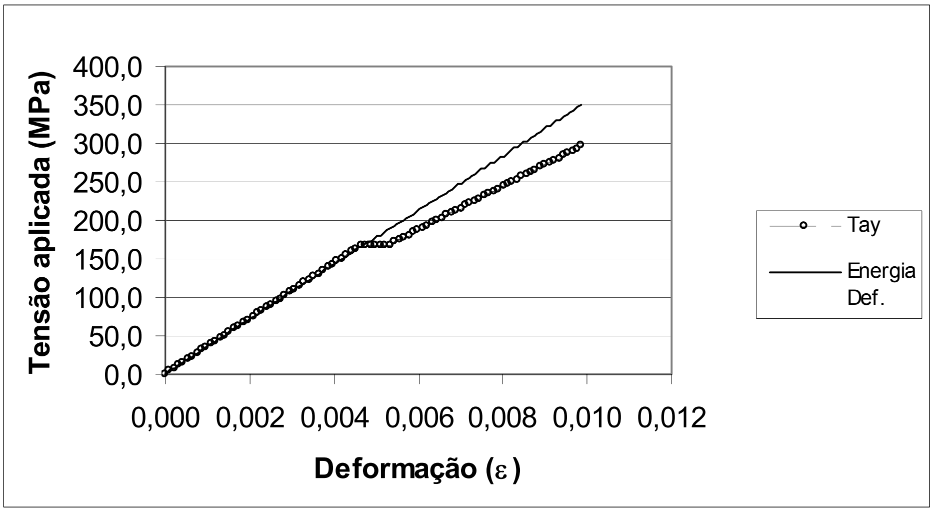
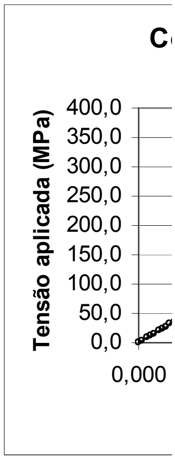


Figura 7-24 - Laminado Gr/Ep [0º/90º$_4$]$_s$ – comparação com os resultados da literatura, utilizando malha 6x6, e nó situado a 0.5m da face inferior do laminado.

Excluído: Apêndice A: ¶





Excluído:

Figura 7-25 - Laminado Gr/Ep $[0^o/90^o{}_4]_s$ – comparação com os resultados da literatura, utilizando malha 6x6, e nó situado a 0.75m da face inferior do laminado.

7.2.4 Análise com outros Critérios:

Tendo em vista que os métodos tradicionais de falha não fornecem bons resultados para descrever a perda de rigidez de um laminado devido a trincas na matriz, apresenta-se, nesta seção, uma comparação entre os métodos da Tensão Máxima, Deformação Máxima, Tsai-Hill e Tsai-Wu com o proposto. Pretendendo-se obter uma comparação fiel, esses critérios de falha foram implementados no mesmo programa utilizado para a análise do critério da energia de deformação. O laminado utilizado foi vidro/epóxi com a configuração $[0^o/90^o{}_3]_s$, como mostrado na Figura 7-26. As propriedades da lâmina necessárias para o cálculo dos critérios estão listadas na Tabela 7-3, sendo a deformação máxima longitudinal igual a 0,225% [Tay e Lim (1993)].

Excluído: t al.

Nota-se nesta análise que os métodos tradicionais identificam somente o momento em que ocorre o colapso total das lâminas de 90º. Conclui-se que esses critérios propiciam um melhor resultado para se prever a falha do material composto para outros modos de dano, como delaminações, rompimento da fibra [Iran (2001)]. Mesmo assim, o modelo implementado com esses critérios demonstrou boa

Excluído: Apêndice A: ¶

capacidade de captar o momento em que as lâminas de 90º não suportam mais ao carregamento devido a trincas transversais. Pode-se afirmar, como mostra a Figura 7-26, que o método consegue prever, para todos os critérios, a perda de rigidez de um laminado quando ocorre a formação de trincas transversais na matriz.

Tabela 7-3 - Limites de resistência para a lâmina vidro/epóxi - Highsmith e Reifsnider (1982)

X_t	1170 MPa
Y_t	32 MPa
X_c	53 MPa
Y_c	18 MPa
C	45 MPa

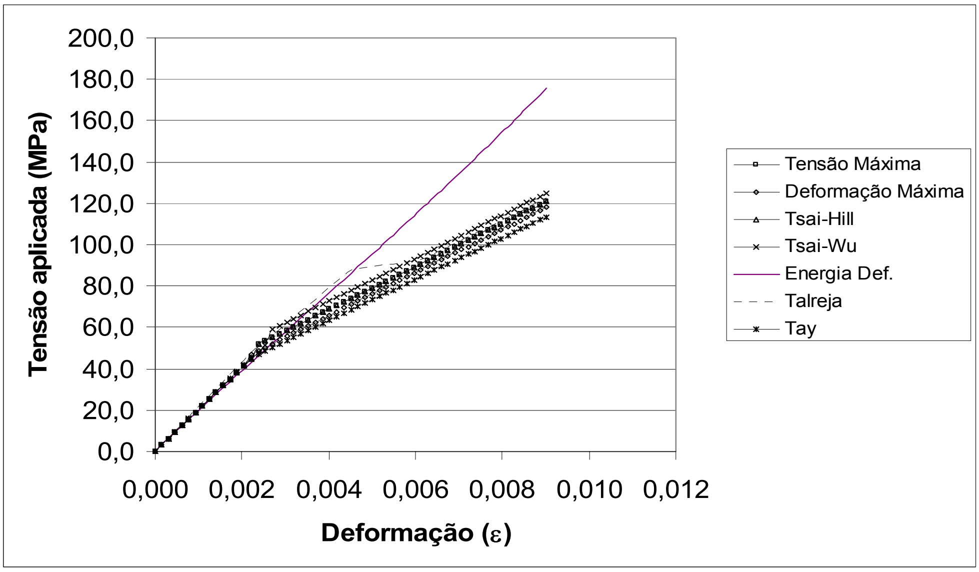
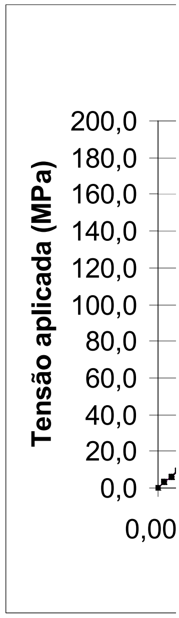


Figura 7-26 - Laminado Gl/Ep [0º/90º$_3$]$_s$ – comparação entre critérios de falha. Malha 6x6, nó central do laminado.

Excluído:



Excluído: Apêndice A: ¶

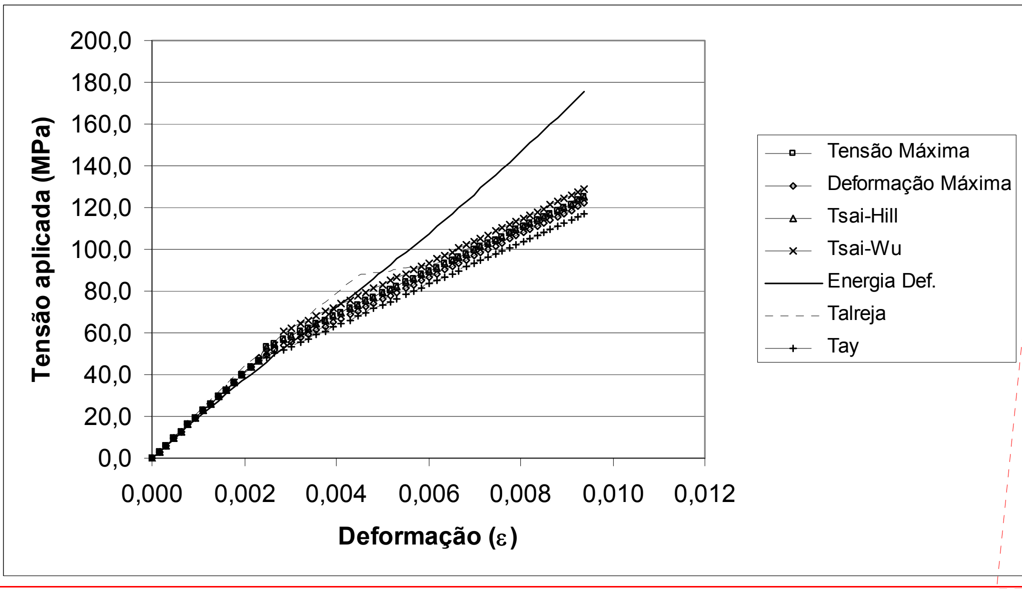


Figura 7-27 - Laminado Gl/Ep [0º/90º$_3$]$_s$ – comparação entre critérios de falha. Malha 6x6, nó situado a 0.75m da face inferior do laminado.

Excluído:

Excluído: Apêndice A: ¶

8. Conclusões

Microtrincas na matriz de um laminado ocorrem como um modo de dano muito comum em laminados, e podem degradar as propriedades mecânicas destas, atuando, por exemplo, como precursoras de outras formas de dano, que, ao final, podem levar a peça ao colapso. Outrossim, o entendimento deste processo torna-se imprescindível para qualquer projetista que se propõe a trabalhar com compósitos.

Visando aprimorar estes conhecimentos, este objetivo neste trabalho centrou-se na compreensão da evolução do dano em materiais compostos quando submetidos a carregamentos externos. Para isso, aplicou-se a Teoria de Dano em Meios Contínuos, proposta inicialmente por Kachanov (1958), desenvolvida por Allen (1988) para o caso de placas laminadas de materiais compostos e aplicadas por Lim e Tay (1996) para laminados compostos contendo trincas transversais na matriz.

O mecanismo de dano por trincas transversais é representado pelas variáveis internas de estado, obtidas por meio de restrições termodinâmicas, inseridas nas relações constitutivas das lâminas ortotrópicas, e por conseqüência, no laminado composto. Após a quantificação do dano através das variáveis, a perda de rigidez de um laminado submetido a um carregamento é avaliada adotando-se um critério de falha. Utilizou-se o modelo desenvolvido por Tay e Lim (1993) que usa a variação da energia interna de deformação para prever a formação de microtrincas na matriz. Cumpre ressaltar que essas relações constitutivas para laminados compostos com trincas transversais são obtidas pela imposição de simetria para materiais ortotrópicos, condições de estado plano de tensão e adoção da Teoria de Primeira Ordem para Placas Laminadas sendo que para as análises deste trabalho os carregamentos foram restritos aos esforços axiais e não se analisando à flexão.

Para a solução numérica, empregou-se o Método Modificado da Função de Green Local, aplicado anteriormente por Machado (1992) a diversas configurações de placas laminadas de materiais compostos, obtendo-se bons resultados para as deformações, ainda que com o emprego de malhas grosseiras, em análises estáticas

Excluído: excelentes

lineares (placas à flexão). Adicionalmente, as simulações foram realizadas considerando apenas pequenas deformações, ou seja, levando em conta somente o comportamento elástico-linear da placa (análise linear). Vale ressaltar que o presente estudo é também uma seqüência do trabalho desenvolvido por Silva (2004), que foi pioneiro no assunto com o MMFGL, quando foram analisadas placas laminadas com trincas transversais. Nota-se que com a inclusão do dano, a convergência dos resultados não é tão facilmente obtida como no caso da placa laminada composta sem danificação. Tal fato pode ser explicado devido à natureza não-linear que o dano causa nas estruturas. Como o dano é modelado através da inclusão de um vetor de dano somado ao vetor de forças aplicadas, as componentes do vetor de dano trabalham como "forças ponderadas" aplicadas aos nós das malhas em questão (para este trabalho, malhas 2x2 e 4x4 e 6x6).

Procurou-se demonstrar que, baseado no método da energia de deformação, o cálculo da perda de rigidez de um laminado devido a trincas transversais na matriz, como proposto por Tay e Lim (1993), é uma solução mais aceitável. Diferentes configurações de placas laminadas de materiais compostos foram utilizadas na análise, obtendo-se resultados que descrevem a evolução do dano, mesmo com malhas grosseiras. Os resultados numéricos apresentam tendência semelhante aos resultados de outros autores [Talreja (1985)], [Tay (1993)], embora não haja total concordância das respostas de nenhum dos trabalhos. Neste caso, é importante ressaltar que os valores coletados na literatura foram determinados de forma imprecisa, através de gráficos presentes nos artigos. Além disso, não se sabe qual o tipo de elemento finito utilizado pelos autores e tampouco a malha empregada. Destaca-se o caso de laminados Gl/Ep $[0°/90°_3]_s$, que apresentou solução mais significativa, comparando-se com o laminado Gr/Ep $[0°/90°_4]_s$. Neste último, mesmo sendo constituído de um maior número de lâminas de 90º, o aumento das trincas na matriz não afetou de forma expressiva a rigidez do laminado.

Além de aplicar refinos de malhas diferentes nas simulações, verificou-se também a influência de diferentes incrementos de cargas. No primeiro caso, constatou-se que como o aumento de elementos na malha, tanto para laminados Gl/Ep quanto para Gr/Ep, observou-se uma tendência de aumento de rigidez do laminado. Comportamento análogo havia sido alcançado por Silva (2004). Para o segundo caso, atestou-se que a quantificação da densidade de trincas torna-se mais precisa quanto menor o passo de carga empregado nas simulações, tendo uma influência direta nos valores do vetor dano. Todavia, com o intuito de otimizar o tempo despendido nas simulações, optou-se por um incremento maior, de 250N, e formação de 5 trincas simultaneamente, sem, no entanto, prejudicar os resultados, conforme ficou demonstrado no exemplo ilustrado na Figura 7-16 e Figura 7-17. Além disso, ficou evidente que o modelo proposto utilizando a energia de deformação para prever a formação de trincas é capaz de prever a redução de rigidez do laminado (Figura 7-26 e Figura 7-27). Da mesma forma, os resultados obtidos pelo modelo implementado com os critérios de falha tradicionais foram bons, salientando a limitada aplicação destes critérios.

Importante destacar a variação nos resultados obtidos entre os nós situados em posições diferentes no laminado. Fica claro que os valores obtidos para o vetor dano possuem valores diversos para cada nó do elemento finito, o que influencia diretamente os resultados, sendo cabível a realização de uma pesquisa mais profunda a fim de esclarecer este fato. Ademais, o processo de acumulação do dano envolve a determinação de tensões internas, sendo este um fator a ser aperfeiçoado no MMFGL ou no MEF convencional, uma vez que as tensões são calculadas a partir das deformações que, por sua vez, são derivadas dos deslocamentos.

Essas discrepâncias descritas anteriormente necessitam de uma investigação mais apurada e, para trabalhos futuros, sugere-se o implemento de um algoritmo em programas consagrados, a utilização de outros elementos finitos, e até mesmo, refinar o modelo para deformações grandes, levando em conta termos não lineares do tensor deformação. Ou ainda, como não existem soluções analíticas, comparações com resultados experimentais podem ser de grande valia. Uma intensa pesquisa é essencial para formularem-se adequadamente todas as formas de manifestação do dano nas estruturas compostas. Assim, como sugestões para trabalhos futuros, podem ser desenvolvidas análises de laminados submetidos a esforços por flexão, com orientações de fibras quaisquer (modo I e III acoplados), inclusões de dano por delaminação e ruptura das fibras, as quais podem representar melhor uma configuração real de placas laminadas compostas. De igual modo, aplicações mais complexas, levando-se em conta tensões residuais e higrotérmicas.

Excluído: Apêndice A: ¶

Referências Bibliográficas

ALLEN, D. H. ; HARRIS, C. E. ; GROVES, S. E. A cumulative damage model for continuos fiber composite laminates with matrix cracking and interply delaminations, composite materials: testing and design. In.: CONFERENCE ASTM STP 972, 8, Philadelphia. **Proceedings**... Philadelphia, American Society for Testing and Materials, 1988, p. 57-80.

______. A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage – Part I: Theoretical Development, **International Journal Solids Structures,** v.23, n.9, p.1301-1318, 1987a.

______. A thermomechanical constitutive theory for elastic composites with distributed damage – Part II: Application to matrix cracking in laminated composites, **International Journal Solids Structures**, v.23, n.9, p.1319-1338, 1987b

ALLEN, D. H. ; SEARCY, C. R. A micromechanical model for a viscoelastic cohesive zone. **International Journal of Fracture**, v.107, p.159-176, 2001.

ALLEN, D. H. ; TALREJA, R. (ed.) Damage evolution in laminates, damage mechanics of composite materials, **Elsevier Science B. V.**, Chapter 3, p.79-116, 1994

ANDERSSEN, R.; GRADIN, P. A. E GUSTAFSON, C. G. Prediction of the stiffness degradation in cross-ply laminates due to transverse matrix cracking:

Excluído: Apêndice A: ¶

an energy method approach. **Advanced Composite Materials**, v.7, p.325-346, 1998.

ARAÚJO, A. L et al. Combined numerical-experimental model for the identification of mechanical properties of laminated structures. **Composite Structures**, v.50, n.4, p.363-372, Dec. 2000.

ARAÚJO DOS SANTOS, J. V. et al Development of a numerical model for the damage identification on composite plate structures. **Composite Structures**, v.48, n. 1-3, p.59-65, Jan./Mar.2000.

ASM Materials Information/ASM Handbooks Online, v.21. Disponível na Intranet: <www.asm-intl.org> acesso em 20 ago. 2005

BARBIERI, Renato **Desenvolvimento e aplicação do método da função de green local modificado (MLGFM) para problemas do meio contínuo**. Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 1992. (Tese de Doutorado).

BOLOTIN, V. V. Delaminations in composite structures: its origin, buckling, Growth and Stability. **Composites Part B: Engineering** , v.27, n. 2, p.129-145, 1996.

BUCHHOLZ, R.; RIKARDS, R. E WANG, H. Computational analysis of interlaminar fracture of laminated composites, **International Journal of Fracture,** v.86, p.37-57, 1997.

BUIE, K. D. **A finite element model for laminated composite plates with matrix cracks and delaminations**, College of Texas A&M University, 1988. (Master Thesis)

CAIN, K. J. ; GLINKA, G. E. ; PLUMTREE, A. Damage evolution in an off-axis unidirectional Graphite Bismaleimide composite loaded in tension, **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing,** v.34, n.10, p.987-993, Oct. 2003.

CARRERE, N. New Advances on the mechanical multiscale modelling of non linear composites based on various homogenization methods. **In.:** WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 5th, Vienna, Austria, July 7-12 , 2002. Anais…

DÁVILA, C. G.; PEDRO P. CAMANHO E CHERYL A. ROSE. Failure criteria for FRP laminates. **Journal of Composite Materials**, v.39, p.323-345, 2005.

DE FREITAS, M.; SILVA, A. E. ; REIS, L. Numerical evaluation of failure mechanisms on composite specimens subjected to impact loading. **Composites Part B: Engineering** , v.31, n. 3, p.199-207, Apr. 2000.

DUTTA, B. K. ; KUSHWAHA, H. S. A modified damage potential to predict crack initiation: theory and experimental verification. **Engineering Fracture Mechanics,** v.71, n.2, p.263-275, Jan. 2004.

DVORAK, G. J. Composite Materials Inelastic Behavior, Damage, Fatigue and Fracture**, International Journal of Solids and Structures**, v.37, n.1-2, p.155-170 Jan. 2000.

Excluído: Apêndice A: ¶

EDLUND, U. ; VOLGERS, P. A composite ply failure model based on continuum damage mechanics, **Composite Structures**, v.65,n. 3-4, p. 347-355, Sept.2004.

FALZON, B. G.; HITCHINGS, D. E BESANT, T. Fracture mechanics using 3D composite element. **Composite Structures**, v.45, n.1, p.29-39, May 1999.

GIBSON, Ronald F. **Principles of composite material mechanics**. New York: Mc. Graw Hill, 1994.

HASHIN, Z. Analysis of orthogonally cracked laminates under tension, **Transactions of the ASME**, v.54, p.872-879, 1987.

HIGHSMITH A. L. E REIFSNIDER K. L. ; REIFSNIDER K. L. (Ed.) **Stiffness-reduction mechanisms in composite laminates, damage in composite materials**, ASTM STP775, American Society for Testing and Materials, p.103-117 , 1982.

HUEBNER, K. H.; THORNTON, E. A.; BYROM, T. G. **The finite element method for engineers.** 3. ed. New York: John Wiley & Sons Inc., 1995.

HULL, D. E CLYNE, T. W. **An introduction to composite materials**. 2. ed. Cambridge: Cambridge Solid State Science Series, 1996.

ARAGÃO FILHO, Iran S. ; SAVI, Marcelo A. .Análise da delaminação em placas compósitas através do método dos elementos finitos. **Revista Ciência e Engenharia,** v.10, p.155-164, 2001.

JENDLI, Z. et al. Micromechanical analysis of strain rate effect on damage evolution in sheet molding compound composites. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing,** v.35, n. 7-8, p.779-785, July 2004.

JI, F. S. ; DHARANI, L. R. ; MALL, S. Analysis of transverse cracking in cross-ply composite laminates, advanced. **Composite Materials**, v.7, p.83-103, 1998.

JOFFE, R. ; VARNA, J. Analytical modeling of stiffness reduction in symmetric and balanced laminates due to cracks in 90 layers. **Composites Science and Technology**, v.59, n.11, p.1641-1652, Aug. 1999.

JOFFE, R. ; VARNA, J. Damage evolution modeling in multidirectional laminates and the resulting nonlinear response, In.: ICCM-12, 5-9 July, 1999, Paris, France**.**

JOFFE, R. ; VARNA, J. Nonlinear response due to damage evolution in multidirectional laminates. **Submitted to Composites**: Part A , 1999.

JOFFE, R.; KRASNIKOVS, A. ; VARNA, J. Finite element modeling of transverse cracking and resulting inelastic behavior of laminates, **Submitted to Composites**: Part A. , 1999.

KACHANOV, M. Continuum theory of media with cracks, **Mekhanika Tverdogo Tela ASCE,** v.7, p.54-9, 1972.

Excluído: Apêndice A: ¶

KOBAYASHI, S.; OGIHARA, S. ; TAKEDA, N. Damage mechanics analysis for predicting mechanical behavior of general composite laminates containing transverse cracks. **Advanced Composite Materials**, v.9, p.363-375, 2000.

KRUIJER, M. P.; WARNET, L. L. ; AKKERMAN . Analysis or the mechanical properties of a reinforced thermoplastic pipe (RTP), **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v.36, n. 2, p.291-300, Feb. 2005.

LAWS, N. ; DVORAK G. J. Progressive transverse cracking in composite laminates, **Journal of Composite Materials**, v22, p.900-916, 1988

LEMAITRE, J. **A Course on damage mechanics**. New York: Cambridge University Press, Springer-Verlag, 1992.

LIM, E. H. ; TAY, T. E. Stiffness loss of composite laminates with transverse cracks under Mode I and Mode III loading, **International Journal Damage Mechanics**., v.5, p.190-215, 1996.

LO, D. C. ; ALLEN, D. H. ; HARRIS, C. E. Modeling progressive failure of laminated composites with continuum damage mechanics, fracture mechanics. In.: SYMPOSIUM, ASTM STP 1189, 3th, Ravinder Chona: , American Society for Testing and Materials. **Proceedings...** Philadelphia,: [s.n], 1993, p. 680-695.

MACHADO, R. D. **Desenvolvimento do método modificado da função de green local para a solução de placas laminadas de materiais compostos.** Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 1992. (Tese de Doutorado)

MACHADO, R. D. **Efeitos higro-térmicos em placas laminadas: abordagem por um método integra**l. Curitiba: Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2001. Monografia(Concurso para Professor Titular)

MENDONÇA, P. T. R. **Materiais compostos e estruturas sanduíche, projeto e análise.** São Paulo: Ed. Manole, 2005.

MORAN, M. J. ; SHAPIRO, H. N., **Fundamentals of engineering thermodynamics**. 2. ed. New York: John Wiley, 1993.

NAIRN, J. A. Exact and variational theorems for fracture mechanics of composites with residual stresses, traction-loaded cracks, and imperfect interfaces. **International Journal of Fracture**, v. 105, p.243-271, Feb. 2000a.

______. Fracture mechanics of composites with residual stresses, imperfect interfaces and traction-loaded cracks. **Composites Science and Technology**, v.61, n.15, p.2159-2167, Nov.-Dec.2001.

______. Matrix microcracking in composites, polymer matrix. **Comprehensive Composite Materials**, v.2, Chap.13, 2000b.

______. The strain energy release rate of composite microcracking: a variational approach, **Journal of Composite Materials**, v. 23, n. 11, p.1106-1129, 1989.

PARTON, V. Z. **Fracture mechanics**: from theory to practice. Moscow: Gordon and Breach Science Publishers, 1992.

Excluído: Apêndice A: ¶

PHILLIPS, M. L.; YOON, C. ; ALLEN, D. H. **A computational model for predicting damage evolution, laminated composite plates**. Aerospace Engineering Department, Texas A&M University, 2000.

PROENÇA, S. P. B. **Elementos de mecânica do dano em meios contínuos.** São Carlos, n.4, Out. 2000.

REDDY, J. N. Mechanics of laminated composite plates: theory and analysis. Texas A&M University, College Station, Texas, CRC Press Inc. 1997.

REIFISNIDER, K. L. ; CASE, S. W. **Damage tolerance and durability of materials systems**. [S.l.] John W. & Sons , 2002.

SILBERSCHMIDT, V. V. Matrix cracking in croos-ply laminates: effect of randomness**. Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 36, n.2, p.129-135, Feb. 2005.

SILVA, M. P. **Análise da placas laminadas compostas com trincas pela mecânica do dano.** Curitiba: Universidade Católica do Paraná, 2004. (Tese de Mestrado)

TALREJA, R. Residual stiffness properties of cracked composite laminates. In.: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FRACTURE, 6, New Dalhi, India, 1984.. **Proceedings ...** New Dalhi, India , ICFG, 4-10, December, 1984a.

______. Transverse cracking and stiffness reduction in composite laminates. **Journal of Composite Materials**, v.19, p. 355-375, 1985

.

TALREJA, R. ; BOEHLER J. P. (Ed.) Internal variable damage mechanics of composite materials, yielding, damage and failure of anisotropic solids, EGF5, **Mechanical Engineering Publications,** p.509-533, 1990.

TALREJA R., YALVAC S., YATS L. D. E WETTERS D. G. Transverse cracking and stiffness reduction in cross ply laminates with different matrix toughness, **Journal of Composite Materials**, v.26, p.1644-1663 , 1992.

TAY, T. E.; LIM, E. H. ; TAY, A. A. O. Analysis of Stresses in Cross-Ply Composite Laminates Containing Distributed Transverse Cracks, In.: COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, ADVANCE AND APPLICATIONS, **Proceedings...**World Scientific, 1992, v.2, p.986-991.

TAY, T. E. ; LIM, E. H. Analysis of Stiffness Loss in Cross-ply Composite Laminates. **Composite Structures**., v. 25, n.1-4, p.419-425, 1993.

______. Analysis of Composite Laminates with Transverse Cracks, **Composite Structures.**, v.34, n.4, p.419-426, Apr. 1996.

TAY, T. E., LAM, K. Y. ; CEN, Z. Analysis of composite structures with distributed and localized damage by the finite-element method. **Composite Structures,** v. 37, n.2, p.135-143, Feb. 1997.

TOLSON, S. ; ZABARAS, N. Finite Element Analysis of Progressive Failure in Laminated Composite Plates. **Composite Structures**, v.38, n.3, p.361-376, May/Aug. 1991.

VARNA, J. ; BERGLUND L. Multiple transverse cracking and stiffness reduction in crossply laminates. **Journal of Composites and Technology Research**, v.13, n.2, p.99-106, 1991.

VARNA, J. et al Damage in composite laminates with off-axis plies. **Composite Science and Technology**, v.59, n.14, p.2139-47, Nov. 1999.

VEJEN, N. ; PYRZ, R. Transverse crack growth in Glass/Epoxy composites with exactly positioned long fibres. Part II: Numerica., **Composites Part B: Engineering**, v. 33, n.4, p. 279-290, June 2002.

VIKTOR, A. P. ; HERMAN, J. C. V. **Introdução à mecânica da integridade estrutural.** São Paulo: Ed. UNESP, 1995.

VILLAÇA, S. F. ; TABORDA GARCIA, L. F. **Introdução à teoria da elasticidade**. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1996.

VINOGRADOV, V. ; HASHIN, Z. Probabilistic energy based model for prediction of transverse cracking in cross-ply laminates. **International Journal of Solids and Structures,** v.42, n.2, p.365-392, Jan. 2005.

WADA, A.; MOTOGI, S. ; FUKUDA, T. Damage mechanics approach to nonlinear behavior of FRP laminates with cracking layers. **Advanced Composite Materials**, v.8, p. 217-234, 1999.

ZOU, Z .; REID, S. R. ; LI, S. ; SODEN, P. D. Application of a delamination model to laminated composite structures. **Composite Structures**, v.56, n.4, p.375-389, 2002.

Excluído: Apêndice A: ¶

Formatado: Inglês (EUA)

Formatado: Inglês (EUA)

Formatado: Inglês (EUA)

Formatado: Português (Brasil)

Formatado: Português (Brasil)

Formatado: Português (Brasil)

Formatado: Português (Brasil)

Excluído: ¶

www.fiberset.com/html/work.htm, acesso em 20 ago. 2005.

www.saint-gobain-vetrotex.com.br/, acesso em 20 ago. 2005.

www.ameron.com, acesso em 20 ago. 2005.

Excluído: Apêndice A: ¶

Formatado: Português (Brasil)

Formatado: Espaço Antes: 0 pt, Depois de: 12 pt

Formatados: Marcadores e numeração

Formatado: Fonte: 11 pt, Português (Brasil)

Apêndice A

A.1 Aplicação das Restrições de Simetria

As derivações deste apêndice foram extraídas do trabalho de Allen *et al.* (1988a, 1988b).

As equações constitutivas para sólidos com dano interno na equação (4.27) é definida como segue:

$$\sigma_{ij}^{e} = \sigma_{ij}^{R} + E_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} + \varepsilon_{kl}^{T}\right) + F_{ijkl}\alpha_{kl} \tag{A.1}$$

Na ausência de tensões residuais e térmicas, as equações constitutivas tornam-se:

$$\sigma_{ij}^{e} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} + F_{ijkl}\alpha_{kl} \tag{A.2}$$

onde σ_{ij}^{e} é o tensor tensão, ε_{kl} é o tensor deformação, E_{ijkl} e F_{ijkl} são os tensores rigidez não-danificado e danificado, respectivamente. No caso mais geral, existem 81 coeficientes para E_{ijkl} e F_{ijkl}. Assumindo-se que o material é homogêneo, portanto as condições de simetria de tensão e deformação se aplicam, a existência de um potencial elástico pode ser aplicado na equação (A.2) para obter-se:

$$E_{ijkl} = E_{jikl} ; E_{ijkl} = E_{ijlk} ; E_{ijkl} = E_{klij} \tag{A.3}$$

e:

$$F_{ijkl} = F_{jikl} \tag{A.4}$$

Excluído: Apêndice A: ¶

Com as condições das equações (A.3) e (A.4), o número de coeficientes de E_{ijkl} e F_{ijkl} reduzem-se a 21 e 54, respectivamente. Re-indexando-se os componentes dos tensores para as notações contraídas, tem-se:

$$\sigma_1 = \sigma_{11} \quad \sigma_4 = \sigma_{23} = \sigma_{32}$$
$$\sigma_2 = \sigma_{22} \quad \sigma_5 = \sigma_{13} = \sigma_{31}$$
$$\sigma_3 = \sigma_{33} \quad \sigma_6 = \sigma_{12} = \sigma_{21} \tag{A.5}$$

e:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_4 = \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$$
$$\varepsilon_2 = \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_5 = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$$
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \tag{A.6}$$

Além disso, as variáveis internas de estado são re-indexadas como:

$$\alpha_1 = \alpha_{11} \quad \alpha_4 = \alpha_{23} \quad \alpha_7 = \alpha_{31}$$
$$\alpha_2 = \alpha_{22} \quad \alpha_5 = \alpha_{32} \quad \alpha_8 = \alpha_{12}$$
$$\alpha_3 = \alpha_{33} \quad \alpha_6 = \alpha_{13} \quad \alpha_9 = \alpha_{21} \tag{A.7}$$

Usando-se as notações contraídas, as equações constitutivas podem ser escritas como:

$$\sigma_i^e = E_{ij}\varepsilon_j + F_{ik}\alpha_k \tag{A.8}$$

Excluído: Apêndice A: ¶

sendo que i e j varia de 1 a 6 , e, k varia de 1 a 9.

Formatados: Marcadores e numeração

A.2 Restrições de Simetria no Tensor de Rigidez Danificado

Considere a energia interna devida as trincas:

$$U^c = F_{ijkl}\varepsilon_{ij}\alpha_{kl} \qquad (A.9)$$

Sabendo-se tensor deformação é simétrico:

$$F_{ijkl} = F_{jikl} \qquad (A.10)$$

Portanto, o tensor rigidez danificado reduz-se a 54 constantes independentes. Expandindo-se a equação (A.9):

Excluído: Apêndice A: ¶

$$
\begin{aligned}
U^c = {} & F_{1111}\varepsilon_{11}\alpha_{11} + F_{1122}\varepsilon_{11}\alpha_{22} + F_{1133}\varepsilon_{11}\alpha_{33} + F_{1123}\varepsilon_{11}\alpha_{23} + \\
& + F_{1132}\varepsilon_{11}\alpha_{32} + F_{1113}\varepsilon_{11}\alpha_{13} + F_{1131}\varepsilon_{11}\alpha_{31} + F_{1112}\varepsilon_{11}\alpha_{12} + \\
& + F_{1121}\varepsilon_{11}\alpha_{21} + F_{2211}\varepsilon_{22}\alpha_{11} + F_{2222}\varepsilon_{22}\alpha_{22} + F_{2233}\varepsilon_{22}\alpha_{33} + \\
& + F_{2223}\varepsilon_{22}\alpha_{23} + F_{2232}\varepsilon_{22}\alpha_{32} + F_{2213}\varepsilon_{22}\alpha_{13} + F_{2231}\varepsilon_{22}\alpha_{31} + \\
& + F_{2212}\varepsilon_{22}\alpha_{12} + F_{2221}\varepsilon_{22}\alpha_{21} + F_{3311}\varepsilon_{33}\alpha_{11} + F_{3322}\varepsilon_{33}\alpha_{22} + \\
& + F_{3333}\varepsilon_{33}\alpha_{33} + F_{3323}\varepsilon_{33}\alpha_{23} + F_{3332}\varepsilon_{33}\alpha_{32} + F_{3313}\varepsilon_{33}\alpha_{13} + \\
& + F_{3331}\varepsilon_{33}\alpha_{31} + F_{3312}\varepsilon_{33}\alpha_{12} + F_{3321}\varepsilon_{33}\alpha_{21} + F_{2311}\varepsilon_{23}\alpha_{11} + \\
& + F_{2322}\varepsilon_{23}\alpha_{22} + F_{2333}\varepsilon_{23}\alpha_{33} + F_{2323}\varepsilon_{23}\alpha_{23} + F_{2332}\varepsilon_{23}\alpha_{32} + \\
& + F_{2313}\varepsilon_{23}\alpha_{13} + F_{2331}\varepsilon_{23}\alpha_{31} + F_{2312}\varepsilon_{23}\alpha_{12} + F_{2321}\varepsilon_{23}\alpha_{21} + \\
& + F_{1311}\varepsilon_{13}\alpha_{11} + F_{1322}\varepsilon_{13}\alpha_{22} + F_{1333}\varepsilon_{13}\alpha_{33} + F_{1323}\varepsilon_{13}\alpha_{23} + \\
& + F_{1332}\varepsilon_{13}\alpha_{32} + F_{1313}\varepsilon_{13}\alpha_{13} + F_{1331}\varepsilon_{13}\alpha_{31} + F_{1312}\varepsilon_{13}\alpha_{12} + \\
& + F_{1321}\varepsilon_{13}\alpha_{21} + F_{1211}\varepsilon_{12}\alpha_{11} + F_{1222}\varepsilon_{12}\alpha_{22} + F_{1233}\varepsilon_{12}\alpha_{33} + \\
& + F_{1223}\varepsilon_{12}\alpha_{23} + F_{1232}\varepsilon_{12}\alpha_{32} + F_{1213}\varepsilon_{12}\alpha_{13} + F_{1231}\varepsilon_{12}\alpha_{31} + \\
& + F_{1212}\varepsilon_{12}\alpha_{12} + F_{1221}\varepsilon_{12}\alpha_{21}
\end{aligned}
\tag{A.11}
$$

Para reduzir-se o número de coeficientes do tensor rigidez danificado, a simetria ortotrópica é imposta. Primeiramente, uma rotação de 180° em relação ao eixo x_3 é executada. Os co-senos diretores para esta transformação são:

$$
\left[a_{ik'}\right] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.12}
$$

Assim, desde que ε_{ij} é um tensor de segunda ordem:

$$
\varepsilon_{k'l'} = \varepsilon_{ij} a_{ik'} a_{jl'} \tag{A.13}
$$

e segue-se que:

Excluído: Apêndice A: ¶

$$[\varepsilon_{k'l'}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & -\varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ -\varepsilon_{31} & -\varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \quad \text{(A.14)}$$

além disso:

$$[\alpha_{k'l'}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & -\alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{23} \\ -\alpha_{31} & -\alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad \text{(A.15)}$$

Visto que U^c deve ser independente do sistema de coordenadas:

$$U^c = F_{i'j'k'l'}\,\varepsilon_{i'j'}\,\alpha_{k'l'} \quad \text{(A.16)}$$

Substituindo-se as equações (A.14) e (A.15) em (A.16) e comparando-se este resultado com a equação (A.11), obtêm-se:

$$F_{1123} = F_{1132} = F_{1113} = F_{1131} = F_{2223} = F_{2232} = 0$$
$$F_{2213} = F_{2231} = F_{3323} = F_{3332} = F_{3313} = F_{3331} = 0$$
$$F_{2311} = F_{2322} = F_{2333} = F_{2312} = F_{2321} = F_{1311} = 0$$
$$F_{1322} = F_{1333} = F_{1312} = F_{1321} = F_{1223} = F_{1232} = 0$$
$$F_{1213} = F_{1231} = 0$$
$$\text{(A.17)}$$

Rotacionando-se 180° em relação ao eixo x_2, encontra-se:

Excluído: Apêndice A: ¶

$$[a_{ik'}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad (A.18)$$

portanto:

$$[\varepsilon_{k'l'}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & -\varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & -\varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & -\varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \qquad (A.19)$$

além disso:

$$[\alpha_{k'l'}] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} & \alpha_{13} \\ -\alpha_{21} & \alpha_{22} & -\alpha_{23} \\ \alpha_{31} & -\alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \qquad (A.20)$$

Substituindo-se as equações (A.19) e (A.20) em (A.16) e comparando-se este resultado com a equação (A.8), chega-se a:

$$F_{1112} = F_{1121} = F_{2212} = F_{2221} = F_{3312} = F_{3321} = 0$$
$$F_{2313} = F_{2331} = F_{1323} = F_{1332} = F_{1211} = F_{1222} = F_{1233} = 0 \qquad (A.21)$$

Nenhuma restrição adicional é imposta rotacionando-se 180° em relação ao eixo x_1. Então, a imposição de restrições de simetria ortotrópica em F_{ijkl} reduz o número de componentes para 15. Expressos em notação contraída existem:

$$F_{11} = F_{1111} \quad F_{12} = F_{1122} \quad F_{21} = F_{2211}$$
$$F_{22} = F_{2222} \quad F_{13} = F_{1133} \quad F_{31} = F_{3311}$$

Excluído: Apêndice A: ¶

$$F_{33} = F_{3333} \quad F_{23} = F_{2233} \quad F_{32} = F_{3322}$$

$$F_{44} = F_{2323} \quad F_{45} = F_{2332} \quad F_{56} = F_{1313}$$

$$F_{57} = F_{1331} \quad F_{68} = F_{1212} \quad F_{69} = F_{2121}$$

(A.22)

Por esta razão, a matriz rigidez danificada reduz-se a:

$$\begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{44} & F_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{56} & F_{57} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{68} & F_{69} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.23)}$$

Para o caso de dano por trincas transversais, as variáveis internas de estado na equação (4.6) é simplificada para:

$$[\alpha_{ij}] = [0 \quad \alpha_2^1 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha_5^1 \quad 0 \quad 0 \quad \alpha_8^1 \quad 0] \qquad \text{(A.24)}$$

onde somente os componentes $j = 2$ do tensor de segunda ordem são não nulos. Observando-se a equação (A.24), a equação (A.23) reduz-se a:

$$\begin{bmatrix} 0 & F_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_{32} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{45} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{68} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(A.25)}$$

Excluído: Apêndice A: ¶

Sob condição de estado plano de tensão (2D), a equação (A.25) simplifica-se a:

$$\begin{bmatrix} 0 & F_{12} & 0 \\ 0 & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.26)}$$

Da mesma forma, impondo-se restrição de simetria ortotrópica a E_{ijkl}, esta se reduz a:

$$\left[E_{ijkl}\right] = \begin{bmatrix} E_{1111} & E_{1122} & E_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1122} & E_{2222} & E_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ E_{1133} & E_{2233} & E_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{1212} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.27)}$$

ou ainda, sob a lei de Hooke generalizada, o tensor de rigidez não-danificado pode ser expresso, em notação contraída, como:

$$\left[Q_{ij}\right] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{(A.28)}$$

sendo que Q_{ij} é a matriz rigidez de um material ortotrópico. Para o caso de estado plano de tensão para material ortotrópico (2D), a matriz rigidez Q_{ij} torna-se:

Excluído: Apêndice A: ¶

$$[Q_{ij}] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad \text{(A.29)}$$

onde os componentes de Q_{ij} foram dados no capítulo 3 pela equação (3.19). Conseqüentemente, as equações constitutivas para a lâmina em estado plano de tensão (2D) são dadas por:

$$\sigma_i^e = Q_{ij}\varepsilon_j + F_{ij}\alpha_j \quad \text{(A.30)}$$

sendo que i e j são 1, 2 e 6, respectivamente. Note que F_{68} é renomeado como F_{66} e α_8 é renomeado como α_6 na equação (A.30).

Formatados: Marcadores e numeração

A.3 Determinação da Matriz F_{ij}

Dado que a relação tensão-deformação na ausência de trocas de temperatura é:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad \text{(A.31)}$$

e integrando-se sobre o volume local (excluindo trincas), tem-se:

$$\sigma_{ij}^e = \frac{1}{V}\int_{V_L - V_c} \sigma_{ij}\,dV = \frac{1}{V}\int_{V_L - V_c} E_{ijkl}\varepsilon_{kl}\,dV \quad \text{(A.32)}$$

onde σ_{ij}^e é a tensão efetiva fora da zona de dano, V_L é o elemento de volume representativo local e V_c é o volume de trincas. Assumindo-se que o valor do tensor de tensão efetiva é idêntico a tensão média do elemento de volume representativo e

Excluído: Apêndice A: ¶

que E_{ijkl} é homogêneo, chega-se:

$$\sigma_{ij}^{e} = \frac{E_{ijkl}}{V_L}\int_{V_L - V_c} \varepsilon_{kl}\, dV = \frac{E_{ijkl}}{V_L}\int_{V_L - V_c} \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right) dV \qquad (A.33)$$

Usando-se o teorema da divergência no último termo, obtêm-se:

$$\sigma_{ij}^{e} = E_{ijkl}\left[\frac{1}{V_L}\int_{S_1} \frac{1}{2}\left(u_k n_l + u_l n_k\right) dS + \frac{1}{V_L}\int_{S_2} \frac{1}{2}\left(u_k n_l + u_l n_k\right) dS\right] \qquad (A.34)$$

ou equivalentemente:

$$\sigma_{ij}^{e} = E_{ijkl}\left(\varepsilon_{kl} - \frac{1}{2}\alpha_{kl} - \frac{1}{2}\alpha_{lk}\right) \qquad (A.35)$$

De qualquer modo, da expansão das séries de Taylor, a equação (4.40) é expressa como (para condição isotérmica):

$$\sigma_{ij}^{e} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} + F_{ijkl}\alpha_{kl} \qquad (A.36)$$

Portanto, igualando-se os termos das equações (A.36) e (A.35), tem-se:

$$F_{ijkl} = -E_{jikl} \qquad k = l$$

$$F_{ijkl} = -\frac{1}{2}\left(E_{ijkl} + E_{ijlk}\right) \qquad k \neq l$$

$$(A.37)$$

Sabendo-se que $E_{ijkl} = E_{ijlk}$ origina-se da simetria de deformação, então:

Excluído: Apêndice A: ¶

$$F_{ijkl} = -E_{ijkl} \tag{A.38}$$

Para materiais ortotrópicos sob condições de estado plano de tensões (2D), o anexo (A.2) mostrou que o tensor rigidez danificado em notação contraída é simplificado para:

$$F_{ij} = -Q_{ij} \tag{A.39}$$

e E_{ijkl} é substituído pela matriz rigidez reduzida Q_{ij} no caso de lâminas em estado plano de tensão (2D).

Página ii: [1] Excluído	Petrobras	09/02/2006 17:43:00

Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Centro de Ciências Exatas e Tecnologia

Programa de Pós-Graduação em Mecânica

Página viii: [2] Formatado	Petrobras	17/02/2006 09:14:00

Centralizado

Página xvi: [3] Formatado	Petrobras	17/02/2006 09:13:00

Centralizado

Página xvii: [4] Formatado	Petrobras	17/02/2006 09:11:00

Português (Brasil)

Página xvii: [5] Formatado	Petrobras	14/02/2006 15:57:00

Fonte: 10 pt

Página xvii: [6] Formatado	Petrobras	14/02/2006 15:55:00

Fonte: 11 pt, Verificar ortografia e gramática