

**ALVARO NOGUEIRA**

**CONTROLE ROBUSTO  $\mathcal{H}_\infty$  DE SISTEMAS DISCRETOS SUJEITOS A  
RESTRICÇÕES NO CONTROLE E NA SAÍDA**

CURITIBA

2009

**ALVARO NOGUEIRA**

**CONTROLE ROBUSTO  $\mathcal{H}_\infty$  DE SISTEMAS DISCRETOS SUJEITOS A  
RESTRICÇÕES NO CONTROLE E NA SAÍDA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas da Pontifícia Universidade Católica do Paraná como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção e Sistemas.

Orientador:

Prof. Dr. Gustavo Henrique da Costa Oliveira

Co-orientador:

Prof. Dr. Humberto Xavier de Araújo

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ - PUCPR

CURITIBA

2009

Aos meus pais e  
à minha amada Letícia.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer inicialmente meus pais pela oportunidade de realizar um trabalho como este e por todo o apoio. A minha noiva Letícia, por sempre estar incentivando a seguir em frente, e pelo carinho e compreensão durante a realização desse trabalho. Ao meu orientador, professor Dr. Gustavo Henrique da Costa Oliveira pelo apoio e incentivo. Ao meu co-orientador, professor Dr. Humberto Xavier de Araújo, por ensinar e compartilhar todo o seu conhecimento, pela confiança e paciência.

“A alegria e o amor são as duas grandes  
asas para os grandes feitos.”

J. W. von Goethe

# Resumo

Este trabalho aborda o problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas lineares sujeitos a restrições no controle e na saída, em tempo discreto. Deseja-se encontrar um controlador por realimentação de saída, de ordem menor ou igual do sistema (reduzida ou completa), capaz de tratar as incertezas paramétricas do processo do tipo politopo. A abordagem formulada para resolver o problema baseia-se nos conceitos de estabilidade quadrática e invariância positiva. É definido um conjunto elipsoidal positivamente  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariante, gerado por uma função de Lyapunov quadrática e contido na região de linearidade do sistema. Assim, procura-se garantir que a trajetória dos estados permanece no interior de um conjunto de estados admissíveis, respeitando as restrições nos sinais de controle e saída. Para a síntese dos controladores, propõe-se um algoritmo híbrido baseado em Evolução Diferencial (ED) e desigualdades matriciais lineares (LMIs). O algoritmo de síntese é validado com aplicações em exemplos de simulação.

**Palavras-chave:** Controle  $\mathcal{H}_\infty$ , Controle Robusto, BMI, LMI, Restrições, Evolução Diferencial

# Abstract

This work deals with the  $\mathcal{H}_\infty$  robust control problem for linear systems subject to control and output constraints in discrete time. A dynamic output feedback controller able to handle with the parametric uncertainties of the system is considered. It can be of reduced or full order. The approach formulated to solve the problem is based on the concept of quadratic stability and positive invariance. An ellipsoidal positively  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariant set is defined, which is generated by quadratic Lyapunov function, contained in the system's domain of linearity. This set ensures the trajectory of the states in a set of admissible states, which complies with the control and output restrictions. A hybrid algorithm based on Differential Evolution (DE) and linear matrix inequalities (LMI) is proposed for solving this constrained robust control problem. Examples are discussed to validate this approach.

**Keywords:**  $\mathcal{H}_\infty$  Control, Robust Control, BMI, LMI, Input and output constraints, Differential Evolution

# Lista de Figuras

1	Sistema em malha fechada. . . . .	17
2	Processo da Evolução Diferencial. . . . .	30
3	Evolução da norma $\mathcal{H}_\infty$ ao longo das gerações . . . . .	39
4	Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por $(A_1, B_{21})$ . . . . .	39
5	Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por $(A_2, B_{22})$ . . . . .	40
6	Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por $(A_1, B_{21})$ . . . . .	40
7	Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por $(A_2, B_{22})$ . . . . .	41
8	Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por $(A_1, B_{21})$ . . . . .	41
9	Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por $(A_2, B_{22})$ . . . . .	42
10	Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por $(A_1, B_{21})$ . . . . .	42
11	Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por $(A_2, B_{22})$ . . . . .	43
12	Evolução da norma $\mathcal{H}_\infty$ ao longo das gerações. . . . .	46
13	Sinais de Controle e Saída no vértice $(A, B_{21})$ . . . . .	46
14	Sinais de Controle e Saída no vértice $(A, B_{22})$ . . . . .	47
15	Sinais de Controle e Saída no vértice $(A, B_{21})$ . . . . .	47
16	Sinais de Controle e Saída no vértice $(A, B_{22})$ . . . . .	48
17	Sinais de Controle e Saída no vértice $(A, B_{21})$ . . . . .	48
18	Sinais de Controle e Saída no vértice $(A, B_{22})$ . . . . .	49
19	Sinais de Controle e Saída no vértice $(A, B_{21})$ . . . . .	49
20	Sinais de Controle e Saída no vértice $(A, B_{22})$ . . . . .	50

# Lista de Tabelas

1	Estratégias da Evolução Diferencial . . . . .	33
2	Resultado do limitante superior da norma $\mathcal{H}_\infty$ para controladores de diferentes dimensões. . . . .	43
3	Resultado do limitante superior da norma $\mathcal{H}_\infty$ para controladores de diferentes dimensões. . . . .	50

# Lista de Abreviaturas

BMI	- Desigualdade Matricial Bilinear ( <i>Bilinear Matrix Inequality</i> )
CE	- Computação Evolutiva
ED	- Evolução Diferencial
EAR	- Equação Algébrica de Riccati
LTI	- Linear Invariante no Tempo ( <i>Linear Time-Invariant</i> )
LMI	- Desigualdade Matricial Linear ( <i>Linear Matrix Inequality</i> )
MIMO	- Múltiplas Entradas, Múltiplas Saídas ( <i>Multiple Inputs, Multiple Outputs</i> )

# Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^n$	Espaço vetorial de números reais com dimensão $n$
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Matrizes de números reais com dimensão $n \times m$
$\text{Re}(s)$	Parte real do número complexo $s$
$\text{Imag}(s)$	Parte imaginária do número complexo $s$
$\sup \sigma$	Supremo de $\sigma$
$0_{n \times m}$	Matriz nula com dimensão $n \times m$
$I_n$	Matriz identidade com dimensão $n \times n$
$G^{-1}$	Matriz inversa de $G$
$G^T$	Matriz transposta de $G$
$\text{diag}(G_1, G_2)$	Matriz diagonal formada pelas matrizes $G_1, G_2$
$\ G\ _n$	Norma $n$ da matriz $G$
$G(\geq) > 0$	Matriz (semi)definida positiva, <i>i.e.</i> , $\{G \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid u^T G u(\geq) > 0, \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0\}$
$G(\leq) < 0$	Matriz (semi)definida negativa, <i>i.e.</i> , $\{G \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid u^T G u(\leq) < 0, \forall u \in \mathbb{R}^n, u \neq 0\}$

# Lista de Publicações

1. NOGUEIRA, A.; ARAÚJO, H. X.; OLIVEIRA, H. C.  $\mathcal{H}_\infty$  Robust Controller for Discrete-Time Linear Systems Under Control and Output Constraints. 7th IEEE International Conference on Control and Automation. Christchurch, Nova Zelândia, 2009.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Introdução . . . . .	1
1.2	Proposta . . . . .	4
1.3	Estrutura da Dissertação . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Conceitos e Definições Preliminares</b>	<b>6</b>
2.1	Introdução . . . . .	6
2.2	Sistemas Incertos . . . . .	6
2.2.1	Modelo incerto . . . . .	7
2.3	Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs . . . . .	8
2.3.1	Definição . . . . .	8
2.3.2	Complemento de Schur . . . . .	9
2.3.3	<i>S-procedure</i> . . . . .	10
2.4	Desigualdades Matriciais Bilineares - BMIs . . . . .	10
2.4.1	Definição . . . . .	10
2.5	Estabilidade Quadrática . . . . .	11
2.6	Invariância Positiva . . . . .	12
2.6.1	Domínio de invariância elipsoidal . . . . .	12
2.6.2	$\mathcal{D}$ -invariância positiva . . . . .	13
2.7	Norma $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	14
2.8	<i>Bounded Real Lemma</i> . . . . .	14

---

<b>3</b>	<b>Controle Robusto <math>\mathcal{H}_\infty</math> com Restrições</b>	<b>16</b>
3.1	Introdução . . . . .	16
3.2	Controle $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	16
3.3	Problema de Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$ com Restrições . . . . .	19
3.4	Síntese de Controladores Robustos $\mathcal{H}_\infty$ . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Algoritmo de Síntese</b>	<b>29</b>
4.1	Introdução . . . . .	29
4.2	Evolução Diferencial . . . . .	29
4.2.1	Inicialização . . . . .	30
4.2.2	Mutação . . . . .	31
4.2.3	Recombinação . . . . .	31
4.2.4	Avaliação . . . . .	32
4.2.5	Seleção . . . . .	32
4.3	Estratégias da Evolução Diferencial . . . . .	32
4.4	Algoritmo Híbrido . . . . .	33
4.4.1	Algoritmo . . . . .	34
4.4.2	Inicialização do Controlador . . . . .	35
<b>5</b>	<b>Resultados</b>	<b>37</b>
5.1	Introdução . . . . .	37
5.2	Exemplo 1 . . . . .	37
5.3	Exemplo 2 . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Conclusão</b>	<b>51</b>
	<b>Referências</b>	<b>53</b>

# 1 Introdução

## 1.1 Introdução

Durante as últimas décadas, a síntese de controladores robustos para sistemas lineares vem sendo amplamente discutida pela comunidade científica. Esses controladores possuem a capacidade de assegurar o desempenho e a estabilidade do sistema frente às incertezas inerentes ao modelo e, diferentemente da teoria de controle clássico, podem ser utilizados em sistemas multivariáveis, variantes no tempo e de ordem elevada.

A modelagem matemática de um sistema dinâmico pode resultar de um procedimento baseado nas leis físicas ou em técnicas de identificação de sistemas ou ainda por ambos os métodos (Aguirre, 2000; Ljung, 1999). Ao se realizar a modelagem matemática de um determinado sistema, procura-se obter um modelo que represente o mais fielmente possível seu comportamento dinâmico, porém, devido a não linearidades ou incertezas de parâmetros, isto nem sempre é possível. Assim, obtêm-se uma aproximação do modelo real do sistema, permitindo com que o sistema seja abordado como um sistema incerto, no qual seus parâmetros podem assumir infinitos valores dentro de um conjunto com limites conhecidos.

O grande avanço no estudo de sistemas incertos deve-se ao estudo de estabilidade. Um importante trabalho desenvolvido no estudo da estabilidade foi realizado por (Lyapunov, 1893), o qual se tornou conhecido na década de 60 com o desenvolvimento do conceito de controle moderno. O trabalho de Lyapunov analisa o comportamento de um sistema mecânico e se baseia em funções que medem a energia do sistema, na qual a estabilidade está associada ao fato do sistema dissipar energia ou não. Na década de 80, a teoria da estabilidade quadrática foi formulada, inicialmente publicada em (Holot e Barmish, 1980) e posteriormente em (Barmish, 1983, 1985). A estabilidade quadrática pressupõe a existência de uma mesma função quadrática de Lyapunov para todo o domínio de incerteza do problema, assegurando-se assim a estabilidade do sistema. Deste modo, o sistema sujeito a incertezas é denominado quadraticamente estabilizável se existe um controlador para o qual o sistema em malha fechada é quadraticamente estabilizável.

Ao se fazer a síntese de controladores, uma medida de desempenho deve ser escolhida como critério de avaliação. A norma  $\mathcal{H}_\infty$ , descrita inicialmente em (Zames, 1981), é um índice de desempenho frequentemente utilizado. Em (Doyle *et al.*, 1989), equações no espaço de estado são formuladas para o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída, as quais se baseiam nas equações algébricas de Riccati (EAR). A motivação para a escolha desta norma como critério de avaliação, assim como importantes resultados sobre o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída, podem ser encontrados em (Bernstein e Haddad, 1989; Khargonekar e Rotea, 1991; Zhou *et al.*, 1994; Doyle *et al.*, 1994; Scherer, 1995).

Entretanto, formulações do problema  $\mathcal{H}_\infty$  em termos de EAR podem se tornar difíceis de serem aplicadas aos problemas de controle robusto. Deste modo, muitas pesquisas nos últimos anos têm focado no desenvolvimento de abordagens utilizando desigualdades matriciais lineares (LMIs), por seu poder de tratabilidade computacional e usabilidade na resolução de problemas na teoria de sistemas de controle. As LMIs permitem que determinados problemas sejam reduzidos a problemas de otimização convexa. Em (Willems, 1971) foi introduzido o termo LMI, e Willems refere-se à equação de Riccati como um gargalo da teoria de sistemas lineares e antevê que, apesar da importância da LMI parecer não ser apreciada naquela época, seria interessante explorar sua capacidade por meio de algoritmos computacionais. Em (Boyd *et al.*, 1994) foram apresentadas as diferentes caracterizações de LMIs para a resolução de problemas de controle e identificados três fatores que tornam as LMIs uma ferramenta importante:

- a.** existe uma grande variedade de especificações de projetos e restrições que pode ser expressa como LMIs;
- b.** um problema formulado em termos de LMI pode ser resolvido de forma exata, através de algoritmos eficientes de otimização convexa;
- c.** a maioria dos problemas com múltiplas restrições ou objetivos são frequentemente tratáveis na estrutura de LMI.

Muitos problemas de controle robusto passaram a ser formulados em termos de LMI, tais como o problema de síntese de controladores robustos por realimentação de estado (Chilali e Gahinet, 1996; Peaucelle *et al.*, 2000; Ebihara e Hagiwara, 2002; Oliveira *et al.*, 2002), e o problema de síntese de controladores dinâmicos de ordem completa para sistemas precisamente conhecidos (Chilali e Gahinet, 1996; Scherer *et al.*, 1997; Apkarian *et al.*, 2001; Ebihara e Hagiwara, 2004). A norma  $\mathcal{H}_\infty$  e os problemas de controladores  $\mathcal{H}_\infty$  também podem ser caracterizados por LMIs, como por exemplo em (Gahinet, 1994; Gahinet e Apkarian, 1994; Apkarian e Gahinet, 1995; Palhares *et al.*, 1997; Xie *et al.*, 2004).

No entanto, um grupo de problemas de controle não possui formulações convexas baseadas em LMI. Um exemplo, é o problema de síntese de controladores por realimentação de saída estática. Considerável esforço tem sido feito para desenvolver um procedimento eficiente para a síntese de controladores por realimentação de saída, como em (Sharav-Shapiro *et al.*, 1998; Crusius e Trofino, 1999; Bing e Siying, 2001; Bara e Boutayeb, 2006; Rosinová *et al.*, 2003; Rosinová e Veselý, 2003). Porém, este continua sendo um problema em aberto. A maioria das dificuldades decorrem da não convexidade do problema de realimentação de saída, o qual não é representado em termos de LMIs, mas sim através de desigualdades matriciais bilineares (BMI), introduzidas em (Goh *et al.*, 1994, 1995; Safonov *et al.*, 1994).

Diferentemente das LMIs, não são conhecidos algoritmos com tempo polinomial para solução de problemas BMIs. Problemas BMIs podem entretanto ser solucionados por diferentes métodos. Um exemplo é fixar umas das variáveis desconhecidas, tornando o problema convexo, e minimizar a outra variável desconhecida, como em (Grigoriadis e Skelton, 1994). Outra solução é usar métodos globais, como o algoritmo *branch-and-bound*, apresentado em (Goh *et al.*, 1995). Assim, diferentes trabalhos tem sido desenvolvidos a fim de solucionar os problemas na área de controle robusto na forma de BMIs, tais como (Beran e Boyd, 1997; Hassibi *et al.*, 1999; Tuan *et al.*, 1999; Kanev *et al.*, 2004; Lu *et al.*, 2005).

Outra característica importante dos sistemas físicos que deve ser observada ao se projetar um controlador são as restrições nos sinais de controle e saída. Conforme (Reinelt, 2000a), a maioria dos problemas em aplicações práticas de controle ocorrem devido a existência de restrições, como no controle e na saída, consequência de limitações físicas e/ou não linearidades inerentes ao sistema a ser controlado. Ao se ignorar estas restrições, o desempenho do sistema pode ser degradado ou até mesmo pode-se levar a instabilidade do sistema. Muitos trabalhos foram publicados referentes ao estudo da estabilidade de sistemas lineares sujeitos às restrições. Dentre eles e dentro do contexto deste trabalho, existem duas abordagens principais: a saturação de controladores e o comportamento não-linear do sistema, conforme verificado em (Gutman *et al.*, 1985; Vassilaki e Bitsoris, 1989; Castelan e Hennes, 1993; Castelan e Tarbouriech, 1994; Tarbouriech e Burgat, 1994; Huang *et al.*, 2002; Fang *et al.*, 2003). No entanto, em nenhuma das referências citadas anteriormente foi levada em consideração as incertezas do modelo, ou seja, a síntese de controladores robustos sujeitos a restrições, que no ponto de vista prático torna-se interessante. Assim, nos trabalhos de (Sznaier e Damborg, 1987; Sznaier e Sideris, 1991; Sznaier, 1992; Bitsoris e Gravalou, 1992; Milani, 1994; Hu *et al.*, 1998; Bitsoris e Gravalou, 1999; Reinelt, 2000b; Silva *et al.*, 2005; Abbas-Turki *et al.*, 2005), o problema de controle robusto com restrições é abordado.

## 1.2 Proposta

Nesse contexto, este trabalho formulará um problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  sujeito a incertezas e restrições no controle a saída, o qual resultará em um problema de otimização multi-objetivo e não convexo. Para solucionar este problema, a teoria da Computação Evolutiva (CE) pode ser aplicada em conjunto com a formulação LMI. Utilizando-se os paradigmas da Computação Evolutiva, dentre eles a Evolução Diferencial (ED), é possível operar sobre um conjunto de soluções candidatas do problema, denominado população, diferentemente dos métodos clássicos de otimização. Os métodos clássicos operam sobre uma única solução, necessitando ser aplicado diversas vezes ao problema, para que seja possível escolher uma dentre várias soluções ótimas.

Uma das abordagens mais próximas à desenvolvida neste trabalho é descrita em (Langner, 2004; Araújo e Langner, 2005; Araújo *et al.*, 2006). Nesses trabalhos, é abordada a síntese de controladores robustos  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de estado e saída para sistemas sujeitos a restrições no estado, no controle e na saída em tempo contínuo. Para solucionar o problema em (Langner, 2004; Araújo e Langner, 2005), foi proposto um algoritmo híbrido, baseado em LMIs e algoritmos genéticos, e em (Araújo *et al.*, 2006) foi proposto um algoritmo híbrido baseado em LMIs e evolução diferencial. O presente trabalho se caracteriza por tratar o problema no contexto de sistemas em tempo discreto.

Assim, o presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de uma solução para o problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  por realimentação de saída dinâmica, para sistemas lineares sujeitos a incertezas e restrições no controle e na saída em tempo discreto. A modelagem do sistema será realizada através de equações no espaço de estados, permitindo o tratamento de processos com múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO). A ordem do controlador a ser sintetizado pode ser de ordem reduzida ou completa.

Para implementar o problema em questão, um algoritmo de síntese baseado nos conceitos da Evolução Diferencial (ED) e das desigualdades matriciais lineares (LMIs) será apresentado. Desta forma o problema poderá ser tratado computacionalmente, permitindo o estudo com casos de exemplo retirados da literatura.

## 1.3 Estrutura da Dissertação

Este trabalho está dividido em seis capítulos, que estarão organizados da seguinte maneira. No capítulo 2, são apresentadas algumas definições e conceitos preliminares, como por

---

exemplo, a descrição de sistemas incertos, LMIS e BMIs. No capítulo 3, é abordado o problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  com restrições e ao final é apresentado o teorema desenvolvido que permite a síntese desse controlador. No capítulo 4, o conceito da Evolução Diferencial (ED) e as suas estratégias são abordados e, em seguida, o algoritmo desenvolvido para realizar a síntese do controlador é demonstrado. No capítulo 5, são apresentados os resultados obtidos em aplicações em exemplos de simulação, utilizando o algoritmo de síntese para projetar o controlador desejado. Finalmente, no capítulo 6, são descritos os principais resultados, os desafios enfrentados e algumas possíveis continuações deste trabalho.

## 2 Conceitos e Definições Preliminares

### 2.1 Introdução

Neste capítulo são descritos alguns conceitos e definições preliminares necessários para a formulação do problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  que será tratado neste trabalho. Primeiramente, na seção 2.2, é descrito o conceito de sistemas incertos e a definição de incertezas paramétricas do tipo politopo. Na seção 2.3, é abordado o conceito, as características e as propriedades das desigualdades matriciais lineares (LMIs). Na seção 2.4, é descrito o conceito das desigualdades matriciais bilineares (BMIs). Na seção 2.5, a definição de estabilidade quadrática para sistemas discretos é apresentado. Na seção 2.6, é apresentado o conceito de invariância positiva. Na seção 2.7, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é descrita. Na seção 2.8, é apresentado o *bounded real lemma* para sistemas lineares em tempo discreto.

### 2.2 Sistemas Incertos

Ao tentar obter o modelo real do sistema, em muitos casos, estamos sujeitos a obter um modelo aproximado do real. Neste modelo aproximado, algumas propriedades físicas inerentes ao sistema são ignoradas ou, conforme a complexidade matemática do modelo, algumas simplificações são adotadas. Assim sendo, alguns dados do problema não são totalmente conhecidos, podendo ser considerados como incertos.

As incertezas devem ser representadas explicitamente no modelo dos sistemas incertos. Conforme (Oliveira, 1997), as incertezas podem ser representadas de duas maneiras: estruturadas ou não estruturadas. As incertezas estruturadas são definidas por um espaço de pertinência para os parâmetros do modelo, na qual existe uma família de modelos que relaciona a entrada e a saída da planta ao invés de um único modelo. As incertezas não estruturadas estão associadas às dinâmicas não modeladas do modelo da planta.

### 2.2.1 Modelo incerto

Seja um sistema discreto, linear e invariante no tempo, sujeito a incertezas estruturadas paramétricas, definido pela equação de estado

$$x(k+1) = A(r(k))x(k) + B_2(s(k))u(k), \quad (2.1)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle,  $A(r) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é a matriz dinâmica do sistema,  $B_2(s) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  é a matriz de controle,  $r \in \mathcal{R} \subset \mathbb{R}^{n_r}$  e  $s \in \mathcal{S} \subset \mathbb{R}^{n_s}$ , são os vetores de parâmetros incertos das matrizes dinâmica e de controle, respectivamente. Os conjuntos  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$  são compactos e as funções  $r(k) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{R}$  e  $s(k) : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{S}$  são consideradas mensuráveis no sentido de Lebesgue (Araújo, 1998).

As matrizes  $A(r(k))$  e  $B_2(s(k))$  podem ser decompostas em torno do sistema nominal  $(A, B_2)$ , quando este é definido por

$$\begin{cases} A(r(k)) = A + \Delta A(r(k)) \\ B_2(s(k)) = B_2 + \Delta B_2(s(k)) \end{cases}, \quad (2.2)$$

onde  $\Delta A(r(k))$  e  $\Delta B_2(s(k))$  correspondem às matrizes de incertezas. Supõe-se que o par  $(A, B_2)$  seja estabilizável e constante.

A partir do modelo geral (2.1), adota-se a hipótese que as componentes dos vetores de incerteza  $r(k) \in \mathcal{R}$  e  $s(k) \in \mathcal{S}$  pertencem a um intervalo fechado, e estão limitadas superior e inferiormente como segue

$$\underline{r}_i \leq r_i \leq \bar{r}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_r, \quad (2.3)$$

$$\underline{s}_j \leq s_j \leq \bar{s}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_s. \quad (2.4)$$

Os domínios  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$ , definidos por (2.3) e (2.4), são poliedros convexos com  $N = 2^{n_r}$  e  $M = 2^{n_s}$  vértices, respectivamente.

Com a hipótese suplementar que os elementos das matrizes  $A(r(k))$  e  $B_2(s(k))$  são funções lineares de  $r(k)$  e  $s(k)$ , as relações de (2.3) e (2.4) definem também as matrizes vértices  $A_i$  e  $B_{2j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  e  $j = 1, 2, \dots, M$ , associados aos vértices dos poliedros  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{S}$ .

Assim, as matrizes  $A$  e  $B_2$  pertencem aos domínios convexos fechados definidos por

$$\mathcal{D}_A = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n}; A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}, \quad (2.5)$$

$$\mathcal{D}_{B_2} = \left\{ B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}; B_2 = \sum_{j=1}^M \beta_j B_{2j}, \sum_{j=1}^M \beta_j = 1, \beta_j \geq 0 \right\}. \quad (2.6)$$

Com base nas definições (2.5) e (2.6), o sistema geral (2.1) pode ser descrito como

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_2 u(k) \\ A \in \mathcal{D}_A, B_2 \in \mathcal{D}_{B_2} \end{cases}. \quad (2.7)$$

O modelo do sistema incerto, descrito neste capítulo, é portanto representado utilizando incertezas estruturadas paramétricas do tipo politopo, onde o conjunto dos parâmetros do sistema é um poliedro convexo e o sistema nominal é localizado no centro deste poliedro.

## 2.3 Desigualdades Matriciais Lineares - LMIs

Nas últimas décadas, as desigualdades matriciais lineares (LMIs) obtiveram atenção especial pela sua aplicação na teoria de controle. Muitos dos problemas que aparecem na literatura sobre a teoria de controle podem ser reduzidos a problemas clássicos de otimização convexos ou quasi-convexos, sendo estes resolvidos por meio de LMIs.

Uma vez que o problema é formulado em termos de LMIs, ele pode ser resolvido de forma exata, através de algoritmos eficientes de otimização convexa como, por exemplo, pelo *LMI Control Toolbox* disponível no software MATLAB. Além de solução numérica eficiente, as LMIs também possuem como principais características a robustez na descrição de problemas com incertezas e a habilidade para considerar múltiplos requisitos de controle apenas anexando LMIs adicionais.

A primeira aplicação das LMIs na análise de sistemas dinâmicos foi feita por (Lyapunov, 1893), em seus ensaios sobre a estabilidade dos movimentos, conhecido atualmente como teoria de Lyapunov. No entanto, o termo LMI foi utilizado pela primeira vez para resolução de problemas de controle em (Willems, 1971).

### 2.3.1 Definição

Uma desigualdade matricial linear (LMI) é uma inequação na forma

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i > 0, \quad (2.8)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^m$  é um vetor de escalares desconhecido (variáveis de decisão ou otimização) e  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, m$ , são matrizes simétricas conhecidas. Nota-se que as inequações  $F(x) < 0$  e  $F(x) > G(x)$  são casos especiais da equação (2.8), pois elas podem ser reescritas como  $-F(x) > 0$  e  $F(x) - G(x) > 0$ , respectivamente.

A LMI (2.8) é uma inequação convexa em  $x$ , tal que o conjunto  $\mathcal{F} := \{x : F(x) \geq 0\}$  é convexo. Assim, se  $x_1$  e  $x_2 \in \mathcal{F}$  e  $\alpha \in (0, 1)$  então

$$F(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha F(x_1) + (1 - \alpha)F(x_2) > 0. \quad (2.9)$$

Como mencionado anteriormente, uma das vantagens da representação de problemas de controle através de LMIs é a possibilidade de considerar múltiplos requisitos anexando LMIs adicionais. Assim, seja um conjunto definido por  $n$  LMIs

$$F_1(x) > 0; F_2(x) > 0; \dots; F_n(x) > 0. \quad (2.10)$$

O conjunto apresentado em (2.10) pode ser reescrito por uma única LMI

$$F(x) = \text{diag}(F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)) > 0. \quad (2.11)$$

### 2.3.2 Complemento de Schur

O complemento de Schur converte um conjunto de inequações não lineares convexas, que aparecem regularmente nos problemas de controle, em LMI. Sejam as desigualdades matriciais

$$R(x) > 0, \quad Q(x) - S(x)R(x)^{-1}S(x)^T > 0 \quad (2.12)$$

ou, de forma equivalente,

$$Q(x) > 0, \quad R(x) - S(x)^T Q(x)^{-1} S(x) > 0, \quad (2.13)$$

onde  $Q(x) = Q(x)^T$ ,  $R(x) = R(x)^T$  e  $S(x)$  são dependentes de  $x$  de forma afim. O lema do complemento de Schur converte este conjunto de inequações não lineares convexas na LMI equivalente

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S(x)^T & R(x) \end{bmatrix} > 0. \quad (2.14)$$

### 2.3.3 S-procedure

O *S-procedure* estende o uso das LMIs, permitindo que as condições não representadas por desigualdades lineares, que normalmente aparecem na análise de sistemas não lineares, possam ser representadas como LMIs. A seguir, o *S-procedure* é descrito utilizando funções quadráticas (Boyd *et al.*, 1994). Sejam  $F_0, \dots, F_n$  funções quadráticas na variável  $x \in \mathbb{R}^n$

$$F_i(x) = x^T T_i x + 2u_i^T x + \beta_i, \quad i = 0, \dots, n, \quad (2.15)$$

onde  $T_i = T_i^T$ . A existência de  $\tau_i \geq 0, \dots, \tau_n \geq 0$  tal que

$$F_0(x) - \sum_{i=1}^n \tau_i F_i(x) \geq 0 \quad (2.16)$$

implica que

$$F_0(x) \geq 0, \quad \forall x \text{ tal que } F_i(x) \geq 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.17)$$

Nota-se que a equação (2.16) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} T_0 & u_0 \\ u_0^T & \beta_0 \end{bmatrix} - \sum_{i=1}^n \tau_i \begin{bmatrix} T_i & u_i \\ u_i^T & \beta_i \end{bmatrix} \geq 0. \quad (2.18)$$

## 2.4 Desigualdades Matriciais Bilineares - BMIs

As desigualdades matriciais bilineares (BMIs) são uma extensão da abordagem das desigualdades matriciais lineares (LMI). As BMIs se popularizaram nos trabalhos de (Safonov *et al.*, 1994), e sua primeira aplicação aparece em (VanAntwerp *et al.*, 1997).

Os problemas formulados com BMIs são mais difíceis de serem resolvidos que os formulados com LMIs, pois as BMIs não são convexas, podem ter múltiplas soluções locais e são *NP-hard*, ou seja, não podem ser resolvidas em tempo polinomial no pior caso.

### 2.4.1 Definição

Uma desigualdade bilinear matricial (BMI) é uma inequação na forma

$$F(x, y) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i + \sum_{j=1}^n y_j G_j + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_i y_j H_{ij} > 0, \quad (2.19)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^m$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  são vetores de escalares desconhecidos e  $F_i = F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, m$ ,  $G_j = G_j^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $j = 0, \dots, n$ ,  $H_{ij} = H_{ij}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $i = 0, \dots, m$ ,  $j = 0, \dots, n$ , são matrizes conhecidas.

Uma BMI é uma LMI em  $x$  para um valor de  $y$  fixo, e uma LMI em  $y$  para um valor de  $x$  fixo. Assim é convexa em  $x$  e em  $y$ , separadamente. Como as BMIs descrevem conjuntos que não são necessariamente convexos, elas podem descrever uma variedade maior de restrições que as LMIs, e podem ser utilizadas para representar muitos tipos de problemas de otimização e controle. A principal desvantagem das BMIs é que elas são muito mais difíceis de serem manipuladas computacionalmente do que as LMIs.

## 2.5 Estabilidade Quadrática

Ao se projetar um controlador para um determinado sistema, deseja-se que seja assegurada a estabilidade do sistema em malha fechada, ou seja, todas as trajetórias do sistema devem convergir para zero quando  $t \rightarrow \infty$ . Uma condição suficiente para isso é a estabilidade quadrática.

O conceito de estabilidade quadrática foi introduzido em (Hollot e Barmish, 1980; Barmish, 1985). Lá foram formuladas as condições necessárias e suficientes para a estabilidade quadrática de sistemas sujeitos a incertezas em tempo contínuo. No entanto, o mesmo conceito é válido para sistemas sujeitos a incertezas em tempo discreto.

A estabilidade quadrática consiste na existência de uma função quadrática de Lyapunov única, independente dos parâmetros incertos, que decresce ao longo de todas as trajetórias não nulas do sistema. Assim, será assegurado a estabilidade do sistema em malha fechada para todo o domínio de incertezas admissíveis.

Em (Leite *et al.*, 2004) o conceito de estabilidade quadrática é aplicado aos sistemas sujeitos a incertezas em tempo discreto, e esta é caracterizada pela existência de uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , simétrica e definida positiva, tal que

$$A^T P A - P < 0, \quad (2.20)$$

$$\forall A \in \mathcal{D}_A \text{ (2.5)}, \forall B \in \mathcal{D}_B \text{ (2.6)}.$$

Verificando-se a equação (2.20), apenas os vértices do conjunto  $\mathcal{D}_A$  (2.5) precisam ser considerados para a análise da estabilidade quadrática. Assim sendo, um sistema sujeito a incertezas do tipo politopo (2.7) é quadraticamente estável se e somente se existe uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , simétrica e definida positiva, tal que

$$A_i^T P A_i - P < 0, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (2.21)$$

onde  $A_i$  são os vértices do domínio convexo  $\mathcal{D}_A$  (2.5).

## 2.6 Invariância Positiva

O conceito de invariância positiva (Araújo, 1998) é utilizado na síntese de controladores de sistemas dinâmicos sujeitos a restrições, pois procura garantir a manutenção das trajetórias dos estados de um sistema controlado no interior de alguns conjuntos de estados admissíveis.

Seja o sistema discreto autônomo descrito por:

$$x(k+1) = A(r(k))x(k), \quad \forall r(k), \quad (2.22)$$

onde  $A(\cdot)$  é uma função contínua e  $r(k) \in \mathcal{R}$  (2.3) é o vetor de parâmetros incertos que satisfaz as hipóteses que asseguram a existência e a unidade das soluções da equação (2.22).

**Definição 2.6.1.** *Um conjunto não vazio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é positivamente invariante para o sistema (2.22) se*

$$\forall x(k_0) \in \Omega, \quad (2.23)$$

onde  $A(r(k))x(k) \in \Omega$  e  $\forall r(k) \in \mathcal{R}$  (2.3), as trajetórias do sistema  $x(k) \in \Omega, \forall k \geq k_0$ .

Uma outra definição importante é a de um conjunto positivamente invariante e assintoticamente estável.

**Definição 2.6.2.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto não vazio, contendo o ponto de equilíbrio  $x = 0$ .  $\Omega$  é um conjunto positivamente invariante e assintoticamente estável para o sistema (2.22) se*

$$\forall x(k) \in \Omega, \quad (2.24)$$

onde  $A(r(k))x(k) \in \Omega$  e  $\forall r(k) \in \mathcal{R}$  (2.3), as trajetórias  $x(k; x(k_0)) \rightarrow 0$  quando  $k \rightarrow \infty$ .

### 2.6.1 Domínio de invariância elipsoidal

Nesta seção, restringe-se a análise de domínios de invariância positiva elipsoidais. A determinação desses domínios pode ser baseada em funções de Lyapunov quadráticas associadas ao sistema considerado.

**Proposição 2.6.1.** *Seja  $v(x) = x^T P x$ ,  $P = P^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $P > 0$ , uma função de Lyapunov quadrática para o sistema (2.22), definindo o domínio elipsoidal  $\Omega$  como:*

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : v(x) \leq c, c > 0\} \quad (2.25)$$

$\Omega$  é um domínio positivamente invariante e assintoticamente estável (estável) para o sistema (2.22) se  $\Delta v(x(k)) = v(x(k+1)) - v(x(k)) < 0$  ( $\Delta v(x(k)) \leq 0$ ),  $\forall x(k) \in \Omega$ .

Assim, uma condição suficiente relativa à invariância positiva do conjunto  $\Omega$  é enunciada no caso de sistemas autônomos sujeitos a incertezas do tipo politopo.

Seja o sistema discreto autônomo:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) \\ A \in \mathcal{D}_A. \end{cases} \quad (2.26)$$

**Proposição 2.6.2.** *O conjunto elipsoidal  $\Omega$  definido por (2.25) é positivamente invariante para o sistema (2.26) se a matriz  $P$  satisfaz as seguintes LMIs:*

$$A_i^T P A_i - P \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (2.27)$$

Esta proposição é uma consequência direta do conceito da estabilidade quadrática (2.20) e da proposição 2.6.1 aplicada aos sistemas discretos sujeitos a incertezas politópicas. Nota-se que a desigualdade estrita da LMI (2.27) assegura a estabilidade assintótica do domínio  $\Omega$  para o sistema (2.26).

## 2.6.2 $\mathcal{D}$ -invariância positiva

A  $\mathcal{D}$ -invariância positiva é uma ferramenta que se mostra interessante no estudo da estabilização de sistemas não autônomos sujeitos a restrições de controle ou de saída.

Seja um sistema discreto não autônomo descrito por:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1 w(k) \\ w(k) \in \mathcal{D}, \end{cases} \quad (2.28)$$

onde  $w(k) \in \mathbb{R}^d$  é o vetor de perturbação. O conjunto  $\mathcal{D}$  é fechado e convexo, contendo  $w = 0$ .

**Definição 2.6.3.** *Um conjunto não vazio  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é positivamente  $\mathcal{D}$ -invariante para o sistema (2.28) se*

$$\forall x_0 \in \Omega, \quad (2.29)$$

então

$$x(k; x(k_0); w) \in \Omega, \forall w(k) \in \mathcal{D}, \forall k \geq k_0. \quad (2.30)$$

Assim, o domínio  $\Omega$  é positivamente  $\mathcal{D}$ -invariante para o sistema (2.28) se todas as

trajetórias  $x(k; x(k_0); w)$  iniciadas neste domínio lá permaneçam, qualquer que seja a perturbação  $w(k)$ .

## 2.7 Norma $\mathcal{H}_\infty$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  é definida como:

$$\|H\|_\infty = \sup \sigma_{\max} [H(z)]. \quad (2.31)$$

onde  $\sup \sigma_{\max}$  é o valor singular máximo da resposta em frequência do sistema  $H(z)$ .

Em sistemas lineares invariantes no tempo (LTI) estáveis, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  é utilizada para avaliar o desempenho através da função de transferência desses sistemas. Seja o sistema linear invariante no tempo  $S$  descrito pelas equações de estado

$$S: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}, \quad (2.32)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estado,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$  é o vetor de controle e  $y(k) \in \mathbb{R}^p$  é o vetor de saída medida. Por hipótese, assume-se que  $S$  seja assintoticamente estável, ou seja, todos os pólos ( $\lambda_i$ ) da matriz de transferência  $A$  pertencem a uma circunferência de raio unitário ( $|\lambda_i| < 1$ ).

Seja  $H(z)$  a função de transferência do sistema  $S$  entre a saída  $y$  e a entrada  $u$ ,

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D. \quad (2.33)$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência é definida como

$$\|H(z)\|_\infty = \sup_{u \in \mathbb{R}} \sigma_{\max} [H(z)]. \quad (2.34)$$

Assim, a norma  $\mathcal{H}_\infty$  da função de transferência de um sistema corresponde a medida do “pior caso” no ganho do sistema.

## 2.8 Bounded Real Lemma

Seja o sistema linear invariante no tempo  $S$ , controlável, descrito pelas equações de estado

$$S: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) + Du(k) \end{cases}, \quad (2.35)$$

Seja  $H(z)$  a função de transferência entre a saída  $y$  e a entrada  $u$ ,

$$H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D. \quad (2.36)$$

Então, as seguintes afirmações são equivalentes (Gahinet e Apkarian, 1994):

a.  $A$  é estável e

$$\|C(zI - A)^{-1}B + D\|_\infty < 1; \quad (2.37)$$

b. Existe uma matriz simétrica  $P = P^T > 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} A^T P A - P & A^T P B & C^T \\ B^T P A & B^T P B - I & D^T \\ C & D & -I \end{bmatrix} < 0; \quad (2.38)$$

c. Existe uma matriz simétrica  $P = P^T > 0$  tal que

$$\begin{bmatrix} -P^{-1} & A & B & 0 \\ A^T & -P & 0 & C^T \\ B^T & 0 & -I & D^T \\ 0 & C & D & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (2.39)$$

Os conceitos e definições apresentados neste capítulo serão utilizados para formular o problema a ser abordado neste trabalho e auxiliarão na síntese do controlador. No próximo capítulo será apresentado o problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas discretos sujeitos a restrições no controle e na saída e o teorema formulado para solucionar este problema.

## 3 Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$ com Restrições

### 3.1 Introdução

Neste capítulo é formulado o problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  com restrições e apresentado os principais resultados deste trabalho, que permitem a síntese do controlador. Na seção 3.2, o controle  $\mathcal{H}_\infty$  é descrito. Na seção 3.3, o problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas discretos sujeitos a restrições no controle e na saída é apresentado. Na seção 3.4, algumas condições são determinadas a fim de garantir que as restrições no controle e na saída sejam satisfeitas, e assegurar a estabilidade e o desempenho do sistema em termos da norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

### 3.2 Controle $\mathcal{H}_\infty$

O problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  e sua ligação com robustez foi introduzido por (Zames, 1981), originalmente no domínio da frequência, para tratar dos casos de robustez em que os métodos de controle lineares quadrático, prevaletentes no domínio do tempo, não atendiam. Porém, no início da década de 90, com a solução no espaço de estado, os controladores ótimos  $\mathcal{H}_\infty$  passaram a se apresentar de forma mais simples.

O problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  com realimentação de saída para sistemas lineares, utilizando um compensador dinâmico é apresentado a seguir.

Seja o sistema linear invariante no tempo  $S$ , descrito pelas equações de estado

$$S: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1w(k) + B_2u(k), \\ y(k) = C_yx(k), \\ z(k) = C_1x(k) + D_{11}w(k) + D_{12}u(k), \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$ , o vetor de controle,  $w(k) \in \mathbb{R}^l$ , o vetor de perturbação externa,  $y(k) \in \mathbb{R}^p$ , o vetor de saída medida e  $z(k) \in \mathbb{R}^q$ , o vetor de saída controlada.

Assume-se que  $C_y$  seja uma matriz conhecida de posto completo.

Seja um controlador dinâmico  $K$  definido por:

$$K: \begin{cases} \zeta(k+1) = A_k \zeta(k) + B_k e(k), \\ u(k) = C_k \zeta(k) + D_k e(k), \end{cases} \quad (3.2)$$

onde  $\zeta(k) \in \mathbb{R}^{n_c}$ , com  $\zeta(0) = 0$ , é o vetor de estado do controlador,  $e(k) \in \mathbb{R}^p$ , o vetor erro ( $e(k) = r(k) - y(k)$ ),  $r(k) \in \mathbb{R}^p$ , o vetor referência, e  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  e  $D_k$  são matrizes desconhecidas e de dimensões apropriadas.

O sistema em malha fechada está representado no diagrama da Figura 1.

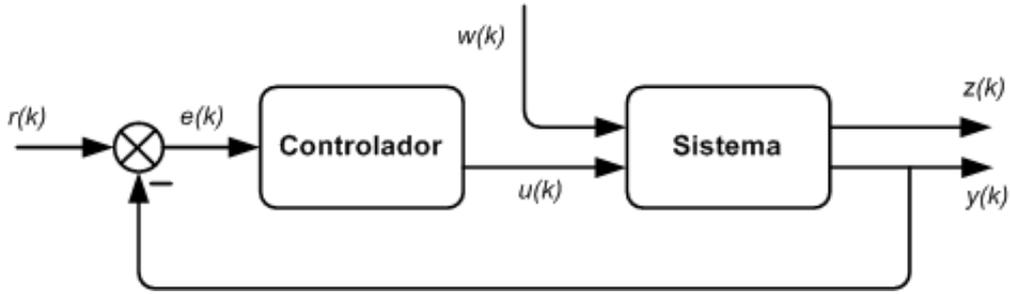


Figura 1: Sistema em malha fechada.

O sistema em malha fechada resultante da combinação das equações (3.1) e (3.2) é descrito por:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x(k+1) \\ \zeta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B_2 D_k C_y & B_2 C_k \\ -B_k C_y & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \zeta(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{n_c \times 1} \end{bmatrix} w(k) + \begin{bmatrix} B_2 D_k \\ B_k \end{bmatrix} r(k) \\ z(k) = \begin{bmatrix} C_1 - D_{12} D_k C_y & D_{12} C_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ \zeta(k) \end{bmatrix} + [D_{11}] w(k) + [D_{12} D_k] r(k) \end{cases} \quad (3.3)$$

Definindo-se as matrizes do sistema em malha fechada como

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0_{n_c} \end{bmatrix}, & \bar{B}_1 &= \begin{bmatrix} B_1 \\ 0_{n_c \times 1} \end{bmatrix}, & \bar{B}_2 &= \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix}, \\ \bar{C}_y &= \begin{bmatrix} -C_y & 0 \\ 0 & I_{n_c} \end{bmatrix}, & \bar{C}_1 &= \begin{bmatrix} C_1 & 0_{q \times n_c} \end{bmatrix}, & \bar{D}_{12} &= \begin{bmatrix} D_{12} & 0_{q \times n_c} \end{bmatrix}, \\ \Pi_1 &= \begin{bmatrix} I_p \\ 0_{n_c \times p} \end{bmatrix}, & \Pi_2 &= \begin{bmatrix} I_m \\ 0_{n_c \times m} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$L_K = \begin{bmatrix} D_k & C_k \\ B_k & A_k \end{bmatrix}, \quad (3.5)$$

e rearrajando-se os termos nas equações (3.3), obtém-se:

$$\begin{cases} x_f(k+1) = (\bar{A} + \bar{B}_2 L_K \bar{C}_y) x_f(k) + \bar{B}_1 w(k) + \bar{B}_2 L_K \Pi_1 r(k), \\ y(k) = -\Pi_1^T \bar{C}_y x_f(k), \\ z(k) = (\bar{C}_1 + \bar{D}_{12} L_K \bar{C}_y) x_f(k) + D_{11} w(k) + \bar{D}_{12} L_K \Pi_1 r(k), \end{cases} \quad (3.6)$$

onde  $x_f(k)$  é definido por

$$x_f(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \zeta(k) \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

Seja  $H_f(z)$  a função de transferência do sistema em malha fechada entre a perturbação  $w$  e a saída  $z$ :

$$H_f(z) = \bar{C}_{1f}(zI - \bar{A}_f)^{-1} \bar{B}_{1f} + \bar{D}_{11f}, \quad (3.8)$$

onde

$$\begin{aligned} \bar{A}_f &= \bar{A} + \bar{B}_2 L_K \bar{C}_y, \\ \bar{B}_{1f} &= \bar{B}_1, \\ \bar{C}_{1f} &= \bar{C}_1 + \bar{D}_{12} L_K \bar{C}_y, \\ \bar{D}_{11f} &= D_{11}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Assim, com a norma  $\mathcal{H}_\infty$  de  $H_f(z)$  dada pela equação (2.31), pode-se definir o seguinte problema de controle ótimo  $\mathcal{H}_\infty$ :

*Encontrar um controlador dinâmico  $L_K$ , tal que a função de transferência  $H_f(z)$  seja estável e possua norma  $\|H_f(z)\|_\infty$  mínima.*

No entanto, encontrar um controlador ótimo  $\mathcal{H}_\infty$  é numericamente e teoricamente complicado (Doyle *et al.*, 1989). Desta forma, um problema de otimização que aproxima-se da solução ótima é definido como um problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  sub-ótimo, descrito por:

*Dado um  $\gamma > 0$ , encontrar um controlador estabilizante, se este existe, tal que  $\|H_f(z)\|_\infty < \gamma$ .*

As soluções desse problema, se existirem, são chamadas de controladores gamma-sub-ótimo. Isto é, pode-se calcular o menor limite superior para a norma  $\|H_f(z)\|_\infty$  pela minimização de  $\gamma$ . Utilizando-se a relação existente entre a norma  $\mathcal{H}_\infty$  do sistema e o *Bounded Real Lemma*, apresentada na seção 2.8, para um sistema em malha fechada discreto no tempo

(3.6) assintoticamente estável,  $\|H_f(z)\|_\infty \leq \gamma$  se e somente se existe uma matriz simétrica definida positiva  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$\begin{bmatrix} -P & P\bar{A}_f & P\bar{B}_{1f} & 0 \\ \bar{A}_f^T P & -P & 0 & \bar{C}_{1f}^T \\ \bar{B}_{1f}^T P & 0 & -\gamma I & \bar{D}_{11f}^T \\ 0 & \bar{C}_{1f} & \bar{D}_{11f} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.10)$$

Com isso, o problema de controle  $\mathcal{H}_\infty$  sub-ótimo, para sistemas com realimentação de saída dinâmica, é equivalente a encontrar um controlador dinâmico  $L_K$  (3.5) estabilizante e uma matriz  $P$  solução do seguinte problema de otimização:

$$\min_{P, L_K} \gamma \quad (3.11)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} -P & P\bar{A}_f & P\bar{B}_{1f} & 0 \\ \bar{A}_f^T P & -P & 0 & \bar{C}_{1f}^T \\ \bar{B}_{1f}^T P & 0 & -\gamma I & \bar{D}_{11f}^T \\ 0 & \bar{C}_{1f} & \bar{D}_{11f} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.12)$$

### 3.3 Problema de Controle Robusto $\mathcal{H}_\infty$ com Restrições

Seja  $S$  o sistema linear invariante discreto no tempo, sujeito a incertezas paramétricas do tipo politopo, descrito pelas equações de estado:

$$S: \begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1w(k) + B_2u(k), \\ y(k) = C_yx(k), \\ z(k) = C_1x(k) + D_{11}w(k) + D_{12}u(k), \end{cases} \quad (3.13)$$

onde  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados,  $u(k) \in \mathbb{R}^m$ , o vetor de controle,  $w(k) \in \mathbb{R}^l$ , o vetor de perturbação externa,  $y(k) \in \mathbb{R}^p$ , o vetor de saída medida, e  $z(k) \in \mathbb{R}^q$ , o vetor de saída controlada. Supõe-se que  $C_y$  tenha posto completo e todas as matrizes sejam reais e com dimensões apropriadas. As matrizes  $A$  e  $B_2$  pertencem aos conjuntos convexos limitados definidos em (2.5) e (2.6), respectivamente:

$$\mathcal{D}_A = \left\{ A \in \mathbb{R}^{n \times n}; A = \sum_{i=1}^N \alpha_i A_i, \sum_{i=1}^N \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \right\}, \quad (3.14)$$

$$\mathcal{D}_{B_2} = \left\{ B_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}; B_2 = \sum_{j=1}^M \beta_j B_{2j}, \sum_{j=1}^M \beta_j = 1, \beta_j \geq 0 \right\}. \quad (3.15)$$

Supõe-se também que os pares  $(A, B_2)$  sejam estabilizáveis e os pares  $(C_y, A)$  sejam detectáveis em todo o domínio de incerteza. Supõe-se ainda que o sistema (3.13) esteja sujeito as seguintes restrições:

**a.** o vetor de controle  $u(k)$  pertence ao conjunto poliedral

$$\mathcal{D}_\mu = \{u \in \mathbb{R}^m : h_i^T u \leq \mu_i, \mu_i > 0\}, \quad (3.16)$$

onde  $h_i \in \mathbb{R}^m, h_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n_h$ ;

**b.** o vetor de saída  $y(k)$  pertence ao conjunto poliedral

$$\mathcal{D}_\xi = \{y \in \mathbb{R}^p : \eta_i^T y \leq \xi_i, \xi_i > 0\}, \quad (3.17)$$

onde  $\eta_i \in \mathbb{R}^p, \eta_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, n_n$ .

O vetor de perturbação  $w(k)$  é limitado em norma, tendo em vista as restrições no domínio do tempo apresentadas anteriormente, e pertence ao conjunto convexo

$$\mathcal{D}(w_0) = \{w \in \mathbb{R}^l : \|w\| \leq w_0, w_0 > 0\}. \quad (3.18)$$

Este conjunto define uma hipersfera de raio  $w_0$ .

Considera-se que um vetor de referência  $r(k)$  pertence ao conjunto limitado por

$$\mathcal{R} = \{r \in \mathbb{R}^p : r^T R^{-1} r \leq 1, R = R^T \in \mathbb{R}^{p \times p}, R > 0\}. \quad (3.19)$$

O controlador por realimentação de saída dinâmica a ser projetado é definido por (3.2), com

$$L_K = \begin{bmatrix} D_k & C_k \\ B_k & A_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n_c) \times (p+n_c)}. \quad (3.20)$$

O sistema em malha fechada é dado por:

$$\begin{cases} x_f(k+1) = \bar{A}_f x_f(k) + \bar{B}_{1f} w(k) + \bar{B}_{2f} r(k), \\ y(k) = \bar{C}_y x_f(k), \\ z(k) = (\bar{C}_{1f} x_f(k) + \bar{D}_{11f} w(k) + \bar{D}_{12f} r(k)), \end{cases} \quad (3.21)$$

onde

$$\begin{aligned}\bar{A}_f &= \bar{A} + \bar{B}_2 L_K \bar{C}_y, & \bar{B}_{1f} &= \bar{B}_1, & \bar{B}_{2f} &= \bar{B}_2 L_K \Pi_1, \\ \bar{C}_{yf} &= -\Pi_1^T \bar{C}_y, & \bar{C}_{1f} &= \bar{C}_1 + \bar{D}_{12} L_K \bar{C}_y, \\ \bar{D}_{11f} &= D_{11}, & \bar{D}_{12f} &= \bar{D}_{12} L_K \Pi_1,\end{aligned}\tag{3.22}$$

com  $A \in \mathcal{D}_A$  e  $B_2 \in \mathcal{D}_{B_2}$ .

Utilizando-se a equação (3.20), o sinal de controle  $u(k)$  pode ser descrito por

$$u(k) = \Pi_2^T L_K \bar{C}_y x_f(k) + \Pi_2^T L_K \Pi_1 r(k).\tag{3.23}$$

A partir das restrições (3.16) e (3.17), definem-se os conjuntos  $\bar{\mathcal{D}}_\mu$  e  $\bar{\mathcal{D}}_\xi$ , para o sistema em malha fechada, com:

$$\bar{\mathcal{D}}_\mu = \{x_f : h_i^T \Pi_2^T L_K \bar{C}_y x_f(k) + h_i^T \Pi_2^T L_K \Pi_1 r(k) \leq \mu_i, \mu_i > 0, i = 1, \dots, n_h\},\tag{3.24}$$

$$\bar{\mathcal{D}}_\xi = \{x_f : -\eta_i^T \Pi_1^T \bar{C}_y x_f(k) \leq \xi_i, \xi_i > 0, i = 1, \dots, n_n\}.\tag{3.25}$$

Os conjuntos  $\bar{\mathcal{D}}_\mu$  e  $\bar{\mathcal{D}}_\xi$  são as regiões no espaço de estado para as quais os sinais de controle e de saída do sistema, respectivamente, não saturam. Portanto, a partir das equações (3.24) e (3.25), é importante notar que o sistema de malha fechada resultante é válido somente para os estados  $x_f$  pertencentes a

$$\bar{\mathcal{D}}_\mu \cap \bar{\mathcal{D}}_\xi.\tag{3.26}$$

A função de transferência  $H_f(z)$  entre a saída controlada  $z$  e a perturbação  $w$  é igual a

$$H_f(z) = \bar{C}_{1f}(zI - \bar{A}_f)^{-1} \bar{B}_{1f} + \bar{D}_{11f}\tag{3.27}$$

com  $A \in \mathcal{D}_A$  e  $B_2 \in \mathcal{D}_{B_2}$ .

Assim, o problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas discretos sujeitos a restrições no controle e na saída pode ser formulado como segue:

**Problema 1.** *Encontrar um controlador estável por realimentação de saída dinâmica*

$$L_K \in \mathbb{R}^{(m+n_c) \times (p+n_c)},\tag{3.28}$$

de ordem fixa  $n_c$  e um escalar positivo  $\gamma$ , tais que as seguintes condições sejam satisfeitas:

- a.  $L_K = \arg \min \{ \gamma : \|H_f(s)\|_\infty \leq \gamma \};$
- b. as restrições (3.16) e (3.17) sejam respeitadas pelas trajetórias do sistema em malha

fechada (3.6), para quaisquer que sejam a perturbação  $w(k) \in \mathcal{D}(w_0)$  e a entrada de referência  $r(k) \in \mathcal{R}$ .

### 3.4 Síntese de Controladores Robustos $\mathcal{H}_\infty$

Nesta seção são descritos os lemas que estão associados as restrições de controle e de saída, definidas em (3.16) e (3.17), e o lema associado ao conceito de invariância. Para o desenvolvimento dos resultados deste trabalho, a definição apresentada a seguir se faz necessária (Araújo *et al.*, 2006).

**Definição 3.4.1.** *Sejam  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{R}$  conjuntos compactos e  $\Omega$  um conjunto não vazio.  $\Omega$  é um conjunto positivamente  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariante em relação ao sistema (3.1) se para todo estado inicial  $x_f(k_0) \in \Omega$  e toda perturbação  $w(k) \in \mathcal{D}$ ,  $x_f(k) \in \Omega$ ,  $\forall k \geq k_0$  e  $\forall r(k) \in \mathcal{R}$ .*

Partindo-se do pressuposto que os domínios de invariância positiva podem ser gerados a partir de funções de Lyapunov quadráticas associadas aos sistemas estáveis, conforme discutido na seção 2.6, os domínios positivamente invariantes elipsoidais obtidos a partir das funções de Lyapunov do tipo  $v(x) = x^T P x$ , com  $P = P^T > 0$ , serão utilizados para solucionar o problema de síntese de controladores  $\mathcal{H}_\infty$ .

Seja o conjunto elipsoidal  $\Omega$ , centrado na origem, definido por

$$\Omega = \{x_f \in \mathbb{R}^{n+n_c} : x_f^T P x_f \leq 1, P = P^T > 0\}, \quad (3.29)$$

onde  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ .

Definindo-se  $\mathcal{L}$  como o conjunto de todos os controladores  $L_K \in \mathbb{R}^{(m+n_c) \times (p+n_c)}$  tais que  $\bar{A}_f$  seja assintoticamente estável,  $\forall A \in \mathcal{D}_A$  e  $\forall B_2 \in \mathcal{D}_{B_2}$ , o seguinte resultado pode ser obtido a partir da definição 3.4.1.

**Proposição 3.4.1.** *O controlador por realimentação de saída dinâmica  $L_K$  é uma solução do problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas sujeitos a restrições, no controle e na saída, em tempo discreto, se e somente se*

$$L_K = \arg \min \{ \gamma : \|H_f(z)\|_\infty \leq \gamma, L_K \in \mathcal{L} \} \quad (3.30)$$

e existe um conjunto qualquer  $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+n_c}$  positivamente  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariante em relação ao sistema (3.6) tal que

$$\Omega \subseteq \bar{\mathcal{D}}_\mu \cap \bar{\mathcal{D}}_\xi. \quad (3.31)$$

Alguns lemas preliminares serão apresentados a seguir, os quais auxiliam na obtenção de uma solução para o **Problema 1**. Supõe-se que a matriz desconhecida  $D_k$  seja nula. No lema 3.4.1, é apresentada uma condição suficiente para que a restrição de controle (3.16) seja respeitada, ou seja,  $\Omega \subseteq \overline{\mathcal{D}}_\mu$ .

**Lema 3.4.1.** *O elipsóide  $\Omega$  definido por (3.29) está contido no poliedro  $\overline{\mathcal{D}}_\mu$ (3.24), para um dado controlador  $L_K$ , com  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se e somente se*

$$\begin{bmatrix} \mu_i^2 & h_i^T \Pi_2^T L_K \overline{C}_y \\ \overline{C}_y^T L_K^T \Pi_2 h_i & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_h. \quad (3.32)$$

**Demonstração:** A partir das inequações (3.24), uma função suporte do elipsóide  $\Omega$  pode ser escrita como

$$\phi_c(h_i, L_k) = \max_{x_f \in \Omega} h_i^T \Pi_2^T L_K \overline{C}_y x_f. \quad (3.33)$$

O Lagrangeano do problema de maximização é descrito por:

$$L(x_f, \lambda) = h_i^T \Pi_2^T L_K \overline{C}_y x_f + \lambda (x_f^T P x_f - 1), \quad (3.34)$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  é o multiplicador de Lagrange. Assim, as condições necessárias e suficientes de otimalidade são dadas por:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_f^T P x_f - 1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \overline{C}_y^T L_K^T \Pi_2 h_i + 2\lambda P x_f = 0. \quad (3.35)$$

Obtem-se assim

$$x_f = \frac{-P^{-1} \overline{C}_y^T L_K^T \Pi_2 h_i}{2\lambda}, \quad (3.36)$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{h_i^T \Pi_2^T L_K \overline{C}_y P^{-1} \overline{C}_y^T L_K^T \Pi_2 h_i}}{2}. \quad (3.37)$$

Assim, conclui-se que a solução ótima é dada por

$$\phi_c(h_i, L_K) = \sqrt{h_i^T \Pi_2^T L_K \overline{C}_y P^{-1} \overline{C}_y^T L_K^T \Pi_2 h_i}. \quad (3.38)$$

Consequentemente, o elipsóide  $\Omega$  está contido em  $\overline{\mathcal{D}}_\mu$ , se e somente se  $\phi_c(h_i, L_K) \leq \mu_i, \forall i = 1, 2, \dots, n_h$ , o que é equivalente a

$$\sqrt{h_i^T \Pi_2^T L_K \overline{C}_y P^{-1} \overline{C}_y^T L_K^T \Pi_2 h_i} \leq \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_h. \quad (3.39)$$

As inequações (3.39) podem ser escritas como

$$\mu_i^2 - h_i^T \Pi_2^T L_K \bar{C}_y P^{-1} \bar{C}_y^T L_K^T \Pi_2 h_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_h. \quad (3.40)$$

Utilizando-se o complemento de Schur em (3.40), são obtidas as seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} \mu_i^2 & h_i^T \Pi_2^T L_K \bar{C}_y \\ \bar{C}_y^T L_K^T \Pi_2 h_i & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_h. \quad (3.41)$$

■

No lema 3.4.2, é apresentada uma condição suficiente para que a restrição de saída (3.17) seja satisfeita, ou seja,  $\Omega \subseteq \bar{\mathcal{D}}_\xi$ .

**Lema 3.4.2.** *O elipsóide  $\Omega$  definido por (3.29) está contido no poliedro  $\bar{\mathcal{D}}_\xi$  (3.25), para um dado controlador  $L_K$ , com  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , se e somente se*

$$\begin{bmatrix} \xi_i^2 & \eta_i^T \Pi_1^T \bar{C}_y \\ \bar{C}_y^T \Pi_1 \eta_i & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_n \quad (3.42)$$

**Demonstração:** A partir das inequações (3.25), uma função suporte do elipsóide  $\Omega$  pode ser escrita como

$$\phi_s(\eta_i) = \max_{x_f \in \Omega} -\eta_i^T \Pi_1^T \bar{C}_y x_f. \quad (3.43)$$

O Lagrangeano do problema de maximização é descrito por

$$L(x_f, \lambda) = -\eta_i^T \Pi_1^T \bar{C}_y x_f + \lambda (x_f^T P x_f - 1), \quad (3.44)$$

onde  $\lambda \in \mathbb{R}$  é o multiplicador de Lagrange. Assim, as condições necessárias e suficientes de otimalidade são dadas por

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_f^T P x_f - 1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = -\bar{C}_y^T \Pi_1 \eta_i + 2\lambda P x_f = 0. \quad (3.45)$$

Obtêm-se assim

$$x_f = \frac{P^{-1} \bar{C}_y^T \Pi_1 \eta_i}{2\lambda}, \quad (3.46)$$

$$\lambda = \pm \frac{\sqrt{\eta_i^T \Pi_1^T \bar{C}_y P^{-1} \bar{C}_y^T \Pi_1 \eta_i}}{2}. \quad (3.47)$$

Portanto, na solução ótima têm-se

$$\phi_s(\eta_i) = \sqrt{\eta_i^T \Pi_1^T \bar{C}_y P^{-1} \bar{C}_y^T \Pi_1 \eta_i}. \quad (3.48)$$

Consequentemente, o elipsóide  $\Omega$  está contido em  $\bar{\mathcal{D}}_\xi$ , se e somente se  $\phi_s(\eta_i) \leq \xi_i, \forall i = 1, 2, \dots, n_n$ , o que equivale a

$$\sqrt{\eta_i^T \Pi_1^T \bar{C}_y P^{-1} \bar{C}_y^T \Pi_1 \eta_i} \leq \xi_i, \quad 1, 2, \dots, n_n. \quad (3.49)$$

As inequações (3.49) podem ser escritas como

$$\eta_i^T \Pi_1^T \bar{C}_y P^{-1} \bar{C}_y^T \Pi_1 \eta_i \leq \xi_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, n_n. \quad (3.50)$$

Utilizando-se o complemento de Schur em (3.50), são obtidas as seguintes LMIs:

$$\begin{bmatrix} \xi_i^2 & \eta_i^T \Pi_1^T \bar{C}_y \\ \bar{C}_y^T \Pi_1 \eta_i & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_n. \quad (3.51)$$

■

O próximo lema apresenta uma condição suficiente assegurando a  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariância positiva de um conjunto elipsoidal  $\Omega$  para as trajetórias do sistema de malha fechada, sem levar em consideração as restrições no controle e na saída.

**Lema 3.4.3.** *Sejam o conjunto  $\Omega$  gerado por uma matriz simétrica definida positiva  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , definido por (3.29), e o sistema incerto (3.3). Se existir uma matriz  $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e escalares  $\alpha_k \geq 0, \sigma_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, N * M$ , tais que o conjunto de desigualdades*

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_f^T P \bar{A}_f - P + \alpha_k P & \bar{A}_f^T P \bar{B}_{1f}^T & \bar{A}_f^T P \bar{B}_{2f}^T \\ \bar{B}_{1f}^T P \bar{A}_f & \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{1f} - \sigma_k I & \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{2f} \\ \bar{B}_{2f}^T P \bar{A}_f & \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{1f} & \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{2f} - (\alpha_k - \sigma_k w_0^2) R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.52)$$

para cada vértice  $(A_i, B_{2j})$  do conjunto  $\mathcal{D}_A \times \mathcal{D}_{B_2}$ , então  $\Omega$  é um conjunto  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariante para o sistema de malha fechada e  $L_K$  é um controlador robusto que estabiliza o sistema (3.1).

**Demonstração:** seja  $v(x_f) = x_f^T P x_f$  uma função de Lyapunov quadrática, associada ao sistema de malha fechada (3.3). A equação a diferenças de  $v(x_f)$  ao longo das trajetórias do sistema (3.3)

é dada por

$$\begin{aligned} v(x_f(k+1)) - v(x_f(k)) = & x_f^T (\bar{A}_f^T P \bar{A}_f - P) x_f + x_f^T \bar{A}_f^T P \bar{B}_{1f} w + x_f^T \bar{A}_f^T P \bar{B}_{2f} r \\ & + w^T \bar{B}_{1f}^T P \bar{A}_f x_f + w^T \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{1f} w + w^T \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{2f} r \\ & + r^T \bar{B}_{2f}^T P \bar{A}_f x_f + r^T \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{1f} w + r^T \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{2f} r. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Para simplificar notação, suprimiu-se o tempo  $k$  nas equações.

Para que  $\Omega$  seja um conjunto positivamente  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariante para o sistema com incertezas (3.3), é suficiente que  $v(x_f(k+1)) - v(x_f(k)) \leq 0$ , qualquer que seja o vetor  $x_f$  pertencente à fronteira de  $\Omega$ , isto é,  $x_f^T P x_f = 1$ , e para toda perturbação admissível  $w \in \mathcal{D}(w_0)$  e referência  $\forall r \in \mathcal{R}$ . Assim,  $\Omega$  é um conjunto positivamente  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariante para o sistema (3.3) se

$$\begin{aligned} x_f^T (\bar{A}_f^T P \bar{A}_f - P) x_f + x_f^T \bar{A}_f^T P \bar{B}_{1f} w + x_f^T \bar{A}_f^T P \bar{B}_{2f} r + w^T \bar{B}_{1f}^T P \bar{A}_f x_f + w^T \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{1f} w \\ + w^T \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{2f} r + r^T \bar{B}_{2f}^T P \bar{A}_f x_f + r^T \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{1f} w + r^T \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{2f} r \leq 0, \end{aligned} \quad (3.54)$$

para um ponto qualquer  $(x_f, w, r)$  tal que  $x_f^T P x_f \geq 1$ ,  $w^T w \leq w_0^2$  e  $r^T R^{-1} r \leq 1$ .

Utilizando o *S-procedure*, apresentado na seção 2.3.3, esta condição pode ser reescrita sem restrições:

Se existem escalares  $\alpha_k \geq 0$ ,  $\sigma_k \geq 0$  e  $\varepsilon_k \geq 0$  tais que

$$\begin{aligned} x_f^T (\bar{A}_f^T P \bar{A}_f - P) x_f + x_f^T \bar{A}_f^T P \bar{B}_{1f} w + x_f^T \bar{A}_f^T P \bar{B}_{2f} r + w^T \bar{B}_{1f}^T P \bar{A}_f x_f + w^T \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{1f} w \\ + w^T \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{2f} r + r^T \bar{B}_{2f}^T P \bar{A}_f x_f + r^T \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{1f} w + r^T \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{2f} r \\ + \alpha_k (x_f^T P x_f - 1) + \sigma_k (w_0^2 - w^T w) + \varepsilon_k (1 - r^T R^{-1} r) \leq 0, \end{aligned} \quad (3.55)$$

$\forall x_f \in \mathbb{R}^n$ ,  $\forall w \in \mathbb{R}^l$  e  $\forall r \in \mathcal{R}$ , então  $\Omega$  é um conjunto positivamente  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariante para o sistema (3.3). Neste caso, este procedimento assegura somente a suficiência da nova condição.

A desigualdade (3.55) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_f \\ w \\ r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \bar{A}_f^T P \bar{A}_f - P + \alpha_k P & \bar{A}_f^T P \bar{B}_{1f} & \bar{A}_f^T P \bar{B}_{2f} \\ \bar{B}_{1f}^T P \bar{A}_f & \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{1f} - \sigma_k I & \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{2f} \\ \bar{B}_{2f}^T P \bar{A}_f & \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{1f} & \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{2f} - \varepsilon_k R^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_f \\ w \\ r \end{bmatrix} + \\ -\alpha_k + \sigma_k w_0^2 + \varepsilon_k \leq 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Na desigualdade (3.56) observa-se que  $x_f$ ,  $w$  e  $r$  podem assumir quaisquer valores em seus respectivos espaços, o que implica na necessidade da condição

$$-\alpha_k + \sigma_k w_0^2 + \varepsilon_k \leq 0. \quad (3.57)$$

Assim, a desigualdade (3.57) pode ainda ser escrita como

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_f^T P \bar{A}_f - P + \alpha_k P & \bar{A}_f^T P \bar{B}_{1f} & \bar{A}_f^T P \bar{B}_{2f} & 0 \\ \bar{B}_{1f}^T P \bar{A}_f & \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{1f} - \sigma_k I & \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{2f} & 0 \\ \bar{B}_{2f}^T P \bar{A}_f & \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{1f} & \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{2f} - \varepsilon_k R^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_k + \sigma_k w_0^2 + \varepsilon_k \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.58)$$

Além disso, se a desigualdade (3.58) for satisfeita para uma combinação  $(\bar{\alpha}_k, \bar{\sigma}_k, \bar{\varepsilon}_k)$ , então ela também é satisfeita para qualquer  $\varepsilon_k$  tal que

$$\bar{\varepsilon}_k \leq \varepsilon_k \leq \bar{\alpha}_k - \bar{\sigma}_k w_0^2. \quad (3.59)$$

Assim, sem perda de generalidade, escolhe-se

$$\varepsilon_k = \alpha_k - \sigma_k w_0^2, \quad (3.60)$$

obtendo-se para (3.58) a desigualdade dada por:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_f^T P \bar{A}_f - P + \alpha_k P & \bar{A}_f^T P \bar{B}_{1f} & \bar{A}_f^T P \bar{B}_{2f} \\ \bar{B}_{1f}^T P \bar{A}_f & \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{1f} - \sigma_k I & \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{2f} \\ \bar{B}_{2f}^T P \bar{A}_f & \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{1f} & \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{2f} - (-\alpha_k + \sigma_k w_0^2) R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (3.61)$$

No entanto, a desigualdade (3.61) deve ser verificada para toda matriz  $\bar{A}_f$ , com  $A \in \mathcal{D}_A$  e  $B_2 \in \mathcal{D}_{B_2}$ . Como as incertezas são convexas, avalia-se (3.61) somente nos vértices  $(A_i, B_{2j})$  de  $\mathcal{D}_A \times \mathcal{D}_{B_2}$ . ■

A partir dos resultados apresentados nos lemas 1, 2 e 3, o seguinte teorema fornece uma solução para o **Problema 1**.

**Teorema 1.** *Seja o sistema incerto (3.13) sujeito as restrições no controle e na saída, e  $(P, L_K, \alpha_k, \sigma_k)$  a solução do problema de otimização*

$$\min_{P, L_K, \alpha_k, \sigma_k} \gamma \quad (3.62)$$

sujeito a

$$\begin{bmatrix} \mu_i^2 & h_i^T \Pi_2^T L_K \bar{C}_y \\ \bar{C}_y^T L_K^T \Pi_2 h_i & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_h, \quad (3.63)$$

$$\begin{bmatrix} \xi_i^2 & \eta_i^T \Pi_1^T \bar{C}_y \\ \bar{C}_y^T \Pi_1 \eta_i & P \end{bmatrix} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_n, \quad (3.64)$$

$$\begin{bmatrix} -P & P\bar{A}_f & P\bar{B}_{1f} & 0 \\ \bar{A}_f^T P & -P & 0 & \bar{C}_{1f}^T \\ \bar{B}_{1f}^T P & 0 & -\gamma I & \bar{D}_{11f}^T \\ 0 & \bar{C}_{1f} & \bar{D}_{11f} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0, \quad (3.65)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_f^T P \bar{A}_f - P + \alpha_k P & \bar{A}_f^T P \bar{B}_{1f}^T & \bar{A}_f^T P \bar{B}_{2f}^T \\ \bar{B}_{1f}^T P \bar{A}_f & \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{1f} - \sigma_k I & \bar{B}_{1f}^T P \bar{B}_{2f} \\ \bar{B}_{2f}^T P \bar{A}_f & \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{1f} & \bar{B}_{2f}^T P \bar{B}_{2f} - (\alpha_k - \sigma_k w_0^2) R^{-1} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (3.66)$$

para  $k = 1, 2, \dots, N * M$  e em cada vértice  $(A_i, B_{2j})$  de  $\mathcal{D}_A \times \mathcal{D}_{B_2}$ .

Assim, o controlador  $L_K$  é uma solução do problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas sujeitos a restrições no controle e na saída em tempo discreto e o conjunto elipsoidal  $\Omega$ , gerado por  $P$ , é positivamente  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariante para o sistema em malha fechada (3.6).

**Demonstração:** As LMIs (3.63) e (3.64) garantem, de acordo com os lemas 3.4.1 e 3.4.2, que o conjunto elipsoidal  $\Omega$  verifica a condição (3.31), isto é,  $\Omega \subseteq \bar{\mathcal{D}}_\mu \cap \bar{\mathcal{D}}_\xi$ .

Partindo-se da definição de norma  $\mathcal{H}_\infty$ , as desigualdades matriciais (3.65) (Gahinet e Apkarian, 1994), garantem o desempenho do controlador.

As desigualdades matriciais (3.66), conforme o lema 3.4.3, garantem  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariância positiva do conjunto  $\Omega$  para o sistema de malha fechada. ■

As desigualdades matriciais apresentadas em (3.65) e (3.66) são bilineares (BMIs), ou seja, não são convexas em  $L_K$ ,  $P$  e  $\alpha_k$ . Assim, para solucionar este problema de otimização, é proposto, no próximo capítulo, um algoritmo híbrido, utilizando-se Evolução Diferencial e LMIs.

## 4 Algoritmo de Síntese

### 4.1 Introdução

Neste capítulo, é apresentada uma descrição sobre o método de otimização evolutiva, conhecido como Evolução Diferencial (ED), e o algoritmo de síntese proposto com o objetivo de solucionar o problema abordado neste trabalho. Considerando-se que o problema a ser resolvido é suficientemente complexo, o que acaba dificultando uma formulação matemática que atenda os requisitos básicos de tratabilidade pelas ferramentas convencionais, a abordagem via ED torna-se atrativa.

Na seção 4.2, o conceito principal e as etapas de implementação do ED são descritas. As estratégias de ED são apresentadas na seção 4.3. Na seção 4.4, o algoritmo de síntese híbrido desenvolvido, utilizando os conceitos de Evolução Diferencial e LMIs, é apresentado.

### 4.2 Evolução Diferencial

Evolução Diferencial (ED) pode ser classificado como um algoritmo evolutivo codificado em ponto flutuante, voltado para otimização global sobre espaços contínuos. O algoritmo de ED foi proposto por (Storn e Price, 1995, 1997) para solucionar o problema de ajuste polinomial de Chebyshev. Assim como os Algoritmos Genéticos, as Estratégias Evolutivas e a Programação Evolutiva, a Evolução Diferencial faz parte de uma grande área conhecida como Computação Evolutiva. Entretanto, a Evolução Diferencial é considerada mais eficaz e robusta do que as demais subáreas (Vesterstrom e Thomsen, 2004), podendo ser utilizada para encontrar soluções aproximadas em problemas práticos em que as funções objetivo são não lineares ou não diferenciáveis no espaço contínuo.

Conforme (Cheng e Hwang, 2001), a escolha do algoritmo de ED para otimização de problemas é baseada nas seguintes características: é um algoritmo de busca estocástica, originado dos mecanismos de seleção natural; busca a solução em diferentes regiões do espaço,

ou seja, dificilmente torna-se preso em ótimos locais; permite que os parâmetros de entrada e saída sejam manipulados como números ordinários reais utilizando eficientemente os recursos do computador; e é eficaz trabalhando com uma população pequena.

O processo de otimização de um algoritmo de ED consiste basicamente em adicionar a diferença vetorial ponderada, entre dois indivíduos escolhidos aleatoriamente na população, a um terceiro indivíduo, gerando assim um indivíduo modificado. Em seguida, as componentes do indivíduo modificado são recombinadas com as componentes de um indivíduo escolhido aleatoriamente, resultando em um indivíduo tentativa. Se este indivíduo tentativa resultar em um valor da função objetivo menor que o do indivíduo escolhido anteriormente de forma aleatória, então ele o substituirá na geração seguinte.

Este processo de ED pode ser dividido em cinco etapas: inicialização, mutação, recombinação, avaliação e seleção. A figura 2 representa o procedimento geral do algoritmo da evolução diferencial com as respectivas etapas.



Figura 2: Processo da Evolução Diferencial.

### 4.2.1 Inicialização

Na fase de inicialização, as variáveis de controle são inicializadas e a população inicial é gerada. As variáveis de controle a serem inicializadas são:  $F$  (fator que controla a amplitude da diferença ponderada),  $CR$  (probabilidade de cruzamento) e  $NP$  (tamanho da população).

Em (Storn e Price, 1997) são recomendados valores que devem ser adotados para as variáveis de controle. O valor de  $F$  a ser escolhido deve pertencer ao intervalo  $[0,2]$ , e quanto maior for o tamanho da população escolhida, menor deve ser o valor de  $F$ . Para a variável  $CR$ , o valor a ser escolhido deve pertencer ao intervalo  $[0,1]$ . Valores próximos a 0 tornam a convergência do algoritmo mais lenta e valores próximos a 1 tornam a convergência mais rápida. O tamanho da população  $NP$  deve ser escolhido como sendo  $10 * D$ , onde  $D$  é igual à dimensão ou ao número de variáveis do problema.

Após a inicialização das variáveis de controle, a população inicial é gerada. A população inicial contém  $NP$  indivíduos, denominado de vetores. Cada vetor contém  $n$  componentes, que

representam as variáveis do problema de otimização. Os indivíduos da população inicial são escolhidos aleatoriamente, geralmente com distribuição de probabilidade uniforme.

### 4.2.2 Mutação

Após as variáveis serem inicializadas e a popula o inicial ser gerada, ocorre a muta o, que   um operador baseado na evolu o natural, cujo objetivo   manter a diversidade da popula o e expandir o espaço de busca.

Neste trabalho, a forma de realizar a muta o ocorre da maneira descrita a seguir. Entre os  $NP$  indivíduos da popula o, são escolhidos aleatoriamente três vetores  $X_\alpha$ ,  $X_\beta$  e  $X_\gamma$  distintos entre si. Na gera o  $q$  um par de vetores  $(X_\beta, X_\gamma)$  define uma diferença  $X_\beta - X_\gamma$ . Esta diferença   multiplicada pela variável de controle  $F$ , sendo denotada por diferença ponderada. A diferença ponderada   usada para perturbar o terceiro vetor  $X_\alpha$ . Assim, para cada vetor  $X_i^{(q)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, NP$ , chamado de vetor alvo, na gera o  $q$ , um vetor mutante   gerado pela expressão:

$$V_i^{(q+1)} = X_\alpha^{(q)} + F(X_\beta^{(q)} - X_\gamma^{(q)}), \quad (4.1)$$

onde os índices aleatórios  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma \in \{1, \dots, NP\}$  devem ser diferentes entre si, e diferentes de  $i$ . Portanto, são gerados  $NP$  vetores mutantes  $V_i^{(q+1)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, NP$ .

### 4.2.3 Recombina o

Na fase de recombina o   introduzido o cruzamento para aumentar a diversidade dos indivíduos que sofreram a muta o. O vetor tentativa  $U_i^{(q+1)}$ , resultante do cruzamento,   formado pela mistura dos componentes do vetor mutante  $V_i^{(q+1)}$  com o vetor alvo  $X_i^{(q)}$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, NP$ .

As componentes do vetor tentativa  $U_i^{(q+1)}$ , representadas por  $u_{i(j)}^{(q+1)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, D$ , são formadas conforme a expressão:

$$u_{i(j)}^{(q+1)} = \begin{cases} v_{i(j)}^{(q+1)}, & \text{se } r_i \leq CR \text{ ou } j = \phi(i), \\ x_{i(j)}^{(q)}, & \text{se } r_i > CR \text{ e } j \neq \phi(i), \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, D, \quad (4.2)$$

onde  $r_i$    um número gerado aleatoriamente no intervalo  $[0, 1]$ ,  $x_{i(j)}^{(q)}$  e  $v_{i(j)}^{(q+1)}$  são as componentes dos vetores alvo  $X_i^{(q)}$  e mutante  $V_i^{(q+1)}$ , respectivamente,  $CR$    a probabilidade do cruzamento, ou seja, a probabilidade do vetor tentativa herdar os valores das variáveis do vetor doador  $V_i^{(q+1)}$ , e  $\phi(i)$    um número aleatório escolhido no conjunto  $\{1, 2, \dots, D\}$ .

Quando a probabilidade de cruzamento  $CR$  for igual a 1, todas as componentes do vetor tentativa  $U_i^{(q+1)}$  serão herdadas do vetor doador  $V_i^{(q+1)}$ . Caso a probabilidade de cruzamento  $CR$  for igual a 0, todas as componentes do vetor tentativa serão herdadas do vetor alvo  $X_i^{(q)}$ .

#### 4.2.4 Avaliação

Na fase de avaliação, o custo de cada um dos indivíduos  $i = 1, 2, \dots, NP$ , do vetor alvo  $X_i^{(q)}$  e do vetor tentativa  $U_i^{(q+1)}$  são calculados, representados respectivamente por  $f(X_i^{(q)})$  e  $f(U_i^{(q+1)})$ .

#### 4.2.5 Seleção

Na fase de seleção, os melhores filhos são produzidos, e portanto são determinados os vetores alvo da geração seguinte. O custo do vetor tentativa  $U_i^{(q+1)}$ , representado por  $f(U_i^{(q+1)})$ , é comparado com o custo do vetor alvo  $X_i^{(q)}$ , representado por  $f(X_i^{(q)})$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, NP$ . Se o custo do vetor alvo for menor que o custo do vetor tentativa, ao vetor alvo é permitido avançar para a próxima geração. Caso contrário, o vetor tentativa substitui o vetor alvo na geração seguinte. Este processo de seleção pode ser escrito como:

$$\text{Se } f(U_i^{(q+1)}) \leq f(X_i^{(q)}), \text{ então } X_i^{(q+1)} = U_i^{(q+1)}, \quad (4.3)$$

$$\text{Se } f(U_i^{(q+1)}) > f(X_i^{(q)}), \text{ então } X_i^{(q+1)} = X_i^{(q)}, \quad i = 1, 2, \dots, NP.$$

Para que o procedimento de ED seja finalizado, algum critério de parada deve ser adotado, como por exemplo, estabelecendo-se um número máximo de gerações.

### 4.3 Estratégias da Evolução Diferencial

O algoritmo de ED pode variar de acordo com o critério de escolha do indivíduo a ser modificado na formação do vetor mutante, o número de indivíduos considerados para perturbação e o tipo de cruzamento a ser utilizado. As estratégias de EDI são usualmente escritas pela notação ED/a/b/c, onde:

- a - especifica o vetor a ser modificado  $X_\gamma$ , podendo ser “*rand*” (um vetor da população escolhido aleatoriamente) ou “*best*” (o vetor de menor custo da população);
- b - determina o número de vetores diferença usados na mutação;

- $c$  - denota o tipo de cruzamento, exponencial (exp) ou binomial (bin).

Alternando entre os diferentes valores de  $a$ ,  $b$  e  $c$ , dez estratégias podem ser descritas de acordo com a Tabela 1. A estratégia a ser adotada para um problema é determinada por tentativa e erro, pois uma estratégia que funciona bem para um dado problema pode não funcionar bem quando aplicada a outro problema.

Tabela 1: Estratégias da Evolução Diferencial

Número	Mutação	Notação
1	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/rand/1/bin
2	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/best/1/bin
3	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\lambda}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand/2/bin
4	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_{\alpha}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/best/2/bin
5	$V^{(q+1)} = X_{old}^{(q)} + F(X_{best}^{(q)} - X_{old}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand-to-best/2/bin
6	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/rand/1/exp
7	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_{\beta}^{(q)} - X_{\gamma}^{(q)})$	ED/best/1/exp
8	$V^{(q+1)} = X_{\alpha}^{(q)} + F(X_{\lambda}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand/2/exp
9	$V^{(q+1)} = X_{best}^{(q)} + F(X_{\alpha}^{(q)} - X_{\beta}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand/2/exp
10	$V^{(q+1)} = X_{old}^{(q)} + F(X_{best}^{(q)} - X_{old}^{(q)} + X_{\gamma}^{(q)} - X_{\delta}^{(q)})$	ED/rand-to-best/2/exp

Fonte: (Arantes *et al.*, 2006).

## 4.4 Algoritmo Híbrido

No capítulo anterior, foi formulado o Teorema 1, com a finalidade de resolver o problema proposto neste trabalho. No entanto, o teorema é composto por desigualdades matriciais que não são convexas, e, conseqüentemente, tem-se um problema não convexo a ser solucionado. Assim, um algoritmo híbrido é proposto baseado em ED e em LMIs, a fim de resolver o problema de projeto de controladores robustos.

A Computação Evolutiva, que é um importante método de otimização, vem sendo aplicada com sucesso a uma grande variedade de problemas de otimização em engenharia. A medida que novos problemas de otimização em engenharia aparecem, sempre com funções objetivo sendo não-diferenciável, não-contínua, não-linear, perturbada e multidimensional, ou possuindo vários mínimos locais e restrições complexas por causa dos diferentes requerimentos práticos, as abordagens eficazes e viáveis para solucionar tais problemas estão se tornando insatisfatórias e insuficientes. A ED, que é um métodos de otimização pertencente a área da Computação

Evolutiva, tem sua efetividade e eficiência demonstrada com sucesso nos últimos anos através de uma ampla quantidade de aplicações (Nearchou e Omirou, 2006), tornando-se um método satisfatório para solucionar tais problemas em engenharia (Ronkkonen *et al.*, 2005; Salman *et al.*, 2007).

Para que o problema seja solucionado, é necessário encontrar os valores de quatro variáveis:  $P$ ,  $L_K$ ,  $\alpha_k$  e  $\sigma_k$ . Baseado na estrutura geral do algoritmo de ED, com um conjunto de soluções candidatas para as variáveis  $L_K$  e  $\alpha_k$ , as desigualdades matriciais do problema podem ser tratadas como sendo convexas (LMIs). Assim, para cada par  $(L_K, \alpha_k)$  o algoritmo pode determinar, resolvendo um problema de otimização convexo, as demais variáveis do problema,  $P$  e  $\sigma_k$ .

Desta forma, o algoritmo híbrido proposto gera uma população inicial  $Pop$  de soluções candidatas (indivíduos) para as variáveis  $L_K$  e  $\alpha_k$ . Em cada geração  $j$ , o problema de otimização convexo resultante pode ser resolvido utilizando o pacote LMI-Lab do *software MATLAB*, (Gahinet *et al.*, 1995) para cada solução candidata, ou seja, o par  $(L_K, \alpha_k)$ . Assim, todos os indivíduos da população  $Pop$  são avaliados e ao final de determinando número de gerações, encontram-se os valores das variáveis que solucionam o problema apresentado, de tal forma que as desigualdades sejam satisfeitas.

#### 4.4.1 Algoritmo

O algoritmo proposto para resolver o Problema 1, com a minimização da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , pode ser descrito como:

---

##### Algoritmo 1 Algoritmo de Síntese

---

```

Gerar uma população inicial factível  $Pop$ ;
 $eval_P \leftarrow$  Calcular a aptidão de cada indivíduo de  $Pop$ 
enquanto Número de gerações não for atingido ( $j < J$ ) faça
  Gerar o vetor modificado  $V$ ;
   $U \leftarrow$  Realizar o cruzamento entre  $Pop$  e  $V$ ;
   $eval_U \leftarrow$  Calcular a aptidão de cada indivíduo de  $U$ ;
  para  $i = 1$  até  $M$  faça
    se  $eval_{U_i} > eval_{P_i}$  então
      Substituir  $Pop_i$  por  $U_i$  em  $Pop$ 
    fim se
  fim para
fim enquanto

```

---

### 4.4.2 Inicialização do Controlador

Para inicializar os indivíduos  $L_K$ , a geração da população inicial clássica de ED, apresentada em (Storn e Price, 1995), requer um enorme esforço computacional, porque o espaço de busca não é convexo e os limites do espaço de busca são desconhecidos. A fim de reduzir o esforço computacional na geração de indivíduos factíveis, uma abordagem descrita em (Araújo, 1998) foi implementada. Esta abordagem fornece uma condição suficiente para a geração de elementos factíveis, do ponto de vista da estabilidade quadrática, através de um problema de controle robusto por realimentação de estados.

Portanto, é necessário que o problema de controle robusto por realimentação de saída estática seja escrito na forma de um problema de controle por realimentação de estados. Utilizando-se a lei de controle  $u = L_K y$ , onde  $L_K$  é dado por (3.5), o problema de controle robusto por realimentação de saída dinâmica pode ser reescrito como um sistema por realimentação de saída estática, possibilitando o problema ser escrito como um problema de controle por realimentação de estados. Seja o sistema obtido a partir de

$$\begin{cases} x(k+1) = \tilde{A}x_f(k) + \tilde{B}_1w(k) + \tilde{B}_2u(k) \\ y(k) = \tilde{C}_y x_f(k) \\ z(k) = \tilde{C}_1x_f(k) + \tilde{D}_{11}w(k) + \tilde{D}_{12}u(k) \end{cases}, \quad (4.4)$$

A lei de controle por realimentação estática de saída é dada por:

$$u = L_K y. \quad (4.5)$$

Se o posto de  $C_y$  não for completo, gera-se uma matriz aleatória  $N$  tal que a matriz

$$M = \begin{bmatrix} N \\ C_y \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

tenha posto completo. Com a matriz  $M$ , definida em (4.6), realiza-se a transformação de similaridade  $\bar{x} = Mx_f$  e o sistema se torna:

$$\begin{cases} \bar{x}(k+1) = \bar{A}x_f(k) + \bar{B}_1w(k) + \bar{B}_2u(k) \\ y(k) = \bar{C}_y x_f(k) \\ z(k) = \bar{C}_1x_f(k) + \bar{D}_{11}w(k) + \bar{D}_{12}u(k) \end{cases}, \quad (4.7)$$

onde  $\bar{A} = M\tilde{A}M^{-1}$ ,  $\bar{B}_1 = M\tilde{B}_1$ ,  $\bar{B}_2 = M\tilde{B}_2$ ,  $\bar{C}_1 = \tilde{C}_1M^{-1}$  e  $\bar{C}_y = \tilde{C}_yM^{-1}$ . A lei de controle resultante é dada por

$$u = L\bar{C}_yM^{-1}\bar{x} = \bar{L}\bar{x}, \quad (4.8)$$

onde o novo controlador  $\bar{L}$  possui a seguinte estrutura:

$$\bar{L} = \begin{bmatrix} 0 & L_K \end{bmatrix}. \quad (4.9)$$

Para tornar o problema convexo e encontrar os controladores factíveis  $L_K$ , utiliza-se a transformação  $\bar{L}G = L$ , com matrizes de estrutura fixa dadas por

$$G = \begin{bmatrix} [\bullet]_{(n \times p)} & 0 \\ 0 & [\bullet]_{(p)} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0_{(m \times (n-p))} & [\bullet]_{(m \times p)} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

para solucionar as LMIs,

$$\begin{bmatrix} P_{ij} & A_i G + B_{2j} \bar{L} \\ G^T A_i^T + \bar{L}^T B_{2j}^T & G + G^T - P_{ij} \end{bmatrix} \leq 0, \quad (4.11)$$

em cada vértice  $(A_i, B_{2j})$  de  $\mathcal{D}_A \times \mathcal{D}_{B_2}$ .

O controlador robusto  $L_K$  é extraído de  $\bar{L}$  e os  $\alpha_k$  são determinados de forma aleatória. Conforme (Neumann, 2006), as restrições impostas às estruturas de  $G$  e  $L$  inserem um conservadorismo extra na geração da população inicial, fazendo com que o procedimento não encontre soluções factíveis para determinados problemas ou confinando a população inicial em uma região restrita do espaço de busca, comprometendo a região inicial de busca e a diversidade da população inicial.

## 5 Resultados

### 5.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo a validação do método proposto para a solução do problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  de sistemas discretos sujeitos a restrições no controle e na saída. Assim, dois exemplos extraídos da literatura, relacionados com o problema abordado, são estudados.

### 5.2 Exemplo 1

Neste exemplo, é utilizado um sistema incerto em tempo discreto, baseado no problema descrito em (Lu *et al.*, 2005), e descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1w(k) + B_2u(k), \\ y(k) = C_yx(k), \\ z(k) = C_1x(k) + D_{11}w(k) + D_{12}u(k), \end{cases}$$

com

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0,2 & -0,2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad B_{21} = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = [0, 1], \quad D_{12} = [1].$$

O sinal de controle está sujeito às seguintes restrições:

$$-1 \leq u(k) \leq 1.$$

As restrições no sinal de saída são dadas por:

$$-5 \leq y(k) \leq 5,$$

e o sinal de perturbação está restrito a uma esfera de raio  $w_0 = 0,2$  e centro na origem.

A entrada de referência satisfaz à seguinte restrição:

$$-1 \leq r(k) \leq 1.$$

O controlador por realimentação dinâmica de saída, de ordem completa ( $n_c = 2$ ), obtido pelo algoritmo de síntese apresentado na seção 4.4, é definido por

$$\begin{cases} \zeta(k+1) = A_k \zeta(k) + B_k e(k), \\ u(k) = C_k \zeta(k) + D_k e(k), \end{cases}$$

com

$$A_k = \begin{bmatrix} -0,0301 & -0,3288 \\ -0,2561 & 0,3994 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} 0,4269 \\ -0,1933 \end{bmatrix},$$

$$C_k = \begin{bmatrix} 0,1031 & 0,0380 \end{bmatrix}, \quad D_k = [0].$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  associada ao limitante superior é  $\gamma = 1,3445$  e o melhor valor do vetor  $\alpha_k$  encontrado é:

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} 0,2664 & 0,2678 \end{bmatrix}.$$

O conjunto positivamente  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariante  $\Omega$  é determinado pela matriz

$$P = \begin{bmatrix} 0,9696 & -0,1173 & -0,0101 & -0,0157 \\ -0,1173 & 0,7490 & 0,3518 & 0,0150 \\ -0,0101 & 0,3518 & 0,5057 & 0,3171 \\ -0,0157 & 0,0150 & 0,3171 & 0,3400 \end{bmatrix}.$$

Neste exemplo, o algoritmo foi executado durante 200 gerações com uma população inicial de 20 indivíduos, e as variáveis de controle do ED foram  $CR = 0,8$  e  $F = 0,5$ . A evolução dos valores da norma  $\mathcal{H}_\infty$  durante a execução do algoritmo híbrido é apresentada na Figura 3. Nota-se que a partir da centésima geração, a norma já está próxima de seu valor ótimo, justificando a parada do algoritmo em 200 iterações.

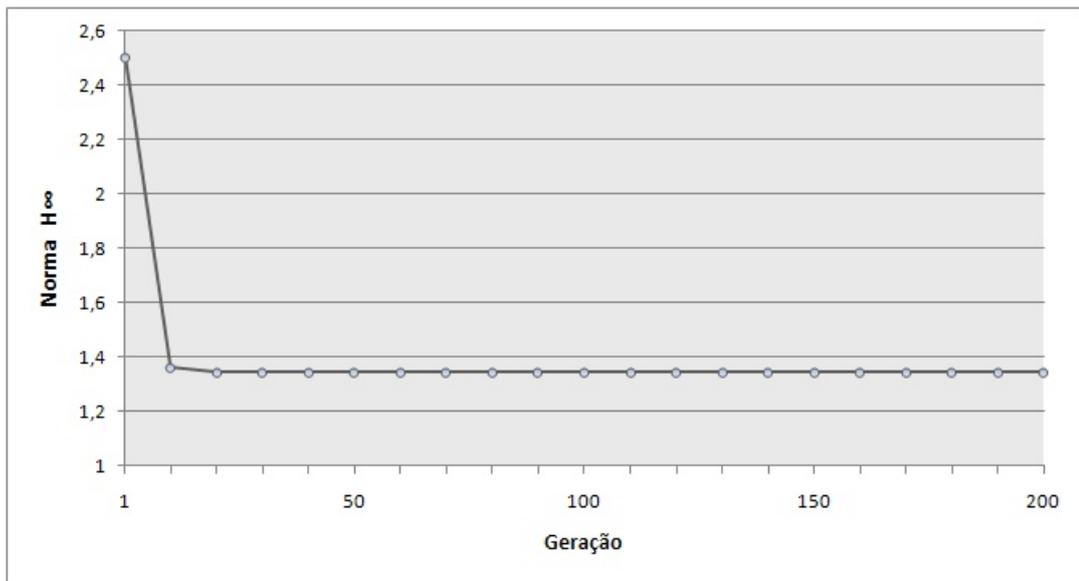
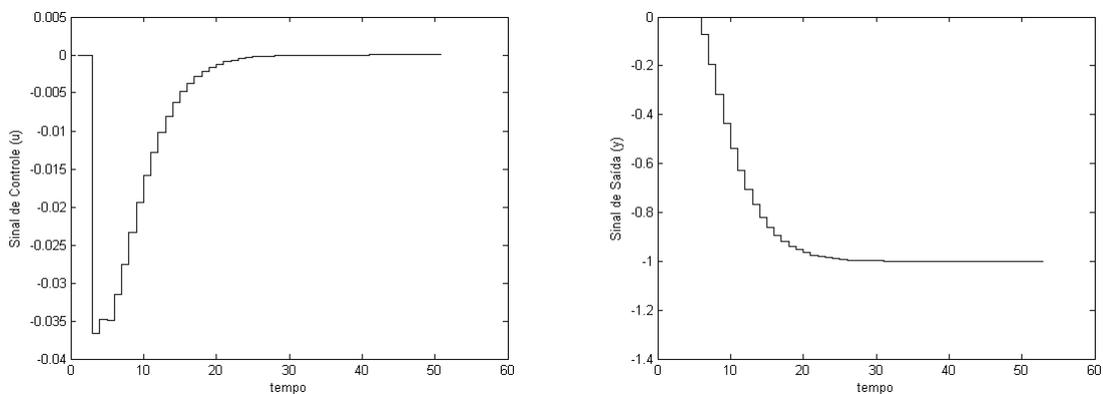


Figura 3: Evolução da norma  $\mathcal{H}_\infty$  ao longo das gerações

Nas Figuras 4 e 5, são ilustrados os sinais de controle e saída do sistema em malha fechada quando o processo é definido pelo modelo tal com vértices  $(A_1, B_{21})$  e  $(A_2, B_{22})$ , respectivamente. Nestas figuras não há perturbação externa atuando sobre o processo, isto é,  $w(k) = 0, \forall k$ , e o sinal de referência é  $-1$ , isto é,  $r(k) = -1, k \geq 0$ .



(a) Sinal de Controle

(b) Sinal de Saída

Figura 4: Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por  $(A_1, B_{21})$ .

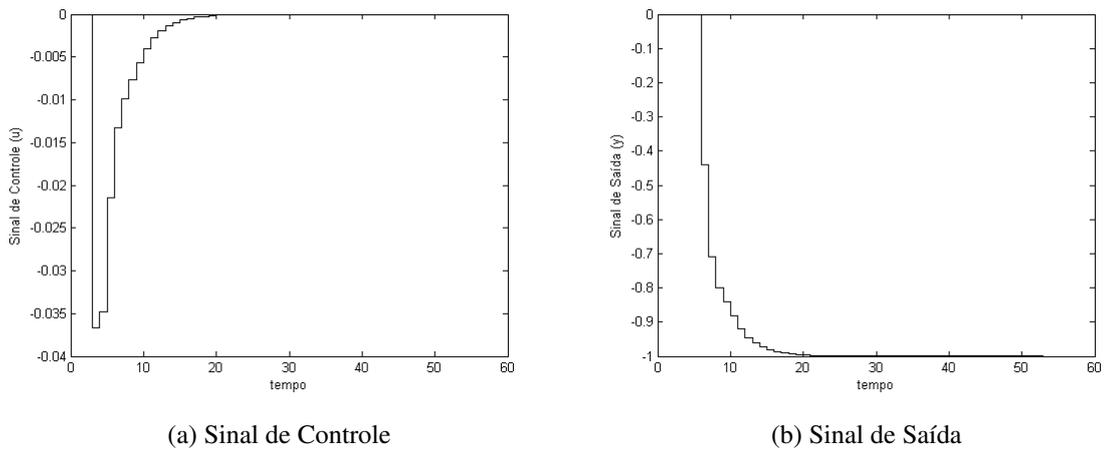


Figura 5: Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por  $(A_2, B_{22})$ .

Nas Figuras 6 e 7, são ilustrados os sinais de controle e saída do sistema em malha fechada quando o processo é definido pelo modelo tal com vértices  $(A_1, B_{21})$  e  $(A_2, B_{22})$ , respectivamente. Nestas figuras não há perturbação externa atuando sobre o processo, isto é,  $w(k) = 0, \forall k$ , e o sinal de referência é 1, isto é,  $r(k) = 1, k \geq 0$ .

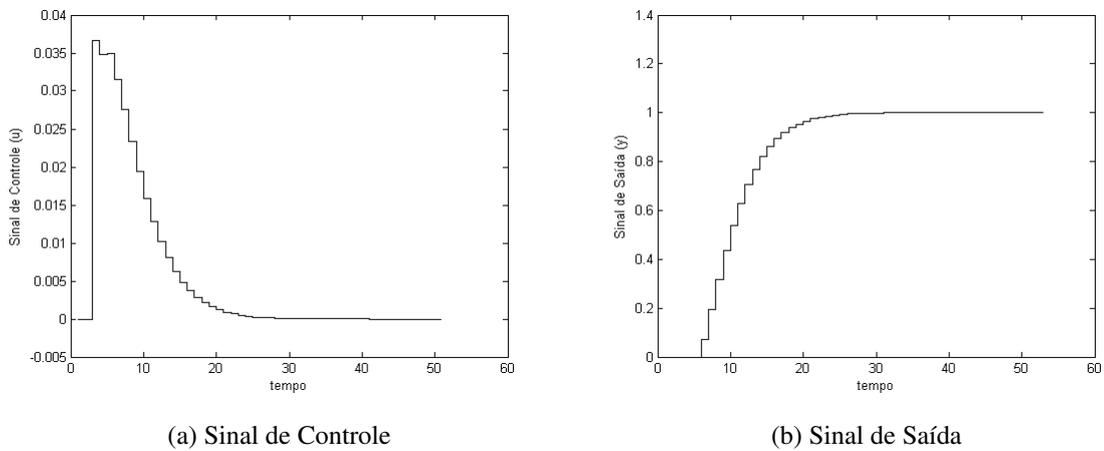


Figura 6: Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por  $(A_1, B_{21})$ .

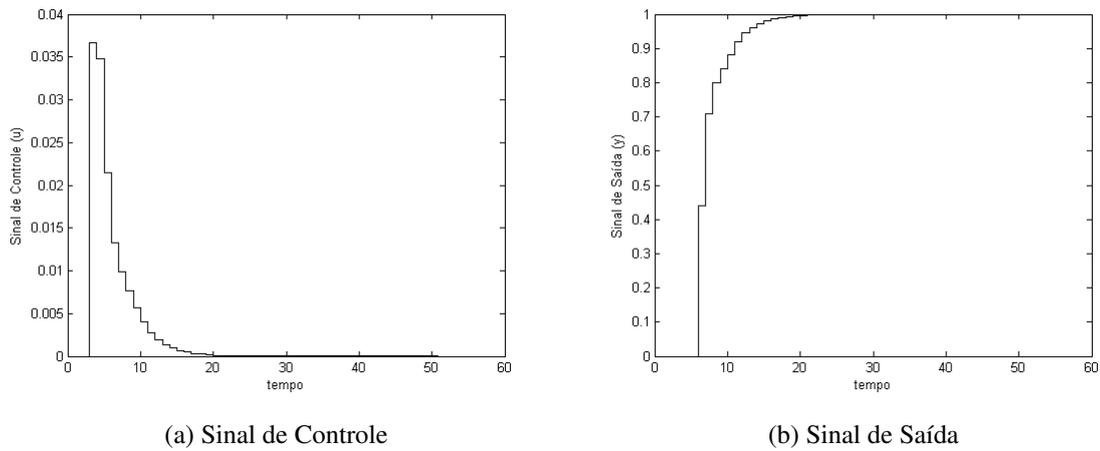


Figura 7: Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por  $(A_2, B_{22})$ .

Nas Figuras 8 e 9, são ilustrados os sinais de controle e saída do sistema em malha fechada quando o processo é definido pelo modelo tal com vértices  $(A_1, B_{21})$  e  $(A_2, B_{22})$ , respectivamente. Nestas figuras há perturbação externa atuando sobre o processo, isto é,  $w(k) = 0, 2, \forall k$ , e o sinal de referência é  $-1$ , isto é,  $r(k) = -1, k \geq 0$ .

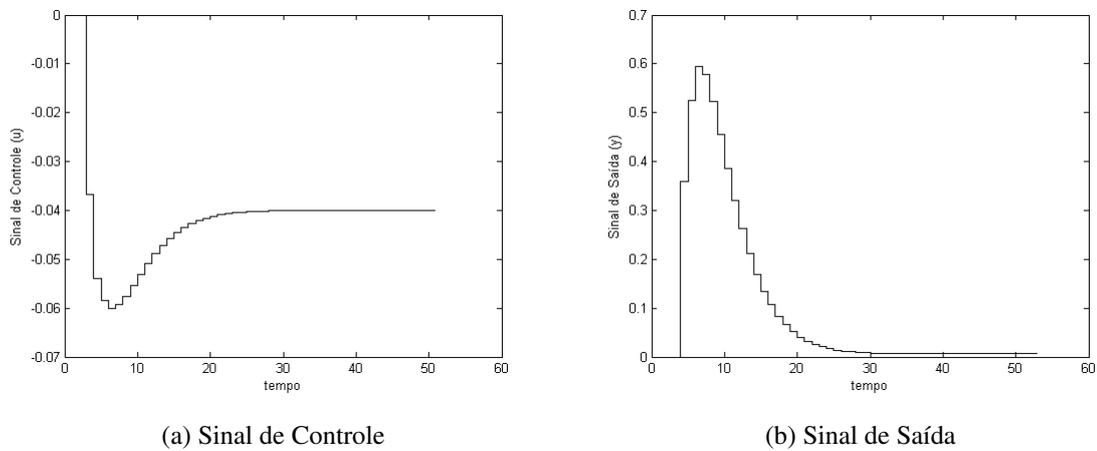


Figura 8: Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por  $(A_1, B_{21})$ .

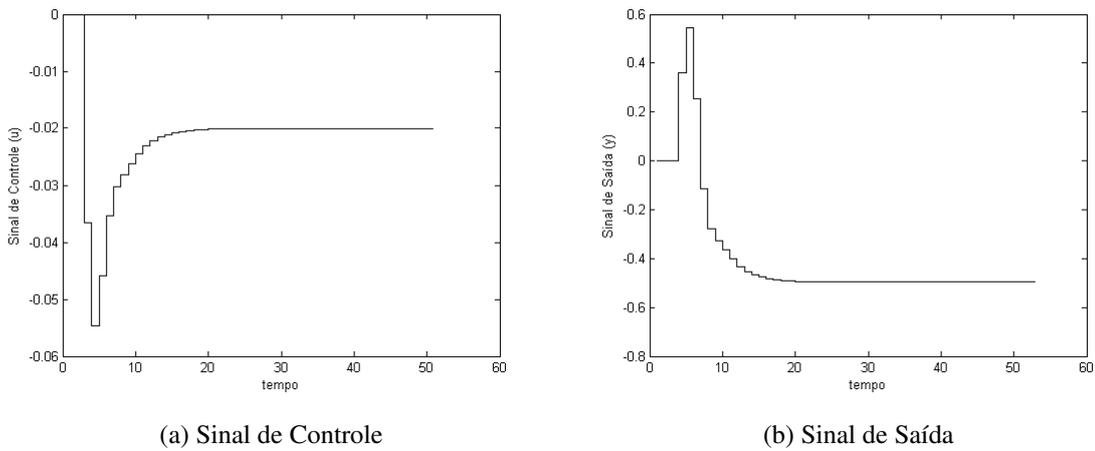


Figura 9: Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por  $(A_2, B_{22})$ .

Nas Figuras 10 e 11, são ilustrados os sinais de controle e saída do sistema em malha fechada quando o processo é definido pelo modelo tal com vértices  $(A_1, B_{21})$  e  $(A_2, B_{22})$ , respectivamente. Nestas figuras há perturbação externa atuando sobre o processo, isto é,  $w(k) = 0, 2, \forall k$ , e o sinal de referência é 1, isto é,  $r(k) = 1, k \geq 0$ .

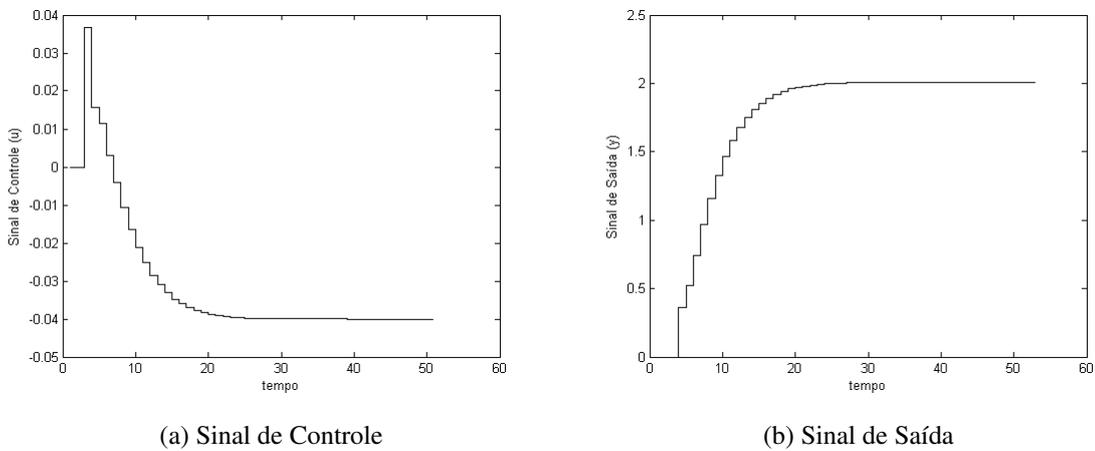


Figura 10: Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por  $(A_1, B_{21})$ .

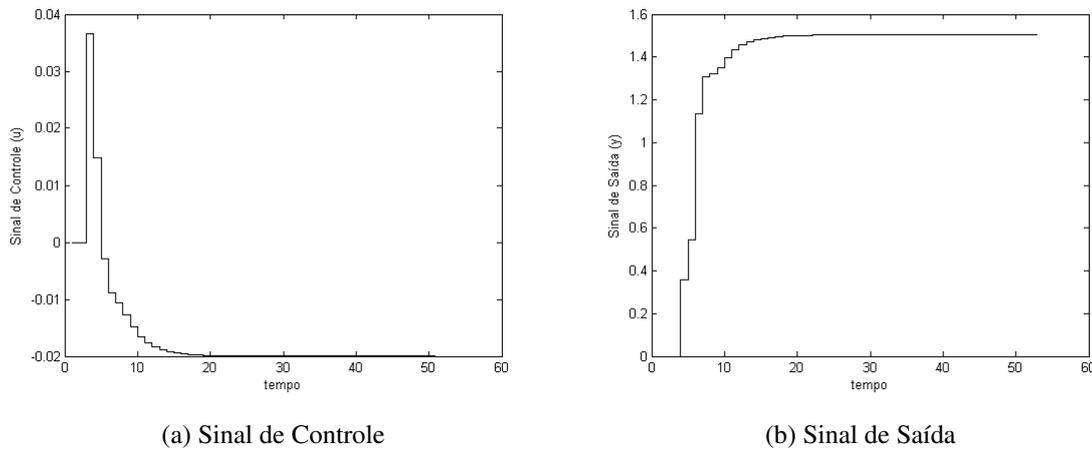


Figura 11: Sinais de Controle e Saída para o sistema definido por  $(A_2, B_{22})$ .

Dentre as Figuras 4 à 11 pode ser observado que as restrições nos sinais de controle e de saída são respeitadas pelo controlador projetado para o sistema apresentado, na ausência ou presença de um sinal de perturbação. O desempenho do controlador projetado é satisfatório, uma vez que quanto menor for o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$ , menor será o efeito da perturbação externa  $w$  sobre o sinal de saída do sistema.

O exemplo foi executado durante 20 vezes, para os parâmetros apresentados acima, o que permitiu determinar o desvio padrão e a mediana dos valores da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . O desvio padrão calculado foi de 0,0158 e a mediana foi de 1,3365.

A Tabela 2 mostra os resultados obtidos para este problema, considerando-se controladores com dimensões diferentes.

Tabela 2: Resultado do limitante superior da norma  $\mathcal{H}_\infty$  para controladores de diferentes dimensões.

Ordem do Controlador	$\gamma$
1	1,33
2	1,34

Nota-se que os limitantes da norma  $\mathcal{H}_\infty$  são próximos para os dois controladores, ou seja, o desempenho do sistema permanece o mesmo para as diferentes dimensões.

## 5.3 Exemplo 2

Este exemplo é uma adaptação do problema descrito em (Zhai *et al.*, 2002). Seja o sistema incerto em tempo discreto, descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + B_1w(k) + B_2u(k), \\ y(k) = C_yx(k), \\ z(k) = C_1x(k) + D_{11}w(k) + D_{12}u(k), \end{cases}$$

e

$$A = \begin{bmatrix} 0,46 & -1,08 & -1,15 & 0,99 \\ 0,33 & -0,52 & -1,28 & 0,97 \\ -1,38 & 0,34 & 0,65 & -0,67 \\ -0,53 & -0,55 & 0,19 & -0,27 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0,29 \\ 0,71 \\ 0,49 \\ -0,20 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0,73 \\ 2,02 \\ -1,82 \\ b_1 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -0,67 & 0,40 & 0,18 & -0,40 \end{bmatrix}, \quad C_y = \begin{bmatrix} -1,71 & 0,93 & -0,64 & 0,63 \end{bmatrix},$$

$$D_{11} = [0,63], \quad D_{12} = [0],$$

com  $-1 \leq b_1 \leq -0,43$ .

O sinal de controle está sujeito às seguintes restrições:

$$-10 \leq u(k) \leq 10.$$

As restrições no sinal de saída são dadas por:

$$-10 \leq y(k) \leq 10,$$

e a perturbação está restrita a uma esfera de raio  $w_0 = 0,5$  e centro na origem..

A entrada de referência satisfaz à seguinte restrição:

$$-3 \leq r(k) \leq 3.$$

O controlador por realimentação dinâmica de saída, de ordem completa ( $n_c = 4$ ), obtido pelo algoritmo de síntese apresentado na seção 4.4, é definido por

$$\begin{cases} \zeta(k+1) = A_k\zeta(k) + B_k e(k), \\ u(k) = C_k\zeta(k) + D_k e(k), \end{cases}$$

onde

$$A_k = \begin{bmatrix} 0,2655 & -0,1274 & 0,4447 & -0,6310 \\ 0,0559 & -0,0286 & 0,6946 & -1,1710 \\ -0,2297 & -0,6007 & -0,1273 & -0,3175 \\ 0,1415 & -0,2733 & 0,1752 & -0,6427 \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} -0,2404 \\ -0,2287 \\ 0,2346 \\ 0,2511 \end{bmatrix},$$

$$C_k = \begin{bmatrix} 0,6191 & 0,4019 & 0,2189 & -0,2047 \end{bmatrix}, \quad D_k = [0].$$

A norma  $\mathcal{H}_\infty$  associada ao limitante superior é  $\gamma = 52,75$  e o melhor valor do vetor  $\alpha_k$  encontrado é:

$$\alpha_k = \begin{bmatrix} 0,2257 & 0,2186 \end{bmatrix}.$$

O conjunto positivamente  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariante  $\Omega$  é determinado pela matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 2,0860 & -1,4276 & 1,4478 & -2,4099 & -2,2364 & 1,8234 & -4,1340 & 3,1826 \\ -1,4276 & 1,1041 & -0,9100 & 1,6519 & 1,5995 & -1,2760 & 2,9709 & -2,2330 \\ 1,4478 & -0,9100 & 1,0995 & -1,7204 & -1,5611 & 1,2358 & -2,8457 & 2,2467 \\ -2,4099 & 1,6519 & -1,7204 & 2,8559 & 2,6504 & -2,1038 & 4,8886 & -3,7869 \\ -2,2364 & 1,5995 & -1,5611 & 2,6504 & 11,0386 & -8,2752 & 5,4681 & -1,9806 \\ 1,8234 & -1,2760 & 1,2358 & -2,1038 & -8,2752 & 6,3598 & -4,2368 & 1,6098 \\ -4,1340 & 2,9709 & -2,8457 & 4,8886 & 5,4681 & -4,2368 & 8,7419 & -6,5371 \\ 3,1826 & -2,2330 & 2,2467 & -3,7869 & -1,9806 & 1,6098 & -6,5371 & 5,5933 \end{bmatrix}.$$

O algoritmo foi executado durante 200 gerações com uma população inicial de 20 indivíduos, e as variáveis de controle do ED foram  $CR = 0,8$  e  $F = 0,5$ . A evolução dos valores da norma  $\mathcal{H}_\infty$  durante a execução do algoritmo híbrido é apresentada na Figura 12.



Figura 12: Evolução da norma  $\mathcal{H}_\infty$  ao longo das gerações.

Nas Figuras 13 e 14, são ilustrados os sinais de controle e saída do sistema em malha fechada quando o processo é definido pelo modelo tal com vértices  $(A, B_{21})$  e  $(A, B_{22})$ , respectivamente. Nestas figuras não há perturbação externa atuando sobre o processo, isto é,  $w(k) = 0, \forall k$ , e o sinal de referência é  $-3$ , isto é,  $r(k) = -3, k \geq 0$ .

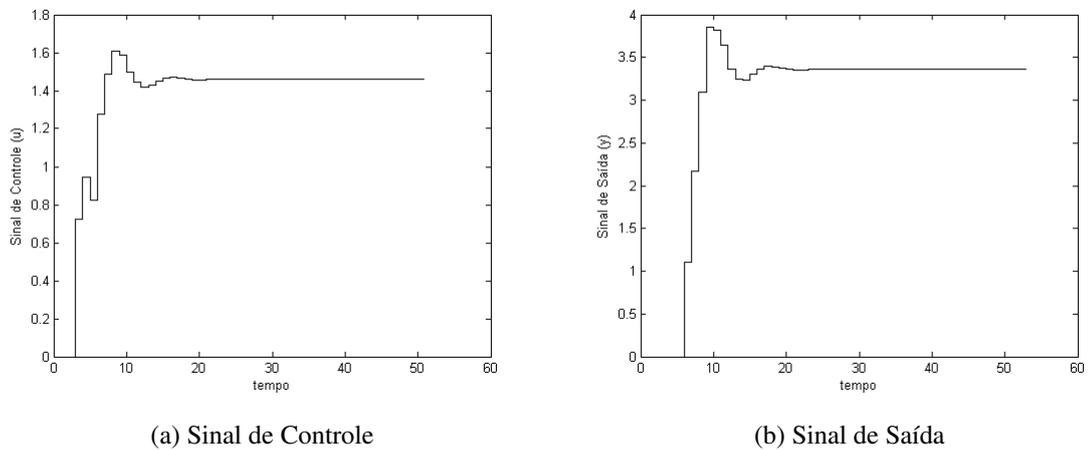


Figura 13: Sinais de Controle e Saída no vértice  $(A, B_{21})$ .

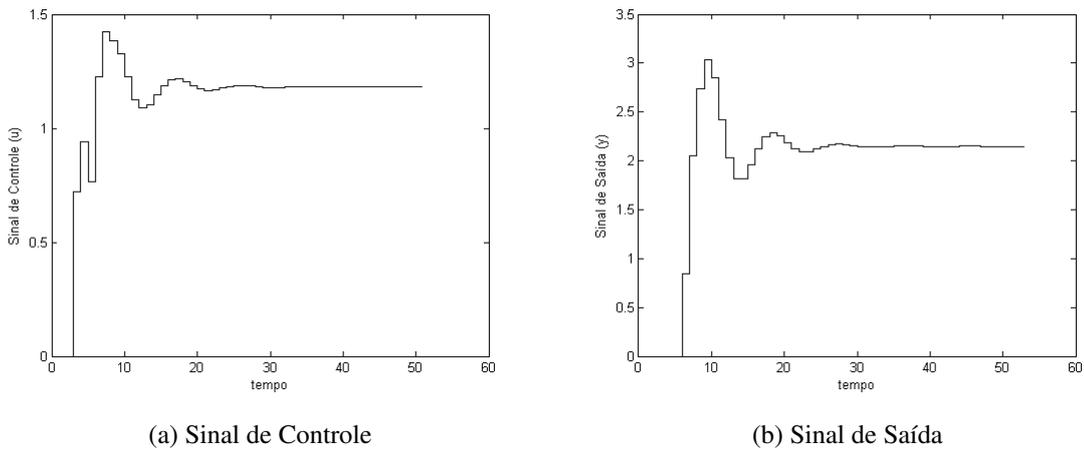


Figura 14: Sinais de Controle e Saída no vértice  $(A, B_{22})$ .

Nas Figuras 15 e 16, são ilustrados os sinais de controle e saída do sistema em malha fechada quando o processo é definido pelo modelo tal com vértices  $(A, B_{21})$  e  $(A, B_{22})$ , respectivamente. Nestas figuras não há perturbação externa atuando sobre o processo, isto é,  $w(k) = 0, \forall k$ , e o sinal de referência é 3, isto é,  $r(k) = 3, k \geq 0$ .

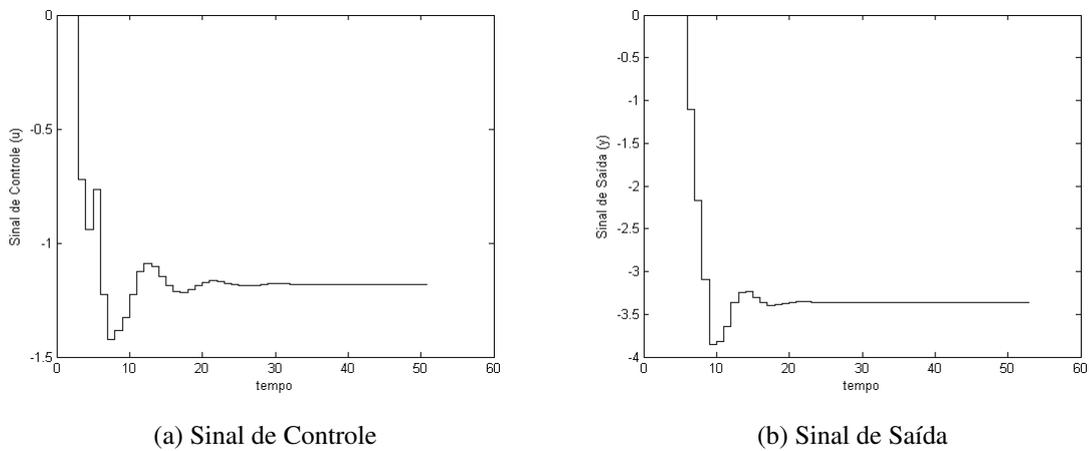


Figura 15: Sinais de Controle e Saída no vértice  $(A, B_{21})$ .

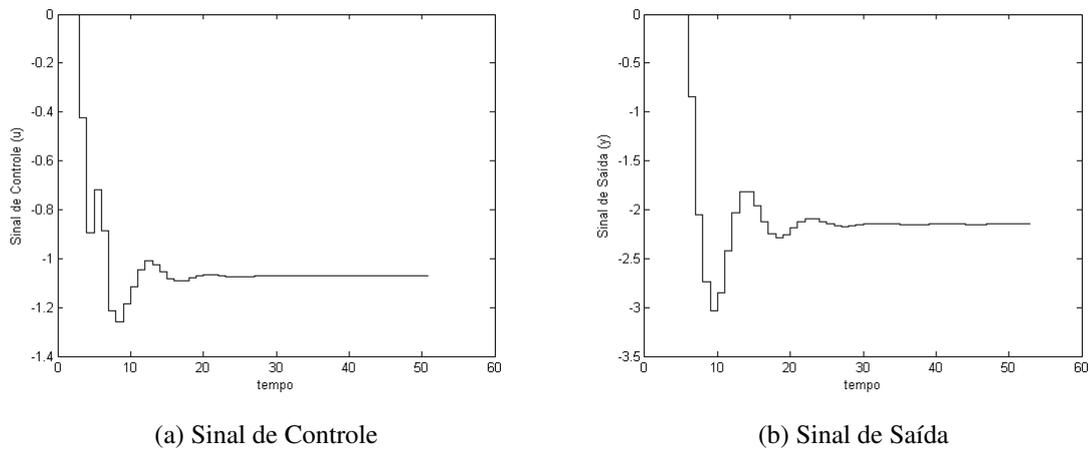


Figura 16: Sinais de Controle e Saída no vértice  $(A, B_{22})$ .

Nas Figuras 17 e 18, são ilustrados os sinais de controle e saída do sistema em malha fechada quando o processo é definido pelo modelo tal com vértices  $(A, B_{21})$  e  $(A, B_{22})$ , respectivamente. Nestas figuras há perturbação externa atuando sobre o processo, isto é,  $w(k) = 0,5, \forall k$ , e o sinal de referência é  $-3$ , isto é,  $r(k) = -3, k \geq 0$ .

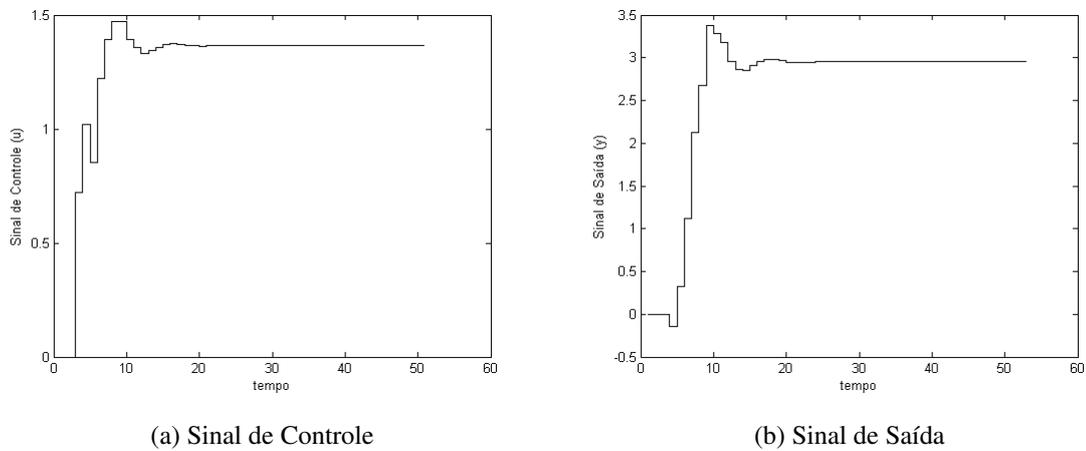


Figura 17: Sinais de Controle e Saída no vértice  $(A, B_{21})$ .

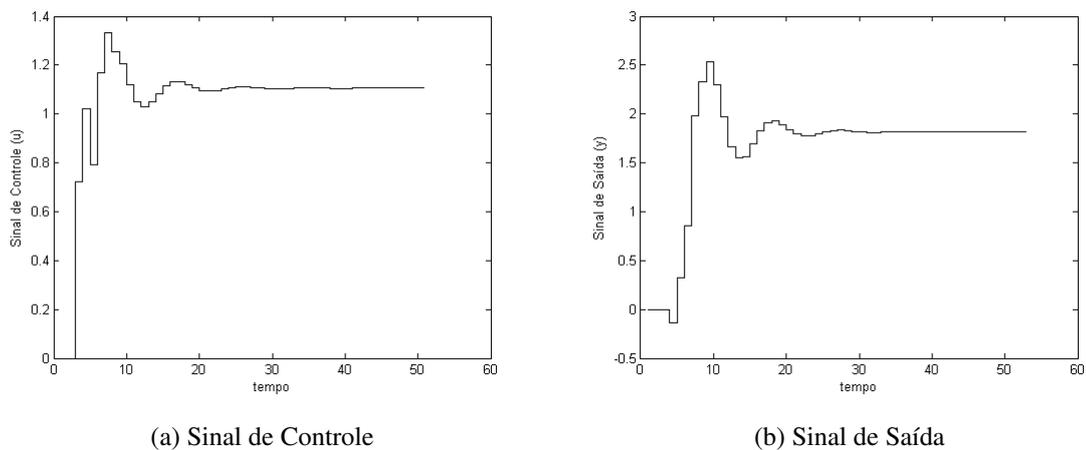


Figura 18: Sinais de Controle e Saída no vértice  $(A, B_{22})$ .

Nas Figuras 19 e 20, são ilustrados os sinais de controle e saída do sistema em malha fechada quando o processo é definido pelo modelo tal com vértices  $(A, B_{21})$  e  $(A, B_{22})$ , respectivamente. Nestas figuras há perturbação externa atuando sobre o processo, isto é,  $w(k) = 0,5, \forall k$ , e o sinal de referência é 3, isto é,  $r(k) = 3, k \geq 0$ .

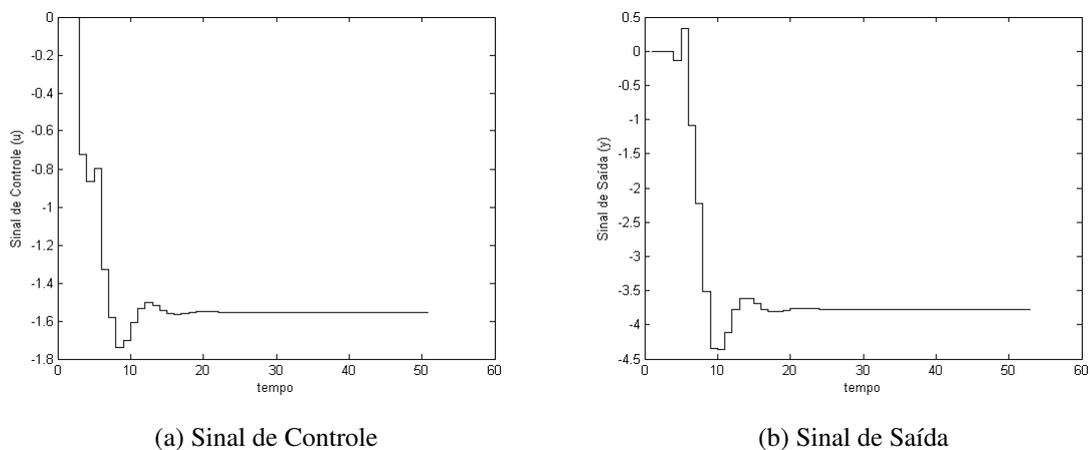


Figura 19: Sinais de Controle e Saída no vértice  $(A, B_{21})$ .

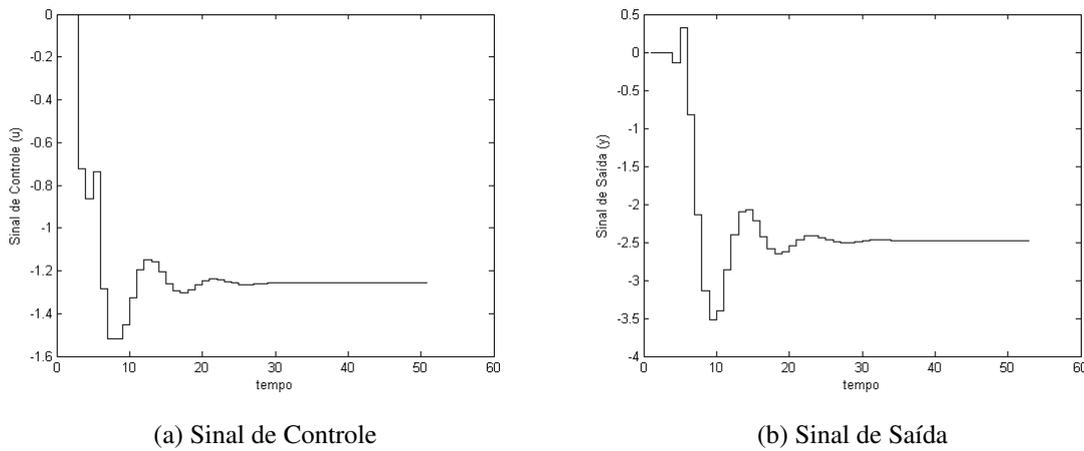


Figura 20: Sinais de Controle e Saída no vértice  $(A, B_{22})$ .

Dentre as figuras 13 à 20 pode ser observado que as restrições nos sinais de controle e de saída são respeitadas pelo controlador projetado para o sistema apresentado, na ausência ou presença de um sinal de perturbação. O desempenho do controlador projetado não é tão satisfatório, pois o valor da norma  $\mathcal{H}_\infty$  é relativamente alto, não fornecendo uma boa filtragem do sinal de perturbação.

O problema foi executado durante 20 vezes consecutivas para os parâmetros apresentados acima, o que permitiu determinar o desvio padrão e a mediana dos valores da norma  $\mathcal{H}_\infty$ . O desvio padrão calculado foi de 3,17 e a mediana foi de 49,26.

A Tabela 3 mostra os resultados obtidos para este problema considerando controladores com dimensões diferentes.

Tabela 3: Resultado do limitante superior da norma  $\mathcal{H}_\infty$  para controladores de diferentes dimensões.

Ordem do Controlador	$\gamma$
2	52,27
3	52,51
4	52,75

Nota-se pela Tabela 3 que as normas  $\mathcal{H}_\infty$  obtidas são relativamente altas, não fornecendo uma boa filtragem do sinal de perturbação. No entanto, o desempenho do sistema permanece o mesmo para as diferentes dimensões dos controladores.

## 6 Conclusão

Neste trabalho foi abordado o problema da síntese de controladores robustos de sistemas discretos sujeitos a restrições no controle e na saída, utilizando como critério de desempenho a norma  $\mathcal{H}_\infty$ .

A descrição do problema é baseada em um controlador por realimentação de saída dinâmica, que garante a estabilidade e o desempenho do sistema frente as incertezas e restrições a qual está submetido. Para solucionar o problema foram utilizados os conceitos de estabilidade quadrática e de invariância positiva. As restrições no controle e na saída são satisfeitas utilizando uma função de Lyapunov quadrática, que assegura a  $(\mathcal{D}, \mathcal{R})$ -invariância positiva de conjuntos elipsoidais. Desta maneira, não ocorrem saturações nas variáveis do sistema.

No entanto, o teorema apresentado, que trata da síntese do controlador, é expresso através de desigualdades matriciais lineares (LMIs) e bilineares (BMIs), ou seja, é caracterizado como um problema de otimização não-convexo. As LMIs podem ser tratadas computacionalmente utilizando a caixa de ferramentas *LMI Control Toolbox* do *software Matlab*. Porém, para que as BMIs fossem tratadas computacionalmente, foi utilizado em conjunto com o *LMI Control Toolbox* um método baseado em Evolução Diferencial.

A Evolução Diferencial é uma ferramenta capaz de solucionar problemas de otimização não-convexos e dessa maneira, optou-se em propor um algoritmo híbrido baseado em Evolução Diferencial e LMIs. Esse algoritmo busca uma solução robusta para a síntese do controlador que satisfaça as restrições no controle e na saída. Uma dificuldade deste método é encontrada na inicialização do algoritmo e na determinação da população inicial de controladores factíveis. Esse processo de inicialização pode confinar a população inicial em uma região restrita do espaço de busca.

O algoritmo proposto foi aplicado em exemplos retirados da literatura e encontrou um controlador que solucionasse o problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$  sujeito a restrições. Esse controlador pode ser de ordem reduzida ou de ordem completa, diferentemente de vários métodos de síntese que requerem que o controlador seja de ordem completa. É importante

notar que essa sequência de minimização não garantirá a convergência para um ótimo global da solução, ou mesmo local. No entanto, o algoritmo apresentado oferece uma opção interessante para resolver o problema.

Como trabalhos futuros de aplicação do controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$ , pode-se sugerir os seguintes tópicos de pesquisa:

- utilizar o conceito de função de Lyapunov dependente de parâmetros para formular uma solução para o problema;
- considerar o problema de controle robusto  $\mathcal{H}_\infty$ , onde as incertezas do sistema são limitadas em norma;
- desenvolver algoritmos híbridos baseados nos outros paradigmas da Computação Evolutiva, tais como o algoritmo genético, a programação evolutiva e a estratégia evolutiva. Assim, será possível avaliar qual paradigma que apresenta os melhores resultados para o problema apresentado neste trabalho;
- utilizar diferentes critérios de desempenho para realizar a síntese do controlador como, por exemplo, a norma mista  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  e a alocação de pólos;
- utilizar métodos de inicialização para a obtenção dos controladores da população inicial, no algoritmo híbrido proposto neste trabalho, a fim de diminuir o esforço computacional realizado na inicialização do algoritmo.

## Referências

- ABBAS-TURKI, M.; DUC, G.; CLEMENT, B. LMI formulations for designing controllers according to time response and stability margin constraints. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference*. Seville, Spain: IEEE, 2005. p. 5740–5745.
- AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. 1. ed. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais, 2000. 554 p.
- APKARIAN, P.; GAHINET, P. A convex characterization of gain-scheduled  $\mathcal{H}_\infty$  controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 40, n. 5, p. 853–864, 1995.
- APKARIAN, P.; TUAN, H. D.; BERNUSSOU, J. Continuous-time analysis, eigenstructure assignment, and  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis with enhanced linear matrix inequalities (LMI) characterizations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 46, n. 12, p. 1941–1946, 2001.
- ARANTES, M. B.; OLIVEIRA, G. T. da S.; SARAMAGO, S. F. P. Evolução diferencial aplicada à solução de alguns problemas de Engenharia de Produção. *FAMAT em Revista*, v. 1, n. 6, p. 48–61, 2006.
- ARAÚJO, H. X. *Sur la stabilité des systèmes incertains sujets à des contraintes sur l'État et la commande*. Tese (Doutorado) — Université Paul Sabatier de Toulouse, Toulouse, 1998.
- ARAÚJO, H. X. de; LANGNER, C. G.  $\mathcal{H}_\infty$  control for uncertain systems under time domain constraints. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference*. Seville, Spain: IEEE, 2005. p. 1325–1330.
- ARAÚJO, H. X. de; LANGNER, C. G.; NEUMANN, D. Controle robusto por realimentação dinâmica de saída de sistemas com restrições. In: *Congresso Brasileiro de Automática*. Salvador, Bahia: SBA, 2006. p. 3098–3103.
- BARA, G.; BOUTAYEB, M. A new sufficient condition for the static output feedback stabilization of linear discrete-time systems. In: *Proceedings of the 45th IEEE Conference on Decision and Control*. San Diego, CA: IEEE, 2006. p. 4723–4728.
- BARMISH, B. R. Stabilization of uncertain systems via linear control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 28, n. 8, p. 848–850, 1983.
- BARMISH, B. R. Necessary and sufficient conditions for quadratic stabilizability of an uncertain system. *Journal of Optimization Theory and Applications*, v. 46, n. 4, p. 399–408, 1985.

- BERAN, L. V. E.; BOYD, S. A global BMI algorithm based on the generalized benders decomposition. In: *Proceedings of the European Control Conference*. Brussels, Belgium: IEEE, 1997.
- BERNSTEIN, D.; HADDAD, W. LQG control with an  $\mathcal{H}_\infty$  performance bound: a Riccati equation approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, n. 3, p. 293–305, 1989.
- BING, C.; SIYING, Z. Design of static output feedback controller based on LMI. In: *Proceedings of the 2001 American Control Conference*. Arlington, VA: IEEE, 2001. v. 5, p. 4146–4147.
- BITSORIS, G.; GRAVALOU, E. Robust linear controller under state and control constraints. In: *Proceedings of the 31st IEEE Conference on Decision and Control*. Tucson, AZ: IEEE, 1992. v. 3, p. 2640–2642.
- BITSORIS, G.; GRAVALOU, E. Design techniques for the control of discrete-time systems subject to state and control constraints. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 5, p. 1057–1061, 1999.
- BOYD, S. *et al.* *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. 1. ed. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994.
- CASTELAN, E.; HENNET, J. On invariant polyhedral of continuous-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 38, n. 11, p. 1680–1685, Nov. 1993.
- CASTELAN, E.; TARBOURIECH, S. On positive invariance and output feedback stabilization of input constrained linear systems. In: *Proceedings of the 1994 American Control Conference*. Baltimore, MD: IEEE, 1994. v. 3, p. 2740–2744.
- CHENG, S.-L.; HWANG, C. Optimal approximation of linear systems by a differential evolution algorithm. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, Part A*, v. 31, n. 6, p. 698–707, 2001.
- CHILALI, M.; GAHINET, P.  $\mathcal{H}_\infty$  design with pole placement constraints: An LMI approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 41, n. 3, p. 358–367, 1996.
- CRUSIUS, C.; TROFINO, A. Sufficient LMI conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 44, n. 5, p. 1053–1057, May 1999.
- DOYLE, J. *et al.* State-space solutions to standard  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 34, n. 8, p. 831–847, 1989.
- DOYLE, J. *et al.* Mixed  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  performance objectives ii. optimal control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 8, p. 1575–1587, Aug. 1994.
- EBIHARA, Y.; HAGIWARA, T. New dilated LMI characterizations for continuous-time control design and robust multiobjective control. In: *Proceedings of the 2002 American Control Conference*. Anchorage, AK: IEEE, 2002. v. 1, p. 47–52.
- EBIHARA, Y.; HAGIWARA, T. On  $\mathcal{H}_\infty$  model reduction using LMIs. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 49, n. 7, p. 1187–1191, 2004.

- FANG, H.; LIN, Z.; HU, T. Analysis of linear systems in the presence of actuator saturation and  $\mathcal{L}_2$ -disturbances. In: *Proceedings of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control*. Maui, HI: IEEE, 2003. v. 5, p. 4711–4716.
- GAHINET, P. Explicit controller formulas for LMI-based  $\mathcal{H}_\infty$  synthesis. In: *Proceedings of the 1994 American Control Conference*. Baltimore, MD: IEEE, 1994. v. 3, p. 2396–2400.
- GAHINET, P.; APKARIAN, P. A linear matrix inequality approach to  $\mathcal{H}_\infty$  control. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 4, p. 421–448, 1994.
- GAHINET, P. *et al.* *LMI Control Toolbox For Use with MATLAB*. 1. ed. Natick: The MathWorks, 1995. 356 p.
- GOH, K. *et al.* Biaffine matrix inequality properties and computational methods. In: *Proceedings of the 1994 American Control Conference*. Baltimore, MD: IEEE, 1994. v. 1, p. 850–855.
- GOH, K.-C.; SAFONOV, M.; PAPAVALASSILOPOULOS, G. Global optimization for the biaffine matrix inequality problem. *Journal of Global Optimization*, v. 7, p. 365–380, 1995.
- GRIGORIADIS, K. M.; SKELTON, R. E. Fixed-order control design for LMI control problems using alternating projection methods. In: *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, FL: IEEE, 1994. v. 3, p. 2003–2008.
- GUTMAN, P.-O.; GUTMAN, P.-O.; HAGANDER, P. A new design of constrained controllers for linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 30, n. 1, p. 22–33, 1985.
- HASSIBI, A.; HOW, J.; BOYD, S. A path-following method for solving BMI problems in control. In: *Proceedings of the 1999 American Control Conference*. San Diego, CA: IEEE, 1999. v. 2, p. 1385–1389.
- HOLLOT, C. V.; BARMISH, B. Optimal quadratic stabilizability of uncertain linear systems. In: *Proceedings of the 18th Allerton Conference on Communication, Control and Computing*. Monticello, IL: University of Illinois, 1980.
- HU, L.; SUN, Y.; CAO, Y. Robust control for uncertain linear systems with constraints on output. In: *Proceedings of the 1998 American Control Conference*. Philadelphia, PA: IEEE, 1998. v. 5, p. 2708–2712.
- HUANG, S.; LAM, J.; CHEN, B. Local reliable control for linear systems with saturating actuators. In: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas, NV: IEEE, 2002. v. 4, p. 4154–4159.
- KANEV, S. *et al.* Robust output-feedback controller design via local BMI optimization. *Automatica*, v. 40, p. 1115–1127, 2004.
- KHARGONEKAR, P.; ROTEA, M. Mixed  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$  control: a convex optimization approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 36, n. 7, p. 824–837, 1991.
- LANGNER, C. G. *Síntese de Controladores  $\mathcal{H}_2$  e  $\mathcal{H}_\infty$  para sistemas sujeitos a incertezas e/ou restrições no domínio do tempo*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, Paraná, 2004.

LEITE, V. J. S. *et al.* Estabilidade robusta de sistemas lineares através de desigualdades matriciais lineares. *Revista Controle e Automação*, v. 15, n. 1, p. 24–40, 2004.

LJUNG, L. *System identification: theory for the user*. 2. ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 1999. 672 p.

LU, L.; YANG, R.; XIE, L. Robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  control of discrete-time systems with polytopic uncertainties via dynamic output feedback. In: *Proceedings of the 2005 American Control Conference*. Portland, OR: IEEE, 2005. p. 4315–4320.

LYAPUNOV, A. M. *Problème General de la Stabilité du Movement*. Toulouse, France: Edouard Privat and Company of Toulouse, 1893.

MILANI, B. Robust linear regulator design for continuous-time systems under state and control constraints. In: *Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, Florida: IEEE, 1994. v. 3, p. 2067–2068.

NEARCHOU, A. C.; OMIROU, S. L. Differential evolution for sequencing and scheduling optimization. *Journal of Heuristics*, v. 12, n. 6, p. 395–411, 2006.

NEUMANN, D. *Síntese de controladores robustos  $\mathcal{H}_2/\mathcal{H}_\infty$   $\mathcal{D}$ -estáveis via algoritmos evolutivos: uma abordagem LMI*. Dissertação (Mestrado) — Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, Paraná, 2006.

OLIVEIRA, G. H. da C. *Controle Preditivo para Processos com Incertezas Estruturadas baseado em Séries de Funções Ortonormais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Campinas, Campinas, São Paulo, 1997.

OLIVEIRA, M. C. d.; GEROMEL, J. C.; BERNUSSOU, J. Extended  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  norm characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems. *International Journal of Control*, v. 75, p. 666–679, 2002.

PALHARES, R. M.; TAKAHASHI, R. H. C.; PERES, P. L. D.  $\mathcal{H}_\infty$  and  $\mathcal{H}_2$  guaranteed costs computation for uncertain linear systems. *International Journal of Systems Science*, v. 28, p. 183–188, 1997.

PEAUCELLE, D. *et al.* A new robust D-stability condition for real convex polytopic uncertainty. *Systems & Control Letters*, v. 40, p. 21–30, 2000.

REINELT, W. Maximum output amplitude of linear systems for certain input constraints. In: *Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*. Sydney, Australia: IEEE, 2000. v. 2, p. 1075–1080.

REINELT, W. Robust control of a two-mass-spring system subject to its input constraints. In: *Proceedings of the 2000 American Control Conference*. Chicago, IL: IEEE, 2000. v. 3, p. 1817–1821.

RONKKONEN, J.; KUKKONEN, S.; PRICE, K. V. Real-parameter optimization with differential evolution. In: *Proceedings of the IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Edinburgh: IEEE, 2005. v. 1, p. 506–513.

- ROSINOVÁ, D.; VESELÝ, V. Robust output feedback design of discrete-time systems - linear matrix inequality methods. In: *Proceedings of the 2003 Control Systems Design*. Bratislava, Slovak Republic: IFAC, 2003. p. 363–368.
- ROSINOVÁ, D.; VESELÝ, V.; KUCERA, V. A necessary and sufficient condition for static output feedback stabilizability of linear discrete-time systems. *Kybernetika*, v. 39, n. 4, p. 447–459, 2003.
- SAFONOV, M. G.; GOH, K. C.; LY, J. H. Control system synthesis via bilinear matrix inequalities. In: *Proceedings of the 1994 American Control Conference*. Baltimore, MD: IEEE, 1994. p. 45–49.
- SALMAN, A.; ENGELBRECHT, A. P.; OMRAN, M. G. H. Empirical analysis of self-adaptive differential evolution. *European Journal of Operational Research*, v. 183, n. 2, p. 785–804, 2007.
- SCHERER, C. Multiobjective  $\mathcal{H}_\infty$  control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 40, n. 6, p. 1054–1062, June 1995.
- SCHERER, C.; GAHINET, P.; CHILALI, M. Multiobjective output-feedback control via LMI optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 42, n. 7, p. 896–911, 1997.
- SHARAV-SHAPIO, N. Z.; PALMOR, Z. J.; STEINBERG, A. S. Output stabilizing robust control for discrete uncertain systems. *Automatica*, v. 34, n. 6, p. 731–739, 1998.
- SILVA, J. Gomes da; LIMON, D.; ALAMO, T. Dynamic output feedback for discrete-time systems under amplitude and rate actuator constraints. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control and the European Control Conference 2005*. Seville, Spain: IEEE, 2005. p. 5588–5593.
- STORN, R.; PRICE, K. *Differential Evolution: a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces*. Technical Report TR-95-012 - International Computer Science Institute, 1995.
- STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. *Journal of Global Optimization*, v. 11, p. 341–359, 1997.
- SZNAIER, M. Norm based robust control of state-constrained discrete-time linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 37, n. 7, p. 1057–1062, July 1992.
- SZNAIER, M.; DAMBORG, M. Suboptimal control of linear systems with state and control inequality constraints. In: *Proceedings of the 26th IEEE Conference on Decision and Control*. Los Angeles, CA: IEEE, 1987. v. 26, p. 761–762.
- SZNAIER, M.; SIDERIS, A. Suboptimal norm based robust control of constrained systems with an  $\mathcal{H}_\infty$  cost. In: *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*. Brighton, UK: IEEE, 1991. p. 2280–2286.
- TARBOURIECH, S.; BURGAT, C. Positively invariant sets for constrained continuous-time systems with cone properties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 2, p. 401–405, Feb. 1994.

- TUAN, D. H.; APKARIAN, P.; NAKASHIMA, Y. A new lagrangian dual global optimization algorithm for solving bilinear matrix inequalities. In: *Proceedings of the 1999 American Control Conference*. San Diego, CA: IEEE, 1999.
- VANANTWERP, J. *et al.* Globally optimal robust control of large scale sheet and film processes. In: *Proceedings of the 1997 American Control Conference*. Albuquerque, NM: IEEE, 1997. v. 3.
- VASSILAKI, M.; BITSORIS, G. Constrained regulation of linear continuous-time dynamical systems. *Systems & Control Letters*, v. 13, n. 3, p. 247–252, 1989.
- VESTERSTROM, J.; THOMSEN, R. A comparative study of differential evolution, particle swarm optimization, and evolutionary algorithms on numerical benchmark problems. In: *Proceedings of the Congress on Evolutionary Computation*. Portland, OR: IEEE, 2004. p. 1980–1987.
- WILLEMS, J. Least squares stationary optimal control and the algebraic riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 16, n. 6, p. 621–634, 1971.
- XIE, L. *et al.* Improved robust  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  filtering for uncertain discrete-time systems. *Automatica*, v. 40, p. 873–880, 2004.
- ZAMES, G. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms and approximate inverses. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 26, p. 301–320, 1981.
- ZHAI, G.; TAMAOKI, K.; MURAO, S. Low-order  $\mathcal{H}_\infty$  controller design for discrete-time linear systems. In: *Proceedings of the 2002 American Control Conference*. Anchorage, AK: IEEE, 2002. v. 3, p. 2202–2203.
- ZHOU, K. *et al.* Mixed  $\mathcal{H}_2$  and  $\mathcal{H}_\infty$  performance objectives I: Robust performance analysis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 8, p. 1564–1574, 1994.