ALCIONY REGINA HERDÉRICO SOUZA SILVA

A CONCEPÇÃO DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA E DOS ALUNOS FRENTE AO ERRO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Educação no Programa de Pós-Graduação em Educação, da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, sob a orientação da Profª. Drª Neuza Bertoni Pinto

CURITIBA
2005

Um dia você aprende que...

...não importa em quantos pedaços
seu coração foi partido,
o mundo não pára
para que você o conserte.

Aprende que o tempo
não é algo que possa voltar.

Portanto, plante seu jardim e
decore sua alma, ao invés de
esperar que alguém
lhe traga flores.

E você aprende que
realmente pode suportar,
que realmente é forte e que pode ir
muito mais longe depois de
pensar que não se pode mais.

E que realmente a vida tem valor e
que você tem valor
diante da vida.

Nossas vidas são traidoras e
nos fazem perder o bem que poderíamos
conquistar se não fosse o
medo de tentar.

William Shakespeare

Dedico, humildemente, este trabalho à minha mãe Adirce pelo reconhecimento de todo amor que ela sempre me ofereceu, sem esperar nada em troca.

Dedico também, ao meu grande marido e companheiro de várias jornadas José Luiz e às minhas queridas filhas Thayse e Thayane pela infinita paciência e incalculável tolerância .

AGRADECIMENTOS

O caminho que percorri para que este trabalho fosse possível, foi compartilhado por muitas pessoas amigas que souberam acreditar no meu sonho, e que nos momentos difíceis, trouxeram o conforto necessário para que eu continuasse esta empreitada..

Por temer o esquecimento de algum nome prefiro, humildemente, agradecer à todos pelo carinho, pela compreensão e por tão agradável convivência.

Agradeço à todos os meus professores do Mestrado da PUCPR, que sempre estiveram dispostos a compartilhar comigo suas preciosas experiências.

Em especial, gostaria de agradecer à minha orientadora a Professora Neuza Bertoni Pinto pelo seu apoio, confiança, inspiração, e pela sua admirável paciência na orientação deste trabalho.

SUMÁRIO

LISTA DE QUADROS vii
RESUMO viii
ABSTRACT ix
1 INTRODUÇÃO 01
1.1 PROBLEMA 03
1.2 OBJETIVOS 04
1.2.1 Objetivo geral 04
1.2.2 Objetivos específicos 04
2 O HOMEM E O CONHECIMENTO 05
2.1 O HOMEM E A CIÊNCIA 05
2.2 A VERDADE E O ERRO NO CONHECIMENTO CIENTÍFICO 07
2.3 O PROFESSOR NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO CIENTÍFICO 10
2.4 UM NOVO CAMINHO A SER PERCORRIDO 13
2.5 A EDUCAÇÃO TRADICIONAL E A EDUCAÇÃO DO SÉCULO XXI 15
2.6 A MATEMÁTICA E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 18
3 OS NÚMEROS RACIONAIS NO CONTEXTO HISTÓRICO 21
3.1 A ORIGEM DOS NÚMEROS 21
3.2 OS NÚMEROS RACIONAIS 26
3.3 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS 29
4 ERROS E NÚMEROS RACIONAIS 33
4.1. DIFICULDADE, CONFLITO, OBSTÁCULO E ERRO 33
4.2. A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E OS ERROS 38
4.3. O DIAGNÓSTICO DOS ERROS 43
4.4. OS ERROS NO CONTEXTO DOS NÚMEROS RACIONAS 44
4.5. UMA PROPOSTA CONSTRUTIVISTA PARA O ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS 53

5 ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA 55
5.1 A ESCOLA E OS SUJEITOS DA PESQUISA 56
5.2 PROCEDIMENTOS DE COLETA DE DADOS 57
6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS..60
6.1 DIAGNÓSTICO DOS ERROS SEGUNDO OS PROFESSORES....................................60
6.2 QUADROS DE DIAGÓSTICO DOS ERROS DOS ALUNOS
POR SÉRIE 61
6.1.1 Tipos de erros...70
6.1.2 Origem dos erros 71
6.1.3 Sugestões para superação dos erros 73
6.2 AS PRÁTICAS PEDAGÓGICAS E OS ERROS COM NÚMEROS
RACIONAIS 75
6.2.1 As dificuldades docentes no ensino dos números racionais 76
6.2.2 Erros mais freqüentes com os números racionais..79
6.2.3 As práticas avaliativas 80
6.2.4 As práticas de trabalho com os erros dos alunos 82
6.3 OS ERROS NA VISÃO DOS ALUNOS...84
6.3.1 As principais dificuldades discentes em relação à aprendizagem
dos números racionais...85
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS 91
REFERÊNCIAS 96
APÊNDICE...101
ANEXOS 123

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 Quadros de diagnóstico do erro - 5ª série 61
QUADRO 2 Quadros de diagnóstico do erro - 6ª série 65
QUADRO 3 Quadros de diagnóstico do erro - 7ª série 68

RESUMO

Com o objetivo de compreender como os erros de números racionais são concebidos pelos professores e alunos no processo de ensino e aprendizagem de Matemática do Ensino Fundamental, o presente estudo investigou, no contexto do ensino e aprendizagem de Matemática, as práticas docentes utilizadas para o tratamento dos erros produzidos pelos alunos numa escola pública do município de Araucária/Pr. Tomando como sujeitos da pesquisa dois professores que ministram aulas de Matemática nas 5as, 6as e 7as séries e 17, do total de alunos das referidas séries, inicialmente, foi aplicada uma prova contendo questões relativas aos conteúdos de números racionais indicados na proposta curricular oficial. Em seguida, os professores avaliaram os erros detectados, fornecendo indicadores acerca da identificação, qualidade, origem e formas de superação dos mesmos. Os dados obtidos na análise realizada pelos professores apontam uma forte tendência em localizar a origem dos erros na precariedade da matemática ensinada nas séries anteriores. Complementando esses dados, foram realizadas entrevistas semi-estruturadas com todos os sujeitos envolvidos na pesquisa com o objetivo de levantar dificuldades e formas de conceber e lidar com os erros. O estudo apontou a vigência de formas tradicionais de tratamento de erro, principais dificuldades docentes para ensinar números racionais de forma contextualizada, aliadas às dificuldades dos alunos no processo de aprendizagem, especialmente quanto ao uso de vírgula, compreensão da relação parte-todo, além de dificuldades conceituais e de operacionalização desse conjunto de números, especialmente com a divisão de números decimais. Os resultados revelam um discurso docente construtivista e uma prática conservadora e descontextualizada de tratamento dos erros com implicações na auto-estima dos alunos que consideram o erro uma incapacidade pessoal em aprender matemática. Tais evidências remetem à complexidade da formação docente e à cultura moralística impregnada na cultura escolar em relação ao erro ao desconsiderar sua potencialidade didática e as possibilidades que oferece ao professor para melhor compreender e intervir na aprendizagem dos conceitos matemáticos, criando situações significativas aprendizagem.

PALAVRAS-CHAVE: ensino e aprendizagem de Matemática, erros de números racionais, formas de conceber e lidar com os erros.

ABSTRACT

With the objective of understanding the conception of teachers and students about the errors of rational numbers in the process of teaching and learning Mathematics at Basic Education, this research investigated, within the context of teaching and learning Mathematics, the teaching staff practices on treating errors made by students in a public school in the city of Araucária/Pr. As subject of this research, two people were taken who teach Mathematics to 5^{th},6^{th} and 7^{th} levels. From these levels, 17 students were chosen to sit a test with questions related to the contents of rational numbers as shown in the official curricular proposal. Following that, teachers assessed the errors which have been found, resulting in indicators of identification, quality, origin and ways of overcoming these errors. Data obtained by teacher's assessments point to a strong tendency on associating the origin of these errors with poor Mathematics teaching at previous levels. In order to complement these data, some semi-structured interviews have been carried out with all people involved with this research, aiming to discover further difficulties and ways to understand and manage errors. This study pointed to the prevailing traditional treatment of error, main difficulties of teacher staff when teaching rational numbers within a context, added to student's difficulties in the learning process, particularly in relation to the use of comma, understanding of the relation part-whole, apart from conceptual difficulties as well as operations with these group of numbers, specially with the division of decimal numbers. The results show a constructivist teaching way of thinking and a conservative practice, out of context that deals with the treatment of errors and its relation to student's self-esteem, because an error is considered as a personal lack of capability to learn Mathematics. Such evidences bring about the complexity of teaching staff formation and to the moralistic culture that is impregnated to the school culture in relation to errors, not considering its didactic potentiality and the possibilities that it offers to teachers as to better understand and intervening to the learning of mathematical concepts, creating meaningful learning situations.

KEY-WORDS: teaching and learning Mathematics, errors rational numbers, ways to understand and manage errors.

1 INTRODUÇÃO

No decorrer de nossas vidas acabamos por esquecer que podemos aprender com nossos próprios erros. Muitos são aqueles que riem das nossas tentativas sem sucesso, mas se esquecem de nos mostrar o caminho para a superação do erro e a obtenção do acerto. Durante a nossa existência enfrentamos muitos momentos de aprendizagem através de situações de: tentativa - erro - nova tentativa - acerto.

Para melhor delinear o raciocínio, apresentamos uma situação proposta em uma aula. Pedimos aos alunos para que imaginassem uma baleia. Assim, cada um dos participantes visualizou o seu animal, sem nenhuma restrição quanto às características específicas, como: cor, tamanho, espécie entre outras. Ao consultar os integrantes do grupo individualmente constatamos que, apesar de a descrição do animal ter sido a mesma proposta a todos eles, cada aluno havia imaginado uma baleia diferente, justamente pelo fato de não termos imposto nenhum tipo de restrição quanto às suas características.

Será que houve algum tipo de erro nas respostas apresentadas? Acreditamos que não, pois a maneira como a questão foi proposta impossibilitou uma conclusão mais próxima entre o pensamento de todos os participantes. Desta forma, consideramos irrelevante que numa condição, como a apresentada acima, quaisquer dos participantes fosse punido ou julgado por não ter apresentado uma resposta igual aos demais. Sob a ótica do que foi apresentado, todos acertaram.

Já no caso da matemática, uma ciência muito bem estruturada, é comum termos alunos que, ao resolverem um exercício ou uma determinada situação problema, erram freqüentemente. Muitas vezes, o aluno erra porque não compreendeu bem o que lhe esta sendo solicitado a fazer. Em outros casos, os professores não aceitam a maneira como o aluno resolveu, mas também não explicam como deveria ser resolvido. A lacuna do conhecimento que não foi bem estabelecido pode persistir por muitos anos, não são raros os casos em que estes erros persistem durante muitos anos da vida escolar do aluno, sem que alguém lhe mostre qual é o motivo do erro ou como superar este erro transformando-o em acerto.

Ao analisarmos a maneira de raciocinar de cada indivíduo, chegamos a conclusões diferenciadas. Desta forma, quando um educador percebe uma situação de erro cometido por um de seus alunos, este assunto não deve ser tratado de forma generalizada, mesmo que diversos alunos cometam o mesmo tipo de erro. Cada aluno possui uma maneira de compreender e suas dúvidas suscitam tratamento individual.

A matemática é uma ciência que possui suas próprias especificidades como por exemplo uma: a sua linguagem formal. Ao ser ensinada na escola alguns dos fatores que podem ser considerados como dificultadores para o processo de aprendizagem da Matemática são: a falta de motivação sobre os assuntos trabalhados em sala de aula e a maneira confusa de exposição de uma situação problema pelo docente.

Durante a atuação na docência da disciplina de Matemática nos cursos de Administração de Empresas e Sistemas de Informação, percebemos que os alunos não traziam em sua bagagem cultural uma aprendizagem significativa sobre os números racionais. Constatamos a falta de motivação para aprender e muita dificuldade dos alunos para avançar em seus raciocínios. Nessas observações nos foi possível observar nos alunos: o medo de errar; a insegurança perante os colegas e o receio de uma exposição constrangedora.

Assim, partimos do pressuposto que estes alunos já deveriam possuir experiências que envolvessem a utilização de operações com números racionais em sua representação decimal e fracionária. Para nossa grande surpresa, apenas uma minoria conseguia realizar as operações com estes números com uma certa desenvoltura. Os demais permaneciam à espera de alguém que resolvesse os problemas, para posteriormente copiar os cálculos, sem enfrentar o desconhecimento que possuíam sobre o assunto. As provas apresentavam inúmeros erros nas questões que envolviam o assunto apontado. Diante da grande parcela de alunos que apresentaram tais dificuldades, nos deparamos com a preocupação de buscar a origem deste fenômeno. A partir daí, nosso foco de atenção foi verificar tal fenômeno em séries anteriores, pois uma melhor observação deste fato poderia apontar novas soluções pedagógicas para que os alunos pudessem alcançar outros níveis de ensino, superando lacunas na construção do conhecimento em questão.

A presença de dificuldades em operações com os números racionais é uma questão muito preocupante, pois o sujeito que não possui domínio sobre este assunto, poderá sofrer algumas desvantagens para o pleno exercício de sua cidadania. Nosso cotidiano está envolvido com os números, sejam os inteiros, as frações e, principalmente, os números decimais: quando estamos vendo uma revista; um jornal, ou mesmo a TV é freqüente a utilização desses números. Os centavos da nossa moeda, na verdade, são frações do dinheiro que utilizamos; as escalas métricas são totalmente fracionadas; nas pesquisas de opinião, os resultados são fornecidos através de porcentagens, que não deixam de ser frações. Neste sentido, surge a necessidade de que os alunos estejam preparados para enfrentar o universo numérico de seu cotidiano, sem correr o risco de serem enganados, seja financeira ou moralmente. É difícil sobreviver no mundo moderno sem o domínio dos cálculos que envolvem números racionais, principalmente na sua representação decimal. É quase impossível encontrar cálculos que se restrinjam aos números inteiros sem nenhuma necessidade de utilização dos números racionais.

1.1 O PROBLEMA

O estudo de Pinto (2000) sobre o erro como uma estratégia didática no ensino da Matemática elementar, considerou a possibilidade de que boa parte das dificuldades apresentadas pelos alunos em relação aos conceitos elementares da Matemática poderiam estar presentes, ainda nas séries finais do Ensino Fundamental. Neste contexto, é possível que uma grande parte dos erros que os alunos cometem em Matemática esteja relacionada às operações com números racionais. Assim, a questão que se coloca prioritária para o presente estudo é: **como os erros são percebidos pelos professores e pelos alunos no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais no Ensino Fundamental?**

Assim, optamos pela investigação sobre qual é a concepção que o professor que ensina Matemática nas séries finais do Ensino Fundamental tem em relação aos erros cometidos pelos alunos nas operações com os racionais, verificando sua utilização e possibilidades de o mesmo ser assumido como uma oportunidade didática para o professor, tendo em vista a aprendizagem desse conteúdo matemático. Da mesma forma, estaremos também investigando a concepção que os alunos possuem sobre seus próprios erros em relação ao conteúdo estudado.

Entendemos que o educador deve estar preparado para utilizar diferentes estratégias pedagógicas para propiciar a construção de estruturas matemáticas pelos alunos. Ao compreender o processo de aprendizagem do aluno o professor desenvolve a percepção de que o erro, além de permitir a visualização do processo de construção dos conceitos matemáticos, sugere estratégias didáticas para o fortalecimento das bases do aprendizado.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 OBJETIVO GERAL

Analisar a concepção de professores e alunos frente ao erro no processo de ensino e de aprendizagem de Matemática em relação aos números racionais no Ensino Fundamental.

1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Investigar as concepções da prática pedagógica conservadora ou inovadora vigente entre os professores de Matemática;
- Pesquisar as concepções docentes relativas aos erros praticados pelos alunos na aprendizagem dos números racionais;
- Analisar as origens dos erros apontadas pelos professores;
- Descrever as práticas de trabalho com o erro que são utilizadas, conforme o relato dos professores;
- Identificar as principais dificuldades dos alunos em relação aos números racionais, conforme o resultado da prova sobre o assunto;
- Analisar as concepções de erro na perspectiva do aluno.

2 O HOMEM E O CONHECIMENTO

2.1 O HOMEM E A CIÊNCIA

Toda a cultura humana foi construída baseada em crenças que foram se consolidando ao longo dos séculos. Atualmente, a ciência moderna continua seguindo a sua trajetória de evolução, construindo cada vez mais máquinas que substituem o trabalho humano. A concepção de que através da tecnologia poderíamos gerar mais lucros e oferecer mais conforto aos seres humanos está fazendo com que as pessoas se sintam angustiadas e estressadas.

Os reflexos desta evolução podem ser facilmente percebidos num breve olhar à nossa volta: grupos de diferentes classes estão entrando em conflito; os povos estão entrando em guerra; as sociedades tornam-se cada vez mais desiguais; o capitalismo exalta a crença do progresso material ilimitado; os seres humanos são desrespeitados; entre outros. Estes são alguns dos reflexos que a visão mecanicista do mundo originou nos últimos anos. Assim, conforme Santos (2000, p. 117), "a ciência moderna, outrora vista como solução para todos os problemas das sociedades modernas, acabou por se tornar ela própria, num problema."

Se a princípio o homem acreditava que através da mecanização das atividades e da produção em massa proporcionaria mais conforto à sua vida, hoje, tal proposta já não atende mais aos interesses da humanidade. O paradigma da ciência moderna surgiu devido a uma necessidade de reorganização de tudo aquilo que permaneceu escondido durante a Idade Média. A transformação da ciência era eminente para a saída das trevas que a Idade Média havia deixado.

Bronowski (1977, p.85) nos explica que foi por volta de 1660, quando a Europa pôs fim ao longo pesadelo das guerras religiosas que o homem passou a estabelecer uma vida mais voltada à exploração comercial e industrial. Nesta época, o crescimento vertiginoso da população fazia com que as sociedades necessitassem do aumento imediato da produção para poder atender a demanda que era cada vez maior. E sob este ponto de vista havia a prioridade de uma melhor organização das sociedades, de modo a satisfazer uma condição que era imediata.

Segundo Behrens (2000, p. 17), no final do século XIX e início do século XX, as sociedades foram influenciadas pelo método cartesiano, que separa mente e matéria e propõe a divisão do conhecimento em campos especializados. Este pensamento levou a comunidade científica a uma mentalidade reducionista, marcada pela visão fragmentada de mundo em que o individualismo acentuado, a racionalidade e a objetividade são considerados como pontos fundamentais da ciência. Mas todo este desejo de ordenação, acabou por resultar na separação entre sujeito e objeto de conhecimento.

Conforme Morais (1988, p. 88): "Sujeito e objeto precisam, de alguma forma, comungar entre si para que aconteça o conhecimento. Um deles não pode excluir totalmente o outro". Dentro deste contexto, o homem acabou por ficar perdido num emaranhado de informações, sem saber qual deveria ser o caminho para uma vida melhor e, consequentemente, para a sua felicidade.

Assim, se no passado o paradigma newtoniano-cartesiano foi capaz de satisfazer boa parte das necessidades existentes nos séculos XVIII e XIX (Behrens, 2000, p. 18-19), hoje este paradigma precisa ser repensado ou até mesmo mudado, para viabilizar a melhoria desta situação insatisfatória que a humanidade enfrenta atualmente e para a construção de um mundo melhor no qual todos possam viver em harmonia.

Santos (2000, p.98) comenta que o que está em jogo não é uma decisão sobre a validade das novas descobertas, mas a existência ou não de uma nova percepção da realidade. É relevante, portanto, que passemos a defender uma evolução que contemple a todos, e não apenas uma minoria.

É evidente que várias descobertas foram realizadas na ciência, e que muitas oferecem melhores perspectivas de vida para a humanidade. Mas é importante estarmos atentos ao que está acontecendo em nossa volta e tomarmos consciência de que a plenitude da existência só será possível se houver equilíbrio entre a tecnologia e a natureza, e se houver harmonia entre a ciência e as pessoas. Santos (op. cit., p. 60), afirma que regressamos à necessidade de perguntar pelas relações entre a ciência e a virtude, pelo valor do conhecimento dito vulgar, mas que são utilizados pelos sujeitos individuais ou coletivos para dar sentido às suas práticas e que a ciência teima em considerar irrelevante e falso. Temos que nos perguntar sobre o papel que todo o conhecimento científico acumulado tem exercido em nossas vidas, ou seja, pela contribuição positiva ou negativa de todo este conhecimento científico para a nossa realização pessoal e coletiva.

O conhecimento científico não é um fenômeno estagnado, que depois de aceito, não possa sofrer modificações e evoluções. Na verdade, ele deve conduzir as sociedades para um futuro melhor, Bronowski (1977, p. 91) refere-se a este assunto dizendo que: " uma lei científica é uma regra pela qual guiamos nossa conduta e pela qual procuramos assegurar-nos de que nos conduzirá a um futuro conhecido".

Dentro desta nova realidade que estamos presenciando, é fundamental que a comunidade científica inicie o processo de ajustes. Em Dutra (1998, p.20), encontramos um pensamento de Popper que corrobora com esta informação: "Popper acredita que quando refutamos uma teoria científica, isto é, quando a experiência nos mostra que ela á falsa, temos a oportunidade de construir outra melhor que pelo menos não falhe naquelas ocasiões em que a teoria falhou".

A nossa realidade clama pela construção de uma nova trajetória afim de que o conhecimento nos leve ao saber emancipado, ou seja, é preciso que a humanidade tenha consciência de seus atos e passe a refletir melhor sempre que uma determinada decisão precise ser tomada. Para Santos (2000, p.78), "o conhecimento implica uma trajetória, uma progressão de um ponto ou estado A, designado por ignorância, para um ponto ou estado B, designado por saber". Dentro desta trajetória tanto o conhecimento do senso comum, como o conhecimento científico possui o seu valor, desde que estes conhecimentos possam ser superados da configuração fragmentada que prevaleceu durante os últimos séculos.

Utilizando ainda as palavras de Santos (2000, p.74), é preciso ir em busca de "um conhecimento prudente para uma vida decente". Esta é, portanto, a grande crise que o homem deverá superar neste novo século, e, neste processo de mudanças, torna-se relevante buscar a visão de uma dimensão maior, que torne possível antever a influência da ciência no planeta, mas esta visão só será possível se procurarmos melhor entender o que é o erro e o que é a verdade para cada um de nós.

2.2 A VERDADE E O ERRO NO CONHECIMENTO CIENTÍFICO

Qual é a verdade? Onde está a verdade? Por que é a verdade? Estas são algumas das perguntas que os cientistas fazem quando iniciam suas pesquisas.

Perceber os detalhes que compõem a suposta verdade é uma tarefa muito difícil, tanto para a comunidade científica como para toda a sociedade. Porém, a continuidade da humanidade depende de que estas perguntas sejam respondidas, na medida em que nosso conhecimento aumenta. Sendo assim este processo está intimamente ligado à aprendizagem. Para Bronowski (1977, p. 95-96):

> O processo de aprendizagem é essencial a nossa vida. Todos os animais superiores o procuram deliberadamente. São inquiridores e experimentam. Uma experiência é uma espécie de inofensiva tentativa de realizar qualquer ação que teremos de fazer no mundo real; e isso quer seja feita no laboratório, por cientistas, ou fora dele.

Todo conhecimento acumulado é válido, mas é necessário saber diferenciar o conhecimento que melhor se ajusta às necessidades das pessoas que convivem nas sociedades. Segundo Morais (1988, p. 89): "Se não houver um decidido policiamento das nossas idéias pré-concebidas, conduziremos nossas observações premeditadamente e acabaremos por falsear a realidade que se nos apresenta". Santos (2000, p.59) alerta sobre esta ambigüidade quando pergunta: "Qual das imagens é verdadeira? Ambas e nenhuma. É esta a ambigüidade e a complexidade da situação do tempo presente".

No último século, a ciência tem sido a principal responsável pela explicação do mundo, mas atualmente esse processo tornou-se maior e mais ousado, como se percebe nas palavras de Bronowski (1977, p. 114): "A ciência é um processo de criação do mundo e o processo é hoje mais ousado e de maior alcance, mais triunfante mesmo que no grande limiar da Revolução Científica". O autor (op. cit., p.98) também aponta que a ciência é a atividade de aprendizagem de uma sociedade inteira, mesmo que esta sociedade divida o trabalho e transfira a responsabilidade dessa atividade para poucos homens. As leis da ciência são princípios de previsão e adaptação ao futuro que se aplicam a toda a sociedade de forma geral. Portanto, todos os membros destas sociedades têm o direito de poder opinar sobre todos os conhecimentos que estão sendo descobertos de forma explícita e sem restrições.

Percebemos que, neste processo, a ciência possui um papel muito importante, mas mesmo que o campo de investigação da ciência tenha avançado muito, não podemos assegurar que a verdade de alguns cientistas seja a verdade absoluta. Popper (1982, p.56) afirma que:

> Nem a observação nem a razão são autoridades. A intuição intelectual e a imaginação são muito importantes, mas não oferecem segurança: podem indicar-nos coisas com muita clareza mas podem também induzir-nos em erro. A função mais importante da observação e do raciocínio é ajudar-nos no exame crítico dessas conjecturas ousadas com as quais podemos explorar o desconhecido.

A reflexão de Dutra (1998, p.19) é também bastante pertinente: "Pode ser que novas descobertas venham a mostrar que a teoria não é um instrumento de predição tão bom quanto viemos a acreditar". Contudo, mesmo que estas descobertas não sejam tão eficientes como deveriam ser, podem sugerir um importante caminho para a busca dos acertos. Como salienta Bronowski (1977, p. 95), "as previsões algumas vezes são erradas, mas temos que aceitar que a natureza das coisas não é perfeita". Todavia, devemos tentar obtê-las o mais perto possível da realidade. Caso contrário, é possível também aprender com as previsões que não deram certo, por ser um grande alerta sobre uma nova possibilidade de se chegar ao que é certo.

Este processo de aprendizagem é o da tentativa - erro - tentativa. E o processo do qual Bronowski (1977, p. 95) chama de aprendizagem, no qual os erros constituem uma parte tão essencial, quanto os acertos. De acordo com este raciocínio a aprendizagem se realiza quando já tivermos cometido alguns erros e aprendido como evitá-los.

Para Popper (1982, p.56), o reconhecimento do erro é um alerta que pode contribuir para o alcance de uma teoria que ofereça alternativas que melhor atendam a humanidade, como podemos constatar em suas palavras:

> Não há critério da verdade à nossa disposição, mas temos acesso a critérios que, se tivermos sorte, poderão levar-nos a reconhecer o erro e a falsidade. A clareza e a distinção não constituem critérios da verdade, mas a obscuridade e a confusão podem indicar o erro. Da mesma forma, a coerência não pode por si mesma estabelecer a verdade, mas a incoerência e a inconsistência revelam a falsidade. Quando reconhecemos nossos erros, eles próprios nos dão um aviso que pode ajudar-nos a encontrar uma via de escape da obscuridade da caverna. (POPPER, 1982, p.56)

Todavia, não é pertinente considerarmos que toda a teoria científica esteja equivocada, afinal se hoje temos a certeza da necessidade de mudanças é porque tivemos a oportunidade de olhar para o passado e aprender com as nossas falhas e acertos. Portanto, a experiência pode assegurar que boas teorias existem e devemos saber utilizá-las. Dutra (1998, p. 22) afirma que quando temos teorias comprovadamente confiáveis, podemos utilizá-las para dar explicações sobre outros fenômenos que estejam relacionados à teoria inicial. Assim, as teorias científicas que explicam acontecimentos presenciados no mundo, ajudam a compreender os acontecimentos em sua sucessão.

É importante lembrarmos que o campo de validade para a construção do conhecimento científico deverá satisfazer a toda humanidade e que, a verdade de um indivíduo não poderá ser aceita como ciência. A partir disto, Morais (1988, p.85) salienta que: "As conclusões científicas tendem a ser válidas para todo o mundo e em qualquer parte. Logo, qualquer 'verdade' individual não assume valor para a construção do grande edifício da ciência."

Devemos, portanto, ir em busca da verdade que contemple a maioria da sociedade e o local indicado, como ponto de partida para esta nova postura diante da ciência é a escola através das novas atitudes de seus professores. Nas palavras de Behrens (2000, p. 92): "O professor torna-se figura significativa quando percebe que é o orquestrador do processo educativo e que precisa propiciar um ambiente que instrumentalize o aluno para sua emancipação social". Na medida em que os alunos se emancipam, estaremos formando uma sociedade mais crítica e menos passível de cometer os mesmos erros do passado. Torna-se, então, importante delinear este novo papel do professor na construção do conhecimento científico.

2.3 O PROFESSOR NA CONSTRUÇÃO DO CONHECIMENTO CIENTÍFICO

A partir das considerações anteriores, entendemos que para a construção de uma ciência que seja capaz de dar conta de uma proximidade com a verdade histórica que está sendo vivenciada, torna-se necessária a inclusão de um indivíduo que seja capaz de mediar os conhecimentos já existentes e que provoque a interação do sujeito com o objeto de pesquisa, aliado a um ambiente que possa oferecer a estrutura necessária para esta prática. Neste contexto, ressaltamos a figura do professor, que deverá atuar como mediador e que dê conta de instigar os alunos, tornando-os mais críticos e reflexivos. Através do diálogo, o professor deverá fornecer instrumentos que possam contrabalançar os conhecimentos adquiridos entre o senso comum e a ciência, buscando o que existe de mais relevante entre elas. Para tanto, a formação do docente precisa contemplar a visão crítica no ensinar e no aprender.

Segundo Santos (1989, p. 40): "forçoso é concluir que caminhamos para uma nova relação entre ciência e o senso comum, uma relação em que qualquer deles é feito do outro e ambos fazem algo de novo". É preciso admitir que, assim como a ciência esteve equivocada em algumas de suas predições, a educação também necessita rever suas práticas, para que este vazio que hoje nos encontramos seja preenchido e que o ensino passe a ser um caminho para a emancipação do indivíduo.

Esta visão do futuro só é possível devido à nova leitura passamos a ter a respeito da aprendizagem. Nela os estudantes devem participar da construção de seus conhecimentos, cabendo ao professor fazer a articulação entre a teoria e a prática. Para Bronowski (1977, p. 86), a ciência deve estar inserida no contexto social de seu tempo, desta forma, se a sociedade se altera, a ciência também deverá acompanhar esta alteração. O espaço para que ocorra esta evolução não necessita ser somente o espaço abstrato, mas sim um espaço onde as experiências possam ser pensadas e vivenciadas. Neste processo, ocorre a interligação entre a ciência e o magistério, ou seja, entre a teoria e a prática docente através da relação entre o racional e o empírico.

Todo o conhecimento adquirido na escola deverá ser utilizado para o desenvolvimento do indivíduo, bem como da sociedade, sendo assim, não podemos perder de vista o alcance que este conhecimento deverá atingir para a comunidade global. Conforme Behrens (2000, p. 77), a educação planetária propõe a integração da política, da economia, da cultura, da história e da educação, promovendo a consciência de responsabilidade individual para a manutenção da vida em todo o globo terrestre.

Morais (1988, p. 89), observa que "o sujeito tem como atividade relacionar inteligentemente os dados que se apresentam à mente de forma esparsa e, inicialmente, independente. Sem tal atividade jamais haverá ciência". O saber científico necessita ser válido para toda a humanidade, assim sendo, não podemos considerar que todo o conhecimento seja científico, mas devemos, através de reflexões, ir em busca da sua validade objetiva.

Ainda em Morais (op. cit., p. 91) temos que: "Objetivamente todo o conhecimento é conhecimento possuído por sujeitos, mas é necessário manter-lhe alguma validade objetiva, principalmente, quando se pretende a universalidade do saber científico". Considerando-se esta afirmação é possível percebermos que, a intervenção do professor poderá contribuir para que se alcance o conhecimento e que, a partir deste conhecimento mais esclarecido, possamos buscar a construção de uma ciência que atenda às necessidades da nova sociedade.

As questões anteriormente apresentadas permitem a melhor compreensão sobre como se deve buscar o conhecimento. É neste aspecto que Popper (1982, p. 56) esclarece que:

> O conhecimento não parte do nada, como também não nasce da observação; seu progresso consiste, fundamentalmente, na modificação do conhecimento precedente. Embora algumas vezes possamos progredir graças a uma observação casual, a significação das descobertas que fazemos depende em geral do seu poder de modificar as teorias precedentes.

Não podemos alcançar a ciência sem antes trilharmos um caminho de tentativas em que o professor propicie um ambiente no qual o aluno possa trabalhar a sua emancipação. Segundo Bronowski (1977, p.96), toda ação humana é baseada em escolhas que interpretam o passado e o presente visando o futuro. E o processo de interpretação e acomodação não pode descartar o erro, porque o erro é um importante sinalizador para o sistema de aprendizagem a que se busca.

Todo conhecimento progride por meio de antecipações, tentativas de soluções, problematizações e conjecturas. A ciência pode ser considerada como um processo de aprendizagem, posto que ela se preocupa em explicar os fenômenos existentes na natureza. Assim, o exame crítico das conjecturas científicas põe em evidência os erros em que o pesquisador pode estar incorrendo, e possibilita, a ele, buscar as soluções dos problemas que pretende resolver.

De acordo com Popper (1982, prefácio): "À medida que aprendemos com os erros cometidos, nosso conhecimento aumenta, mesmo que não tenhamos consciência disso". E, como nunca temos a certeza sobre a verdade dos fatos, não podemos adotar uma atitude autoritária, pretensiosa ou orgulhosa a respeito do que sabemos.

Assim, uma das principais competências a serem desenvolvidas pelos professores é o caráter dialógico de suas aulas, conforme foi sugerido por Freire (1996, p. 135), pois durante a sua prática pedagógica ele não poderá apresentar a sua verdade como a única alternativa de saber. Neste aspecto, jamais este profissional deverá assumir uma postura autoritária em relação ao conhecimento do qual se propõe a ensinar. Conforme Bronowski (1977, p. 124), as nossas idéias devem ser realistas, flexíveis e destituídas de fanatismo, sendo principalmente, idéias humanas. A nova mensagem que a ciência deve propiciar é a possibilidade de se fomentar idéias que sejam criadoras.

Sob este novo enfoque, o docente deverá buscar a formação do sujeito com a intencionalidade de torná-lo autônomo, para que este possa liberar o seu impulso criador e através deste tenha condições de percorrer as informações que estão ao seu alcance, constituíndo uma ciência que seja prudente.

2.4 UM NOVO CAMINHO A SER PERCORRIDO

Como já foi anteriormente relatado, a sociedade chega ao século XXI profundamente imersa em tecnologias, e o momento não é o de descartar as inovações científicas, é preciso saber conviver com tudo que a ciência nos ofereceu até hoje. Santos (1989, p. 42) expõe seu ponto de vista com relação a este assunto, quando afirma que o desenvolvimento tecnológico deve contribuir para a melhoria da competência cognitiva e comunicativa e que assim possa transformar o saber em algo prático que contribua para dar sentido e autenticidade à nossa existência.

A nova visão de mundo a ser desenvolvida deve possibilitar a observação da multiplicidade de informações que existem ao nosso redor, e que possibilite a superação da mera reprodução para a construção de um conhecimento interconectado.

Popper (1982, p.57) vai mais além quando declara a nossa ignorância sobre os fragmentos que conhecemos, e sobre a humildade que devemos ter quando apresentamos os conhecimentos adquiridos pela sociedade:

> Acredito que valeria a pena tentar aprender algo sobre o mundo, mesmo que, ao fazê-lo, descobríssemos apenas que não sabemos muita coisa. Esse estado de ignorância conhecida poderia ajudar-nos, em muitas das nossas dificuldades. Vale a pena lembrar que, embora haja uma vasta diferença entre nós no que respeita aos fragmentos que conhecemos, somos todos iguais no infinito da nossa ignorância.

A sociedade precisa lutar para a autonomia dos seus indivíduos para que seja possível a manutenção da sua existência. Neste sentido, é muito importante que a aprendizagem se realize continuamente, para poder reverter a destruição do planeta que se apresenta atualmente. Para Bronowski (1977, p.122), "só serve o que tivermos aprendido ao longo dos anos". A ciência e os hábitos sociais estão desencontrados, e precisamos aprender a irmaná-los. O conhecimento só ocorrerá a partir do momento em que compreendermos e aprendermos a relação intrínseca que existe entre a ciência e os hábitos sociais.

A proposta é bastante arrojada para os nossos docentes, mas a situação na qual estamos inseridos não nos oferece outra escolha a não ser a ruptura com o que já não atende às nossas fragilidades e a busca do novo para a construção de um mundo melhor e mais humano tornou-se indispensável.

A educação não pode ficar neutra diante da crise que se apresenta no início deste século. E o processo de transformação precisa da participação dos professores, os quais terão que arregaçar as mangas e ir em busca da preparação de indivíduos que sejam capazes de construir uma ciência que possa, efetivamente, propiciar uma vida em plenitude a todos.

Esta ciência deve ser aquela em que os erros do passado possam sugerir pistas para o melhor caminho a ser trilhado, e assim se chegue ao crescimento que seja democrático a todos. Torna-se, então, essencial que os professores construam o processo de ensino e aprendizagem a partir do conhecimento do aluno.

Freudenthal (apud Skovsmose, 2001, p. 25), salienta sobre esta necessidade de aprendizagem sob a perspectiva do estudante quando escreve que a ciência está presente em todos os níveis da sociedade:

> A ciência em sua melhor forma tem sido sempre invenção criativa, e hoje é assim até mesmo em níveis mais baixos do que o dos mestres. O processo de aprendizagem tem de incluir fases de invenção dirigida, isto é, da invenção não no sentido objetivo, mas no sentido subjetivo, vista da perspectiva do estudante. Acredita-se que conhecimento e habilidade adquiridos por reinvenção são mais bem entendidos e mais facilmente preservados que os adquiridos de um modo menos ativo. (2001, p.25)

Os PCNs da Matemática (1998, p. 27) divergem desta perspectiva quando colocam o desenvolvimento tecnológico como característica marcante no mundo do trabalho neste século, preocupando-se principalmente com desenvolvimento das tecnologias e exaltando a formação de trabalhadores mais criativos e versáteis, capazes de entender o processo de trabalho como um todo, dotados de autonomia e iniciativa para resolver problemas em equipe.

Este conflito de propostas formativas nos alerta sobre a carência de profissionais envolvidos em num contínuo processo de formação que sejam capazes de uma análise crítica dos fatos que estão acontecendo à sua volta e que possam intervir sempre que percebam irregularidades. Assim, é fundamental que o aluno possa aprender a aprender e, mesmo que esteja longe da escola, possa ter uma opinião livre de qualquer manipulação que possa vir a surgir.

Somente através da educação poderemos alcançar uma sociedade que seja capaz de conciliar o uso da tecnologia e os seres vivos em perfeita harmonia. Uma sociedade em que o aluno possa trabalhar com base nas interações com o professor, e que a partir daí desenvolva uma atitude democrática. Conforme nos afirma Freire (1996, p.39): "É pensando criticamente a prática de hoje ou de ontem que se pode melhorar a próxima prática". Portanto, é na reflexão sobre os erros que já foram cometidos no passado que devemos construir uma educação mais justa e menos excludente para o futuro, um caminho em direção a um mundo melhor.

2.5. A EDUCAÇÃO TRADICIONAL E A EDUCAÇÃO DO SÉCULO XXI

Boa parte da filosofia educacional de nosso país está alicerçada nos princípios tradicionais. Cunha(1996), afirma que:

> O ensino tradicional é constituído de certezas e estas são valorizadas, tanto no comportamento do professor quanto no do aluno. Ele é também normativo, prescritivo, e acompanha a lógica positivista da organização da ciência, em especial protegendo a idéia de que a teoria vem antes da prática. (Cunha, 1996, p. 122)

Com base nas afirmações supra, procuraremos apontar algumas características deste tipo de abordagem no ensino da Matemática. Nesta abordagem, o professor é o centro do processo de ensino e aprendizagem, ficando o aluno como um mero repetidor das instruções fornecidas pelo professor, o tipo de ensino é caracterizado, predominantemente, pela repetição e memorização de conteúdos.

Segundo Mizukami (1986, p. 10), esta proposta evidencia o caráter de conhecimento acumulativo, que é adquirido pelo indivíduo por meio de transmissão de conhecimentos, onde se consolida o papel importante da educação formal e da instituição escolar. A relação social estabelecida neste tipo de escola é vertical, do professor (autoridade) para o aluno (submisso).

Para Behrens (2000, p. 45), a metodologia utilizada no ensino tradicional caracteriza-se pelas aulas expositivas e pelas demonstrações que o professor realiza em sala. O ensino da Matemática, durante muitos anos, foi fundamentado pelo ensino tradicional, no qual a repetição e a memorização dos conteúdos eram os fatores dominantes. Onuchic (1999, p. 201) salienta que a prática Matemática centrada na memorização e na repetição eram a base do ensino desta disciplina no início do século XX:

> O ensino de Matemática foi caracterizado por um trabalho apoiado na repetição, no qual o recurso à memorização dos fatos básicos (tabuadas) era considerado muito importante. O professor falava, o aluno recebia a informação, escrevia, memorizava e repetia. Repetia exercícios feitos em sala de aula e treinava em casa. Media-se o conhecimento do aluno, recebido através da repetição, com a aplicação de testes em que, se ele repetisse bem o que o professor havia feito, concluía-se que sabia.

É verdade que esta prática de ensino, baseada na repetição e na memorização, formou muitos profissionais de sucesso, porém em outros casos acabou por tolher do aluno algumas capacidades essenciais ao seu desenvolvimento. Segundo Cury (1994, p. 37), o ensino de Matemática, baseado na repetição das explanações dos professores, faz com que os alunos se adaptem a tais técnicas e as adotem em várias outras disciplinas. Todavia, no momento em que os professores solicitam a expressão da criatividade desse aluno e de sua capacidade de análise crítica, ele se sente deslocado no contexto escolar.

Para Moraes (1998, p. 50), a escola continua limitando as crianças ao espaço restrito de suas carteiras: imobilizadas de movimento; silenciadas em suas falas, impedidas de pensar; restringidas em sua criatividade; limitadas em sua sociabilidade; presas em suas mentes racionais; impossibilitadas de conquistar novos espaços. Segundo Behrens (2000, p. 70), a prática pedagógica:

> Fragmentada revestida de competição, de tratamento austero do docente, de falta de visão da possibilidade de aprender com o erro, cria um clima de instabilidade que não permite aflorar a intuição, a criação, a justiça, a amizade, o compartilhamento, enfim a sensibilidade necessária ao cidadão.

Dentro deste contexto, o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, tem permanecido cada vez mais naufragando em seus insucessos. Para Baldino (1999, p. 221), o ensino da Matemática é uma atividade assombrada pelo fracasso, e uma possibilidade de melhora deste processo é através da mudança, ou seja, para que isto ocorra é necessária uma grande reviravolta na educação.

A decisão a ser tomada é uma mudança das práticas educativas, buscando um ensino que possa ultrapassar a mera reprodução para um ensino que seja significativo para o aluno, isto é, um ensino que possa abranger diversas alternativas para o aprendizado. A nova proposta de ensino também deve contemplar a constante transformação, na qual nada ficará estático e a evolução do conhecimento possibilitará ao sujeito a interação com o mundo.

Segundo Behrens (2000, p. 37), o grande impacto que o pensamento sistêmico originou foi o fato sobre as propriedades das partes, que podem ser entendidas apenas a partir da organização do todo. A autora (op.cit, p. 60) afirma que, dentro desta proposta, a produção de conhecimento deve acontecer com autonomia, criatividade, criticidade e espírito investigativo, provocando a interpretação do conhecimento e não apenas a sua aceitação. Portanto, na prática pedagógica o professor deve propor um estudo sistemático, uma investigação orientada, para ultrapassar a visão de que o aluno é um objeto, e torná-lo sujeito e produtor do seu próprio conhecimento.

Para Behrens (2000, p. 39), a educação precisa ultrapassar a visão compartimentalizada, disciplinar, única e isolada, e adotar a visão global, sistêmica e transdisciplinar, na qual as verdades deixem de ser absolutas e inquestionáveis. Segundo a autora, Capra (1996) foi o primeiro a utilizar o termo "abordagem sistêmica", em sua obra: "Teia da Vida: uma nova compreensão científica dos

Sistemas Vivos", para definir o processo baseado em um sistema integrado, de interconexão e de inter-relacionamento.

A partir das idéias de Capra (1996), o desafio da educação é a superação da dualidade entre acerto e erro; sucesso e fracasso; teoria e prática, para a formação de uma aliança entre as partes. Seguindo este raciocínio o erro pode ser visto como um caminho para o acerto, tendo o fracasso como um trampolim para o sucesso e a teoria comungando com a prática para a construção de uma ação docente inovadora.

É importante ressaltar que não estamos dispensando tudo o que a abordagem tradicional, nem as outras que a sucederam, ofereceram. O que estamos propondo é uma aliança entre todas estas abordagens, aproveitando o que cada uma delas pode oferecer para a melhoria da nossa educação.

2.6 A MATEMÁTICA E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Toda a construção matemática existente até nossos dias é fruto de uma necessidade humana de melhor resolver seus problemas. Hans Freudenthal (apud. Skovsmose, 2001, p. 25) refere-se à matemática como "uma atividade humana geral", ou seja, a essência da matemática está relacionada com os conflitos sociais existentes em um determinado período histórico. Nas palavras de D'Ambrósio (1999, p. 97):

> As idéias matemáticas comparecem em toda a evolução da humanidade, definindo estratégias de ação para lidar com o ambiente, criando e desenhando instrumentos para este fim, e buscando explicações sobre os fatos e fenômenos da natureza e para a própria existência. Em todos os momentos da história e em todas as civilizações, as idéias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber.

É inegável a evolução da matemática nos últimos séculos, porém este desenvolvimento passa a ser equivocado quando o relacionamos com o ensino desta ciência. Durante muitos anos, os cientistas se preocuparam em estabelecer formalizações e rigorosidades para a matemática, fazendo com que esta ciência saísse do campo objetivo em que foi concebida partindo para o campo das abstrações. A matemática passou a ser ensinada a partir de situações hipotéticas, sem nenhuma significação desses conteúdos aos alunos. A omissão do conhecimento prático acaba por fazer com que a matemática seja considerada como uma atividade exclusiva de pessoas que possuam um talento especial.

Micotti (1999, p. 163) fala sobre os perigos que a abstração pode originar na aprendizagem da Matemática, quando afirma que os saberes matemáticos apresentados em aulas e escritos, até mesmo em livros didáticos, baseiam-se em raciocínios que requerem instrumentos cognitivos requintados. E quem não dispõe de capacidade de abstração suficiente para acompanhar as explicações fornecidas pelo professor e depois repetir os passos indicados por ele para a realização dos exercícios, não consegue aprender.

Se os hábitos e costumes das sociedades estão se modificando com a evolução das ciências e da tecnologia, então torna-se importante que a educação também modifique as suas tradições para se adaptar a esta nova realidade. Assim, a sociedade do século XXI necessita, urgentemente, de uma inovação pedagógica capaz de propiciar aos alunos a construção de seus conhecimentos, a partir da interação entre o sujeito cognitivo e o objeto do saber. Para que esta inovação seja possível precisamos repensar algumas questões com relação ao ensino da Matemática.

Para melhor exemplificar a nossa proposta, apresentaremos uma situação que poderia ser colocada pelo professor ao seu aluno em sala de aula: escreva de maneira simplificada quanto vale três quartos de dois terços. Possivelmente, ficaríamos com dúvidas para fazer a representação escrita desta situação, quanto mais o aluno.

Moysés (1997, p. 74) nos apresenta um exemplo que foi exposto pela pesquisadora Jean Lave[1], no qual foi constatado que uma situação prática pode esclarecer muitas dúvidas dos alunos. Neste exemplo, a proposta da pesquisadora foi a de sugerir uma refeição balanceada em que seria permitido comer três quartos dos dois terços de xícara de queijo permitido para aquele dia. Dada a questão, um dos participantes disse que saberia como fazer. Pegando a xícara, encheu-a duas vezes com uma medida de queijo equivalente a dois terços da xícara, virando-a sobre a tábua de cortar legumes. Em seguida amassou todo o queijo, dando-lhe o

[1] JEAN LAVE, Conition in practice. Boston: Cambridge, 1988

formato redondo. Dividiu-o em quatro partes e, retirando uma quarta parte, serviu o restante.

O participante compreendeu o problema, e foi capaz de solucioná-lo com facilidade. Segundo Moysés (1997, p.74), o estudante, ao realizar uma certa atividade contextualizada com a sua realidade, vai formando representações a seu respeito. É a riqueza dessas representações que lhe permitirá ir além da simples descrição ou memorização do assunto estudado.

Neste sentido, Micotti (op. cit., p. 164) observa que existe a necessidade de se repensar a relação do aprendiz com a disciplina e a sua participação em sala de aula, levando-se em consideração também os aspectos afetivos e cognitivos, e o enfoque dado à disciplina para que ela se torne objeto de conhecimento e saber.

Brousseau (1983, p. 190), sugere que o trabalho didático seja feito a partir da história do conhecimento o qual se está estudando: descrevendo este conhecimento, entendendo o seu uso, e explicando quais as vantagens em relação aos usos anteriores; quais eram as práticas sociais que ele estava ligado; quais eram as concepções matemáticas vigentes; verificando se havia a existência de vestígios de uma resistência àquele saber. Enfim, mostrando os obstáculos que foram percorridos até que aquele conhecimento tenha a sua plenitude.

Assim, através da reconstituição dos momentos históricos dos números, buscaremos a possibilidade de relacionar estes fatos ao contexto em que estes alunos estão inseridos, e nas palavras de D'Ambrósio (1999, p. 97), mostrando que: "as idéias matemáticas estão presentes em todas as formas de fazer e de saber".

Através da história dos números tentaremos melhor compreender a evolução da transmissão deste conhecimento, e a sua utilização, buscando constatar que os números não surgiram de forma linear e logicamente organizada. Seu desenvolvimento percorreu movimentos de idas e vindas, com rupturas de paradigmas. Retomando a questão da origem dos números, perceberemos que estes também passaram por diversas idas e vindas, erros e acertos, para que hoje este conhecimento se configurasse em uma das maiores descobertas da humanidade. Neste sentido, o ensino deste assunto também necessita percorrer uma prática pedagógica contextualizada que contemple as diversas opções que o assunto nos oferece.

3. OS NÚMEROS RACIONAIS NO CONTEXTO HISTÓRICO

3.1 A ORIGEM DOS NÚMEROS

O sistema de numeração, tal qual conhecemos atualmente, é fruto de uma invenção que vem sendo desenvolvida ao longo dos séculos. O sistema de numeração posicional foi uma descoberta que revolucionou a história da humanidade. Para um melhor entendimento desta descoberta, voltaremos alguns milhares de anos, e tentaremos melhor compreender alguns dos percalços necessários, para se chegar até o nosso sistema de numeração base dez no sistema posicional.

A volta ao passado inicia-se por volta de 30.000/20.000 a.C., época em que nossos ancestrais tiveram que sair dos lugares em que viviam, para regiões onde houvesse mais alimentos. Esta mudança de ambiente possibilitou que alguns homens tivessem caça em abundância, a outros frutos, outros ainda muitas raízes. Este excedente em alimentação fez com que os homens determinassem uma forma de identificar melhor as quantidades.

Como os povos primitivos não mantinham relações cordiais entre si, até porque lutavam pela sobrevivência como todos os animais, precisavam saber moderar sua comida. De acordo com Ifrah (1994, p. 15) um fato é certo: "houve um tempo em que o ser humano não sabia contar". A incapacidade de distinção por comparação de mais de quatro elementos, ou seja, o limite da sensação numérica, aliado ao fato de não saberem contar, atrapalhava muito o controle que eles faziam sobre suas posses, Ifrah (1994, p. 20) salienta que:

> Os limites da sensação numérica - coloquemo-nos, no entanto, diante de uma série de seres ou de objetos análogos alinhados e proponhamo-nos a indicar a quantidade numa única e rápida olhada, isto é, sem recorrer a nenhum artifício. Até onde somos capazes de ir? Distinguirmos sem erro, no primeiro golpe de vista, um, dois, três e até quatro elementos, mas aí se detém nosso poder de identificação dos números. Porque além de quatro tudo se confunde em nosso espírito, e nossa visão global não serve para mais nada.

Quando o homem precisa de algo que venha atender suas necessidades, ele vai em busca de respostas, ou seja, de uma descoberta que melhor satisfaça a sua carência. Assim, a possibilidade de o homem em ter o controle sobre suas posses fez com que algum tipo de registro fosse inventado para satisfazê-las. Neste sentido, Ifrah (op. cit., p. 12) afirma que: "Uma invenção, uma descoberta só se desenvolve se vem a atender à necessidade social de uma civilização, enquanto a ciência fundamental, por sua vez, responde a uma necessidade histórica interiorizada na consciência dos sábios".

A princípio o homem utilizou a correspondência elemento a elemento, seja através do entalhe em um pedaço de osso ou de madeira, ou ainda por pedras ou qualquer outro tipo de material que estivesse ao seu alcance e que fosse de fácil armazenamento. Mas, apesar de o homem primitivo ter começado a dominar seus bens, ele ainda não possuía a faculdade de saber contar. Segundo Ifrah (op. cit., p. 25), o início das relações numéricas foi através da correspondência um a um. Desta forma, a possibilidade de comparar duas coleções de seres ou objetos, sem ter de recorrer à contagem abstrata.

Continuando a expressar o raciocínio do autor, um outro problema que estes homens encontraram foi o fato de que entalhes e pedras poderiam se referir a homens, carneiros, cavalos, dias, ou qualquer tipo de coisa, além de apresentarem dificuldades para o transporte destes materiais. Novamente, surgiu um novo impasse, pois estes bens poderiam sofrer variações de quantidade, então como contar sem utilizar números?

Assim, para poder representar os números, o homem passou a utilizar-se de seu próprio corpo para representar as quantidades. Tal forma de representar as quantidades facilitou também caso houvesse a necessidade de viajar, pois ele não precisaria mais transportar pedras e ossos para expressar suas posses. De acordo com Ifrah (1994, p. 31-21) esta representação a partir de seu próprio corpo, utilizada por alguns indígenas cujos descendentes constituíram posteriormente a civilização Asteca, deu origem à aritmética:

> Na maioria das vezes eles "contam visualmente" seguindo a técnica corporal a seguir: Toca-se sucessivamente um por um dos dedos da mão direita a partir da menor, em seguida o pulso, o cotovelo, o ombro, a orelha e o olho do lado direito. Depois se toca o nariz, a boca, o olho, a orelha, o ombro o cotovelo e o pulso do lado esquerdo, acabando no dedo mindinho da mão esquerda. Chega-se assim ao número 22. Se isto não basta, acrescenta-se primeiramente os seios, os quadris e o sexo, depois os joelhos, os tornozelos e os dedos dos pés direito e esquerdo. Que permite atingir dezenove unidades suplementares, ou seja 41 no total.

Muitos séculos se passaram até que o homem conseguisse construir uma regra escrita para a representação dos numerais. Fazemos referência a esta evolução no Apêndice 1, deste trabalho. Provavelmente, no início do segundo milênio a.C., os astrônomos babilônicos criaram um sistema de numeração de posição - de base 60 - que era utilizado para representar tantos os números inteiros bem como as frações. Segundo Centeno[2] (1988, p. 40), o sistema de numeração mais perfeito que foi criado na antigüidade foi o sistema dos matemáticos e astrônomos babilônicos, que tiveram primeiramente, a idéia de um sistema de numeração de posição de base 60, que servia para representar os números inteiros e fracionários.

Este sistema de base sexagesimal é utilizado até hoje para representar medidas de tempo (minutos/segundos) e de arcos e ângulos (graus, minutos e segundos). O uso do sistema de base dez foi iniciada pelos homens da antigüidade, posto que usaram as mãos para representação de números. Lembramos que as pessoas aproveitam este método de contar com os dedos das mãos até hoje para aprender a contar e não é incomum recorrermos a esta estratégia quando necessitamos reforçar nossos pensamentos.

A mão, portanto, pode ser considerada como o primeiro instrumento natural de contagem. Segundo Ifrah (op. cit., p. 79), foi devido ao número considerável de ossos e de suas articulações, aliado à disposição assimétrica de seus dedos e sua relativa autonomia, que se pode dizer que a mão do homem é, seguramente, uma concentração natural de recursos para a contagem. Foi a partir do momento em que o homem soube tirar proveito deste modo abstrato de contagem, que se passou a ter uma importante evolução na maneira de contar dos seres humanos. Posteriormente, a mão foi sendo substituída pelos ábacos e pelas tábuas de contar.

Mas mesmo com a utilização das mãos como um instrumento de contagem, o homem necessitava aprimorar esta descoberta. Assim, após a invenção da escrita, o homem buscou uma forma de representação que fosse mais acessível à compreensão de qualquer ser humano, e que pudesse possibilitar a qualquer homem, efetuar cálculos sem ter de recorrer a outros acessórios.

---

[2] Minha tradução.

Para Ifrah (op. cit., p.131), a descoberta da escrita dos números não surgiu de uma só vez, foi um processo que demandou vários séculos para que fosse possível a sua concretização, pois cada sociedade possuía uma maneira diferente de representar a sua numeração de forma escrita, e tal questão era um obstáculo para a realização das transações comercias junto a outros povos. Na medida em que os homens expandiam as suas operações comerciais, havia a necessidade da representação dos números de forma que eles pudessem se entender. A inserção da utilização dos numerais hindu-arábicos no mundo, foi um processo muito lento e com muitos retrocessos. Segundo Ifrah (1994, p. 131), a descoberta da escrita dos números arábicos foi um dos mais poderosos instrumentos intelectuais que o homem desenvolveu até hoje:

> Ela surgiu para permitir uma notação perfeitamente coerente de todos os números e para oferecer a qualquer um (mesmo aos espíritos mais fechados à aritmética) a possibilidade de efetuar qualquer tipo de cálculo sem ter de recorrer a acessórios como a mão, o contador mecânico ou a tábua de contar. Assim como a escrita, o zero e nossos números modernos figuram, portanto, entre ao mais poderosos instrumentos intelectuais de que dispõe o homem de hoje. Cálculos irrealizáveis durante milênios tornaram-se possíveis graças a sua descoberta, abrindo caminhos para o desenvolvimento das matemáticas, das técnicas e de todas as outras ciências.

Para melhor compreendermos a importância da invenção dos algarismos arábicos, podemos tentar imaginar como seria feito um cálculo de multiplicação utilizando-se os algarismos romanos. Possivelmente, nenhum de nós conseguiria realizar tal proeza. Este era mais um dos dilemas enfrentados pelos povos da antigüidade. E, na medida em que os povos necessitavam da expansão das atividades econômicas, não podiam mais continuar a utilizar representações específicas, as quais somente alguns detinham a capacidade de utilizar em suas sociedades.

Era imprescindível que se adotasse um sistema numérico que fosse universal, e que pudesse ser facilmente compreendido e operado. E, ao contrário do que a história nos relata, segundo Ifrah (1994, p. 264-265), os maiores responsáveis pela invenção do sistema numérico que utilizamos foram os hindus. Foram eles que primeiro estabeleceram a escrita dos números que utilizamos até hoje.

Conforme relata Centeno (1988, p. 44): "A primeira numeração escrita que teve uma estrutura idêntica a nossa e cujos símbolos gráficos têm constituído a prefiguração das nossas cifras atuais nasceu com toda a probabilidade na Índia setentrional, há aproximadamente quinze séculos". Ifrah (1994, p.265) acrescenta, que foi por volta do século V da era cristã que nasceu o ancestral do nosso sistema de numeração, e que foram estabelecidas as bases do cálculo escrito tal como é praticado hoje em dia. O que é comprovado por inúmeros documentos e testemunhos, além de ter sido proclamado pelos árabes, sendo que a estes foi atribuída durante muito tempo a sua descoberta.

Apesar de os árabes terem aceitado o sistema de numeração hindu muito facilmente, o mesmo não aconteceu com o restante do mundo. Conforme afirma Pinto (1995), até o final da Idade Média, as escolas ensinavam apenas a contagem nos dedos e a escrita e a leitura dos algarismos romanos. As operações aritméticas eram realizadas somente por especialistas em cálculo.

A democratização do cálculo não era aceita pela igreja porque ocasionaria a sua perda de poder, tendo em vista que os especialistas em cálculo eram todos pertencentes ao clero. A resistência dos calculadores profissionais em manter o seu monopólio sobre as operações era muito grande, já que eram eles os responsáveis pela contabilidade, e com este controle poderiam manipular a cobrança dos impostos.

Ifrah (1994, p. 315), salienta que a democratização do cálculo estava longe de ser vencida, posto que os calculadores profissionais da época queriam manter os segredos desta arte, preocupados em preservar seu monopólio e vendo a possibilidade de ter o seu ganha-pão ameaçado. Estes especialistas não queriam ver as operações aritméticas ao alcance de todos. Assim, segundo o autor supra, algumas autoridades da igreja espalharam o boato de que: se as operações de cálculo do modo árabe eram tão fáceis, era porque tinham algo mágico ou até demoníaco, podendo vir a ser obra do próprio Satanás.

Apesar da grande resistência da maioria da população, muitos cientistas e sábios da época já utilizavam o sistema de numeração hindu-arábico em seus cálculos. Todavia, a batalha dos números arábicos só foi vencida a partir da Revolução Francesa, como nos afirma Ifrah (1994, p. 318):

> Evidentemente, o cálculo por escrito já tinha vencido a batalha há muito, sendo sua superioridade evidente junto aos cientistas. Mas os comerciantes, os banqueiros, os financistas e os funcionários, enfim os mais conservadores, tiveram muita dificuldade em se

> separar do ábaco. Foi preciso a Revolução Francesa para resolver a questão e tornar claro que o " cálculo por meio dos algarismos tem sobre o cálculo por meio de fichas na tábua de contar. A partir de então, o cálculo e a ciência moderna puderam desenvolver-se sem entraves.

As idéias matemáticas evoluem conforme os interesses dominantes de cada época, conforme Miorim (1998, p. 33), foi devido ao avanço das navegações e ao florescimento das atividades comerciais e industriais, aliados à inerente necessidade de melhor compreender as propriedades e transformações que estavam ocorrendo no mundo, que o estudo e o ensino da Matemática começaram a se desenvolver e a se modificar no território europeu.

Toda esta evolução só foi possível em virtude do contato com os árabes que, entre os séculos VIII e XII, traduziram todas as contribuições disponíveis dos clássicos gregos, dos trabalhos produzidos por indianos, persas, além de apresentarem suas valiosas contribuições. Assim, a adoção da notação arábica, foi introduzida na Europa por volta do século XV, sendo esta notação utilizada com mais freqüência nas atividades comerciais, em contabilidade e na confecção de calendários e almanaques, sendo seu uso praticamente inexistente nas escolas da época.

Segundo Miorim (1998, p. 36), foi somente a partir da invenção da imprensa em 1440, que ocorreu o avanço da matemática, rompendo a barreira existente entre a tradição culta e a artesanal, e através dela tornou-se possível a veiculação das grandes descobertas e o aumento da cultura da humanidade.

A realidade do século XXI comprova que a simplificação da estrutura dos números era uma necessidade fundamental a toda a humanidade, aliado ao fato que o desenvolvimento da ciência e da tecnologia só foi possível graças ao sistema de numeração de base dez posicional. Os números racionais, em sua representação fracionária e decimal, também estiveram à margem de toda evolução do sistema de numeração.

3.2 OS NÚMEROS RACIONAIS

O maior responsável pela propagação do sistema decimal de posição no mundo arábico-mulçulmano, foi o matemático árabe Al-Huwarizmi (780-850) que no seu livro o “Tratado de aritmética", demonstrou, com a ajuda dos nove algarismos hindus, todos os detalhes do sistema decimal de posição, sendo desta forma possível expressar todos os números. Al-Huwarizmi também se referiu em sua obra aos números fracionários, especialmente as frações sexagesimais. Segundo Centeno (1988, p. 45):

> Depois de explicar com todo o detalhe o sistema decimal de posição por meio das cifras hindus, e em particular empregando um círculo pequeno parecido com o zero, Al Huwarizmi explica com pronunciar os adjetivos numerais nos casos de números grandes utilizando os conceitos de unidade, de dezena, de centena e de milhar, e acaba descrevendo as operações de cálculo. Outra parte da obra de aritmética de Al - Huwarizmi trata das frações empregando nomes particulares para as frações que tem por numerador a unidade, até mesmo a fração 1/10. Descreve em particular as frações sexagesimais e os cálculos de multiplicação e divisão que havia julgado ter um papel muito importante nas matemáticas egípcias, porém não parece que conheceu as frações decimais.

A contribuição deste matemático, também é ressaltada por Tahan (2002, p. 247): " Al-Huwarizmi, matemático e astrônomo persa. Viveu na primeira metade do século IX. Contribuiu Al-Huwarizmi, de forma notável, para o progresso da matemática. A ele devemos, entre outras coisas, a grafia dos números, o sistema de posição, isto é, o sistema no qual cada algarismo tem valor conforme a posição em que ocupa no número".

Centeno (1988, p. 46), observa que posteriormente a Al-Huwarizmi surge o nome de Al-Uglidisi, um outro matemático de origem árabe que viveu em 952 em Damasco. Al-Uglidisi procurou em seus escritos recopilar toda a aritmética de origem grega, hindu e árabe existente em seu tempo. Sua obra mostra de forma natural as frações decimais, demonstrando muita experiência nestes cálculos. Este estudioso, emprega uma notação acerca dos números decimais muito próxima da representação que utilizamos atualmente, separando a parte inteira da parte fracionária do número através de um símbolo. Por exemplo: 2'35 representa nosso 2,35, e era lido como 2 unidades e 35 de cem.

Outro matemático e astrônomo, muito mais conhecido que Al-Uglidisi, foi Al-Kasi, que reivindicou para si a invenção dos números decimais. Ele, contribuiu com o último desenvolvimento do sistema de numeração de posição e foi ele quem, pela primeira vez, explicou claramente a teoria das frações decimais. Seu tratado de aritmética, *La llave de la aritmética* que, pelo seu conteúdo, clareza e elegância, teve grande difusão em toda a Idade Média.

> No primeiro capítulo do segundo livro de La llave de la aritmética, consagrando as frações, Al – Kasi nos diz que introduziu, baseando-se nas frações sexagesimais, frações compostas das potencias sucessivas de um décimo. Chama a estas potências: décimas, segundos decimais, terceiros decimais, etc., e as frações, frações decimais. Explica que criou um sistema, em que, como no sistema sexagesimal, todas as operações se efetuaram exatamente como com os números inteiros porém, apoiando-se na base 10 utilizada correntemente que será mais acessível aos que não conhecem o calculo dos astrônomos (calculo sexagesimal). (CENTENO, 1998, p. 46)

Segundo Centeno (op. cit., p. 48), foi a partir no século XVI, com a nova estrutura socio-econômica na Europa por ocasião dos descobrimentos e expansões, que alguns matemáticos, motivados pela necessidade que tinham os navegadores em situar-se corretamente, passaram a ter que realizar raciocínios relativos a problemas que envolviam cálculos astronômicos. Temos também, nesta época, o desenvolvimento do comércio, a produção da primeira máquina, a constituição do primeiro banco, as divisões dos terrenos, estando estes fatos aliados à navegação favorecendo o interesse pelos números decimais.

Centeno (op. cit., p. 48), afirma que a Europa do final da Idade Média, que durante muitos anos condenou aqueles que ousaram desafiar os sistemas de numeração arcaicos da época, não podia mais ficar alheia à descoberta que se espalhava por todo o oriente, e mesmo com o seu conservadorismo sem limites, precisou, pouco a pouco, aceitar a numeração hindu-arábica.

Desta forma, a numeração hindu-arábica passou a ser adotada em toda a Europa e ocidente, facilitando a propagação dos números decimais por todo o mundo. Dentre os matemáticos, foram responsáveis pela propagação dos números decimais no ocidente: o francês François Viète (1540-1603) e o belga Simon Stevin (1548-1620), conforme esta mesma autora relata.

Stevin publica em 1585, um livro de 36 páginas, intitulado de *La Disme*, no qual mostra que com a utilização dos números decimais pode-se simplificar, consideravelmente, o cálculo com as medidas. Neste livro, ele se dirige a todos os que usam estes números, explicando o quanto os números decimais podem facilitar as dificuldades que existiam anteriormente com relação às frações. Centeno (op. cit., p.49), salienta que as regras de Stevin para calcular com os números decimais são as mesmas que utilizamos até hoje. Stevin explica as vantagens que se derivam de um sistema de medidas, pesos e moedas baseado nas divisões decimais, acompanhados de explicações com diversos exemplos.

Na medida em que os diversos países foram se adaptando ao Sistema Métrico Decimal, o cálculo com os números decimais foi se tornando mais valorizado na vida prática dos homens. Assim, é incontestável dizer que a descoberta dos números arábicos e dos números decimais proporcionou o progresso da ciência, através dos novos métodos de cálculos. Ifrah (1994, p. 322-323), ressalta a importância da descoberta dos números quando afirma:

> A história dos algarismos indica, pelo menos neste campo particular, que a inteligência é universal e que o progresso assumiu um lugar no equipamento mental, cultural e coletivo da humanidade. ... Esta invenção humana, profundamente humana, é ao mesmo tempo a mais universal de todas. ... Em uma só palavra, os algarismos constituem hoje a única e verdadeira linguagem universal. ... A invenção e a democratização da nossa numeração de posição tiveram conseqüências incalculáveis sobre as sociedades humanas, pois facilitaram a explosão da ciência, da matemática e das técnicas.

A criação dos números e, em especial dos números decimais, democratizou o conhecimento dos cálculos a todas as sociedades, mas o conceito destes números tem se tornado um grande obstáculo para quem precisa aprender a operar com eles. O ensino dos conceitos matemáticos sobre os números, em especial os decimais e fracionários, não tem alcançado a aprendizagem deste saber.

Nos PCNs (1998), temos menção a este assunto, quando é relatado que as representações fracionárias e decimais são desenvolvidas desde os ciclos iniciais, porém o que se constata é que os alunos chegam ao final do ensino fundamental sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e bem como os procedimentos de cálculo que envolvem os racionais na forma decimal. (PCNs, 1998, p.101)

Os números racionais foram criados com o objetivo de atender às necessidades da humanidade, porém quando este objeto do saber passou para o campo didático, este conhecimento sofreu uma inversão, descontextualizando-se da sua principal finalidade que é a sua utilidade prática, passando a ser um conceito abstrato sem muita relação com a prática.

3.3 O ENSINO E A APRENDIZAGEM DOS NÚMEROS RACIONAIS

Em quais situações utilizamos os números racionais? A princípio pode-se dizer que sua utilização é eventual, e que passa quase despercebida da nossa atenção. Mas ao fazermos um raciocínio mais detalhado constatamos que este sistema de numeração é amplamente utilizado em nosso dia-a-dia, sendo estes números, protagonistas de muitos cálculos. Por exemplo: quando abrimos um jornal ou uma revista é muito comum encontrarmos informações expressas com estes números.

Existem ainda as situações industriais, nas quais se necessita uma maior precisão das medidas. Muitas das máquinas utilizadas nas indústrias possuem um controle numérico que, se não for realizada com a maior precisão possível, poderá provocar conseqüências graves para aqueles que delas vão depender. Atualmente, os erros de precisão podem provocar inúmeros prejuízos na fabricação de peças industriais, e mesmo aqueles que possuem pouca instrução precisam saber realizar leituras e cálculos que envolvam os números racionais.

Na opinião de Centeno (1988, p. 21), a utilização de números com vírgula é muito abrangente e todo o cidadão necessita, em maior ou menor grau, deste conhecimento, seja para o seu trabalho, para poder interpretar corretamente o significado de muitas informações que se apresentam pela imprensa em geral, ou ainda para a utilização cotidiana.

Os números decimais possuem uma aplicação bem difundida em nosso dia-a-dia, ao comprarmos produtos líquidos, como por exemplo: a gasolina. Ao verificarmos a bomba de combustível, constatamos que compramos uma quantidade de litros que é representada por um número com vírgula. Quando compramos certos alimentos é muito comum que tenhamos um peso que é representado também por um número com vírgula.

Cabe perguntar se seria possível suprimir a utilização dos números com vírgula de nosso cotidiano, passando-se a empregar somente os números inteiros? Como resposta a esta questão, podemos dizer que sim, é possível usar somente de números inteiros, desde que possamos desprezar algumas aproximações. Tomemos um exemplo com relação ao combustível: o preço do litro do combustível é de R$1,93, mas como só consideramos valores inteiros temos que supor o preço como sendo de R$2,00 e desprezar R$0,07 centavos como nossa perda. É claro que, neste caso, estamos imaginando que um consumidor final não compre milhões de litros, mas se a situação é de um dono de posto de combustível, quem levará o prejuízo?

A utilização dos números fracionários vem perdendo importância face ao uso crescente de calculadoras, relógios digitais, balanças entre outros. Mas, em algumas circunstâncias, a sua aplicação é fundamental. Percebe-se o uso dos números fracionários em algumas situações como: ao observarmos o marcador de combustível de um veículo, vamos verificar que o marcador está dividido em quatro partes e não é incomum escutarmos que o tanque está pela metade ou que está com um quarto de combustível.

Ao comprarmos alimentos podemos escutar com uma certa freqüência que o peso da mercadoria é de 1/2 (meio) quilo. Encontramos também os números fracionários em outras situações de nosso cotidiano como nas representações estatísticas populacionais em que temos a representação que 2 em cada 5 habitantes de uma cidade são imigrantes, e concluímos que 2/5 da população da cidade é de imigrantes.

Ou outra situação na qual também é possível verificar a presença das frações é nas representações de probabilidade, como por exemplo: qual é a chance de sortearmos uma bola vermelha em uma caixa em que há 2 bolas vermelhas e 8 bolas verdes? A resposta a esta situação de probabilidade pode ser representada como 2/10 de chance de retirar uma bola vermelha. Ou ainda, situações verificadas em mapas, com diferentes as escalas, como por exemplo um mapa que indique a proporção de 1 cm para mil metros (1: 1.000), a fração que representa esta situação é 1/1000.

No caso de representação das porcentagens podemos ter tanto a representação fracionária (30 em cada 100) 30/100 ou 30%, como também a representação decimal de 0,30. Na prática deduzimos que os números racionais, em sua forma fracionária ou decimal, nos permitem resolver várias situações problema, principalmente aquelas que estão relacionadas a medidas que não apresentam solução somente com a utilização dos números inteiros.

Segundo Centeno (op. cit., p. 24), os números racionais nos ajudam em muitos momentos, pois eles têm a propriedade de possibilitar a aproximação aos números reais tanto como se queira, aliado ao fato de que os decimais oferecem a vantagem de permitir que os cálculos sejam mais simples, porque pode-se calcular com eles como se fossem inteiros. Podemos apresentar, como exemplo, a seguinte situação: estamos comprando meio metro de um tecido que custa R$5,00 o metro.

Se não existissem as representações dos números decimais teríamos que pagar os R$5,00 pelo produto, enquanto que o preço realmente devido seria de R$2,50. Esta situação poderia ser aplicada caso a metragem de tecido fosse ainda menor.

Mesmo com a pouca aplicação das frações em nossa sociedade, o seu ensino se justifica pela importância de seu conceito e das operações que podemos realizar através delas, bem como devemos explorar também as frações decimais, que é uma condição básica para o estudo dos números decimais e das porcentagens.

Dentro deste contexto, podemos entender que a necessidade geral de aprendizagem para a convivência na sociedade contemporânea é fundamental. Assim, é imprescindível que incentivemos os alunos a desenvolver continuamente suas inteligências. Uma das oportunidades está em sabermos utilizar os erros para a sofisticação de nossas informações, transformando estes erros em pistas para a busca dos acertos. Todos os seres humanos possuem inteligência, sendo fundamental saber despertá-la.

Quando percebemos que o aluno errou, devemos incentivá-los para continuar na busca de refinar seu conhecimento e aprender ainda mais. É preciso mostrar que tudo poderá ser fácil se o embasamento é sólido, e se a maneira como se ensina nas escolas contemplar a relação existente com cotidiano dos alunos, mostrando que existem muitos modos de atingir o conhecimento.

4. ERROS E NÚMEROS RACIONAIS

4.1 DIFICULDADE, CONFLITO, OBSTÁCULO E ERRO.

Autores como: Centeno (1988), Carraher (1993), Cury (1994), Brandt (1997), Igliori (1999), Pinto (2000), Teixeira (2002) entre outros, nos falam sobre a dificuldade dos alunos, os conflitos para aprender matemática, os obstáculos e os erros percebidos durante o processo de ensino e de aprendizagem de matemática. Consideramos que estes termos terão muita importância no desenvolvimento da pesquisa.

No dicionário Novo Aurélio (1999) encontramos para o termo 'dificuldade', que é diferente da dificuldade para a psicologia, as seguintes definições: "Caráter ou qualidade do que é difícil, aquilo que é difícil; obstáculo, estorvo, impedimento; complexidade, complicação; oposição, objeção; relutância, repugnância; situação crítica, apuro, aperto". Para Centeno (1988, p. 144), uma dificuldade é algo que nos impede de executar bem alguma coisa. De acordo com a autora, as dificuldades podem estar relacionadas a diversos fatores como: o conceito que se aprende, o método que o professor utiliza, a formação anterior do aluno, e sua própria disposição em aprender um determinado assunto.

Com relação ao termo 'conflito' encontramos a seguinte definição no Dicionário de Filosofia (2000): "Contradição, oposição ou luta de princípios, propostas ou atitudes". Nas palavras de Centeno (1988, p. 144), conflito significa o choque ou oposição entre formas contrárias de se interpretar uma mesma situação. Dentro desta concepção, quando falamos em conflito cognitivo referimo-nos a idéias contraditórias que se chocam e produzem um desequilíbrio, podendo ocasionar dúvidas e a produção de erros.

Não é difícil constatarmos que, na matemática, estes termos são bem comuns, tanto no aspecto da ciência como também na área educacional. Na ciência, os matemáticos se deparam com uma dificuldade inicial em provar as suas conjecturas, sendo necessária a existência de uma conflito de opiniões para se chegar a um consenso sobre a teoria. Muitos alunos já tiveram dificuldade para aprender um determinado conhecimento, e precisaram passar por um conflito pessoal para poder superar um conhecimento que era contrário ao que se imaginava representar.

No dicionário temos que um 'obstáculo' é: "uma dificuldade, um inconveniente, um impedimento, um estorvo", em sentido figurado: "um impedimento ou uma dificuldade que se interpõe na construção de um fim". Para o termo 'erro' temos a definição: "Desacerto, incorreção, engano, falta, pecado". Assim, podemos notar que os termos: dificuldade, conflito, obstáculo e erro estão praticamente imbricados, porém alguns pesquisadores fazem distinções entre esses termos. Assim, por entendermos que um obstáculo se manifesta por erros, conforme afirma Cury (1994), estaremos fazendo um detalhamento sobre os termos 'obstáculo' e 'erro'.

O primeiro a utilizar a noção de obstáculo epistemológico foi o filósofo francês Gaston Bachelard[3], na sua obra "A Formação do Espírito Científico”, publicada em 1938, que busca interpretar as condições de evolução da ciência. Segundo Miguel (2004, p. 99), a obra de Bachelard apresenta uma ruptura explícita e radical com o pensamento evolucionista linear no âmbito da história e da filosofia da ciência. É por esta razão que ele é considerado o teórico da descontinuidade, e a noção de obstáculo epistemológico introduzida por ele atesta esse fato. Esta obra de Bachelard tem exercido considerável influência na área educacional, principalmente depois de ser introduzida na Didática da Matemática por Brousseau, que em 1976 escreveu um artigo intitulado: "Os obstáculos epistemológicos e os problemas em matemática".

Neste artigo ele introduz a noção de obstáculo epistemológico como sendo: "aquele obstáculo ligado à resistência de um saber mal adaptado", no sentido de Bachelard, e o vê como um meio de interpretar alguns dos erros recorrentes e não aleatórios, cometidos pelos estudantes, quando lhes são ensinados alguns tópicos da Matemática. Para Brousseau (1983, p. 171) os obstáculos não se constituem na falta de conhecimento, mas, pelo contrário, são conhecimentos antigos, cristalizados pelo tempo, que resistem à instalação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento.

[3] BACHELARD, G. La formation de l'esprit scientifique, Vrin Paris, 1975.

Portanto, um conhecimento geral poderá induzir os alunos a erros que poderão se tornar freqüentes. Conforme Brousseau (1983, p. 171) afirma em:

> O erro não é somente conseqüência da ignorância, da incerteza ou do acaso, como supõe as teorias empiristas ou behavioristas de aprendizagem: o erro é o resultado de um conhecimento anterior, que teve seu interesse e seu sucesso, mas que agora se revela falso ou simplesmente inadaptado. Os erros desse tipo não são práticas errôneas e imprevisíveis: eles são constituídos de obstáculos. Assim, tanto na prática do professor como na do aluno, o erro é constitutivo do conhecimento adquirido.

Encontramos em Pinto (2000, p. 51), um conceito de obstáculo epistemológico, baseado no pensamento de Bachelard, que pode ser compreendido como: "o efeito limitativo de um sistema de conceitos sobre o desenvolvimento do pensamento". A história da evolução dos números citada anteriormente, expressa aspectos das limitações que as ciências enfrentam na sua constituição, que segundo Bachelard são aspectos fundamentais para a compreensão do espírito científico.

A análise dos obstáculos relacionados à evolução da matemática nos leva a perceber uma certa regularidade em seu desenvolvimento, posto que muitos dos obstáculos que o matemático precisou enfrentar, não são expostos durante o processo de criação do saber. Mas o fato é que, durante o processo criativo, o matemático precisa explicitar suas idéias através de uma demonstração e, no sentido da formalização do saber, não segue nenhuma regularidade. Pelo contrário, o matemático passa por uma gama de conflitos até que possa redigir o resultado final de seu trabalho.

Pais (2001, p. 41) salienta que apesar de a matemática não apresentar rupturas em sua evolução, não significa que esta ciência tenha se desenvolvido sob uma linearidade absoluta. O desafio da descoberta do conhecimento matemático só se efetiva a partir da sua sistematização através de uma demonstração, e este registro formal não apresenta as dificuldades encontradas no decorrer do processo de criação.

Mas, mesmo que os obstáculos enfrentados durante o processo histórico não sejam explicitamente registrados, quando se observa qualquer descoberta matemática, logo percebemos que elas são passíveis a sofrerem refutações. E para poder sustentar a sua conjectura, o matemático precisa recorrer a provas que justifiquem o saber por ele apresentado. Conforme apresentado por Pais (2001, p. 42):

> Na prática, observa-se que as provas normalmente evoluem em função das refutações levantadas pelo sujeito cognitivo. Essas refutações, que podem dificultar ou ajudar a validação da matemática, podem se constituir em obstáculos para a formação de conceitos. Tal como acontece na etapa de criação da matemática, durante a experiência da aprendizagem escolar há também um processo correspondente a uma redescoberta do saber, de onde os obstáculos podem, analogamente intervir diretamente no fenômeno cognitivo.

Durante o processo de aprendizagem o aluno traz consigo diversas informações de seu cotidiano, que podem acabam por conflitar com um novo conceito recém apresentado pela escola. Este conhecimento anterior pode exercer uma forte influência para aprendizagem, caracterizando-se como um obstáculo epistemológico. Segundo Brousseau (1983, p. 175):

> Os erros provocados pelos obstáculos vão resistir e ressurgir muito tempo depois que o sujeito terá rejeitado o modelo errado do seu sistema cognitivo consciente. O obstáculo tenta adaptar-se localmente, modificar-se com o mínimo de desgaste, otimizar-se num campo reduzido. Isso explica que transpor um obstáculo exige um trabalho da mesma natureza que a implantação de um conhecimento, quer dizer interações repetidas, dialéticas do aluno com o objetivo do seu conhecimento.

Para melhor ilustrarmos o que foi apresentado acima, recorreremos ao exemplo apresentado por Centeno (1988, p.145): "No conjunto dos números naturais, o produto de dois números é maior que cada um dos fatores e se dividirmos um número a por um número b, sendo o número a maior que b, o quociente é sempre um número menor". Todavia, mesmo que a criança tenha aprendido bem esta regra da aritmética dos números naturais, encontrará um obstáculo na hora de efetuar multiplicações e divisões com números inferiores a unidade.

Para a Educação Matemática, entendemos que seja mais comum no plano pedagógico a existência de obstáculos didáticos. Neste sentido, antes de apresentarmos alguma consideração sobre os obstáculos didáticos, é importante destacar que para Brousseau (1983, p. 51-52), o aprendizado é uma adaptação do aluno a uma nova situação problema, sendo que as dificuldades que os alunos encontrarão durante a resolução destas situações, serão um estágio necessário para provocar esta adaptação. Todavia, em decorrência da maneira da organização e da transmissão do saber apresentada pelo professor, poderão ocorrer os obstáculos didáticos, decorrentes do projeto educacional escolhido pelo professor.

Os obstáculos didáticos podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar tendo em vista que os conhecimentos podem se encontrar relativamente estabilizados no plano intelectual do aluno e a proposta didática que o professor escolhe para conduzir o ensino, poderá implicar em dificuldades para o aluno, ou seja, criar obstáculos didáticos. É preciso esclarecer que Brousseau (1983, p. 164-198), apresentou três origens para os obstáculos epistemológicos: origem ontogenética, relacionada às limitações do sujeito em um determinado momento de seu desenvolvimento; origem didática, relacionados às escolhas do professor num projeto educativo; e de origem propriamente epistemológica, que estão relacionados em decorrência da forma de constituição do conhecimento matemático na história, ou seja, se identificariam como obstáculos históricos.

Podemos tomar como exemplo de obstáculo didático, a resistência que as crianças apresentam para compreender que na divisão de um número inteiro por um número racional menor que 1, o resultado encontrado é maior que o dividendo. Isto se dá devido ao fato de que ela aprende primeiramente que, na divisão dos números naturais, o resultado será sempre menor que o dividendo. Segundo Pais (2001, p. 46), "é preciso entender como ocorre a reorganização intelectual de modo que o novo conhecimento entre em harmonia com os anteriores, sendo esse o momento em que os obstáculos se manifestam".

O aluno, ao se deparar com um novo conhecimento, cria um conflito interno em busca de uma solução, se o fenômeno não proporciona esta solução direta e imediata chegará a um obstáculo que, conseqüentemente, o levará ao erro. Percebemos também que a generalização precipitada de um conceito, no âmbito escolar, poderá se constituir em um obstáculo à aprendizagem.

Assim como na ciência, os erros dos alunos merecem a atenção de nossos docentes. Para Brandt (1997, p. 160), os erros dos alunos em Matemática podem e devem ser elementos de organização e orientação da prática educativa, pois revelam os elementos a serem considerados em cada situação de sala de aula, com cada grupo de alunos, ou com um aluno em particular e a cada conceito matemático com as suas especificidades.

Portanto, os termos apresentados estão intimamente relacionados entre si, principalmente no que tange à Educação Matemática. Não se deve tratar, deste modo, as dificuldades, os conflitos, os obstáculos e os erros da mesma forma, sendo importante a busca de suas origens. Cabe ao educador matemático reformular a sua prática educativa, na busca de um diagnóstico que possa indicar de que ponto processo deva ser retomado.

Então, é preciso que passemos a nos preocupar mais com os erros dos alunos, pois, a partir destes erros, aprenderemos lições importantes que nos ajudarão a construir uma base sólida de informações que indicarão como acontece a aprendizagem. Conseqüentemente, estas informações poderão também, oferecer uma importante ferramenta para o trabalho do professor.

4.2 A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E OS ERROS

A pesquisa em Educação Matemática, ainda pode ser considerada como um campo de estudos bem recente, e não podemos confundir este campo de estudos com a matemática, cuja história remonta à pré-história do homem.

Fiorentini (2001, p. 6) afirma que é muito comum o professor de Matemática ser confundido com o matemático, porém estes dois campos do saber possuem muitas diferenças entre si, como: o objeto de estudo, os métodos de pesquisa, atividades profissionais, dentre outros.

> Acresce-se a estas diferenças o fato da matemática ser uma ciência milenar, sendo estruturada em bases lógicas bem definidas, enquanto que a Educação Matemática é uma área de estudos recém-nascida, não possuindo uma metodologia única de investigação nem uma teoria claramente configurada.

A pesquisa em Educação Matemática pode abranger diversas alternativas, tanto no campo profissional quanto na área de conhecimento. A análise de erros está entre os focos temáticos em que a Educação Matemática vem se preocupando em suas pesquisas. Segundo Pinto (2000, p. 29), o estudo dos erros ocorreu inicialmente na Alemanha e na União Soviética, a partir de começo do século XX. Também no início do século XX, a revolução behaviorista, lançada por Watson nos Estados Unidos, teve implicações nos estudos de erros de Matemática.

> A análise de erros é uma abordagem de pesquisa em Educação Matemática que vem sofrendo influências das teorias vigentes, em diferentes épocas, tanto na Pedagogia, quanto na Psicologia. No início do século XX, Watson lança nos Estados Unidos, a revolução behaviorista, afirmando que a psicologia é uma ciência objetiva, e que seu tema é o estudo da conduta observável. Inseridas nesse paradigma, estão as idéias de Thorndike sobre a associação entre estímulo e resposta. Em 'Psychology of Arithmetic', ele sugere que a missão dos professores é selecionar vínculos estímulo-resposta que permitam aos alunos efetuarem cálculos e resolverem problemas (CURY, 1995, p.4).

Popper (1982) afirma que podemos aprender com os erros que cometemos, e esta afirmação é aceita por vários pesquisadores do assunto como: Centeno (1988), Luckesi (1995), La Taille (1997), Aquino (1997), Pinto (2000), Cury (2001), entre outros que vêm se interessando pelo estudo do erro, nos últimos anos.

Os conceitos oriundos da Didática da Matemática Francesa que estão relacionados com o estudo de erros vêm exercendo grande influência no campo da Educação Matemática, contribuindo especialmente para o avanço do processo de ensino e da aprendizagem de Matemática. Termos como: obstáculo epistemológico (Bachelard/1938), obstáculo didático, teoria das situações didáticas (Brousseau/1998), campo conceitual (Vergnaud/1996), transposição didática (Chevallard/1991), entre outros, poderão apresentar melhores condições de esclarecimento sobre os erros e sua superação.

Como já foi comentado anteriormente, na didática da Matemática francesa, um dos pioneiros no estudo dos erros foi Brousseau, que durante uma conferência, em 1976, no XXVIII Encontro do CIEAEM (Comissão Internacional para o Estudo e Melhoria do Ensino da Matemática) , fala sobre os obstáculos epistemológicos e os erros cometidos pelos estudantes.

A observação de erros praticado por alunos da Educação Superior, com relação aos números racionais em sua forma decimal e fracionária, foi feita numa pesquisa diagnóstica desenvolvida por Igliori e Silva (1999, p. 102). Foram observados alguns aspectos apontados por Brousseau e reforçados por Duroux como, por exemplo, a incapacidade de encontrar um número decimal entre 3,25 e 3,26. O estudante diz, nesta pesquisa, que o "sucessor" de 3,14 é 3,15, numa nítida transposição do conceito de sucessor existente no contexto dos números naturais e transposto para os números decimais. Outro aspecto é a concepção que multiplicar sempre aumenta e dividir sempre diminui.

Pinto (2000, p. 127), refere-se também aos erros de números racionais e apresenta o fato de que erros conceituais podem vir a se transformar em erros sistemáticos, que serão mais difíceis de serem superados, em:

> 2,5 pode ser escrito sob a forma de 25/10, que equivale a 5/2. Entretanto, essa regra não pode ser generalizada. Há um obstáculo epistemológico, decorrente da ampliação dos números naturais para o conjunto dos números racionais que implica erros sistemáticos. Note-se que um erro conceitual transformou-se em erro sistemático.

O diagnóstico do erro que se torna repetitivo e persistente, sugere ao professor que encontre uma proposta que possibilite o trabalho pedagógico, permitindo a sua superação, antes que esses erros se tornem sistemáticos. Em relação aos erros de números racionais, Centeno (1988, p.135) nos fala sobre à importância de "... diagnosticar suas causas e elaborar novas estratégias didáticas que provoquem no aluno a progressão na compreensão deste conceito, ao mesmo tempo em que se faça a correção material destes indícios de incompreensão que são os erros repetidos e persistentes".

A identificação de qual é a concepção do erro aceita pelo professor é um importante material para a reflexão sobre qual poderá ser a melhor proposta pedagógica, permitindo ao aluno a transposição dos conteúdos e informações estudados na escola para o seu cotidiano. Observamos em Cury (1994, p.19-22) que boa parte das concepções dos professores sobre a Matemática e sobre o ensino desta disciplina estavam influenciando sua maneira de avaliar os erros, e que a conscientização dessas concepções, por parte dos professores, poderia ser um fator de mudança em suas práticas docentes.

Neste sentido, os cursos de formação de professores deveriam enfatizar não só a aquisição de conhecimentos matemáticos, mas também a possibilidade de desenvolver experiências de ensino, em que as crenças destes futuros mestres viessem à tona e pudessem ser discutidas.

Entendemos que o ensino de Matemática não pode permanecer somente sob o enfoque tradicionalista, é necessária a superação deste ensino, que sempre incentivou a repetição pela repetição, sem a preocupação com o sujeito que aprende. O aluno deve ter a liberdade de errar, deve ser criativo, para tanto é necessário que o ensino se reestruture em busca do aprendizado do aluno, assim concordamos com Freire (2000, p. 100-101), que nos diz que:

> Uma educação em que a liberdade de criar seja viável necessariamente tem de estimular a superação do medo da aventura responsável, tem de ir mais além do gosto medíocre da repetição pela repetição, tem de tornar evidente aos educandos que errar não é pecado mas um momento normal do processo gnosiológico. ... é fundamental que o educando experimente sempre situações em que termine por incorporar a seu saber constituindo-se ao saber de que errar é momento do processo de conhecer. A necessidade de superar o erro, que nos deve tornar mais rigorosos na *aproximação metódica* ao objeto para apreender sua razão de ser, não nos deve inibir como se, cair nele fosse um pecado por causa do qual devêssemos ser punidos. A melhor maneira de evitar o erro é não ter medo de nele incorrer, mas, tornando-nos cada vez mais criticamente curiosos, exercitar nossa rigorosidade no processo que venho chamando "cerco epistemológico" do objeto, de que resulta o seu conhecimento cabal.

Autores como Macedo (1994) e Pinto (2000), sugerem que o Construtivismo utilizado no ensino pode ser uma opção que melhor contemplará a utilização do erro como estratégia didática. Macedo (1994) afirma que no construtivismo "o erro é colocado numa posição de destaque, não para ser condenado, mas para ser utilizado como importante mediador da aprendizagem". Pinto (2000, p.139) também compartilha desta tese, partindo da premissa de que o erro, concebido numa dimensão construtivista, configura-se como uma oportunidade didática para o professor.

A utilização dos erros poderá ser uma estratégia de reorganização do saber para que se chegue a uma aprendizagem significativa. Pois para que aconteça a aprendizagem, o aluno passará por um processo no qual os erros surgirão na medida em que ele não tenha as respostas para os problemas encontrados. Para Teixeira (2002, p. 200) o erro pode ser interpretado como " constitutivo do processo da aquisição e consolidação do conhecimento humano" expressando o caráter incompleto do conhecimento do aluno. Rosa (1995, p. 48) observa que o caminho para a aprendizagem:

> Começa com uma dificuldade (problema) e com a necessidade de resolvê-la. Da percepção das insuficiências de respostas do próprio sujeito, desencadeia-se um movimento de busca de novas soluções (conflito cognitivo) no mundo externo. A partir daí entram em ação uma série de operações mentais que visam voltar ao estado de equilíbrio (conhecimento), nas quais hipóteses são formadas, testadas e revisadas tantas vezes quantas necessárias até o entendimento.

Todavia, é muito comum que o professor em sua prática pedagógica, a partir do erro, busque uma solução rápida para o seu problema utilizando-se de técnicas de memorização com seus alunos. Segundo Pinto (2000, p. 142), "o professor tende a agir sobre os erros a partir de perspectiva empirista, isto é, corretiva, aliando a institucionalização primitiva a remediação".

Tal procedimento do professor faz com que o aluno passe do erro para o acerto, porém este acerto não apresenta nenhum significado para o aluno, e na continuidade este continuará cometendo os mesmos erros do passado. Sobre este assunto, Centeno (1988, p. 153) salienta que os "saberes teóricos que não se sabe aplicar não servem muito, pois uma prática que não se sabe justificar conduz a aprendizagem por condicionamento que se converterá em verdadeiros obstáculos nas etapas seguintes".

A autora (op.cit., p. 151) acredita ser de fundamental importância que o aluno saiba diferenciar a teoria dos números naturais e a teoria dos números racionais, tendo em vista que este poderá ser um fator que conduzirá os alunos ao erro:

> Os momentos mais delicados na articulação do ensino são aqueles em que as propriedades dos números como das operações com números naturais não podem extender-se aos números decimais. Temos visto que, são precisamente estas ocasiões que provocam mais erros e constituem em obstáculos que são necessários superar-se, o que se deseja é que o conhecimento significativo se instale nas crianças.

Outra questão a ser considerada é a diferenciação da análise dos erros com relação às dificuldades, obstáculos e conflitos, presentes no processo de aprendizagem. Conforme Centeno (op. cit., p. 147), "as dificuldades, obstáculos e conflitos podem também produzir erros. Porém, não devemos tratar todos da mesma forma, sem buscar as causas de onde procedem".

O professor deve ultrapassar o seu papel de mero transmissor de informações, para uma proposta pedagógica, em que o compromisso com a qualidade do que se ensina aos alunos seja uma constante. Conforme Pinto (2000, p. 151), "se o professor compreender por que o aluno erra, poderá planejar um ensino eficaz".

Os estudos no campo da Educação Matemática precisam oferecer alternativas para a utilização do erro como instrumento que possa facilitar a observação das dificuldades dos alunos na compreensão da matéria e sugerir aos docentes alternativas de novas propostas didáticas a partir destas reflexões.

A escola não deve ser um espaço de amarguras e traumas, mas sim um local onde o aluno tenha o prazer de aprender e que o professor seja mais do que um simples transmissor de informações e passe a ser um colaborador da aprendizagem dos estudantes. Possivelmente, não será apenas através de mudanças em nossas práticas pedagógicas que estaremos dando uma solução final ao fracasso com relação ao ensino da Matemática, mas existem boas chances de uma visão mais positiva com relação ao ensino desta disciplina.

4.3 O DIAGNÓSTICO DOS ERROS

Não é nem um pouco incomum o temor apresentado pelos alunos quando estes precisam se submeter às provas. Para eles, a avaliação é considerada como um instrumento de poder do professor frente à fragilidade do aluno, sendo que estas questões já foram tratadas por diversos autores como: Luckesi (1995), Aquino (1997), André e Passos (1997), entre outros. A justificativa mais comum entre os docentes é que a avaliação é um instrumento utilizado para aprovar ou reprovar os alunos, ou ainda, uma ferramenta para observação dos avanços ou das dificuldades dos alunos.

André (1997, p.112) afirma que a avaliação baseia-se quase que exclusivamente no resultado das provas, e que a prova é usada para ameaçar e punir os alunos, nesta situação o erro jamais é explorado no sentido construtivo. Luckesi (1995, p. 34) vai além ao afirmar que as avaliações têm assumido uma função meramente classificatória, confirmando quem é bom ou mau aluno.

O papel das avaliações escolares, segundo André (1997, p. 113) vem revelando que estas servem somente para o fortalecimento das desigualdades sociais e escolares. Os alunos, desde as primeiras séries, aprendem a se comparar e se situar frente às normas estabelecidas pela escola. Segundo Luckesi (1995, p. 35), a avaliação de caráter classificatório não auxilia em nada o avanço e o crescimento do aluno. Já a avaliação de caráter diagnóstico constitui-se num momento dialético do processo de avançar na autonomia do aprendizado do aluno. Matui (1995, p. 227), afirma que a avaliação de julgamento terminal e classificatório é uma forma eficiente de fazer desta um instrumento contrário à democratização do ensino, posto que a mesma não serve para mediar a construção e organização do conhecimento.

A avaliação como prática pedagógica não pode contemplar apenas a aferição das notas dos alunos, mas sim deve ser um instrumento na tomada de decisão no processo pedagógico, indicando o que fazer quando a aprendizagem do aluno se manifesta insatisfatória.

A avaliação mediadora busca as oportunidades de ação-reflexão do professor, contempla o acompanhamento contínuo por parte do professor, desafia o aluno a novas questões a partir das respostas formuladas, busca incessantemente a compreensão das dificuldades do educando, além de procurar compreender o processo de cognição do aluno.

Nessa perspectiva, a observação e a compreensão dos erros na prática escolar podem revelar que o aluno ainda não alcançou o nível de aprendizagem mínimo necessário à continuidade de seus conhecimentos. O aluno, nessas condições, receberia um tratamento adicional até atingir este nível mínimo necessário, encorajando-o a reorganizar o saber.

4.4 OS ERROS NO CONTEXTO DOS NÚMEROS RACIONAS

Não é difícil encontrarmos situações em que os docentes estão reunidos, comentando sobre a dificuldade que seus alunos possuem com relação à aprendizagem dos números racionais. Tal fato também é relatado por autores como Brousseau (1983), Carraher (1989), Pinto (2000) entre outros, que confirmam a dificuldade dos alunos na aquisição e no domínio do conceito de números racionais. Este conceito é apresentado aos alunos, primeiramente, na 2ª série do ensino elementar, ou seja, aos oito anos de idade, e continuam a ser aplicados em seus programas de ensino até que atinjam o domínio destes números aos treze ou quatorze anos de idade. Centeno (1988, p. 135), nos alerta que algumas das dificuldades com relação aos números racionais poderão persistir até os dezessete anos ou mais, em alguns casos.

Os PCNs (1998, p. 101) oferecem uma possível explicação para as dificuldades com relação à aprendizagem dos números racionais. De acordo com este documento, as dificuldades encontradas devem-se ao fato de que os números racionais supõe rupturas com idéias construídas para os números naturais. Quando os alunos trabalham com os números racionais acabam tendo que enfrentar vários obstáculos, como:

Nas Frações:

- Cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, 1/3, 2/6 , 3/9, 4/12, ... são diferentes representações de um mesmo número;
- A comparação entre racionais: acostumados com a relação 3 > 2, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, 1/3 < 1/2;
- Se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por 1/2 se surpreenderão ao ver que o resultado é menor que 10;
- Cada parte destacada não é o todo.

Nos Decimais

- Se o tamanho da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza (8345 > 83), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece o mesmo critério;
- Se a seqüência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87. (PCN, 1998, p. 101)

Se as dificuldades que os alunos enfrentam com relação aos conceitos dos números racionais são muitas, procuraremos então, melhor compreender como ocorre a progressão deste conceito a partir dos estudos realizados por Centeno (1988, p. 136-138) no que se refere aos erros cometidos pelos alunos com relação ao processo de aprendizagem dos números decimais.

- **Erros relacionados com a leitura e a escrita dos números (valor de posição)**: Quando perguntamos aos alunos sobre qual dos seguintes números (0,037; 0,37; 37000) é igual a 37 milésimos, 88% das crianças de nove anos e 40% dos alunos de treze anos respondem 37000.
- **Erros relacionados com o zero**: Alguns alunos ignoram o zero e interpretam 0,036 como 36. Consideram também que 1,27 é diferente de 1,270.
- **Erros relacionados com a ordem entre decimais**: Pedimos para que os alunos ordenassem os seguintes números: 4,5; 4,15 ; 4,05 em ordem crescente. A resposta mais freqüente é que 4,05 é menor que 4,5 que por sua vez é menor que 4,15. Os números decimais são ordenados como iguais aos inteiros e ordenados por critérios que em alguns casos podem dar respostas corretas. Outra pergunta feita foi: Qual é o maior dos números 0,09; 0,385 ; 0,3 ; 0,1814? A resposta mais freqüente é 0,1814.
- **Erros relacionados com as operações:** Estes erros merecem uma especial atenção do professor:

a) 0,70+0,40+0,20= 0,130
b) 3,15 X 10 = 30,150
c) 2,3 X 2,3 = 4,9
d) 4 x 2,3 = 8,12

Os resultados apresentados não estão muito distantes dos que muitos docentes verificam em suas rotinas diárias de sala de aula. Estas respostas revelam que muitos dos alunos podem estar utilizando as mesmas regras dos números naturais para os números racionais. Os erros mais comuns que os alunos apresentaram estão relacionados, de uma certa maneira, à compreensão dos números naturais sendo as suas regras estendidas também para os números racionais.

Os trabalhos de Brown (apud. Centeno, 1988, p. 138) determinam 6 níveis de compreensão do tema: “lugar de posição e números decimais”, a partir dos erros e das respostas corretas obtidas em diversos testes escritos. Dos testes se obteve um conjunto de questões que permitiram identificar um grupo relativamente homogêneo, por um procedimento que permite agrupar os alunos segundo um nível de facilidade ou de dificuldade. Os níveis obtidos foram os seguintes:

- Nível 1: Valor posicional de números inteiros maiores que 1000. Questões típicas deste nível: Indique um número entre 4.100 e 4.200. Este número é ____
- Nível 2: Decimais e décimas. Questões típicas deste nível: Indique o maior número entre 4,06 e 4,5. Este número é ____
- Nível 3: Decimais, centésimas e milésimas. Questões típicas deste nível: Escreva um número entre 0,41 e 0,42. Este número é ____
- Nível 4: Decimais, relação com lugares a esquerda. Questões típicas deste nível: Multiplique 5,13 por dez. Este número é ____
- Nível 5: Relações mais complexas de posição. Questões típicas deste nível: Divida 3,7 por uma centésima. Este número é ____
- Nível 6: Decimais como resultado de uma divisão. Número infinito de decimais. Questões típicas deste nível: Quantos números podem escrever entre 0,41 e 0,42?

Brown (apud Centeno, 1988) e sua equipe chegaram a partir destes estudos as seguintes conclusões:

1) 50% dos alunos de quinze anos têm um conhecimento razoável, mas não completo do assunto, enquanto o 50% restantes apresentam consideráveis lacunas.
2) Existe uma dificuldade significativa na compreensão das centésimas, que faz pensar que muitos alunos necessitam de modelos visuais de décimas, centésimas, etc.

As conclusões deste trabalho destacam a necessidade que o professor tem em fazer um diagnóstico esmerado dos erros verificados nas questões estudadas, para que seja possível identificar o grau de facilidade ou de dificuldade de cada um dos aspectos do conceito, e de como ocorre o progresso de cada indivíduo nas questões apresentadas e em outras similares.

Segundo Pinto (2000, p. 147), "o que estaria impedindo o aluno de se desfazer de muitos erros de matemática, sistemáticos e até mesmo conceituais, que ele carrega ao longo de sua vida escolar?". Uma das respostas que poderíamos oferecer a esta pergunta está intimamente relacionada à maneira como o professor conduz a sua prática pedagógica.

Para Centeno (1988, p. 140), os erros que se reproduzem sistematicamente são muito interessantes porque nos revelam a existência de modelos errôneos implícitos. Estes exemplos oferecem uma pista de muitos mal entendidos que se instalam e se consolidam no raciocínio dos alunos. Quando o professor não conhece os modelos errôneos dos alunos, dificilmente poderá criar condições necessárias para provocar o progresso e a reorganização das idéias.

Os conhecimentos insuficientes devem ser considerados como uma etapa necessária para o progresso do conhecimento, e de grande utilidade para o professor. Mesquida (2000, p. 83), salienta que a escola deve possibilitar à criança atividades que exijam tanto o raciocínio quanto a ação concreta, eliminando a transmissão do conhecimento através da simples memorização. Através de atividades apropriadas ao estágio de desenvolvimento da criança, mas em níveis de dificuldade cada vez maiores, deve-se oferecer à criança a oportunidade para que ela utilize o conhecimento até então adquirido para construir conhecimento novo. Durante a construção de novos conhecimentos será inevitável que ocorram erros, pois segundo Macedo (1994, p. 69), no construtivismo o erro é possível, ou até necessário, isto é, faz parte do processo.

É importante ressaltar que os autores citados anteriormente não querem dizer que o professor deva provocar os erros, nem mesmo que ele deverá assumir uma postura permissiva em relação aos erros e excluir qualquer tentativa de correção. A proposta é a da melhoria dos conhecimentos, conforme Macedo (op. cit., p. 64) todos nós erramos algumas vezes e, no processo de desenvolvimento, o que interessa é que façamos uma revisão constante das nossas teorias, idéias e pensamentos.

Para Centeno (1988, p. 141), na tendência de ensino tradicional, quando o aluno comete um erro é penalizado pelos seus professores. Porém se ele não entendeu o que aconteceu, não pode ter uma atitude reflexiva sobre a atividade. Isto pode lhe conduzir a elaborar hábitos que funcionam como reflexos condicionados, nos quais não existe a possibilidade de compreensão de qual é a informação a ser corrigida. Diante desta situação, o aluno desenvolve uma postura de ocultação de suas falhas, e na continuidade estes podem permitir a ocorrência de outros erros.

Brousseau (apud Pais, 2001, p. 69), utiliza a noção de aprendizagem por adaptação, no qual o aluno é desafiado a adaptar seus conhecimentos anteriores às condições de solução de um novo problema. Nesta aprendizagem o aluno precisa ultrapassar o seu próprio nível de conhecimento, revelando a operacionalidade dos conteúdos dominados até então.

Dentro deste contexto, podemos conseguir que os erros atuem com um importante papel, funcionando como uma mola propulsora para a ação e a reflexão de um aluno que fracassou em um determinado problema, passando para a análise de seu fracasso, considerando sua estratégia e retornando a ação para ver porque não se saiu bem, e poder retificar o seu modo de fazer. Ao final deste processo o aluno verificará que foi o protagonista de sua própria aprendizagem.

Segundo Pinto (2000, p. 149), na abordagem Piagetiana, a aprendizagem da Matemática ocorre por reestruturações sucessivas, sendo que as representações iniciais das crianças devem evoluir para outras mais diferenciadas. Nesta concepção, o que faz a criança avançar é quando ela se percebe em uma situação de contradição. A partir daí, ela toma consciência dos modos distintos de interpretar a realidade; passando por um “conflito cognitivo”.

Centeno (1988, p. 141) também se refere ao ensino pelo método do conflito, em que o professor deverá provocar nos alunos reflexões e debates sobre os erros dos alunos ou sobre lacunas de conhecimento sobre um conteúdo em específico. Malcolm Swan (apud. Centeno, 1988, p. 141), enumera quatro fases necessárias para as aulas que utilizem este método:

- Deve-se oferecer aos alunos uma tarefa oral ou escrita (tomando-se como base os erros encontrados em avaliações anteriores).
- Num segundo momento volta-se a propor a mesma tarefa, porém desta vez os alunos deverão utilizar ao menos uma das alternativas que foram propostas pelo professor.
- Na seqüência, provoca-se uma reflexão e um debate em que se faz referência sobre a inadequação de algumas respostas, e se reconhece a necessidade de novos métodos ou de novos conceitos. Nestes debates deve-se propor que o aluno resolva exercícios que já foram resolvidos por outros alunos que cometeram erros, sendo que o aluno que está resolvendo o exercício já deve ter superado este tipo de erro.
- Na quarta fase, se reforçam os conceitos corretos, utilizando-o corretamente. Ao final, os alunos propõem exercícios imaginários e diagnosticam eles mesmos os erros.

De acordo com Centeno (1988, p. 142), os autores deste trabalho afirmam que o método do conflito foi o mais significativo para corrigir as incompreensões e os erros. Concluem ainda que o ensino utilizando o método do conflito permite uma compreensão mais profunda dos conceitos, contudo exige mais esforço por parte dos professores. Conforme Pinto (2000, p. 149), a incorporação de novos conhecimentos para ensinar e aprender matemática não se faz de forma linear, sendo preciso que alguns conflitos sejam incorporados ao ato de ensinar, visando um redimensionamento da prática docente.

O professor deve estar preparado para enfrentar novas situações em seu cotidiano, para Perrenoud (2001, p. 12) um professor deverá ser capaz de: analisar situações complexas; optar de maneira rápida e refletida por estratégias adaptadas aos objetivos em função da experiência, analisar de maneira crítica suas ações e seus resultados, enfim aprender por meio dessa avaliação contínua ao longo de sua carreira.

O exercício do magistério é uma atividade de coragem, na qual o professor deve, constantemente, estar preparado para escolher novos rumos durante o processo. É necessário ressaltar que os professores devem ter consciência de que o processo do conhecimento não deverá ser acelerado, pois neste caso estaremos privando os alunos da alegria de poder descobrir e conhecer.

Os saberes pedagógicos dos professores devem ir além do simples domínio da matéria a ser ensinada, Baillauquês (2001, p. 45) afirma que "a formação do professor deverá ser definida a partir de um conjunto de questionamentos, de adesões e de obstáculos, de compromisso com renúncias, de formalizações, no sentido de alianças e de adesão a novas idéias, saberes e novas ilusões". Sob esta perspectiva, destacamos algumas reflexões didáticas sobre as origens dos erros, segundo Centeno (1988, p. 142):

→ É necessário que os alunos dominem a escrita decimal para os números maiores que a unidade para só depois poder estendê-la aos números inferiores a 1.

→ A origem de alguns erros podem estar associada à maneira como foi apresentada a definição dos números fracionários e decimais. Ou seja, a introdução desses números deve ser feita de forma que os alunos percebam estes números como novos números, com algumas propriedades distintas dos números naturais, caso contrário podemos ocasionar obstáculos epistemológicos que estarão associados ao conceito.

→ É importante que o professor conheça qual é o significado que os alunos dão às operações por eles realizadas, pois estes podem estar fabricando regras de ação que nem sempre os levarão às respostas corretas.

→ Outra causa dos erros pode ser a ausência de situações significativas entre os números fracionários e decimais e a realidade dos alunos. Quando os alunos encontram um resultado para as operações com estes números, são incapazes de comparar este resultado com a realidade que lhes permitiria a correção de seus erros.

Outra dificuldade constatada por Pinto (2000, p. 137), é o fato de ser comum os manuais didáticos apresentarem os números decimais como um conceito diferente do de fração, sobrevalorizando apenas a distinção entre fração e número decimal a partir da questão da vírgula. Quando dizemos para um aluno que (1/10) "um décimo" é o mesmo que (0,1) "zero vírgula um" estamos evidenciando somente a representação gráfica destes números sem ressaltar ao aluno que na verdade são números que representam a mesma coisa.

Uma questão que deve ser analisada na prática docente, com relação aos números racionais, é a necessidade de fazer com que os alunos desenvolvam cálculos de dividir com os números fracionários e decimais, sempre comparando os resultados obtidos. E, na medida do possível, procurar evidenciar se estas operações terão alguma aplicação prática na vida dos alunos que justifiquem esta atividade. Seria também interessante empregar nas aulas circunstâncias que tenham significado prático em seus cotidianos.

Hoje já existem livros didáticos que oferecem casos em que os números fracionários e decimais são contextualizados com algumas situações do dia-a-dia dos alunos, revelando a importância na maneira de organizar as ocorrências de aprendizagem destes números. Normalmente, os números decimais são vinculados a uma relação de medida, mas existem outros significados relacionados a estes números que podem ser utilizados, como: as razões, as magnitudes, o dinheiro, entre outras.

Centeno (1988, p. 151/153), explica que os alunos devem resolver problemas que sejam devidamente articulados, caso contrário, eles não compreenderão o que fizeram. Os saberes teóricos que não se sabe aplicar não servem para nada, porém uma prática que não se sabe justificar conduz à aprendizagem por condicionamento, que se converterá em verdadeiros obstáculos nas etapas seguintes.

Portanto, é preciso que os professores apresentem um ensino que seja capaz de articular o conhecimento adquirido na escola com situações específicas em que o aluno já tenha contato. Para uma proposta pedagógica mais eficiente do processo de ensino e aprendizagem dos números racionais, Brousseau (1983, p.183) desenvolveu e propôs um processo de articulação destes conteúdos para uma melhor prática didática dos docentes de matemática.

Nesta proposta, o autor buscou a construção dos números racionais como números novos, sendo utilizados para medir diversas magnitudes. Os alunos inventam os racionais a partir do cociente de um conjunto de números naturais, por exemplo: os alunos devem medir a espessura de uma folha de papel, na seqüência o professor deve propor a subtração, a soma, a multiplicação e a divisão destes números pelos números naturais.

Os primeiros números que os alunos vão utilizar em situação de medida em que os inteiros não são suficientes, são provenientes das subdivisões da unidade de medida: 1/2 , 1/4 ,1/8... Depois, vão se ampliando as frações utilizadas, mediante subdivisões sucessivas: 1/3 ,1/6 ,1/12,..... 1/5 ,1/10,1/15 e assim sucessivamente. São inventadas muitas frações do tipo (p/q) nos cálculos.

À medida que vão aparecendo novas frações, passa-se a utilizá-las em situações diferentes daquelas em que haviam aparecido. Desta forma as frações vão adquirindo, pouco a pouco, a condição de número, além de as novas frações permitirem aos alunos a produção de novas estruturas que poderão ser utilizados em novos problemas. A partir deste momento, as frações são reconhecidas como números novos que contém os naturais, mas com algumas propriedades diferentes.

Posteriormente, os números decimais aparecem a partir das frações decimais, configurando-se como mais uma forma dos números racionais. Por razão de eficácia, os alunos elegem as frações decimais entre as frações racionais, porque permite fazer cálculos com maior rapidez, além de oferecer uma representação mais confortável das medidas. Neste ponto, o objetivo é a utilização dos números decimais e, posteriormente, a identificação de que nem todo o número racional pode ser escrito como número decimal, sendo que em alguns casos somente aproximações são possíveis. Este método está concebido de tal forma que o processo não se modifica. Os alunos não aprendem a utilizar os decimais somente para fazer medidas, mas também para fazer operações.

Douady (apud. Centeno, 1988, p. 157) propõe outra maneira de articular o ensino dos números decimais. A autora sugere que se apresente aos alunos situações-problema em que os números naturais sejam insuficientes para propor uma solução, e onde os números decimais apontem uma solução aproximada.

Desta forma se enriquece o conjunto dos números disponíveis. Como exemplo relacionado ao nosso cotidiano, temos: o preço pago por uma mercadoria em função da massa; consumo de gasolina em função da distância percorrida; distância percorrida em função do tempo em movimento uniforme; relações entre perímetro e área de um retângulo.

As representações gráficas proporcionam um vasto campo para a utilização dos números racionais, como por exemplo: a busca de retângulos que tem uma dimensão fixa a partir do cálculo da área e do perímetro. Busca de um retângulo que tem perímetro fixo a partir do cálculo da área, através de aproximações decimais e fracionárias. A partir desta metodologia, as operações com os números racionais são feitas quando se tem necessidade delas e quando os resultados têm um significado para os alunos. As mecanizações e os algoritmos somente serão apresentados aos alunos depois de já ter o significado destas operações bem consolidado, e mais precisamente a partir do momento em que os alunos necessitem de algo que permita com que os cálculos possam ser feitos mais depressa.

Qualquer que seja a forma de introduzir a numeração racional é preciso que se tenha a atenção especial para a utilização de técnicas e que se planeje o tempo suficiente para que os alunos possam compreender este conteúdo.

Nos tópicos anteriores, falou-se sobre os números racionais, sobre a educação matemática e sobre o erro. Estaremos agora, aprofundando algumas propostas construtivistas para que possamos melhor embasar algumas situações didáticas que podem ajudar a compor o conhecimento sobre os números racionais.

4.5 UMA PROPOSTA CONSTRUTIVISTA PARA O ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS

Na proposta construtivista, os erros são tomados como meio de construção dos conhecimentos e não como faltas gravíssimas para condenar os alunos. Para Macedo (1994, p. 67), no construtivismo o problema é o da invenção e da descoberta, em que erro e acerto são inevitáveis, fazendo parte do processo e, podendo ser analisados sob diferentes ângulos. Macedo (op.cit., p. 75) afirma que não se trata de negar ou de justificar os erros, nem mesmo de evitá-los por meio de punições, mas sim de problematizá-los transformando-os em uma situação de aprendizagem.

O momento que o ensino atual está enfrentando é o da passagem da informação para a compreensão/aplicação dos conhecimentos. É a busca da superação da mera reprodução para se chegar a provocar professor e aluno na reorganização dos conhecimentos. O professor deve auxiliar os alunos a localizar suas dificuldades e, a partir daí, oferecer-lhes oportunidades e descoberta de melhores soluções.

A proposta do construtivismo é a de passar da ação para a conceituação. Segundo Mesquida (2000, p. 84), a versão Piagetiana de ensino consiste em apresentar problemas de modo que o aluno possa construir ou reconstruir os saberes escolares, e estimular na criança a sua própria capacidade de problematizar situações novas e, através da ação, buscar a solução.

Para Gadotti (2000, p. 119), o ensino das ciências pode ser emancipatório e formar para a cidadania, dependendo dos temas e da metodologia escolhidos; sendo que estes devem partir do cotidiano do aluno. Esta deve ser a nova perspectiva que o ensino da matemática precisa considerar a partir deste novo milênio: a preparação do aluno para a emancipação.

Rosa (1996, p. 52), enfatiza que para que o professor possa trabalhar com questões que sejam desafiadoras, ele precisa dominar os conteúdos, além de conhecer o desenvolvimento cognitivo dos alunos a fim de que os desafios propostos não se tornem fonte de frustração pela impossibilidade de resolvê-los.

Para a autora (op. cit., p. 44), na perspectiva construtivista, o aluno é o centro do pólo de aprendizagem, e deve estar constantemente mobilizado para pensar e construir seu próprio conhecimento. Para que seja possível o trabalho baseado na teoria construtivista, é condição fundamental proporcionar aos alunos um ambiente de liberdade (sem confundir com falta de direção das aulas), de modo que os alunos possam se expressar e dirigir suas ações de acordo com seus interesses.

Ainda segundo a autora (op. cit., p.52), vale salientar que nesta teoria existe uma grande mudança quanto à avaliação, pois os erros deixam de ser instrumentos de poder sobre os alunos, passando a se constituir em subsídios de grande riqueza para orientar a ação em sala de aula. Dentro da visão construtivista de ensino, errar é um direito do aluno, mas compete ao professor fazer com que o aluno tome consciência dos erros cometidos.

O procedimento construtivista deve encorajar o aluno a aprender, neste sentido torna-se necessária a avaliação contínua do aluno, o qual merece ser visto e tratado como um ser único. O professor deve ter sempre em vista o aspecto de mediador da aprendizagem, ajudando o aluno no seu raciocínio e estimulando seu pensamento com foco no desenvolvimento futuro.

Podemos dizer que a maneira como se ensina o conceito dos números racionais, é de suma importância para que o aluno consiga compreender o significado de cada uma de suas representações. Assim, quando existe a possibilidade do diagnóstico do erro cometido pelo estudante, podemos propor novas estratégias didáticas que possibilitem a assimilação deste conhecimento. É importante ressaltar que estas alternativas tem a possibilidade de serem utilizadas antes mesmo da observação dos erros.

5. ASPECTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Para a consecução do presente estudo, optamos pela abordagem qualitativa de pesquisa, por entendermos que a partir da qualidade de informações obtidas nos seria possível a compreensão mais ampla do fenômeno a ser investigado. Segundo Duarte (2002, p. 141), uma pesquisa é sempre, "um relato de longa viagem empreendida por um sujeito cujo olhar vasculha lugares muitas vezes já visitados. Nada de absolutamente original, mas um modo diferente de olhar e pensar determinada realidade a partir de uma experiência e de uma apropriação do conhecimento que são bastante pessoais".

Podemos dizer que o nosso trabalho caracteriza-se como um estudo do tipo etnográfico em educação, pois procuramos levantar dados por meio de observação, entrevistas e análise de documentos, dentro de uma estrutura educacional bem definida. Segundo André (1995, p. 28-30), este tipo de pesquisa busca a formulação de hipóteses, conceitos, abstrações, teorias e não a sua testagem, fazendo uso de um plano de trabalho aberto e flexível, no qual o foco da investigação vai sendo constantemente revisto.

Ao escolhermos essa abordagem, partimos do pressuposto que é importante que o pesquisador compreenda os significados dados pelos sujeitos ao fenômeno estudado, considerando-o no contexto natural em que o mesmo ocorre. Alves (1991, p. 54) afirma que a abordagem qualitativa de pesquisa parte do pressuposto de que "as pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos, e valores e seu comportamento tem sempre um sentido, um significado que não podemos compreender de modo imediato, precisando ser desvelado".

Na presente pesquisa, o objetivo maior foi compreender como os professores de Matemática trabalham com os erros produzidos pelos alunos na aprendizagem dos números racionais, conhecer suas práticas pedagógicas e suas idéias a respeito dos erros como também compreender as concepções que os alunos têm a respeito dos referidos erros.

A pesquisa visou, portanto, a descoberta de novos conceitos, novas relações e novas formas de entendimento da realidade escolar com relação à maneira com que professores e alunos consideram o erro no processo de ensino e aprendizagem dos números racionais.

5.1. A ESCOLA E OS SUJEITOS DA PESQUISA

O universo que consideramos abrangeu alunos e professores de Matemática das séries finais do Ensino Fundamental de uma escola municipal da cidade de Araucária. Utilizamos como critério de escolha uma escola localizada na mesma região onde atuamos, para que os estudos pudessem nos fornecer uma visão mais próxima da realidade.

A escolha da escola foi realizada após a visita, no início de abril de 2004, ao Núcleo da Educação da Prefeitura de Araucária, momento da obtenção do apoio e aquiescência formal para a pesquisa.

A escola, onde ocorreu a pesquisa, possuía três professores de Matemática, sendo um com formação em licenciatura/bacharelado em Matemática e dois com formação em licenciatura em Ciências. Os três professores haviam cursado pós-graduação *lato sensu*, todos com experiência de mais de quinze anos no magistério, sendo boa parte desta, em escolas municipais de Araucária. Além disso, completavam tripla jornada de trabalho em outras escolas da região (Anexo 1).

Os três professores atuavam nas séries pesquisadas desde o começo do ano letivo, contudo, devido a Prefeitura de Araucária conceder licença prêmio a seus docentes por tempo de serviço, um deles obteve a permissão para usufruir deste benefício, afastando-se de suas atividades profissionais, durante o período da coleta de dados. Assim, a pesquisa prosseguiu apenas com dois professores.

Por opção dos dois professores participantes da pesquisa, estaremos nos referindo a eles como: **Professor 1** e **Professor 2**, conforme acordo entre pesquisador e professores investigados.

A escola apresenta em sua proposta pedagógica (cf. NE, Araucária, 2002), a preocupação com o erro dos alunos, sendo que não tivemos nenhuma resistência para a realização do nosso trabalho. Como o enfoque da pesquisa é a análise dos erros com relação aos números racionais, optamos por trabalhar com as 5^{as}, 6^{as} e 7^{as} Séries do Ensino Fundamental, por se constatar que essas séries apresentavam, em seus conteúdos, o assunto em questão.

Na escola investigada, os alunos assistiam aulas de segunda a sexta-feira, das 7:30 às 11:30, sendo cada aula de 45 minutos e um intervalo de 15 minutos para o recreio. Nesta escola quem troca de sala são os alunos, sendo que cada professor possui a sua sala de aula.

Duarte (2002, p. 143) afirma que numa metodologia de base qualitativa o número de sujeitos que virão a compor o quadro das entrevistas, dificilmente poderá ser determinado a *priori*, tudo depende da qualidade das informações obtidas, assim como da profundidade e do grau de recorrência e divergência destas informações.

Tínhamos, inicialmente, o desejo de poder trabalhar com o máximo de alunos possível, porém, optamos por um grupo constituído de 17 alunos, sendo 7 das 5as séries, 6 das 6as. séries e 4 das 7as. séries. É importante deixar claro que, já nos primeiros contatos, pudemos avaliar que a maioria dos alunos apresentava dificuldades com relação ao assunto em questão, e tal fato foi confirmado pelos professores.

Como a nossa preocupação central era conhecer e refletir sobre os erros cometidos pelos alunos e a maneira como os professores interpretavam esses erros, tendo em vista a ressignificação do ensino e da aprendizagem da Matemática, foram considerados como sujeitos os 17 alunos que mesmo apresentando erros, foram apontados pelos professores como os mais “fortes”, pelo fato de apresentarem notas acima da média dos demais alunos. Com relação aos alunos, não faremos referência a seus nomes verdadeiros sendo que a identificação será feita como: aluno, série que cursa e uma letra qualquer do alfabeto. Como por exemplo: um aluno da 6ª série será identificado como **Aluno 6F**.

Procuramos deixar claro aos sujeitos que a pesquisa não tinha o caráter de avaliar suas competências profissionais ou cognitivas, mas sim compreender a problemática do erro dos números racionais no contexto das séries finais do ensino fundamental, bem como as percepções docentes e discentes em relação ao erro. É importante ressaltarmos que todos os procedimentos foram realizados com o consentimento dos sujeitos envolvidos.

5.2. PROCEDIMENTOS DE COLETA DE DADOS

Num primeiro momento fizemos contato com os professores das turmas escolhidas, para podermos analisar qual seria a melhor estratégia de trabalho. Durante os contatos com os docentes, foi constatado que muitos alunos não acompanhavam efetivamente as aulas, ficavam dispersos e praticamente não se concentravam nas explicações dadas pelo professor quando estavam ministrando as aulas. Em seguida, procuramos conhecer a proposta curricular da escola investigada. A referida proposta (NE, Araucária, 2002) apresentava os conteúdos organizados a partir de três eixos: números, medidas e geometria, visando a compreensão do conhecimento matemático como um todo. Os números decimais aparecem desde a 2ª série do Ensino Fundamental, através do uso de unidades para a comparação de medidas de diferentes grandezas. Ainda nesta série é trabalhada a idéia de números fracionários, a relação entre algumas frações e a representação concreta, gráfica e numérica das frações (1/2 , 1/3, 1/4, 1/9).

Na 3ª série, é feita a organização do sistema de numeração decimal, e é introduzido o conceito dos números racionais. Durante a 4ª série são trabalhadas atividades relativas às quatro operações com números fracionários e decimais. São também indicadas resoluções de problemas que envolvem os números racionais.

Portanto, o aluno deveria chegar à 5ª série já possuindo um conhecimento mais abrangente sobre os números racionais, havendo somente a necessidade de um trabalho de consolidação de técnicas operatórias desse tópico matemático.

O terceiro passo da pesquisa foi a elaboração de uma prova que fosse coerente com os conteúdos propostos pela escola, considerando-se um grau relativo de dificuldades para as questões apresentadas. A prova continha cinco questões sobre os números racionais (representação fracionária e decimal), e foi aplicada a todos os alunos, indiferente da série em que estavam cursando.

A prova (Anexo 2), continha questões relativas aos números racionais, segundo os aspectos previstos na proposta curricular (cf. NE, Araucária, 2002) da escola investigada e foi aplicada pela pesquisadora aos 72 alunos que freqüentavam as 5as, 6as e 7as. séries da escola investigada. O objetivo era coletar erros produzidos em operações com números racionais. Entretanto, para estudo e análise, foram consideradas apenas 17 provas indicadas pelos respectivos professores, cujo critério de escolha foi a apresentação de registros de erros na resolução dos problemas propostos.

Em seguida, as provas aplicadas foram distribuídas aos respectivos professores para uma análise dos erros cometidos, cujos registros constam no instrumento " protocolo de erros" (Anexo 3). Os dados fornecidos pelos docentes foram organizados pela pesquisadora nos quadros "diagnóstico de erros", cujos indicadores trouxeram informações relevantes em relação às práticas pedagógicas adotadas pelos professores no trabalho com os erros dos alunos, evidenciando onde localizam as origens dos erros de números racionais apresentados pelos alunos e as possíveis soluções encontradas propostas por eles para a superação dos mesmos.

Segundo Cury (1994, p. 89), o comportamento do professor e dos alunos só poderá ser compreendido se puderem explicitar os fundamentos para tal atitude. Assim, acreditamos que somente através das provas e do preenchimento das fichas de erros, não teríamos indicadores suficientes para a problemática da pesquisa. Então, optamos por realizar entrevistas que foram desenvolvidas junto a professores e alunos, sujeitos da pesquisa.

Os dados apresentados pelos professores forneceram indicadores para a estruturação das entrevistas realizadas com os professores (Anexo 4) e com os alunos (Anexo 5), considerando que cada professor possui o seu padrão de julgamento sobre os erros, e cada aluno possui a sua própria concepção sobre o erro. Portanto, foram realizadas entrevistas com dois professores e, posteriormente, com 17 alunos que apresentaram erros em suas provas, com exceção de um aluno da 6ª série que, por ser portador de deficiência auditiva, não foi possível entrevistá-lo, mas ele fez questão de apresentar seu depoimento por escrito. As entrevistas foram gravadas e realizadas com a concordância dos participantes.

A partir destes procedimentos, a pesquisa orientou-se em direção à análise e discussão dos dados obtidos, buscando identificar regularidades e contradições presentes nos depoimentos dos sujeitos em relação à concepção do erro no processo ensino e aprendizagem dos números racionais.

6 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Segundo Cury (1994, p. 86), o pesquisador qualitativo é sensível ao efeito que pode causar sobre os pesquisados e procura intervir o mínimo possível. Neste sentido, não fornecemos aos professores avaliadores qualquer tipo de informação sobre como deveriam proceder na correção da prova, nem mesmo preenchimento do formulário sobre os erros.

Como já foi anteriormente comentado, a partir do preenchimento do protocolo de erros pelos professores, foram elaborados os quadros relativos ao diagnóstico que os professores fizeram a partir dos erros apresentados nas provas pelos alunos. Vale lembrar que os quadros foram separados por séries, sendo construídos três grupos de quadros.

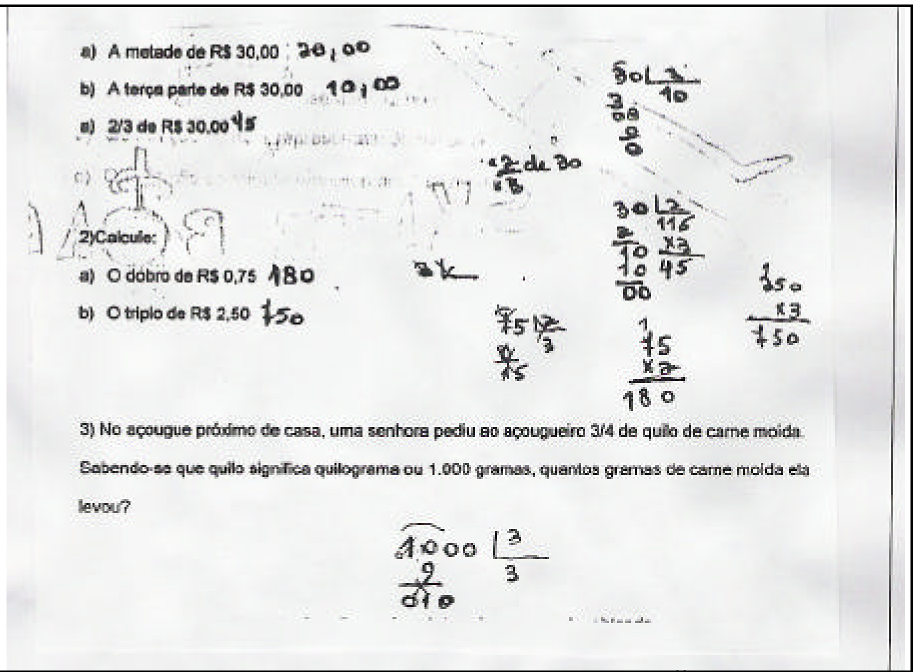
Os dados relativos ao quadro da 6ª série foram fornecidos pelo Professor 1 e os da 5ª e 7ª séries, pelo Professor 2. Um fato que nos chamou a atenção, a partir da devolução do material pelos professores, foi que o Professor 1 corrigiu as provas com caneta vermelha colocando um C nas respostas consideradas certas, e um risco em cima das erradas. Já o Professor 2, apenas preencheu o formulário sobre os erros sem efetuar nenhum registro por escrito nos erros ou acertos detectados nas provas dos alunos.

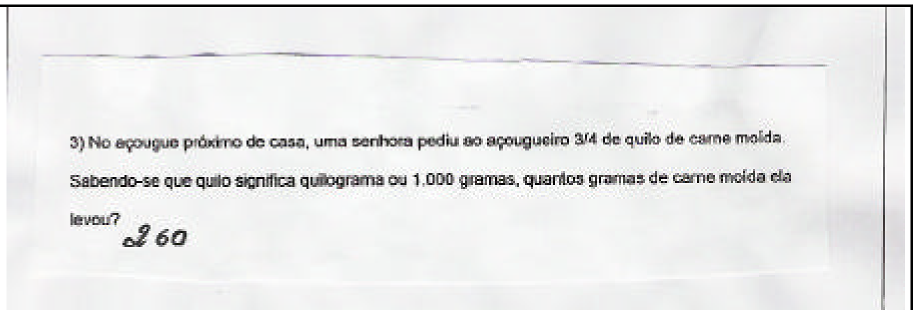
6.1. DIAGNOSTICO DE ERROS SEGUNDO OS PROFESSORES

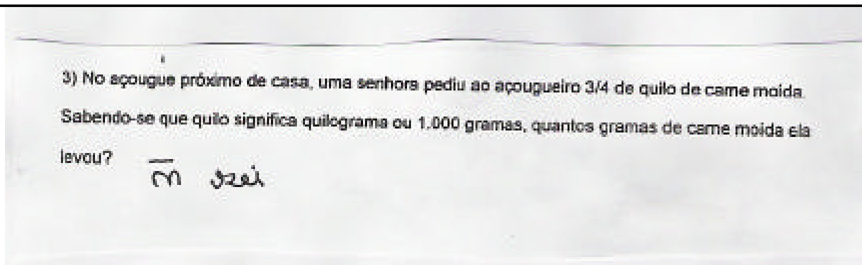
Para a análise dos dados fornecidos pelos protocolos de erro, apresentaremos cada um dos quadros elaborados e em seguida uma análise das categorias indicadas no mesmo, considerando que as mesmas expressam elementos suscitados pelos objetivos da pesquisa. Sob tal critério os diagnósticos realizados pelos docentes, serão analisados a partir das categorias: tipos de erros mais comuns, origens dos erros, sugestões para sua superação, levando-se em conta a série que se encontra o aluno.

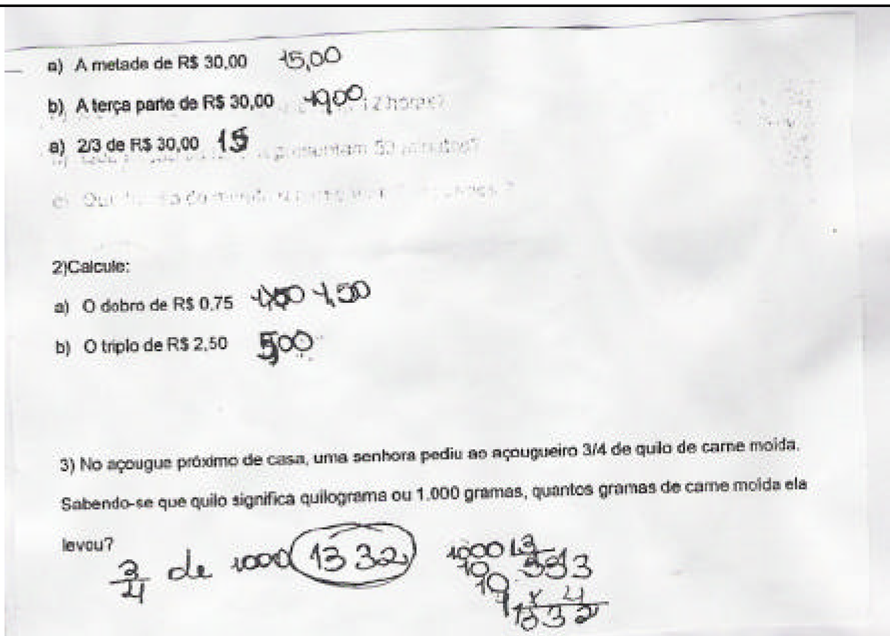
6.2 QUADROS DE DIAGNÓSTICO DOS ERROS DOS ALUNOS POR SÉRIE

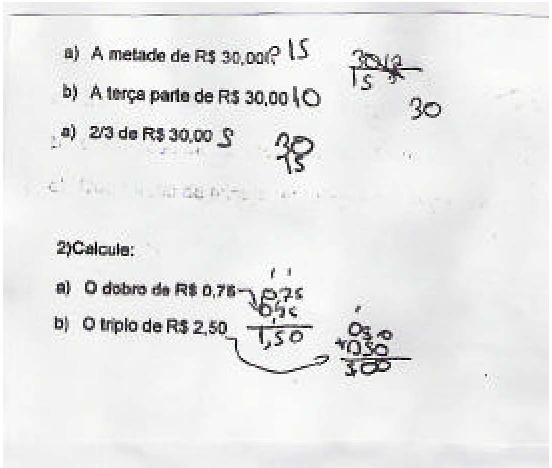
 # Dados fornecidos pelo Professor 2 relativos às provas aplicadas aos alunos da 5ª série

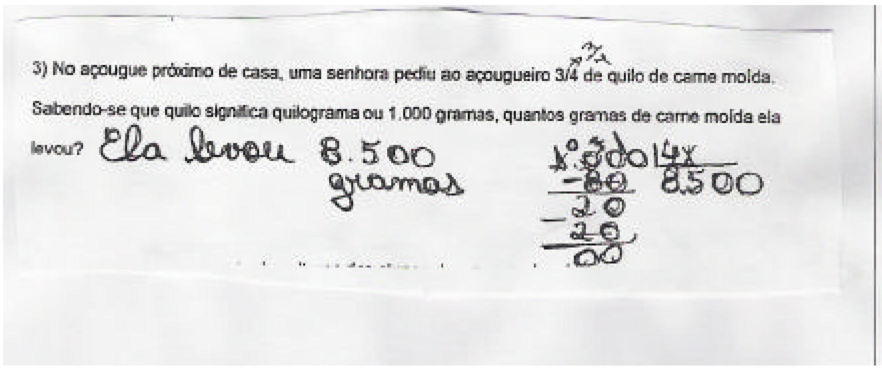
<table>
<tr><td>SOLUÇÃO DO ALUNO P5A</td><td colspan="2">
a) A metade de R$ 30,00 30,00
b) A terça parte de R$ 30,00 10,00
a) 2/3 de R$ 30,00 15
2) Calcule:
a) O dobro de R$ 0,75 180
b) O triplo de R$ 2,50 150
3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou?</td></tr>
<tr><td>TIPO
DE ERRO</td><td>ORIGEM
DO ERRO</td><td>SUGESTÕES PARA
SUPERAÇÃO DO ERRO</td></tr>
<tr><td>Erro nas operações fundamentais;
Erro na definição de fração.</td><td>Séries iniciais;
Falta de atividades com frações;
Falta de maior número de exercícios nas séries anteriores.</td><td>Oferecer mais exercícios sobre operações elementares nas séries anteriores.</td></tr>
</table>

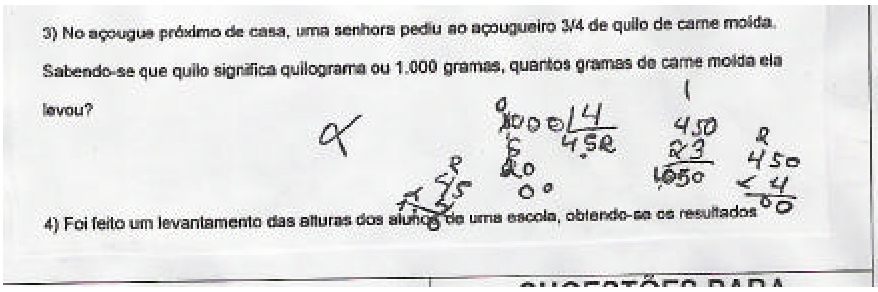
<table>
<tr><td>SOLUÇÃO DO ALUNO P5B</td><td colspan="2">
3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou? 260</td></tr>
<tr><td>TIPO
DE ERRO</td><td>ORIGEM
DO ERRO</td><td>SUGESTÕES PARA
SUPERAÇÃO DO ERRO</td></tr>
<tr><td>Não possui domínio sobre problemas que envolvem números fracionários.</td><td>Séries iniciais;
Falta de atividades com frações;
Incompreensão de expressões numéricas.</td><td>Apresentação do conteúdo de forma concreta chegando-se a abstração dos conteúdos de forma gradual.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>SOLUÇÃO DO ALUNO P5C</td><td colspan="2">
3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou? ñ sei</td></tr>
<tr><td>TIPO
DE ERRO</td><td>ORIGEM
DO ERRO</td><td>SUGESTÕES PARA
SUPERAÇÃO DO ERRO</td></tr>
<tr><td>Erro na definição de fração;
Erro nas operações fundamentais;
desconhecimento do significado dos números fracionários.</td><td>Séries iniciais;
Falta de mais atividades com frações;
Reforço nas atividades que envolvem os números fracionários.</td><td>Realização de mais exercícios que envolvam problemas e expressões numéricas, trabalhar com exercícios concretos.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>SOLUÇÃO DO ALUNO P5D</td><td colspan="2">
a) A metade de R$ 30,00 15,00
b) A terça parte de R$ 30,00 10,00
a) 2/3 de R$ 30,00 15
2) Calcule:
a) O dobro de R$ 0,75 1,50
b) O triplo de R$ 2,50 5,00
3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou? 3/4 de 1000 1332</td></tr>
<tr><td>TIPO
DE ERRO</td><td>ORIGEM
DO ERRO</td><td>SUGESTÕES PARA
SUPERAÇÃO DO ERRO</td></tr>
<tr><td>Erro no conceito de fração;
Erro nas operações que envolvem frações.</td><td>Conceito de fração mal compreendido;
Falta de atenção
Necessidade de realização de exercícios com números fracionários.</td><td>Realização de reforço escolar no contraturno.</td></tr>
</table>

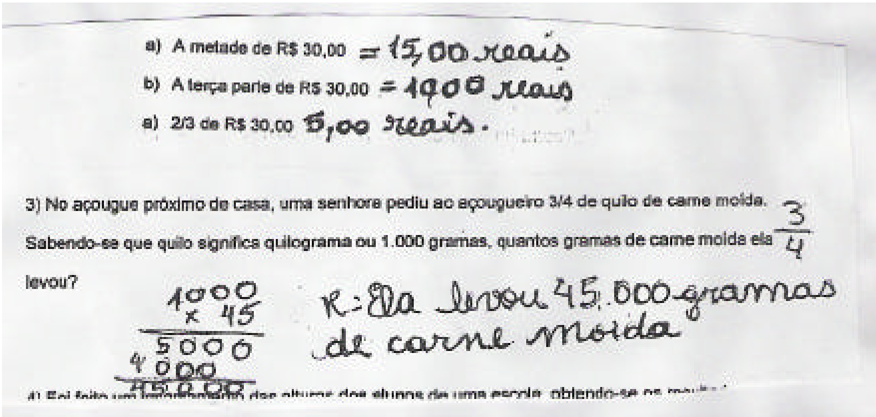
<table>
<tr><td>SOLUÇÃO DO ALUNO
P5E</td><td colspan="2">
a) A metade de R$ 30,00? 15
b) A terça parte de R$ 30,00 10
a) 2/3 de R$ 30,00 5
2)Calcule:
a) O dobro de R$ 0,75
b) O triplo de R$ 2,50</td></tr>
<tr><td>TIPO
DE ERRO</td><td>ORIGEM
DO ERRO</td><td>SUGESTÕES PARA
SUPERAÇÃO DO ERRO</td></tr>
<tr><td>Erro nas operações fundamentais;
Erro no conceito dos números racionais.</td><td>Séries iniciais;
Conceito mal compreendido.</td><td>Oferecer aulas de reforço escolar no contraturno, realização de mais exercícios e problemas sobre frações.</td></tr>
</table>

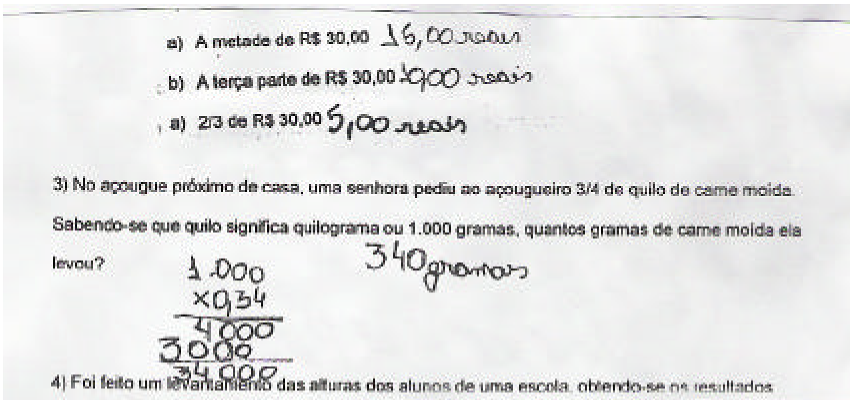
<table>
<tr><td>SOLUÇÃO DO ALUNO
P5F</td><td colspan="2">
3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou? Ela levou 8.500 gramas</td></tr>
<tr><td>TIPO
DE ERRO</td><td>ORIGEM
DO ERRO</td><td>SUGESTÕES PARA
SUPERAÇÃO DO ERRO</td></tr>
<tr><td>Erro no conceito de fração e erro nas operações fundamentais.</td><td>Séries iniciais;
Conceito de fração mal absorvido;
Sinalização.</td><td>Realização de mais exercícios com operações elementares nas séries iniciais.</td></tr>
</table>

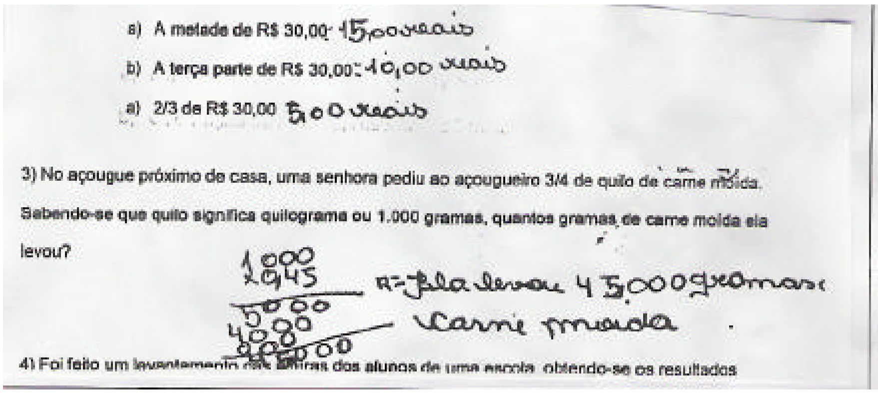
<table>
<tr><td>SOLUÇÃO DO ALUNO
P5G</td><td colspan="2">
3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou?

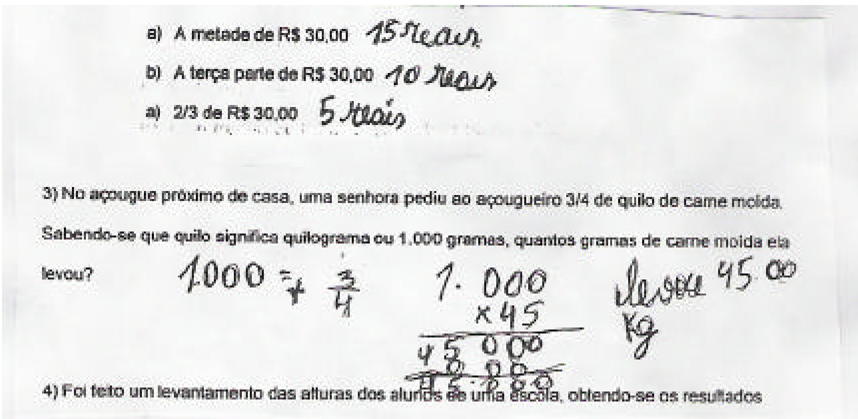
4) Foi feito um levantamento das alturas dos alunos de uma escola, obtendo-se os resultados</td></tr>
<tr><td>TIPO
DE ERRO</td><td>ORIGEM
DO ERRO</td><td>SUGESTÕES PARA
SUPERAÇÃO DO ERRO</td></tr>
<tr><td>Erro no conceito de fração.
Erro nas operações fundamentais.</td><td>Series iniciais;
Conceito de fração mal absorvido;
Desconhecimento de operações com números decimais.</td><td>Realização de maior número de exercícios sobre fração e operações elementares.</td></tr>
</table>

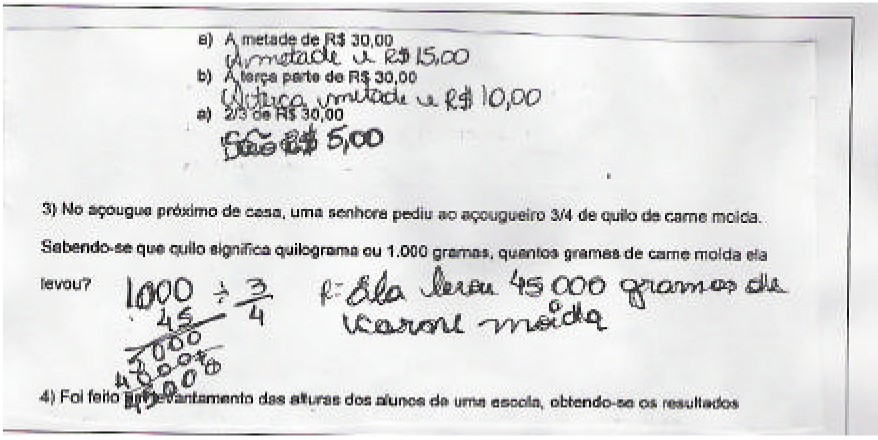
 # Dados fornecidos pelo Professor 1 relativos às provas aplicadas aos alunos da 6ª série.

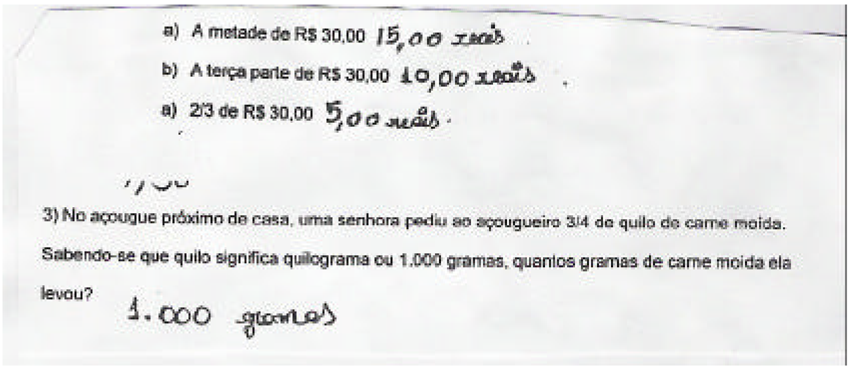
<table>
<tr><td>SOLUÇÃO DO ALUNO P6A</td><td colspan="2">
a) A metade de R$ 30,00 = 15,00 reais
b) A terça parte de R$ 30,00 = 1900 reais
a) 2/3 de R$ 30,00 5,00 reais.
3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou?
1000 × 45 = 5000 + 4000 = 45.000
R: Ela levou 45.000 gramas de carne moida</td></tr>
<tr><td>TIPO
DE ERRO</td><td>ORIGEM
DO ERRO</td><td>SUGESTÕES PARA
SUPERAÇÃO DO ERRO</td></tr>
<tr><td>Erro de interpretação de fração;
Fragilidade nas operações de divisão e multiplicação.</td><td>Séries anteriores;
Falta de atividades concretas sobre o assunto.</td><td>Realização de atividades com material concreto;
Aulas dialogadas sobre frações.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>SOLUÇÃO DO ALUNO P6B</td><td colspan="2">
a) A metade de R$ 30,00 16,00 reais
b) A terça parte de R$ 30,00 1900 reais
a) 2/3 de R$ 30,00 5,00 reais
3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou?
1.000 × 0,34 = 4000 + 3000 = 34.000
340 gramas
4) Foi feito um levantamento das alturas dos alunos de uma escola, obtendo-se os resultados</td></tr>
<tr><td>TIPO
DE ERRO</td><td>ORIGEM
DO ERRO</td><td>SUGESTÕES PARA
SUPERAÇÃO DO ERRO</td></tr>
<tr><td>Erro na compreensão dos problemas;
Erro no conceito de fração.</td><td>Poucos exercícios sobre o assunto;
Fragilidade do significado de problemas sobre fração.</td><td>Resolver mais exercícios sobre frações;
Trabalhar com material concreto;
Utilizar a calculadora para conferir os resultados, motivando os alunos a resolverem mais operações.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>SOLUÇÃO DO ALUNO
P6C</td><td colspan="2">
a) A metade de R$ 30,00: 15,00 reais
b) A terça parte de R$ 30,00: 10,00 reais
a) 2/3 de R$ 30,00 5,00 reais
3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída.
Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou?
1.000
x 0,45
5000
4000
00000
R= Ela levou 45.000 gramas de carne moida.
4) Foi feito um levantamento das alturas dos alunos de uma escola, obtendo-se os resultados</td></tr>
<tr><td>TIPO
DE ERRO</td><td>ORIGEM
DO ERRO</td><td>SUGESTÕES PARA
SUPERAÇÃO DO ERRO</td></tr>
<tr><td>Erro no conceito de fração;
Erro nas operações com números decimais;
Erro na compreensão dos símbolos matemáticos.</td><td>Séries iniciais;
Poucos exercícios resolvidos sobre o assunto;
Dificuldade em interpretar o problema.</td><td>Aulas de reforço no contraturno;
Resolução de um maior número de exercícios sobre frações.</td></tr>
</table>

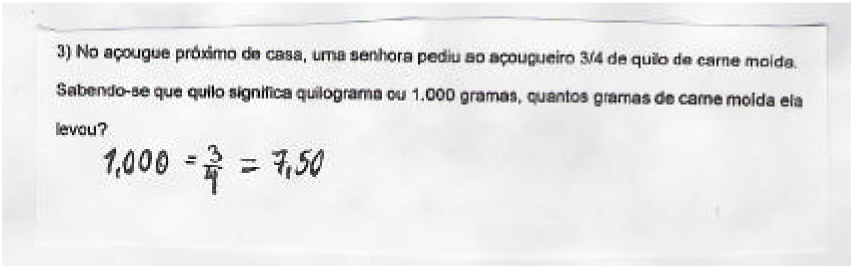
<table>
<tr><td>SOLUÇÃO DO ALUNO
P6D</td><td colspan="2">
a) A metade de R$ 30,00 15 reais
b) A terça parte de R$ 30,00 10 reais
a) 2/3 de R$ 30,00 5 reais
3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída.
Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou?
1000 ÷ 3/4
1.000
x45
45 000
levou 45.00 kg
4) Foi feito um levantamento das alturas dos alunos de uma escola, obtendo-se os resultados</td></tr>
<tr><td>TIPO
DE ERRO</td><td>ORIGEM
DO ERRO</td><td>SUGESTÕES PARA
SUPERAÇÃO DO ERRO</td></tr>
<tr><td>Erro no conceito de frações;
Erro nas operações de divisão e multiplicação.</td><td>Poucos exercícios com frações;
Séries iniciais.</td><td>Realização de mais exercícios sobre frações;
Aulas de reforço no contraturno.</td></tr>
</table>

SOLUÇÃO DO ALUNO P6E	 a) A metade de R$ 30,00 A metade é R$ 15,00 b) A terça parte de R$ 30,00 A terça metade é R$ 10,00 a) 2/3 de R$ 30,00 R$ 5,00 3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou? $1000 \div \frac{3}{4}$ R: Ela levou 45 000 gramas de carne moida 4) Foi feito um levantamento das alturas dos alunos de uma escola, obtendo-se os resultados	
TIPO DE ERRO	**ORIGEM DO ERRO**	**SUGESTÕES PARA SUPERAÇÃO DO ERRO**
Erro na aplicação do conceito de fração.	Incompreensão da definição de fração; Dificuldade de operar com fracionários.	Realização de mais atividades sobre frações; Colocar os alunos para realizar resolução de problemas em grupo discutindo as respostas.

SOLUÇÃO DO ALUNO P6F	 a) A metade de R$ 30,00 15,00 reais. b) A terça parte de R$ 30,00 10,00 reais. a) 2/3 de R$ 30,00 5,00 reais. 3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou? 1.000 gramas	
TIPO DE ERRO	**ORIGEM DO ERRO**	**SUGESTÕES PARA SUPERAÇÃO DO ERRO**
Dificuldade de compreensão dos números fracionários; Dificuldade em interpretar o problema.	Séries anteriores; Falta realizar mais exercícios sobre frações; Dificuldade na abstração do exercício.	Fazer mais exercícios sobre frações, pedindo para que o aluno explique como chegou aos resultados. Aulas de reforço no contraturno.

 # Dados fornecidos pelo Professor 2 relativos às provas aplicadas aos alunos da 7ª série

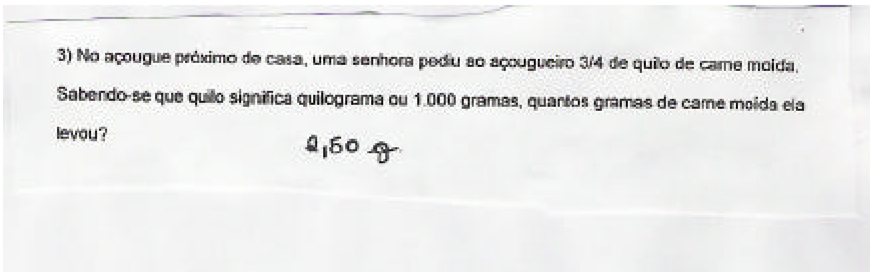
SOLUÇÃO DO ALUNO P7A


3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou?

1,000 = $\frac{3}{4}$ = 7,50

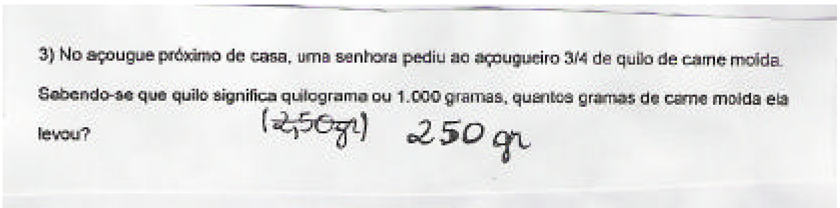
TIPO DE ERRO	ORIGEM DO ERRO	SUGESTÕES PARA SUPERAÇÃO DO ERRO
Erro nas operações fundamentais; Erro no conceito de fração; Confusão do sinal (.) por (,).	Séries iniciais; Falta de atividades com frações; Nomenclatura e sinalização; Reforçar estudo com fracionários e decimais, destacando as semelhanças.	Fazer exercícios que possibilite comparação e diferença entre estes dois conjuntos numéricos.

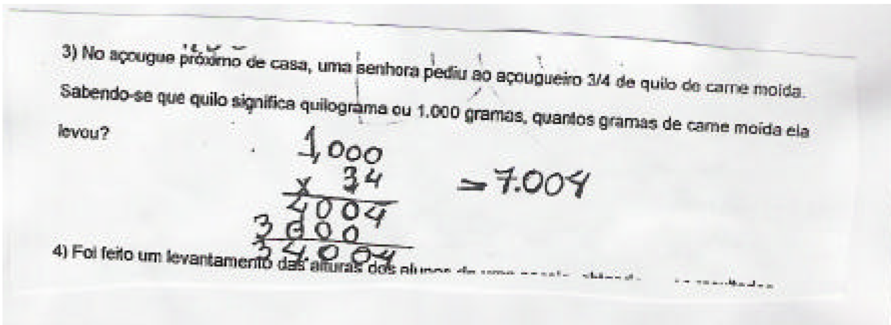
SOLUÇÃO DO ALUNO P7B


3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou?

0,60 g

TIPO DE ERRO	ORIGEM DO ERRO	SUGESTÕES PARA SUPERAÇÃO DO ERRO
Erro nas operações fundamentais; Erro na definição de fração; Incompreensão de questões que envolvem problematização.	Séries iniciais; Falta de atividades com frações; Muitos alunos por sala o que impede o trabalho individualizado; Falta de reforço escolar ou acompanhamento.	Abrir contraturno de aulas; Trabalhar a parte diversificada como reforço escolar; Período obrigatoriamente de 1ª à 5ª série, e periodicamente de 6ª à 8ª.

<table>
<tr><td>SOLUÇÃO DO ALUNO P7C</td><td colspan="2">
3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou? (250gr) 250 gr</td></tr>
<tr><td>TIPO
DE ERRO</td><td>ORIGEM
DO ERRO</td><td>SUGESTÕES PARA SUPERAÇÃO DO ERRO</td></tr>
<tr><td>Erro no conceito de fração.</td><td>Séries iniciais;
Conceito de fração mal absorvido.</td><td>Apresentação do conteúdo de forma prática e concreta(séries iniciais) para depois ir aos poucos para a abstração.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>SOLUÇÃO DO
ALUNO P7D</td><td colspan="2">
3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou?
1,000
x 34
4004
3000
34004
= 7.004
4) Foi feito um levantamento das alturas dos alunos</td></tr>
<tr><td>TIPO
DE ERRO</td><td>ORIGEM
DO ERRO</td><td>SUGESTÕES PARA SUPERAÇÃO DO ERRO</td></tr>
<tr><td>Erro nas operações fundamentais;
Erro na definição de fração;
O aluno não compreende os símbolos utilizados na representação de fração.</td><td>Séries iniciais;
Falta de atividades com frações;
Falta de maior número de exercícios nas séries anteriores, e ou na correção do professor.</td><td>Trabalhar representações matemáticas com mais firmeza;
Oferecer ao aluno exercícios que explorem maior número de conceitos.</td></tr>
</table>

6.1.1. Tipos de Erros

RESPOSTAS MAIS FREQÜENTES APONTADAS PELOS PROFESSORES
Falta de domínio do conceito de frações e números decimais
Falta de domínio em problemas que envolvem os números fracionários
Fragilidade na resolução das operações fundamentais

Observa-se na análise docente a indicação de erros conceituais e operacionais em todas as séries investigadas. Porém, nas 6as e 7as séries surgem erros de simbologia, apontados na análise dos professores como também de compreensão e interpretação dos dados dos problemas. A análise das provas realizada pelos professores dos alunos evidenciou a existência de obstáculos relacionados aos números racionais, tal fato pôde ser comprovado quando observamos a quantidade de erros verificados pelos professores avaliadores. Sob esta perspectiva, evidencia-se o conflito do aluno em busca de uma solução, e na falta desta, origina-se o erro.

A análise das provas realizada pelos professores deixou clara a questão que muitos alunos não possuem visibilidade representacional do conjunto dos números racionais. Tal observação reside no fato de que os alunos apresentaram muita dificuldade em trabalhar com atividades que eles até já conheciam, mas eles não conseguiram relacionar dados do problema com aspectos formais próprios do contexto escolar. No processo de aprendizagem, o aluno traz consigo informações do seu cotidiano que podem conflitar com os conteúdos que são ensinados na escola, e os professores não conseguem perceber a necessidade de se relacionar os conteúdos.

A percepção dos professores indica que os alunos pensam mecanicamente e tudo aquilo que é um pouco diferente do visto em sala de aula não tem sentido para eles nas avaliações escolares, mesmo que sejam situações utilizadas em seu dia-a-dia.

A partir das analises das provas, é possível perceber uma sensível melhora do desempenho com os alunos da 7ª série, pois apresentaram menor número de erros, indicando que o trabalho contínuo do professor pode propiciar o progresso do aluno nas questões apresentadas.

As indicações dos erros feitas pelos professores demonstra que estes souberam localizar os erros de seus alunos, conforme mostram os protocolos preenchidos, entretanto, a classificação dos mesmos ainda foi bastante simples.

Autores como Miguel (1986) e Zunino (1995) salientam que: as dificuldades associadas a erros com relação ao ensino aprendizagem dos números racionais é carregada ao longo de todas as séries do Ensino Fundamental, e em alguns casos para o resto de suas vidas.

As dificuldades enfrentadas com relação aos números racionais, ilustram os obstáculos que o ensino destes números pode ocasionar às crianças quando se impõe maneiras de resolução preestabelecidas, que não propiciam o estabelecimento de relações entre as estratégias dos alunos e os procedimentos ensinados pela escola.

6.1.2. Origem dos erros

RESPOSTAS MAIS FREQÜENTES APONTADAS PELOS PROFESSORES
Origem nas séries iniciais
Falta de mais atividades que envolvem operações com números racionais
Conceito de números racionais mal compreendido
Falta de atenção dos alunos

A tendência expressa nos dados sobre a origem dos erros recai sobre as séries iniciais. Estes dados apontam que os professores culpabilizam um trabalho anterior mal realizado em relação aos exercícios com números racionais. Reconhecem a má construção dos conceitos e também a fraca carga de atividades propostas aos alunos. Há uma unanimidade de afirmação de que o erro é originário das séries anteriores.

O problema da prova que apresentou o maior número de erros foi a 3ª questão (100% de respostas erradas), que tratava sobre uma situação que, possivelmente, estava presente no cotidiano dos alunos. Outra questão que apresentou um número significativo de erros foi a 1ª questão item C (60% de respostas erradas) situação em que os alunos deveriam apresentar um valor em dinheiro proveniente de uma fração e , finalmente, a 2ª questão (18% de erros) na qual o aluno deveria calcular o dobro ou o triplo de um determinado valor. Excluindo-se as questões anteriormente indicadas, não tivemos mais nenhuma verificação de erros. É importante ressaltar que nas questões que se referiam a situações que são freqüentemente apresentadas pelos livros didáticos, como as questões 4 e 5 da prova, não foram observados erros.

Na 3ª questão constatamos que muitos alunos, para descobrir quanto seria 3/4 de um quilo, multiplicaram 1.000 por 45 ou ainda 1.000 por 34, demonstrando a fragilidade existente sobre este saber, tendo em vista que não conseguem identificar o significado da fração, ou seja, a relação existente entre a parte e o todo, além de apresentarem dificuldade em transcodificar o código escrito.

Assim, foi possível observar, a partir da análise feita pelos professores com relação às provas, que os erros apresentados podem ter origem em virtude do não domínio dos conteúdos anteriormente vistos na vida escolar. Os docentes, em suas observações, não fizeram referência às dificuldades que o aluno apresenta: com relação a questão da parte/todo; a compreensão da representação formal da matemática; a maneira mecanizada de resolver as questões; entre outras.

É preciso se levar em consideração que os erros dos alunos poderiam ter acontecido em virtude do enunciado mal formulado. Mas esta hipótese foi descartada, tendo em vista que durante a realização da prova, quando era solicitada alguma informação adicional, apenas líamos o enunciado, sem oferecer mais nenhuma instrução e os alunos, a partir da nossa leitura do problema, conseguiam resolver, ou ao menos começar a esboçar alguns raciocínios.

Os erros poderiam ter ocorrido também devido à utilização de procedimentos metodológicos inadequados, mas em nossa pesquisa não foi possível o acompanhamento das aulas a ponto de termos a possibilidade de tecer considerações sobre este assunto. Portanto, esta questão ficará descartada em nossas considerações.

Todavia, os professores participantes não conseguiram associar os erros dos alunos à sua real origem, faltando uma certa visibilidade epistemológica sobre o conteúdo em questão. Possivelmente boa parte dos erros dos alunos está associada à maneira como foi apresentada a definição dos números racionais, ou ainda à ausência de situações significativas que relacionasse o conteúdo a realidade dos alunos.

Autores como Brousseau (1983), Centeno (1988), Pinto (2000), fazem referência aos erros conceituais, observando a chance de esses erros tornarem-se sistemáticos, fato constatado na presente pesquisa.

Ambos os professores fizeram, em suas análises, menção de que a origem dos erros dos alunos está na fragilidade dos conceitos que os alunos trazem das séries anteriores, reforçando, com isto, a necessidade da realização de mais exercícios sobre o assunto. O professor 2 destaca também a falta de atenção de alguns alunos e o excesso de alunos por sala, o que impede o trabalho individualizado. Neste ponto, fazemos uma consideração com relação às palavras do professor 2, pois pudemos comprovar que a maioria dos alunos possui um comportamento indisciplinado, não atendendo às orientações do professor.

As considerações de Centeno (1988) fazem referência que a origem dos erros pode estar associada ao modo de apresentação da definição dos números fracionários e decimais, sendo importante que o professor conheça qual é o significado que os alunos dão às operações realizadas, pois estes podem estar fabricando regras de ação que nem sempre levarão às respostas corretas. A autora salienta ainda, que os erros podem ter origem na ausência de situações significativas que envolvem os números racionais e a realidade dos alunos.

6.1.3. Sugestões para superação dos erros

RESPOSTAS MAIS FREQÜENTES APONTADAS PELOS PROFESSORES
Apresentação do conteúdo de forma concreta
Resolução de um maior número de exercícios sobre o assunto
Realização de reforço escolar
Abstração dos conteúdos de forma gradual
Aulas dialogadas e realização de atividades em grupo

Os professores sugerem desde soluções de ordem administrativa (implantar aulas de reforço no contraturno) e de ordem pedagógica como o uso de material concreto, aulas dialogadas, uso de calculadora. Ainda como solução metodológica, são apontadas a utilização de resolução de problemas e exercícios "especiais" que possibilitem comparar e diferenciar dois conjuntos numéricos, além de um trabalho individualizado mais intensivo com as representações matemáticas.

Apesar de menor número, há também indicação de acúmulo de tarefas para os alunos sobre o conteúdo que sugerem exercícios repetitivos de operações com números racionais, mas que não favorecem o aprendizado, pois não apresentam significado aos alunos.

Centeno (1988) enfatiza que ensinar os conceitos dos números racionais sem apresentar situações que sejam significativas, leva o aluno à impossibilidade de comparar os resultados com a realidade, dificultando a correção de seus erros.

Observamos que os professores fazem referência a uma metodologia inovadora que envolva a realização de exercícios concretos e práticos, sendo que a abstração dos conteúdos deve ser apresentada de forma gradual em aulas dialogadas. Percebemos, nestas palavras, que os professores possuem conhecimento sobre os novos enfoques metodológicos, todavia, o discurso fica muito aquém do desejado na prática.

Existe uma certa insegurança dos professores em relação à maneira de ensinar o conteúdo focalizado, entretanto, para ensinar é preciso mais do que isto, é preciso compreender o conceito e criar situações em que o conceito possui significado. Podemos saber bastante sobre a Matemática, porém não saber explicar.

Em geral, os professores de Matemática têm o domínio formal do conteúdo, sabe fórmulas e demonstrações, porém, mais do que conhecer formalmente é necessário que saiba também compreender como o conceito foi construído histórica e psicologicamente. Anteriormente, comentamos que o magistério é uma atividade de busca constante de novos rumos durante o processo, no entanto o que fica evidente é que os professores ainda ficam limitados a algumas práticas, sem a ousadia de tentar outras possibilidades de ensino.

Vários autores têm realizado estudos sobre o ensino e aprendizagem dos números racionais. Dentre outros, Miguel (1986), Centeno (1988), Zunino (1995), oferecendo opções pedagógicas diversificadas aos professores. Através destes estudos os docentes vêm se conscientizando de que a prática pedagógica não pode ficar limitada à simples transmissão de conhecimentos sem sentido para os alunos, sendo necessária uma reflexão crítica e continuada sobre as situações-problema que permita a busca de procedimentos variados pertinentes a cada situação.

A análise dos dados fornecidos pelos docentes participantes da pesquisa evidencia que esta formação ainda está direcionada ao domínio de conceitos matemáticos sem uma articulação pedagógica significativa.

6.2. AS PRÁTICAS PEDAGÓGICAS E OS ERROS COM OS NÚMEROS RACIONAIS

Para complementar os dados do protocolo de erros foram realizadas entrevistas semi-estruturadas com os professores participantes da pesquisa. As mesmas seguiram o roteiro (Anexo 4) que visava coletar depoimentos dos entrevistados a respeito das dificuldades encontradas no trabalho com números racionais e sobre as práticas adotadas em relação ao trabalho com o erro. As mesmas foram realizadas na sala dos professores, com duração de 50 minutos para cada entrevistado e a transcrição das mesmas realizadas pela pesquisadora (Apêndice 3).

As entrevistas ocorreram no final do semestre de 2004 por dois motivos: o primeiro foi por necessitarmos conhecer melhor todo universo da escola, da sala de aula, o cotidiano dos alunos e o cotidiano dos professores; o segundo foi por o segundo semestre letivo possuir muitos feriados e recessos, e ainda pelo fato de os professores estarem em cursos e palestras em seus dias de permanência no colégio, e não existir outro horário e local para tal.

A entrevista com o professor 2 foi feita na segunda metade do mês de novembro, já a pesquisa com o professor 1 ocorreu uns quinze dias depois.

Em alguns questionamentos, foram necessárias interrupções para que os professores pudessem pensar melhor sobre suas respostas. À medida que a entrevista se desenvolvia, os professores sentiam-se mais à vontade, demonstrando um desejo de desabafar suas angústias e preocupações com o processo educacional em que estavam inseridos.

Para a análise do conteúdo dessas entrevistas foram definidas categorias pertinentes aos propósitos enunciados nos objetivos da pesquisa: as dificuldades docentes no ensino dos números racionais; os erros de números racionais mais freqüentes; as práticas de trabalho com o erro do aluno; as práticas avaliativas; e as principais dificuldades discentes em relação à aprendizagem de números racionais. O objetivo foi buscar melhor compreensão da concepção de erro presente nas práticas docentes com os números racionais.

As questões levantadas nas entrevistas permitiu-nos detectar aspectos importantes sobre as concepções que os professores e os alunos possuem sobre o erro no processo de ensino aprendizagem dos números racionais.

6. 2. 1. As dificuldades docentes no ensino dos números racionais

Ao tratarmos sobre as dificuldades encontradas pelos docentes para trabalhar os números racionais na sua representação fracionária e decimal, tanto o professor 1 como o professor 2 salientaram que o ensino dos números racionais deve apresentar melhores resultados. E para isto, alegam que é necessário trabalhar com os alunos concretamente, ou seja, a partir de situações contextualizadas. Entretanto, os professores acrescentaram que é difícil conseguir relacionar o conteúdo com o dia-a-dia do aluno, principalmente em relação aos números fracionários, posto que estes números não possuem uma aplicação tão usual quanto os números decimais. Segundo o professor 2:

> *Os números decimais de certa forma ele (o aluno) tem um contato mais direto no dia a dia, então de certa forma ajuda ele aprender.*

Para o professor 1, as relações existentes entre os fracionários e os decimais são um fator muito complicado para o entendimento dos alunos:

> *Você trabalhar com uma fração e trabalhar com o número decimal e mostrar para ele que está se trabalhando com a mesma coisa, só que você pode utilizá-las em situações diferentes. Essa relação é muito difícil para o aluno.*

Ambos os professores têm conhecimento de materiais didáticos apropriados para esse conteúdo, porém, alegam que a escola não disponibiliza este material aos professores, porque também não recebe da Prefeitura. O pouco material didático que os professores trabalham são aqueles que eles mesmos fabricam e levam para a escola, porém devido ao grande grupo de alunos, o material acaba sendo insuficiente.

> PROFESSOR 2 *: A dificuldade com os números racionais, acho que é limite da própria bibliografia que a gente tem...existe um número muito grande de material concreto. Mas a barreira que você vai encontrar é devido ao grande grupo de alunos, e o tempo muito curto que esse alunos tem para vencer o conteúdo que é extenso....Mesmo o material que a gente usa em geometria que seria o básico, assim de todos, que a gente fornece também ele, dificilmente, ele é para todos os alunos. ... é um material bem limitado são alguns exemplares apenas, daí não tem como você reproduzir mais e isto se torna quase inviável. A gente mesmo não dá coisa que, em determinados conteúdos a gente acaba tendo que fazer.*
>
> PROFESSOR 1*: É, eu até diria o seguinte a você, material tem muito pouco na escola, a maioria dos materiais que nós temos aqui foi confeccionado pelo próprio professor. A gente se vê nesta situação, tem que confeccionar material, trazer material. Porque na realidade, alguns materiais eu não vou dizer que não venha, tabuada por exemplo, mas nós precisamos de muito mais do que isto. É muito escasso.*

Observamos que os professores ainda conservam uma prática tradicional, e, apesar de conhecerem outras práticas pedagógicas, continuam com aulas expositivas, desvinculadas da realidade dos alunos, nas quais os novos conteúdos são apresentados através de exemplos que o aluno deverá repetir e memorizar. Isto pode ser observado nas palavras do professor 2 quando afirma que:

> *O construtivismo é a tendência, é a expectativa sempre do trabalho. Mas o trabalho ainda é tradicional, o trabalho ainda normal como sempre se trabalhou o conhecimento matemático acho que é ainda é muito forte devido todas as barreiras que são criadas.*

Ambos os professores estão tentando adaptar suas aulas às necessidades dos alunos, mas existe muita dificuldade para romper com os padrões que estão cristalizados em suas práticas e nas cobranças feitas pela instituição escolar. É possível notar que os professores são direcionados a cumprir um programa amplo, sendo que a escola e os órgãos responsáveis pouco contribuem para o sucesso dos docentes.

Não queremos dizer que as aulas expositivas não sejam importantes no processo de ensino e aprendizagem, no entanto outras opções devem ser contempladas na prática pedagógica. Freire e Shor (1996, p.116-117), salientam que o professor pode: dar uma aula expositiva; encaminhar uma discussão; organizar pequenos grupos de estudo dentro da sala de aula; supervisionar pesquisas de campo fora da sala de aula; exibir filmes; complementar pontos de vista que faltam à classe; atuar como um bibliotecário, na ajuda a grupos de estudo a encontrar materiais; pode destinar longas horas de aula às apresentações dos estudantes. Ou seja, é importante que o docente tenha a sua disposição uma gama de opções, e que não mantenha a aula expositiva como o único procedimento pedagógico.

Os professores, em seus relatos, afirmam que existe ainda muita carência de instrumentos oferecidos pela escola e que o material de apoio que eles recebem é insuficiente para atender a todos os alunos. A dificuldade é ainda maior quando estão trabalhando a numeração fracionária, que é pouco utilizada no cotidiano daqueles alunos, e dificultando a transposição daquilo que está no conteúdo escolar com os fatos que os alunos conhecem.

Os professores reconhecem as possibilidades de trabalho a partir da tendência construtivista, alternativa pedagógica que está, inclusive, na proposta da escola. Contudo, observamos que existe, por parte dos docentes e da escola, uma falta de domínio entre a teoria e a prática no que tange este direcionamento.

Um fato importante a ser considerado é que os estudos e as reflexões sobre o construtivismo, já viabilizaram a hipótese dos erros dos alunos serem tratados como uma construção do conhecimento através de um trabalho pedagógico significativo. Isto se configura em uma evolução do processo de ensino e de aprendizagem. Segundo Behrens (2000, p. 75), o professor com:

> Visão sistêmica é capaz de perceber que o erro pode vir a ser um caminho do acerto. Desafia seu aluno a encontrar novas respostas, a pesquisar outras possibilidades, permitindo que os colegas possam compartilhar da problemática levantada e juntos, professores e alunos, possam construir novas soluções. O momento se torna muito significativo e o erro pode vir a ser o pretexto para desafiar o grupo e o próprio aluno a encontrarem, em conjunto, o caminho para o sucesso.

No entanto, a realidade percebida não nos permite afirmar que os professores estejam totalmente inseridos nesta nova concepção de ensino e também de erro. Na verdade, estes admitem o lugar ocupado pelos erros, no processo de construção do conhecimento, segundo a teoria construtivista, porém, na prática, parecem não estar aptos a estimular seus alunos para a pesquisa de novas possibilidades a partir de respostas errôneas.

Como afirma Freire (1996, p. 125), a defasagem entre teoria e prática entre pensamento e ação, linguagem e ideologia, acerto e erro, assim como separar o ensino de conteúdos daquilo que o educando já conhece e, neste sentido, essa desvinculação interfere de forma negativa na aprendizagem dos sujeitos.

Nesta perspectiva, é ensinando matemática que podemos ensinar ao aluno como aprender e, assim estimulamos a este como exercer a curiosidade indispensável à produção do conhecimento.

6.2.2. Erros mais freqüentes com números racionais

Para os professores, uma das principais dificuldades verificada na aprendizagem dos números racionais está nas operações fundamentais. Todavia, os professores não consideram em suas colocações, que os alunos já possuem conhecimento de algumas regras dos números naturais que eles acabam estendendo aos números racionais, mas nem sempre as mesmas regras se aplicam em ambos os casos. Nas palavras do professor 2, as dificuldades dos alunos vêm:

> *Das próprias operações com os números naturais, e esses números racionais oferecem um certo grau de dificuldade, mesmo porque a operação envolve casas decimais, envolve o sistema decimal como um todo. Então desta forma, eles se atrapalham muito, tanto nas colocações de vírgula, quanto nas operações, sobretudo na multiplicação e na divisão desses números.*

O professor 1 reforça a afirmação anterior e acrescenta que maioria dos alunos não têm facilidade para interpretar problemas. Quando ele é levado a tomar decisões, refletir, ou a pensar ele praticamente não consegue fazer isto sozinho. Nas palavras dos professores:

PROFESSOR 1*: São as divisões, principalmente as divisões com os números racionais, que eu não sei o método ou a forma que os alunos aprendem na 4ª série, eu diria que quase oitenta por cento dos alunos que entram na 5ª série não sabem fazer divisão com os decimais. Ai você tem que procurar meios métodos diferentes para que eles possam adquirir este conhecimento.*

PROFESSOR 2: *A freqüência é nas operações, ... a dificuldade maior é, a freqüência maior é estas operações, a realização das operações, o entendimento, o porquê desta colocação de vírgula mesmo da operação de soma de casa decimais . Este conhecimento acho vem também já desde as operações com os números naturais, que não fica 100 por cento compreendido, entendido lá e se reflete aqui também.*

Podemos notar que nas falas dos professores existe uma forte tendência a justificar que a questão do erro dos alunos, com relação aos números racionais, tem origem na sua vida escolar anterior. Assim, as falas dos professores revelaram que os alunos vêm das séries anteriores sem preparo para tomar decisões sozinhos. Este aluno já vem cerceado de sua capacidade de pensar, fato que acaba por dificultar ainda mais a prática docente, em termos de inovação do processo.

6.2.3. As práticas avaliativas

Apesar dos professores não se referirem diretamente às provas escritas, notamos que a tendência principal é utilizá-las como principal elemento de avaliação. Desta forma, a prova caracteriza-se como indicador do rendimento escolar do aluno que, ao final do ano letivo, o promoverá ou não à série seguinte, mesmo que os conteúdos não estejam bem compreendidos. Neste sentido, a prova é um instrumento que a escola dispõe para a organização da instituição, mas que acaba por não resolver a questão do conhecimento construído pelo aluno.

Na declaração do professor 1 notamos referências à avaliações através de trabalhos em grupo e apresentações, não ficando restrito somente às provas escritas. Já o professor 2 avalia seus alunos, através de provas escritas, colocando certo ou errado e atribuindo uma nota, um peso.

PROFESSOR 1*: Através de avaliações, através de trabalhos em grupos, através de apresentações. Eu já fiz várias apresentações de gráficos, nos quais eles, os gráficos da feira de ciências que eles apresentaram aqui na* *frente, então cada equipe apresenta um para o outro. É participações dos alunos né, enfim tudo que está, e puder avaliar o aluno em todos os quesitos a gente avalia. Não só, restrito a provas, né. Acho que avaliação deve haver, mas não ficar só nisto.*

PROFESSOR 2*: É feita as avaliações através de provas, acho que basicamente se constata o grande grupo de avaliações são ainda aí. E se faz a correção da avaliação com certo ou errado e se atribui uma nota um peso a cada avaliação.*

Portanto, as avaliações continuam a ser uma referência sobre o rendimento escolar dos alunos. As provas são corrigidas pelo professor que faz o levantamento somente das respostas corretas e incorretas. Não há indícios de uma nova cultura avaliativa nos registros verificados.

Conforme o relato dos professores, após a correção, as provas são devolvidas para os alunos que por sua vez, tem a responsabilidade buscar sozinhos a superação de seus erros. Os professores corrigem as provas com caneta vermelha indicando onde o aluno errou, sendo que algumas vezes eles indicam também como deve ser feito o acerto, para que os alunos possam fazer as comparações. As correções das provas escritas são feitas individualmente, contudo existe a dificuldade fazer retomadas de correções individualmente com os alunos.

PROFESSOR 1*: Eu procuro sempre colocar ao lado a questão certa em caneta vermelha, pego a caneta vermelha e coloco ao lado, mostrando para o aluno como deveria ser feito. Aí através do erro ele olhe e faça a comparação né, e veja o que ele errou. Geralmente, eu faço, eu pego as minhas provas, geralmente, e faço no quadro a correção com eles, depois de corrigido. Mostrando o que deveria ser feito, o que eles não fazem, né. Porque que erram lá, porque não raciocinaram, não sabem.*

PROFESSOR 2*: Essa correção ela é realmente ela ocorre a gente marcando aonde que o aluno está errando . Muitas vezes eu repasso na própria avaliação, depende do tempo e do grau daquela avaliação se houver tempo suficiente eu já corrijo na hora a prova do o aluno, entrego aonde ele errou, aonde tem um sinal, se for sinais, ou operações, já indica ali e faz observações.*

Não podemos desconsiderar que o aluno, ao errar não deixa de pensar, contudo, ocorre uma lacuna nos conhecimentos, que impossibilita a conclusão de forma exata.

6.2.4 As práticas de trabalho com os erros dos alunos

Os professores entrevistados se referiram aos tratamentos que utilizam para lidar com os erros dos alunos na resolução de exercícios, observamos que suas respostas convergiram para a retomada dos conteúdos caso o aluno errasse, ressaltando a reconstrução do conhecimento através de outros métodos de ensino.

Ainda segundo os professores o erro só ocorre quando a matéria não foi 100% compreendida, havendo assim a necessidade de mostrar para o aluno a maneira correta através de outros tipos de perguntas, exemplificando para que o mesmo possa compreender. O professor 1 ressalta em sua resposta a necessidade da retomada de conteúdos:

> *Nós como professores, deveríamos através do erro, mostrar para ele fazer uma revisão, dar uma nova oportunidade para que o aluno aprenda este conteúdo que possivelmente não foi passado de uma forma clara para que o aluno entendesse que algum erro houve ali. E o professor tem de admitir que a parte dele não foi feita. Tem que retomar o conteúdo, explicar de uma maneira mais certa para que o aluno entenda.*

O trabalho docente de ambos os professores com relação ao erro é, predominantemente, tradicional. Mas sempre que possível, procuram trabalhar a partir da concepção construtivista. Nas palavras dos professores:

> PROFESSOR 2: *O construtivismo é a tendência, é a expectativa do trabalho, mas o trabalho é ainda tradicional.*
>
> PROFESSOR 1*: Eu diria que sou um professor assim, que não descarto o tradicional, eu uso muita coisa do ensino tradicional. Mas, em determinados assuntos da matemática eu procuro inserir a realidade do aluno , procuro trazer coisas que mostram a realidade. Coisas que estão acontecendo no momento. È muito mais fácil daí, você vai prender a atenção do aluno em sala de aula.*

Para os professores, sujeitos da pesquisa, quando existe a possibilidade de utilização de algum conhecimento concreto anterior sobre os conteúdos, torna-se mais fácil dar continuidade ao desenvolvimento do raciocínio do aluno sobre o assunto. Contudo, eles salientam em suas observações, a existência de um saber mal-estruturado que pode ocasionar um obstáculo para a aprendizagem muito difícil de superar.

Os professores descrevem que a formação que os alunos trazem das séries anteriores é equivocada com relação aos números racionais. Esta visão docente, possivelmente, deve-se à falta de clareza das especificidades dos campos numéricos: naturais e racionais, confusão que remonta desde a inserção da numeração racional na antigüidade. Isso pode ser verificado observando as dificuldades que os alunos apresentam quando realizam exercícios relativos às operações fundamentais com os números racionais

Para os docentes, fica a sensação de que este conteúdo não é bem trabalhado, evidenciando a existência de conflito no raciocínio dos alunos quando estes fazem a ampliação das regras dos números naturais, indiscriminadamente, para os números racionais, sendo que estas regras nem sempre podem ser consideradas.

Ambos os professores acreditam que as séries anteriores não fornecem o preparo necessário para o desenvolvimento dos conhecimentos na continuidade dos estudos. Os professores reforçam a questão da dificuldade que os alunos apresentam com as operações fundamentais, principalmente a divisão. Neste sentido, muitas vezes necessitam retomar este conhecimento em suas aulas para haver a possibilidade da continuidade do processo.

Os professores fazem referência, ainda, que os erros dos alunos podem ser resultantes dos conteúdos anteriormente trabalhados em sua vida escolar, e que não foram bem compreendidos. Esta atribuição de culpa/obrigações a séries anteriores faz com que se crie um círculo vicioso, no qual os professores continuam a manter a mesma atitude dos demais, ou seja, a superação dos erros fica por conta do próprio aluno e a escola se isenta desta tarefa/atribuição.

Com relação às sugestões oferecidas pelos professores para superação do erro, pudemos constatar que existe uma certa tendência ao trabalho educacional de bases construtivistas, pelo menos no que tange à teoria. Mas, na prática, existe a referência à impossibilidade do desenvolvimento no turno normal das aulas, sendo que a proposta sugere atividades em outro turno. Outra sugestão que emergiu foi a de trabalhar o conteúdo relacionado ao cotidiano dos alunos, chegando-se a abstração e formalização das informações de forma gradual.

A trajetória observada é que os professores têm pleno conhecimento sobre as dificuldades apresentadas por seus alunos, porém eles se sentem sem atitude para conseguir superar o problema sozinho. A principal dificuldade que pudemos constatar na superação do problema dos alunos reside na questão dos professores ainda estarem muito presos às práticas tradicionais de ensino.

Este modelo de educação não concebe a prática a partir daquilo que o aluno está pensando, e sim o trabalho sobre os modelos/conteúdos propostos no currículo das séries em referência.

Nesse sentido, fica bem evidente a afirmação de Moraes (1998, p. 54), que afirma a necessidade de fugir da pedagogia transmissiva e encontrar uma nova forma de trabalhar diferente da seqüência de conteúdos preestabelecidos. As disciplinas estanques, em que o *feedback,* em vez de emergir do exterior do indivíduo, deve constituir-se de mecanismos internos de reação, que partem de dentro do sujeito e de sua relação com os demais indivíduos e sua realidade.

Mesmo com os professores tendo conhecimento da proposta construtivista, não pudemos observar nenhum deles dizendo que, a partir da observação dos erros, montaram uma problematização concreta da situação para intervir naquele saber que ficou incompleto, procurando o aprofundamento das estruturas, o que direcionaria o aluno à aprendizagem.

6.3. OS ERROS NA VISÃO DOS ALUNOS

Foram feitas também, entrevistas semi-estruturadas com os alunos participantes da pesquisa. Estas seguiram o roteiro (Anexo 5) sendo que visávamos coletar depoimentos destes a respeito das dificuldades encontradas na aprendizagem dos números racionais.

As entrevistas com os alunos selecionados nas provas, foram realizadas na biblioteca da escola, pois estávamos preocupados com a hipótese dos alunos ficarem constrangidos com a presença dos professores. É importante ressaltar que na sala dos professores sempre havia um professor em permanência. O tempo médio de duração das entrevistas com os alunos foi de 50 minutos em cada turma e a transcrição das mesmas também foi realizada pela pesquisadora (Apêndice 4).

Os alunos tinham conhecimento que seus professores de Matemática não poderiam estar escutando as entrevistas, pois estavam em sala de aula com o restante dos alunos. Tínhamos combinado com os professores e com a diretora da escola, que os alunos seriam retirados da sala de aula para as entrevistas, somente nas aulas de Matemática.

Durante o percurso que fazíamos entre a sala de aula até a biblioteca, os alunos ficavam ansiosos querendo saber como seria feita a entrevista; se os alunos das outras turmas também estariam lá, se iriam falar um de cada vez, como seria estabelecida um ordem das falas; se depois das entrevistas voltariam para a aula de matemática ou poderiam ficar conversando mais tempo. Alguns alunos se preocupavam também com a vergonha de ter que falar sobre os seus erros na frente dos colegas de sala.

6.3.1 As principais dificuldades discentes em relação à aprendizagem dos números racionais

No momento das entrevistas os alunos estavam bem tranqüilos, e a maneira informal, como os alunos foram tratados, contribuiu para que as respostas fossem elucidativas. Deixamos bem claro aos alunos que as suas respostas não seriam de conhecimento de seus professores, assim, pudemos perceber que eles estavam felizes por terem a oportunidade de conversar com um professor que não pertencia a escola. Os assuntos abordados durante a entrevista, não eram questões que eles conversam livremente com seus professores, isto fez com que pudessem desabafar sobre os seus temores com relação aos erros, seus professores e as suas dificuldades de aprendizagem.

As entrevistas foram feitas em grupos que foram separados por série, sendo que cada aluno respondia a todas as perguntas, para só então prosseguirmos com os demais. Por este motivo, notamos uma certa repetição nas respostas, mas este tipo de entrevista foi a que mais se ajustou a sensação de um ambiente mais propício aos alunos. O interesse era ter um ambiente que não os intimidasse, onde fosse possível obter respostas que fossem mais próximas das suas realidades. Era necessário, portanto, obter a confiança dos alunos para não obtermos respostas fabricadas que pudessem magoar seus professores.

Agrupá-los fez com que percebessem que errar não era feio, e que todos poderiam cometer erros sem motivo para culpas. Desta forma, eles puderam verificar que mesmo os colegas considerados "inteligentes" também tinham dificuldades. Na continuidade das entrevistas, as respostas foram ficando mais ricas e com informações que nos ajudaram muito a compreender o contexto do erro em que os alunos estavam inseridos, além de facilitar a confirmação de algumas contradições com relação à entrevista com os professores.

Para alguns dos alunos, a certeza sobre os erros que cometeram na avaliação, ocorre quando o professor devolve suas provas com riscos em vermelho ou com alguma observação escrita.

> *Quando tem um X, um errado, um risquinho.* (aluno 5F)
> *Quando o professor risca, ou tá em vermelho.* (aluno 5E)
> *Quando tem um sinal de errado, ou o professor assinala em baixo dizendo que está errado.* (aluno 7A*)*

Geralmente, quando o professor entrega as provas com as correções, a maioria dos alunos não consegue compreender onde errou e prossegue mantendo suas dúvidas. Em nenhum momento das entrevistas foi observada alguma referência às correções feitas em conjunto com os alunos, que possibilitaria a troca de saberes, e a interação de informações.

Os alunos entrevistados diziam que já saiam das provas sabendo que erraram, pois observavam o resultado de outros colegas e constatavam que suas respostas eram diferentes, ou ainda, quando não sabiam como resolver o problema, e colocavam qualquer resposta, mesmo sabendo que poderia estar errada.

> *Quando eu olho no dos outros e o meu está diferente, ou o professor passa no quadro e está diferente.* (aluno 5B)
> *Quando acho que não prestei atenção, e eu começo a 'chutar'.* (aluno 6F)
> *Quando eu vou 'chutando', eu já sei que erro.* (aluno 6 F)

Em alguns casos, observando a fala do aluno, constatamos referência de uma certa fragilidade deste diante do processo de aprendizagem a tal ponto em que se considera incapaz de aprender. Em outros casos, alguns alunos, colocam a culpa desta situação em seus professores.

Porque eu não consegui aprender, daí eu erro. (aluno 5G)
Porque eu não entendi a matéria". (aluno 5D)
Porque o professor não explica direito, ou então eu não lembro daquilo. (aluno 7B)

O conteúdo dos números racionais é considerado, pelos alunos, como sendo mais difícil de aprender, a partir do momento em que não conseguem compreender as explicações do professor, começam a se distrair, até perder o interesse às aulas. A questão se agrava ainda mais quando o resultado das provas é fornecido e o aluno, com a prova cheia de anotações de erros, percebe que corre o sério risco de reprovar.

Quando cinco alunos responderam que *"erram porque não prestam atenção às aulas",* identificamos um certo sentimento de culpa assumido por eles, contudo, se não prestaram atenção nas aulas, pode ter sido porque não houve, pelo professor, a apresentação de uma atividade que fosse capaz de motivá-los.

As falas dos alunos são, também, esclarecedoras com relação aos erros cometidos por eles nas provas que envolvem os números racionais, revelando que este conteúdo é mais difícil de aprender. Os alunos também falam sobre suas distrações, frente às explicações dadas pelos professores sobre este conteúdo.

Porque é mais difícil, bem mais difícil. (aluno 5C*)*
É um pouco mais difícil, aí tem vezes que eu não presto atenção, fico brincando nas aulas, e daí....(aluno 6B*)*
Porque não prestei atenção no que o professor explica, por não fazer a lição". (aluno 5B)
Eu acho que erro, ... igual eu disse, que eu por exemplo: não prestei muita atenção nas aulas porque talvez eu fiquei brincando nas aulas. Mas nem sempre isto acontece, e quando acontece, talvez por uma distração, que a gente olha para os lados quando o professor está explicando uma parte mais interessante da aula, eu não prestei atenção e daí pode cair aquela coisa na prova e eu não sei". (aluno 6C)

Normalmente, o aluno começa a afastar o seu pensamento das aulas, quando acredita que irá reprovar, tendo que refazer o curso. A partir daí, pensa que está ali perdendo tempo, enquanto poderia estar brincando livremente em um outro ambiente mais prazeroso. Neste momento crucial, a intervenção do professor é de suma importância para mostrar ao aluno como pode superar os seus erros, obtendo a compreensão do assunto e, assim viabilizar a concretização do seu sucesso escolar.

Perguntamos aos alunos sobre qual era a sua a opinião sobre o erro e obtivemos as mais variadas respostas, contudo, observamos a clara referência de que para eles errar é somente o contrário de acertar.

> *Errar é não acertar as coisas certas.* (aluno 5 A)
> *É uma coisa errada, é quando não está certo.* (aluno 5 E)
> *É você começar e tá errado, aí você apaga e faz de novo até achar o certo.* (aluno 5B*)*
> *Ah, sei lá, o erro é quando você não sabe fazer as coisas direito, quando você não faz as coisas que precisava.* (aluno 6E)
> *Você faz uma conta que dá errado e você faz outra que dá outro número, e vai lá pergunta para o professor, e ele responde, tá errado. Você faz outra menor, tá errado, faz outra maior ainda e ele responde tá errado*.(aluno 5F*)*

Observa-se nas respostas dos alunos uma atitude moralística em torno dos erros, um “refrão” que algo está errado, sem saber o quê, como e por quê.

Já foi comentado nesta pesquisa que alguns alunos alegam que "não aprenderam porque o professor não explicou direito" ou que "erraram porque não conseguiram aprender" ou mesmo que "não sabiam fazer e 'chutaram'". Uma questão que nos chamou a atenção com relação às respostas é que quando eles não sabem fazer um exercício, preferem arriscar qualquer resposta do que não apresentar nenhum raciocínio. Esta questão deixa claro que os alunos, de alguma maneira, mostram as suas dificuldades para os professores, mas este pedido de ajuda nem sempre é compreendido pelos docentes.

A maneira como os alunos fazem menção aos erros, levam-nos a perceber que eles continuam a se culpar por errar e que o professor é, ainda, o detentor absoluto dos conhecimentos. As evidências apresentadas, nas entrevistas com os alunos, demonstram que tudo que o professor faz ou diz, é uma verdade que não poderá ser questionada, ressaltando a sua fragilidade diante do poder exercido pelo professor. O aluno praticamente despreza aquele saber que lhe foi apresentado anteriormente, e passa a aceitar somente o que o professor ensinou.

> *Ah, eu não consegui fazer, daí eu erro.* (aluno 6D)
> *É quando a gente não presta atenção nas aulas e daí na hora das provas a gente não sabe nada.* (aluno 6F)

É assim, não prestar atenção nas aulas, daí você não vai saber fazer e vai começar a chutar as coisas. (aluno 6B)
O erro é, por exemplo: è quando eu não sei fazer. Por exemplo: eu não prestei atenção nas aulas e cai àquela coisa na prova e eu não sei fazer, daí é o erro.(aluno 6C)
É quando está tudo errado na folha, está tudo assinalado com canta vermelha.(aluno 7D)
É quando não está conforme o professor ensinou.(aluno 7 A)

A partir das respostas dos alunos, entendemos que estes ainda carregam a culpa pelos seus erros, comprometendo sua auto-estima. Acreditamos que a responsabilidade pelo erro não pertence unicamente aos alunos, trata-se de algo muito complexo que certamente envolve outros atores do processo educacional, o que dificulta a reversão da fragilidade do ensino.

Os significados analisados a partir das entrevistas só vêm reforçar que a reformulação da prática educativa deve ocorrer o quanto antes. Segundo Ferguson (1992, p. 268), quase todos nós temos com as escolas "alguns conflitos não resolvidos, e este fato pode intimidar em algum nível da nossa consciência, podendo nos afastar para sempre de desafios e novos aprendizados".

É importante ressaltar que o professor, como responsável pelo processo ensino e aprendizagem, deve buscar o equilíbrio em sua prática pedagógica. Este profissional não deve assumir uma atitude autoritária perante os alunos, nem mesmo uma postura de acomodação diante das situações didático-pedagógicas.

O docente não deve entender que a Teoria Construtivista prega uma filosofia de liberdade total do processo pedagógico, mas sim que nesta proposta todas as atividades educacionais devem ser sistematicamente preparadas para que nenhum aluno fique ocioso e quando isto acontecer o professor deverá estar pronto para integrá-lo novamente ao processo.

Segundo Ferguson (1992, p. 297), as pesquisas também têm demonstrado que as crianças aprendem melhor com adultos espontâneos, criativos, incentivadores, que buscam significados em lugar de fatos apenas. Sendo assim, os professores devem ter auto-estima elevada, encarando a sua função como mediadora e não como controladora dos alunos de aprendizagem mais lenta. Os professores devem estar mais interessados no processo de aprendizado do que na execução de objetivos específicos; admitindo seus próprios erros; acolhendo as idéias de seus alunos; discutindo sentimentos; fomentando a cooperação; encorajando a participação dos estudantes em seu trabalho; e proporcionando recursos além do cumprimento do dever.

Mizukami (1986, p.44), reforça a idéia de que a atitude do professor deve ser daquele que intervém, não para se opor aos desejos e necessidades ou à liberdade e autonomia do aluno, mas para ajudá-lo a ultrapassar suas carências gerando autonomia, para que ele possa distinguir a verdade do erro, e compreender as realidades sociais e sua própria experiência.

As respostas dos alunos foram evidências que contribuíram para a melhor compreensão sobre qual é a concepção de erro praticada pelos professores de Matemática e também assumida pelos alunos.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A ciência, tal como a conhecemos hoje, não foi construída a partir de um padrão pré-estabelecido. Suas estruturas precisaram passar por um processo de rupturas e retrocessos. O mesmo aconteceu com a matemática enquanto ciência, pois foram necessários muitos séculos para que suas estruturas fossem consolidadas. Todavia, eventualmente, esta ciência necessitou passar por novas estruturações, já que, de maneira geral, a comunidade científica precisa estar constantemente reavaliando novas descobertas, e descartando outras que já estavam consolidadas durante muitos anos.

É importante que a sociedade, a partir de um olhar histórico, esteja pronta para aceitar que em nosso universo nada é definitivo, que as mudanças são necessárias para a harmonia das sociedades e, também, para a preservação da vida no mundo em que vivemos.

A educação também enfrenta uma grande crise, em especial a disciplina de Matemática pelo papel seletivo e excludente que tem exercido no processo educacional, tendo em vista a reconstrução de uma nova história no processo de ensino e aprendizagem desta ciência. Segundo Polettini (1999, p.255) o professor de Matemática ainda tem uma visão dualista da Matemática, caracterizada pelo certo e errado, e esta visão implica na dificuldade do docente em organizar ações em sala de aula de outro tipo de abordagem da Matemática.

Diante desta nova realidade é inconcebível que o erro do aluno seja ignorado, posto que o docente, a partir dos erros verificados, poderá utilizar esta informação como um indicador das dificuldades, e a partir daí, idealizar uma proposta metodológica que se transformará em uma oportunidade de aprendizagem para o aluno. Portanto, o erro dos alunos, oferecerá um grande potencial para a melhoria do processo ensino aprendizagem.

Desta forma, a pesquisa buscou dados que evidenciassem as idéias de professores de Matemática e alunos das séries finais do ensino fundamental sobre os erros no processo ensino e aprendizagem dos números racionais.

Os alunos, em uma análise geral, atribuem os seus erros a uma falta de capacidade de realizar aquilo que foi transmitido pelo professor. Quando eles não conseguiam perceber seus erros, demonstravam um certo desconforto com a situação. A maioria dos alunos envolvidos na pesquisa tinha curiosidade de saber onde errou e como poderiam realizar o mesmo problema da maneira correta. Muitos confessaram que olhavam nas provas dos colegas para comparar as respostas com as suas.

Quase que na totalidade das entrevistas, pudemos notar que os alunos apresentaram muito constrangimento para falar sobre seus erros, sentindo-se responsáveis perante os professores e os colegas. A culpa acaba estimulando a baixa auto-estima, fazendo com que a escola seja um lugar tedioso e que o professor seja aquela pessoa que ao invés de ajudar, só confunde mais a aprendizagem.

Com relação aos professores, constatamos que estes possuem uma visão basicamente tradicional do processo ensino e aprendizagem, apesar conhecerem outras propostas pedagógicas. As evidências comprovam que existe, por parte dos professores, o desejo de mudança nas suas práticas pedagógicas, considerando que o erro dos alunos pode ser superado a partir de uma prática que melhor instrumentalize a aprendizagem destes mas, no momento, nada é efetivo.

Os professores admitem que o conhecimento matemático pode se tornar mais fácil aos alunos, na medida em que possam oferecer mais utilidade às necessidades destes (sugestões de atividades sobre números racionais no apêndice 2).

Durante as entrevistas, os docentes não apresentaram um comportamento autoritário, todavia, ainda não conseguiram encontrar um ponto de equilíbrio entre a autoridade e a liberdade com relação a seus alunos, e este motivo está dificultando o avanço da mudança de suas práticas com relação ao erro.

Ainda nas entrevistas, constamos que os professores não aceitam interpretações diferentes das suas nas respostas fornecidas pelos alunos. Este fato nos causou preocupação, pois os docentes, mesmo fazendo um discurso mais reflexivo e crítico, continuam motivando seus alunos para a submissão às regras impostas, prejudicando, com isso, o desenvolvimento da aprendizagem independente.

Apesar de o discurso do professor estar direcionado a aceitação dos erros, estes ainda são tratados de forma superficial, sem existir um trabalho efetivo que possa levar o aluno a compreender e superar as suas dificuldades. Nenhum dos professores sequer comentou que, após verificarem os erros nas provas, faziam a discussão das idéias entre o grupo, ou mesmo algum tipo de confrontação entre os erros com a possibilidade de superação destes.

As correções das provas, pelos professores, apontaram que o critério utilizado é o de considerar apenas a resposta correta ao final da questão, sem observar se o aluno desenvolveu algum raciocínio, equivocando-se somente na resposta final. Esta forma de consideração dos erros faz com que os alunos continuem sem saber qual foi o erro do problema apresentado nas avaliações.

Os erros sinalizam claramente a dificuldade que os alunos possuem em relação aos números racionais, todavia o professor, a partir destes erros, poderia estar refletindo e investigando uma maneira diferente de trabalhar o conteúdo que ficou incompleto para que ocorra a aprendizagem. No entanto, a ajuda do professor é ainda bem limitada, sob a desculpa de o programa ser muito extenso o que impossibilita um trabalho mais efetivo.

Os professores atribuíam os erros dos alunos, com relação aos números racionais, às séries anteriores, mas este fato acabou revelando a inexistência de diálogo e reflexão entre os pares, ou seja, a culpa recaia sobre as séries iniciais, alegando que as professoras não possuíam formação matemática específica.

Estes posicionamentos perdem a credibilidade uma vez que os alunos da 6ª e 7ª série já participavam de aulas com professores com formação Matemática e, mesmo assim, também não estavam conseguindo, como mostraram as provas, superar os obstáculos em relação aos conceitos dos números racionais.

Pelo que observamos, os docentes não estão conseguido propiciar aos alunos a oportunidade de pensar livremente, nem de explorar a aplicação dos conceitos sobre os números racionais de forma significativa.

Neste sentido, salientamos que a formação destes professores parece ser muito frágil no que tange ao trabalho pedagógico com relação aos erros dos alunos. Esta lacuna não pode mais permanecer aberta, sendo necessário que as licenciaturas passem a se interessar mais sobre esta questão.

Normalmente, as Licenciaturas de Matemática são constituídas por três anos de disciplinas científicas, seguidas por um ano de disciplinas pedagógicas (Baldino, 1999, p. 228), esta organização do curso acaba por dificultar ao licenciado o maior contato com os alunos, e assim a possibilidade de poder rever, modificar e aprofundar os conteúdos metodológicos, que durante a sua formação fica restrito àquilo que ele traz das suas experiências passadas. Esta lacuna, tem como conseqüência a presença de uma fragilidade inicial na prática profissional deste futuro professor, além dessa formação poder ficar equivocada com as dúvidas percebidas no campo de estágio, especialmente, quando esses formandos observam trabalhos desenvolvidos por docentes iniciantes. Essa situação fica ainda mais complicada quando esse formando inicia sua prática profissional e compartilha teorias aprendidas em sua formação com colegas que já possuem longa experiência de sala de aula, e estes alegam que o melhor a fazer é seguir o que sempre foi feito. Assim, o novo professor acaba por se sentir como um ignorante, pois é tratado como alguém que não sabe, que não aprendeu nada, e em geral, acata o discurso dos pares mais antigos, temendo não ser bem acolhido em seu ambiente de trabalho.

Mencionando esta situação, Polettini (1999, p. 250) afirma que:

> A experiência em si em nossa vida é importante, mas a análise dessa experiência é muito mais importante, e como a reflexão sobre as experiências passadas e presentes se realiza desempenha um papel fundamental para o desenvolvimento profissional do professor. Na profissão o professor é rodeado por desafios o tempo todo.

Durante a pesquisa, à medida em que as conversas com os professores se desenvolviam, a idéia de mudança podia ser notada nos seus discursos, todavia, esta reflexão permanecia apenas no discurso ou em alguns focos isolados nas práticas pedagógicas, como por exemplo as metodologias apontadas como inovadoras. Os professores envolvidos na pesquisa participavam, com uma certa freqüência, de palestras e cursos oferecidos pelo Núcleo de Educação de Araucária, todavia, durante a maior parte do tempo mantinham a sua idiossincrasia sobre o assunto.

Levando-se em consideração os fatos observados, a questão da mudança do ensino da matemática envolve uma reestruturação dos cursos de Licenciatura, em relação à inclusão de uma disciplina que trabalhe as concepções de erro e suas implicações para a aprendizagem dos alunos. Isso possibilitaria que o professor, desde a sua formação, tenha um novo olhar sobre o erro do aluno, tomando-o como uma possibilidade de refletir sobre a aprendizagem.

As tendências de formação docente apontam para esse século um profissional com uma atitude de pesquisa em relação ás novas teorias e constantemente se reciclando em suas atividades docentes. Para Polettini (1999, 252), o professor deve ser um pesquisador de sua prática, procurando interpretar o que acontece em sua sala de aula e no seu ambiente profissional, no sentido de relacionar o currículo vigente e as suas ações para a aprendizagem dos alunos.

Com isso, buscará novas maneiras de abordar um assunto sem se limitar apenas a uma inovação metodológica, mas a um processo em que o professor presta mais atenção às estratégias de solução adotadas pelos alunos e as razões dadas por eles para a utilização destas. Nessa abordagem, o professor aprende a escutar os alunos para melhor compreender os processos desenvolvidos por eles na resolução de problemas, sobretudo, entender melhor como utilizar métodos que propiciem efetivamente a aprendizagem aos alunos.

Em nossas observações ficou evidente a necessidade da troca de idéias entre os professores que atuam na escola, tendo em vista que, somente através do diálogo e da reflexão, estes poderão trocar de experiências do que é feito em sala de aula. A instituição escolar deve fomentar seminários e palestras que envolvam os docentes e toda a comunidade para a melhor integração daquilo que é o cotidiano das pessoas e o que está sendo ensinado.

Somente a partir do hábito constante de questionamento o professor poderá reverter às fragilidades existentes no processo de ensino e de aprendizagem de Matemática, e a partir do amadurecimento de suas reflexões os resultados almejados serão atingidos. É importante que o professor tenha a consciência de que a aprendizagem é uma atividade social extremamente relevante, não devendo deixá-la de lado sob o risco da perda da harmonia humana.

A escola deve perder a rigidez e a disciplina impostas para ganhar naturalidade e criatividade, já que as normas disciplinares nascem do consenso do grupo. O horário e o tempo de aprendizagem ficam condicionados à construção do saber e não ao tempo pré-estabelecido por um papel.

Em última instância, a pesquisa mostrou que as concepções de erros dos professores participantes não trazem avanços em relação às propostas reflexivas e interacionistas de um trabalho com o erro, especialmente com erros de números racionais. Isto também decorre das limitações observadas em relação à compreensão dos atributos principais dos conceitos dos números racionais.

REFERÊNCIAS

ABRAHÃO, Maria Helena B. **Avaliação e erro construtivo libertador:** Uma teoria - prática includente em educação. Porto Alegre: EdiPUCRS, 2001.

ALVES, Alda Judith. **O planejamento de pesquisas qualitativas em educação.** Caderno de Pesquisa. São Paulo, maio 1991, p.53-61.

ANDRÉ, Eliza D. A . de. **Etnografia da prática escolar.** Campinas: Papirus, 1995.

ANDRE, Marli E.D. e PASSOS, Laurizete. **Para além do fracasso escolar:** uma redefinição das práticas avaliativas. In: AQUINO, Júlio (org.). **Erro e fracasso na escola:** Alternativas teóricas e práticas. São Paulo: Summus, 1997.

AQUINO, Júlio (org.) **Erro e fracasso na escola:** Alternativas teóricas e práticas. São Paulo: Summus, 1997.

ARAUCÁRIA (Município). **Núcleo Regional de Educação**. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. Atividades Matemáticas: ciclo fundamental. Araucária, 2002.

BALESTRA, Mª Marta M. **O ensino de matemática no Brasil à luz do pensamento de Descartes:** uma abordagem histórica e filosófica**.** Dissertação (Mestrado em Educação). Curso de Pós - Graduação em Educação da Pontifícia Universidade Católica do Pr. Curitiba, 2004.

BAILLAUQUÊS, Simone. **Competências profissionais e representações do ofício e da formação.** In: PERRENOUD, P. (org.) Formando professores profissionais - Quais estratégias? Quais competências? **-** 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2001, p. 37-54.

BALDINO, Roberto R. **Pesquisa-ação para formação de professores:** leitura sintomal de relatórios. In. :BICUDO, Mª. Aparecida V (org.). **Pesquisa em educação matemática:** Concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 221-245.

BEHRENS, Marilda A . **O Paradigma emergente e a prática pedagógica** - Curitiba, 2. ed.: Champagnat: 2000.

BICUDO, Mª. Aparecida V (org.). **Pesquisa em educação matemática:** Concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999.

BRONOWSKI, Jacob. **O senso comum da ciência**. Trad. de Neil Ribeiro da Silva. São Paulo: Ed. da Universidade de São Paulo, 1977, p. 85-126.

BROUSSEAU, Guy. **Les obstacles epistèmologiques et les problemes em mathèmatiques.** RDM. vol.4, n 2, Grenoble, 1983, pp 165-198.

BROWN, M. **Place value and decimales**. In K.M. Hart (ed.) Children's understanding of mathematics: 11-16. John Murray. Londres, 1981. In: CENTENO, Júlia P. **Números decimales - Porquê? Para que?** Espana: Editorial Síntesis, 1988.

CANDAU, Vera M. (org.). **A Didática em Questão.** Rio de Janeiro: Editora Vozes, 4. ed., 1985.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. e SCHLIEMAN, A. **Na vida dez, na escola zero.** São Paulo: Cortez, 1989.

CENTENO, Júlia P. **Números decimales - Porquê? Para que?** Espana: Editorial Síntesis, 1988.

CUNHA, Maria I. **Relação ensino e pesquisa,** In: ALENCASTRO, Ilma (Org.) Didática: O ensino e suas relações. Campinas: Papirus, 1996.

CURY, Helena N. (org.). **Formação de Professores de Matemática:** Uma Visão Multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

CURY, Helena N. **As concepções de matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos,** Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade Federal do Rio Grande do Sul, 1994.

D'AMBRÓSIO, U**. A história da matemática:** Questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, Mª Aparecida V. (org.) **Pesquisa em educação matemática:** Concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, pp.97-115.

DAVIS, Philip J. e HERSH, Reuben. **A experiência Matemática**. Livraria Francisco Alves e Editora S.A., 1985.

DOLLE, Jean-Marie. **Para compreender Jean Piaget.** Rio de Janeiro: Guanabara, 1991.

DOUADY, R. **Approche des nobres reels en situation scolaire** - In R.D. Universite de Paris, 1980. In CENTENO, Júlia P. **Números decimales - Porquê? Para que?** Espana: Editorial Síntesis, 1988.

DUARTE, Rosália. **Pesquisa qualitativa:** reflexões sobre o trabalho de campo. Revista Educação/PUC. Cadernos de Pesquisa n. 115, Rio de Janeiro, março/2002,p. 139-154.

DUTRA, Luiz Henrique A . **Introdução à teoria da ciência.** Florianópolis: Editora da UFSC, 1998, p.11-26.

FERGUSON, Marilyn. **A conspiração aquariana,** Trad. Carlos Evaristo Costa, 7. ed. Rio de Janeiro: Record, 1992.

FIORENTINI, Dario e LORENZATO, Sérgio. **Iniciação à investigação em Educação Matemática**. Campinas: FE/Unicamp - Cempem, 2001.

______ e MIORIM, Mª. Angela (org.); **MARCHESI**, Armando (et. al.). **Por Traz da Porta que Matemática Acontece?** Campinas: FE/Unicamp: Cempem, 2001.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da indignação:** cartas pedagógicas e outros escritos. São Paulo: UNESP, 2000.

______. **Pedagogia da autonomia:** Saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996 (coleção leitura).

FREIRE, Paulo e SHOR, Ira. **Medo e ousadia. O cotidiano do professor.** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1986.

GADOTTI, Moacir. **Perspectivas atuais da educação.** Porto Alegre: Artmédicas Sul, 2000.

FREUDENTHAL,H **Mathematics as na education task**. Dordrecht: Reidel Publishing Company, 1973. In: SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica:** A questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.

IFRAH,G. **Os números - A história de uma grande invenção.** Trad. Stela M. F. Senra. 6. ed. São Paulo: Globo, 1994.

IGLIORI**,** Sonia B. C. **A noção de "obstáculo epistemológico" e a educação matemática.** In : MACHADO, Silvia D. A. .et.al. **Educação matemática:** uma introdução. São Paulo: EDUC, 1999, p. 89-113.

KUHN**,** Thomas S. **A estrutura das revoluções científicas**. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1982.

LA TAILLE, Yves de. **O erro na perspectiva piagetiana.** In: **AQUINO,** J.G. (org.). **Erro e fracasso na escola: Alternativas teóricas e práticas.** São Paulo: Summus, 1997, p. 25-44.

LAKATOS, Imre. **Proofs and Refutations:** The Logic of Matematical Discovery. Cambridge: Cambridge University Press. WORRALL, JOHN e ZAHAR,ELIE(Ed.) 1976/ Ed. em Português **A Lógica do Descobrimento Matemático** Provas e Refutações**,** Rio de Janeiro**:** Zahar , 1978.

LUCKESI**,** C.C. **Avaliação da aprendizagem escolar.** São Paulo: Cortez, 1995.

LÜDKE, M & ANDRÉ,M. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU,1986.

MACEDO, Lino. **Ensaios construtivistas.** São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

MATUI, Jiron. **Construtivismo - Teoria construtivista sócio-histórica aplicada ao ensino**. São Paulo: Moderna, 1995.

MESQUIDA, Peri. **Piaget e Vygotski:** um diálogo inacabado. Curitiba: Champagnat, 2000.

MICOTTI, Mª Cecília O. **O ensino e as propostas pedagógicas.** In: BICUDO, Mª Aparecida V. (org.) **Pesquisa em educação matemática:** Concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p.153-167.

MIGUEL, Antônio, MIORIN, Maria Angela. **O ensino de matemática no primeiro grau.** São Paulo: Atual, 1986.

MIGUEL, Antônio, MIORIN, Maria Angela. **História na educação matemática-propostas e desafios** - Belo Horizonte: Autêntica, 2004.

MINISTÉRIO **de Educação e do Desporto.** Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Lei 9.394 de 24 dez. 1996.

______ **de Educação e do Desporto, Secretaria de Educação Fundamental.** Parâmetros Curriculares Nacionais(PCN): Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

MIORIN, Mª. Ângela. **Introdução à história da educação Matemática.** São Paulo: Atual, 1998.

MIZUKAMI, Maria G. **Ensino:** as abordagens do processo. São Paulo: EPU, 1986.

MORAES, Maria Cândida. **O paradigma educacional emergente.** Campinas: Papirus, 1998.

MORAIS, João F. R. de. **Filosofia da ciência e da tecnologia:** Introdução metodológica e crítica. Campinas: Papirus, 5. ed., 1988, p.83-96.

MOYSÉS, Lúcia. **Aplicações de Vygotsky à educação matemática**. Campinas: Papirus, 1997. (Coleção Magistério: Formação e trabalho pedagógico).

ONUCHIC, Lourdes de R**. Ensino - aprendizagem de matemática através da resolução de problemas**. In. :BICUDO, Mª. Aparecida V (org.). **Pesquisa em educação matemática: Concepções & perspectivas.** São Paulo: UNESP, 1999, p. 199-218.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática:** Uma análise da influência francesa**,** Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

PAVÃO, Zélia M. **Avaliação da aprendizagem:** concepções e teorias da prática. Curitiba: Champagnat, 1998.

PERRENOUD, Phillippe, PAQUAY, Léopold; ALTET, Marguerite; CHARLIER, Évelyne;(org.). Trad. Fátima Murad e Eunice Gruman - **Formando professores profissionais - Quais estratégias? Quais competências?** 2 ed. - Porto Alegre: Artmed, 2001.

PINTO, Neuza B. **O erro como estratégia didática o estudo do erro no ensino da Matemática elementar**. Série Prática Pedagógica. Campinas: Papirus, 2000.

______. **Concepção de Matemática em Coménius,** Anais do 2º Simpósio de pesquisa da FEUSP - Didática, teorias de ensino e práticas escolares. São Paulo: FEUSP, 1995.

POLETTINI, Altair F.F. **Análise das experiências vividas determinando o desenvolvimento profissional do professor de matemática**. In. :BICUDO, Mª. Aparecida V (org.). **Pesquisa em educação matemática:** Concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, p. 221-245.

POPPER, Karl R. **Conjecturas e refutações**. Trad. de Sérgio Bath. Brasília: Universidade de Brasília, 2. ed. 1982, p. 23-58.

ROSA, Sanny S. da. **Construtivismo e mudança.** 4. ed. São Paulo: Cortez, 1996. (Coleção questões da nossa época, v. 29).

SANTOS**,** Boaventura S. **Introdução a uma ciência pós-moderna** . Rio de Janeiro: Graal, 1989, p. 31-45.

______ **A crítica da razão indolente:** contra o desperdício da experiência. v. 1, São Paulo: Cortez, 2000, p. 55-117.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação matemática crítica:** A questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.

SWAN, M. **The meaning and use of decimals**. Shell Center for mathematical education, University of Nottingham, 1983 In: CENTENO, Júlia P. **Números decimales - Porquê? Para que?** Espana: Editorial Síntesis, 1988.

TEIXEIRA, Leny R. M. **Como os professores interpretam os erros dos alunos das séries iniciais sobre o sistema de numeração**, Curitiba: I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática - SBEM, 2002, p. 199-214.

VASCONCELLOS, Maria E. de. **Pensamento sistêmico:** O novo paradigma da ciência. Campinas: Papirus, 2002.

ZUNINO, Delia L de. **A matemática na escola: aqui e agora,** Trad. Juan Llorens 2.ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 - REFERÊNCIAS CRONOLÓGICAS DA NOTAÇÃO NUMÉRICA 102
APÊNDICE 2 - ALGUMAS SUGESTÕES PARA ATIVIDADES COM OS NÚMEROS RACIONAIS 105
APÊNDICE 3 - ENTREVISTAS COM OS PROFESSORES 111
APÊNDICE 4 - ENTREVISTA COM OS ALUNOS 118

APENDICE 1

REFERÊNCIAS CRONOLÓGICAS DA NOTAÇÃO NUMÉRICA

DATA	HISTÓRIA DA NOTAÇÃO NUMÉRICA
30.000/20.000 a. C	Os primeiros ossos entalhados da pré-história. Surgimento dos algarismos sumérios, "protoelamitas" e hieroglifos egípcios
2.700 a.C	Surgimento dos algarismos cuneiformes sumérios.
2.600/2.500 a.C	Aparecimento dos algarismos hieráticos egípcios
Segunda metade do III milênio a.C	Os semitas mesopotâmicos tomam de empréstimo os algarismos cuneiformes sumérios, adaptando-os pouco a pouco à base dez.
Primeira metade do II milênio a.C	A numeração decimal cuneiforme assírio-babilônica (sistema comumente usado) suplanta pouco a pouco o sistema sexagesimal sumérico e se expande no Oriente próximo.
1.900/1.800 a.C	Surge a mais antiga numeração escrita posicional conhecida entre os sábios babilônicos (sistema de base sessenta e de grafia cuneiforme).
Segunda metade do II milênio a.C	A numeração hierática egípcia chega ao termo de sua evolução.
Final do séc. XIV	Surgimento dos mais antigos algarismos chineses conhecidos.
Início do I milênio a.C	Os hebreus tomam de empréstimo os algarismos hieráticos egípcios.
Final do séc. VIII a.C	As mais antigas comprovações conhecidas da numeração aramaica.
Final do séc. VI a.C	As mais antigas comprovações conhecidas da numeração fenícia.
Segunda metade do 1º milênio a.C	Difusão dos algarismos aramaicos pelo Oriente Próximo (Mesopotâmia, Síria, Palestina, Egito, norte da Arábia).
Séc. V a.C	Surgimento da numeração grega acrofônica em Ática. Surgimento da numeração acrofônica da Arábia do sul nas inscrições sabeítas.
Séc. IV a.C	Difusão da numeração grega acrofônica pelos Estados do mundo helênico.
Final do séc. IV, início do séc. III a.C	Os primeiros testemunhos conhecidos da numeração grega alfabética surgem no Egito.
Meados do séc. III a.C	Difusão da numeração aramaica no noroeste da Índia, no Paquistão e no Afeganistão. Difusão da numeração grega alfabética pelo Oriente Próximo e pelo Mediterrâneo oriental. Surgimento dentre os sábios da Babilônia do primeiro zero conhecido da história.
Séc. II a.C	Surgimento mais completo dos algarismos *brahmi* nas inscrições budistas de Nana Ghat (estes algarismos, que constituem a verdadeira prefiguração dos nove números significativos atuais, hindus, árabes e europeus, ainda não são regidos pelo princípio de posição).
Final do séc. II a.C	As mais antigas comprovações conhecidas do emprego das letras hebraicas como números.
Séc. II a.C Séc II d. C	Surgimento da numeração decimal posicional dos contadores chineses (sistema denominado *suan zi* ou sistema das "barras numerais"). Mas ela não tem zero.
Primeiros séculos da era cristã	Os algarismos hindus de 1 a 9 ainda não parecem depender da regra numeral de posição.
Final do séc. III, Início do séc. IV	Primeiros exemplos conhecidos do emprego do sistema maia de expressão das datas e das durações temporais em "conta longa"

	(sistema denominado de séries iniciais).
Séc. IV - VI	Época provável do surgimento do zero e da numeração posicional dos sacerdotes astrônomos maias.
28 de agosto de 458	Data do *Lokavibhaga*, um texto *jain* em sânscrito que trata de cosmologia. Esta obra constitui a mais antiga comprovação conhecida do emprego de símbolos numéricos em sânscrito, uso que comprova a mais acabada concepção do zero e a regra numeral de posição segundo a base dez.
Aproximadamente ano 510 d. C	Dois exemplos do uso dos símbolos numéricos do sânscrito atestados junto ao astrônomo hindu Arybhata. Este autor alude, aliás claramente, ao princípio de posição e ao zero.
Aproximadamente 575 d. C	Os símbolos numéricos em sânscrito são abundantemente empregados (com um zero) pelo astrônomo hindu Varahamihira. A partir desta época, o sistema assim concebido torna-se, aliás, instrumento quase exclusivo dos astrônomos e matemáticos da Índia.
595 d. C	Data do mais antigo documento epigráfico hindu conhecido (trata-se de uma carta de doações de cobre), que atesta o uso dos nove algarismos significativos segundo o princípio de posição. Este novo sistema- cujos signos derivam da antiga notação *brahmi* e prefiguram os nove algarismos modernos- constitui a primeira numeração decimal escrita de escritura idêntica à nossa.
598 d. C	Data da mais antiga inscrição em sânscrito do Camboja (a casa 520 *saka* está aí expressa por meio do zero e dos símbolos numéricos do sânscrito segundo o princípio de posição.
628/629 d. C	O uso da numeração decimal escrita de posição e do signo-zero já, perfeitamente estabelecido na Índia: o astrônomo Bhaskara I emprega não apenas o sistema posicional dos símbolos numéricos em sânscrito, mas ainda, o signo-zero e os nove algarismos significativos.
Séc. VII d. C	Aparecimento da numeração siríaca alfabética.
662 d. C	Testemunho do bispo sírio Severo Sebokt a respeito dos métodos hindus de cálculo por meio dos nove algarismos.
683 d. C	A mais antiga inscrição khmer datada por meio do zero e dos nove algarismos de origem hindu segundo o princípio de posição.
683/686 d. C	As mais antigas inscrições redigidas em malaio arcaico e datadas por meio do zero e dos nove algarismos de origem hindu.
687 d. C	A mais antiga inscrição em sânscrito do Champa com uma data expressa em símbolos numéricos segundo o princípio de posição.
718/729 d. C	Um astrônomo budista de origem hindu fixado na China testemunha o zero e o cálculo por meio dos nove algarismos hindus.
732 d. C	A mais antiga inscrição em sânscrito de Java com uma data expressa em símbolos numéricos com valor de posição.
760 d. C	A mais antiga inscrição vernacular de Java (sistema *kawi*) com uma data expressa por meio do zero e dos nove algarismos de origem hindu.
Séc. VIII	Surgimento da numeração árabe alfabética (sistema denominado abjad).
Final do séc. VIII	Surgimento do zero de origem hindu na numeração decimal posicional chinesa ("barras numerais"). Introdução da numeração decimal posicional hindu e do zero em terras do Islã.

813 d. C	A mais antiga inscrição vernacular do Champa datada por meio do zero e dos nove algarismos de origem hindu.
875/876 d. C	As mais antigas inscrições lapidares conhecidas na Índia, oferecendo menções numéricas expressas por meio do zero e dos nove algarismos significativos *nagari*.
Séc. IX d. C	Surgimento dos algarismos denominados *ghobar* entre os árabes do Magreb e da Espanha (signos cuja grafia prefigura a dos algarismos europeus da Idade Média e a dos algarismos modernos).
976/992 d. C	Dois manuscritos provenientes da Espanha não-muçulmana oferecem a grafia dos nove algarismos sob uma forma próxima do tipo *ghobar*: trata-se das mais antigas provas européias do uso dos chamados "algarismos arábicos".
Séc. X - XII d. C	Os calculadores europeus efetuam suas operações aritméticas em ábaco de colunas de Gerbert e de seus discípulos: utilizam para isto fichas de chifre marcadas por um dos nove algarismos de origem indo-árabe (*apices*).
Séc. XII d. C	Introdução do signo zero no Ocidente: os calculadores europeus efetuam suas operações sem colunas, escrevendo os nove algarismos e o zero na areia: é o aparecimento do algarismo. Época a partir da qual os "algarismos arábicos" começam a se estabilizar graficamente.
Séc. XV d. C	Generalização do uso e normalização progressiva dos algarismos "arábicos" na Europa.

(Cf. IFRAH, 1994, p.341-349)

APENDICE 2

SUGESTÕES PARA ATIVIDADES DOCENTES COM OS NÚMEROS RACIONAIS

COM NÚMEROS FRACIONÁRIOS

Das quatro operações que se aprende na escola, a divisão é aquela que mais dificuldade apresenta não só para quem aprende como também para quem precisa ensinar. Para Miguel (1986, P. 44-45), a dificuldade associada a erros grosseiros por parte dos alunos, é carregada ao longo de todas as séries do Ensino Fundamental, e em alguns casos para o resto de suas vidas. Essas dificuldades estão intimamente ligadas ao ensino aprendizagem dos números fracionários. Zunino (1995, p. 102), acredita que as dificuldades enfrentadas com relação aos números racionais, ilustram com clareza os obstáculos que o ensino destes números podem ocasionar às crianças ao se impor maneiras de resolução preestabelecidas, que não propicie o estabelecimento de relações entre suas próprias estratégias e os procedimentos convencionais. As crianças passam a acreditar que o que elas pensam não é pertinente para resolver problemas, renunciando seus próprios raciocínios para centrar-se em algoritmos do cotidiano escolar.

Deste modo, precisamos colocar em evidência a necessidade de reformular situações-problema que permitam com que a criança possa comparar os diversos procedimentos possíveis para a resolução de cada situação. Segundo Miguel (1986, p. 48), o primeiro passo na aquisição do conceito matemático da divisão é o da observação atenta por parte do professor, das divisões espontânea feitas pelos alunos. Nesta etapa o professor deve fazer com que os alunos comparem as diferentes maneiras usadas por eles para efetuar as divisões.

Num segundo passo, o professor estabelece condições ou regras que devem ser respeitadas no ato de dividir. Essas condições devem propiciar com que os alunos adquiram a consciência de que o resultado da divisão não é absoluto, mas depende das condições preestabelecidas.

Para um melhor tratamento didático sobre as frações, Miguel (1986, p. 45) enfatiza a necessidade de se tratar a divisão de forma ampla, considerando que o todo a ser dividido pode ser de duas naturezas: o discreto e o contínuo.

Um todo é contínuo quando é formado por um número infinito de elementos, e admite divisibilidade infinita, como exemplo pode-se considerar: um segmento de reta, um bolo, um canudo de refrigerante. O todo discreto é quando é formado por um número finito de elementos que não podem ser quebrados, como exemplo, podemos considerar: um conjunto de pessoas, um conjunto de palitos, o conjunto das cartas de baralho.

Miguel (op. cit., p. 46), nos alerta que matematicamente, as leis que regem a operação de divisão, quando aplicadas aos todos discretos, não podem ser transferidas mecanicamente para os todos contínuos. Por exemplo: um conjunto de 6 fichas (um todo discreto), só pode ser dividido em 1, 2 3 ou 6 partes iguais, ao passo que um segmento de reta (um todo contínuo) pode ser dividido em um número qualquer de partes iguais.

Ainda, de acordo com as considerações de Miguel (1986), é importante ressaltar que maioria dos alunos necessita trabalhar o conceito das frações de forma concreta e que a abstração deste conteúdo poderá ocasionar implicações didáticas negativas ao processo. Na tentativa de concretizar os conceitos sobre a divisão o professor poderá utilizar as seguintes possibilidades:

1) Repartir 8 palitos entre 4 pessoas, de forma que todas recebam a mesma quantidade e que não haja sobra de palitos;
2) Repartir 8 palitos entre 3 pessoas, de forma que não haja sobre de palitos;
3) Repartir 7 palitos entre 3 pessoas, de forma que todas recebam a mesma quantidade de palitos;
4) Repartir 8 palitos entre 3 pessoas, de forma que as pessoas não recebam a mesma quantidade e que haja sobra de palitos após a divisão;
5) Dividir uma folha de papel retangular em 2 pedaços iguais, de forma que não haja sobra de papel após a divisão;
6) Dividir uma folha de papel retangular em dois pedaços diferentes, de forma que não haja sobra de papel após a divisão;
7) Dividir uma folha de papel retangular em 2 pedaços iguais, de forma que haja sobra de papel após a divisão;
8) Dividir uma folha de papel em dois pedaços diferentes, de forma que haja sobra de papel após a divisão. (MIGUEL,1986, p. 47)

As atividades anteriormente apresentadas são necessárias para que o aluno compreenda o significado da operação de divisão, e na continuidade dos trabalhos o aluno poderia perceber mais facilmente a representação fracionária usual do todo sobre as partes. Conforme Miguel (1986, p. 109), a fração nada mais é do que uma forma particular de divisão de um todo, estando implícito neste conceito que: o todo deve sempre ser dividido em partes iguais; e que o todo deve ser esgotado, isto é, a divisão deve ser exata. Zunino propõe algumas situações de atividades didáticas a serem propostas aos alunos, como:

> a) Se você come a metade de uma laranja e eu como a metade da metade, quem come mais? Quanto é a metade? Quanto é a metade da metade? Como se escreve?(1/2 e 1//4). Quatro é maior que dois, então ½ é maior ou menor que ¼?
> b) Uma pessoa leu 110/180 páginas de um livro. Quantas páginas leu? Que fração do livro ainda falta para ler? (ZUNINO,1995, p. 89)

Miguel (1986, p. 118) faz um alerta especial com relação a compreensão das equivalências de frações. Conforme o autor, os alunos necessitam da tradução material deste assunto para a sua compreensão, isto é, requer que ele execute experiências que o habilitem a compreender o fenômeno. A compreensão deste assunto por parte dos alunos é muito difícil, no entanto, é uma das condições fundamentais para que possa alcançar o êxito do ensino e na aprendizagem das propriedades e das operações que se executam com os números fracionários.

Como sugestão de atividade para a equivalência entre frações o autor sugere a seguinte atividade: Entregamos para o aluno 24 fichas iguais e pedimos para que ele completasse o quadro:

FICHAS	**FRAÇÃO DAS FICHAS QUE DEVE PEGAR**	**QUANTIDADE DE FICHAS CORRESPONDESNTES CADA FRAÇÃO**
12	1/2	
12	2/4	
12	3/6	
12	4/8	
12	8/16	

O professor deve repetir esta atividade, variando o material utilizado e a quantidade considerada, com o cuidado de colocar apenas casos de equivalências possíveis. O professor deve também, discutir com os alunos o fato que, embora as frações tenham aparências distintas o resultado encontrado é o mesmo.

COM NÚMEROS DECIMAIS

O número 0,1 ou 1/10 pode ser utilizado como a décima parte do metro, ou como a divisão do número um em dez partes iguais, pode ainda ser um comprimento, uma repartição, enfim, em todos os casos é importante que o aluno compreenda que o número 0,1 ou 1/10 é o mesmo em todos os casos. A medida que ele compreenda as diferentes aplicações destes números, poderá transpor este conhecimento em qualquer situação que poderá encontrar no futuro.

Centeno (1988, p. 168), nos sugere uma atividade a ser realizada com os alunos que é a estimação de medidas a olho, isto é, esta atividade propõe que os alunos escolham diversas coisas como: cadernos, bicicletas, tamanho dos dedos da mão, tamanho de um gato, tamanho de um inseto, ou outros, e que a partir destes suponha qual é a sua medida em metros, centímetros chegando até a centímetros. Depois disso, efetua-se as medições com os instrumentos de medida, ganha o jogo após a verificação sobre qual foi o aluno ou o grupo que obteve valores mais próximos.

Outra atividade proposta por Miguel (1986, p. 134), sugere que os alunos decomponham os números decimais nas casas que o compõe e transforme cada casa em uma nova casa de menor valor relativo, conforme o modelo: Decompor o número 35,123 = 3 dezenas, 5 unidades, 10 décimos, 2 centésimos e 3 milésimos, e assim sucessivamente.

Segundo Centeno (1988, p. 169-177), existem exercícios utilizando a reta numérica que ajudam aos alunos a melhor visualizar os números decimais. Conforme esta proposta, o professor deverá escolher um número, sendo que a partir daí os alunos começam a buscar adivinhar primeiramente o intervalo que se encontra este número e posteriormente buscará uma melhor aproximação do mesmo, sempre fazendo representações na reta numérica, através de sucessivas subdivisões. A autora, sugere ainda, a utilização de calculadoras para confirmar operações com números decimais. Como exemplo podemos considerar o seguinte exercício: Com o auxílio da calculadora, dê continuidade de mais dois números a seguinte seqüência numérica; 0,82 - 0,84 - 0,86 - _____ - ____ (somar 0,02 cada vez).

Para a realização operações de adição e subtração de números decimais Centeno (1988, p. 196) propõe que o professor faça a representação dos números decimais sobre o quadro das respectivas unidades. Por exemplo, a soma de 72,87 + 56,5= 129,37.

10^2	**10**	**1**	**1/10**	**1/100**
	7	2	8	7
	5	6	5	
1	2	9	3	7

A autora afirma que, para que os alunos cheguem mais rapidamente ao resultado destas operações, é melhor considerar os números como números inteiros e que somente após a operação se considere a posição da virgula.

A operação de multiplicação entre números decimais e números inteiros pode também ser efetuada como se fossem realizadas sucessivas somas, até que o aluno possa ter controle sob este tipo de operação.

Segundo Centeno (1988, p. 200), o produto de decimal por decimal pode ser iniciado através do estudo de áreas de quadriláteros. Neste sentido, o aluno deve estimar o tamanho através de uma aproximação através do uso de números naturais. A partir deste cálculo o professor deve fazer com que os alunos procurem adequar a sua aproximação ao resultado real da operação, comparando os resultados encontrados com as aproximações efetuadas. A autora salienta que é de suma importância fazer com que os alunos justifiquem as regras utilizadas para a resolução da operação e que não se aceite o que não se sabe explicar.

Possivelmente, uma das maiores dificuldades para se trabalhar o conceito de divisão é justamente a questão sobre qual é o significado que esta operação possui para os alunos. Geralmente, falar em divisão é considerar uma operação inversa da multiplicação. Para Miguel (1986), neste tipo de operação o melhor artifício a ser utilizado poderia ser a transformação de dois números decimais numa divisão entre dois números naturais. Por exemplo: a divisão de 1,25 por 0,5 deveria ser realizada após a multiplicação de ambos os números por 100 (devido a necessidade de transformar os dois números em naturais), assim teríamos a divisão de 125 por 50 que seria bem mais acessível aos conhecimentos que os alunos já possuem sobre a divisão. O autor ressalta que este mesmo procedimento, também poderá ser utilizado no caso em que somente o dividendo ou o divisor for um número natural.

APÊNDICE 3

ENTREVISTAS REALIZADAS COM OS PROFESSORES

Professor 1

E - Quais as principais dificuldades que você encontra para trabalhar os números racionais na sua representação fracionária e decimal?

P1 – *Seria mais assim a relação que o aluno tem de você mostrar para ele que porcentagem é a mesma coisa que uma fração. E que a fração é a mesma coisa que um número decimal. E você tem que mostrar ao aluno através de problemas que mostre a realidade deles. Tem que estar inserida nesta realidade.*

E – Quais são as principais dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem dos números racionais? É justamente esta questão da relação com o cotidiano dos alunos?

P1 – *É justamente a relação. Você trabalhar com uma fração e trabalhar com o número decimal e mostrar para ele que está se trabalhando com a mesma coisa, só que você pode utilizar em situações diferentes. Essa relação é muito difícil, ele não entende, então o professor tem que fazer este resgate.*

E – Como você trabalha com os erros dos alunos?

P1 – *Bom, é eu principalmente, quando faço uma avaliação e vejo que noventa por cento de meus alunos não atingiram o objetivo, nós(...), eu acho, eu como professor e nós como professores, deveríamos, através do erro, mostrar para ele fazer uma revisão, dar uma nova oportunidade para que o aluno aprenda este conteúdo que possivelmente não foi passado de uma forma clara para que o aluno entendesse, algum erro houve aí. E o professor tem que admitir que a parte dele não foi feita. Tem que retomar o conteúdo, explicar de uma maneira mais certa para que o aluno entenda.*

E - Que tipo de erro aparece com mais freqüência com relação aos números racionais?

P1 - *São as divisões, principalmente as divisões com os números racionais, que eu não sei o método ou a forma que os alunos aprendem na 4ª série, eu diria que quase oitenta por cento dos alunos que entram na 5ª série não sabem fazer divisão* *com os decimais. Aí você tem que procurar meios, métodos diferentes para que eles possam adquirir este conhecimento.*

E - E com relação à interpretação de problemas com os números racionais?

P1 - *É principalmente na parte da interpretação, esse aluno não é levado a pensar a tomar decisões refletir, tomar decisões. Então é muito difícil, mas a gente está procurando trazer materiais didáticos diferentes para que este aluno desenvolva esta parte de raciocínio lógico. Para que ele passe a ler e a fazer esta interpretação e resolver estes problemas. Principalmente ligado à realidade deles, ligado à nossa realidade também. Isto é importante.*

E - Como você age em sala de aula? Que métodos você utiliza?

P1 - *É, eu diria que sou um professor assim que não descarto o tradicional, eu uso muita coisa do ensino tradicional. Mas, em determinados assuntos da matemática eu procuro inserir a realidade do aluno, procuro trazer coisas que mostram a realidade. Coisas que estão acontecendo no momento. É muito mais fácil, daí você vai prender a atenção do aluno em sala de aula.*

E - Como você avalia a aprendizagem dos alunos? Você faz avaliação escrita?

P1 - *É. Através de avaliações, através de trabalhos em grupos, através de apresentações. Eu já fiz várias apresentações de gráficos, nos quais eles, os gráficos da feira de ciências que eles apresentaram aqui na frente, então cada equipe apresenta um para o outro. É, participações dos alunos, enfim tudo que está, e puder avaliar o aluno em todos os quesitos a gente avalia. Não só, restrito a provas. Acho que avaliação deve haver, mas não ficar só nisto.*

E - E como é feita a correção das provas escritas? Você marca o que está errado nas provas?

P1 - *É, eu procuro sempre colocar ao lado a questão certa em caneta vermelha, pego a caneta vermelha e coloco ao lado, mostrando para o aluno como deveria ser feito. Aí, através do erro, ele olhe e faça a comparação, e veja o que ele errou. Geralmente, eu faço, eu pego as minhas provas, geralmente, e faço no quadro a correção com eles, depois de corrigido. Mostrando o que deveria ser feito, o que eles não fazem, né. Porque que erram lá, porque não raciocinaram, não sabem.*

E - E você consegue explicar individualmente também, ou só no geral?

P1 - *É difícil. O número de alunos que nós temos por turma é, eu diria que individualmente a gente procura fazer, mas não é feito totalmente. Aquelas dúvidas* *que o aluno tem levanta, você viu hoje, alguns alunos não são todos, mas é o caso do aluno que falta aula, que não vem, que aí fica difícil de a gente controlar isto.*

E - Quais são as dificuldades que o professor encontra para trabalhar com os números racionais?

P1 - Bom, e*u diria pra você, que eu falei já também, que a divisão, principalmente, eles procuram mostrar para o aluno, aquele raciocínio, que o raciocínio dele seja uma raciocínio rápido e lógico, certo. Se torna muito difícil porque é a questão da interpretação o aluno lê e está com dificuldade, em ler aquilo ali e absorver aquilo que está escrito para poder fazer e colocar na forma de números. Eu acho muito difícil esta questão que tem que trabalhar esta questão da interpretação.*

E - E com relação à carga horária atual, você acha suficiente para conseguir fazer a aprendizagem dos alunos? Para fazer com que a aprendizagem seja eficiente?

P1 - *Bom, eu diria que, em termos de 5ª série, que como nós perdemos uma aula, ficou muito complicado pra gente.*

E - As 5ª séries tinham quantas aulas por semana?

P1 - *As 5ª séries tinham cinco aulas, agora com quatro aulas a gente tinha que enxugar um pouco do conteúdo, então ficou horrível, só que então você falta um pouquinho mais de tempo de você trabalhar com eles.*

E - E nas 6ª séries?

P1 - *Já nas 6ª séries não, porque as 6ª séries não ficaram prejudicadas. Tem todas as aulas normais.*

E - As 6ª séries têm quantas aulas por semana?

P1 - *As 6ª séries têm cinco aulas por semana. Agora a 5ª é que eu acho que ficou meio comprometida com essa aula.*

E - E os materiais concretos que são repassados via Núcleo da Prefeitura, estes materiais, quando vêm para a escola, eles conseguem atender a todos os alunos? Ou o material não é suficiente?

P1 - *É, eu até diria o seguinte a você, material tem muito pouco na escola, a maioria dos materiais que nós temos aqui foi confeccionado pelo próprio professor. A gente se vê nesta situação, tem que confeccionar material, trazer material. Porque, na realidade, alguns materiais eu não vou dizer que não venha, tabuada por exemplo, mas nós precisamos de muito mais do que isto. É muito escasso.*

E - Ou seja, a gente ainda tem que melhorar muito, não é professor?

P1 - *Muito ainda*

Professor 2

E- Quais as dificuldades que você encontra para trabalhar com os números racionais na sua representação fracionária e decimal?

P2 - *Dificuldades, realmente, é a prática do aluno ver aquele conteúdo no dia a dia dele, então para ele sente um tanto longe, sobretudo os números fracionários. Os decimais, de certa forma, ele tem um contato mais direto no dia-a-dia então que, de certa forma, ajuda ele aprender. Então os livros didáticos que a gente encontra para trabalhar este conteúdo é bem farto.*

E - Como você trabalha com os erros dos alunos?

P2 - *Este trabalho com o erro é a revisão do dia-a-dia da sala de aula é o acerto e o erro, sobretudo o resgate do conhecimento. O que está em voga é o conhecimento. Então se o aluno cometeu o erro, se a matéria não foi 100% compreendida ou tanto por cento compreendida, se faz a retomada em outros aspectos com outro nível de perguntas e se retoma o conteúdo desta forma.*

E - Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos na aprendizagem dos números racionais?

P2 - *É operação, as operações básicas mesmo, porque ela vem já das próprias operações com os números naturais, e esses números racionais ele também oferece uma certo grau de dificuldade mesmo porque a operação envolve casas decimais, envolve o sistema decimal como um todo. Então, desta forma, eles se atrapalham muito tanto nas colocações de vírgula quanto na operação, sobretudo multiplicação, divisão desses números.*

E - Que tipo de erro aparece com mais freqüência com relação aos números racionais?

P2 - *A freqüência é nas operações, que praticamente eu já invadi um pouco a questão aí, dizendo que a dificuldade maior é, a freqüência maior é estas operações, a realização das operações o entendimento, o porquê desta colocação de vírgula mesmo da operação de soma de casa decimais. Este conhecimento acho vem também já desde as operações com os números naturais, que não fica 100 por cento compreendido, entendido lá e se reflete aqui também*.

E - Até porque professor, eu acho que a regra dos números naturais é rompida quando ela entra nos números racionais e, principalmente, nos números fracionários?

P2 - *É!*

E - A gente tem a questão da multiplicação que nos números fracionários às vezes a você multiplica dois números pequenos, não é, e ele não entende bem como funciona com relação aos números menores que um.

P - *É exato!*

E - Como um professor de Matemática age em sala de aula? Ou seja, que métodos você utiliza?

P2 - *É o construtivismo, é a tendência, é a expectativa sempre do trabalho. Mas o trabalho ainda tradicional, o trabalho ainda normal como sempre se trabalhou o conhecimento matemático acho que é ainda é muito forte devido todas as barreiras que são criadas.*

E - Dentro da escola?

P2 - *Dentro da escola*.

E - E fora (da escola)?

P2 - *O próprio sistema. O sistema como um todo educacional brasileiro ele oferece muitas resistências ainda.*

E - Como o professor de Matemática avalia a aprendizagem dos alunos?

P2 - *É feita as avaliações através de provas. Acho que, basicamente, se constata o grande grupo de avaliações são ainda aí. E se faz a correção da avaliação com certo ou errado e se atribui uma nota, um peso a cada avaliação.*

E - Eles (os alunos) são avaliados oralmente também, ou não?

P2 - *Toda a vez que é trabalhado o conteúdo no quadro, eles podem ir ao quadro, eles recebem uma pontuação, que fazem parte do peso das avaliações no conjunto total.*

E - Que critérios você utiliza para a corrigir as provas?

P2 - *Essa correção, ela é realmente, ela ocorre a gente marcando aonde que o aluno está errando. Muitas vezes eu repasso na própria avaliação, depende do tempo e do grau daquela avaliação se houver tempo suficiente eu já corrijo na hora a prova do o aluno, entrego aonde ele errou, aonde tem um sinal, se for sinais, ou operações, já indica ali e faz observações.*

E - Essas observações e essa correção é individual, não é professor?

P2 - *São individuais, é prova por prova*.

E - Quais são as dificuldades que o professor encontra para trabalhar com os números racionais?

P2 - *Se fosse possível, constantemente, a utilização de um material concreto que possibilitasse a contextualização do que se ensina na escola com o que o aluno convive, seria mais fácil.*

E - E quando a esse material concreto cai nas mãos dos alunos, eles têm interesse em trabalhar com eles, ou eles simplesmente querem brincar e acabam perdendo, e não utilizam efetivamente na atividade?

P2 - *É, relativamente eles interpretam muito como programa de lazer, interpretam como um grupo de lazer, que aquilo não faz parte da aula, embora a gente conscientize sempre isso, mas sempre que entra o material concreto ou de jogos ou de qualquer outro tipo de material a sala de aula interpreta, em todos os níveis isso, de ensino fundamental, eles interpretam que ali é um passa-tempo. Não é uma aprendizagem. Embora a gente tente sempre quebrar essa resistência, dizendo que aquilo é tão importante como qualquer registro que ele faça no caderno ou pesquisa que possa fazer.*

E - Professor 2, com relação às condições que você tem no teu trabalho em sala de aula, quantidade de alunos, número de aulas, isto é suficiente ou é difícil de trabalhar com a quantidade de alunos existente em sala de aula? O que você pensa sobre isto?

P2 - *A metragem das salas já é, pela lei, a metragem relativa aos alunos, geralmente a gente tem salas muito limitadas, super lotadas, quase você não consegue andar no meio dessas fileiras para atender aos alunos, das carteiras. Então aí é muito aluno para salas pequenas, vão realmente chegando próximo de quarenta alunos. O ideal, acho que para o meu ver é algo em torno de trinta alunos. Para o ensino fundamental, para 5ª série, 6ª série até quem sabe em torno de vinte e cinco alunos seria até o ideal. Porque se você quer uma coisa de qualidade, você tem que pensar também no aluno que está ali e não no número de pessoas que estão sendo atendidas que daí você está fazendo uma coisa que é paliativa. Se você quer resolver o problema do país da nação você tem que começar com a educação. Uma educação séria dando prioridade realmente ao aluno, aquele espaço que ele tem e* *que muitas vezes é o único que ele tem durante todo o dia, durante a vida dele como criança que ele vai ter na escola, junto com os profissionais na escola. Se você já coloca limites dividindo este tempo dele muito precioso, dividindo com outros todos os alunos fica muito pouco tempo para ele. E a questão da redução, no caso, específico da matemática.*

E - Hoje são quantas aulas professor?

P2 - *É, algumas turmas tem 4 aulas outras tem 3 aulas semanais de Matemática. Então houve uma certa redução, que a gente entende a lei que a lei diz que no mínimo o aluno teria que ter 20 horas semanais. Seriam cinco aulas por semana. A gente entende que isso é o mínimo, quer dizer que a lei não prevê o máximo, e geralmente o que faz as autoridades é colocar realmente o mínimo do mínimo. Então, atualmente até com a LDB que fala da parte diversificada que o aluno tem que ter, eles se referem que o aluno tem que ter uma parte diversificada mas eles não dizem que tem que tirar do núcleo comum, eles dizem que você pode acrescentar, em vez de nós tirarmos as horas, de acrescentar horas de trabalho com esse aluno, eu acho que ele seria beneficiado. Se nós respeitássemos estes dois aspectos, de número de alunos e de carga horária se a tendência é aumentar a parte diversificada até bem interessante, talvez fora do próprio horário dele, sendo oferecido, muitos profissionais se candidataria a trabalhar com isto e muitos alunos também teriam esta expectativa e melhoraria muito a simpatia que se tem pelo ensino, hoje, da ciência matemática. Eu acho que nós teríamos um resultado muito mais de sucesso e continuação. E o trabalho da escola do município seria muito mais interessante.*

E - E haveria mais tempo para se fazer o resgate dos conhecimentos que não se dão conta no horário normal.

P2- *Ah, sem dúvida, né. Porque é um direito do aluno, ter o reforço. Muitas escolas têm isso hoje, mas a rede pública oferece uma certa resistência muito grande de oferecer um reforço a este aluno, um contraturno a este aluno, oferecer algo a mais. Hoje só se oferece o mínimo e acham que estão oferecendo o máximo. É isto que impressiona durante todo esse tempo que a gente trabalha na educação. Que eu comecei no início, e todo este tempo que é bem diversificado, inclusive em nível do Brasil também.*

APÊNDICE 4

ENTREVISTAS REALIZADAS COM OS ALUNOS

5ª SÉRIE

ALUNO 5F

E - Como você sabe quando errou em Matemática?
#Quando tem um X, um errado, um risquinho.
E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais?
 # Porque às vezes eu acerto uma, eu apago e copio do colega. Às vezes eu copio de um outro colega, tá certo o meu e tá errado o dele.
E - Às vezes você "chuta"?
 # Às vezes "chuto".
E – O que você acha que é o erro?
 # Você faz uma conta que dá errado e você faz outra que dá outro número, e vai lá pergunta para o professor e ele responde, tá errado. Você faz outra menor, tá errado, faz outra maior ainda e ele responde tá errado.

ALUNO 5A

E - Como você sabe quando errou em Matemática?
 # Quando o professor faz um risquinho, ou eu vejo que está alguma coisa errada.
E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais?
#Por causa que, de vez em quando eu apago e eu tento resolver de volta e às vezes tá errado eu apago de volta e às vezes tá errado, eu apago de volta tento, tento e tento até "chutar".
E - Você acha difícil?
#Não... eu acho um pouco.
E – O que você acha que é o erro?
 # Errar é não acertar as coisas certas.

ALUNO 5 G

E - Como você sabe quando errou em Matemática?
 # Quando tem um risquinho, quando tem um X.
E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais?
 # Porque eu não consegui aprender, daí eu erro.
E - Você "chuta" quando você não sabe?
 # Eu "chuto".
E - Você acha que é um assunto difícil?
#Sim, é difícil.
E – O quê você acha que é o erro?
 # É uma coisa errada, é quando não está certo.

ALUNO 5E

E - Como você sabe quando errou em Matemática?
 # Quando o professor risca, ou tá em vermelho.

E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais?
 # Porque eu não consegui aprender, daí eu erro.
E - Você "chuta" quando você não sabe?
 # Eu "chuto".
E - Você acha que é um assunto difícil?
#Sim, é difícil.
E - O que você acha que é o erro?
 # Uma coisa errada, é quando não está certo.

ALUNO 5C
E - Como você sabe quando errou em Matemática?
 # Quando eu começo, aí chega no final, ah sei lá, parece que não está certo, aí eu pergunto para o professor e ele me explica mais ou menos, só que está errado. Daí eu olho no trabalho de alguém e o meu resultado está diferente daí eu acho que está errado. Daí eu apago e começo tudo de novo.
E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais? Por que, é mais difícil?
 # É mais difícil, bem mais difícil...
E - É por que você não consegue ver nada que relacione, que fique mais fácil?
 # Não. Não é que não consiga ver nada. Às vezes até consegue. É que às vezes dá uma confundida, uma embaralhada que você não sai, e não sai nada.
E - Oque você acha que é o erro?
 # É você começar e tá errado, aí você apaga e faz de novo até achar o certo.

ALUNO 5B
E - Como você sabe quando errou em Matemática?
 # Quando eu olho no dos outros e o meu está diferente, ou professor passa no quadro e está diferente.
E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais?
 # Porque não prestar atenção no que o professor explica, por não fazer a lição.
E - Você acha que é um assunto difícil?
#Também..
E - O que você acha que é o erro?
 # É quando não está certo.

ALUNO 5D
E - Como você sabe quando errou em Matemática?
 # Quando está riscado, quando ele (o professor) coloca um X.
E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais?
 # Porque eu não entendi a matéria... às vezes.
E - Você acha que é um assunto difícil?
#Sim.
E - O que você acha que é o erro?
 # É fazer errado, depois apagar e tentar fazer certo.

6ª SÉRIE

ALUNO 6 E

E - Como você sabe quando errou em Matemática?

 # Quando o professor risca em cima e daí dá pra saber que você errou.

E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais?

 # Sei lá, quando dá alguma coisa errada.

E - Como assim errada, você sente depois que resolveu que está alguma coisa errada?

 # Só depois que o professor mostra. Ou só depois que vem o resultado da prova, antes eu não sei.

E - O que você acha que é o erro?

#Ah, sei lá, o erro é quando você não sabe fazer as coisas direito, quando você não faz as coisas que precisava.

ALUNO 6D

E - Como você sabe quando errou em Matemática?

 # Quando tem bastante números para resolver.

E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais?

 # Quando não sei fazer.

E - Por que você não entendeu?

 # Hum,Hum.

E - Não entendeu o que o professor ensinou, ou não entendeu o que está na prova?

 # Não entendi o que está na prova.

E - O que você acha que é o erro?

 # Ah, eu não consegui fazer, daí eu erro.

E - E quando o professor risca também?

 # Hum, Hum.

ALUNO 6F

E - Como você sabe quando errou em Matemática?

 # Quando acho que não prestei atenção, eu começo a "chutar".

E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais? Ou você nem sabe que erra?

 # Quando eu vou "chutando", eu já sei que erro.

E - O que você acha que é o erro?

 # É quando a gente não presta atenção nas aulas e daí, na hora das provas, a gente não sabe nada.

E - Errar é não fazer certo?

 # É isto!

ALUNO 6 B

E - Como você sabe quando errou em Matemática?

 # É quando eu vou "chutando" as coisas, assim...

E- Você não sabe fazer?

 # É, tem vezes que eu não sei fazer, e eu vou "chutando" e daí eu sei que errei.

E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais? Esse assunto é mais difícil?
 # É um pouco mais difícil, daí tem vezes que eu não presto atenção, fico brincando nas aulas e daí!...
E - O que você acha que é o erro?
 # É assim, não prestar atenção nas aulas, daí você não vai saber fazer e vai começar a "chutar" as coisas.

ALUNO 6C
E - Como você sabe quando errou em Matemática?
 # Quando por exemplo eu não tenho certeza que eu acertei, eu errei. Daí eu "chuto" qualquer número sem saber se está certo ou errado. Mas eu já penso, está errado porque eu não soube fazer.
E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais?
 # Eu acho que erro, ... igual eu disse, que eu por exemplo: não prestei muita atenção nas aulas porque talvez eu fiquei brincando nas aulas. Mas nem sempre isto acontece, e quando acontece, talvez por uma distração, que a gente olha para os lados quando o professor está explicando uma parte mais interessante da aula, eu não prestei atenção e daí pode cair aquela coisa na prova e eu não sei.
E - O que você acha que é o erro?
 # O erro é por exemplo: è quando eu não sei fazer. Por exemplo: eu não prestei atenção nas aulas e cai aquela coisa na prova e eu não sei fazer, daí é o erro.

ALUNO 6 A
O aluno é especial (surdo mudo) e tentou responder às questões por escrito, mas só conseguiu escrever que às vezes erra devido a não conseguir interpretar as questões.

7ª SÉRIE

ALUNO 7D
E - Como você sabe quando errou em Matemática?
 # Porque está em vermelho o erro e o professor assinala em baixo.
E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais?
 # Porque o professor não explica direito.
E - O que você acha que é o erro?
 # É quando está tudo errado na folha, está tudo assinalado com caneta vermelha.

ALUNO 7B
E - Como você sabe quando errou em Matemática?
 # Quando tem vermelho escrito na prova.
E - Um risco vermelho?
 # É, um risco vermelho.
E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais?
 # Porque às vezes o professor não explica direito, ou então eu não lembro daquilo.

E - O que você acha que é o erro?
 # É quando a gente, sei lá, não faz as coisas direito.
Ah, eu não consegui fazer, daí eu erro.
E - É quando "chutou"?
 # Isso quando eu "chuto".

ALUNO 7A
E - Como você sabe quando errou em Matemática?
 # Quando tem um sinal de errado, ou o professor assinala em baixo dizendo que está errado.
E - Por que você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações e sobre números decimais?
 # É que às vezes o professor não explica direito, ou a gente não se lembra na hora.
E – O que você acha que é o erro?
#É quando não está conforme o professor ensinou.

ANEXOS

ANEXO 1 - FICHA PROFISSIONAL DOS PROFESSORES 124
ANEXO 2 - PROVA 125
ANEXO 3 - PROTOCOLO DOS ERROS...126
ANEXO 4 - ROTEIRO DE ENTREVISTA COM OS PROFESSORES 127
ANEXO 5 - ROTEIRO DE ENTREVISTA COM OS ALUNOS 128

ANEXO 1
FICHA PROFISSIONAL DOS PROFESSORES

1.DADOS DE IDENTIFICAÇÃO

Nome:

2.FORMAÇÃO ACADÊMICA

2.1 **Graduação**

Curso :
Instituição:
Término:

2.2 **Pós-Graduação**

2.2.1 **Especialização**

Curso :
Instituição:
Término:

2.2.2 **Mestrado**

Curso:
Instituição:
Término:

2.2.3 **Doutorado**

Curso:
Instituição:
Término:

3. EXPERIÊNCIA DOCENTE

3.1 Tempo de magistério em anos:

3.2 Instituições em que já lecionou (1º, 2º e 3º graus), incluindo aquelas em que trabalha atualmente:

Instituição A: Nível de ensino:
Instituição B: Nível de ensino:
Instituição C: Nível de ensino:
Instituição D: Nível de ensino:

3.3 Dados relativos à docência:

3.3.1 Tempo de trabalho em anos:

3.3.2 Regime de trabalho:

Tempo parcial ( ) Tempo integral ( ) Dedicação exclusiva ( )

3.3.3 Número de horas/aula ministradas neste ano:

ANEXO 2

PROVA

ESCOLA MUNICIPAL PREF. ALEIXO GREBOS   ARAUCÁRIA - PR

NOME: ____ DATA ___________

SÉRIE:__________________________

AVALIAÇÃO SOBRE NÚMEROS RACIONAIS

1)Determine o quanto vale :

a) A metade de R$ 30,00
b) A terça parte de R$ 30,00
a) 2/3 de R$ 30,00

2)Calcule:

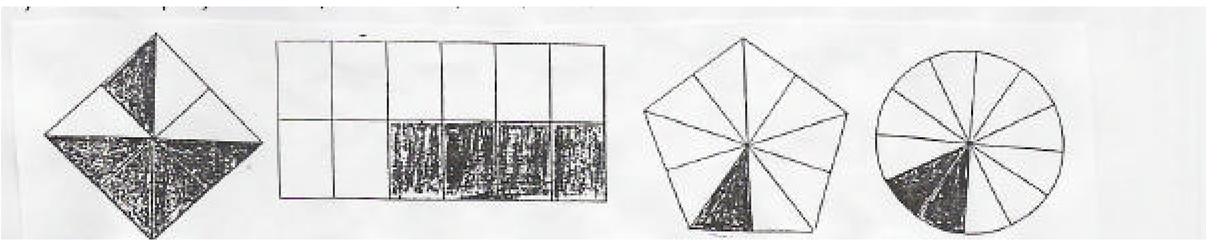
a) O dobro de R$ 0,75
b) O triplo de R$ 2,50

3) No açougue próximo de casa, uma senhora pediu ao açougueiro 3/4 de quilo de carne moída. Sabendo-se que quilo significa quilograma ou 1.000 gramas, quantos gramas de carne moída ela levou?

4) Foi feito um levantamento das alturas dos alunos de uma escola, obtendo-se os resultados abaixo> Agora, coloque as alturas em ordem crescente (do menor para o maior):

1,02	1,10	1,20	2,01	1,01

5) Escreva a porção correspondente a parte pintada, na notação fracionária:



ANEXO 3

PROTOCOLO DOS ERROS

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO
MESTRADO EM EDUCAÇÃO

PESQUISA: O papel do erro no processo ensino e aprendizagem dos números racionais

Escola: ____
Aluno: ____ Série: ___________
Professor: _________________________
Data:____________
Atividade Proposta ao aluno: ______________________________

LOCALIZAÇÃO DO ERRO

TIPO DE ERRO

ORIGEM DO ERRO (levantar hipóteses sobre o erro)

SUGESTÃO PARA SUPERAÇÃO DO ERRO

ANEXO 4

ROTEIRO DE ENTREVISTA COM OS PROFESSORES

Quais as dificuldades que você encontra para trabalhar com os números racionais na sua representação fracionária e decimal?

Como você trabalha com os erros dos alunos?

Quais são as dificuldades que o professor encontra para trabalhar com os números racionais? Quais são as principais dificuldades dos alunos na aprendizagem dos números racionais?

Que tipo de erro aparece com mais freqüência com relação aos números racionais? E como o professor utiliza os erros dos alunos durante o processo de ensino?

Como um professor de Matemática age em sala de aula? Que métodos você utiliza?

Como o professor de Matemática avalia a aprendizagem dos alunos? Que critérios você utiliza para a correção das provas?

ANEXO 5

ROTEIRO DE ENTREVISTA COM OS ALUNOS

Como você sabe quando errou em Matemática?

Porquê você acha que erra ao resolver exercícios sobre frações? E sobre números decimais?

O que você acha que é errar?