



PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E
SISTEMAS (PPGEPS)

MARCELO CARNEIRO GONÇALVES

UMA ABORDAGEM ROBUSTA PARA O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA
PRODUÇÃO EM SISTEMAS DE MANUFATURA

CURITIBA

2021

MARCELO CARNEIRO GONÇALVES

**UMA ABORDAGEM ROBUSTA PARA O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA
PRODUÇÃO EM SISTEMAS DE MANUFATURA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas (PPGEPS) da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção e Sistemas.

Orientador: Dr. Osiris Canciglieri Junior

Coorientado: Dr. Raimundo José Borges de Sampaio

CURITIBA

2021

Dados da Catalogação na Publicação
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/PUCPR
Biblioteca Central
Pamela Travassos de Freitas – CRB 9/1960

Gonçalves, Marcelo Carneiro
G643a Uma abordagem robusta para o problema de planejamento da produção em
2021 sistemas de manufatura / Marcelo Carneiro Gonçalves ; orientador: Osiris
Canciglieri Junior ; coorientador: Raimundo José Borges de Sampaio. – 2021.
109 f. : il. ; 30 cm

Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba,
2021
Bibliografia: f.106-109

1. Engenharia de produção. 2. Planejamento da produção. 3. Programação
linear. 4. Processos de fabricação. 5. Programação Convexa. 6. Solução de
Problemas. I. Canciglieri Junior, Osiris. II. Sampaio, Raimundo José Borges
de. III. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Pós-Graduação em
Engenharia de Produção e Sistemas. IV. Título.

CDD 20. ed. – 670

TERMO DE APROVAÇÃO

Marcelo Carneiro Gonçalves

UMA ABORDAGEM ROBUSTA PARA O PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO EM SISTEMAS DE MANUFATURA

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Curso de Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas, da Escola Politécnica da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Osiris Canciglieri Junior

Presidente da Banca
Prof. Dr. Osiris Canciglieri Junior
(Orientador – PPGEPS/PUCPR)



Raimundo José Borges de Sampaio

Prof. Dr. Raimundo José Borges de Sampaio
(Coorientador)

F. Deschamps

Prof. Dr. Fernando Deschamps
(Membro Interno – PPGEPS/PUCPR)

Roberto Freire Zanetti

Prof. Dr. Roberto Freire Zanetti
(Membro Interno – PPGEPS/PUCPR)

Anselmo Chaves Neto

Prof. Dr. Anselmo Chaves Neto
(Membro Externo - UFPR)

Celso Carnieri

Prof. Dr. Celso Carnieri
(Membro Externo - UFPR)

Curitiba, 02 de julho de 2021.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por ter assumido a frente de tudo que vem acontecendo na minha vida.

Ao professor Raimundo José Borges de Sampaio, pela confiança, pela oportunidade de trabalhar ao seu lado durante esses últimos 6 anos, pelo tempo dedicado para me ajudar na condução deste trabalho.

Aos meus pais pelo suporte e força que sempre me motivaram a seguir em frente com os estudos.

À PUCPR e CAPES pela concessão de bolsa de estudos, permitindo-me desenvolver profissionalmente e pessoalmente.

RESUMO

O uso de modelos de Programação Linear (PL) para planejar a produção tem sido amplamente utilizado para fornecer soluções ótimas. No entanto, os modelos PL, bem como os modelos baseados no Planejamento das necessidades de Materiais (MRP), usam características determinísticas. Nesse contexto, uma das abordagens clássicas para lidar com um cenário dinâmico e incerto é a abordagem robusta, que propõe uma solução subótima por meio de abordagens determinísticas capazes de incorporar variações nas soluções do problema.

Um parâmetro que está sujeito a essa variação é a capacidade de produção do sistema, uma vez que esse parâmetro é diretamente impactado pela forma como o sistema é carregado e seus tempos de ciclo. Assim, para analisar a relação entre eles, uma alternativa é modelar o sistema de produção como um sistema de filas usando a lei de *little*.

Esta pesquisa busca resolver o problema de planejamento da produção modelado como um sistema de filas para propor aos gestores um modelo de planejamento da produção que utilize métodos eficientes, simples e robustos.

Para alcance do objetivo, primeiramente foi proposto um modelo matemático de programação linear para resolver o problema de planejamento da produção. Em seguida, incorporou-se ao modelo os conceitos de sistemas de fila para estimar a capacidade de produção como variável de decisão. No modelo de programação não linear resultante foi incorporado os conceitos de otimização robusta. Na sequência, foi aproximado este modelo por uma família de funções afins usando a estratégia de aproximar um conjunto convexo por um conjunto poliedral. Por fim, foi proposto um teorema para demonstrar que um modelo de programação não linear robusta pode ser aproximado por um modelo de programação linear robusta.

A partir de uma ilustração numérica, foi possível observar a eficácia do método de aproximação proposto em dois cenários, um considerando 3 horizontes de planejamento e outro com 12 horizontes de planejamento. Para o primeiro cenário, notou-se que o modelo de programação linear convergiu para o mesmo resultado do modelo de programação não linear. Para o segundo cenário, observa-se que a diferença entre os modelos foi de aproximadamente 4% apenas.

Portanto, o modelo matemático obtido permite ao planejador fazer uso de um modelo de programação linear robusto, com baixo custo computacional, capaz de obter soluções de boa qualidade quando comparado a problemas complexos de programação não linear. Por fim, o modelo foi submetido a um experimento numérico para melhor ilustrar seu funcionamento.

Palavras-chave: Otimização Robusta. *Clearing Function*. Programação Linear. Programação Convexa.

ABSTRACT

The use of Linear Programming (LP) models to plan production has been widely used to provide optimal solutions. However, LP models, as well as models based on Material Requirements Planning (MRP), use deterministic parameters. In this context, one of the classic approaches to deal with a dynamic and uncertain scenario is the robust approach, which proposes a suboptimal solution through deterministic approaches capable of incorporating variations in the problem's solutions.

One parameter that is subject to this variation is the system's production capacity, as this parameter is directly impacted by how the system is loaded and its cycle times. Thus, to analyze the relationship between them, an alternative is to model the production system as a queuing system using the Little's law.

This research seeks to solve the production planning problem modeled as a queuing system to propose to managers a production planning model that uses efficient, simple and robust methods.

To achieve the objective, first a mathematical model of linear programming was proposed to solve the production planning problem. Then, the concepts of queuing systems were incorporated into the model to estimate production capacity as a decision variable. In the resulting nonlinear programming model, the concepts of robust optimization were incorporated. Next, this model was approximated by a family of affine functions using the strategy of approximating a convex set by a polyhedral set. Finally, a theorem was proposed to demonstrate that a robust nonlinear programming model can be approximated by a robust linear programming model.

From a numerical illustration, it was possible to observe the effectiveness of the proposed approximation method in two scenarios, one considering 3 planning horizons and the other with 12 planning horizons. For the first scenario, it was noted that the linear programming model converged to the same result as the non-linear programming model. For the second scenario, it is observed that the difference between the models was approximately 4% only.

Therefore, the obtained mathematical model allows the planner to make use of a robust linear programming model, with low computational cost, capable of obtaining good quality solutions when compared to complex nonlinear programming problems. Finally, the model was submitted to a numerical experiment to better illustrate its functioning.

Keyword: Robust Optimization. Clearing Function. Linear Programming. Convex programming.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1. ESQUEMA DE PLANEJAMENTO DE NECESSIDADES DE MATERIAIS (MRP)	11
FIGURA 2: EXEMPLO DO CONCEITO DA ABORDAGEM ROBUSTA.....	17
FIGURA 3. CONJUNTO DE INCERTEZAS ELIPSOIDAL DE BEN-TAL E NEIMIROVSKI	20
FIGURA 4. CONJUNTO DE INCERTEZAS “EM CAIXA” DE SOYSTER	21
FIGURA 5. CONJUNTO DE INCERTEZAS “EM CAIXA” DE BERTSIMAS E SIM	22
FIGURA 6: TEMPO DE ESPERA EM FUNÇÃO DA CAPACIDADE DO SISTEMA	23
FIGURA 7: DIFERENTES TIPOS DE SISTEMAS DE FILAS	24
FIGURA 8: PROCESSOS DE UM SISTEMA DE FILAS	25
FIGURA 9. FORMAS DE ABORDAGENS DA <i>CLEARING FUNCTION</i>	29
FIGURA 10. <i>LEI DE LITTLE</i> COMO RELAÇÃO PONTO CONJUNTO PARA CADA CARREGAMENTO DO SISTEMA.....	31
FIGURA 11. ILUSTRAÇÃO DO CONJUNTO CONVEXO E NÃO CONVEXO	35
FIGURA 12. ILUSTRAÇÃO DE H E $p0$	37
FIGURA 13. ILUSTRAÇÃO DOS SEMIESPAÇOS DO HIPERPLANO H	38
FIGURA 14. ILUSTRAÇÃO DO EXEMPLO DE UM CONJUNTO POLIEDRAL	39
FIGURA 15. ILUSTRAÇÃO DE UM EXEMPLO DE FUNÇÃO CONVEXA	40
FIGURA 16. ILUSTRAÇÃO DE UM EXEMPLO DE FUNÇÃO CÔNCAVA	40
FIGURA 17. ILUSTRAÇÃO ÉPIGRAFO.....	41
FIGURA 18. ILUSTRAÇÃO HIPOGRAFO	42
FIGURA 19. ILUSTRAÇÃO DO TEOREMA DE ROLLE.....	42
FIGURA 20. ILUSTRAÇÃO DO TEOREMA DO VALOR MÉDIO.....	44
FIGURA 21. ILUSTRAÇÃO DO TEOREMA DE TAYLOR DE 1ª ORDEM.....	45
FIGURA 22. ILUSTRAÇÃO DO TEOREMA DE TAYLOR DE 2ª ORDEM.....	46
FIGURA 23. ILUSTRAÇÃO DA APROXIMAÇÃO DA <i>CLEARING FUNCTION</i> POR FUNÇÕES AFINS.....	53
FIGURA 24. ILUSTRAÇÃO CONJUNTO $\Omega 1$	57
FIGURA 25. ILUSTRAÇÃO CONJUNTO $\Omega 2$	58
FIGURA 26. NÍVEIS DE WIP PARA GERAÇÃO DAS FUNÇÕES AFINS.	72
FIGURA 27. NÍVEIS DE WIP PARA GERAÇÃO DAS FUNÇÕES AFINS	82
FIGURA 28. NÍVEIS DE WIP PARA GERAÇÃO DAS FUNÇÕES AFINS	101

Lista de TABELAS

TABELA 1. CUSTOS UNITÁRIOS DE PRODUÇÃO.....	63
TABELA 2. CUSTOS UNITÁRIOS DE MANUTENÇÃO DE ESTOQUE	64
TABELA 3. CUSTOS UNITÁRIOS DE <i>WORK-IN-PROCESS</i>	64
TABELA 4. CUSTOS UNITÁRIOS DE RELEASE.....	64
TABELA 5. DISPONIBILIDADE DE COMPONENTE K.....	64
TABELA 6. NECESSIDADE DE COMPONENTES K POR PRODUTO	64
TABELA 7. TEMPO PADRÃO (MINUTOS) REQUERIDO PARA A PRODUÇÃO DE CADA PRODUTO	64
TABELA 8. MÃO DE OBRA (EM UNIDADES PADRÃO DE TEMPO) DISPONÍVEL PARA SER CONSUMIDA POR PERÍODO	65
TABELA 9. DEMANDA MÍNIMA DO PRODUTO POR PERÍODO	65
TABELA 10. CAPACIDADE NOMINAL DO PRODUTO POR PERÍODO	65
TABELA 11. 30 SIMULAÇÕES DOS CARACTERÍSTICAS NECESSÁRIOS PARA ESTIMAÇÃO DA CAPACIDADE	67
TABELA 12. PARÂMETRO k_1	68
TABELA 13. PARÂMETRO k_2	68
TABELA 14. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 1 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	68
TABELA 15. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 2 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	68
TABELA 16. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 3 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	68
TABELA 17 – FUNÇÕES AFINS PARA 10 NÍVEIS DE <i>WORK-IN-PROCESS</i>	71
TABELA 18 – DEFINIÇÃO DAS FUNÇÕES AFINS POR NÍVEL DE <i>WIP</i>	71
TABELA 19. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 1 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	72
TABELA 20. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 2 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	72
TABELA 21. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 3 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	72
TABELA 22. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 1 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	73
TABELA 23. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 2 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	73
TABELA 24. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 3 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	73
TABELA 25. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 1 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	74
TABELA 26. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 2 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	74
TABELA 27. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 3 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	74
TABELA 28. PARÂMETRO k_2 ROBUSTO.....	78
TABELA 29. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 1 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	78
TABELA 30. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 2 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	79
TABELA 31. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 3 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	79
TABELA 32. FUNÇÕES AFINS ROBUSTA PARA 10 NÍVEIS DE <i>WORK-IN-PROCESS</i>	81
TABELA 33 – DEFINIÇÃO DAS FUNÇÕES AFINS ROBUSTAS POR NÍVEL DE <i>WIP</i>	82
TABELA 34. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 1 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	82
TABELA 35. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 2 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	83
TABELA 36. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 3 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	83
TABELA 37. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 1 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	83

TABELA 38. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 2 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	84
TABELA 39. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 3 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	84
TABELA 40. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 1 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	84
TABELA 41. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 2 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	84
TABELA 42. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 3 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	85
TABELA 43. ANÁLISE DOS ERROS OBTIDOS COM AS APROXIMAÇÕES	85
TABELA 44. CUSTOS UNITÁRIOS DE PRODUÇÃO.....	88
TABELA 45. CUSTOS UNITÁRIOS DE MANUTENÇÃO DE ESTOQUE	88
TABELA 46. CUSTOS UNITÁRIOS DE <i>WORK-IN-PROCESS</i>	89
TABELA 47. CUSTOS UNITÁRIOS DE RELEASE.....	89
TABELA 48. DISPONIBILIDADE DE COMPONENTE K	89
TABELA 49. NECESSIDADE DE COMPONENTES K POR PRODUTO	89
TABELA 50. TEMPO PADRÃO (MINUTOS) REQUERIDO PARA A PRODUÇÃO DE CADA PRODUTO	89
TABELA 51. MÃO DE OBRA (EM UNIDADES PADRÃO DE TEMPO) DISPONÍVEL PARA SER CONSUMIDA POR PERÍODO	89
TABELA 52. DEMANDA MÍNIMA DO PRODUTO POR PERÍODO	89
TABELA 53. CAPACIDADE NOMINAL DO PRODUTO POR PERÍODO	90
TABELA 54. PARÂMETRO k_1	90
TABELA 55. PARÂMETRO k_2	90
TABELA 56. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 1 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	90
TABELA 57. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 2 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	90
TABELA 58. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 3 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	91
TABELA 59. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 1 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	93
TABELA 60. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 2 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	93
TABELA 61. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 3 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	93
TABELA 62. PARÂMETRO k_2 ROBUSTO.....	96
TABELA 63. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 1 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	96
TABELA 64. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 2 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	96
TABELA 65. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 3 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	97
TABELA 66. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 1 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	99
TABELA 67. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 2 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	99
TABELA 68. SOLUÇÃO ÓTIMA DO PRODUTO 3 AO LONGO DO HORIZONTE DE PLANEJAMENTO.....	99
TABELA 69. ANÁLISE DOS ERROS OBTIDOS COM AS APROXIMAÇÕES	101

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BOM	Estrutura do produto (<i>Bill of Material</i>)
CF	<i>Clearing Function</i>
CRP	Planejamento das necessidades de capacidade (<i>Capacity requirements planning</i>)
MRP I	Planejamento das Necessidades de Materiais (<i>Material requirement planning – “MRP I”</i>)
MRP II	Planejamento de Recursos de Manufatura (<i>Manufacturing Resource Planning – “MRP II”</i>)
PC	Programação Convexa
PCR	Programação Convexa Robusta
PL	Programação linear
PLR	Programação Linear Robusta
PMP	Programa Mestre de Produção (<i>Master production schedule – MPS</i>)
RCCP	Planejamento grosseiro da capacidade (<i>Rough-cut capacity planning</i>)
WIP	<i>Work-in-process</i>

LISTA DE SIMBOLOS

i	Índices de produtos
j	Índice de Períodos
k	Índice de Componentes
b_{ki}	Número de componentes k usados para a produção de uma unidade do produto i .
h_i	Tempo padrão requerido para a produção de uma unidade do produto i .
Z_j	Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida no período j .
S_{kj}	Quantidade de suprimentos do componente k disponível para ser consumida no período j .
D_{ij}	Demanda mínima para o produto i no período j .
γ_{ij}	Capacidade de produção do produto i no período j .
c_{ij}	Custo de cada unidade produzida do produto i no período j .
h_{ij}	Custo de manutenção de estoques cada unidade produzida do produto i no período j .
w_{ij}	Custo de <i>work-in-process</i> cada unidade produzida do produto i no período j .
r_{ij}	Custo de <i>release</i> de cada unidade produzida do produto i no período j .
x_{ij}	Nível médio de produção do produto i em cada período j .
I_{ij}	Nível médio de estoque do produto i em cada período j .
W_{ij}	Nível médio de <i>Work-in-process</i> do produto i em cada período j .
R_{ij}	Nível médio de <i>Release</i> do produto i em cada período j .
$\varphi(WIP)$	Uma função côncava
$g_i(WIP)$	Uma família de Funções Afins

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 CONTEXTO	1
1.2 PROBLEMA DE PESQUISA	4
1.3 OBJETIVOS	5
1.3.1 Objetivo Geral	5
1.3.2 Objetivos Específicos	5
1.4 JUSTIFICATIVA	5
1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	7
1.5.1 Classificação da pesquisa	7
1.5.2 Etapas da pesquisa	7
1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO	8
2 REFERENCIAL TEÓRICO	10
2.1 MODELOS DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO	10
2.1.1 Planejamento das Necessidades de Materiais	10
2.1.2 Modelo de Programação Linear em Engenharia de Produção	12
2.2 PROGRAMAÇÃO ROBUSTA	14
2.2.1 Otimização Robusta	15
2.2.2 Abordagens de otimização robusta	19
2.3 SISTEMAS DE FILAS	22
2.3.1 Definição de filas	23
2.3.2 Classificação dos sistemas de filas	24
2.3.3 Disciplina da fila	25
2.3.4 Notação para filas	26
2.3.5 Lei de <i>Little</i>	27
3 APROXIMAÇÃO DE MODELOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA	
ROBUSTO	34
3.1 PRELIMINARES DO PROBLEMA	34
3.1.1 Conjunto convexo	35
3.1.2 Função convexa	39
3.1.3 Epigrafo	41
3.1.4 Teorema de <i>Rolle</i>	42
3.1.5 Teorema do Valor Médio	43
3.1.6 Teorema de Taylor	44

3.2	APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES NÃO LINEARES USANDO A	
	APROXIMAÇÃO DE TAYLOR	47
3.2.1	Modelo matemático de Planejamento da Produção	47
3.2.2	Modelo matemático usando conceitos de sistemas de filas	49
3.2.3	Aproximação da Função de Capacidade usando funções afins	
	52	
3.2.4	Modelo matemático considerando a aproximação da função de	
	capacidade por meio de funções afins.....	54
3.3	TEORIA DE APROXIMAÇÃO PARA O PROBLEMA DE	
	PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR USANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR.....	56
3.3.1	Análise de aproximação numérica	56
3.3.2	Teorema proposto.....	59
4	EXPERIMENTO NUMÉRICO	61
4.1	MODELO DE PROGRAMAÇÃO CONVEXA PARA 3 PERÍODOS	
	62	
4.1.1	Índices.....	62
4.1.2	Características	62
4.1.3	Variáveis de decisão	63
4.2	MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA 3 PERÍODOS..	69
4.2.1	Índices.....	69
4.2.2	Características	69
4.2.3	Variáveis de decisão	70
4.3	MODELO DE PROGRAMAÇÃO CONVEXA ROBUSTA PARA 3	
	PERÍODOS	75
4.3.1	Índices.....	77
4.3.2	Características	77
4.3.3	Variáveis de decisão	77
4.4	MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR ROBUSTA PARA 3	
	PERÍODOS	79
4.4.1	Índices.....	80
4.4.2	Características	80
4.4.3	Variáveis de decisão	80
4.5	ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS RESULTADOS DOS	
	MODELOS PARA 3 PERÍODOS.....	85

4.6	MODELO DE PROGRAMAÇÃO CONVEXA PARA 12 PERÍODOS	
	87	
4.6.1	Índices.....	87
4.6.2	Características	87
4.6.3	Variáveis de decisão	88
4.7	MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA 12 PERÍODOS	91
4.7.1	Índices.....	91
4.7.2	Características	91
4.7.3	Variáveis de decisão	92
4.8	MODELO DE PROGRAMAÇÃO CONVEXA ROBUSTA PARA 12	
PERÍODOS	94	
4.8.1	Índices.....	94
4.8.2	Características	95
4.8.3	Variáveis de decisão	95
4.9	MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR ROBUSTA PARA 12	
PERÍODOS	97	
4.9.1	Índices.....	97
4.9.2	Características	98
4.9.3	Variáveis de decisão	98
4.10	ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS RESULTADOS DOS	
MODELOS PARA 12 PERÍODOS.....		101
5	CONCLUSÃO.....	103
5.1	CUMPRIMENTO DOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS	104
5.2	PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS	105
6	REFERÊNCIAS	106

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO

Realizar o planejamento da produção nas empresas de manufatura tem se tornado progressivamente uma tarefa complexa, e cara. Ademais, o aumento da concorrência e da competitividade do mercado tem obrigado as empresas a buscarem, conseqüentemente, sistemas de produção que sejam simultaneamente eficazes e eficientes, de forma que possam atingir seus objetivos organizacionais utilizando os recursos disponíveis da melhor forma possível. Ou dito de outra forma, os objetivos organizacionais das empresas de manufatura incorporam pelos menos um novo desafio: a obtenção de um bom Sistema de Apoio a Tomada de Decisão de Produção, que tenha a propriedade de ter baixo custo de implementação aliado a alta qualidade.

Desde a década de 1960, têm sido implementados em um grande número de organizações de médio e grande porte, sofisticados sistemas de suporte à tomada de decisão que utilizam como base os sistemas de MRP (*Material Requirements Planning*), MRP II (*Manufacturing Resources Planning*) e ERP (*Enterprise Resource Planning*). Todavia, tais sistemas fornecem apenas soluções viáveis para o problema de planejamento da produção, no sentido de não considerar o atendimento de alguns critérios de otimalidade, por conseqüência a qualidade da solução encontrada não fornece uma análise adequada tanto em relação aos custos quanto em relação a sensibilidade do problema. Além disso, a utilização da técnica do MRP para problemas de grande porte torna-se complexo em relação a quantidade de esforço empregado para encontrar uma solução viável.

Diante desse cenário, modelos de programação matemática que utilizam Programação Linear (PL) têm sido propostos para resolver problemas de manufatura em sistemas produtivos, ao longo de um determinado horizonte de planejamento.

Na maioria dos casos, a desvantagem dos modelos de PL, assim como os modelos baseados em MRP, MRP II e ERP, são que eles assumem que a produção é instantânea, ao final de cada período, os releases são instantâneos, no início de cada período, e o planejamento sempre considera todo o horizonte

de planejamento, ou seja, modelos de PL não são capazes de atender a possíveis variações de carregamento e produção dentro do intervalo entre o início e o término dos períodos. Para exemplificar, os modelos de PL lidam da mesma forma com processos que já estão em fase de finalização no período e com processos que ainda estão iniciando, e claramente, há um contraste imenso na diferença de tempo de ciclo para o término de cada processo, que por sua vez, reflete em uma má estimativa da capacidade do sistema.

Diante disso, a forma como os sistemas produtivos são modelados impactam diretamente na performance do sistema e o nível de utilização dos recursos produtivos. Para contornar parcialmente esse inconveniente, o modelo de manufatura considerado neste trabalho será modelado como um problema de filas.

Além disso, os modelos de PL consideram que as características de planejamento são completamente determinísticas, excluindo assim, qualquer possibilidade de variação características. Portanto, realizar o planejamento da produção de maneira eficiente, é um grande desafio principalmente quando, na vivência do dia a dia do chão de fábrica, existe, de fato, grande variabilidade nas características que são usadas como dados de entrada nos modelos.

Para lidar com o fato de que, na verdade, as características de planejamento estão sujeitas a variações ao longo do horizonte de planejamento analisado, alguns gestores usualmente congelam vários períodos do horizonte de planejamento, como o horizonte de períodos firmes, e, em seguida, planejam para esses períodos. No entanto, quanto maior o horizonte de planejamento e o número de períodos de planejamento congelados, maior é a falta de aderência entre o que foi planejado e o realizado.

Em face da variabilidade das características, outra possibilidade é o uso de modelos estocásticas. Todavia, a abordagem estocástica aumenta consideravelmente a complexidade analítica e numérica dos modelos, sem necessariamente assegurar melhores resultados. Nesse contexto, uma abordagem clássica para lidar com um cenário dinâmico e incerto é a abordagem robusta, que propõe uma solução subótima por meio de abordagens determinísticas capazes de incorporar a ação de variações na solução dos problemas.

Diante disso este trabalho de pesquisa incorpora os conceitos de otimização robusta que consiste em uma técnica de pior caso (cenário pessimista), que busca alcançar soluções subótimas para um problema com relação ao valor estimado pelo problema determinístico, permitindo assim que as características de entrada dos modelos possam variar sobre um conjunto de incertezas previamente considerados, mantendo assim factível, a solução do problema.

Dessa forma, para simular a realidade do chão de fábrica das empresas por meio do modelo de planejamento da produção, será incorporado o conceito de robustez no modelo matemático de planejamento da produção por meio das principais características sujeitas a tais variações, como por exemplo, tempos de filas, os quais são responsáveis por impactar as estimativas da capacidade de produção.

A capacidade de produção é intrínseca e pré-programada em cada máquina prescrita no sistema de produção, conhecida como capacidade nominal. Contudo, devido as variações que as características de planejamento estão sujeitas, esta capacidade nominal é diretamente impactada, o que por consequência, orienta o gestor a realizar uma nova estimativa de planejamento da capacidade considerando tais variações. Com isso, surge como alternativa, realizar a modelagem do sistema de produção sob uma perspectiva de sistema de filas por meio da Lei de *Little*.

A modelagem de sistemas de produção como um problema de filas conduz a uma relação entre as variáveis, taxa de produção (X), *Work-in-process* (WIP), e tempo total de ciclo (TC), isto é, o tempo de processamento mais o tempo total de espera no sistema. Quando a taxa de produção é a variável independente, a relação $X = WIP/TC$ é chamada de Lei de *Little*, e mais geralmente no âmbito de planejamento de produção, é chamada de *Clearing Function*, a qual é uma função utilizada para estimar a capacidade real em sistemas de produção modelados como um problema de filas.

A grande maioria dos modelos de planejamento de produção baseados em programação matemática não incorporam estimadores de capacidade de produção como variável de decisão. Todavia é conhecido que a forma de como se realiza o carregamento o sistema afeta sua capacidade de produção. Uma das principais razões para isso é a não linearidade do modelo, o que torna mais

difícil sua utilização no dia a dia do chão de fábrica. Com isso, estes estimadores, em geral, aparecem no modelo como um parâmetro exógeno.

Portanto, este trabalho busca resolver o problema de planejamento da produção modelado como um sistema de filas que incorpore estimadores de capacidade como uma das variáveis de decisão.

Como resultados, o modelo robusto de planejamento da produção obtido neste trabalho permite ao planejador fazer uso de um modelo simples e eficiente de planejamento da produção que combina técnicas de otimização robusta com a programação linear a fim de resolver um problema de otimização convexa permitindo a factibilidade da solução do problema em um determinado intervalo de variação para as características incertas.

1.2 PROBLEMA DE PESQUISA

Em ambientes fabris onde a incerteza é grande, isto é, onde as características de planejamento, como tempo, demanda, capacidade etc., possuem um alto nível de variação, fazer o uso de modelos determinísticas para estimar o planejamento da produção, pode não ser uma boa escolha.

Modelos de Programação Linear, modelos baseados em MRP, MRP II e ERP, possuem um grave inconveniente que consiste em considerar as características de entrada no modelo como sendo determinísticas. Esse fato implica que, quando existe a variação nas características do modelo, a solução do modelo determinístico pode não se adaptar a essa variabilidade tornando o mesmo, a solução obtida, infactível. Nesse contexto, planejar a produção utilizando modelos que são essencialmente determinísticas, pode comprometer totalmente a tomada de decisão.

Diante desse problema, a questão norteadora deste trabalho consiste em:

- Como resolver o problema de planejamento da produção a partir de uma abordagem que incorpore as variações providas de um ambiente dinâmico, evitando a enorme complexidade advinda de uma modelagem completamente estocástica?

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo Geral

Resolver o problema de planejamento da produção modelado como um sistema de filas que incorpore estimadores de capacidade como uma das variáveis de decisão.

1.3.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos do trabalho são:

- a) Propor um modelo de programação matemática convexa robusta para resolver o problema de planejamento da produção que otimize os níveis de produção, estoque, releases e *Work-in-process*;
- b) Aproximar o modelo de programação matemática convexa robusta por um problema de programação linear robusta;
- c) Expor a teoria que justifique a aproximação do modelo de programação matemática convexa robusta pelo modelo de programação matemática linear robusta;
- d) Ilustrar numericamente a teoria analisada tanto com relação ao modelo numérico quanto em relação aos resultados obtidos.

1.4 JUSTIFICATIVA

A importância deste trabalho de modelagem do problema de planejamento de produção como um problema de otimização robusta, advém da necessidade de considerar a ação das incertezas sobre as características do modelo, no ambiente onde estão inseridas as organizações uma vez que atualmente as mesmas consideram as características como fixas.

O problema de planejamento da produção tem sido intensivamente abordado como um problema de programação matemática, e a ideia por trás disso é que além de obter soluções viáveis para o problema, o planejador está interessado também em boas soluções. Todavia, as dificuldades encontradas nesse caso, advém principalmente do fato de que as características do modelo,

sendo mantidos como determinísticas, limita sobre maneira a utilização do modelo em ambientes onde a ação da incerteza é constante. Em vista disso, a solução ótima do modelo de planejamento de produção pode não representar a melhor solução, em virtude da variabilidade presente na vivência do dia a dia do chão de fábrica nas empresas de manufatura.

Técnicas de programação robusta vem sendo amplamente utilizadas em ambientes de incertezas onde o planejador precisa tomar decisões viáveis (SOUZA, 2021; BARBOSA, 2020; VIRTUDES, 2019; MARTINEZ, 2019; TAVARES, 2019; SILVA et al, 2018; CENTENO, 2017; ALVES, 2017).

Neste cenário, este estudo tratará sobre a abordagem clássica de programação robusta proposta por Soyster (1973).

Considera-se neste trabalho, como características estocásticas do modelo, os tempos de espera, ou seja, os tempos de filas do sistema que não fazem parte do tempo de processamento.

Em modelos reais de chão-de-fábrica, é possível considerar que todas as características sejam estocásticas, ou parte delas, esta escolha vai depender diretamente da variabilidade qual característica possui na realidade fabril. Para exemplificar, para características com baixa variabilidade, que giram em torno de uma média, considerar simplesmente a média, como características de entrada, em geral, não prejudicará o modelo, contudo, para características em que a variabilidade é extremamente alta, se faz necessário a introdução dos conceitos de robustez.

Portanto, a contribuição deste trabalho consiste em propor, ao planejador, um modelo de planejamento da produção que seja simples e capaz de abranger um maior número possível de casos de realização para as características incertas, ou seja, estocásticas, quando comparados com um modelo que é tratado meramente de forma determinística. Dessa forma, mesmo quando o problema de planejamento da produção possui variações, dentro de determinado conjunto de incerteza, o planejamento construído de maneira robusta, continua válido.

Como uma das contribuições deste trabalho de pesquisa para a academia, é proposto um teorema com a finalidade de demonstrar que um modelo de programação matemática convexa robusta, a partir de uma modelagem do planejamento da produção em sistemas de fila, pode ser

aproximado por um modelo de programação matemática linear robusta sem comprometer a qualidade da solução encontrada.

1.5 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

1.5.1 Classificação da pesquisa

O método de pesquisa é a forma de alcançar a natureza de determinado problema com o intuito de estudá-lo ou explicá-lo, ou seja, é o conjunto de processos ou passos que devem ser empregados na investigação da questão problema (GIL, 2002).

Segundo a classificação de Nascimento (2016), é possível afirmar que a natureza desse trabalho é teórica, pois objetiva gerar conhecimento novo contribuindo para o avanço da ciência, buscando gerar verdades, de interesses universalizados.

De acordo com o mesmo autor, é possível afirmar que quanto a abordagem metodológica da pesquisa, este trabalho classifica-se como abordagem de método quantitativo, pois se trata de um método que utiliza medidas padronizadas e sistemáticas, que agrupa respostas pré-determinadas, o que auxilia na comparação e análise de medidas estatísticas de dados.

Segundo Gil (2002), quanto aos objetivos de pesquisa, classifica-se como pesquisa explicativa, pois emprega método experimental, dotadas de complexidade, que auxilia para identificar fatores que determinam a ocorrência de fenômenos.

1.5.2 Etapas da pesquisa

As etapas da pesquisa consistem em:

- a) Realizar a revisão da literatura sobre problemas de Programação da Produção, Programação Matemática, Programação Linear, Otimização Robusta e Teoria de Filas, por meio de artigos, conferência e periódicos nacionais e internacionais;

- b) Propor um modelo de Programação Linear (PL) para resolver o problema de planejamento da produção;
- c) Incorporar ao modelo de PL do problema de planejamento da produção, os conceitos da teoria de filas, para estimar a capacidade produtiva real do modelo, obtendo assim um modelo de programação não linear;
- d) Incorporar ao modelo proposto os conceitos de otimização robusta obtendo um modelo de programação não linear robusta;
- e) Aproximar o modelo de programação não linear robusta por um modelo de programação linear robusta usando a estratégia de aproximar um conjunto convexo sobre o qual se minimiza uma função por um conjunto convexo poliedral;
- f) Propor um teorema para demonstrar que um modelo de programação não linear robusta pode ser aproximado por um modelo de programação linear robusta;
- g) Realizar uma ilustração numérica considerando os conceitos da robustez nas características do modelo.

1.6 ESTRUTURA DO TRABALHO

O trabalho será organizado em 4 capítulos, divididos da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresenta-se uma introdução, contendo a contextualização, problema de pesquisa, o objetivo geral, os objetivos específicos, justificativa da pesquisa, procedimentos metodológicos e estrutura do trabalho.

No Capítulo 2, apresenta-se uma revisão teórica do trabalho, divididas em modelos sobre planejamento da produção, tais como o planejamento das necessidades de materiais, contemplando o MRP I e MRP II, e programação linear na engenharia de produção; conceitos sobre otimização robusta e suas formulações matemáticas e sistemas de filas.

No Capítulo 3 apresenta-se o processo de aproximação do problema de programação não linear robusto de planejamento da produção considerando

conceitos de sistemas de filas por meio de um problema de programação linear robusto.

No Capítulo 4, apresenta-se as considerações finais da pesquisa, divididas nas principais conclusões, cumprimento dos objetivos da pesquisa e propostas de trabalhos futuros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O referencial teórico desta pesquisa divide-se em 3 partes, englobando conceitos a respeito de modelos de planejamento da produção, conceitos sobre otimização robusta e sistemas de filas.

2.1 MODELOS DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

Nesta seção será apresentado os principais conceitos acerca dos modelos de Planejamento das Necessidades de Materiais e suas evoluções, bem como modelos básicos de Programação Linear para a engenharia de produção, expondo seus conceitos básicos, pontos fortes e suas limitações.

2.1.1 Planejamento das Necessidades de Materiais

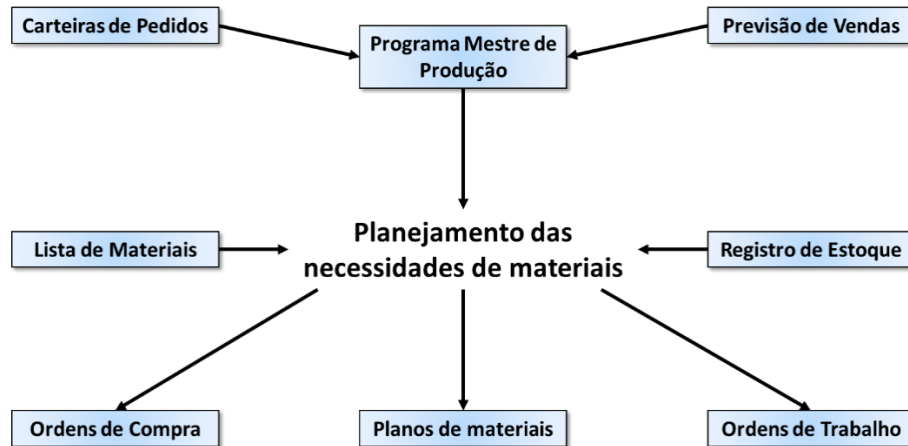
O MRP (Planejamento das necessidades de materiais), assim como qualquer outro sistema de gestão, busca garantir a disponibilidade de insumos quando estes forem necessários. O MRP busca fazê-lo mantendo níveis mínimos de estoque e programando a disponibilização dos materiais para o momento que realmente for necessário no planejamento.

Segundo Gaither (2002), o MRP é um sistema computadorizado que toma o MPS como um dado, explode o MPS na quantidade exigida de matérias-primas, peças, submontagens e montagens necessárias em cada semana do horizonte de planejamento, reduzindo pela comparação com os respectivos estoques ou recebimentos, desenvolvendo assim um programa de pedidos no horizonte de planejamento. É importante ressaltar que o MRP parte da visão do futuro da necessidade de produtos e depois vem “explodindo” para trás conforme *Lead Time*, nível a nível, as necessidades de componentes. Por isso, conhecido pela lógica “programação para trás” (*backward scheduling*).

A ausência de matéria e insumos de produção, gera problema de não atendimento da demanda. Em contrapartida, um estoque elevado, apesar de reduzir os custos de um não atendimento, eleva os custos de manutenção de estoque. Com isso, surge a necessidade de planejar a disponibilização de materiais ao sistema de produção, com a finalidade de buscar uma solução que seja equilibrada entre os custos e os benefícios.

A figura 1 apresenta as informações necessárias para que o MRP seja processado, bem como alguns de seus resultados.

Figura 1. Esquema de Planejamento de necessidades de materiais (MRP)



Neste trabalho, a mecânica do processamento do MRP não será considerada em detalhes, dessa forma, a seguir, busca-se considerar certos aspectos técnicos que afetam seu desempenho, para justificar a sua não utilização deste sistema nesse trabalho.

O MRP possui alguns inconvenientes que precisam ser salientados para comparação das ferramentas que serão propostas e que embasam o modelo de planejamento da produção deste trabalho.

Pode-se destacar alguns inconvenientes do MRP, que são: (i) Impraticabilidade da capacidade de programações do MRP, (ii) *Lead Times*¹ planejados para um período de tempo longo, (iii) Instabilidade do Sistema.

i. Impraticabilidade da capacidade de programações do MRP.

O modelo básico do MRP é uma linha de produção com prazos fixos. Como esse prazo leva em conta o volume de trabalho da indústria, existe uma suposição implícita de que a linha terá sempre capacidade suficiente, não importando a carga de trabalho. De outro modo, o MRP assume que todas as linhas de produção têm capacidade infinita. Portanto, isso pode criar problema

¹ Lead Time: Para a mecânica do MRP, consiste no tempo que se leva para os componentes dos produtos estarem disponíveis para início da produção. Incluem tempo de transportes, preparação das ordens necessárias, etc.

quanto aos níveis de produção quando estão próximos de sua capacidade máxima.

ii. *Lead Times* planejados para um período de tempo longo.

Os problemas causados por prazos longos são agravados pelo fato de o MRP usar *Lead Times* constantes, quando na realidade eles variam constantemente. Para compensar, em geral, o planejador faz a opção pela estimativa pessimista (mais longa) dos *Lead Times*. Portanto, quanto mais longo um *Lead Time* planejado, mais tempo as peças ficaram esperando até serem utilizadas por uma próxima operação, de forma que estoques maiores serão formados no sistema. Esse comportamento degrada o sistema e impacta no aumento de níveis de estoque e de *Work-in-process* (WIP).

iii. Instabilidade do Sistema.

A instabilidade em um sistema de MRP ocorre quando uma pequena alteração no MPS resulta em uma grande alteração na liberação de ordens planejadas, podendo causar efeitos adversos no sistema.

Como essas três fraquezas apresentadas podem subverter a eficácia de um sistema de MRP, foram desenvolvidos, ao longo do tempo, novos procedimentos para solucionar alguns desses problemas, que foram incorporados em um sistema mais abrangente chamado de Planejamento dos recursos de manufatura (*Manufacturing resources planning* – MRP II) (HOPP & SPEARMAN, 2001).

Em virtude disso, e do aparecimento da programação linear no final da década de 1940, desde 1950 os modelos de programação matemática têm sido amplamente utilizados para resolver problemas de planejamento de produção, o qual será abordado a seguir.

2.1.2 Modelo de Programação Linear em Engenharia de Produção

Modelos de programação matemática podem ser criados para representar aspectos importantes de um sistema ou problemas de planejamento de produção. Ao manipulá-los, pode-se entender como o sistema se comportará em meio a variadas condições, fornecendo suporte às decisões. De um modo geral, usar esses modelos são mais baratos, rápidos e seguros do que construir e alterar sistemas reais.

A programação matemática permite ao planejador ser mais preciso, minimizar custos e incluir vários produtos agregados, e os modelos podem utilizar diferentes tipos de restrições simultaneamente. Os modelos podem ser desenvolvidos em várias categorias: Programação linear, otimização de rede, programação inteira mista, programação não linear, programação dinâmica, múltiplos critérios de otimização e programação estocástica. Neste trabalho o enfoque será em modelos de programação linear (PL) e Programação Convexa.

O modelo de programação linear para o planejamento da produção possui as seguintes características. Os produtos foram indexados por $i = 1, 2, \dots, I$; os componentes dos produtos por $k = 1, 2, \dots, K$, e o horizonte de planejamento por $j = 1, 2, \dots, J$.

A relação do *mix* de produtos é descrita por uma matriz não negativa de valor inteiro, comumente chamada de lista de materiais (*Bill of Material* – BOM). O elemento b_{ki} define o número de componentes do tipo k necessários para a fabricação de uma unidade do produto i . Outra especificação é o tempo padrão h_i necessário para produzir uma unidade de produto i .

A partir disso, buscou-se modelar o programa mestre de produção (MPS) ótimo para vários produtos ao longo de um determinado horizonte de planejamento, via programação linear. Onde as variáveis de decisão x_{ij} representam o nível planejado de produção do produto i no período j . O objetivo do modelo consiste em maximizar o lucro total.

Modelo matemático de programação linear em Engenharia de Produção (1):

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J p_i x_{ij} \\
 \text{s. a} \quad & \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^I b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^J S_{kj} \quad \forall t, \forall k \\
 & \sum_{j=1}^J x_{ij} \leq d_i \quad \forall i \\
 & \sum_{i=1}^I h_i x_{ij} \leq g_j \quad \forall j
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$X_{ij} \geq 0$$

Onde as características representam:

p_i – Receita unitária com a produção de uma unidade do produto i ;

S_{kj} – Quantidade de suprimentos do tipo k disponível para ser consumido no período j ;

d_i – Demanda total do produto i ;

g_j – Quantidade de recursos (em unidade padrão de hora) disponível para ser consumido no período j ;

Observa-se que o produto $b_{ki}X_{ij}$ representam as liberações de componentes realizadas por período, ou seja, os *Releases* de componentes. Assim, a restrição da BOM afirma simplesmente que o uso agregado dos componentes do tipo k (durante os primeiros t períodos) não devem exceder o suprimento agregado correspondente.

As soluções (x_{ij}) , para o modelo de Programação Linear, fornecem o Planejamento Mestre de Produção (MPS).

Destaca-se que d_i representa uma estimativa do teto de demanda a ser atendida por produto.

Dessa forma, tanto a restrição de BOM quanto a de demanda, correspondem a restrições do tipo agregadas, diferente da restrição de tempo padrão, a qual é específico do período, ou seja, a mão de obra que não foi utilizada no período, não pode ser transferida para o próximo.

A partir deste modelo, diversas abordagens de programação matemática surgiram com a finalidade de aproximar o modelo à realidade do chão de fábrica das indústrias.

2.2 PROGRAMAÇÃO ROBUSTA

Nesta seção, serão apresentados alguns conceitos básicos de programação robusta, a ideia básica de sua programação matemática, e as abordagens mais comuns de robustez, via convexidade e linearidade.

2.2.1 Otimização Robusta

Os problemas de otimização da vida real geralmente contêm dados incertas, por exemplo, variabilidade da demanda, tempos de ciclo, tempos de setup, capacidade produtiva etc. As razões para essas incertezas nos dados poderiam vir dos erros de medição / estimativa que vêm da falta de conhecimento exato das características do modelo matemático.

Existem duas abordagens distintas para lidar com a incerteza de dados na otimização: otimização robusta e estocástica. A otimização estocástica assume uma importante premissa, que consiste em que a verdadeira distribuição de probabilidade dos dados incertas deve ser conhecida ou estimada. A otimização robusta, por outro lado, não pressupõe que as distribuições de probabilidade sejam conhecidas, mas assume que as características incertas residem em um chamado conjunto de incertezas.

A otimização robusta é um campo de pesquisa relativamente jovem e foi desenvolvido principalmente nos últimos 15 anos. Especialmente nos últimos 5 anos, tem havido muitas publicações que mostram o valor da otimização robusta em aplicações em muitos campos, incluindo finanças, ciência de gestão, cadeia de suprimento, saúde, engenharia etc. (SOUZA, 2021; BARBOSA, 2020; VIRTUDES, 2019; MARTINEZ, 2019; TAVARES, 2019; SILVA et al, 2018; CENTENO, 2017; ALVES, 2017).

Em geral, consideram-se dois tipos de fontes de incerteza em problemas de otimização robusta: incerteza nas restrições e na função objetivo. No primeiro caso, a variação das características do modelo pode ocasionar a perda de viabilidade de soluções, enquanto, no segundo, as variações nas características da função objetivo podem levar a que soluções consideradas ótimas fiquem muito distantes da melhor solução.

O problema clássico de otimização consiste em minimizar (ou maximizar) uma função objetivo, obedecendo a um conjunto de restrições:

$$\begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{Sujeito a:} & g(x) \leq 0 \\ & h(x) = 0 \end{array} \quad (2)$$

Onde: $f(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $g(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p, g(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $h(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, h(x) \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Conforme dito anteriormente, as incertezas podem estar tanto na função objetivo, $f(x)$, quanto nas restrições de desigualdade, $g(x)$, ou de igualdade, $h(x)$, sendo x a variável de decisão.

Um possível tratamento para o problema consiste em analisar o pior caso, ou seja, determinar a solução que minimiza a máxima função objetivo possível quando consideradas todas as instâncias possíveis do problema. Isto é, o problema de otimização robusta é fundamentalmente um problema de *minimax*².

Dessa forma, para minimizar de maneira robusta o modelo (2), com incertezas que podem estar presentes tanto na função objetivo, que será denominado como: $f(x, \alpha_f)$, quanto nas restrições de desigualdade e igualdade, que serão denominados como $g(x, \alpha_g)$, $h(x, \alpha_h)$, respectivamente, onde essas incertezas podem oscilar sobre um conjunto contínuo vetorial, $\Omega_f \in [\bar{\alpha}_f \pm \varepsilon_f]$, $\Omega_g \in [\bar{\alpha}_g \pm \varepsilon_g]$ e $\Omega_h \in [\bar{\alpha}_h \pm \varepsilon_h]$, respectivamente, recai no problema (3). Onde $\alpha_f, \alpha_g, \alpha_h$ e ε_f representam respectivamente os valores médio das características incertas e seus desvios padrão associado.

$$\begin{aligned} & \min F(x, \alpha_f) \\ \text{Sujeito a} \quad & F(x, \alpha_f) = \max_{\alpha_f \in \Omega_f, \alpha_g \in \Omega_g, \alpha_h \in \Omega_h} \{ f(x, \alpha_f) | g(x, \alpha_g) \leq 0; h(x, \alpha_h) = 0 \} \end{aligned} \quad (3)$$

Com isso, pode-se desenvolver um modelo de otimização robusta por meio da aplicação do conceito de *minimax* (3) aplicado ao problema clássico de otimização (2).

Para compreensão da otimização robusta aplicados em um modelo de programação linear, apresenta-se o exemplo explorado por Michel Minoux (2007), de um problema de PL, com matriz tecnológica submetida a um conjunto convexo de incertezas, a seguir.

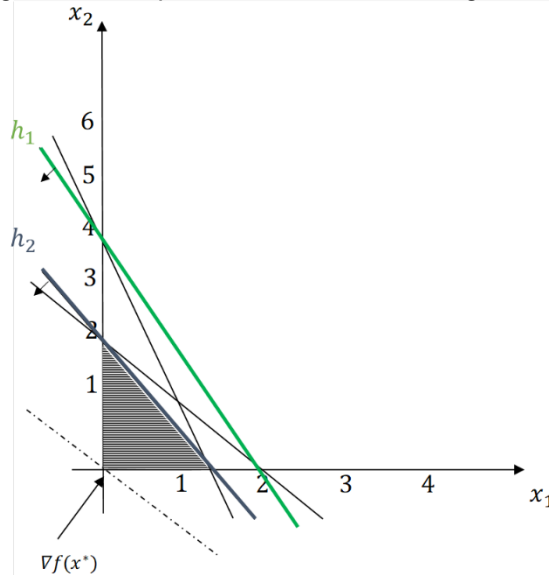
$$\begin{aligned} \text{Sujeito a:} \quad & \max \quad 4x_1 + 3x_2 \\ & a_1x_1 + a_2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{Onde:} \quad a_1 \in [2,3], a_2 \in [1,2]$$

² Minimax: Busca-se minimizar o máximo de uma função. Em outras palavras, busca-se otimizar o pior cenário possível.

Assume-se que a_1 pertence ao conjunto de incerteza de valores reais $[2,3]$, e a_2 ao intervalo real $[1,2]$. Para cada um dos possíveis cenários para escolha de valores em cada conjunto, tem-se a ilustração da solução gráfica, na figura 2:

Figura 2: Exemplo do conceito da abordagem robusta



Na figura 2, nota-se que ao se variar a_1 e a_2 para a mínima realização, ou seja, $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$, tem-se a reta h_1 , destacada na cor verde, a qual representa como solução ótima $x_1 = 0$ e $x_2 = 4$, e o valor da solução objetivo correspondente a $f(x^*) = 12$. Ou seja, representando o maior rendimento possível, em outras palavras o melhor cenário.

Analisando o oposto, ao variar as características a_1 e a_2 para a máxima realização, $a_1 = 3$ e $a_2 = 2$, tem-se a reta h_2 , destacada na cor preta, a qual representa como solução ótima $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$, e o valor da solução objetivo correspondente a $f(x^*) = 6$. Ou seja, representando o mínimo rendimento possível, em outras palavras o pior cenário.

Esse exemplo apresenta claramente a solução ótima do problema ($x_1 = 0$ e $x_2 = 4$) e uma solução subótima do mesmo problema ($x_1 = 0$ e $x_2 = 2$). Utilizando a solução subótima, obtém-se o menor rendimento ($f(x^*) = 6$), contudo, para qualquer variação das características $a_1 \in [2,3]$, $a_2 \in [1,2]$, a solução será factível, e o resultado subótimo será superior ao encontrado pela abordagem pessimista robusta, devido a solução robusta estar contida no conjunto da solução ótima do problema.

Esse exemplo apresentado esclarece o efeito que a abordagem robusta pode trazer ao planejador, pois caso haja variações nas características analisadas, sob um conjunto determinado de incerteza, o problema inicialmente formulado, ainda permanecerá factível, liberando assim, da necessidade de replanejamento do problema.

Com isso, pode-se esclarecer que o preço da robustez é o preço que o tomador de decisão paga por prejudicar o valor da função objetivo, contudo, adotando a solução robusta, garante a factibilidade do modelo para um conjunto de variação dos características analisados.

Na literatura há diversos trabalhos que exploram o impacto que ocorre no modelo diante de perturbações nas características do modelo.

Souza (2021) apresentou uma aplicação de algoritmos de morfogênese adaptativa combinado com a otimização robusta em problemas de placas finas enrijecida. No trabalho de Barbosa (2020) foi apresentado o desenvolvimento de um framework para otimização robusta e uma aplicação para o planejamento tático de uma cadeia de suprimentos de argônio. Enquanto, Virtudes (2019) apresentou uma aplicação da otimização robusta voltado a área de finanças.

Martinez (2019) apresentou uma aplicação da otimização robusta e programação estocástica para o problema de roteamento de veículos com múltiplos entregadores. Tavares (2019) realizou uma aplicação de seleção de fornecedores usando a otimização robusta. Silva *et al.* (2018) otimizou o processo de batelada-alimentada usando a evolução diferencial e otimização robusta.

Volpi (1997) apresentou um modelo de programação linear utilizado para resolver um problema de planejamento florestal diante do impacto de perturbações estocásticas, com a finalidade de escolher o melhor regime de manejo para cada estrato florestal, de forma a maximizar o Valor Líquido Presente Geral.

2.2.2 Abordagens de otimização robusta

2.2.2.1 Abordagem Convexa

Ben-Tal e Nemirovski (1999) demonstraram que a formulação da contraparte robusta de um problema de otimização depende dos intervalos definidos para as características incertas, e que a definição dos intervalos sob a forma de elipses aumenta a interação entre as características, evitando que a contraparte robusta direcione o problema para um cenário no qual o pior resultado possível se concretize para cada parâmetro incerto.

Pode-se representar o intervalo elipsoidal da seguinte forma:

$$S_i = \{\alpha: (\alpha - \bar{\alpha}_i)^T V_i^{-1} (\alpha - \bar{\alpha}_i) \leq r^2\} \quad (5)$$

Onde, α_i representa cada linha i da matriz de restrições A , $\bar{\alpha}_i$ representa o valor médio das características incertas e V_i^{-1} representa a matriz inversa.

O modelo definido por Ben-Tal e Nemirovski (1999) possibilita uma maior interação entre as características incertas, porém, ao utilizar intervalos elipsoidais, a contraparte robusta se torna um problema de otimização quadrático cônico, muito mais complexo de ser implementado do que o modelo proposto por Soyster (1973) e Bertsimas e Sim (2006) apresentados a seguir.

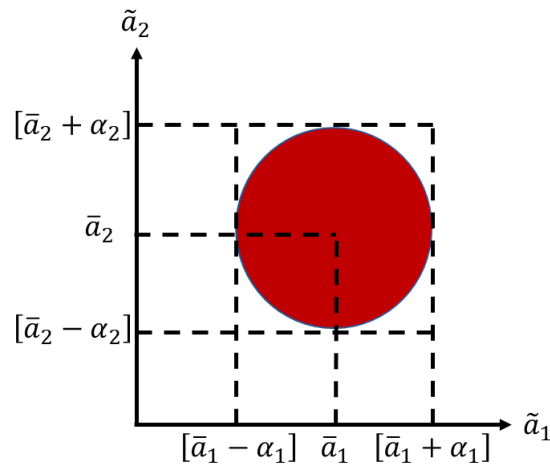
O desenvolvimento de contrapartes robustas menos conservadoras, ou seja, que não perturbem as características incertas para o pior cenário, é de grande importância para qualquer tomador de decisão, pois existe um preço que se está disposto a pagar para reduzir os riscos.

A abordagem de Ben-Tal e Nemirovski, possui um conjunto de incerteza analisado do tipo Elipsoidal. A vantagem desse método consiste no controle do conservadorismo. A desvantagem consiste na complexidade computacional para resolução do problema quadrático cônico.

A seguir foi realizado uma ilustração para a compreensão do conjunto de incerteza analisado.

Onde: $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$ representam os valores das características dos vetores médios; α_1, α_2 representam os valores desvios associados dos vetores médios e $\tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ representam os valores das características incertas dos vetores.

Figura 3. Conjunto de incertezas Elipsoidal de Ben-Tal e Neimirovski



2.2.2.2 Abordagem Linear

Abordagem de Soyster

O modelo (3) apresentado para definição da abordagem robusta foi introduzido por Soyster (1973), este modelo foi o pioneiro em otimização robusta e é dito como extremamente conservador, no sentido em que o valor da função objetivo se deteriora em demasia para garantir a robustez, em termos de factibilidade, da solução.

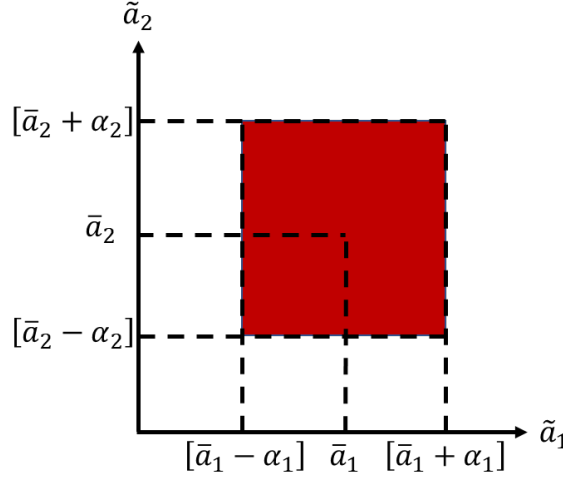
Soyster (1973) usou o termo “caixa de incerteza” para referenciar o espaço de realização das características incertas no modelo, ou seja, o espaço vetorial possui como centro um vetor médio que pode variar de forma simétrica sob uma determinada amplitude (desvio) ao longo da “caixa”.

Portanto, a abordagem de Soyster (1973), possui um conjunto de incerteza analisado do tipo “caixa de incerteza”. A vantagem dessa abordagem consiste na simplicidade de aplicação. A desvantagem consiste no alto nível de conservadorismo.

A seguir foi realizado uma ilustração para a compreensão do conjunto de incerteza analisado.

Onde: \bar{a}_1, \bar{a}_2 representam os valores das características dos vetores médios; α_1, α_2 representam os valores desvios associados dos vetores médios e \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 representam os valores das características incertas dos vetores.

Figura 4. Conjunto de incertezas “em caixa” de Soyster



Abordagem de Bertsimas e Sim

Bertsimas e Sim propõem uma nova abordagem para representação das incertezas das características, que possibilita que a contraparte robusta não afete de maneira excessiva o valor obtido para a função objetivo, por meio da introdução de um parâmetro de controle que pode ser introduzido pelo usuário, denominado de *budget* de incerteza.

Neste modelo, as características incertas podem oscilar dentro de intervalos fechados com centro no valor esperado para os características e amplitude correspondentes à diferença entre o valor esperado e o pior cenário possível. Porém, os piores valores possíveis assumidos para as características incertas são limitados por um parâmetro Γ , definido por Bertsimas e Sim como o “preço da robustez” permitindo o controle do conservadorismo.

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{a}_{i,j} - \bar{a}_{i,j}}{\sigma_{ij}} \right) \right) \leq \Gamma \quad (6)$$

Onde $\tilde{a}_{i,j} - \bar{a}_{i,j}$ representa a diferença entre os valores que podem ser assumidos pelas características incertas ($\tilde{a}_{i,j}$) e o valor médio ($\bar{a}_{i,j}$), divididos pela amplitude do intervalo simétrico (σ_{ij}).

Com isso, o intervalo de incerteza considerado por esses autores pode ser expresso da seguinte forma:

$$I = \left\{ A \in R^{m \times n}: a_{i,j} \in [\bar{a}_{i,j} - \alpha_{i,j}, \bar{a}_{i,j} + \alpha_{i,j}], \forall i, j; \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\tilde{a}_{i,j} - \bar{a}_{i,j}}{\sigma_{ij}} \right) \right) \leq \Gamma, \forall j \right\} \quad (7)$$

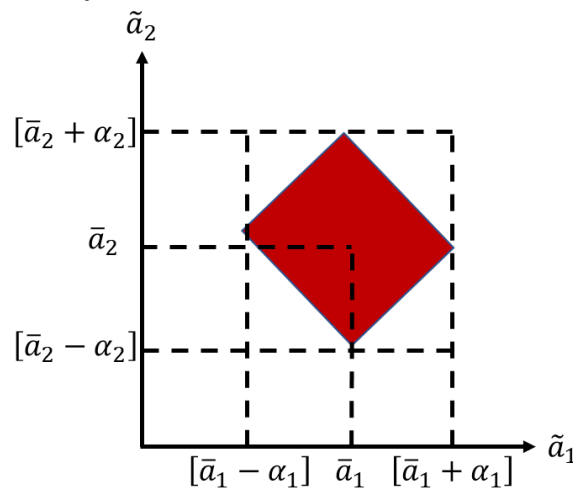
Dessa forma, quanto menor o valor declarado para o parâmetro Γ (preço da robustez), menor será a variação entre as características incertas e seus valores médios.

A abordagem de Bertsimas e Sim, possui um conjunto de incerteza do tipo poliedral. A vantagem dessa abordagem consiste em permitir o controle do conservadorismo do problema e simplicidade numérica. A desvantagem dessa abordagem consiste na interpretação do parâmetro de controle, que é resultado do risco que o tomador de decisão deseja assumir.

A seguir foi realizado uma ilustração para a compreensão do conjunto de incerteza analisado.

Onde: \bar{a}_1, \bar{a}_2 representam os valores das características dos vetores médios; α_1, α_2 representam os valores desvios associados dos vetores médios e \tilde{a}_1, \tilde{a}_2 representam os valores das características incertas dos vetores.

Figura 5. Conjunto de incertezas “em caixa” de Bertsimas e Sim



Diante desse contexto, este estudo irá realizar análises a partir dos conceitos de otimização robusta.

2.3 SISTEMAS DE FILAS

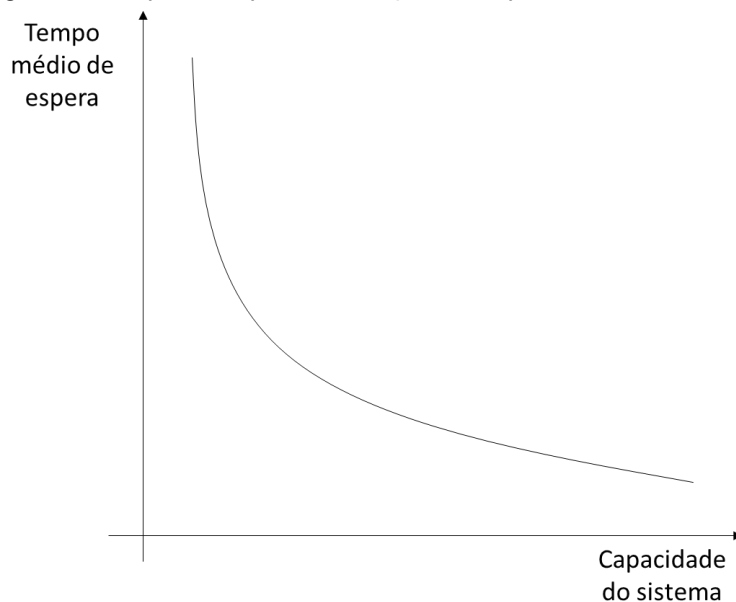
Nesta seção serão abordados conceitos sobre sistemas de filas, retratando suas principais definições, classificações, notações usadas e a teoria da *lei de Little*.

2.3.1 Definição de filas

As filas de espera surgem nos mais variados sistemas de produção, tanto em serviços quanto em manufatura. Esse trabalho irá focar sobre as filas na manufatura, contudo, a teoria das filas é bem conhecida nos mais diversos setores, como por exemplo, o setor de serviços, em casos de filas em bancos, restaurantes, mercados etc.

É conhecido que o surgimento de filas ocorre quando a procura por uma determinada operação, em um certo intervalo de tempo, excede a capacidade do sistema de oferta. A figura 6 retrata esse tipo de situação, onde apresenta uma curva de *trade-off* (compromisso) entre o tempo médio de espera em função do nível de capacidade de um determinado sistema.

Figura 6: Tempo de espera em função da capacidade do sistema



Em geral, como na maioria dos casos reais, analisar um fato sob a visão do usuário é diferente ao de analisar sobre a visão do gestor, e na teoria de filas, também é válido. Portanto, as medidas de desempenho a serem consideradas em uma fila, possuem graus de importância diferentes dependendo de qual ótica serão analisadas.

As principais medidas de desempenho quando se busca por bons sistemas de filas sob um ponto de vista do usuário são: tempo médio de serviço; tempo médio de espera em fila até receber o serviço e número médio de usuários em fila. Da mesma forma, sob uma análise do gestor, tem-se as seguintes

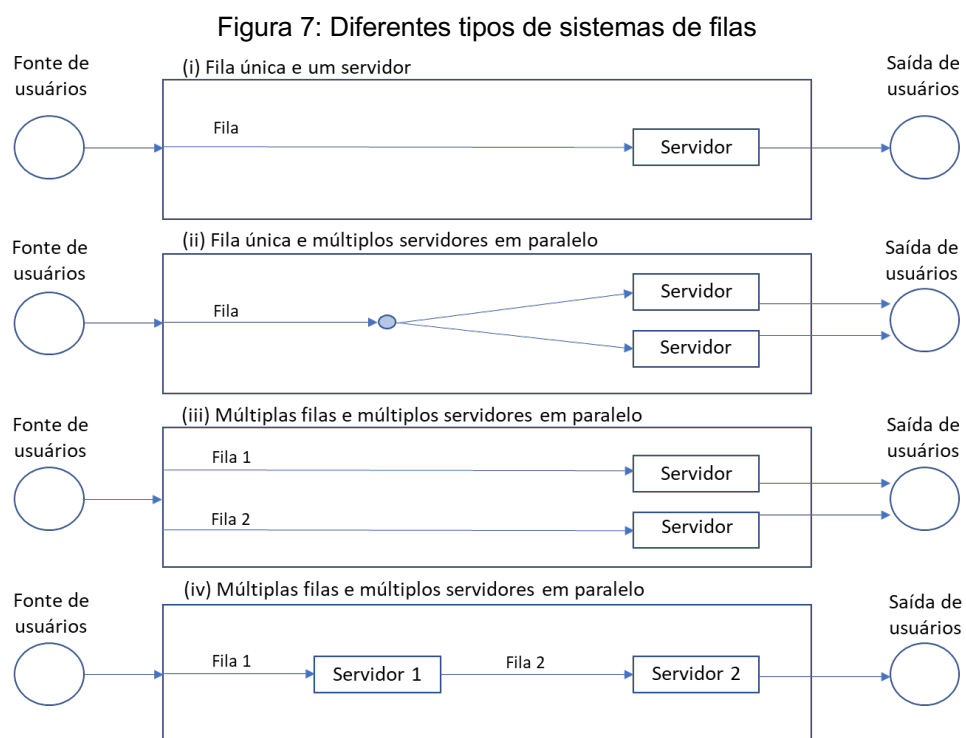
medidas de desempenho: a taxa de utilização média do sistema e a taxa média de utilização dos servidores.

Portanto, o foco da teoria de filas é a avaliação de medidas de desempenho do sistema em função de uma dada configuração. Com isso, a análise de modelos de decisão em sistemas de filas depende de boas estimativas dessas medidas.

2.3.2 Classificação dos sistemas de filas

É importante destacar que existem diversos tipos de sistemas de filas, e dependendo de qual se está abordando, a modelagem do problema pode ser mais complexa de ser analisada. A figura 7, apresenta esses diferentes tipos de sistemas de filas, que foram divididos em: Fila única e apenas um servidor; Fila única e diversos servidores em paralelo; diversas filas e servidores em paralelo e Fila única e diversos servidores em série.

Basicamente, a literatura considera se o sistema possui um único estágio (casos (i), (ii), e (iii)), ou diversos estágios (caso (iv)). Nos sistemas com mais de um estágio, os usuários são submetidos a mais de um dispositivo de serviço antes de saírem do sistema.

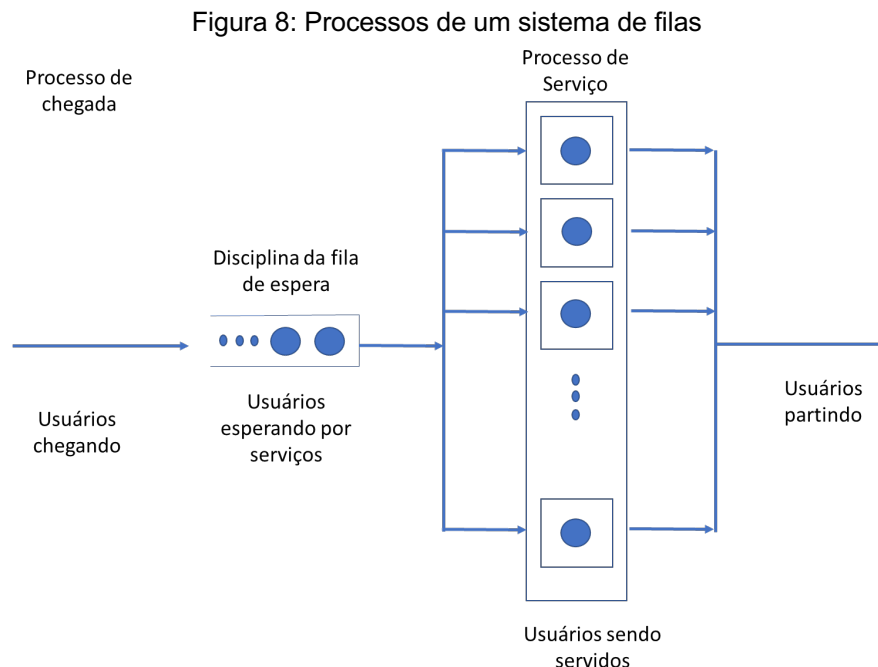


Na figura 7 é possível notar que os sistemas de filas possuem basicamente quatro elementos: fonte de usuários, fila, serviço e saída dos usuários.

Na prática, as redes de filas não são restritas a obedecerem apenas a um tipo de conjunto, e sim, podendo combiná-los, por exemplo em casos complexos de sistemas do tipo *job-shop*.

Algumas informações são de extrema importância para a análise de um sistema baseado em filas, como os processos nela presentes, a saber: como é realizado o processo de chegada de usuários; como está classificada a disciplina da fila e como é realizado o processo de serviço.

A figura 8 buscou ilustrar esses elementos.



Portanto, observa-se na figura 8 o processo de chegada de usuários no sistema e, em seguida, a submissão destes em uma disciplina da fila, que por sua vez, ordena e orienta como será feito esses processos de chegada, e em seguida passam pelo processo de atendimento, que nesse caso, tem-se mais de um servidor, dispostos em paralelo.

2.3.3 Disciplina da fila

Para as filas existe um processo de organização de como os usuários chegam ao sistema e como serão ordenados para posterior atendimento.

Dessa forma, a disciplina da fila está relacionada com a ordem em que os usuários são selecionados da fila para atendimento no sistema.

A FIFO, é a disciplina mais comum, ou seja, o primeiro a chegar, é o primeiro a sair (*First in first out* – FIFO), contudo, na literatura pode-se encontrar outros tipos, a saber: LIFO – último a chegar, primeiro a sair (*Last in first out* – LIFO); SIRO – serviço em ordem aleatória (*Service in random order* – SIRO); SPT – seleção com base em alguma prioridade (*shortest processing time* – SPT), entre outras.

Finalmente, ressalta-se que o espaço físico, em geral, é o responsável por ditar a capacidade da fila, com isso, uma vez alcançada esse limite, a entrada de novos usuários na fila é bloqueada.

2.3.4 Notação para filas

Kendall-Lee (1953) foram os autores responsáveis pela construção de notações de um sistema de filas que, em geral, observa-se ser amplamente utilizado pela literatura.

A notação de *Kendall-lee* considera sistemas de fila única com um ou mais servidores idênticos em paralelo.

Essa notação é composta por seis (6) características, a saber: $A/B/m/C/K/N$. A seguir explica-se cada uma.

A letra “A” refere-se à distribuição de probabilidade do processo de chegada (intervalos de tempo entre chegadas sucessivas), podendo ser:

$A = D$	Determinística ou probabilística	
$A = M$	Distribuição exponencial – Markovian	(8)
$A = G$	Distribuição genérica	

A letra “B” indica a distribuição de probabilidade do processo de serviço (tempos de serviços), podendo ser:

$B = D$	Determinística ou probabilística	
$B = M$	Distribuição exponencial – Markovian	(9)
$B = G$	Distribuição genérica	

A letra “ m ” faz referência ao número de servidores em paralelo, por exemplo, $m = 3$, indica que possuem 3 servidores em paralelo para atendimento dos usuários que aguardam nas filas.

A letra “ C ” especifica a disciplina da fila, podendo ser:

$$C = FIFO/LIFO/SIRO/PRI \quad (10)$$

Onde FIFO indica que o primeiro usuário a chegar será o primeiro a sair do sistema; LIFO indica que o último usuário a chegar será o primeiro a sair do sistema; SIRO indica atendimento aleatório e PRI indica atendimento por prioridade.

Para casos em que a disciplina da fila é do tipo genérica, $C = GD$, pode ser omitida da notação de *Kendall-Lee*.

A letra “ K ” refere-se ao número máximo de usuários no sistema (incluindo os usuários em serviço e em filas). Para o sistema com capacidade ilimitada ($K = \infty$), esta informação pode ser omitida da notação.

A letra “ N ” indica o tamanho da população (fonte de usuários). Para o sistema de população infinita ($N = \infty$), esta informação também pode ser omitida da notação.

2.3.5 Lei de *Little*

A lei de Little descreve a relação entre o número médio de usuários no sistema $E(L)$, o tempo médio de permanência dos usuários no sistema $E(W)$ e a taxa média de chegadas de usuários no sistema ($\bar{\lambda}$).

Dessa forma, o número médio de usuários no sistema, em estado de equilíbrio, pode ser determinado usando a seguinte equação:

$$E(L) = \lambda E(W) \quad (11)$$

Essa fórmula apresenta que o número médio de usuários no sistema é proporcional ao tempo médio de permanência dos usuários no sistema e a constante de proporcionalidade é dada pela taxa de entrada de usuários no sistema. Ela indica também que o número médio de usuários no sistema, ao finalizar um processo, corresponde ao produto entre a taxa de entrada de usuários ($\bar{\lambda}$) pelo tempo médio de permanência do usuário ($E(W)$), quando se considera fila e serviço, no sistema.

A lei de *Little*, assim como muitos sistemas de filas, é baseada no comportamento do sistema no estado de equilíbrio, conhecido pela literatura como “*Steady State*”, que é atingido após um tempo de operação suficientemente grande.

Como interpretação da lei de *Little*, tem-se que um sistema de filas em equilíbrio, o número médio de usuários ($E(L)$) que um usuário aleatório encontra ao entrar no sistema deve ser igual ao número de usuários que ele observa ao sair do sistema.

Finalmente, é importante destacar que a fórmula de *Little* é válida para as seguintes situações: qualquer processo de chegada (A); qualquer processo de serviço (B); qualquer número de servidores (m); qualquer disciplina de fila (C); para classes de usuários com diferentes prioridades e quando a taxa de entrada ($\bar{\lambda}$), em vez de uma constante, depende do estado do sistema.

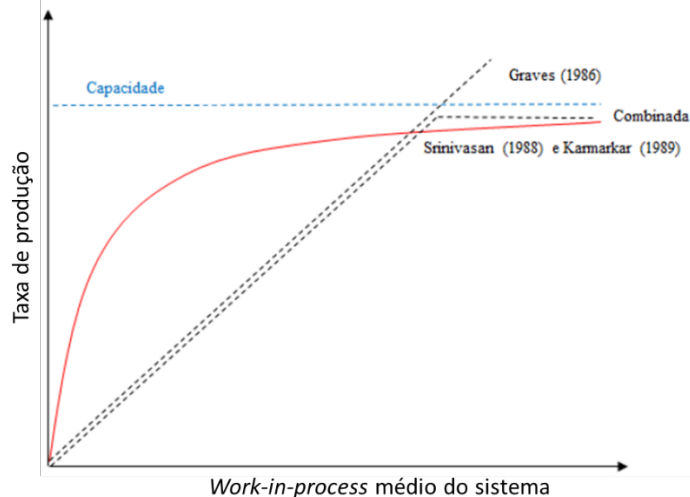
2.3.5.1 Clearing Function

A *Clearing Function* (CF) é uma função utilizada para estimar a capacidade real do sistema produtivo e é proveniente de uma interpretação da Lei de *Little*.

Na literatura existem diversos trabalhos que dão suporte a compreensão sobre a *Clearing Function*. A seguir, alguns trabalhos serão apresentados os quais utilizaram abordagens da *Clearing Function* dependente do *Work-in-process (WIP)*, para estimar a capacidade do sistema.

A *Clearing Function* foi interpretada de diversas formas, e na figura 9, apresenta-se algumas dessas maneiras possíveis de interpretação e seus respectivos autores.

Figura 9. Formas de abordagens da *Clearing Function*



Fonte: Adaptado de Irdem (2009).

A primeira abordagem consiste em analisar a *Clearing Function* como uma função “constante de proporcionalidade”. Essa abordagem foi proposta por Graves (1986) e permite saídas ilimitadas ao longo de um horizonte de planejamento, contudo, considera um *Lead Time* fixo, semelhante ao caso apresentado de MRP.

A função de “nível constante” correspondente a uma produção que independente da carga do sistema permanecerá com a produção de acordo com o nível de capacidade do sistema. Além disso, a produção é vista como instantânea, uma vez que, não possui restrição com *Lead Time*. Todavia, possui um limite máximo para a taxa de produção ao longo de um horizonte de planejamento.

Em seguida, tem-se o “modelo combinado” que faz uso das abordagens de “constante de proporcionalidade” e “nível constante”, permitindo assim, obter vantagens que ambas proporcionam nos sistemas.

Finalmente, o modelo não linear da *Clearing Function*, que foi introduzido por Srinivasan *et al.* (1988), Karmarkar (1989). Esse modelo considera a *Clearing Function* como função dependente do *Work-in-process* do sistema, ou seja, as taxas de produção são uma função não linear do *Work-in-process*.

Recentemente, Conte (2016) explorou outras abordagens da Lei de *Little*, apresentadas a seguir, onde considera a *Clearing Function* sob em função tanto do *Work-in-process* quanto do *Lead Time*.

A suposição de que o *Work-in-process* do sistema é o único argumento da *Clearing Function*, não é o suficiente para obter um modelo capaz de fornecer

todas as informações necessárias sobre a taxa de produção e os tempos de ciclo do sistema.

É notório que as taxas de produção não dependem exclusivamente do *Work-in-process* do sistema, uma vez que, diversos outros tempos estão envolvidos no sistema, tais como: tempos de preparação (*Setup*), tempos de espera nos locais de trabalho, o tempo de processamento em máquinas, movimentos de cargas entre os centros, entre outros. Quanto mais tempo extra gastos com estes tempos, menor será a capacidade real disponível de produção do sistema. Dessa forma, deixar de considerá-los na modelagem de um sistema de produção, pode comprometer a eficácia do modelo.

Em geral, os modelos teóricos de planejamento da produção preveem que a taxa de produção depende do estado de *Work-in-process* do sistema, fato este que pode ser confirmado com percepções práticas do dia a dia do chão de fábrica. Contudo, o *Work-in-process* do sistema, também afeta o tempo de ciclo de produção e a taxa de produção de um sistema, e, com isso, pode-se afirmar que são variáveis claramente relacionadas. Com isso, é fato que a lei de *Little* precisa ser explorada considerando esta realidade.

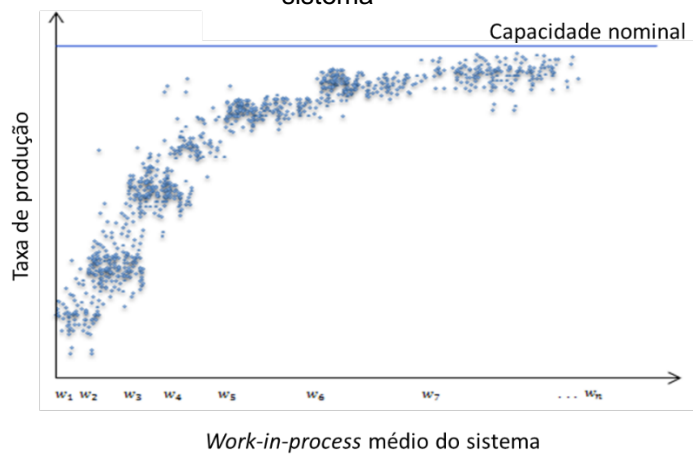
Usa-se a lei de *Little* para mostrar a relação entre as variáveis, *WIP* (*Work-in-process* médio do sistema), tempo médio de ciclo do sistema (*TC*) e a taxa média de produção do sistema (*X*).

É possível perceber que um mesmo nível de taxa de produção pode ser alcançado por diferentes níveis de carregamento e tempo de ciclo. Isto implica que o nível de taxa de produção em um sistema produtivo é completamente indeterminado, uma vez que, tem-se duas variáveis (*WIP* e *TC*) e uma única equação.

$$X = \frac{WIP}{TC} = \frac{\alpha \times WIP}{\alpha \times TC}, \forall \alpha \neq 0 \quad (12)$$

Portanto, a lei de *Little* é uma relação ponto conjunto, gerando uma nuvem de pontos no gráfico, ou seja, para um mesmo nível de carregamento tem-se diversas taxas de produção diferentes, mostrando que de fato, a lei de *Little* não é uma função e sim uma relação ponto conjunto.

Figura 10. *Lei de Little* como relação ponto conjunto para cada carregamento do sistema



Fonte: Adaptado de Irdem (2008).

Observa-se que o Tempo médio de Ciclo e o *Work-in-process* médio do sistema, são variáveis diretamente relacionadas, ou seja, quanto maior o nível de *Work-in-process*, maior será o tempo médio de ciclo para a conclusão deste, e vice-versa, visto que o tempo de ciclo é uma função do *Work-in-process*. Entretanto, o tempo de ciclo não é uma função linear do *Work-in-process*. Nesta ideia, foi proposto uma adaptação da Lei de *Little* que se observa ter sido introduzida por SAMPAIO et al. 2014.

$$X(WIP, TC(WIP)) = \frac{WIP}{TC(WIP)} \quad (13)$$

Para obtenção da formulação da *Clearing Function* em função de duas variáveis, algumas definições serão realizadas. Considera-se que o tempo de ciclo (TC) é a soma do tempo de processamento (TP) com todos os outros tempos (s), onde s representa os tempos de filas, paradas não programadas, tempo de transporte entre estações de trabalhos, entre outros.

$$TC = TP + S \quad (14)$$

Considera-se também que o Tempo de Processamento (TP) corresponde a relação entre o *Work-in-process* (WIP) e a Capacidade Nominal (N) do sistema.

$$TP = \frac{WIP}{N} \quad (15)$$

Com isso, a formulação da *Clearing Function* é a seguinte:

$$X(WIP, S) = \frac{N \times WIP}{N \times S + WIP} \quad (16)$$

A *Clearing Function* pode ser analisada de duas maneiras funcionais, e ambas as perspectivas resultam em diferentes abordagens da Lei de *Little*.

- Como função de proporcionalidade de duas variáveis sobre o carregamento ou
- Como uma função da proporcionalidade de duas variáveis sobre a sua capacidade nominal.

Uma primeira análise diz respeito em analisar a taxa de produção como uma fração do carregamento do sistema que pode ser transformado em produção, ou seja, a fração do carregamento do sistema que pode ser “limpa” em cada período do horizonte de planejamento. Com isso, pode-se considerar a taxa de produção como uma função de limpeza do *Work-in-process* do sistema, expresso da seguinte forma. Esta equação representa uma função convexa decrescente a taxas crescentes.

$$X(W) = \frac{N}{N \times S + W} \times W = \alpha(W, S) \times W \quad (17)$$

Uma segunda análise, propõem que a *Clearing Function* pode ser analisada em função da capacidade nominal. Dessa forma, pode-se considerar a taxa de produção agora como uma função de limpeza da taxa nominal do sistema, que corresponde a uma função côncava crescente a taxas decrescentes.

$$X(W) = \frac{W}{N \times S + W} \times N = \beta(W, S) \times N \quad (18)$$

Conte (2016), mostrou que a abordagem da *Clearing Function*, como função dependente de duas variáveis (*Work-in-process* médio e tempo médio de ciclo no sistema) é uma função eficiente para estimar taxas de produção desde que as características em ambos os casos sejam utilizadas a regressão dinâmica para a estimação das características de ajustes da *Clearing Function*. Conte (2016), mostrou por meio de um planejamento de experimentos e uma simulação em uma fábrica de alimentos que após os ajustes da *Clearing Function* via regressão dinâmica, tanto para o caso funcional $X(WIP)$ (*Clearing Function* em função de uma variável), quanto o novo modelo proposto $X(WIP, S)$ (*Clearing*

Function em função de duas variáveis), mostraram-se eficientes independentemente do número de variáveis envolvidas no processo.

Com isso, observou-se que não há a necessidade de aumentar a complexidade do problema, inserindo mais variáveis, uma vez que é possível, utilizando *Clearing Function* em função apenas de uma variável (*Work-in-process* médio do sistema), aplicar aos resíduos deste modelo, um novo ajuste via séries temporais.

3 APROXIMAÇÃO DE MODELOS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA ROBUSTO

Neste capítulo será apresentado o processo de aproximação do problema de programação não linear robusto de planejamento da produção, ao qual incorpora conceitos de sistemas filas em sua modelagem, por meio de um problema de programação linear robusto.

A divisão do capítulo inicia-se com:

- Os principais conceitos (preliminares) sobre aproximação de problemas convexos;
- Apresenta-se o processo de aproximação de funções não lineares usando a aproximação de Taylor;
- Apresenta-se a teoria de aproximação para o problema de programação não linear usando programação linear com o enunciado de um teorema;
- Uma ilustração numérica é realizada ao qual incorpora-se conceitos da abordagem de otimização robusta.

3.1 PRELIMINARES DO PROBLEMA

Nesta seção apresenta-se os conceitos básicos sobre conjunto convexo, conjunto poliedral, funções convexas e côncavas, teoremas de Rolle, Valor Médio e Taylor. O objetivo destas definições consiste em auxiliar a compreensão da exposição da teoria de aproximação de um problema de programação não linear por um problema de programação linear que será apresentada neste capítulo.

3.1.1 Conjunto convexo

3.1.1.1 Definição 1 (Combinação Linear)

Dado $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, m$, e $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$. Então, $v = \sum_{i=1}^m a_i v_i$, é chamado de combinação linear dos v_i .

3.1.1.2 Definição 2 (Função afim)

Uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida como $f(x) = a^t x + b$ onde $a \in \mathbb{R}^n$ e $b \in \mathbb{R}$, é chamada de função afim.

3.1.1.3 Definição 3 (Combinação convexa)

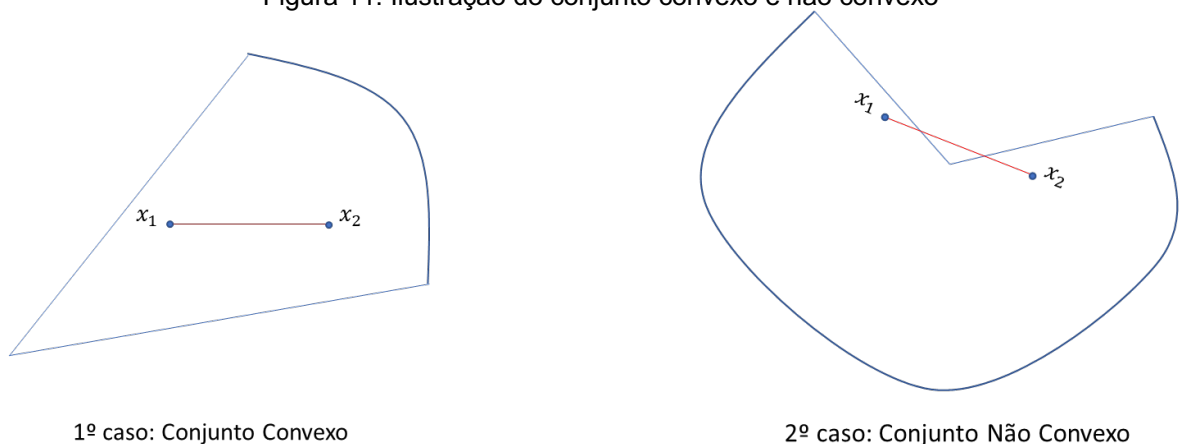
Dada qualquer coleção finita de pontos $x_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, m$, um ponto $z \in \mathbb{R}^n$ é dito ser uma combinação convexa desses pontos se existem $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $\lambda_i \geq 0$, e $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$, tal que $z = \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$.

3.1.1.4 Definição 4 (Conjunto convexo)

Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é chamado de convexo se dado dois pontos quaisquer do conjunto X , qualquer combinação convexa entre esses dois pontos é um ponto de X . Em particular significa que o segmento de reta entre esses dois pontos dados está contido em X .

Geometricamente pode-se ilustrar.

Figura 11. Ilustração do conjunto convexo e não convexo



Exemplos de conjuntos convexos.

- $\Omega_a = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax = b, A_{m \times n} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^m\}$
- $\Omega_b = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax \geq b, A_{m \times n} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^m\}$
- $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n: Ax \leq b, A_{m \times n} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, b \in \mathbb{R}^m\}$

3.1.1.5 Definição 5 (Hiperplano)

Chama-se de hiperplano de \mathbb{R}^n um conjunto $H \subset \mathbb{R}^n$ da forma $H = \{x \in \mathbb{R}^n: p_0^t x = k, p_0 \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}\}$.

Uma importante propriedade que decorre dessa definição é que o vetor fixo p_0 é perpendicular ao hiperplano H .

De fato, dado dois pontos quaisquer,

$$\forall x_1, x_2 \in H,$$

tem-se,

$$p_0^t x_1 = k \text{ e } p_0^t x_2 = k \quad (19)$$

Assim,

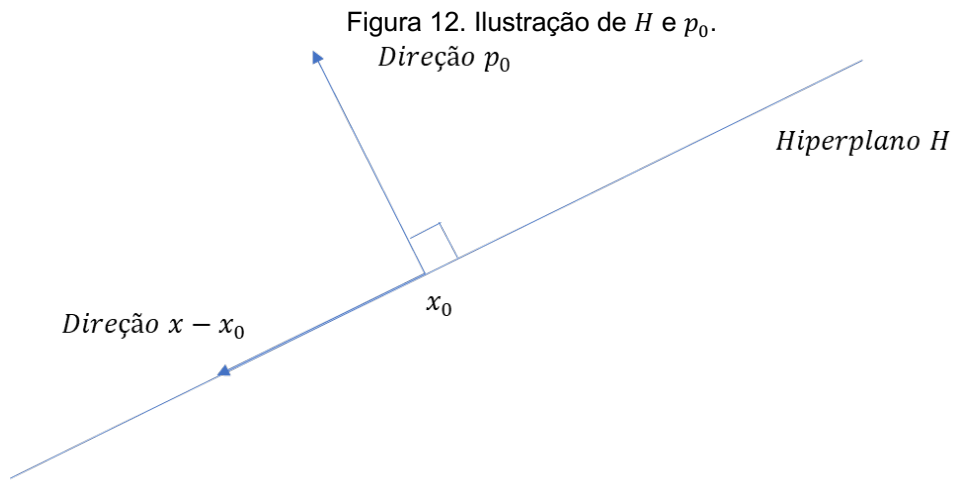
$$\begin{aligned} p_0^t x_1 - p_0^t x_2 &= k - k = 0 \\ p_0^t (x_1 - x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

Daí que,

$$(x_1 - x_2) \in H \quad (21)$$

p_0 é perpendicular ao hiperplano H .

Na figura a seguir tem-se uma ilustração de H e p_0 .



Observe que um hiperplano em \mathbb{R}^n generaliza a noção de reta em \mathbb{R}^2 e de plano em \mathbb{R}^3 .

Um hiperplano H divide o espaço \mathbb{R}^n em duas regiões chamadas de semiespaços. Esses semiespaços são chamados de semiespaço superior,

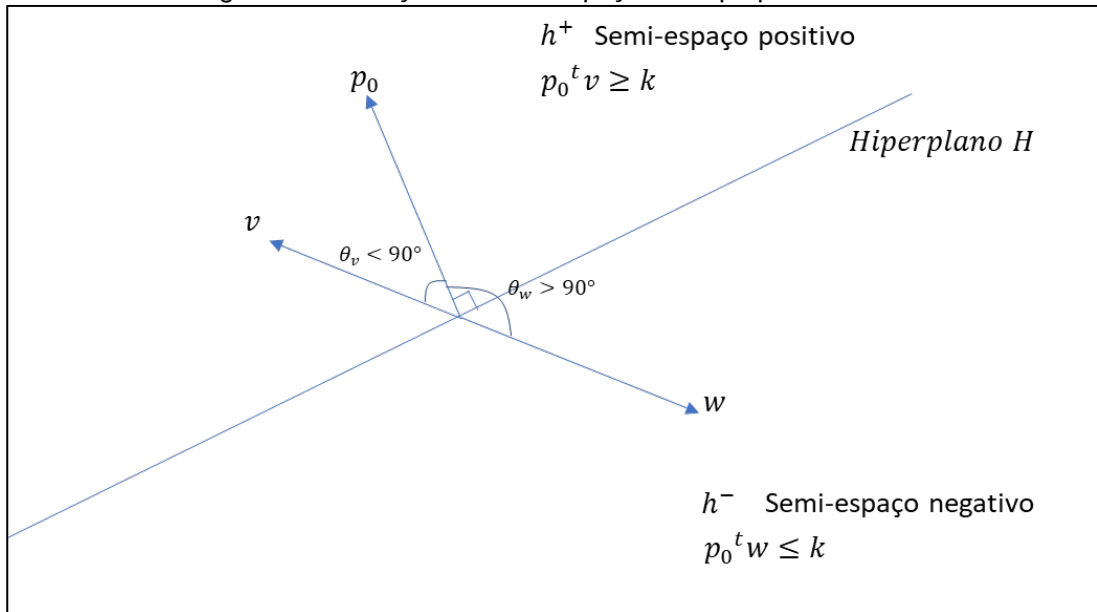
$$h^+ = \{x \in \mathbb{R}^n: p_0^t x \geq k, p_0 \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}\} \quad (22)$$

e semiespaço inferior,

$$h^- = \{x \in \mathbb{R}^n: p_0^t x \leq k, p_0 \in \mathbb{R}^n \text{ e } k \in \mathbb{R}\} \quad (23)$$

Fixado p_0 , todos os vetores que formarem com ele um ângulo menor ou igual a 90° pertencerão ao semiespaço superior h^+ porque o produto interno entre esses vetores resultará em um valor positivo. Caso o ângulo formado entre esses vetores seja maior ou igual a 90° pertencerão ao semiespaço inferior h^- porque o produto interno resultará em um valor negativo. Conforme figura a seguir

Figura 13. Ilustração dos semiespaços do hiperplano H



Na figura acima observa-se que fixado p_0 e dado dois vetores distintos v e w , o ângulo formado entre p_0 e v (θ_v) é menor que 90° , logo pertence ao semiespaço positivo, e para os vetores p_0 e w o ângulo formado entre eles (θ_w) é maior que 90° , logo, pertencem ao semiespaço negativo.

3.1.1.6 Definição 6 (Conjunto Poliedral)

Chama-se de conjunto poliedral o conjunto obtido pela interseção de um número finito de semiespaços. Se um conjunto poliedral for fechado e limitado é chamado de politopo.

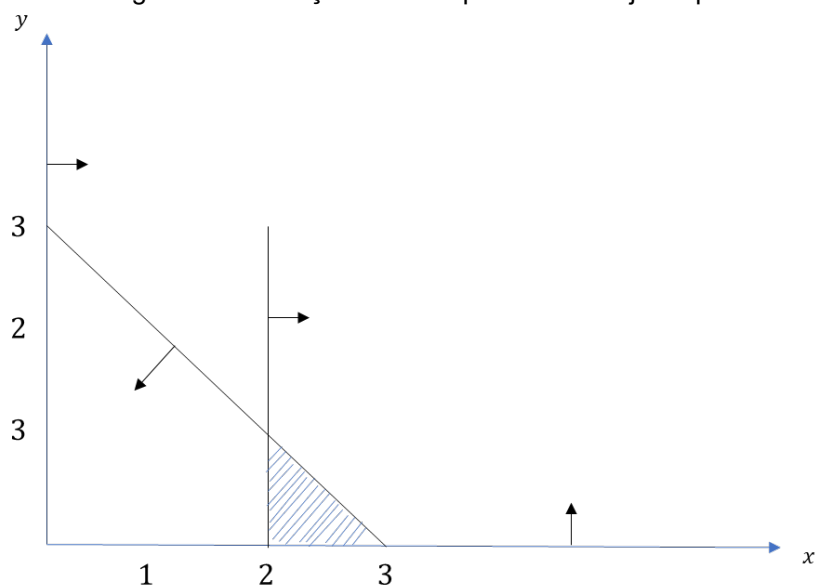
Importantes conjuntos poliedrais são a solução de sistemas de igualdades e desigualdades lineares. Exemplos clássicos de conjuntos poliedrais são Ω_a, Ω_b e Ω_c .

Ilustração numérica,

- $\Omega_D = \{x_1, x_2 \in \mathbb{R} : x_1 + x_2 \leq 3; x_1 \geq 2; x_2 \geq 0; x_1 \geq 0\}$ (24)

A interseção destes 4 semiespaços forma a região hachurada na figura a seguir.

Figura 14. Ilustração do exemplo de um conjunto poliedral.



Claramente, o conjunto da figura acima é um conjunto convexo poliedral fechado e limitado, portanto, um politopo.

3.1.1.7 Definição 7 (Envelope convexo)

Chama-se de envelope convexo de um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm Ω .

Uma importante propriedade que decorre dessa definição o envelope convexo de um conjunto Ω é sempre um conjunto convexo.

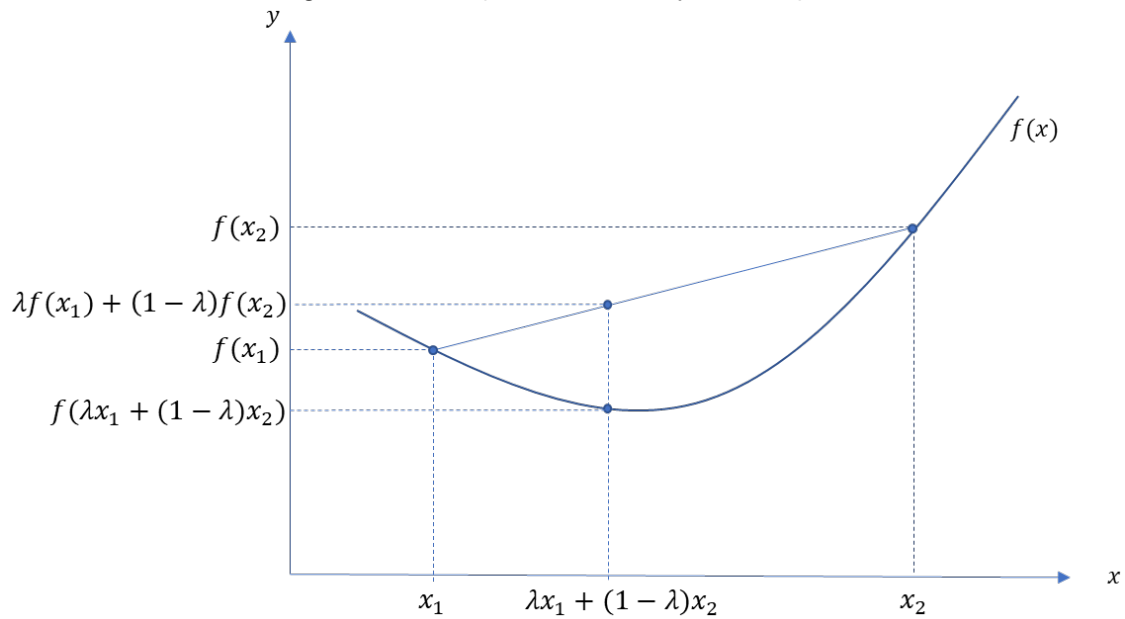
3.1.2 Função convexa

Uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser convexa se a seguinte desigualdade for válida para quaisquer dois pontos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (25)$$

A figura a seguir ilustra um exemplo de função convexa.

Figura 15. Ilustração de um exemplo de função convexa



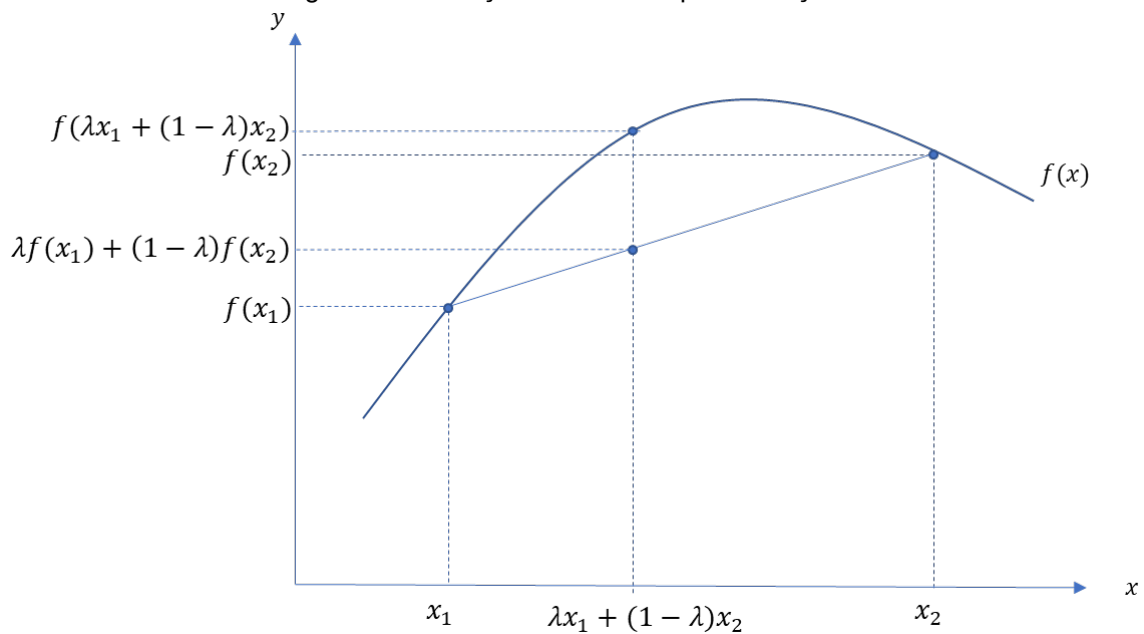
Nota-se na figura acima que todos os pontos do segmento de reta entre os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ possuem valores maiores ou iguais que o valor da função f no intervalo $[x_1, x_2]$.

Uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é côncava se e somente se $-f$ for convexa, isto é:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2), \forall \lambda \in [0,1] \quad (26)$$

A figura a seguir apresenta uma ilustração de uma função côncava.

Figura 16. Ilustração de um exemplo de função côncava



Nota-se na figura acima que todos os pontos do segmento de reta entre os pontos $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ possuem valores menores ou iguais que o valor da função f no intervalo $[x_1, x_2]$.

3.1.3 Epigrafo

3.1.3.1 Definição 8 (Epigrafo)

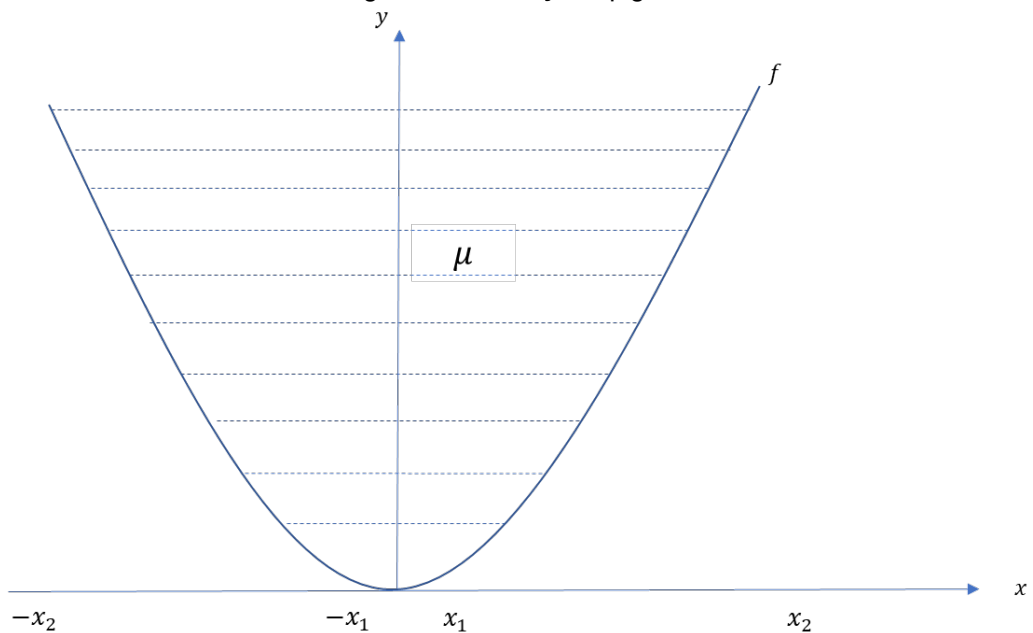
Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o conjunto

$$\text{epi } f = \{(x, \mu): x \in \mathbb{R}^n, \mu \geq f(x)\} \quad (27)$$

é chamado de epigrafo de f .

Na figura a seguir a região hachurada representa o epigrafo de uma função convexa f .

Figura 17. Ilustração Epigrafo.



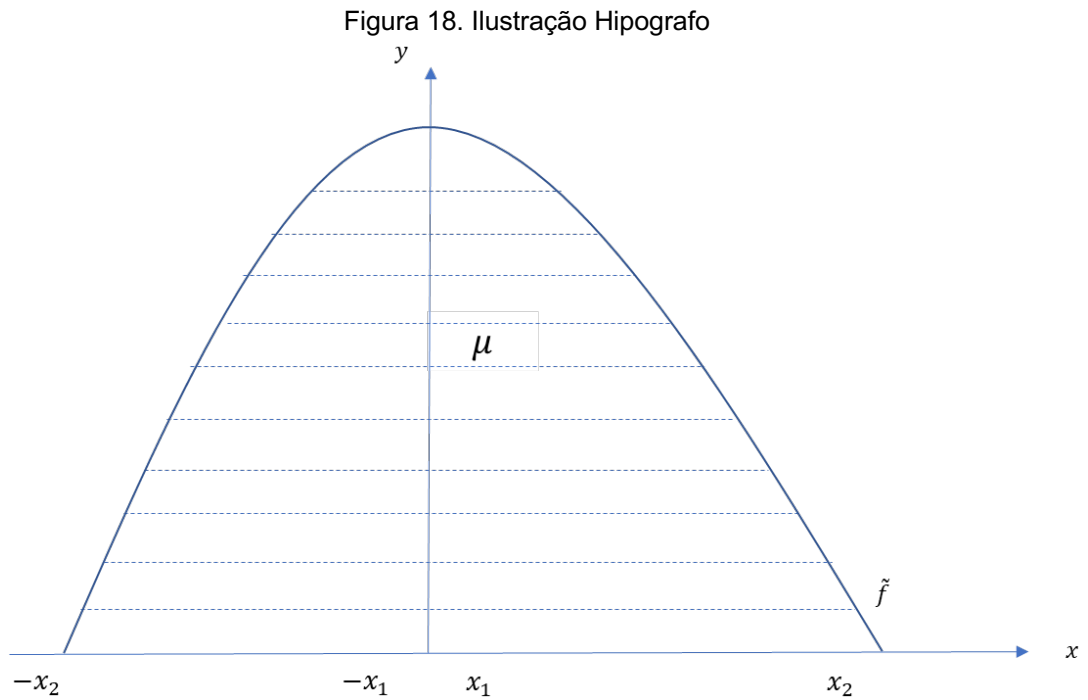
3.1.3.2 Definição 9 (Hipografo)

Seja uma função $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, o conjunto

$$\text{hip } f = \{(x, \mu): x \in \mathbb{R}^n, \mu \leq f(x)\} \quad (28)$$

é chamado de hipografo de f .

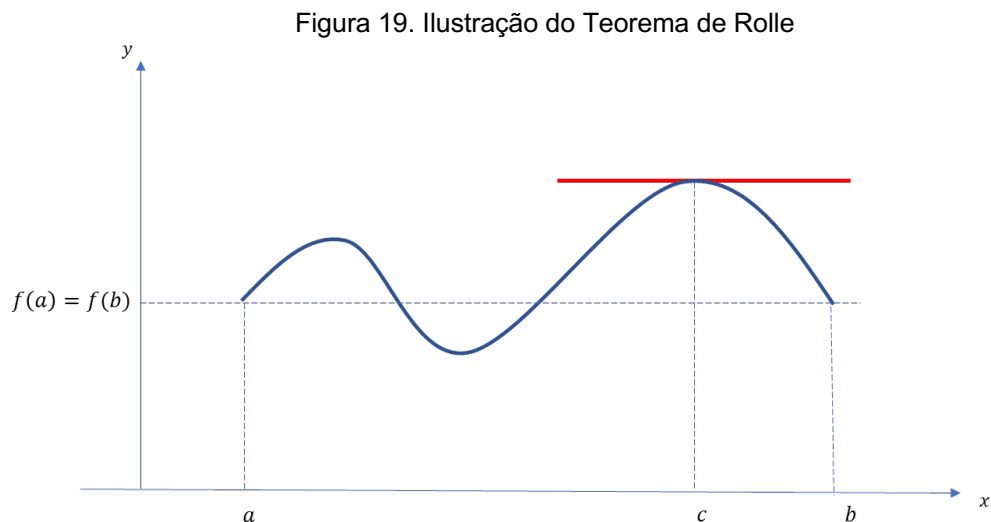
Na figura a seguir a região hachurada representa o hipografo de uma função côncava f .



3.1.4 Teorema de Rolle

Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Se $f(a) = f(b)$ então, existe pelo menos um ponto c em (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

A figura a seguir apresenta a ilustração deste teorema.



Para maiores informações sobre este teorema, consultar Riedel & Sahoo (1998).

3.1.5 Teorema do Valor Médio

Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) , então, existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$, tal que

$$f(b) = f(a) + f'(c)(b - a). \quad (29)$$

A prova desse teorema usa o Teorema de *Roller* à função $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como a diferença entre f e a reta secante, $S(x)$, que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, x em $[a, b]$, dada por,

$$H(x) = f(x) - S(x) \quad (30)$$

Tem-se que $H(x)$ é contínua em $[a, b]$, pois é a diferença de duas funções contínuas, e $H(x)$ é diferenciável em (a, b) , pois é a diferença entre duas funções diferenciáveis. Além disso, $H(a) = H(b) = 0$. Portanto, $H(x)$ satisfaz a hipótese do Teorema de *Rolle*, logo, existe $c \in (a, b)$ tal que, $H'(c) = 0$, tem-se

$$H'(x) = f'(x) - S'(x) \quad (31)$$

E,

$$S'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (32)$$

Assim,

$$H'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad (33)$$

Daí,

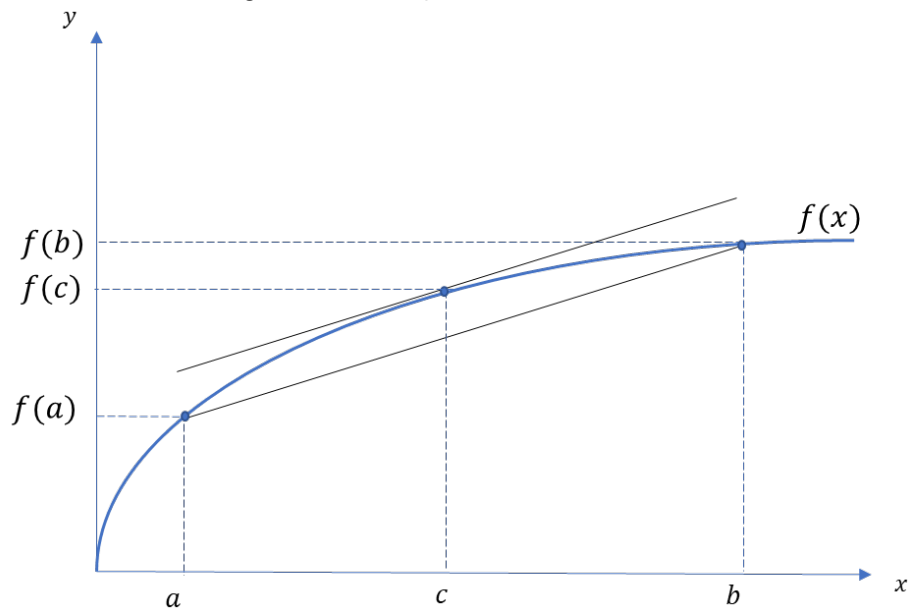
$$H'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0 \quad (34)$$

Portanto, existe $c \in (a, b)$ tal que,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a) \quad (35)$$

Geometricamente isso significa que se uma função f for contínua num intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) , então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(c, f(c))$ é paralela à reta secante que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Figura 20. Ilustração do Teorema do Valor Médio.



Para maiores informações sobre este teorema, consultar Riedel & Sahoo (1998).

3.1.6 Teorema de Taylor

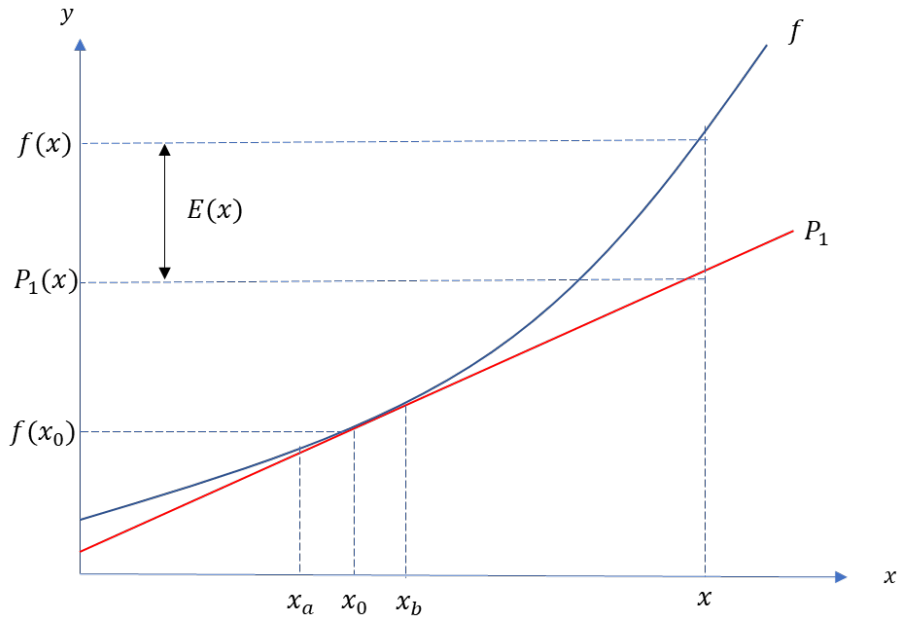
3.1.6.1 Aproximação de 1ª ordem

Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável de 1ª ordem em x_0 , no interior de um intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$, o polinômio de Taylor de 1ª ordem de f na vizinhança de x_0 é dado por,

$$P_1(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^t(x - x_0) \quad (36)$$

Geometricamente o teorema de Taylor é uma aproximação da função no ponto por um polinômio.

Figura 21. Ilustração do Teorema de Taylor de 1ª ordem.



Na vizinhança de x_0 , ilustrado na figura acima por x_a e x_b , pode-se aproximar o valor da função no intervalo $[x_a, x_b]$ pelo valor do polinômio P_1 no mesmo intervalo.

Nota-se que este polinômio e a função possuem em comum em x_0 :

- O valor da função f e o valor do polinômio P_1 : $f(x_0) = P_1(x_0)$,
- O gradiente da função f e o gradiente do polinômio P_1 : $\nabla f(x_0) = \nabla P_1(x_0)$.

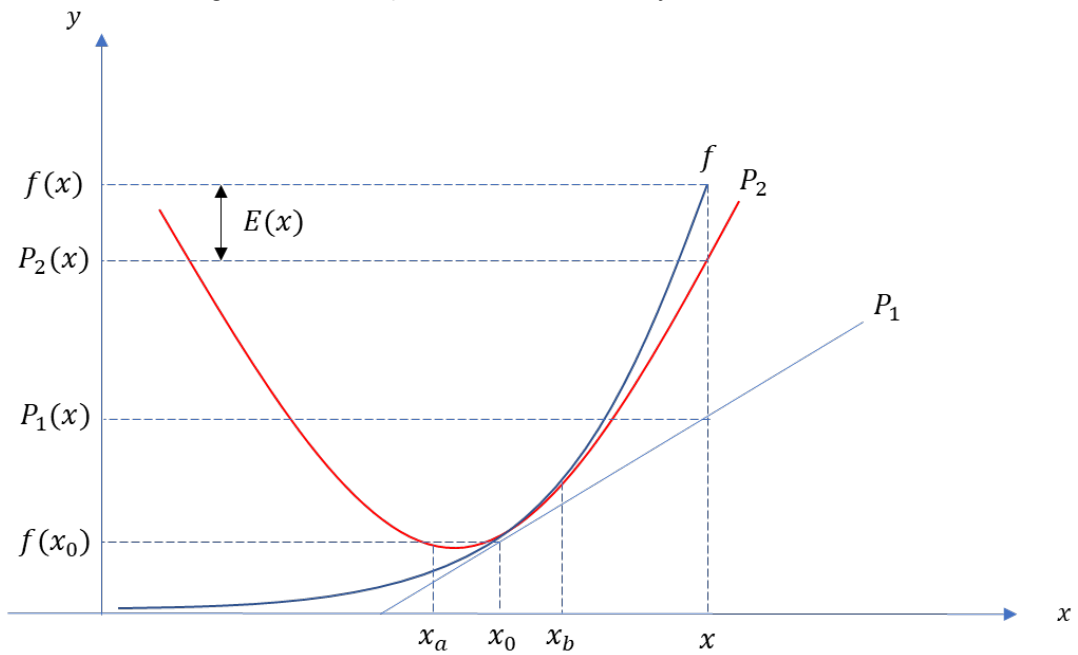
3.1.6.2 Aproximação de 2ª ordem

Seja $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável de 2ª ordem em x_0 , no interior de um intervalo $I \subset \mathbb{R}^n$, o polinômio de Taylor de 2ª ordem de f na vizinhança de x_0 é dado por,

$$P_2(x) = f(x_0) + \nabla f(x_0)^t(x - x_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^t H(x_0)(x - x_0) \quad (37)$$

Geometricamente o teorema de Taylor de 2ª ordem pode ser ilustrado da seguinte forma.

Figura 22. Ilustração do Teorema de Taylor de 2ª ordem.



Na vizinhança de x_0 , ilustrado na figura acima por x_a e x_b , pode-se aproximar o valor da função no intervalo $[x_a, x_b]$ pelo valor do polinômio P_2 no mesmo intervalo.

Nota-se que este polinômio e a função possuem em comum em x_0 :

- O valor da função f e o valor do polinômio P_2 : $f(x_0) = P_2(x_0)$,
- O gradiente da função f e o gradiente do polinômio P_2 : $\nabla f(x_0) = \nabla P_2(x_0)$,
- A hessiana da função f e a hessiana do polinômio P_2 : $Hf(x_0) = HP_2(x_0)$.

Em geral as soluções de problemas de programação não linear são feitas por meio de aproximações quadráticas uma vez que estes modelos possuem em comum estes 3 aspectos.

Para maiores informações sobre este teorema e de ordem superior, consultar James Stewart (2003).

3.2 APROXIMAÇÃO DE FUNÇÕES NÃO LINEARES USANDO A APROXIMAÇÃO DE TAYLOR

Nesta seção será apresentado o modelo de planejamento da produção considerado neste trabalho de pesquisa ao qual será realizado uma aproximação das funções não lineares usando conceitos da aproximação de Taylor.

Para exemplificação do processo de aproximação, considera-se o seguinte modelo básico de programação matemática.

3.2.1 Modelo matemático de Planejamento da Produção

A descrição do modelo de planejamento apresentado neste trabalho considera os esquemas propostos em Chu (1995), Sampaio *et al* (2009; 2011; 2012; 2013) e Wollmann (2017). A descrição do problema de planejamento da produção é a seguinte:

3.2.1.1 Índices

Para os produtos são $i = 1, 2, \dots, N$.

Para os componentes são $k = 1, 2, \dots, K$.

Para os períodos discretos do horizonte de planejamento são $j = 1, 2, \dots, T$.

3.2.1.2 Características

b_{ki} : Número de componentes k usados para a produção de uma unidade do produto i .

h_i : Tempo padrão requerido para a produção de uma unidade do produto i .

Z_j : Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida no período j . Ressalta-se que nenhum recurso remanescente do período j pode ser carregado para o período $j + 1$.

S_{kj} : Quantidade de suprimentos do componente k disponível para ser consumida no período j .

D_{ij} : Demanda mínima para o produto i no período j .

γ_{ij} : Capacidade de produção do produto i no período j .

c_{ij} : Custo de cada unidade produzida do produto i no período j .

h_{ij} : Custo de manutenção de estoques cada unidade produzida do produto i no período j .

w_{ij} : Custo de *work-in-process* cada unidade produzida do produto i no período j .

r_{ij} : Custo de *release* de cada unidade produzida do produto i no período j .

3.2.1.3 Variáveis de decisão

x_{ij} : Nível médio de produção do produto i em cada período j .

I_{ij} : Nível médio de estoque do produto i em cada período j .

W_{ij} : Nível médio de *Work-in-process* do produto i em cada período j .

R_{ij} : Nível médio de *Release* do produto i em cada período j .

O modelo matemático de planejamento da produção (38) deste trabalho é o seguinte:

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij}x_{ij} + h_{ij}I_{ij} + w_{ij}W_{ij} + r_{ij}R_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s. a. } \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki}x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj} \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, K, \\ t = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (2)$$

$$I_{ij} = I_{ij-1} + x_{ij} - D_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N, \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (3)$$

$$W_{ij} = W_{ij-1} + R_{ij} - x_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N, \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq D_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq Z_j \quad j = 1, 2, \dots, T \quad (6)$$

$$x_{ij} - \gamma_{ij} \leq 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (7)$$

$$x_{ij} \geq 0, I_{ij} \geq 0, W_{ij} \geq 0, R_{ij} \geq 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N, \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (8)$$

A função objetivo do modelo (38) busca obter o mínimo custo possível a partir da combinação ótima das variáveis x_{ij} , I_{ij} , W_{ij} e R_{ij} .

A restrição de *Bill of Material* – BOM (2), busca garantir que a quantidade de componentes utilizados na produção de cada produto seja menor ou igual ao total de recursos de material disponível no período j .

As restrições 03 e 04 fazem referência ao equilíbrio de estoque e *Work in process*, respectivamente, do produto i no período j .

A restrição 05 faz referência a demanda a ser atendida de cada produto i ao final do período j .

A restrição 06 faz referência a disponibilidade de recurso de mão de obra (em unidades padrão de tempo) em cada período j para ser consumido para a produção dos produtos i .

A restrição 07 faz referência a capacidade a ser respeitada pela produção dos produtos i em cada período j .

A restrição 08 faz referência as restrições de não negatividade do problema.

3.2.2 Modelo matemático usando conceitos de sistemas de filas

No modelo básico de programação matemática (38) será incorporado os conceitos da Lei de Little, ou seja, busca-se modificar o parâmetro de definição de capacidade do modelo, que antes era fixo, por uma função côncava, chamada *Clearing Function*, ao qual foi introduzida no capítulo 02.

O intuito de realizar essa introdução no modelo, decorre devido a grande maioria dos modelos de planejamento de produção baseados em programação matemática não incorporarem estimadores de capacidade de produção como variável.

Diante disso, o modelo de planejamento da produção deste trabalho considerou o uso da *Clearing Function* para estimar a capacidade do sistema.

3.2.2.1 Índices

Para os produtos são $i = 1, 2, \dots, N$.

Para os componentes são $k = 1, 2, \dots, K$.

Para os períodos discretos do horizonte de planejamento são $j = 1, 2, \dots, T$.

3.2.2.2 Características

b_{ki} : Número de componentes k usados para a produção de uma unidade do produto i .

h_i : Tempo padrão requerido para a produção de uma unidade do produto i .

Z_j : Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida no período j . Ressalta-se que nenhum recurso remanescente do período j pode ser carregado para o período $j + 1$.

S_{kj} : Quantidade de suprimentos do componente k disponível para ser consumida no período j .

D_{ij} : Demanda mínima para o produto i no período j .

$\varphi_{ij}(W_{ij})$: Capacidade de produção do produto i no período j utilizando a *Clearing Function*.

c_{ij} : Custo de cada unidade produzida do produto i no período j .

h_{ij} : Custo de manutenção de estoques cada unidade produzida do produto i no período j .

w_{ij} : Custo de *work-in-process* cada unidade produzida do produto i no período j .

r_{ij} : Custo de *release* de cada unidade produzida do produto i no período j .

3.2.2.3 Variáveis de decisão

x_{ij} : Nível médio de produção do produto i em cada período j .

I_{ij} : Nível médio de estoque do produto i em cada período j .

W_{ij} : Nível médio de *Work-in-process* do produto i em cada período j .

R_{ij} : Nível médio de *Release* do produto i em cada período j .

O modelo matemático de programação convexa (39) é o seguinte:

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij}x_{ij} + h_{ij}I_{ij} + w_{ij}W_{ij} + r_{ij}R_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki}x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj} \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, K, \\ t = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (2)$$

$$I_{ij} = I_{ij-1} + x_{ij} - D_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N, \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (3)$$

$$W_{ij} = W_{ij-1} + R_{ij} - x_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N, \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq D_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq Z_j \quad j = 1, 2, \dots, T \quad (6)$$

$$x_{ij} - \varphi_{ij}(W_{ij}) \leq 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (7)$$

$$x_{ij} \geq 0, I_{ij} \geq 0, W_{ij} \geq 0, R_{ij} \geq 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N, \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (8)$$

A função objetivo do modelo (39) busca obter o mínimo custo possível a partir da combinação ótima das variáveis x_{ij} , I_{ij} , W_{ij} e R_{ij} .

A restrição de *Bill-of-Material* – BOM (2), busca garantir que a quantidade de componentes utilizados na produção de cada produto seja menor ou igual ao total de recursos de material disponível no período j .

As restrições 03 e 04 fazem referência ao equilíbrio de estoque e *Work-in-process*, respectivamente, do produto i no período j .

A restrição 05 faz referência a demanda a ser atendida de cada produto i ao final do período j .

A restrição 06 faz referência a disponibilidade de recurso de mão de obra (em unidades padrão de tempo) em cada período j para ser consumido para a produção dos produtos i .

A restrição 07 faz referência a capacidade que é governada pelos conceitos da *Clearing Function*, onde $\varphi_{ij}(W_{ij}) = \frac{n \times N_{ij} \times W_{ij}}{N_{ij} \times S_{ij} + W_{ij}}$, $\forall i, \forall j$, onde n representa a quantidade de estações de trabalho, e N a capacidade nominal da máquina.

Observa-se que com a introdução da *Clearing Function* no modelo matemático, a linearidade do modelo não é preservada, uma vez que a *Clearing Function* é uma função côncava, logo, tem-se um modelo de programação matemática não linear. Mais especificamente, tem-se um problema de programação convexa.

3.2.3 Aproximação da Função de Capacidade usando funções afins

Devido à complexidade que se tem provinda de um problema de programação não linear, nesta seção busca-se apresentar como realizar a aproximação da função côncava, *Clearing Function*, usando um conjunto de retas afins.

Conforme discutido no capítulo 2, Conte (2016) mostrou por meio de um planejamento de experimentos e uma simulação em uma fábrica de alimentos que após a parametrização da *Clearing Function* via regressão dinâmica, de modo que os resíduos das distribuições dos erros tivessem uma distribuição normal, tanto para o caso funcional (*Clearing Function* em função de uma variável), quanto o novo modelo proposto (*Clearing Function* em função de duas variáveis), mostraram-se eficientes independentemente do número de variáveis envolvidas no processo.

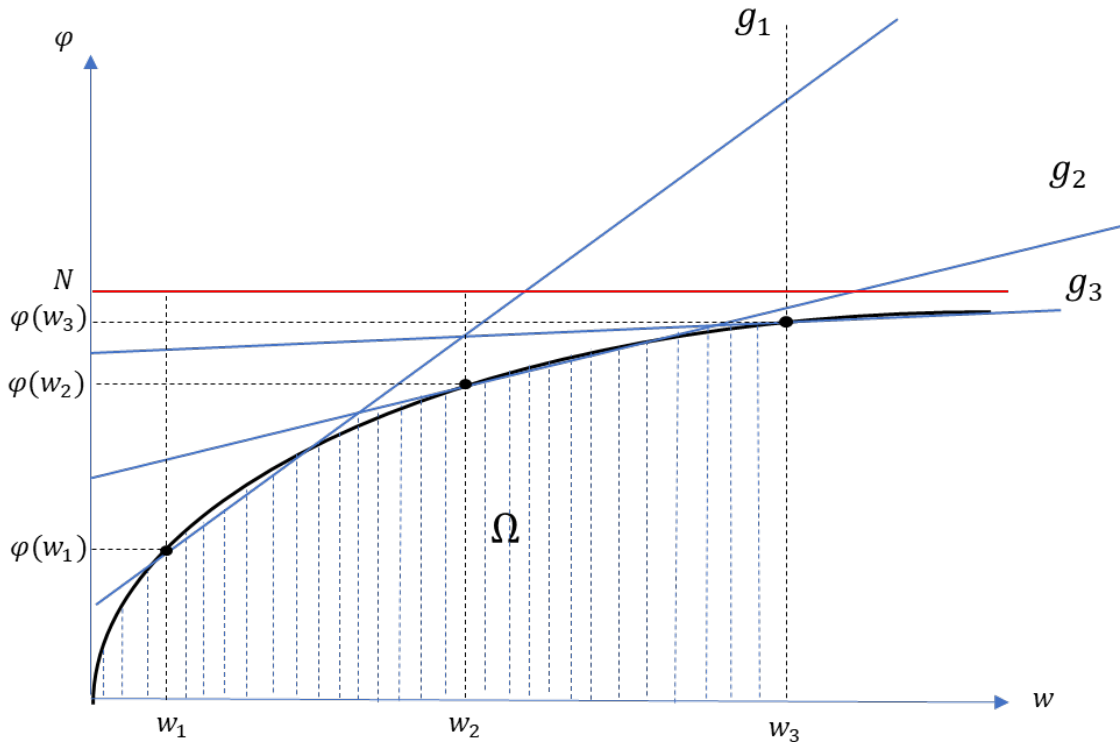
Com isso, Conte (2016) observou que não há a necessidade de aumentar a complexidade do problema, inserindo mais variáveis, uma vez que é possível, utilizando a *Clearing Function* em função apenas de uma variável (*Work-in-process* médio do sistema), aplicar aos resíduos deste modelo, um novo ajuste via séries temporais.

Diante disso, o modelo de planejamento da produção considerado neste estudo fará uso, para estimativa da capacidade do modelo, a *Clearing Function* em função de apenas uma variável conforme proposto em Kamarkar (1989).

Seja a *Clearing Function* em função do *Work-in-process* médio do sistema representada por $\varphi(WIP): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava, $\varphi(WIP) \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Seja ainda $g_i(WIP): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m - 1$, um conjunto de funções afins, então a *Clearing Function* será aproximada por meio de um conjunto de funções afins da seguinte forma:

$$\varphi(WIP) = \min_i \{g_i(WIP)\} \quad i = 1, \dots, m - 1 \quad (40)$$

Figura 23. Ilustração da aproximação da *Clearing Function* por funções afins



Na figura acima tem-se um exemplo para três níveis médio de *Work-in-process* (w_1, w_2 e w_3), onde a curva em negrito preta representa a função côncava, *Clearing Function*, em função dos níveis de *Work-in-process* médio do sistema ($\varphi(WIP)$) e os segmentos em azul (g_1, g_2 e g_3) indicam as funções afins utilizadas para realizar a aproximação da função côncava.

Com isso, nota-se que a *Clearing Function* é definida pela função afim que apresenta o valor mínimo entre as funções afins em cada nível de *Work-in-process*. Além dos 3 segmentos, tem-se na ilustração um segmento com coeficiente angular igual zero (N), em vermelho, representando a capacidade nominal do sistema que tem o objetivo garantir que as saídas do sistema obtidas pela *Clearing Function* não excedam a sua capacidade nominal, o qual também deve ser considerado. Com isso tem-se a seguinte definição da *Clearing Function* aproximada em cada nível de *work-in-process*:

$$\begin{aligned} \varphi(w_1) &= \min \{g_1(w_1), g_2(w_1), g_3(w_1), N\} \\ \varphi(w_2) &= \min \{g_1(w_2), g_2(w_2), g_3(w_2), N\} \\ \varphi(w_3) &= \min \{g_1(w_3), g_2(w_3), g_3(w_3), N\} \end{aligned} \quad (41)$$

3.2.4 Modelo matemático considerando a aproximação da função de capacidade por meio de funções afins

Ao fazer uso do conceito da *Clearing Function* usando funções afins é possível fazer o modelo de programação não linear ser resolvido como um modelo de programação linear.

Com isso a estrutura do problema de planejamento da produção apresentado anteriormente será alterada com a finalidade de incorporar as funções afins para estimar a capacidade de produção.

3.2.4.1 Índices

Para os produtos são $i = 1, 2, \dots, N$.

Para os componentes são $k = 1, 2, \dots, K$.

Para os períodos discretos do horizonte de planejamento são $j = 1, 2, \dots, T$.

3.2.4.2 Características

b_{ki} : Número de componentes k usados para a produção de uma unidade do produto i .

h_i : Tempo padrão requerido para a produção de uma unidade do produto i .

Z_j : Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida no período j . Ressalta-se que nenhum recurso remanescente do período j pode ser carregado para o período $j + 1$.

S_{kj} : Quantidade de suprimentos do componente k disponível para ser consumida no período j .

D_{ij} : Demanda mínima para o produto i no período j .

$g_{ij}(W_{ij})$: Capacidade de produção do produto i no período j utilizando um conjunto de funções afins.

c_{ij} : Custo de cada unidade produzida do produto i no período j .

h_{ij} : Custo de manutenção de estoques cada unidade produzida do produto i no período j .

w_{ij} : Custo de *work-in-process* cada unidade produzida do produto i no período j .

r_{ij} : Custo de *release* de cada unidade produzida do produto i no período j .

3.2.4.3 Variáveis de decisão

x_{ij} : Nível médio de produção do produto i em cada período j .

I_{ij} : Nível médio de estoque do produto i em cada período j .

W_{ij} : Nível médio de *Work-in-process* do produto i em cada período j .

R_{ij} : Nível médio de *Release* do produto i em cada período j .

O modelo matemático de planejamento da produção (42) é o seguinte:

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij}x_{ij} + h_{ij}I_{ij} + w_{ij}W_{ij} + r_{ij}R_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s. a. } \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki}x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj} \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \dots, K, \\ t = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (2)$$

$$I_{ij} = I_{ij-1} + x_{ij} - D_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N, \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (3)$$

$$W_{ij} = W_{ij-1} + R_{ij} - x_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N, \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq D_{ij} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq Z_j \quad j = 1, 2, \dots, T \quad (6)$$

$$x_{ij} - g_{ij}(W_{ij}) \leq 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (7)$$

$$x_{ij} \geq 0, I_{ij} \geq 0, W_{ij} \geq 0, R_{ij} \geq 0 \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, N, \\ j = 1, 2, \dots, T \end{array} \quad (8)$$

A função objetivo do modelo (42) busca obter o mínimo custo possível a partir da combinação ótima das variáveis x_{ij} , I_{ij} , W_{ij} e R_{ij} .

A restrição de *Bill-of-Material* – BOM (2), busca garantir que a quantidade de componentes utilizados na produção de cada produto seja menor ou igual ao total de recursos de material disponível no período j .

As restrições 03 e 04 fazem referência ao equilíbrio de estoque e *Work-in-process*, respectivamente, do produto i no período j .

A restrição 05 faz referência a demanda a ser atendida de cada produto i ao final do período j .

A restrição 06 faz referência a disponibilidade de recurso de mão de obra (em unidades padrão de tempo) em cada período j para ser consumido para a produção dos produtos i .

A restrição 07 faz referência as funções afins ($g_{ij}(W_{ij})$) utilizadas para estimar capacidade do modelo.

3.3 TEORIA DE APROXIMAÇÃO PARA O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR USANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR

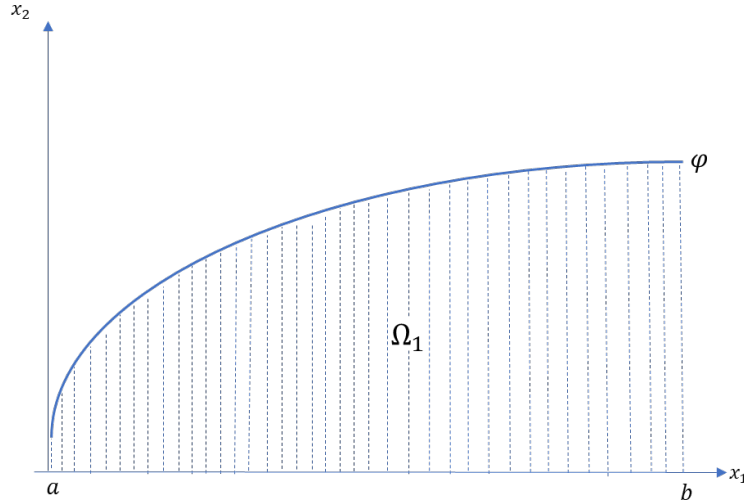
Nesta seção será exposto um teorema demonstrando que o resultado de um problema de programação convexa pode ser aproximado por um problema de programação linear.

3.3.1 Análise de aproximação numérica

A seguir, apresenta-se as hipóteses da teoria de aproximação deste trabalho.

Seja $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava, $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, e seja um conjunto convexo Ω_1 formado pela interseção do hipografo da função φ e o conjunto $x \geq 0$, cuja ilustração no \mathbb{R}^2 do intervalo $I = [a, b]$ pode ser vista na figura a seguir.

Figura 24. Ilustração conjunto Ω_1 .



Seja $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função côncava, $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, e sejam $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, e $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, $\lambda \in [0,1]$, o segmento de reta ligando os pontos x_1 e x_2 , e sejam ainda $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m - 1$, um conjunto de funções afins, definidas nesse intervalo.

Seja a seguinte partição do intervalo $I = [a, b]$:

$$a = a_i < a_{i+1} < a_{i+2} < a_{i+3} < \dots < a_n = b \quad (43)$$

Seja $g(x)$ definida por:

$$g(x) = \sum_{i=0}^{m-1} g_i(x) \quad (44)$$

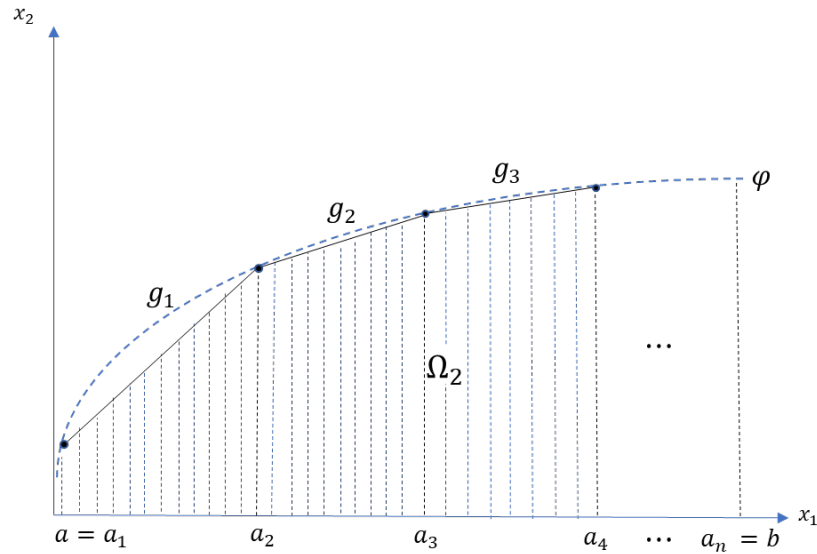
Onde $g_i(x)$ é dado por:

$$g_i(x) = \begin{cases} m_i x + c_i, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (45)$$

Onde m_i e c_i representam as características relacionados ao coeficiente angular e linear, respectivamente, de cada segmento de reta.

Seja, $\Omega_2 = \{(x, \mu): \mu \leq g(x), x \in \mathbb{R}^n, x \in [a, b], a = a_i < a_{i+1} < a_{i+2} < \dots < a_n = b\}$ cuja ilustração no \mathbb{R}^2 pode ser vista na figura a seguir,

Figura 25. Ilustração conjunto Ω_2 .



Tem-se assim a função φ côncava aproximada por uma família de $g_i(x)$ côncava.

Com o intuito de suportar essa afirmação, a seguir apresenta-se 2 lemas, bem como suas respectivas provas.

3.3.1.1 Lema 1

Sejam o conjunto convexo Ω_1 como definido na figura 24, e o conjunto convexo polidral Ω_2 como definido na figura 25, e seja $\Omega_2 \subset \Omega_1$. Seja $a = a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n = b$ uma partição do intervalo fechado $[a, b]$ conforme apresentado na figura 25. Então, quando n tende para o infinito o conjunto convexo polidral Ω_2 tende para o conjunto convexo Ω_1 .

Prova Lema 1

A prova do lema 1 advém dos conceitos do Teorema fundamental do cálculo.

3.3.1.2 Lema 2

Sejam o conjunto convexo Ω_1 como definido na figura 24, e o conjunto convexo polidral Ω_2 como definido na figura 25, e seja $\Omega_2 \subset \Omega_1$. Seja ainda $n_0, n \in \mathbb{N}$, onde $n_0 \leq n$. Seja $a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, a partição do intervalo

fechado $[a, b]$ onde os pontos são definidos pela combinação convexa entre os pontos extremos. Então,

$$\begin{array}{ccc} \max_{x \in \Omega_2} g(x) & \leq & \max_{x \in \Omega_1} g(x) \\ n_0 < n & & n_0 = n \end{array} \quad (46)$$

Prova Lema 2

A prova do Lema 2 pode ser obtida no capítulo 1 de Lima (2006).

A partir das hipóteses levantadas e a declaração dos lemas, é possível enunciar o teorema desta pesquisa a seguir.

3.3.2 Teorema proposto

Seja um problema de programação convexa (P) , dado por:

$$\begin{array}{ll} \max Z(x, W) = c^T x + d^T W & \\ \text{Sujeito a:} & Ax \leq b \\ & x \leq \varphi(W) \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (P)$$

Onde $Z: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, e $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $W \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\varphi(W): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, côncava e $\varphi(W) \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Seja uma família de problemas de programação linear (L) , dadas por:

$$\begin{array}{ll} \max Z(x, W) = c^T x + d^T W & \\ \text{Sujeito a:} & Ax \leq b \\ & x_i \leq g_i(W) \quad \forall_i = 1, \dots, n. \\ & x \geq 0 \end{array} \quad (L)$$

Onde $Z: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$, $W \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ e $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, linear, $i = 1, \dots, m - 1$.

Então, tem-se que o resultado do problema de programação convexa (P) pode ser arbitrariamente aproximado pelo resultado do problema de programação linear (L).

Para expor a eficiência e aplicação do teorema proposto neste trabalho, será realizada uma ilustração numérica no capítulo seguinte.

4 EXPERIMENTO NUMÉRICO

O objetivo desta seção de ilustração é de explorar um experimento numérico com o uso da teoria de aproximação proposta.

Neste experimento busca-se otimizar o planejamento da produção considerando a produção de 3 lotes de produtos, com dois tipos de componentes necessários para a produção de cada um.

Para facilitar a explanação, primeiro será apresentado uma ilustração de pequeno porte, considerando apenas 3 períodos de horizontes de planejamento e em seguida, o mesmo expandido para uma ilustração considerando 12 períodos de horizonte de planejamento.

A simulação do modelo foi implementada usando Software Lingo <www.lindo.com>, versão 2019, e integrado com software Excel da Microsoft, versão 2010.

A sequência do experimento se dará da seguinte forma:

Na primeira parte considera-se um horizonte de planejamento igual a 3 períodos:

- Aplicação no modelo de programação convexa: considerando a estimativa de capacidade governada pela *Clearing Function*;
- Aplicação no modelo de programação linear: com a *Clearing Function* linearizada;
- Aplicação no modelo de programação convexa robusta: considerando a estimativa de capacidade governada pela *Clearing Function* e com a introdução dos conceitos de otimização robusta;
- Aplicação no modelo de programação linear robusta: com a *Clearing Function* robusta linearizada.

Na segunda parte considera-se um horizonte de planejamento igual a 12 períodos:

- Aplicação no modelo de programação convexa: considerando a estimativa de capacidade governada pela *Clearing Function*;
- Aplicação no modelo de programação linear: com a *Clearing Function* linearizada;

- Aplicação no modelo de programação convexa robusta: considerando a estimativa de capacidade governada pela *Clearing Function* e com a introdução dos conceitos de otimização robusta;
- Aplicação no modelo de programação linear robusta: com a *Clearing Function* robusta linearizada.

4.1 MODELO DE PROGRAMAÇÃO CONVEXA PARA 3 PERÍODOS

Os índices, características e variáveis de decisão do modelo de programação convexa são os seguintes:

4.1.1 Índices

Para os produtos: $i = 1, 2, 3$.

Para os componentes: $k = 1, 2$.

Para os períodos: $j = 1, 2, 3$.

4.1.2 Características

b_{ki} : Número de componentes k usados para a produção de uma unidade do produto i .

z_i : Tempo padrão requerido para a produção de uma unidade do produto i .

Z_j : Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida no período j .

S_{kj} : Quantidade de suprimentos do componente k disponível para ser consumida no período j .

D_{ij} : Demanda mínima para o produto i no período j .

$\varphi_{ij}(W_{ij})$: Capacidade de produção do produto i no período j estimada pelos conceitos da *Clearing Function*.

c_{ij} : Custo de cada unidade produzida do produto i no período j .

h_{ij} : Custo de manutenção de estoques cada unidade produzida do produto i no período j .

w_{ij} : Custo de *work-in-process* cada unidade produzida do produto i no período j .

r_{ij} : Custo de *release* de cada unidade produzida do produto i no período j .

4.1.3 Variáveis de decisão

x_{ij} : Nível médio de produção do produto i no período j .

I_{ij} : Nível médio de estoque do produto i no período j .

W_{ij} : Nível médio de *Work-in-process* do produto i no período j .

R_{ij} : Nível médio de *Release* do produto i no período j .

Assim, tem-se o modelo matemático de programação convexa (47) utilizando a *Clearing Function* para estimar as capacidades do modelo:

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 c_{ij}x_{ij} + h_{ij}I_{ij} + w_{ij}W_{ij} + r_{ij}R_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 b_{ki}x_{ij} \leq \sum_{j=1}^3 S_{kj} \quad \forall k, \forall j \quad (2)$$

$$I_{ij} = I_{ij-1} + x_{ij} - D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (3)$$

$$W_{ij} = W_{ij-1} + R_{ij} - x_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^3 z_i x_{ij} \leq Z_j \quad \forall j \quad (6)$$

$$x_{ij} - \varphi_{ij}(W_{ij}) \leq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (7)$$

$$x_{ij}, I_{ij}, W_{ij}, R_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (8)$$

Para obtenção das características do modelo, foram estimados valores aleatórios. Os valores são os seguintes:

a) Custos unitários de produção

Tabela 1. Custos unitários de produção

Produto/Período	1º	2º	3º
1	3	2	4
2	4	2	2

3	5	4	2
---	---	---	---

b) Custos unitários de manutenção de estoque

Tabela 2. Custos unitários de manutenção de estoque

Produto/Período	1º	2º	3º
1	1	2	1
2	1	1	2
3	2	1	1

c) Custos unitários de *work-in-process*

Tabela 3. Custos unitários de *work-in-process*

Produto/Período	1º	2º	3º
1	3	2	3
2	5	4	5
3	5	4	5

d) Custos unitários de release

Tabela 4. Custos unitários de release

Produto/Período	1º	2º	3º
1	3	4	6
2	2	4	3
3	7	4	4

e) Disponibilidade de componente k

Tabela 5. Disponibilidade de componente k

componente/Período	1º	2º	3º
1	800	800	800
2	800	800	800

f) Necessidade de componentes k por produto

Tabela 6. Necessidade de componentes k por produto

componente/Produto	1	2	3
1	3	2	2
2	3	2	2

g) Tempo padrão (minutos) requerido para a produção de cada produto

Tabela 7. Tempo padrão (minutos) requerido para a produção de cada produto

Tempo/Produto	1	2	3
	2	3	2

h) Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida por período

Tabela 8. Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida por período

Tempo/período	1º	2º	3º
1	900	900	900

i) Demanda mínima do produto por período

Tabela 9. Demanda mínima do produto por período

Produto/Período	1º	2º	3º	Total
1	89	91	87	267
2	79	71	78	228
3	69	68	70	207

j) Capacidade nominal do produto por período

Tabela 10. Capacidade nominal do produto por período

Produto/Período	1º	2º	3º	Total
1	100	100	100	300
2	100	100	100	300
3	100	100	100	300

Para a obtenção da *Clearing Function*, foi considerado o modelo proposto por Kamarkar (1989), a saber:

$$\varphi_{ij}(WIP_{ij}) = \frac{n_{ij} \times N_{ij} \times WIP_{ij}}{N_{ij} \times S_{ij} + WIP_{ij}} \quad (48)$$

Onde N_{ij} representa a capacidade nominal do sistema, n_{ij} representa o número de estações do sistema, WIP_{ij} os níveis médios de *Work-in-process*, obtidos por $WIP_{ij-1} + R_{ij}$, ou seja, os releases realizados no início de cada período (R_{ij}) somados ao *work-in-process* remanescente do período anterior (WIP_{ij-1}); e S_{ij} representa os tempos de espera do sistema, por exemplo, tempos de fila, \forall_i e \forall_j .

A seguir, será alterado a representação da *Clearing Function* para a seguinte forma,

$$\varphi_{ij}(WIP_{ij}) = \frac{k_1 \times WIP_{ij}}{k_2 + WIP_{ij}} \quad (49)$$

Onde:

- k_1 está relacionado ao produto entre a capacidade nominal e o número de estações do sistema ($n_{ij} \times N_{ij}$, \forall_i , \forall_j);
- k_2 está relacionado ao produto entre a capacidade nominal e o

tempo de espera do sistema ($N_{ij} \times S_{ij}, \forall i, \forall j$).

Para estimação do parâmetro k_1 foi considerado uma capacidade nominal constante igual a 100 unidades por hora ($N_{ij} = 100, \forall i, \forall j$) e um cenário com 1 (uma) estação de trabalho ($n_{ij} = 1, \forall i, \forall j$).

Para estimação do parâmetro k_2 , foi simulado diferentes tempo de processamento (TP) e diferentes tempos de espera do sistema (S), usando uma distribuição normal, ao longo de um período de planejamento com o intuito de considerar um valor médio entre eles. O software utilizado foi o Promodel, versão 2019, por meio da ferramenta Stat fit.

A tabela a seguir resume os dados analisados na simulação. A partir disso, foi possível obter o valor médio das características k_1 e $k_2, \forall i, \forall j$.

Tabela 11. 30 Simulações das características necessárias para estimação da capacidade

	Nº de estações (n)	Capacidade Nominal (N) em unidades/hora.	Tempo de Processamento (TP) em horas.	Tempos de espera (S) em horas.	k_1 ($n \times N$)	k_2 ($N \times S$)
1ª simulação	1	100	2,100	0,31	100	31
2ª simulação	1	100	2,000	0,25	100	25
3ª simulação	1	100	1,800	0,26	100	26
4ª simulação	1	100	2,000	0,25	100	25
5ª simulação	1	100	2,050	0,31	100	31
6ª simulação	1	100	1,900	0,32	100	32
7ª simulação	1	100	1,800	0,3	100	30
8ª simulação	1	100	2,000	0,25	100	25
9ª simulação	1	100	2,000	0,26	100	26
10ª simulação	1	100	2,200	0,3	100	30
11ª simulação	1	100	2,030	0,31	100	31
12ª simulação	1	100	2,000	0,25	100	25
13ª simulação	1	100	2,090	0,26	100	26
14ª simulação	1	100	1,990	0,25	100	25
15ª simulação	1	100	2,000	0,31	100	31
16ª simulação	1	100	2,000	0,32	100	32
17ª simulação	1	100	1,900	0,3	100	30
18ª simulação	1	100	1,900	0,25	100	25
19ª simulação	1	100	2,000	0,26	100	26
20ª simulação	1	100	2,000	0,3	100	30
21ª simulação	1	100	2,020	0,31	100	31
22ª simulação	1	100	2,020	0,25	100	25
23ª simulação	1	100	2,000	0,26	100	26
24ª simulação	1	100	2,100	0,25	100	25
25ª simulação	1	100	2,050	0,31	100	31
26ª simulação	1	100	2,000	0,32	100	32
27ª simulação	1	100	1,960	0,3	100	30
28ª simulação	1	100	2,000	0,25	100	25
29ª simulação	1	100	2,000	0,26	100	26
30ª simulação	1	100	2,100	0,3	100	30
Média			2,000	0,28	100,00	28
Desvio padrão			0,081	0,0298	0,0000	2,98

Com isso tem-se os seguintes valores médios de k_1 e k_2 , \forall_i, \forall_j , para gerar a *Clearing Function*.

Tabela 12. Parâmetro k_1

Produto/Período	1º	2º	3º
1	100	100	100
2	100	100	100
3	100	100	100

Tabela 13. Parâmetro k_2

Produto/Período	1º	2º	3º
1	28	28	28
2	28	28	28
3	28	28	28

Aplicando o modelo de programação não linear com base nas características apresentadas, tem-se a seguir o resultado da solução ótima do modelo.

Tabela 14. Solução ótima do produto 1 ao longo do horizonte de planejamento.

	1º	2º	3º
Nível de Produção	89	91	87
Nível de Release	89	178	0
Nível de WIP	0	87	0
Nível de Estoques	0	0	0

Nota-se que para o produto 1 o nível de release no período 2 foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 3, não houve a necessidade de novos releases.

Tabela 15. Solução ótima do produto 2 ao longo do horizonte de planejamento.

	1º	2º	3º
Nível de Produção	79	71	78
Nível de Release	79	71	78
Nível de WIP	0	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Observa-se que para o produto 2 o nível de release foi na mesma quantidade da demanda ao longo dos 3 períodos, logo, não houve a presença de *work-in-process*.

Tabela 16. Solução ótima do produto 3 ao longo do horizonte de planejamento.

	1º	2º	3º
Nível de Produção	69	68	70
Nível de Release	69	68	70

Nível de WIP	0	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Constata-se que para o produto 3 o nível de release foi na mesma quantidade da demanda ao longo dos 3 períodos, logo, não houve a presença de *work-in-process*.

O valor da solução ótima do modelo foi de 4.854,1 unidades monetárias.

4.2 MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA 3 PERÍODOS

Nesta seção apresenta-se o modelo de programação linear utilizado para aproximar o modelo de programação convexa. Os índices, características e variáveis de decisão do modelo de programação linear são os seguintes.

4.2.1 Índices

Para os produtos: $i = 1, 2, 3$.

Para os componentes: $k = 1, 2$.

Para os períodos: $j = 1, 2, 3$.

4.2.2 Características

b_{ki} : Número de componentes k usados para a produção de uma unidade do produto i .

z_i : Tempo padrão requerido para a produção de uma unidade do produto i .

Z_j : Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida no período j .

S_{kj} : Quantidade de suprimentos do componente k disponível para ser consumida no período j .

D_{ij} : Demanda mínima para o produto i no período j .

$g_{ij}(W_{ij})$: Capacidade de produção do produto i no período j estimada por funções afins.

c_{ij} : Custo de cada unidade produzida do produto i no período j .

h_{ij} : Custo de manutenção de estoques cada unidade produzida do produto i no período j .

w_{ij} : Custo de *work-in-process* cada unidade produzida do produto i no período j .

r_{ij} : Custo de *release* de cada unidade produzida do produto i no período j .

4.2.3 Variáveis de decisão

x_{ij} : Nível médio de produção do produto i no período j .

I_{ij} : Nível médio de estoque do produto i no período j .

W_{ij} : Nível médio de *Work-in-process* do produto i no período j .

R_{ij} : Nível médio de *Release* do produto i no período j .

Assim, tem-se o modelo matemático de programação linear (50) utilizando funções afins para estimar as capacidades do modelo:

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 c_{ij}x_{ij} + h_{ij}I_{ij} + w_{ij}W_{ij} + r_{ij}R_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 b_{ki}x_{ij} \leq \sum_{j=1}^3 S_{kj} \quad \forall k, \forall j \quad (2)$$

$$I_{ij} = I_{ij-1} + x_{ij} - D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (3)$$

$$W_{ij} = W_{ij-1} + R_{ij} - x_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^3 z_i x_{ij} \leq Z_j \quad \forall j \quad (6)$$

$$x_{ij} - g_{ij}(W_{ij}) \leq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (7)$$

$$x_{ij}, I_{ij}, W_{ij}, R_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (8)$$

As características de entrada do modelo são os mesmos já apresentados nas tabelas 1 a 10, a diferença para este modelo consiste em que a capacidade que antes era governada pela *Clearing Function* será estimada por funções afins.

Foram utilizados 10 níveis de *Work-in-process* para a geração de cada função afim por produto e período. O total de funções afins adicionadas no

modelo foi igual a 90, resultado do seguinte produto, 10 níveis de *Wip* × *Nº produtos* × *Nº período* = 10 × 3 × 3 = 90. A tabela a seguir apresenta cada função afim em função dos níveis de *WIP*.

Tabela 17 – Funções afins para 10 níveis de *Work-in-process*

Nível WIP	Função Afim ($g_{ij}(w_{ij})$)
10	$g^{(1)}_{ij}(w_{ij}) = 0,22(w_{ij}) + 67,23 \quad \forall i, \forall j$
20	$g^{(2)}_{ij}(w_{ij}) = 0,07(w_{ij}) + 89,96 \quad \forall i, \forall j$
30	$g^{(3)}_{ij}(w_{ij}) = 0,03(w_{ij}) + 97,04 \quad \forall i, \forall j$
40	$g^{(4)}_{ij}(w_{ij}) = 0,021(w_{ij}) + 102,1 \quad \forall i, \forall j$
50	$g^{(5)}_{ij}(w_{ij}) = 0,014(w_{ij}) + 105,3 \quad \forall i, \forall j$
60	$g^{(6)}_{ij}(w_{ij}) = 0,01(w_{ij}) + 107,6 \quad \forall i, \forall j$
70	$g^{(7)}_{ij}(w_{ij}) = 0,007(w_{ij}) + 109,2 \quad \forall i, \forall j$
80	$g^{(8)}_{ij}(w_{ij}) = 0,005(w_{ij}) + 110,5 \quad \forall i, \forall j$
90	$g^{(9)}_{ij}(w_{ij}) = 0,004(w_{ij}) + 111,5 \quad \forall i, \forall j$
100	$g^{(10)}_{ij}(w_{ij}) = 0,003(w_{ij}) + 112,3 \quad \forall i, \forall j$

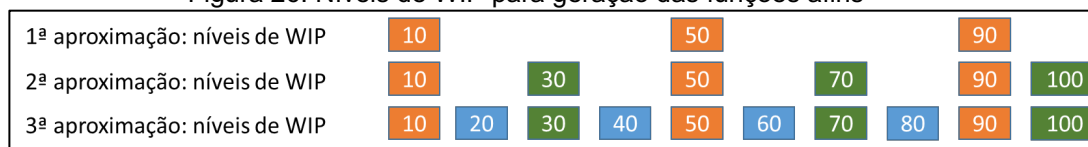
A definição da função afim em cada nível de *WIP* pode ser vista na tabela a seguir.

Tabela 18 – Definição das Funções afins por nível de *WIP*

Nível WIP	Mínimo da Função Afim
10	$g^{(1)}_{ij}(w_{ij}) = \min\{g^{(1)}_{ij}, g^{(2)}_{ij}, \dots, g^{(10)}_{ij}, N_{ij}\} \quad \forall i, \forall j$
20	$g^{(2)}_{ij}(w_{ij}) = \min\{g^{(1)}_{ij}, g^{(2)}_{ij}, \dots, g^{(10)}_{ij}, N_{ij}\} \quad \forall i, \forall j$
30	$g^{(3)}_{ij}(w_{ij}) = \min\{g^{(1)}_{ij}, g^{(2)}_{ij}, \dots, g^{(10)}_{ij}, N_{ij}\} \quad \forall i, \forall j$
40	$g^{(4)}_{ij}(w_{ij}) = \min\{g^{(1)}_{ij}, g^{(2)}_{ij}, \dots, g^{(10)}_{ij}, N_{ij}\} \quad \forall i, \forall j$
50	$g^{(5)}_{ij}(w_{ij}) = \min\{g^{(1)}_{ij}, g^{(2)}_{ij}, \dots, g^{(10)}_{ij}, N_{ij}\} \quad \forall i, \forall j$
60	$g^{(6)}_{ij}(w_{ij}) = \min\{g^{(1)}_{ij}, g^{(2)}_{ij}, \dots, g^{(10)}_{ij}, N_{ij}\} \quad \forall i, \forall j$
70	$g^{(7)}_{ij}(w_{ij}) = \min\{g^{(1)}_{ij}, g^{(2)}_{ij}, \dots, g^{(10)}_{ij}, N_{ij}\} \quad \forall i, \forall j$
80	$g^{(8)}_{ij}(w_{ij}) = \min\{g^{(1)}_{ij}, g^{(2)}_{ij}, \dots, g^{(10)}_{ij}, N_{ij}\} \quad \forall i, \forall j$
90	$g^{(9)}_{ij}(w_{ij}) = \min\{g^{(1)}_{ij}, g^{(2)}_{ij}, \dots, g^{(10)}_{ij}, N_{ij}\} \quad \forall i, \forall j$
100	$g^{(10)}_{ij}(w_{ij}) = \min\{g^{(1)}_{ij}, g^{(2)}_{ij}, \dots, g^{(10)}_{ij}, N_{ij}\} \quad \forall i, \forall j$

Foi simulado 3 diferentes tipos de aproximações no modelo de acordo com a quantidade de funções afins, a saber:

Figura 26. Níveis de WIP para geração das funções afins



Para linearizar a *Clearing Function*, na 1ª aproximação utilizou-se os níveis de WIP igual a 10, 50, 100, na 2ª aproximação utilizou-se os níveis de WIP igual a 10, 30, 50, 70, 100, e na 3ª aproximação os níveis de WIP igual a 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 e 100.

Aplicando a 1ª aproximação no modelo, tem-se como resultado da solução ótima o seguinte:

Tabela 19. Solução ótima do produto 1 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	89	91	87
Nível de Release	89	178	0
Nível de WIP	0	87	0
Nível de Estoques	0	0	0

Nota-se que para o produto 1 o nível de release no período 2 foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 3, não houve a necessidade de novos releases.

Tabela 20. Solução ótima do produto 2 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	79	71	78
Nível de Release	150	0	78
Nível de WIP	71	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Observa-se que para o produto 2 o nível de release no período 1 foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 2, não houve a necessidade de novos releases.

Tabela 21. Solução ótima do produto 3 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	69	68	70
Nível de Release	69	138	0
Nível de WIP	0	70	0
Nível de Estoques	0	0	0

Constata-se que para o produto 3 o nível de release no período 2 foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 3, não houve a necessidade de novos releases.

O valor da solução ótima do modelo foi de 5.525,00 unidades monetárias.

Para a 1ª aproximação foi obtido uma diferença de 14% quando comparado com o resultado da solução ótima do modelo de programação convexa.

Aplicando a 2ª aproximação no modelo, tem-se como resultado da solução ótima o seguinte:

Tabela 22. Solução ótima do produto 1 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	89	91	87
Nível de Release	89	178	0
Nível de WIP	0	87	0
Nível de Estoques	0	0	0

Nota-se que para o produto 1 o nível de release no período 2 foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 3, não houve a necessidade de novos releases.

Tabela 23. Solução ótima do produto 2 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	79	71	78
Nível de Release	150	0	78
Nível de WIP	71	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Observa-se que para o produto 2 o nível de release no período 1 foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 2, não houve a necessidade de novos releases.

Tabela 24. Solução ótima do produto 3 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	69	68	70
Nível de Release	69	68	70
Nível de WIP	0	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Constata-se que para o produto 3 os níveis de releases foram semelhantes aos valores de demanda, logo, não houve presença de *work-in-process*.

O valor da solução ótima do modelo foi de 5.245,00 unidades monetárias.

Para a 2ª aproximação foi obtido uma diferença de 8% quando comparado com o resultado da solução ótima do modelo de programação convexa.

Aplicando a 3ª aproximação no modelo, tem-se como resultado da solução ótima o seguinte:

Tabela 25. Solução ótima do produto 1 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	89	91	87
Nível de Release	89	178	0
Nível de WIP	0	87	0
Nível de Estoques	0	0	0

Nota-se que para o produto 1 o nível de release no período 2 foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 3, não houve a necessidade de novos releases.

Tabela 26. Solução ótima do produto 2 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	79	71	78
Nível de Release	79	71	78
Nível de WIP	0	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Observa-se que para o produto 2 os níveis de releases foram semelhantes aos valores de demanda, logo, não houve presença de *work-in-process*.

Tabela 27. Solução ótima do produto 3 ao longo do horizonte de planejamento.

	1º	2º	3º
Nível de Produção	69	68	70
Nível de Release	69	68	70
Nível de WIP	0	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Constata-se que para o produto 3 os níveis de releases foram semelhantes aos valores de demanda, logo, não houve presença de *work-in-process*.

O valor da solução ótima do modelo foi de 4.854,00 unidades monetárias.

Para a 3ª aproximação não houve diferença entre os valores da solução ótima quando comparado com o resultado do modelo de programação convexa.

Com isso, destaca-se que se tem um *trade-off* entre a quantidade de funções afins utilizadas para aproximar a *Clearing Function* e a acuracidade dos

resultados, pois à medida que se adicionam funções afins menor é a diferença entre os resultados dos modelos.

Para esse primeiro experimento, foi possível observar que a aplicação da teoria de aproximação foi eficiente. Como visto, na 3ª aproximação, o resultado do problema de programação linear convergiu para o resultado do problema original de programação convexa.

Na seção seguinte, considera-se a introdução dos conceitos de otimização robusta no problema com 3 períodos de horizonte de planejamento.

4.3 MODELO DE PROGRAMAÇÃO CONVEXA ROBUSTA PARA 3 PERÍODOS

Nesta seção será tratado a incorporação dos conceitos de robustez ao modelo proposto uma vez que foi comprovado a eficácia do mesmo na aproximação do modelo de programação convexa pelo modelo de programação linear.

O modelo robusto a ser aplicado será o modelo conservador de *Soyster* (1973), contudo, poderia ser facilmente incorporado o conceito de robustez proposto por *Bertsimas e Sim* (2006) ou *Ben-tal e Nemirovski* (1999). Optou-se por *Soyster* (1973) por sua simplicidade no processo de introdução dos conceitos robustos no modelo.

Nos modelos supracitados de planejamento da produção, as características que geram a *Clearing Function* relacionados aos tempos de fila foram tratados como características determinísticas a partir do valor médio obtido por meio de uma simulação. Ao utilizar esse tipo de abordagem pode-se gerar um risco considerável quanto à sua realização em diferentes níveis dos inicialmente projetados, e nesse caso a solução ótima obtida poderá violar uma ou mais das restrições do problema.

Como visto, a capacidade governada pela *Clearing Function* origina-se de uma interpretação da teoria de fila, o que permite estimar a capacidade levando em consideração *Work-in-process* médio e o *Lead time* médio do sistema. Uma vez que o *Lead Time* é composto por tempos de processamento e tempos de espera do sistema, como por exemplo, tempos de filas, as incertezas nestes tempos devem ser lidadas com uma abordagem robusta.

Dessa forma, optou-se por introduzir a robustez no parâmetro da *Clearing Function* relacionado diretamente aos tempos de espera do sistema (k_2), a saber:

$$\varphi_{ij}(WIP_{ij}) = \frac{k_1 \times WIP_{ij}}{k_2 + WIP_{ij}} \quad (51)$$

Com isso, a *Clearing Function* será perturbada usando a seguinte notação:

$$\tilde{\varphi}_{ij}(WIP_{ij}) = \frac{k_1 \times WIP_{ij}}{\tilde{k}_2 + WIP_{ij}} \quad (52)$$

Onde \tilde{k}_2 representa o parâmetro robusto a ser analisado na aplicação do modelo robusto de Soyster (1973).

Conforme apresentado anteriormente, foi levantando 30 valores simulados para os tempos de espera do sistema, que geraram diferentes níveis de k_2 . A partir destes dados, calculou-se a média e o desvio padrão relacionado aos tempos de espera e para considerar a abordagem de Soyster (1973), pelo fato de tratar-se de uma abordagem conservadora, será introduzido 100% do desvio padrão ao valor médio, garantindo um nível de serviço próximo de 100% para a realização do parâmetro, da seguinte forma:

$$\tilde{k}_2 = \bar{k}_2 + \sigma \quad (53)$$

Onde \bar{k}_2 representa o valor médio obtido na amostra analisada e σ o desvio padrão associado.

Ao realizar essa modificação tem-se:

$$\tilde{\varphi}_{ij}(WIP_{ij}) = \frac{k_1 \times WIP_{ij}}{(\bar{k}_2 + \sigma) + WIP_{ij}} \quad (54)$$

Nota-se que a capacidade a ser estimada pela *Clearing Function* terá seu valor reduzido uma vez que será considerado o pior cenário de realização para o parâmetro k_2 onde incorpora os tempos de espera do sistema em sua máxima realização (100% de nível de serviço). Apesar desse conservadorismo que traz essa abordagem, observa-se que qualquer outro cenário, diferente do pior cenário, dentro do intervalo $\bar{k}_2 \pm \sigma$, o modelo permanecerá factível, resultando em uma solução subótima.

Os índices, características e variáveis do modelo de programação convexa robusta são os seguintes:

4.3.1 Índices

Para os produtos: $i = 1, 2, 3$.

Para os componentes: $k = 1, 2$.

Para os períodos: $j = 1, 2, 3$.

4.3.2 Características

b_{ki} : Número de componentes k usados para a produção de uma unidade do produto i .

z_i : Tempo padrão requerido para a produção de uma unidade do produto i .

Z_j : Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida no período j .

S_{kj} : Quantidade de suprimentos do componente k disponível para ser consumida no período j .

D_{ij} : Demanda mínima para o produto i no período j .

$\tilde{\varphi}_{ij}(W_{ij})$: Capacidade de produção do produto i no período j estimada pela *Clearing Function* robusta.

c_{ij} : Custo de cada unidade produzida do produto i no período j .

h_{ij} : Custo de manutenção de estoques cada unidade produzida do produto i no período j .

w_{ij} : Custo de *work-in-process* cada unidade produzida do produto i no período j .

r_{ij} : Custo de *release* de cada unidade produzida do produto i no período j .

4.3.3 Variáveis de decisão

x_{ij} : Nível médio de produção do produto i no período j .

I_{ij} : Nível médio de estoque do produto i no período j .

W_{ij} : Nível médio de *Work-in-process* do produto i no período j .

R_{ij} : Nível médio de *Release* do produto i no período j .

O modelo de planejamento da produção convexo robusto (55) utilizando a *Clearing Function* robusta para estimar as capacidades do modelo é o seguinte:

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 c_{ij}x_{ij} + h_{ij}I_{ij} + w_{ij}W_{ij} + r_{ij}R_{ij} \quad (1)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 b_{ki}x_{ij} \leq \sum_{j=1}^3 S_{kj} \quad \forall k, \forall j \quad (2)$$

$$I_{ij} = I_{ij-1} + x_{ij} - D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (3)$$

$$W_{ij} = W_{ij-1} + R_{ij} - x_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^3 z_i x_{ij} \leq Z_j \quad \forall j \quad (6)$$

$$x_{ij} - \tilde{\varphi}_{ij}(W_{ij}) \leq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (7)$$

$$x_{ij}, I_{ij}, W_{ij}, R_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (8)$$

Onde $\tilde{\varphi}_{ij}(W_{ij})$ representa a capacidade estimada pela *Clearing Function* usando conceitos de robustez no parâmetro k_2 do modelo.

As características de entrada do modelo são os mesmos já apresentados nas tabelas 1 a 10, a diferença para este modelo consiste em que a capacidade será governada pela *Clearing Function* robusta, e para a obtenção do parâmetro de capacidade k_2 robusto, foi adicionado o valor do desvio padrão (2,9) ao valor médio (28) obtido anteriormente na tabela 13.

Tabela 28. Parâmetro k_2 robusto

Produto/Período	1º	2º	3º
1	30,9	30,9	30,9
2	30,9	30,9	30,9
3	30,9	30,9	30,9

Com base nestas características de entrada o resultado da solução ótima do modelo foi o seguinte:

Tabela 29. Solução ótima do produto 1 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	89	91	87

Nível de Release	92	175	0
Nível de WIP	3	87	0
Nível de Estoques	0	0	0

Nota-se que para o produto 1 o nível de release no período 1 e 2 foram superiores ao valor da demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* nos períodos. Com isso, no período 3, não houve a necessidade de novos releases.

Tabela 30. Solução ótima do produto 2 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	79	71	78
Nível de Release	79	71	78
Nível de WIP	0	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Observa-se que para o produto 2 o nível de release foi na mesma quantidade da demanda ao longo dos 3 períodos, logo, não houve a presença de *work-in-process*.

Tabela 31. Solução ótima do produto 3 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	69	68	70
Nível de Release	69	68	70
Nível de WIP	0	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Constata-se que para o produto 3 o nível de release foi na mesma quantidade da demanda ao longo dos 3 períodos, logo, não houve a presença de *work-in-process*.

O valor da solução ótima do modelo foi de 4.862,61 unidades monetárias.

4.4 MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR ROBUSTA PARA 3 PERÍODOS

No modelo matemático (56) busca-se aproximar o modelo de programação convexa robusta usando um modelo de programação linear robusta.

Os índices, características e variáveis de decisão do modelo de programação linear robusta são os seguintes:

4.4.1 Índices

Para os produtos: $i = 1, 2, 3$.

Para os componentes: $k = 1, 2$.

Para os períodos: $j = 1, 2, 3$.

4.4.2 Características

b_{ki} : Número de componentes k usados para a produção de uma unidade do produto i .

z_i : Tempo padrão requerido para a produção de uma unidade do produto i .

Z_j : Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida no período j .

S_{kj} : Quantidade de suprimentos do componente k disponível para ser consumida no período j .

D_{ij} : Demanda mínima para o produto i no período j .

$\tilde{g}_{ij}(W_{ij})$: Capacidade de produção do produto i no período j estimada pelas funções afins.

c_{ij} : Custo de cada unidade produzida do produto i no período j .

h_{ij} : Custo de manutenção de estoques cada unidade produzida do produto i no período j .

w_{ij} : Custo de *work-in-process* cada unidade produzida do produto i no período j .

r_{ij} : Custo de *release* de cada unidade produzida do produto i no período j .

4.4.3 Variáveis de decisão

x_{ij} : Nível médio de produção do produto i no período j .

I_{ij} : Nível médio de estoque do produto i no período j .

W_{ij} : Nível médio de *Work-in-process* do produto i no período j .

R_{ij} : Nível médio de *Release* do produto i no período j .

O modelo matemático de programação linear robusta (56) utilizando funções afins para estimar as capacidades do modelo é o seguinte.

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 c_{ij}x_{ij} + h_{ij}I_{ij} + w_{ij}W_{ij} + r_{ij}R_{ij} \quad (1)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 b_{ki}x_{ij} \leq \sum_{j=1}^3 S_{kj} \quad \forall k, \forall j \quad (2)$$

$$I_{ij} = I_{ij-1} + x_{ij} - D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (3)$$

$$W_{ij} = W_{ij-1} + R_{ij} - x_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^3 z_i x_{ij} \leq Z_j \quad \forall j \quad (6)$$

$$x_{ij} - \tilde{g}_{ij}(W_{ij}) \leq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (7)$$

$$x_{ij}, I_{ij}, W_{ij}, R_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (8)$$

Onde $\tilde{g}_{ij}(W_{ij})$ representam as capacidades estimadas por funções afins.

As características de entrada do modelo são os mesmos já apresentados nas tabelas 1 a 10, a diferença para este modelo consiste em que a capacidade que antes era governada pela *Clearing Function* robusta será estimada por funções afins robustas.

Foram utilizados os mesmos 10 níveis de *Work-in-process* para a geração de cada função afim por produto e período. O total de funções afins adicionadas no modelo foi igual a 90, resultado do seguinte produto, 10 níveis de *Wip* \times N° produtos \times N° período = $10 \times 3 \times 3 = 90$. A tabela a seguir apresenta cada função afim em função dos níveis de *WIP*.

Tabela 32. Funções afins robusta para 10 níveis de *Work-in-process*

Nível WIP	Função Afim robusta ($\tilde{g}_{ij}(w_{ij})$)	
10	$\tilde{g}_{ij}^{(1)}(w_{ij}) = 0,24(w_{ij}) + 62,22$	$\forall i, \forall j$
20	$\tilde{g}_{ij}^{(2)}(w_{ij}) = 0,08(w_{ij}) + 84,29$	$\forall i, \forall j$
30	$\tilde{g}_{ij}^{(3)}(w_{ij}) = 0,04(w_{ij}) + 94,22$	$\forall i, \forall j$
40	$\tilde{g}_{ij}^{(4)}(w_{ij}) = 0,02(w_{ij}) + 99,84$	$\forall i, \forall j$
50	$\tilde{g}_{ij}^{(5)}(w_{ij}) = 0,01(w_{ij}) + 103,4$	$\forall i, \forall j$
60	$\tilde{g}_{ij}^{(6)}(w_{ij}) = 0,01(w_{ij}) + 105,9$	$\forall i, \forall j$
70	$\tilde{g}_{ij}^{(7)}(w_{ij}) = 0,008(w_{ij}) + 107,8$	$\forall i, \forall j$
80	$\tilde{g}_{ij}^{(8)}(w_{ij}) = 0,006(w_{ij}) + 109,2$	$\forall i, \forall j$

90	$\tilde{g}_{ij}^{(9)}(w_{ij}) = 0,005(w_{ij}) + 110,3$	$\forall i, \forall j$
100	$\tilde{g}_{ij}^{(10)}(w_{ij}) = 0,004(w_{ij}) + 111,2$	$\forall i, \forall j$

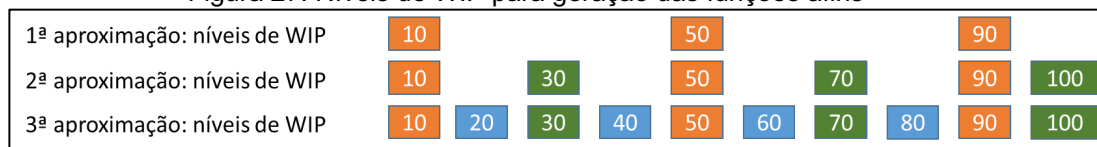
A definição da função afim robusta em cada nível de WIP pode ser vista na tabela a seguir.

Tabela 33 – Definição das Funções afins robustas por nível de WIP

Nível WIP	Mínimo da Função Afim
10	$\tilde{g}_{ij}^{(1)}(w_{ij}) = \min\{\tilde{g}_{ij}^{(1)}, \tilde{g}_{ij}^{(2)}, \dots, \tilde{g}_{ij}^{(10)}, N_{ij}\}$
20	$\tilde{g}_{ij}^{(2)}(w_{ij}) = \min\{\tilde{g}_{ij}^{(1)}, \tilde{g}_{ij}^{(2)}, \dots, \tilde{g}_{ij}^{(10)}, N_{ij}\}$
30	$\tilde{g}_{ij}^{(3)}(w_{ij}) = \min\{\tilde{g}_{ij}^{(1)}, \tilde{g}_{ij}^{(2)}, \dots, \tilde{g}_{ij}^{(10)}, N_{ij}\}$
40	$\tilde{g}_{ij}^{(4)}(w_{ij}) = \min\{\tilde{g}_{ij}^{(1)}, \tilde{g}_{ij}^{(2)}, \dots, \tilde{g}_{ij}^{(10)}, N_{ij}\}$
50	$\tilde{g}_{ij}^{(5)}(w_{ij}) = \min\{\tilde{g}_{ij}^{(1)}, \tilde{g}_{ij}^{(2)}, \dots, \tilde{g}_{ij}^{(10)}, N_{ij}\}$
60	$\tilde{g}_{ij}^{(6)}(w_{ij}) = \min\{\tilde{g}_{ij}^{(1)}, \tilde{g}_{ij}^{(2)}, \dots, \tilde{g}_{ij}^{(10)}, N_{ij}\}$
70	$\tilde{g}_{ij}^{(7)}(w_{ij}) = \min\{\tilde{g}_{ij}^{(1)}, \tilde{g}_{ij}^{(2)}, \dots, \tilde{g}_{ij}^{(10)}, N_{ij}\}$
80	$\tilde{g}_{ij}^{(8)}(w_{ij}) = \min\{\tilde{g}_{ij}^{(1)}, \tilde{g}_{ij}^{(2)}, \dots, \tilde{g}_{ij}^{(10)}, N_{ij}\}$
90	$\tilde{g}_{ij}^{(9)}(w_{ij}) = \min\{\tilde{g}_{ij}^{(1)}, \tilde{g}_{ij}^{(2)}, \dots, \tilde{g}_{ij}^{(10)}, N_{ij}\}$
100	$\tilde{g}_{ij}^{(10)}(w_{ij}) = \min\{\tilde{g}_{ij}^{(1)}, \tilde{g}_{ij}^{(2)}, \dots, \tilde{g}_{ij}^{(10)}, N_{ij}\}$

Da mesma forma, foi simulado 3 diferentes tipos de aproximações no modelo de acordo com a quantidade de funções afins, a saber:

Figura 27. Níveis de WIP para geração das funções afins



Para linearizar a *Clearing Function*, na 1ª aproximação utilizou-se os níveis de WIP igual a 10, 50, 100, na 2ª aproximação utilizou-se os níveis de WIP igual a 10, 30, 50, 70, 100, e na 3ª aproximação os níveis de WIP igual a 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 e 100.

Aplicando a 1ª aproximação no modelo, tem-se como resultado da solução ótima o seguinte:

Tabela 34. Solução ótima do produto 1 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	89	91	87
Nível de Release	89	91	87
Nível de WIP	0	0	0

Nível de Estoques	0	0	0
-------------------	---	---	---

Nota-se que para o produto 1 os níveis de releases foram semelhantes aos valores de demanda, logo, não houve presença de *work-in-process*.

Tabela 35. Solução ótima do produto 2 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	79	71	78
Nível de Release	150	0	78
Nível de WIP	71	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Observa-se que para o produto 2 o nível de release no período 1 foi superior ao valor da demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período.

Tabela 36. Solução ótima do produto 3 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	69	68	70
Nível de Release	69	68	70
Nível de WIP	0	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Constata-se que para o produto 3 os níveis de releases foram semelhantes aos valores de demanda, logo, não houve presença de *work-in-process*.

O valor da solução ótima do modelo foi de 5.245,00 unidades monetárias.

Para a 1ª aproximação foi obtido uma diferença de 8% quando comparado com o resultado da solução ótima do modelo de programação convexa robusta.

Aplicando a 2ª aproximação no modelo, tem-se como resultado da solução ótima o seguinte:

Tabela 37. Solução ótima do produto 1 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	89	91	87
Nível de Release	89	178	0
Nível de WIP	0	87	0
Nível de Estoques	0	0	0

Nota-se que para o produto 1 o nível de release no período 2 foi superior ao valor da demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período.

Tabela 38. Solução ótima do produto 2 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	79	71	78
Nível de Release	79	71	78
Nível de WIP	0	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Observa-se que para o produto 2 os níveis de releases foram semelhantes aos valores de demanda, logo, não houve presença de *work-in-process*.

Tabela 39. Solução ótima do produto 3 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	69	68	70
Nível de Release	69	68	70
Nível de WIP	0	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Constata-se que para o produto 3 os níveis de releases foram semelhantes aos valores de demanda, logo, não houve presença de *work-in-process*.

O valor da solução ótima do modelo foi de 5.032,00 unidades monetárias.

Para a 2ª aproximação foi obtido uma diferença de 3% quando comparado com o resultado da solução ótima do modelo de programação convexa robusta.

Aplicando a 3ª aproximação no modelo, tem-se como resultado da solução ótima o seguinte:

Tabela 40. Solução ótima do produto 1 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	89	91	87
Nível de Release	92	175	0
Nível de WIP	3	87	0
Nível de Estoques	0	0	0

Nota-se que para o produto 1 os níveis de release nos períodos 1 e 2 foram superiores aos valores de demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* nos períodos. Com isso, para o período 3, não houve a necessidade de release.

Tabela 41. Solução ótima do produto 2 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	79	71	78
Nível de Release	79	71	78
Nível de WIP	0	0	0

Nível de Estoques	0	0	0
-------------------	---	---	---

Observa-se que para o produto 2 os níveis de releases foram semelhantes aos valores de demanda, logo, não houve presença de *work-in-process*.

Tabela 42. Solução ótima do produto 3 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º
Nível de Produção	69	68	70
Nível de Release	69	68	70
Nível de WIP	0	0	0
Nível de Estoques	0	0	0

Constata-se que para o produto 3 os níveis de releases foram semelhantes aos valores de demanda, logo, não houve presença de *work-in-process*.

O valor da solução ótima do modelo foi de 4.862,61 unidades monetárias.

Observa-se com isso que, para a 3ª aproximação não houve diferença entre os valores da solução ótima quando comparado com o resultado do modelo de programação convexa robusta. Mais uma vez esses resultados mostram a eficiência do teorema demonstrado neste trabalho de aproximação de um problema convexo robusto por um problema de programação linear robusto.

4.5 ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS RESULTADOS DOS MODELOS PARA 3 PERÍODOS

A tabela a seguir realiza uma análise dos erros obtidos na aproximação entre o modelo de programação convexa (PC) e o modelo de programação Linear (PL) ambos sem robustez. Da mesma forma, uma análise é realizada dos erros obtidos entre os modelos de programação convexa robusta (PCR) e o modelo de programação linear robusta (PLR).

Tabela 43. Análise dos erros obtidos com as aproximações

Níveis de WIP analisados	PC	PL	Erro	Erro (%)	PCR	PLR	Erro	Erro (%)
1ª Aproximação	4854,1	5525	670,9	13,82%	4862,61	5245	382,39	7,86%
2ª Aproximação	4854,1	5245	390,9	8,05%	4862,61	5032	169,39	3,48%
3ª Aproximação	4854,1	4854	0	0,00%	4862,61	4862,61	0	0,00%

A partir destes resultados é possível observar que se tem um *trade-off* entre a quantidade de funções afins utilizadas para aproximar a *Clearing Function* e a acuracidade dos resultados, uma vez que ao passo que se adicionam funções afins para aproximar o modelo menor é a diferença entre os resultados obtidos entre eles.

Na primeira aproximação foram utilizados apenas uma análise envolvendo 3 níveis de WIP, o que gerou $3 \times 3 \times 3 = 27$ funções afins, com um erro de 13,82% entre os modelos PC e PL sem robustez e 7,86% para os modelos PCR e PLR com robustez.

Na segunda aproximação foram utilizados uma análise envolvendo 6 níveis de WIP, o que gerou $6 \times 3 \times 3 = 54$ funções afins, com um erro de 8,05% entre os modelos PC e PL sem robustez e 3,48% para os modelos PCR e PLR com robustez.

Enquanto na terceira aproximação foram utilizados uma análise envolvendo 10 níveis de WIP, o que gerou $10 \times 3 \times 3 = 90$ funções afins, com um erro de apenas 0% tanto para os modelos PC e PL sem robustez quanto para os modelos PCR e PLR com robustez.

O modelo de programação convexa sem a presença da robustez teve um aumento nos custos totais de 0,18% quando inserido os conceitos da abordagem robusta. Apesar dos custos totais terem aumentado, o modelo apresentou uma solução subótima que permite o modelo ser factível em toda região de incerteza do parâmetro que foi inserido a robustez.

O modelo de programação linear sem a presença da robustez teve um aumento nos custos totais também de 0,18% quando inserido os conceitos da abordagem robusta. Da mesma forma, apesar dos custos totais terem aumentado, o modelo retorna uma solução subótima com a introdução de características robustos.

Na seção seguinte, será expandido o experimento para um horizonte de planejamento de 12 períodos sobre os modelos de programação convexa, programação linear, programação convexa robusta e programação linear robusta.

4.6 MODELO DE PROGRAMAÇÃO CONVEXA PARA 12 PERÍODOS

O modelo de programação convexa para 12 períodos possui os seguintes índices, características e variáveis de decisão do modelo de programação convexa são os seguintes:

4.6.1 Índices

Para os produtos: $i = 1, 2, 3$.

Para os componentes: $k = 1, 2$.

Para os períodos: $j = 1, 2, \dots, 12$.

4.6.2 Características

b_{ki} : Número de componentes k usados para a produção de uma unidade do produto i .

z_i : Tempo padrão requerido para a produção de uma unidade do produto i .

Z_j : Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida no período j .

S_{kj} : Quantidade de suprimentos do componente k disponível para ser consumida no período j .

D_{ij} : Demanda mínima para o produto i no período j .

$\varphi_{ij}(W_{ij})$: Capacidade de produção do produto i no período j estimada pelos conceitos da *Clearing Function*.

c_{ij} : Custo de cada unidade produzida do produto i no período j .

h_{ij} : Custo de manutenção de estoques cada unidade produzida do produto i no período j .

w_{ij} : Custo de *work-in-process* cada unidade produzida do produto i no período j .

r_{ij} : Custo de *release* de cada unidade produzida do produto i no período j .

4.6.3 Variáveis de decisão

x_{ij} : Nível médio de produção do produto i no período j .

I_{ij} : Nível médio de estoque do produto i no período j .

W_{ij} : Nível médio de *Work-in-process* do produto i no período j .

R_{ij} : Nível médio de *Release* do produto i no período j .

Assim, tem-se o modelo matemático de programação convexa (57) utilizando a *Clearing Function* para estimar as capacidades do modelo:

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^{12} \sum_{i=1}^3 c_{ij}x_{ij} + h_{ij}I_{ij} + w_{ij}W_{ij} + r_{ij}R_{ij} \quad (1)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{j=1}^{12} \sum_{i=1}^3 b_{ki}x_{ij} \leq \sum_{j=1}^{12} S_{kj} \quad \forall k, \forall j \quad (2)$$

$$I_{ij} = I_{ij-1} + x_{ij} - D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (3)$$

$$W_{ij} = W_{ij-1} + R_{ij} - x_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^3 z_i x_{ij} \leq Z_j \quad \forall j \quad (6)$$

$$x_{ij} - \varphi_{ij}(W_{ij}) \leq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (7)$$

$$x_{ij}, I_{ij}, W_{ij}, R_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (8)$$

Os valores estimados das características do modelo são os seguintes:

a) Custos unitários de produção

Tabela 44. Custos unitários de produção

Produto/Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
1	3	2	4	2	3	2	3	2	4	2	3	2
2	4	2	2	4	5	4	4	2	2	4	5	4
3	5	4	2	5	6	5	5	4	2	5	6	5

b) Custos unitários de manutenção de estoque

Tabela 45. Custos unitários de manutenção de estoque

Produto/Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
1	1	2	1	2	1	1	2	1	1	1	2	1
2	1	1	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1
3	2	1	1	1	1	2	1	1	1	1	1	1

c) Custos unitários de *work-in-process*

Tabela 46. Custos unitários de *work-in-process*

Produto/Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
1	3	2	3	4	5	4	3	2	3	4	5	4
2	5	4	5	6	6	1	5	4	5	6	6	3
3	5	4	5	6	6	1	5	4	5	6	6	2

d) Custos unitários de release

Tabela 47. Custos unitários de release

Produto/Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
1	3	4	6	2	5	3	3	4	6	2	5	3
2	2	4	3	6	2	2	2	4	3	6	2	2
3	7	4	4	7	2	4	7	4	4	7	2	4

e) Disponibilidade de componente *k*

Tabela 48. Disponibilidade de componente *k*

componente/Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
1	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800
2	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800	800

f) Necessidade de componentes *k* por produto

Tabela 49. Necessidade de componentes *k* por produto

componente/Produto	1	2	3
1	3	2	2
2	3	2	2

g) Tempo padrão (minutos) requerido para a produção de cada produto

Tabela 50. Tempo padrão (minutos) requerido para a produção de cada produto

Tempo/Produto	1	2	3
	2	3	2

h) Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida por período

Tabela 51. Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida por período

Tempo/período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
1	900	900	900	900	900	900	900	900	900	900	900	900

i) Demanda mínima do produto por período

Tabela 52. Demanda mínima do produto por período

Produto/Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º	Total
-----------------	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-------

1	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87	1072
2	79	71	78	81	81	82	79	78	77	81	80	80	947
3	69	68	70	69	69	68	72	71	72	69	68	70	835

j) Capacidade nominal do produto por período

Tabela 53. Capacidade nominal do produto por período

Produto/Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º	Total
1	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	1200
2	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	1200
3	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	1200

Para a geração da *Clearing Function*, tem-se as seguintes características.

k) Parâmetro da *Clearing Function* k_1

Tabela 54. Parâmetro k_1

Produto/Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
1	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
2	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
3	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100

l) Parâmetro da *Clearing Function* k_2

Tabela 55. Parâmetro k_2

Produto/Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
1	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28
2	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28
3	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28	28

Com base nestas características de entrada o resultado da solução ótima do modelo foi o seguinte:

Tabela 56. Solução ótima do produto 1 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Nível de Produção	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de Release	89	178	0	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de <i>Work-in-process</i>	0	87	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Nível de Estoque	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Nota-se que para o produto 1, no período 2, o nível de release foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 3 não houve a necessidade de releases.

Tabela 57. Solução ótima do produto 2 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----

Nível de Produção	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de Release	79	71	78	81	81	82	79	78	77	81	80	80
Nível de <i>Work-in-process</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Nível de Estoque	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Observa-se que para o produto 2, os níveis de releases foram nas mesmas quantidades das demandas, logo, não houve a presença de *work-in-process* ao longo dos períodos.

Tabela 58. Solução ótima do produto 3 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Nível de Produção	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de Release	69	68	70	69	69	140	0	71	72	69	68	70
Nível de <i>Work-in-process</i>	0	0	0	0	0	72	0	0	0	0	0	0
Nível de Estoque	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Constata-se que para o produto 3, no período 6, o nível de release foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 7 não houve a necessidade de releases.

O valor da solução ótima do modelo foi de 20.609,00 unidades monetárias.

4.7 MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA 12 PERÍODOS

Para aproximar o modelo de programação convexa, será utilizado um modelo de programação linear. Os índices, características e variáveis de decisão do modelo de programação linear são os seguintes.

4.7.1 Índices

Para os produtos: $i = 1, 2, 3$.

Para os componentes: $k = 1, 2$.

Para os períodos: $j = 1, 2, \dots, 12$.

4.7.2 Características

b_{ki} : Número de componentes k usados para a produção de uma unidade do produto i .

z_i : Tempo padrão requerido para a produção de uma unidade do produto i .

Z_j : Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida no período j .

S_{kj} : Quantidade de suprimentos do componente k disponível para ser consumida no período j .

D_{ij} : Demanda mínima para o produto i no período j .

$g_{ij}(W_{ij})$: Capacidade de produção do produto i no período j estimada por funções afins.

c_{ij} : Custo de cada unidade produzida do produto i no período j .

h_{ij} : Custo de manutenção de estoques cada unidade produzida do produto i no período j .

w_{ij} : Custo de *work-in-process* cada unidade produzida do produto i no período j .

r_{ij} : Custo de *release* de cada unidade produzida do produto i no período j .

4.7.3 Variáveis de decisão

x_{ij} : Nível médio de produção do produto i no período j .

I_{ij} : Nível médio de estoque do produto i no período j .

W_{ij} : Nível médio de *Work-in-process* do produto i no período j .

R_{ij} : Nível médio de *Release* do produto i no período j .

Assim, tem-se o modelo matemático de programação linear (58) utilizando funções afins para estimar as capacidades do modelo:

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^{12} \sum_{i=1}^3 c_{ij}x_{ij} + h_{ij}I_{ij} + w_{ij}W_{ij} + r_{ij}R_{ij} \quad (1)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^{12} \sum_{i=1}^3 b_{ki}x_{ij} \leq \sum_{j=1}^{12} S_{kj} \quad \forall k, \forall j \quad (2)$$

$$I_{ij} = I_{ij-1} + x_{ij} - D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (3)$$

$$W_{ij} = W_{ij-1} + R_{ij} - x_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^3 z_i x_{ij} \leq Z_j \quad \forall j \quad (6)$$

$$x_{ij} - g_{ij}(W_{ij}) \leq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (7)$$

$$x_{ij}, I_{ij}, W_{ij}, R_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (8)$$

As características de entrada do modelo são os mesmos já apresentados nas tabelas 44 a 53, e as funções afins são as mesmas da tabela 17, bem como as definições destas funções apresentadas na tabela 18.

Aplicando o modelo de programação linear com base nas características apresentadas, tem-se como resultado da solução ótima do modelo o seguinte:

Tabela 59. Solução ótima do produto 1 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Nível de Produção	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de Release	89	91	87	182	0	90	89	92	86	89	90	87
Nível de <i>Work-in-process</i>	0	0	0	90	0	0	0	0	0	0	0	0
Nível de Estoque	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Nota-se que para o produto 1, no período 4, o nível de release foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 5 não houve a necessidade de releases.

Tabela 60. Solução ótima do produto 2 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Nível de Produção	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de Release	79	71	78	81	81	82	79	78	77	81	80	80
Nível de <i>Work-in-process</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Nível de Estoque	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Observa-se que para o produto 2, os níveis de releases foram nas mesmas quantidades das demandas, logo, não houve a presença de *work-in-process* ao longo dos períodos.

Tabela 61. Solução ótima do produto 3 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Nível de Produção	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de Release	69	68	70	69	69	68	72	71	72	137	0	70
Nível de <i>Work-in-process</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	68	0	0
Nível de Estoque	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Constata-se que para o produto 3, no período 10, o nível de release foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 11 não houve a necessidade de releases.

O valor da solução ótima do modelo foi de 21.397,00 unidades monetárias.

Nota-se que a diferença para o valor da solução obtida pelo modelo de programação convexa robusta foi de aproximadamente apenas 3,8%. O que se pode confirmar, novamente, a eficácia da aproximação do modelo de programação convexa usando programação linear.

É importante destacar que à medida que se adicionam funções afins para aproximar o modelo, menor é o erro obtido. No primeiro caso com apenas 3 períodos, foi possível convergir exatamente para o mesmo resultado, ou seja, com 0% de erro entre os modelos de programação convexa e linear, devido se tratar de um problema de pequeno porte com apenas 3 períodos, contudo, o mesmo não ocorreu para o problema de 12 períodos, uma vez que a quantidade de funções afins aplicadas considerou os mesmos 10 níveis de *work-in-process* analisados. Todavia, os erros foram mínimos.

4.8 MODELO DE PROGRAMAÇÃO CONVEXA ROBUSTA PARA 12 PERÍODOS

Nesta seção serão adicionados os conceitos de robustez ao parâmetro incerto. Os índices, características e variáveis do modelo de programação convexa robusta são os seguintes:

4.8.1 Índices

Para os produtos: $i = 1, 2, 3$.

Para os componentes: $k = 1, 2$.

Para os períodos: $j = 1, 2, \dots, 12$.

4.8.2 Características

b_{ki} : Número de componentes k usados para a produção de uma unidade do produto i .

z_i : Tempo padrão requerido para a produção de uma unidade do produto i .

Z_j : Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida no período j .

S_{kj} : Quantidade de suprimentos do componente k disponível para ser consumida no período j .

D_{ij} : Demanda mínima para o produto i no período j .

$\tilde{\varphi}_{ij}(W_{ij})$: Capacidade de produção do produto i no período j estimada pela *Clearing Function* robusta.

c_{ij} : Custo de cada unidade produzida do produto i no período j .

h_{ij} : Custo de manutenção de estoques cada unidade produzida do produto i no período j .

w_{ij} : Custo de *work-in-process* cada unidade produzida do produto i no período j .

r_{ij} : Custo de *release* de cada unidade produzida do produto i no período j .

4.8.3 Variáveis de decisão

x_{ij} : Nível médio de produção do produto i no período j .

I_{ij} : Nível médio de estoque do produto i no período j .

W_{ij} : Nível médio de *Work-in-process* do produto i no período j .

R_{ij} : Nível médio de *Release* do produto i no período j .

O modelo de planejamento da produção convexo robusto (59) utilizando a *Clearing Function* robusta para estimar as capacidades do modelo é o seguinte:

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^{12} \sum_{i=1}^3 c_{ij}x_{ij} + h_{ij}I_{ij} + w_{ij}W_{ij} + r_{ij}R_{ij} \quad (1)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^{12} \sum_{i=1}^3 b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^{12} S_{kj} \quad \forall k, \forall j \quad (2)$$

$$I_{ij} = I_{ij-1} + x_{ij} - D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (3)$$

$$W_{ij} = W_{ij-1} + R_{ij} - x_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^3 z_i x_{ij} \leq Z_j \quad \forall j \quad (6)$$

$$x_{ij} - \tilde{\varphi}_{ij}(W_{ij}) \leq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (7)$$

$$x_{ij}, I_{ij}, W_{ij}, R_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (8)$$

As características de entrada do modelo são os mesmos já apresentados nas tabelas 44 a 53.

Para a geração da *Clearing Function* robusta, foi adicionado o valor do desvio padrão ao valor médio do parâmetro k_2 . As características consideradas são os seguintes:

Tabela 62. Parâmetro k_2 robusto

Produto/Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
1	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9
2	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9
3	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9	30,9

Com base nestas características de entrada o resultado da solução ótima do modelo foi o seguinte:

Tabela 63. Solução ótima do produto 1 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Nível de Produção	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de Release	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de <i>Work-in-process</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Nível de Estoque	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Nota-se que para o produto 1, os níveis de releases foram nas mesmas quantidades das demandas, logo, não houve a presença de *work-in-process* ao longo dos períodos.

Tabela 64. Solução ótima do produto 2 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Nível de Produção	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de Release	150	0	78	81	81	82	79	78	77	81	80	80
Nível de <i>Work-in-process</i>	71	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Nível de Estoque	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
------------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Observa-se que para o produto 2, no período 1, o nível de release foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 2 não houve a necessidade de releases.

Tabela 65. Solução ótima do produto 3 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Nível de Produção	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de Release	69	68	70	69	69	68	72	71	72	137	0	70
Nível de <i>Work-in-process</i>	0	0	0	0	0	0	0	0	0	68	0	0
Nível de Estoque	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Constata-se que para o produto 3, no período 10, o nível de release foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 11 não houve a necessidade de releases.

O valor da solução ótima do modelo foi de 22.031,00 unidades monetárias.

Quando comparado ao modelo de programação convexa sem robustez, os custos totais aumentaram em 6,9%. Apesar dos custos totais terem aumentado, o modelo apresentou uma solução subótima que permite este ser factível em toda região de incerteza do parâmetro que foi inserido a robustez.

4.9 MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR ROBUSTA PARA 12 PERÍODOS

No modelo matemático a seguir busca-se aproximar o modelo de programação convexa robusta usando um modelo de programação linear robusta.

Os índices, características e variáveis de decisão do modelo de programação linear robusta são os seguintes:

4.9.1 Índices

Para os produtos: $i = 1, 2, 3$.

Para os componentes: $k = 1, 2$.

Para os períodos: $j = 1, 2, \dots, 12$.

4.9.2 Características

b_{ki} : Número de componentes k usados para a produção de uma unidade do produto i .

z_i : Tempo padrão requerido para a produção de uma unidade do produto i .

Z_j : Mão de obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser consumida no período j .

S_{kj} : Quantidade de suprimentos do componente k disponível para ser consumida no período j .

D_{ij} : Demanda mínima para o produto i no período j .

$\tilde{g}_{ij}(W_{ij})$: Capacidade de produção do produto i no período j estimada pelas funções afins.

c_{ij} : Custo de cada unidade produzida do produto i no período j .

h_{ij} : Custo de manutenção de estoques cada unidade produzida do produto i no período j .

w_{ij} : Custo de *work-in-process* cada unidade produzida do produto i no período j .

r_{ij} : Custo de *release* de cada unidade produzida do produto i no período j .

4.9.3 Variáveis de decisão

x_{ij} : Nível médio de produção do produto i no período j .

I_{ij} : Nível médio de estoque do produto i no período j .

W_{ij} : Nível médio de *Work-in-process* do produto i no período j .

R_{ij} : Nível médio de *Release* do produto i no período j .

O modelo matemático de programação linear robusta (60) utilizando funções afins para estimar as capacidades do modelo é o seguinte.

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^{12} \sum_{i=1}^3 c_{ij}x_{ij} + h_{ij}I_{ij} + w_{ij}W_{ij} + r_{ij}R_{ij} \quad (1)$$

$$s. a. \quad \sum_{j=1}^{12} \sum_{i=1}^3 b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^{12} S_{kj} \quad \forall k, \forall j \quad (2)$$

$$I_{ij} = I_{ij-1} + x_{ij} - D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (3)$$

$$W_{ij} = W_{ij-1} + R_{ij} - x_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (4)$$

$$x_{ij} \geq D_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^3 z_i x_{ij} \leq Z_j \quad \forall j \quad (6)$$

$$x_{ij} - \tilde{g}_{ij}(W_{ij}) \leq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (7)$$

$$x_{ij}, I_{ij}, W_{ij}, R_{ij} \geq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (8)$$

As características de entrada do modelo são os mesmos já apresentados nas tabelas 44 a 53, e as funções afins robustas são as mesmas da tabela 32, bem como as definições destas funções apresentadas na tabela 33.

Aplicando o modelo de programação linear com base nas características apresentadas, tem-se como resultado da solução ótima do modelo o seguinte:

Tabela 66. Solução ótima do produto 1 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Nível de Produção	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de Release	89	91	179	0	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de <i>Work-in-process</i>	0	0	92	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Nível de Estoque	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Nota-se que para o produto 1, no período 3, o nível de release foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 4 não houve a necessidade de releases.

Tabela 67. Solução ótima do produto 2 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
Nível de Produção	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de Release	79	71	78	81	81	161	0	78	77	81	80	80
Nível de <i>Work-in-process</i>	0	0	0	0	0	79	0	0	0	0	0	0
Nível de Estoque	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Observa-se que para o produto 2, no período 6, o nível de release foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 7 não houve a necessidade de releases.

Tabela 68. Solução ótima do produto 3 ao longo do horizonte de planejamento

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º	11º	12º
--	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----

Nível de Produção	89	91	87	92	90	90	89	92	86	89	90	87
Nível de Release	137	0	70	69	69	68	72	71	72	69	68	70
Nível de <i>Work-in-process</i>	68	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Nível de Estoque	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Constata-se que para o produto 3, no período 1, o nível de release foi superior a demanda, logo, houve a presença de *work-in-process* no período. Com isso, no período 2 não houve a necessidade de releases.

O valor da solução ótima do modelo foi de 22.437,00 unidades monetárias.

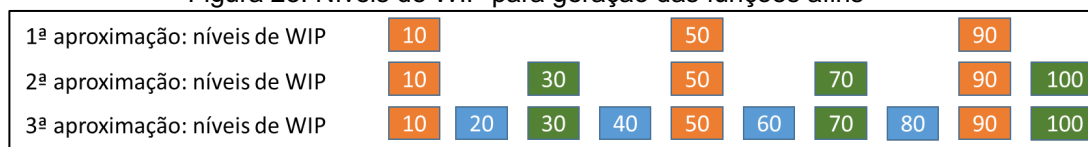
Nota-se que a diferença para o valor da solução obtida pelo modelo de programação convexa robusta foi de aproximadamente apenas 1,84%. O que se pode confirmar, novamente, a eficácia da aproximação do modelo de programação convexa robusta usando uma família de funções afins.

O modelo de programação linear sem a presença da robustez teve um aumento nos custos totais de 4,86% quando inserido os conceitos da abordagem robusta. Da mesma forma, apesar dos custos totais terem aumentado, o modelo apresentou uma solução subótima que permite o modelo ser factível em toda região de incerteza do parâmetro que foi inserido a robustez.

4.10 ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE OS RESULTADOS DOS MODELOS PARA 12 PERÍODOS

Para análise comparativa entre os modelos, foi simulado 3 diferentes tipos de aproximações no modelo de acordo com a quantidade de funções afins, a saber:

Figura 28. Níveis de WIP para geração das funções afins



Para linearizar a *Clearing Function*, na 1ª aproximação utilizou-se os níveis de WIP igual a 10, 50, 100, na 2ª aproximação utilizou-se os níveis de WIP igual a 10, 30, 50, 70, 100, e na 3ª aproximação os níveis de WIP igual a 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 e 100.

Para cada aproximação, foi comparado o erro obtido entre o resultado do valor da solução ótima do modelo de programação convexo (PC) e o modelo programação linear (PL), o modelo de programação convexa robusta (PCR) e o modelo de programação linear robusta (PLR). A tabela a seguir resume os resultados.

Tabela 69. Análise dos erros obtidos com as aproximações

Níveis de WIP analisados	PC	PL	Erro	Erro (%)	PCR	PLR	Erro	Erro (%)
1ª Aproximação	20609	22949	2340	11,35%	22031	23690	1659	7,53%
2ª Aproximação	20609	22153	1544	7,49%	22031	22905	874	3,97%
3ª Aproximação	20609	21397	788	3,82%	22031	22437	406	1,84%

A partir destes resultados é possível observar que novamente se tem um *trade-off* entre a quantidade de funções afins utilizadas para aproximar a *Clearing Function* e a acuracidade dos resultados, uma vez que ao passo que se adicionam funções afins para aproximar o modelo de programação convexa, menor é a diferença entre os resultados obtidos entre eles.

Na primeira aproximação foram utilizados apenas uma análise envolvendo 3 níveis de WIP, o que gerou $3 \times 3 \times 12 = 108$ funções afins, com um erro de 11,35% entre os modelos de programação convexa (PC) e programação linear (PL) sem robustez e 7,53% para os modelos de

programação convexa robusta (PCR) e programação linear robusta (PLR) com robustez.

Na segunda aproximação foram utilizados uma análise envolvendo 6 níveis de WIP, o que gerou $6 \times 3 \times 12 = 216$ funções afins, com um erro de 7,49% entre os modelos de programação convexa (PC) e programação linear (PL) sem robustez e 3,97% para os modelos de programação convexa robusta (PCR) e programação linear robusta (PLR) com robustez.

Enquanto na terceira aproximação foram utilizados uma análise envolvendo 10 níveis de WIP, o que gerou $10 \times 3 \times 12 = 360$ funções afins, com um erro de apenas 3,82% entre os modelos de programação convexa (PC) e programação linear (PL) sem robustez e 1,48% para os modelos de programação convexa robusta (PCR) e programação linear robusta (PLR) com robustez.

O modelo de programação convexa sem a presença da robustez teve um aumento nos custos totais de 6,90% quando inserido os conceitos da abordagem robusta. Apesar dos custos totais terem aumentado, o modelo apresentou uma solução subótima que permite o modelo ser factível em toda região de incerteza do parâmetro que foi inserido a robustez.

O modelo de programação linear sem a presença da robustez teve um aumento nos custos totais de 4,86% quando inserido os conceitos da abordagem robusta. Da mesma forma, apesar dos custos totais terem aumentado, o modelo retorna uma solução subótima com a introdução de características robustos.

5 CONCLUSÃO

É possível resolver o problema de planejamento da produção por meio de um modelo matemático em sistema de manufatura usando um método simples de programação linear com eficácia equivalente a um problema complexo de programação não linear e de fácil implementação no dia a dia do chão de fábrica.

A utilização da programação linear robusta para modelar problemas de planejamento de produção ainda mantém algumas das deficiências associadas aos modelos de programação linear (determinístico) salvo que leva em conta a variabilidade das características. No caso abordado nesse trabalho, por questões de simplicidade, foi admitido que apenas os tempos de espera em fila são estocásticos, mas a abordagem não muda mesmo quando se considera que as características do modelo podem sofrer variações.

O preço que se paga por uma abordagem robusta é a obtenção de soluções subótimas com relação às soluções fornecidas pelo problema determinístico, e certamente, um maior custo computacional. O ganho é que é possível introduzir no modelo a variabilidade das características a serem utilizados no planejamento de produção.

Portanto, o uso da programação robusta, para resolver problemas de planejamento da produção, é uma poderosa ferramenta de apoio à tomada de decisões diante da variabilidade das características de planejamento.

Por meio da programação robusta é possível definir o nível de atendimento adequado que a empresa deseja oferecer aos seus clientes e quanto isso impacta nos custos.

Neste estudo, foi admitido apenas um parâmetro estocástico, porém, é possível em um modelo mais realístico, incorporar outras características como sendo estocásticas, logo, dependendo da confiança e qualidade da informação sobre estas características, o planejador poderá decidir a amplitude de incertezas e, por consequência, qual o nível de atendimento desejado das características.

Algumas outras vantagens que podem ser destacadas são que considerando diferentes graus de confiança na realização do parâmetro incerto, tem-se diferentes variações nos custos de produção, e como esperado, essas variações podem ser medidas. Além disso a programação robusta incorpora em

certo sentido um ensaio sobre a sensibilidade do modelo, o que pode ajudar sobremaneira ao planejador com importantes *insights* sobre o problema de planejamento de produção de sua empresa.

Deve-se realçar que a programação robusta se diferencia da análise de sensibilidade e da análise paramétrica. A análise de sensibilidade busca analisar se a solução ótima varia ou não com pequenas variações nas características, enquanto a análise paramétrica busca intervalos das características onde a solução permanece viável. Já a programação robusta estima intervalos de variabilidades das características baseadas na distribuição de probabilidade que é assumida para as características e incorpora a variabilidade na solução do problema.

Finalmente, o custo computacional dessa abordagem não é muito superior do que o custo computacional da abordagem determinística, o que torna essa abordagem bastante atraente para ser utilizada.

5.1 CUMPRIMENTO DOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Nota-se que o objetivo geral do trabalho foi alcançado de “Resolver o problema de planejamento da produção modelado como um sistema de filas que incorpore estimadores de capacidade como uma das variáveis de decisão”. Esse objetivo geral foi alcançado a partir do desenvolvimento dos objetivos específicos, listados a seguir.

O primeiro objetivo de “propor um modelo de programação matemática convexa robusta para resolver o problema de planejamento da produção que otimize os níveis de produção, estoque, releases e *Work-in-process*”, foi alcançado com a proposta de um modelo básico de planejamento da produção, em seguida foi adicionado os conceitos da *Clearing Function*, obtendo assim um modelo de programação convexa, e por fim foi incorporado os conceitos de otimização robusta.

O segundo objetivo foi de “Aproximar o modelo de programação matemática convexa robusta por um problema de programação linear robusta” foi alcançado aproximando um modelo de programação convexa usando uma família de funções afins, em seguida, o mesmo processo foi repetido com a introdução dos conceitos de otimização robusta.

O terceiro objetivo de “Expor a teoria que justifique a aproximação do modelo de programação matemática convexa robusta pelo modelo de programação matemática linear robusta”, foi alcançado apresentando uma teoria de aproximação de um problema de programação matemática convexa por uma família de funções afins. Esse teorema fez uso de dois 2 lemas, ambos com provas associadas.

O quarto objetivo de “Ilustrar numericamente a teoria analisada tanto com relação ao modelo numérico quanto em relação aos resultados obtidos” foi alcançado pela realização de uma experimentação numérica de um problema de pequeno porte com 3 períodos e um problema de grande porte com 12 períodos.

5.2 PROPOSTAS DE TRABALHOS FUTUROS

Como proposta de trabalhos futuros, sugere-se:

- Adicionar a presença de incertezas em mais características do modelo de planejamento da produção, por exemplo, demanda, tempos disponíveis de carga de trabalho, suprimentos de componentes, etc;
- A abordagem robusta foi testada apenas para o caso de Soyster (1973), logo, uma outra proposta seria expandir para os outros tipos de abordagens robustas e analisar a variação.

6 REFERÊNCIAS

ALBEY, E.; BILGE, U.; UZSOY, R. **An exploratory study of disaggregated *Clearing Functions* for production systems with multiple products.** International Journal of Production Research, Volume 52, Issue 18, p. 5301-5322, 2014.

ALBEY, E.; BILGE, U.; UZSOY, R. **An exploratory study of disaggregated *Clearing Functions* for production systems with multiple products.** International Journal of Production Research, Volume 52, Issue 18, p. 5301-5322, 2014.

ALEM, D; MORABITO, R. **Programação estocástica e otimização robusta no planejamento da produção de empresas moveleiras.** Production Journal, vol. 25, n.3, p.657-677, 2015.

ARENALES, M.; ARMENTANO, V.; MORABITO, R.; YANASSE, H. **Pesquisa Operacional: para cursos de engenharia.** 3ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2007.

ALVES, J. **Modelo de otimização robusta orientado por dados aplicado na alocação de renda fixa.** Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Departamento em Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2017.

ASMUNDSSON, J. M. **Tractable nonlinear capacity models for aggregate production planning.** Tese (Ph.D. Thesis) - Faculty of Purdue University, 2003.

ASMUNDSSON, J. M.; RARDIN, R. L.; UZSOY, R. **Tractable nonlinear production planning models for semiconductor wafer fabrication facilities.** IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing, v. 19, n. 1, p. 95-111, 2006.

ASMUNDSSON, J. M. et al. **Production planning with resources subject to congestion.** Published online 20 January 2009 in Wiley Interscience, v. 56, p.142-157, 2009.

BAKER, K.R. **Requirements Planning.** In: GRAVES, S. C.; RINNOOY KAN, A. H. G.; ZIPKIN, Paul Herbert. Logistics of production and inventory. North-Holland, 1993. cap 11, 760 p.

BARBOSA FILHO, A. C. B. **Desenvolvimento de um framework para otimização robusta e aplicação para o planejamento tático de uma cadeia de suprimentos de argônio.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Química) - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2020.

BAZARAA, M.S.; JARVIS, J.J. **Linear programming and network flows.** Ed. John Wiley and sons New York, 1977.

BERTSIMAS, D.; SIM, M. **The Price of Robustness, Operations Research.** 2004, v.52, p.35-53.

BERTSIMAS, D.; THIELE, A. **A robust optimization approach to inventory theory.** **Operations Research**, v. 54(1), p. 150-168, 2006.

CENTENO, D. L. R. **Otimização robusta multiobjetivo por análise de intervalo não probabilística: uma aplicação em conforto e segurança veicular sob dinâmica lateral e vertical acoplada.** Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica), Universidade Federal do Rio Grande do Sul UFRS, Rio Grande do Sul, 2017.

CONTE, C. B. C. **Um modelo de regressão dinâmica para a função *Clearing Function* que estima a taxa de produção em modelos de planejamento da produção baseados em**

programação matemática. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas) - Departamento de Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Paraná PUCPR, Curitiba, 2016.

CORRÊA, Henrique L.; GIANESI, Irineu G. N.; CAON, Mauro. **Planejamento, programação e controle da produção: MRP II/ERP: conceitos, uso e implantação, base para SAP, Oracle Applications e outros softwares integrados de gestão.** 5. ed. São Paulo: Atlas, 2007. 434 p.

CHU, S. C. K. **A mathematical programming approach towards optimized master production scheduling.** International Journal of Production Economics – IJPE. n.38, p.269–279, 1995.

de SAMPAIO, R., WOLLMANN, R. CONTE, V., MAESTRI, G., 2014, **How to Use Mathematical Decomposition to Solve Capacity Production Planning Models**, Proceedings of 2014 ISERC, Montreal – Canadá.

de SAMPAIO, R., WOLLMANN, R. VIEIRA, P. **A Flexible production planning for rolling-horizons**, International Journal of Production Economics - IJPE, 2017.

DIAS, I. C. P. **Um esquema de decomposição em planejamento de produção baseado em Programação Linear que incorpora o conceito de ambiente dinâmico de planejamento.** Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) - Departamento de Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Paraná PUCPR, Curitiba, 2017.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica.** Fortaleza: UEC, 2002.

GAITHER, N; FRAZIER, G. **Administração da produção e operações.** São Paulo: Thomson, 2002. 598 p.

GONÇALVES, M. C. **Uma abordagem robusta para um problema de planejamento da produção que combina programação linear com a *Clearing Function*.** Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) - Departamento de Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Paraná PUCPR, Curitiba, 2017.

GRAVES, S. C. **A tactical planning model for a job shop.** Operations Research, v. 34, p. 522-533, 1986.

GIL, A.C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa.** Ed. Atlas, 2ª. edição, 2002.

HACKMAN, S. T.; LEACHMAN, R. C. **A general framework for modeling production.** **Management Science**, v. 35, n. 4, p. 478-495, 1989.

HOPP, W.J.; SPEARMAN, M.L. **Factory Physics**, Foundations of Manufacturing Management, Boston: Irwin/McGraw-Hill, 2001.

KACAR, N. B. **Fitting *Clearing Functions* to empirical data: simulation optimization and heuristic algorithms.** Tese (Ph.D. Dissertation) | Department of Industrial and System Engineering, North Carolina State University, Raleigh, NC, USA, 2012.

KACAR, N. B.; MONCH, L.; UZSOY, R. **Planning wafer starts using non linear *Clearing Functions*: A large-scale experiment.** IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing, v. 26, n. 4, p. 602-612, 2013.

KACAR, N. B.; UZSOY, R. **Estimating *Clearing Functions* for production resources using simulation optimization.** IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, v. 12, n. 2, p. 539-552, 2015.

KARMARKAR, U.S. **Capacity loading and release planning with work-in-process and Lead Times**. Journal of Manufacturing and Operations Management, n.2, p.105–123, 1989.

KEFELI, A. **Production Planning Models with Clearing Functions: Dual Behavior and Applications**. Tese (Ph.D. Thesis) | Department of Industrial and System Engineering, North Carolina State University, Raleigh, NC, USA, 2011.

LIMA, E. L. **Análise Real Volume 1: Funções de uma variável**. 8ª edição. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.

LITTLE, J. D. C. **A proof of the queuing formula $l = \lambda w$** . Operations Research, n. 9, p. 383-387, 1961.

LUSTOSA, Leonardo. **Planejamento e Controle da Produção**. 2ª Edição. Rio de Janeiro: Elsevier, 2008.

MAESTRI, G.; **Sobre o Problema de utilizar Métodos de Decomposição em Modelos de Planejamento de Produção que utilizam o Conceito de Clearing Function para Estimar Capacidade**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) - Departamento de Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Paraná PUCPR, Curitiba, 2014.

MARTINEZ, J. J. L. V. **Otimização robusta e programação estocástica para o problema de roteamento de veículos com múltiplos entregadores: formulações e métodos exatos**. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção) – Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos UFSCAR, São Paulo, 2019.

MARTINICH, Joseph Stanislaus. **Production and operations management: an applied modern approach**. New York: J. Wiley & Sons, c1997. 875, [36] p.

MISSBAUER, H. **Order release planning with clearing functions: A queueing theoretical analysis of the Clearing Function concept**. International Journal of Production Economics, v. 131, p. 399-406, 2011.

NASCIMENTO, F. P. **Metodologia da Pesquisa Científica: teoria e prática**. Brasília: Thesaurus, 2016.

ROCKAFELLAR, R. T. **Convex Analysis**. Princeton University Press, 1970.

RUSTEM, B.; HOWE, M. **Algorithms for worst-case design and applications to risk management**. New Jersey: Princeton University Press, 2002.

SHAPIRO, J.F. **Mathematical Programming Models and Methods for Production Planning and Scheduling**. In: GRAVES, S. C.; RINNOOY KAN, A. H. G.; ZIPKIN, Paul Herbert. Logistics of production and inventory. North-Holland, 1993. cap 8, 760 p.

SILVA, M. A.; CAVALINI, A. A.; STEFFEN JUNIOR, V.; LOBATO, F. S. **Otimização do Processo de Fermentação Batelada-Alimentada usando Evolução Diferencial e Otimização Robusta**. Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics, v. 6, n. 1, 2018.

SIM, M. **Robust Optimization**. 2004. Tese de doutorado. Massachusetts Institute of Technology, 2004. Massachusetts.

SLACK, Nigel; CHAMBERS, Stuart; JOHNSTON, Robert. **Administração da produção**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2009. 703 p.

SRINIVASAN, A.; CAREY, M.; MORTON, T. E. **Resource pricing and aggregate scheduling in manufacturing systems**. Pittsburgh PA: Thesis submitted to the Faculty of Purdue University, A State of Art, 1988.

SOUZA, B. F. **Aplicação de algoritmos de morfogênese adaptativa modificado e de otimização robusta em problemas de placas finas enrijecidas**. Dissertação (Mestrado em integridade de materiais da engenharia), Universidade de Brasília UNB, Brasil, 2021.

SOYSTER, A.L. **Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming**. Operations Research, v.14, p.1154-1151, 1973.

TAVARES, C. S. **Seleção de fornecedores sob incertezas via otimização robusta**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção) – Departamento de Engenharia de Produção, Universidade Federal de São Carlos UFSCAR, São Paulo, 2019.

THOMAS, L.J.; MCCLAIN, J.O. **An Overview of Production Planning**. In: GRAVES, S. C.; RINNOOY KAN, A. H. G.; ZIPKIN, Paul Herbert. Logistics of production and inventory. North-Holland, 1993. cap 7, 760 p.

VIEIRA, P. F. G. **Esquema de decomposição matemática para resolver o problema de planejamento da produção baseado em programação linear que implementa um esquema de Rolling planning**. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) - Departamento de Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Paraná PUCPR, Curitiba, 2016.

VIRTUDES, P. T. B. C. **Robust Optimization in Finance**. Dissertação (Mestrado em Métodos Quantitativos em Finanças) - Departamento de Matemática da FCTUC, Universidade de Coimbra, Portugal, 2019.

VOIPI, N. M. P. **O Impacto de perturbações estocásticas em um modelo de planejamento florestal**. Tese (Doutorado em Ciências Florestais) – Departamento de Ciências agrárias, Universidade Federal do Paraná, 1997.

WINSTON, W. **Operations research**. Belmont, CA: Thomson, 2004.

WOLLMANN, R. R. G. **A rolling planning mechanism that preserves optimality and reduces resources planning for a Production Planning Problem**. Tese (Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas) - Departamento de Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Paraná PUCPR, Curitiba, 2016.