



**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ  
ESCOLA POLITÉCNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E  
SISTEMAS (PPGEPS)**

**ANDERSON LEVATI AMOROSO**

**META-HEURÍSTICA HÍBRIDA PARA PROBLEMAS DE  
OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA IRRESTRITA**

**CURITIBA  
2020**

**ANDERSON LEVATI AMOROSO**

**META-HEURÍSTICA HÍBRIDA PARA PROBLEMAS DE  
OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA IRRESTRITA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas (PPGEPS) da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção e Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Leandro dos Santos Coelho

**CURITIBA**

**2020**

Dados da Catalogação na Publicação  
Pontifícia Universidade Católica do Paraná  
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/PUCPR  
Biblioteca Central  
Pamela Travassos de Freitas – CRB 9/1960

A524m  
2020 Amoroso, Anderson Levati  
Meta-heurística híbrida para problemas de otimização contínua irrestrita /  
Anderson Levati Amoroso ; orientador: Leandro dos Santos Coelho. – 2020.  
294 f. : il. ; 30 cm

Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba,  
2020

Bibliografia: f.191-204

1. Filtros digitais (Matemática). 2. Programação heurística. 3. Otimização  
matemática. 4. Solução de problemas. I. Coelho, Leandro dos Santos.  
II. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Pós-Graduação em  
Engenharia de Produção e Sistemas. III. Título.

CDD 20. ed. – 670



PUCPR

Pontifícia Universidade Católica do Paraná  
Escola Politécnica  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas

## TERMO DE APROVAÇÃO

### Anderson Levati Amoroso

#### META-HEURÍSTICA HÍBRIDA PARA PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO CONTÍNUA IRRESTRITA.

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Curso de Doutorado em Engenharia de Produção e Sistemas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas, da Escola Politécnica da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

---

Presidente da Banca  
Prof. Dr. Leandro dos Santos Coelho  
(Orientador)

---

Prof. Dr. Osiris Canciglieri Junior  
(Membro Interno)

---

Prof. Dr. Roberto Zanetti Freire  
(Membro Interno)

---

Profª. Dra. Viviana Cocco Mariani  
(Membro Externo)

---

Prof. Dr. Helon Vicente Hultmann Ayala  
(Membro Externo)

Curitiba, 28 de setembro de 2020.

## AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento e a conclusão desta tese somente foram possíveis pela colaboração direta ou indireta de pessoas especiais que doaram seu tempo e conhecimento em favor do autor. Grato também pelo apoio, principalmente nos momentos adversos, pela dedicação, pelo incentivo, pela compreensão e paciência infinitas. Sejam sempre referências positivas e fontes de inspiração àqueles que lhes cercam. Gratidão eterna...

à minha esposa Simone;

ao meu orientador, professor Dr. Leandro dos Santos Coelho;

ao coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas (PPGEPS), professor Dr. Osiris Canciglieri Junior;

aos professores membros da banca examinadora de defesa da tese, Dra. Viviana Cocco Mariani, Dr. Roberto Zanetti Freire e Dr. Helon Vicente Hultmann Ayala, e ao Dr. Emerson Hochsteiner de Vasconcelos Segundo;

aos meus pais Zenaide e Valdir (in memoriam);

à médica Dra. Luciana Soares Percegoni;

aos familiares Glaci, Pedro, Andressa, Daniel, Heloisa, João Alexandre, Ana, Júlia, Patrícia (in memoriam), Fernanda (in memoriam), Carmen, Álvaro, Rodrigo, Rafaela, Paulo, Rose, Ana Carolina, Pedro Paulo, Tânia e Rodrigo N.;

aos ex-colegas de trabalho dos cursos de Engenharia de Produção e Engenharia de Controle e Automação da Pontifícia Universidade Católica do Paraná;

aos colegas de trabalho do Grupo de Automação do Departamento de Eletrônica da Universidade Tecnológica Federal do Paraná;

aos docentes do PPGEPS da Pontifícia Universidade Católica do Paraná e do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Paraná;

à secretária do PPGEPS, Denise da Mata Medeiros;

às demais pessoas que não foram citadas, algumas anônimas, mas que estão sempre em meus pensamentos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

## RESUMO

A seleção do método a ser utilizado na resolução de problemas de otimização depende da razão entre a qualidade da solução gerada pelo método e o custo computacional para obtê-la. As meta-heurísticas são métodos de otimização que podem fornecer soluções suficientemente boas para um determinado problema de otimização a um custo computacional aceitável. A busca por novos métodos para a otimização de problemas resulta no desenvolvimento de novas meta-heurísticas ou na hibridização de meta-heurísticas existentes, que exploram e unem as potencialidades de cada uma das meta-heurísticas originais. A principal contribuição desta tese é uma nova meta-heurística híbrida que combina um algoritmo de inteligência de enxame, a Otimização por Borboletas Monarcas (*Monarch Butterfly Optimization*, MBO), com um algoritmo de evolução diferencial adaptativo, o JADE (*J Adaptive Differential Evolution*). O algoritmo desenvolvido, denominado JMBO, adota o operador de migração do MBO e o mecanismo de mutação adaptativo do JADE. O algoritmo JMBO foi submetido a um conjunto de funções de teste para otimização mono-objetivo com restrições laterais e seu desempenho foi comparado com outros algoritmos de otimização. Os resultados mostraram que o algoritmo JMBO possui desempenho superior ao MBO e suas variantes – *Improved MBO*, *Greedy Strategy and Self-Adaptive Crossover Operator MBO* e *MBO Firefly Search*. O algoritmo JMBO com arquivo apresentou desempenho inferior somente aos algoritmos Evolução Diferencial (DE) e *Two-Stage DE* em apenas um grupo das funções de teste. O algoritmo híbrido proposto também foi aplicado no projeto de filtros digitais de resposta ao impulso finita de fase linear. O problema de otimização dos filtros foi formulado em termos de mínimos quadrados ponderados. O algoritmo JMBO obteve valores para a função objetivo iguais ou inferiores aos demais algoritmos. Em relação ao número de avaliações da função objetivo para convergir, o JMBO apresentou o menor número para os filtros de ordem 20 e um número similar a uma variante do algoritmo *Success-History based Adaptive DE*, o L-SHADE, para os filtros de ordem 60.

**Palavras-chave:** Otimização estocástica. Meta-heurísticas. Projeto de filtros digitais.

## ABSTRACT

Selecting a method for solving optimization problems depends on the trade-off between the quality of the solution generated by the selected method and the computational cost associated with the solution. Metaheuristics are optimization methods that can provide effective solutions for a given optimization problem at an acceptable computational cost. The search for new methods for solving optimization problems has resulted in the development of new metaheuristics and the hybridization of existing metaheuristics, which incorporate and unify the properties of the original metaheuristics. In this thesis, a novel hybrid metaheuristic is proposed that combines a swarm intelligence algorithm (Monarch Butterfly Optimization (MBO)), with an adaptive differential evolution algorithm (J Adaptive Differential Evolution (JADE)). The proposed algorithm, termed as JMBO, incorporates the MBO migration operator and the JADE adaptive mutation mechanism. The JMBO algorithm was subjected to a set of test functions for mono-objective optimization with lateral constraints, and its performance was then compared with other optimization algorithms. The obtained results indicate that the JMBO algorithm has a superior performance compared to the MBO algorithm and its variants such as improved MBO, greedy strategy and self-adaptive crossover operator MBO, and MBO firefly search. Compared to the differential evolution (DE) and two-stage DE algorithms, the JMBO algorithm delivers an inferior performance for only a select group of test functions. The proposed hybrid algorithm was also applied for designing digital finite impulse response filters (finite-duration impulse response) with linear phase. The filter optimization problem was formulated in terms of weighted least squares. The objective function values obtained from the JMBO algorithm are found to be equal to or less than those of the other algorithms. Furthermore, regarding the number of objective function evaluations required for convergence, the JMBO algorithm has the lowest number in the case of filters of order 20 and has a number similar to a variant of the success-history based adaptive DE algorithm (L-SHADE) in the case of filters of order 60.

**Keywords:** Stochastic optimization. Metaheuristics. Design of digital filters.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Linha do tempo das técnicas de otimização bioinspiradas e gráfico de publicações relacionadas à EC e SI.....	28
Figura 2 – Sequência metodológica da pesquisa.....	32
Figura 3 – Classes P, NP, NP-completo e NP-difícil .....	37
Figura 4 – Diversificação e intensificação: (a) critérios utilizados no espaço de busca de meta-heurísticas, (b) representações gráficas .....	40
Figura 5 – Exemplo de (a) operador de cruzamento com dois pontos de cruzamento e (b) operador de mutação em um EA .....	46
Figura 6 – Meta-heurísticas híbridas colaborativas: (a) EAs independentes que trocam informações sobre o processo de busca, (b) múltiplos EAs e SAs sendo executados em paralelo .....	49
Figura 7 – Meta-heurísticas híbridas integrativas: (a) utilizando um EA <sub>D</sub> e um EA <sub>I</sub> , (b) componente do EA adotando princípios do SA .....	49
Figura 8 – Fluxograma do algoritmo DE.....	53
Figura 9 – Etapas do DE: (a) inicialização da população, (b) vetor diferença, (c) mutação, (d) seleção, (e) mutação do vetor novo, (f) seleção do vetor novo.....	56
Figura 10 – Estratégia de mutação DE/ <i>current-to-pbest</i> /1 adotada no JADE .....	60
Figura 11 – Fluxograma do algoritmo JADE.....	61
Figura 12 – Exemplos de meta-heurísticas baseadas em SI .....	70
Figura 13 – Borboletas monarcas: (a) enxame, (b) fêmea, (c) macho .....	74
Figura 14 – Rotas de migração, áreas de reprodução e de descanso das borboletas monarcas.....	75
Figura 15 – Fluxograma do algoritmo MBO.....	78
Figura 16 – <i>Framework</i> para avaliação de algoritmos de otimização.....	84
Figura 17 – Exemplo de diagrama de caixa .....	85
Figura 18 – Exemplo de gráfico de convergência .....	86
Figura 19 – Gráfico de diferenças críticas utilizando o teste de Nemenyi .....	95
Figura 20 – Resposta em frequência de amplitude para filtros seletores ideais: (a) passa-baixa, (b) passa-alta, (c) passa-faixa e (d) rejeita-faixa.....	104
Figura 21 – Especificações absolutas de amplitude para um filtro passa-baixa.....	105
Figura 22 – Visão geral da revisão sistemática de literatura .....	115

Figura 23 – Número de publicações por ano que aplicam meta-heurísticas no projeto de filtros digitais FIR de fase linear .....	116
Figura 24 – Porcentagem de publicações por ano em revistas e em conferências.	116
Figura 25 – Número de publicações (a) por base de dados e (b) em revistas e conferências .....	117
Figura 26 – Meta-heurísticas de referência nos artigos selecionados.....	120
Figura 27 – Meta-heurísticas de comparação nos artigos selecionados .....	120
Figura 28 – Redes de coautoria com as restrições definidas .....	122
Figura 29 – Redes de coautoria considerando o ano das publicações .....	122
Figura 30 – Rede com autores com publicações em comum.....	123
Figura 31 – Redes de coocorrência de palavras-chave .....	124
Figura 32 – Fluxograma do algoritmo JMBO.....	126
Figura 33 – Tempos médios de execução para (a) $D = 30$ e (b) $D = 100$ .....	143
Figura 34 – Diferença crítica do grupo SIM unimultimodais com $D = 30$ .....	151
Figura 35 – $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo SIM unimultimodais com $D = 30$ .....	152
Figura 36 – Intervalos de confiança do grupo SIM unimultimodais com $D = 30$ .....	153
Figura 37 – Diferença crítica do grupo SIM unimultimodais com $D = 100$ .....	154
Figura 38 – $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo SIM unimultimodais com $D = 100$ .....	154
Figura 39 – Intervalos de confiança do grupo SIM unimultimodais com $D = 100$ ....	155
Figura 40 – Diferença crítica do grupo SIM híbridas com $D = 30$ .....	156
Figura 41 – $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo SIM híbridas com $D = 30$ .....	157
Figura 42 – Intervalos de confiança do grupo SIM híbridas com $D = 30$ .....	157
Figura 43 – Diferença crítica do grupo SIM híbridas com $D = 100$ .....	158
Figura 44 – $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo SIM híbridas com $D = 100$ .....	159
Figura 45 – Intervalos de confiança do grupo SIM híbridas com $D = 100$ .....	160
Figura 46 – Diferença crítica do grupo SIM compostas com $D = 30$ .....	160
Figura 47 – $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo SIM compostas com $D = 30$ .....	161
Figura 48 – Intervalos de confiança do grupo SIM compostas com $D = 30$ .....	162

Figura 49 – Diferença crítica do grupo SIM compostas com $D = 100$ .....	162
Figura 50 – $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo SIM compostas com $D = 100$ .....	163
Figura 51 – Intervalos de confiança do grupo SIM compostas com $D = 100$ .....	164
Figura 52 – Diferença crítica do grupo DEM unimultimodais com $D = 30$ .....	165
Figura 53 – $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo DEM unimultimodais com $D = 30$ .....	165
Figura 54 – Intervalos de confiança do grupo DEM unimultimodais com $D = 30$ ....	166
Figura 55 – Diferença crítica do grupo DEM unimultimodais com $D = 100$ .....	167
Figura 56 – $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo DEM unimultimodais com $D = 100$ .....	167
Figura 57 – Intervalos de confiança do grupo DEM unimultimodais com $D = 100$ ..	168
Figura 58 – Diferença crítica do grupo DEM híbridas com $D = 30$ .....	169
Figura 59 – $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo DEM híbridas com $D = 30$ .....	169
Figura 60 – Intervalos de confiança do grupo DEM híbridas com $D = 30$ .....	170
Figura 61 – Intervalos de confiança do grupo DEM híbridas com $D = 100$ .....	171
Figura 62 – Diferença crítica do grupo DEM compostas com $D = 30$ .....	172
Figura 63 – $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo DEM compostas com $D = 30$ .....	172
Figura 64 – Intervalos de confiança do grupo DEM compostas com $D = 30$ .....	173
Figura 65 – Diferença crítica do grupo DEM compostas com $D = 100$ .....	174
Figura 66 – $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo DEM compostas com $D = 100$ .....	175
Figura 67 – Intervalos de confiança do grupo DEM compostas com $D = 100$ .....	175
Figura 68 – Respostas em frequência desejadas para os filtros (a) passa-baixa, (b) passa-alta, (c) passa-faixa e (d) rejeita-faixa.....	178
Figura 69 – Filtro passa-baixa de ordem 20: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM.....	182
Figura 70 – Filtro passa-alta de ordem 20: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM .....	182
Figura 71 – Filtro passa-faixa de ordem 20: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM.....	183
Figura 72 – Filtro rejeita-faixa de ordem 20: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM.....	183
Figura 73 – Filtro passa-faixa ideal de ordem 20: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM .	183

Figura 74 – Filtro rejeita-faixa (RFe) de ordem 20: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM	184
Figura 75 – Filtro passa-baixa de ordem 60: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM	184
Figura 76 – Filtro passa-alta de ordem 60: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM	184
Figura 77 – Filtro passa-faixa de ordem 60: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM	185
Figura 78 – Filtro rejeita-faixa de ordem 60: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM	185
Figura 79 – Filtro passa-faixa ideal de ordem 60: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM	185
Figura 80 – Filtro rejeita-faixa (RFe) de ordem 60: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM	186
Figura 81 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{01}$ a $F_{04}$ com $D = 30$	223
Figura 82 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{05}$ a $F_{07}$ com $D = 30$	224
Figura 83 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{08}$ a $F_{10}$ com $D = 30$	225
Figura 84 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{11}$ a $F_{13}$ com $D = 30$	226
Figura 85 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{14}$ a $F_{16}$ com $D = 30$	227
Figura 86 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{17}$ a $F_{19}$ com $D = 30$	228
Figura 87 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{20}$ a $F_{22}$ com $D = 30$	229
Figura 88 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{23}$ a $F_{25}$ com $D = 30$	230
Figura 89 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{26}$ a $F_{28}$ com $D = 30$	231
Figura 90 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{29}$ a $F_{30}$ com $D = 30$	232
Figura 91 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{01}$ a $F_{04}$ com $D = 30$	233
Figura 92 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{05}$ a $F_{07}$ com $D = 30$	234
Figura 93 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{08}$ a $F_{10}$ com $D = 30$	235
Figura 94 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{11}$ a $F_{13}$ com $D = 30$	236
Figura 95 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{14}$ a $F_{16}$ com $D = 30$	237
Figura 96 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{17}$ a $F_{19}$ com $D = 30$	238
Figura 97 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{20}$ a $F_{22}$ com $D = 30$	239
Figura 98 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{23}$ a $F_{25}$ com $D = 30$	240
Figura 99 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{26}$ a $F_{28}$ com $D = 30$	241
Figura 100 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{29}$ a $F_{30}$ com $D = 30$	242
Figura 101 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{01}$ a $F_{04}$ com $D = 100$	243
Figura 102 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{05}$ a $F_{07}$ com $D = 100$	244
Figura 103 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{08}$ a $F_{10}$ com $D = 100$	245
Figura 104 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{11}$ a $F_{13}$ com $D = 100$	246
Figura 105 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{14}$ a $F_{16}$ com $D = 100$	247

Figura 106 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{17}$ a $F_{19}$ com $D = 100$ ...	248
Figura 107 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{20}$ a $F_{22}$ com $D = 100$ ...	249
Figura 108 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{23}$ a $F_{25}$ com $D = 100$ ...	250
Figura 109 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{26}$ a $F_{28}$ com $D = 100$ ...	251
Figura 110 – Tendências de convergência do grupo SIM $F_{29}$ a $F_{30}$ com $D = 100$ ...	252
Figura 111 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{01}$ a $F_{04}$ com $D = 100$ ..	253
Figura 112 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{05}$ a $F_{07}$ com $D = 100$ ..	254
Figura 113 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{08}$ a $F_{10}$ com $D = 100$ ..	255
Figura 114 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{11}$ a $F_{13}$ com $D = 100$ ..	256
Figura 115 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{14}$ a $F_{16}$ com $D = 100$ ..	257
Figura 116 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{17}$ a $F_{19}$ com $D = 100$ ..	258
Figura 117 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{20}$ a $F_{22}$ com $D = 100$ ..	259
Figura 118 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{23}$ a $F_{25}$ com $D = 100$ ..	260
Figura 119 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{26}$ a $F_{28}$ com $D = 100$ ..	261
Figura 120 – Tendências de convergência do grupo DEM $F_{29}$ a $F_{30}$ com $D = 100$ ..	262
Figura 121 – Diagramas de caixa do grupo SIM $F_{01}$ a $F_{07}$ com $D = 30$ .....	263
Figura 122 – Diagramas de caixa do grupo SIM $F_{08}$ a $F_{13}$ com $D = 30$ .....	264
Figura 123 – Diagramas de caixa do grupo SIM $F_{14}$ a $F_{19}$ com $D = 30$ .....	265
Figura 124 – Diagramas de caixa do grupo SIM $F_{20}$ a $F_{25}$ com $D = 30$ .....	266
Figura 125 – Diagramas de caixa do grupo SIM $F_{26}$ a $F_{30}$ com $D = 30$ .....	267
Figura 126 – Diagramas de caixa do grupo DEM $F_{01}$ a $F_{07}$ com $D = 30$ .....	268
Figura 127 – Diagramas de caixa do grupo DEM $F_{08}$ a $F_{13}$ com $D = 30$ .....	269
Figura 128 – Diagramas de caixa do grupo DEM $F_{14}$ a $F_{19}$ com $D = 30$ .....	270
Figura 129 – Diagramas de caixa do grupo DEM $F_{20}$ a $F_{25}$ com $D = 30$ .....	271
Figura 130 – Diagramas de caixa do grupo DEM $F_{26}$ a $F_{30}$ com $D = 30$ .....	272
Figura 131 – Diagramas de caixa do grupo SIM $F_{01}$ a $F_{07}$ com $D = 100$ .....	273
Figura 132 – Diagramas de caixa do grupo SIM $F_{08}$ a $F_{13}$ com $D = 100$ .....	274
Figura 133 – Diagramas de caixa do grupo SIM $F_{14}$ a $F_{19}$ com $D = 100$ .....	275
Figura 134 – Diagramas de caixa do grupo SIM $F_{20}$ a $F_{25}$ com $D = 100$ .....	276
Figura 135 – Diagramas de caixa do grupo SIM $F_{26}$ a $F_{30}$ com $D = 100$ .....	277
Figura 136 – Diagramas de caixa do grupo DEM $F_{01}$ a $F_{07}$ com $D = 100$ .....	278
Figura 137 – Diagramas de caixa do grupo DEM $F_{08}$ a $F_{13}$ com $D = 100$ .....	279

Figura 138 – Diagramas de caixa do grupo DEM $F_{14}$ a $F_{19}$ com $D = 100$ .....	280
Figura 139 – Diagramas de caixa do grupo DEM $F_{20}$ a $F_{25}$ com $D = 100$ .....	281
Figura 140 – Diagramas de caixa do grupo DEM $F_{26}$ a $F_{30}$ com $D = 100$ .....	282
Figura 141 – (Md, MAD) para as funções $F_{01}$ a $F_{07}$ com $D = 30$ .....	283
Figura 142 – (Md, MAD) para as funções $F_{08}$ a $F_{13}$ com $D = 30$ .....	284
Figura 143 – (Md, MAD) para as funções $F_{14}$ a $F_{19}$ com $D = 30$ .....	285
Figura 144 – (Md, MAD) para as funções $F_{20}$ a $F_{25}$ com $D = 30$ .....	286
Figura 145 – (Md, MAD) para as funções $F_{26}$ a $F_{30}$ com $D = 30$ .....	287
Figura 146 – (Md, MAD) para as funções $F_{01}$ a $F_{07}$ com $D = 100$ .....	288
Figura 147 – (Md, MAD) para as funções $F_{08}$ a $F_{13}$ com $D = 100$ .....	289
Figura 148 – (Md, MAD) para as funções $F_{14}$ a $F_{19}$ com $D = 100$ .....	290
Figura 149 – (Md, MAD) para as funções $F_{20}$ a $F_{25}$ com $D = 100$ .....	291
Figura 150 – (Md, MAD) para as funções $F_{26}$ a $F_{30}$ com $D = 100$ .....	292
Figura 151 – RMSE por grupos de funções de teste com $D = 30$ .....	293
Figura 152 – RMSE por grupos de funções de teste com $D = 100$ .....	294

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Exemplo de disposição dos dados para o teste de Friedman .....	91
Tabela 2 – Principais revistas com publicações que utilizaram meta-heurísticas no projeto de filtros digitais FIR de fase linear .....	117
Tabela 3 – Principais conferências com publicações que utilizaram meta-heurísticas no projeto de filtros digitais FIR de fase linear.....	118
Tabela 4 – Arranjo dos resultados para cada dimensão .....	131
Tabela 5 – Experimentos elaborados, totalizando 12 casos .....	133
Tabela 6 – Resultados do grupo SIM unimultimodais com $D = 30$ .....	133
Tabela 7 – Resultados do grupo DEM compostas com $D = 100$ .....	134
Tabela 8 – Configuração dos parâmetros dos algoritmos .....	138
Tabela 9 – Postos médios dos ECCs.....	142
Tabela 10 – Resultados do grupo SIM unimultimodais com $D = 30$ .....	145
Tabela 11 – Resultados do grupo SIM unimultimodais com $D = 100$ .....	145
Tabela 12 – Resultados do grupo SIM híbridas com $D = 30$ .....	145
Tabela 13 – Resultados do grupo SIM híbridas com $D = 100$ .....	146
Tabela 14 – Resultados do grupo SIM compostas com $D = 30$ .....	146
Tabela 15 – Resultados do grupo SIM compostas com $D = 100$ .....	146
Tabela 16 – Resultados do grupo DEM unimultimodais com $D = 30$ .....	147
Tabela 17 – Resultados do grupo DEM unimultimodais com $D = 100$ .....	147
Tabela 18 – Resultados do grupo DEM híbridas com $D = 30$ .....	147
Tabela 19 – Resultados do grupo DEM híbridas com $D = 100$ .....	148
Tabela 20 – Resultados do grupo DEM compostas com $D = 30$ .....	148
Tabela 21 – Resultados do grupo DEM compostas com $D = 100$ .....	148
Tabela 22 – $P$ -valores do teste de Friedman e tamanhos dos efeitos.....	149
Tabela 23 – Resultados do grupo SIM para os filtros de ordem 20.....	180
Tabela 24 – Resultados do grupo DEM para os filtros de ordem 20 .....	180
Tabela 25 – Resultados do grupo SIM para os filtros de ordem 60.....	181
Tabela 26 – Resultados do grupo DEM para os filtros de ordem 60 .....	181
Tabela 27 – Medidas descritivas do grupo SIM unimultimodais com $D = 30$ .....	206
Tabela 28 – Medidas descritivas do grupo SIM híbridas com $D = 30$ .....	207
Tabela 29 – Medidas descritivas do grupo SIM compostas com $D = 30$ .....	208

Tabela 30 – Medidas descritivas do grupo DEM unimultimodais com $D = 30$ .....	209
Tabela 31 – Medidas descritivas do grupo DEM híbridas com $D = 30$ .....	210
Tabela 32 – Medidas descritivas do grupo DEM compostas com $D = 30$ .....	211
Tabela 33 – Medidas descritivas do grupo SIM unimultimodais com $D = 100$ .....	212
Tabela 34 – Medidas descritivas do grupo SIM híbridas com $D = 100$ .....	213
Tabela 35 – Medidas descritivas do grupo SIM compostas com $D = 100$ .....	214
Tabela 36 – Medidas descritivas do grupo DEM unimultimodais com $D = 100$ .....	215
Tabela 37 – Medidas descritivas do grupo DEM híbridas com $D = 100$ .....	216
Tabela 38 – Medidas descritivas do grupo DEM compostas com $D = 100$ .....	217
Tabela 39 – RMSE do grupo SIM com $D = 30$ .....	218
Tabela 40 – RMSE do grupo DEM com $D = 30$ .....	219
Tabela 41 – RMSE do grupo SIM com $D = 100$ .....	220
Tabela 42 – RMSE do grupo DEM com $D = 100$ .....	221

## LISTA DE SIGLAS E ACRÔNIMOS

ABC	Colônia Artificial de Abelhas (do inglês <i>Artificial Bee Colony</i> )
ACK	do inglês <i>Artificial Chemical Kinetics</i>
ACO	Otimização de Colônia de Formigas (do inglês <i>Ant Colony Optimization</i> )
ACSA	Algoritmo de Busca Cuco Adaptativo (do inglês <i>Adaptive Cuckoo Search Algorithm</i> )
AIQ	Amplitude Interquartil
AIS	Sistemas Imunológicos Artificiais (do inglês <i>Artificial Immune Systems</i> )
ANOVA	Análise de Variância (do inglês <i>Analysis of Variance</i> )
APV	P-valor corrigido (do inglês <i>Adjusted p-value</i> )
BA	Algoritmo do Morcego (do inglês <i>Bat Algorithm</i> )
BBO	Otimização Baseada em Biogeografia (do inglês <i>Biogeography Based Optimization</i> )
BFO	Otimização por Cultura de Bactérias (do inglês <i>Bacterial Foraging Optimization</i> )
CC	Coevolução Cooperativa (do inglês <i>Cooperative Coevolution</i> )
CD	Diferença Crítica (do inglês <i>Critical Difference</i> )
CEC	Congresso de Computação Evolutiva (do inglês <i>Congress on Evolutionary Computation</i> )
CMA-ES	Estratégia Evolutiva com Adaptação da Matriz de Covariância (do inglês <i>Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategies</i> )
CoDE	do inglês <i>Composite Differential Evolution</i>
CSA	Algoritmo de Busca Cuco (do inglês <i>Cuckoo Search Algorithm</i> )
CSO	Otimização de Bando de Gatos (do inglês <i>Cat Swarm Optimization</i> )
DC	do inglês <i>Differential Cultural Algorithm</i>
DE	Evolução Diferencial (do inglês <i>Differential Evolution</i> )
DEM	do inglês <i>DE-based Metaheuristics</i>
DE-PSO	do inglês <i>Differential Evolution Particle Swarm Optimization Algorithm</i>

DFT	Transformada Discreta de Fourier (do inglês <i>Discrete Fourier Transform</i> )
EA	Algoritmos Evolutivos (do inglês <i>Evolutionary Algorithms</i> )
EC	Computação Evolutiva (do inglês <i>Evolutionary Computation</i> )
ECC	Erro Cumulativo de Convergência
EP	Programação Evolutiva (do inglês <i>Evolutionary Programming</i> )
ES	Estratégia Evolutiva (do inglês <i>Evolutionary Strategy</i> )
FA	Algoritmo de Vagalumes (do inglês <i>Firefly Algorithm</i> )
FIR	Resposta ao Impulso Finita (do inglês <i>Finite-Duration Impulse Response</i> )
FPA	Algoritmo de Polinização de Flores (do inglês <i>Flower Pollination Algorithm</i> )
FWER	Taxa de Erro da Família de Testes (do inglês <i>Family-Wise Error Rate</i> )
GA	Algoritmos Genéticos (do inglês <i>Genetic Algorithms</i> )
GCMBO	do inglês <i>Greedy Strategy and Self-Adaptive Crossover Operator Monarch Butterfly Optimization</i>
GLPSO	do inglês <i>Genetic Lbest Particle Swarm Optimization</i>
GP	Programação Genética (do inglês <i>Genetic Programming</i> )
GSA	Algoritmo de Busca Gravitacional (do inglês <i>Gravitational Search Algorithm</i> )
GWA	Algoritmo de Lobos Cinzentos (do inglês <i>Grey Wolf Algorithm</i> )
HFDE	do inglês <i>Hybrid Firefly Differential Evolution Algorithm</i>
HS	Algoritmo de Busca Harmônica (do inglês <i>Harmony Search</i> )
ICA	Algoritmo Competitivo Imperialista (do inglês <i>Imperialist Competitive Algorithm</i> )
ICSPSO	do inglês <i>Improved Cuckoo Search Particle Swarm Optimization</i>
IIR	Resposta ao Impulso Infinita (do inglês <i>Infinite-Duration Impulse Response</i> )
IMBO	do inglês <i>Improved Monarch Butterfly Optimization</i>
IOFP-PSO	do inglês <i>Improved Firefly Position Optimization - Particle Swarm Optimization</i>

IWO	Algoritmo de Colonização das Ervas Daninhas (do inglês <i>Invasive Weed Optimization</i> )
JADE	do inglês <i>J Adaptive Differential Evolution</i>
LPSR	Redução Linear do Tamanho da População (do inglês <i>Linear Population Size Reduction</i> )
LS	Quadrados Mínimos (do inglês <i>Least Squares</i> )
MAD	Desvio Absoluto Mediano (do inglês <i>Median Absolute Deviation</i> )
MAS	Sistemas Multiagentes (do inglês <i>Multi-Agent System</i> )
MBO	Otimização por Borboletas Monarcas (do inglês <i>Monarch Butterfly Optimization</i> )
MBO-FS	do inglês <i>Monarch Butterfly Optimization - Firefly Search</i>
MFO	do inglês <i>Moth-Flame Optimization</i>
MVO	Otimizador Multiverso (do inglês <i>Multiverse Optimizer</i> )
NFL	Sem Almoço Grátis (do inglês <i>No Free Lunch</i> )
NP	do inglês <i>Nondeterministic Polynomial</i>
NPSO	do inglês <i>Novel PSO</i>
OHS	Algoritmo de Busca Harmônica Oposicional (do inglês <i>Opposition-Based Harmony Search Algorithm</i> )
PA	(Filtro) Passa-alta
PB	(Filtro) Passa-baixa
PF	(Filtro) Passa-faixa
PFi	(Filtro) Passa-faixa ideal
PM	Parks e McClellan
PSO	Otimização por Enxame de Partículas (do inglês <i>Particle Swarm Optimization</i> )
PSOCFIWA	do inglês <i>Particle Swarm Optimization with Constriction Factor and Inertia Weight Approach</i>
RCGA	do inglês <i>Real-Coded Genetic Algorithm</i>
RF	(Filtro) Rejeita-faixa
RFe	(Filtro) Rejeita-faixa de banda estreita
RMSE	Raiz Quadrada do Erro Quadrático Médio (do inglês <i>Root Mean Square Error</i> )
RNA	Rede Neural Artificial

RPSO	do inglês <i>Random PSO</i>
SA	do inglês <i>Simulated Annealing</i>
SAC	Cruzamento Autoadaptativo (do inglês <i>Self-Adaptive Crossover Operator</i> )
SaDE	Evolução Diferencial Autoadaptativa (do inglês <i>Self-adaptive Differential Evolution</i> )
SFLA	Algoritmo por Embaralhamento de Salto de Sapos (do inglês <i>Shuffled Frog-Leaping Algorithm</i> )
SHADE	do inglês <i>Success-History based Adaptive DE</i>
SI	Inteligência de Enxame (do inglês <i>Swarm Intelligence</i> )
SIM	do inglês <i>Swarm Intelligence Metaheuristics</i>
SOA	do inglês <i>Seeker Optimization Algorithm</i>
SSO	Otimizador das Aranhas Sociáveis (do inglês <i>Social Spiders Optimization</i> )
TLBO	Otimização Baseada em Ensino-Aprendizagem (do inglês <i>Teaching-Learning-Based Optimization</i> )
TS	Busca Tabu (do inglês <i>Tabu Search</i> )
WDO	do inglês <i>Wind Driven Optimization</i>
WOA	Algoritmo de Otimização da Baleia (do inglês <i>Whale Optimization Algorithm</i> )

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_k$	coeficiente real de um sistema de tempo discreto linear e invariante no tempo
$A(\omega)$	resposta em frequência de amplitude efetiva de filtros FIR de fase linear
$A_d(\omega)$	resposta em frequência de amplitude desejada de filtros FIR de fase linear
$A_k$	algoritmos utilizados no teste de Friedman
$b_k$	coeficiente real de um sistema de tempo discreto linear e invariante no tempo
$C(k)$	resposta em frequência da resposta ao impulso
$CR$	taxa de cruzamento
$D$	dimensão do problema ou número de parâmetros do problema a ser otimizado
$E$	erro quadrático
$E_w$	erro quadrático ponderado
$f$	função objetivo do problema a ser otimizado
$F$	fator de escala
$F_i$	função de teste $i$ ; fator de escala associado ao indivíduo $\mathbf{x}_i$
$g$	geração ou iteração
$g_{max}$	número máximo de gerações
$h(k)$	resposta ao impulso de um sistema discreto
$H(z)$	função de transferência discreta do filtro FIR
$H(\omega)$	resposta em frequência do filtro FIR
$ H(\omega) $	resposta de magnitude do filtro FIR
$H_0$	hipótese nula do teste de hipóteses
$H_1$	hipótese alternativa do teste de hipóteses
$L_i$	limite inferior de fio de bigode em diagrama de caixa
$L_s$	limite superior de fio de bigode em diagrama de caixa
$m$	número de comparações entre os tratamentos ou algoritmos
$M$	ordem do filtro FIR

$ME_W$	mediana dos erros quadráticos ponderados
$n_{fe}$	mediana do número de avaliações da função objetivo para convergência
$N_{fe}$	número de avaliações da função objetivo
$N_P$	tamanho de uma população
$q_\alpha$	estatística estudentizada dividida por $\sqrt{2}$
$Q_1$	quartil inferior ou primeiro quartil
$Q_3$	quartil superior ou terceiro quartil
$r_{ij}$	posto da observação do bloco $i$ e tratamento $j$ no teste de Friedman
$R_j$	posto médio do tratamento $j$ no teste de Friedman
$\bar{T}$	tempo médio de execução da função de teste $F_{18}$
$\mathbf{u}_i$	vetor experimental
$\mathbf{v}_i$	vetor mutante ou de mutação
$\mathbf{x}_i$	indivíduo (vetor) de uma população (vetor $D$ -dimensional) ou vetor alvo
$\mathbf{x}^*$	vetor correspondente ao valor ótimo global de um problema de otimização dentro de um domínio
$x_{i,k}$	parâmetro $k$ do indivíduo $\mathbf{x}_i$
$x(n)$	entrada de sistema de tempo discreto linear e invariante no tempo
$y(n)$	saída de sistema de tempo discreto linear e invariante no tempo
$z$	estatística do teste $z$
$Z_{adj}$	estatística do teste $z$ ajustada
$W$	valor do coeficiente de concordância de Kendall
$W(\omega)$	função de ponderação positiva
$\alpha$	nível de significância do teste de hipóteses, probabilidade de se cometer um erro do Tipo I
$\alpha_{FW}$	máxima taxa de erro Tipo I da família de testes
$\beta$	erro do tipo II no teste de hipóteses
$\delta_p$	tolerância da amplitude na faixa de passagem
$\delta_s$	tolerância da amplitude na faixa de rejeição
$\theta(\omega)$	resposta de fase do filtro FIR

$\tau_g(\omega)$	atraso de grupo de um sistema
$\tau_p$	atraso de fase de um sistema
$\chi_F^2$	estatística de Friedman
$\omega$	frequência de tempo discreto
$\omega_c$	frequência de transição ou de corte
$\omega_k$	amostras de frequência igualmente espaçadas
$\omega_p$	frequência de passagem normalizada
$\omega_s$	frequência de rejeição normalizada
$\Omega_s$	frequência de amostragem

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>24</b>
<b>1.1 Tema</b> .....	<b>29</b>
<b>1.2 Objetivos</b> .....	<b>29</b>
1.2.1 Objetivo Geral .....	29
1.2.2 Objetivos Específicos .....	29
1.2.3 Contribuições da Tese.....	30
<b>1.3 Justificativa</b> .....	<b>30</b>
<b>1.4 Metodologia da Pesquisa</b> .....	<b>31</b>
<b>1.5 Estrutura do Documento</b> .....	<b>32</b>
<b>2 OTIMIZAÇÃO E META-HEURÍSTICAS</b> .....	<b>34</b>
<b>2.1 Otimização</b> .....	<b>34</b>
<b>2.2 Complexidade de Algoritmos e de Problemas</b> .....	<b>36</b>
<b>2.3 Meta-heurísticas</b> .....	<b>37</b>
<b>2.4 Algoritmos Evolutivos</b> .....	<b>43</b>
<b>2.5 Teorema <i>No Free Lunch</i></b> .....	<b>47</b>
<b>2.6 Hibridização de Meta-heurísticas</b> .....	<b>48</b>
<b>2.7 Evolução Diferencial</b> .....	<b>51</b>
2.7.1 JADE .....	59
2.7.2 SHADE e L-SHADE .....	62
2.7.3 TSDE.....	67
<b>2.8 Inteligência de Enxame</b> .....	<b>69</b>
2.8.1 Otimização por Enxame de Partículas .....	71
<b>2.9 Otimização por Borboletas Monarcas</b> .....	<b>73</b>
2.9.1 GCMBO.....	79
2.9.2 IMBO .....	80
2.9.3 MBO-FS .....	82
<b>3 AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DE ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO</b> .....	<b>83</b>
<b>3.1 Inferência Estatística</b> .....	<b>86</b>
<b>3.2 Teste de Friedman</b> .....	<b>91</b>
<b>3.3 Testes de Comparações Múltiplas</b> .....	<b>92</b>
3.3.1 Teste de Nemenyi .....	94
3.3.2 Teste de Bergmann-Hommel .....	96

3.3.3 Intervalo de Confiança para o Teste de Friedman .....	97
<b>4 FILTROS DIGITAIS .....</b>	<b>98</b>
<b>4.1 Sistemas de Tempo Discreto .....</b>	<b>98</b>
<b>4.2 Filtros Digitais FIR.....</b>	<b>99</b>
<b>4.3 Filtros FIR de Fase Linear.....</b>	<b>101</b>
<b>4.4 Especificações de Magnitude para Filtros Digitais .....</b>	<b>103</b>
<b>4.5 Projeto por Amostragem de Frequência .....</b>	<b>106</b>
4.5.1 Projeto no Domínio da Frequência pelo Erro Quadrático Mínimo .....	107
4.5.2 Regiões de Transição e Funções de Ponderação.....	107
<b>5 METODOLOGIA APLICADA.....</b>	<b>109</b>
<b>5.1 Revisão Sistemática da Literatura .....</b>	<b>110</b>
<b>5.2 Desenvolvimento do Algoritmo Híbrido .....</b>	<b>125</b>
<b>5.3 Avaliação de Desempenho .....</b>	<b>125</b>
5.3.1 Algoritmos de Comparação e Conjuntos de Teste .....	126
5.3.2 Procedimento Experimental .....	127
<b>6 ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>136</b>
<b>6.2 Avaliação de Desempenho sobre o Conjunto de Teste CEC 2017 .....</b>	<b>140</b>
6.2.1 Grupo SIM Unimultimodais com $D = 30$ .....	150
6.2.2 Grupo SIM Unimultimodais com $D = 100$ .....	153
6.2.3 Grupo SIM Híbridas com $D = 30$ .....	155
6.2.4 Grupo SIM Híbridas com $D = 100$ .....	158
6.2.5 Grupo SIM Compostas com $D = 30$ .....	159
6.2.6 Grupo SIM Compostas com $D = 100$ .....	161
6.2.7 Grupo DEM Unimultimodais com $D = 30$ .....	164
6.2.8 Grupo DEM Unimultimodais com $D = 100$ .....	166
6.2.9 Grupo DEM Híbridas com $D = 30$ .....	168
6.2.10 Grupo DEM Híbridas com $D = 100$ .....	170
6.2.11 Grupo DEM Compostas com $D = 30$ .....	171
6.2.12 Grupo DEM Compostas com $D = 100$ .....	173
<b>6.3 Avaliação dos Algoritmos no Projeto de Filtros FIR de Fase Linear.....</b>	<b>177</b>
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>187</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>191</b>
<b>APÊNDICE A – TABELAS.....</b>	<b>205</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Um problema de otimização é caracterizado pela presença de uma solução, ou mesmo de um conjunto de soluções, em que se deseja, por meio da avaliação de uma ou mais funções objetivo, obter aquela que seja a melhor possível dentro dos requisitos de projeto. Todo método aplicado a um problema de otimização contínua mono-objetivo visa determinar uma solução que maximiza ou minimiza o valor de apenas uma função objetivo, também denominada função custo. A função objetivo depende de um número finito de variáveis de decisão, que podem ser independentes uma das outras, ou podem estar relacionadas por meio da presença de restrições de igualdade ou desigualdade, quando se tratar de um problema de otimização restrita (RAO, 2009; LUKE, 2015).

Em problemas de otimização, a escolha do método de resolução a ser utilizado depende principalmente do balanço entre a qualidade da solução gerada e o custo computacional para obter esta solução. Os métodos exatos de otimização, tais como os métodos de programação linear e programação dinâmica, podem ser inviáveis para a solução de diferentes classes de problemas. Um problema complexo pode apresentar elevado custo computacional para se pesquisar todas as soluções ou combinações possíveis das soluções. Isto pode ocorrer em casos reais, pois estes podem ser multimodais ou possuírem descontinuidades, não sendo diferenciáveis, entre outras características (GLOVER; KOCHENBERGER, 2003; DU; SWAMY, 2016).

As heurísticas referem-se a técnicas baseadas na experiência para aprendizado e resolução de problemas (DU; SWAMY, 2016). Uma meta-heurística é um método heurístico com propósito de ser mais facilmente adaptado para diferentes problemas de otimização. As meta-heurísticas podem fornecer soluções próximas das ótimas em um tempo computacional razoável para resolver problemas complexos. No entanto, a meta-heurística não garante que a solução seja a melhor possível e não define quão próximas estão as soluções obtidas da solução ótima (TALBI, 2009).

Existem diferentes formas de classificação das meta-heurísticas na literatura. De acordo com Bilal *et al.* (2020), as meta-heurísticas podem ser classificadas em algoritmos baseados em busca local e algoritmos baseados em população.

Algoritmos baseados em busca local são algoritmos que fazem uso do conceito de vizinhança e, a cada iteração, a solução se move em direção à solução vizinha

visando melhorar o valor atual da função objetivo. São exemplos destes algoritmos: *Simulated Annealing* (SA) e Busca Tabu (do inglês *Tabu Search*, TS)<sup>1</sup>.

Algoritmos baseados em população são algoritmos que funcionam no conjunto de soluções (ou população) e executam processos de busca no espaço de buscas para obter a melhor solução para um problema (BLUM; ROLI, 2008). Estes algoritmos também são conhecidos como algoritmos inspirados na natureza. Os algoritmos baseados em população distinguem-se em duas classes, a Inteligência de Enxame (do inglês *Swarm Intelligence*, SI) e a Computação Evolutiva ou Evolucionária (do inglês *Evolutionary Computation*, EC).

A Inteligência de Enxame se caracteriza por algoritmos que são inspirados no comportamento social e coletivo de enxames, tais como bando de pássaros, enxame de partículas, cardume de peixes, colônia de formigas e colônia de abelhas. Os principais algoritmos de inteligência de enxame são a Otimização por Enxame de Partículas (do inglês *Particle Swarm Optimization*, PSO) e a Otimização de Colônia de Formigas (do inglês *Ant Colony Optimization*, ACO) (SIMON, 2013; DU; SWAMY, 2016; MAVROVOUNIOTIS; LIB; YANG, 2017; DEL SER *et al.*, 2019).

A Computação Evolutiva ou Evolucionária se caracteriza por modelos computacionais de processos evolutivos. Os Algoritmos Evolutivos (do inglês *Evolutionary Algorithms*, EA), que pertencem a uma ramificação da Computação Evolutiva, são métodos de otimização e busca estocástica inspirados nos princípios e modelos da evolução biológica natural. Alguns dos algoritmos evolutivos são: Algoritmo Genético (do inglês *Genetic Algorithm*, GA), Programação Genética (do inglês *Genetic Programming*, GP), Programação Evolutiva (do inglês *Evolutionary Programming*, EP), Estratégia Evolutiva (do inglês *Evolutionary Strategy*, ES) e Evolução Diferencial (do inglês *Differential Evolution*, DE) (SIMON, 2013; DU; SWAMY, 2016; SALCEDO-SANZ, 2016; DEL SER *et al.*, 2019).

Muitas meta-heurísticas são inspiradas em algum fenômeno do “mundo real”, sendo a natureza uma frequente fonte de inspiração para o desenvolvimento de métodos computacionais de otimização. Nas últimas décadas, várias meta-heurísticas foram desenvolvidas e aplicadas em problemas de diferentes áreas.

---

<sup>1</sup> As traduções dos nomes das meta-heurísticas de otimização apresentadas foram aquelas frequentemente encontradas nas referências consultadas. Quando indisponíveis ou nos casos que não havia consenso, mantiveram-se os nomes em inglês (vide Lista de Siglas e Acrônimos).

Mahdavi, Shiri e Rahnamayan (2015) apresentaram uma visão geral de várias meta-heurísticas e suas aplicações em problemas de otimização de alta complexidade e dimensão. Eles realizaram o resumo dos métodos de Coevolução Cooperativa (do inglês *Cooperative Coevolution*, CC) com estratégia de decomposição de problemas e dos métodos baseados em não-decomposição, que incluem os métodos de Inteligência de Enxame, Computação Evolutiva, abordagens de busca local e Busca Tabu. Salcedo-Sanz (2016) apresentou meta-heurísticas baseadas em processos físicos não lineares, sendo que algumas meta-heurísticas foram agrupadas de acordo com o processo físico em que se baseiam: *Simulated Annealing*, *Vortex Search Algorithm*, *Fractal Search Algorithm*, propriedades de gases ideais, abordagens do tipo explosão, dinâmica gravitacional clássica e cinemática, teoria eletromagnética clássica, simulação de sistemas ópticos e mapas caóticos para otimização e melhoria de meta-heurísticas.

Akiol e Alatas (2017) propuseram oito grupos para classificação das meta-heurísticas, cujos métodos são baseados em (1) biologia ou bioinspirados, como o DE, (2) física, como o SA, (3) enxame, como a ACO, (4) social, como o Algoritmo Competitivo Imperialista (do inglês *Imperialist Competitive Algorithm*, ICA), (5) música, como o algoritmo de Busca Harmônica (do inglês *Harmony Search*, HS), (6) química, como o *Artificial Chemical Reaction Optimization Algorithm*, (7) esporte, como o *League Championship Algorithm* e (8) matemática, como o *Base Optimization Algorithm*. Eles também abordaram o uso de meta-heurísticas híbridas, ou seja, combinações de diferentes meta-heurísticas.

Dokeroglu *et al.* (2019) apresentaram 14 meta-heurísticas clássicas (tais como SA, TS, DE e ACO), 14 meta-heurísticas introduzidas entre 2000 e 2019 (HS, Algoritmo de Vagalumes (do inglês *Firefly Algorithm*, FA) e de Lobos Cinzentos (do inglês *Grey Wolf Algorithm*, GWA), por exemplo), meta-heurísticas híbridas, problemas em aberto, avanços em meta-heurísticas paralelas e novas oportunidades de pesquisa.

Hussain *et al.* (2019) apresentaram um levantamento de 136 meta-heurísticas contemplando 1.222 publicações entre 1983 e 2016, sendo que as cinco meta-heurísticas com mais publicações foram PSO, Colônia Artificial de Abelhas (do inglês *Artificial Bee Colony*, ABC), ACO, GA e HS.

Molina *et al.* (2020) revisaram mais de 300 publicações de algoritmos inspirados na natureza e com inspiração biológica e propuseram duas taxonomias. A

primeira considera a fonte de inspiração dos algoritmos, enquanto a segunda taxonomia agrupa os algoritmos em função do comportamento de cada algoritmo, ou seja, pelo procedimento através do qual novas soluções candidatas ao problema de otimização são geradas. Eles mostraram que 32,6% dos algoritmos revisados foram identificados como variantes dos algoritmos clássicos PSO (17,6%), DE (7,5%) ou GA (7,5%).

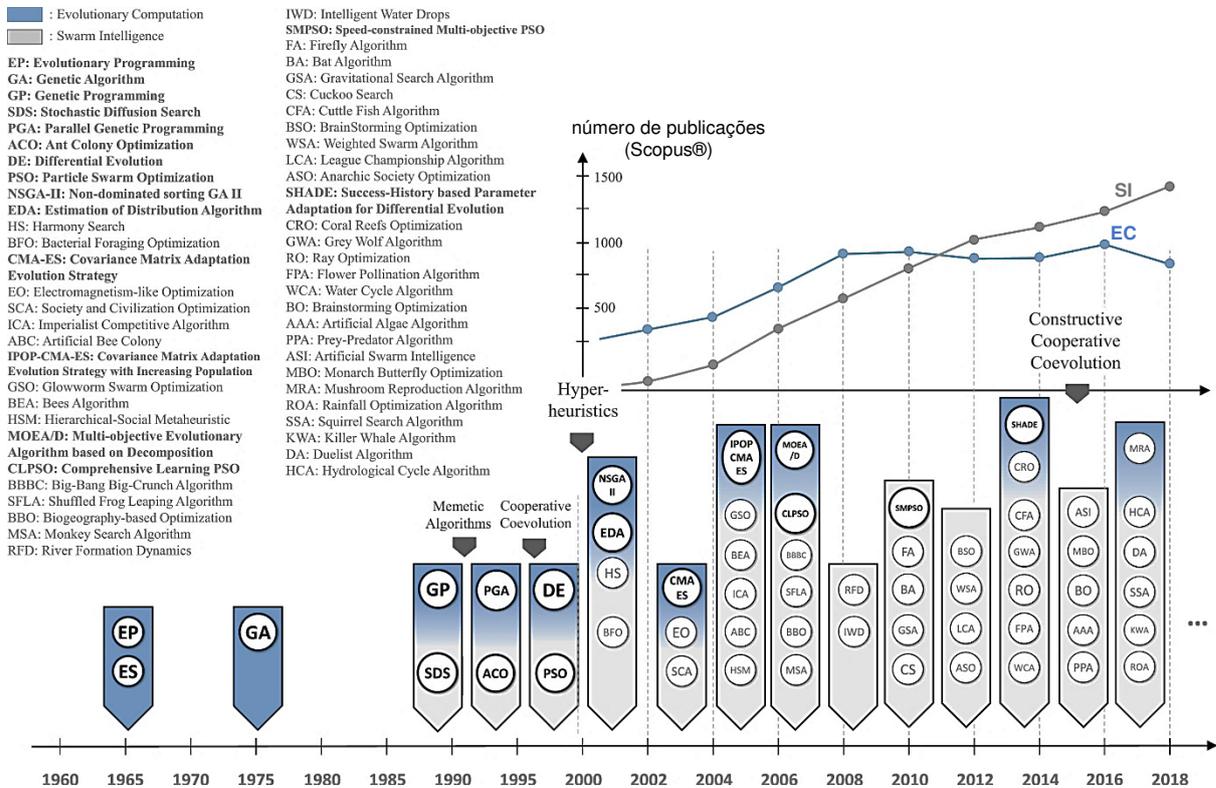
Del Ser *et al.* (2019) apresentaram o estado da arte das meta-heurísticas bioinspiradas e suas aplicações, analisaram e discutiram os estudos recentes destas meta-heurísticas e identificaram áreas com possibilidades de pesquisa. A Figura 1 apresenta a linha do tempo das técnicas de otimização bioinspiradas até 2018, onde cada técnica é representada por sua sigla dentro de um círculo. As técnicas que representaram um marco na história da computação bioinspirada são destacadas em negrito, enquanto os mais recentes algoritmos inspirados na natureza são representados em cinza claro. A Figura 1 também mostra um gráfico com o número de publicações relacionadas à EC e SI nas últimas duas décadas, onde se verifica o comportamento estável da EC nos últimos anos e o crescimento das publicações em SI (DEL SER *et al.*, 2019).

Observa-se na Figura 1 o algoritmo de Evolução Diferencial (DE), proposto por Price e Storn em 1995, e o algoritmo de Otimização por Borboletas Monarcas (do inglês *Monarch Butterfly Optimization*, MBO) proposto por Wang, Deb e Cui em 2015. Os algoritmos DE e MBO foram utilizados nesta tese.

A meta-heurística MBO é inspirada no movimento migratório da população das borboletas monarcas da América do Norte (Estados Unidos e Canadá) para o México no outono em sentido oposto na primavera (WANG; DEB; CUI, 2015).

A meta-heurística DE é um algoritmo evolutivo baseado em população que envolve as etapas de mutação diferencial, cruzamento e seleção (STORN; PRICE, 1997; QING, 2009). O algoritmo DE possui diversas características atraentes para sua utilização como uma ferramenta de otimização: é de fácil implementação, possui poucos parâmetros de controle (hiperparâmetros) e tem capacidade de lidar com funções não-lineares, não diferenciáveis e multimodais (DAS; SUGANTHAN, 2011). Diversas variantes do DE têm sido desenvolvidas visando melhorar o desempenho das meta-heurísticas na solução de problemas de otimização, como o algoritmo de evolução diferencial adaptativo denominado JADE (do inglês *J Adaptive Differential Evolution*) (ZHANG; SANDERSON, 2007; DAS; SULLICK; SUGANTHAN, 2016).

Figura 1 – Linha do tempo das técnicas de otimização bioinspiradas e gráfico de publicações relacionadas à EC e SI



Fonte: Del Ser *et al.* (2019).

A busca por novos métodos de otimização tem levado os pesquisadores a proporem técnicas inéditas ou a combinação de técnicas existentes, procedimento denominado hibridização. De acordo com Lozano e García-Martínez (2010), o projeto de meta-heurísticas híbridas utilizando algoritmos de busca especializados em busca local ou busca global possibilita obter uma meta-heurística que compartilhe as características de intensificação e diversificação do espaço de busca.

As aplicações das meta-heurísticas de otimização abordam diferentes áreas do conhecimento. Qin (2009) apresentou dezenas de aplicações apenas na área eletroeletrônica e, dentre elas, o projeto de filtros digitais. O projeto de filtros digitais continua uma área ativa em função das rápidas mudanças tecnológicas, tanto nas aplicações finais, como em telefonia móvel e internet, quanto nas soluções embarcadas para implementação de filtro.

## 1.1 Tema

A busca constante por soluções de engenharia que minimizem tempo e custo, de um processo ou produto, impulsiona a pesquisa e o desenvolvimento de algoritmos de otimização, especialmente os estocásticos, como as meta-heurísticas.

As meta-heurísticas híbridas utilizam a combinação de meta-heurísticas existentes visando utilizar as potencialidades individuais para se alcançar um desempenho melhor, em termos de convergência e qualidade de solução, que apenas uma delas aplicada a determinado problema (LINDEN, 2008).

A hibridização de meta-heurísticas com fins de aplicação em projeto de filtros digitais não recursivos é o tema desta tese.

## 1.2 Objetivos

Nesta seção são mencionados o objetivo geral desta tese e em seguida são descritos seus objetivos específicos.

### 1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desta tese é propor uma nova meta-heurística híbrida para otimização mono-objetivo aplicada ao projeto de filtros digitais de resposta ao impulso finita (do inglês *Finite-Duration Impulse Response*, FIR).

### 1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos desta tese são:

- a) selecionar duas meta-heurísticas populacionais de diferentes abordagens, a partir do mapeamento sistemático da literatura, para a hibridização das mesmas;
- b) implementar o algoritmo híbrido combinando operadores das duas meta-heurísticas selecionadas;
- c) comparar o desempenho do algoritmo proposto com um conjunto de algoritmos selecionados utilizando gráficos de convergência, medidas descritivas e métodos não paramétricos de inferência estatística;

- d) realizar o projeto de filtros digitais FIR de fase linear passa-alta, passa-baixa, passa-faixa e rejeita-faixa utilizando o algoritmo proposto.

### 1.2.3 Contribuições da Tese

Para a implementação do novo algoritmo híbrido, os algoritmos selecionados a partir do mapeamento sistemático da literatura foram o MBO e o JADE. Dentre os algoritmos de inspiração natural consultados, existe um número relativamente menor de trabalhos sobre o MBO, tanto em aplicações quanto em variantes propostas. No caso do JADE, trata-se de um algoritmo de evolução diferencial adaptativo bem-sucedido que tem gerado novas implementações e aplicações.

Como principais contribuições desta tese destacam-se a implementação de um novo algoritmo híbrido, denominado JMBO, a avaliação estatística de desempenho dos algoritmos por diferentes testes de hipóteses não paramétricos e o emprego do algoritmo proposto no projeto de filtros digitais FIR de fase linear.

## 1.3 Justificativa

O desenvolvimento de meta-heurísticas de otimização é um procedimento empírico, muitas vezes orientado pelo modelo de um processo ou comportamento natural. Uma abordagem para se obter uma nova meta-heurística consiste em combinar as características de meta-heurísticas existentes. Tal combinação tem como objetivo obter algoritmos que explorem as potencialidades de cada uma das meta-heurísticas originais tendo em vista a aplicação em determinado tipo de problema. Estes algoritmos são denominados algoritmos meta-heurísticos híbridos.

O mapeamento sistemático da literatura indicou que a meta-heurística MBO apresenta um potencial a ser investigado. As variantes do MBO propostas por Wang, Zhao e Deb (2015), Faris, Aljarah e Mirjalili (2017) e Strumberger *et al.* (2018b) relataram que o operador de ajuste da borboleta é deficiente por apresentar convergência lenta, rápida estagnação em mínimos locais (no caso de problemas de minimização) e tempo de processamento relativamente alto. Em Strumberger *et al.* (2018b) o procedimento de hibridização realizado consistiu na substituição completa do operador de ajuste da borboleta pela equação de busca da meta-heurística FA. Esta equação de busca é apresentada por Yang (2010b).

## 1.4 Metodologia da Pesquisa

O método de pesquisa adotado caracteriza-se como sendo de natureza aplicada, possuindo uma abordagem quantitativa.

Segundo Silva e Menezes (2005) e Appolinário (2012), uma pesquisa pode ser classificada como básica ou aplicada. A pesquisa aplicada objetiva gerar conhecimentos dirigidos à solução de problemas específicos. Uma pesquisa com abordagem quantitativa é focada em análises numéricas e utiliza análises estatísticas e computacionais (GIL, 2002).

Ainda, de acordo com seus objetivos, pode ser classificada como pesquisa exploratória, onde se deseja obter melhor conhecimento e aprofundamento da situação a ser pesquisada (SILVA e MENEZES, 2005). Segundo Oliveira (1999), este tipo de pesquisa desenvolve estudos que permitem uma visão geral do fato ou fenômeno estudado através da delimitação do estudo, levantamento bibliográfico, leitura e análise de documentos.

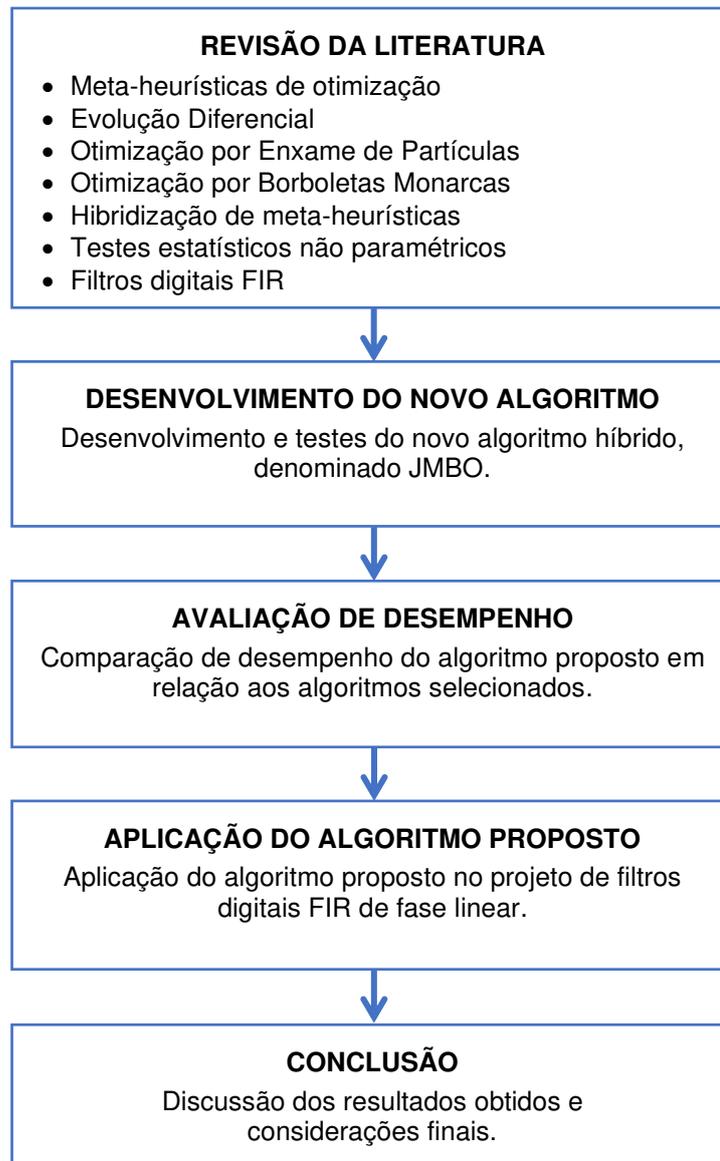
Alinhada com os objetivos da tese, levantou-se a seguinte hipótese: “um algoritmo híbrido que combine os algoritmos MBO e JADE é capaz de melhorar o desempenho do algoritmo MBO”.

A Figura 2 apresenta a sequência metodológica desta pesquisa, cujo objetivo principal foi o desenvolvimento de uma nova meta-heurística híbrida para otimização mono-objetivo aplicada ao projeto de filtros digitais FIR.

A etapa inicial consistiu na revisão da literatura sobre meta-heurísticas, métodos de avaliação de desempenho de algoritmos de otimização e filtros digitais FIR. Na revisão das meta-heurísticas são apresentados os principais conceitos de Evolução Diferencial, Otimização por Enxame de Partículas, Otimização por Borboletas Monarcas e hibridização de meta-heurísticas.

Após esta revisão foi apresentado o novo algoritmo híbrido obtido com a combinação dos algoritmos MBO e JADE. Em seguida o JMBO foi testado e seu desempenho comparado com um conjunto de algoritmos selecionados.

Figura 2 – Sequência metodológica da pesquisa



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 1.5 Estrutura do Documento

A tese está organizada em capítulos. O Capítulo 1 apresentou uma introdução à esta tese, seguida pelo tema, objetivos, contribuições, justificativas e metodologia da pesquisa. No Capítulo 2 são apresentados conceitos gerais sobre otimização, meta-heurísticas, algoritmos evolutivos, Evolução Diferencial, Otimização por Enxame de Partículas, Otimização por Borboletas Monarcas e hibridização de meta-heurísticas. No Capítulo 3 são abordados aspectos fundamentais sobre avaliação de desempenho de algoritmos de otimização, inferência estatística, teste de Friedman e

testes de comparações múltiplas. No Capítulo 4 são expressas a terminologia e a formulação de filtros digitais. Após, no Capítulo 5 são apresentadas a revisão sistemática da literatura sobre aplicações de meta-heurísticas no projeto de filtros digitais, a metodologia de desenvolvimento do algoritmo proposto e a proposta de avaliação de desempenho. O Capítulo 6 apresenta os resultados desta tese: o algoritmo proposto, a análise dos resultados das comparações entre o JMBO e outros algoritmos de otimização, e a aplicação do JMBO no projeto de filtros digitais FIR de fase linear. O Capítulo 7 inclui as considerações finais.

## 2 OTIMIZAÇÃO E META-HEURÍSTICAS

Este capítulo apresenta a revisão da literatura, abordando os fundamentos e desenvolvimentos sobre otimização, complexidade de algoritmos e de problemas, meta-heurísticas, algoritmos evolutivos, teorema *no free lunch*, hibridização de meta-heurísticas, evolução diferencial, otimização por enxame de partículas e otimização por borboletas monarcas.

### 2.1 Otimização

A teoria da otimização tem como objetivo determinar soluções para certa classe de problemas e desenvolver algoritmos eficazes que permitam determiná-las. Um problema de otimização contínua mono-objetivo visa determinar o valor mínimo ou o valor máximo de uma função, geralmente denominada de função objetivo ou função custo, definida sobre um certo domínio (RAO, 2009; LUKE, 2015).

A função objetivo possui parâmetros de entrada, denominados de variáveis de entrada, independentes ou de decisão, e parâmetros de saída, denominados de variáveis de saída ou dependentes. As variáveis de entrada determinam a dimensão do problema. Um problema mono-objetivo possui um único valor de saída da função objetivo, enquanto um problema com múltiplos objetivos (multiobjetivo) possui múltiplos valores de saída da função objetivo. Além disso, os problemas, se de otimização restrita, podem apresentar restrições de igualdade ou desigualdade que devem ser calculadas durante a execução da otimização (IZMAILOV; SOLODOV, 2005).

Um problema pode ser de minimização ou de maximização dependendo da natureza da função objetivo. Todo problema de maximização pode ser transformado em um problema de minimização equivalente. As soluções globais e locais de ambos os problemas possuem os mesmos valores ótimos, porém com sinais opostos. Os resultados obtidos para uma podem ser estendidos para a outra, sem dificuldades (IZMAILOV; SOLODOV, 2005).

Em geral, os algoritmos de otimização podem ser divididos em duas categorias: algoritmos determinísticos e algoritmos estocásticos (probabilísticos ou não determinísticos) (YANG, 2010a).

Um algoritmo de otimização determinístico sempre obtém a mesma solução com o mesmo número de avaliações da função objetivo independentemente do momento em que é iniciado, desde que o espaço de pesquisa, o ponto (solução) inicial e as condições de finalização não sejam alterados (QING, 2009). A maioria dos algoritmos clássicos, convencionais ou exatos utiliza métodos de otimização determinísticos. Métodos exatos, tais como os algoritmos de programação linear e programação dinâmica, obtêm soluções ótimas para problemas de otimização convexa (TALBI, 2009).

Alguns algoritmos de otimização determinísticos usam as informações de gradiente, chamados de algoritmos baseados em informação do gradiente, requerendo o uso de pelo menos a primeira derivada da função objetivo em relação às variáveis de projeto. Nestes métodos, a função objetivo e as restrições são dadas como funções matemáticas, e a função objetivo deve ser contínua e diferenciável no espaço de busca. A solução encontrada pelos algoritmos determinísticos depende do ponto de partida fornecido, o que pode levar à convergência para um ótimo local, e por isso não possuem desempenho apropriado em otimizar funções que possuem vários ótimos locais (RAO, 2009; YANG, 2010a).

A otimização estocástica é a classe geral de algoritmos e técnicas que empregam algum grau de aleatoriedade para encontrar soluções para problemas complexos tão próximas das soluções ótimas quanto possível (LUKE, 2015). Os resultados obtidos a partir de um algoritmo de otimização estocástica são geralmente imprevisíveis devido à aleatoriedade (QING, 2009). Os métodos aproximados geram soluções de alta qualidade em um tempo razoável para uso prático, mas não existe garantia de que encontrem uma solução global ótima (TALBI, 2009).

De acordo com a complexidade do problema, este pode ser resolvido por um método exato ou por um método aproximado. Os métodos exatos de otimização para a solução de muitos problemas reais podem ser inviáveis quanto ao tempo de processamento ou quanto à complexidade do problema, como no caso de problemas NP-difíceis (do inglês *Nondeterministic Polynomial*) (GLOVER; KOCHENBERGER, 2003; DU; SWAMY, 2016).

## 2.2 Complexidade de Algoritmos e de Problemas

A complexidade temporal de um algoritmo é o número de etapas necessárias para resolver um problema de tamanho  $n$ . A complexidade é geralmente definida nos termos da análise do pior caso. O objetivo na determinação da complexidade computacional de um algoritmo não é obter uma contagem exata de etapas, mas um limite assintótico na contagem de etapas.

Um algoritmo é de tempo polinomial se a sua complexidade é  $O(p(n))$ , em que  $p(n)$  é uma função polinomial de grau  $k$  de um problema com entrada de tamanho  $n$ . O algoritmo correspondente possui uma complexidade polinomial de  $O(n^k)$ . Um algoritmo é de tempo exponencial se sua complexidade é  $O(c^n)$ , em que  $c$  é uma constante real maior que 1 e  $n$  é o tamanho da entrada (TALBI, 2009; DU; SWAMY, 2016).

A complexidade de um problema é equivalente à complexidade do melhor algoritmo para resolver tal problema. Um problema é dito tratável (ou fácil) se existir um algoritmo de tempo polinomial para resolvê-lo. Um problema é dito intratável (ou difícil) se apenas os algoritmos de tempo exponencial são conhecidos, ou seja, se não existir um algoritmo de tempo polinomial para resolvê-lo. Um problema tratável pode ser solucionado por um computador em um tempo aceitável (DE CASTRO, 2007).

A classe P, que significa complexidade de tempo polinomial, é definida como o conjunto de problemas que podem ser resolvidos por uma máquina de Turing determinística usando um algoritmo de tempo polinomial (DU; SWAMY, 2016).

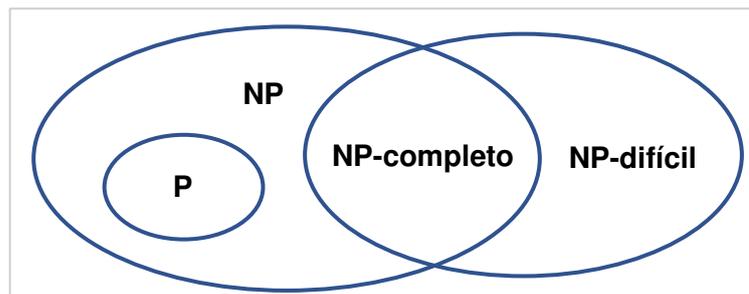
A classe NP, que significa complexidade de tempo polinomial não determinístico, é o conjunto de todos os problemas que podem ser verificados em tempo polinomial em uma máquina de Turing não determinística (DU; SWAMY, 2016) ou que podem ser resolvidos por um algoritmo não determinístico em tempo polinomial (DE CASTRO, 2007). Para estes problemas, o algoritmo gera uma solução candidata e verifica sua viabilidade em tempo polinomial. Todos os problemas em P também pertencem à classe NP, isto é,  $P \subseteq NP$ . Há também problemas cujas soluções corretas não podem ser verificadas em tempo polinomial.

Todos os problemas em P são tratáveis. Não existem algoritmos de tempo polinomial para os problemas que estão em NP, mas não estão em P. Um problema é considerado NP-difícil se necessita de um algoritmo de tempo exponencial e se um algoritmo para resolver este problema pode ser reduzido para outro algoritmo em

tempo polinomial capaz de resolver qualquer problema em NP. Portanto, problemas NP-difíceis são pelo menos tão difíceis quanto os problemas mais difíceis em NP e não precisam estar em NP (YANG, 2010c; DU; SWAMY, 2016).

O conjunto de problemas NP-completos é um subconjunto de NP. Um problema é NP-completo se for um problema NP-difícil e estiver em NP (YANG, 2010c). Problemas NP-completos são os problemas mais difíceis em NP. Eles são difíceis pois não são conhecidos algoritmos de tempo polinomial. Os problemas que não estão em NP são ainda mais difíceis. A classe NP-completo possui a característica de que se um problema NP-completo puder ser resolvido em tempo polinomial, todos os problemas da classe NP poderão ser resolvidos em tempo polinomial. A Figura 3 apresenta o relacionamento entre as classes P, NP, NP-completo e NP-difícil (TALBI, 2009; DU; SWAMY, 2016).

Figura 3 – Classes P, NP, NP-completo e NP-difícil



Fonte: Adaptado de Du e Swamy (2016).

De acordo com Yang (2010c), muitos problemas de otimização reais são NP-difíceis para os quais não existem algoritmos comprovadamente eficientes. Estes problemas necessitam de tempo exponencial (a menos que  $P = NP$ ) para a obtenção da solução ótima. As meta-heurísticas constituem uma alternativa importante para resolver esta classe de problemas.

### 2.3 Meta-heurísticas

Conforme Talbi (2009), a palavra heurística tem sua origem na palavra grega *heuriskein*, que significa a arte de descobrir novas estratégias (regras) para resolver problemas. Heurística refere-se a técnicas baseadas na experiência para resolução de problemas e aprendizado. Uma heurística de otimização pode ser determinística ou estocástica.

O prefixo *meta* também é uma palavra grega que significa “metodologia de nível superior”. O termo meta-heurística foi introduzido por Glover (1986) para se referir a um conjunto de metodologias conceitualmente classificadas acima das heurísticas no sentido de que elas podem ser usadas como estratégias de orientação na concepção de heurísticas subjacentes (DU; SWAMY, 2016).

De acordo com Glover e Kochenberger (2003), as meta-heurísticas, em sua definição original, são métodos de solução que coordenam a interação entre procedimentos de busca locais e estratégias de mais alto nível para criar um processo capaz de escapar dos ótimos locais e realizar uma busca robusta no espaço de solução de um problema. Posteriormente esses métodos passaram a incluir quaisquer procedimentos que empreguem estratégias para escapar dos ótimos locais em espaços de busca de soluções complexas, especialmente aqueles que utilizam o conceito de vizinhança para estabelecer meios de evitar ótimos locais.

De acordo com Yang (2010c), existem várias definições para heurística e meta-heurística, no entanto muitos autores denominam os algoritmos estocásticos que empregam aleatoriedade e pesquisa global como meta-heurísticos. Conforme Simon (2013), as heurísticas são aquelas que se utilizam de regras e senso comum para a resolução de problemas. Usualmente espera-se que a solução encontrada seja próxima o suficiente da melhor, mas não que os algoritmos encontrem a melhor solução para determinado problema.

Conforme apresentado por Luke (2015), as meta-heurísticas são algoritmos aplicados para encontrar respostas para problemas sobre os quais existem poucas informações, ou seja, quando não se sabe de antemão como é a solução ótima, existe pouca informação heurística disponível e a busca por força bruta é desconsiderada pois o espaço de solução é vasto. Porém, se uma solução candidata ao problema for dada, esta pode ser testada e sua otimalidade avaliada.

Segundo Du e Swamy (2016), uma meta-heurística é um procedimento de alto nível desenvolvido para localizar, gerar ou selecionar um procedimento de baixo nível (algoritmo de pesquisa parcial) que pode fornecer uma solução suficientemente boa para um problema de otimização. Ao pesquisar sobre um grande conjunto de soluções viáveis, as meta-heurísticas geralmente encontram boas soluções com menor esforço computacional que os métodos matemáticos ou heurísticos simples.

Salcedo-Sanz (2016) apresenta que, diferentemente dos métodos exatos, os quais garantem uma solução ótima para o problema de otimização, os métodos

aproximados ou heurísticos tentam obter soluções suficientemente boas para um determinado problema de otimização a um custo computacional razoável, mas sem garantir que a solução ótima seja obtida.

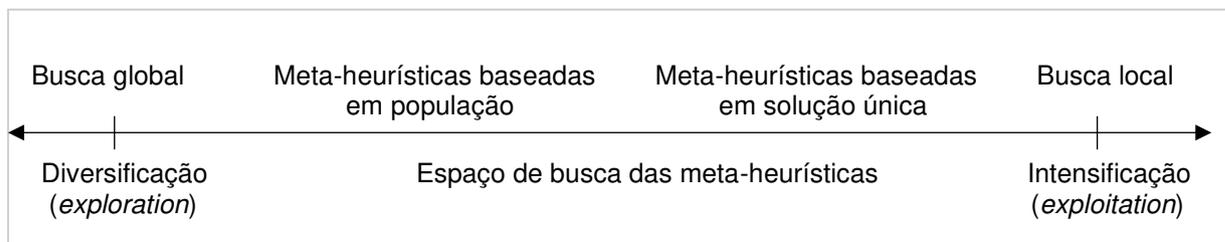
Existem diferentes classificações das meta-heurísticas na literatura. As classificações a seguir são dadas por Talbi (2009), Du e Swamy (2016), Salcedo-Sanz (2016), Hussain *et al.* (2019) e Bilal *et al.* (2020):

- a) Inspiradas na natureza ou não inspiradas na natureza – existem algoritmos inspirados na natureza, tais como os algoritmos de EC e SI, e algoritmos não inspirados na natureza, como TS, SA e HS.
- b) Baseadas em memória ou métodos sem memória – nos algoritmos sem memória nenhuma informação extraída dinamicamente é utilizada durante a busca e as informações que eles usam para determinar a próxima ação é o estado atual do processo de pesquisa. Um exemplo de algoritmo sem memória é o SA. Atualmente, o uso da memória é reconhecido como um dos elementos fundamentais de uma poderosa meta-heurística. Os algoritmos com memória usam uma memória que contém informações extraídas durante a pesquisa, tais como as memórias de curto e de longo prazo, no caso do algoritmo TS.
- c) Baseadas em solução única ou baseadas em população – algoritmos baseados em solução única (como o SA) manipulam e transformam uma única solução durante a pesquisa, enquanto nos algoritmos baseados em população (por exemplo, os Algoritmos Evolutivos) toda uma população de soluções é avaliada. Geralmente, algoritmos que funcionam em solução única são denominados métodos de trajetória pois o processo de pesquisa descreve uma trajetória no espaço de pesquisa.
- d) Intensificação ou diversificação – as meta-heurísticas baseadas em solução única possuem o poder de realizar exploração focada, busca em profundidade ou intensificação (do inglês *exploitation*) da busca nas regiões locais. As meta-heurísticas baseadas em população permitem uma melhor diversificação (do inglês *exploration*) ou exploração global em todo o espaço de busca. A diversificação é a capacidade de expandir a busca em diferentes regiões do espaço de busca, enquanto a intensificação utiliza a experiência acumulada de busca e realiza a procura em regiões próximas daquelas em que soluções foram obtidas anteriormente.

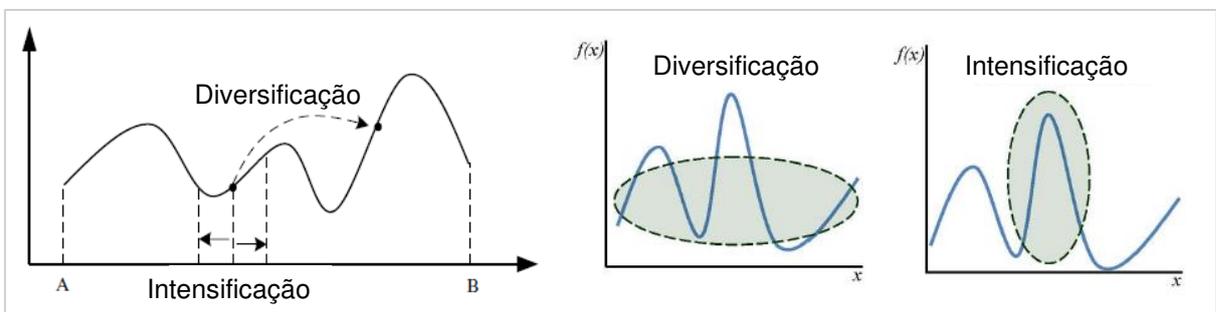
e) Busca local ou busca global – algoritmos de otimização de busca local (ou baseados em vizinhança) geralmente são métodos que realizam mais a intensificação, como o algoritmo TS. Os métodos de busca global são métodos que utilizam mais a diversificação, como é o caso do GA. Existem métodos híbridos que utilizam a capacidade de intensificação dos algoritmos de busca local como um mecanismo de melhoria das meta-heurísticas baseadas em população ou de busca global.

Um algoritmo de busca deve encontrar um equilíbrio entre a intensificação (busca local) e a diversificação (busca global) (NESMACHNOW, 2014). Blum e Roli (2008) definem um componente de intensificação e diversificação como qualquer componente algorítmico ou funcional que possua efeito de intensificação ou diversificação no processo de busca. De acordo com Lozano e García-Martínez (2010), a maioria das meta-heurísticas clássicas apresenta características especializadas em intensificação ou diversificação. A Figura 4 (a) apresenta a diversificação e a intensificação no espaço de busca das meta-heurísticas, enquanto a Figura 4 (b) ilustra essas operações.

Figura 4 – Diversificação e intensificação: (a) critérios utilizados no espaço de busca de meta-heurísticas, (b) representações gráficas



(a)



(b)

Fonte: Adaptado de Talbi (2009), Nesmachnow (2014).

As meta-heurísticas possuem como características principais: simplicidade, flexibilidade, não requerem derivação e possuem mecanismos para evitar ótimos

locais. As meta-heurísticas podem ser aplicadas na solução de problemas complexos, incluindo problemas não lineares, não convexos, multimodais, não uniformes e NP-difíceis.

É extenso o número de trabalhos científicos e acadêmicos que apresentaram revisões bibliográficas, tutoriais, aplicações, desenvolvimentos e comparações envolvendo meta-heurísticas. Boussaïd, Lepagnot e Siarry (2013) descreveram os princípios, as semelhanças e as diferenças de 6 meta-heurísticas baseadas em solução única e 15 baseadas em população, bem como suas variantes. Valadi e Siarry (2014) editaram um livro com aplicações das meta-heurísticas GA, GP, PSO, ABC, ACO, Otimização Baseada em Biogeografia (do inglês *Biogeography Based Optimization*, BBO), *Artificial Chemical Kinetics* (ACK) e DE em engenharia de processos.

Vasconcelos Segundo *et al.* (2014) aprimoraram a meta-heurística inspirada na natureza *Wind Driven Optimization* (WDO) usando voos de Lévy (WDOLE) e a aplicaram em problemas de otimização global no domínio contínuo. Xing e Gao (2014) apresentaram 134 novos algoritmos, sendo 99 baseados em biologia, 28 em física, 5 em química e 2 em matemática. Feitosa Neto (2016) aplicou meta-heurísticas de otimização tradicionais e híbridas na construção de comitês de classificação. Kar (2016) apresentou 12 algoritmos com inspiração biológica e seus princípios, desenvolvimentos e aplicações, bem como identificou outros algoritmos com inspiração biológica com possibilidade para futuros desenvolvimentos.

Salcedo-Sanz (2016) descreveu diversas meta-heurísticas baseadas em processos físicos não lineares, apresentou áreas de aplicação das meta-heurísticas e indicou programas gratuitos que podem ser usados para implementação das meta-heurísticas. Akiol e Alatas (2017) apresentaram as propriedades e as etapas básicas de 13 algoritmos de otimização meta-heurísticos baseados na inteligência das plantas, como o Algoritmo de Polinização de Flores (do inglês *Flower Pollination Algorithm*, FPA) e o Algoritmo de Colonização das Ervas Daninhas (do inglês *Invasive Weed Optimization*, IWO).

Em Piotrowski *et al.* (2017), 33 meta-heurísticas propostas entre 1960 e 2016 foram testadas em 22 problemas de diferentes áreas com o número máximo de chamadas das funções variando entre 5.000 e 500.000. Eles verificaram uma forte relação entre o desempenho relativo das meta-heurísticas e o número de chamadas das funções, sendo que os algoritmos que obtiveram melhores resultados nas

comparações quando o custo computacional é baixo estão entre aqueles com pior desempenho quando o custo computacional é alto e vice-versa. Rajpurohit *et al.* (2017) apresentaram 176 meta-heurísticas desenvolvidas entre 1961 e 2017, com uma breve descrição de cada método.

Hussain *et al.* (2019) discutiram sobre quatro dimensões da pesquisa em meta-heurísticas: introdução de novos algoritmos, modificações e hibridização, comparações e análises, lacunas nas pesquisas e tendências futuras. Del Ser *et al.* (2019) apresentaram informações sobre as meta-heurísticas bioinspiradas mais recentes, otimização dinâmica e estocástica, otimização multiobjetivo, otimização multimodal, otimização com modelos substitutos, otimização global em larga escala, topologias de meta-heurísticas, algoritmos evolutivos distribuídos, métodos *ensemble* e hiper-heurísticas, algoritmos meméticos, adaptação de parâmetros, referências e metodologias de comparação de algoritmos bioinspirados, aplicações de algoritmos bioinspirados e áreas com possibilidades de pesquisa.

Bennis e Bhattacharjya (2020) editaram um livro com conceitos e aplicações das meta-heurísticas inspiradas na natureza GA, DE, ABC, FA, PSO, Otimização por Cultura de Bactérias (do inglês *Bacterial Foraging Optimization*, BFO), BBO, Sistemas Imunológicos Artificiais (do inglês *Artificial Immune Systems*, AIS), IWO, Algoritmo por Embaralhamento de Salto de Sapos (do inglês *Shuffled Frog-Leaping Algorithm*, SFLA), Otimização Baseada em Ensino-Aprendizagem (do inglês *Teaching-Learning-Based Optimization*, TLBO), sistemas multiagentes (do inglês *Multi-Agent System*, MAS) e algoritmo *Branch and Bound*.

LaTorre *et al.* (2020) revisaram publicações sobre otimização com meta-heurísticas de inspiração biológica e apresentaram quatro diretrizes para serem levadas em consideração na proposta de um novo algoritmo. Essas diretrizes concentram-se na seleção de *benchmarks*, validação dos resultados utilizando análise estatística, análise dos componentes, ajuste dos parâmetros e discussão sobre a utilidade do algoritmo proposto. Lones (2020) revisou 32 algoritmos de otimização inspirados na natureza publicados desde o ano 2000 com mais de 200 citações, analisou os pontos comuns entre os algoritmos e constatou que poucos dos algoritmos introduzidos nos últimos 20 anos apresentaram conceitos fundamentalmente novos.

Molina *et al.* (2020) propuseram duas taxonomias para os algoritmos inspirados na natureza e bioinspirados. A primeira taxonomia proposta considera a fonte de inspiração classificando os algoritmos em: inspirados em inteligência de enxames

(animais aquáticos, animais terrestres, animais que voam, micro-organismos e outros), inspirados em diferentes comportamentos físicos ou reações químicas, inspirados no comportamento humano e social, nos princípios da evolução natural (do inglês *Breeding-based Evolution*) (por exemplo, GA, ES e DE), baseados em plantas e um grupo formado pelos algoritmos que são tão diferentes entre si que não podem ser agrupados em novas categorias. A segunda taxonomia agrupa os algoritmos em duas categorias em função do comportamento de cada algoritmo.

Morales-Castañeda *et al.* (2020) apresentaram uma análise experimental que avaliou quantitativamente o equilíbrio entre a diversificação e a intensificação das meta-heurísticas ABC, Algoritmo do Morcego (do inglês *Bat Algorithm*, BA), Estratégia Evolutiva com Adaptação da Matriz de Covariância (do inglês *Covariance Matrix Adaptation Evolution Strategies*, CMA-ES), Algoritmo de Busca Cuco (do inglês *Cuckoo Search Algorithm*, CSA), DE, FA, GWA, *Moth-Flame Optimization* (MFO), PSO, Otimizador das Aranhas Sociáveis (do inglês *Social Spiders Optimization*, SSO), TLBO e Algoritmo de Otimização da Baleia (do inglês *Whale Optimization Algorithm*, WOA). Os autores concluíram que, na maioria das 42 funções analisadas, o balanço que produziu os melhores resultados foi acima de 90% de intensificação e menos de 10% de diversificação.

## 2.4 Algoritmos Evolutivos

A Computação Evolutiva refere-se a métodos de solução de problemas baseados em computador que usam modelos computacionais de processos evolutivos, tais como seleção natural, sobrevivência dos indivíduos mais adaptados ao ambiente e reprodução, como componentes fundamentais desses métodos computacionais (ENGELBRECHT, 2007; SIMON, 2013; DAS; MULLICK; SUGANTHAN, 2016).

Os Algoritmos Evolutivos (EAs) são métodos de otimização e busca estocástica baseados nos princípios e modelos da evolução biológica natural. A natureza é a principal fonte de inspiração para novos métodos computacionais e a evolução fornece inspiração para a resolução de problemas complexos. Os princípios utilizados em EAs são baseados na teoria de evolução de Darwin, na qual indivíduos mais aptos prevalecem sobre indivíduos menos aptos ao ambiente, gerando um maior número de

filhos e mantendo suas características na população (DU; SWAMY, 2016; KELLER; LIU; FOGEL, 2016).

Os diversos modos pelos quais os componentes dos algoritmos evolutivos são implementados resultam em diferentes metodologias da computação evolutiva (ENGELBRECHT, 2007; SALCEDO-SANZ, 2016; DEL SER *et al.*, 2019), a saber:

- a) Algoritmos genéticos (do inglês *Genetic Algorithms*, GA): possuem procedimentos probabilísticos de busca baseados nos princípios decorrentes do processo biológico de evolução natural. Em genética, genótipo é a estrutura do cromossomo e fenótipo corresponde a interação do conteúdo genético com o ambiente. Nos algoritmos genéticos um indivíduo representa um cromossomo, o genótipo é a codificação da estrutura que é processada pelo algoritmo e o fenótipo é o conjunto de parâmetros do algoritmo.
- b) Programação genética (do inglês *Genetic Programming*, GP): baseada em algoritmos genéticos, onde indivíduos são programas de computador, principalmente na forma de árvores de decisão ou regressão, nas quais diferentes funções são combinadas por meio de um processo de evolução.
- c) Programação evolutiva (do inglês *Evolutionary Programming*, EP): é uma técnica de simulação do comportamento adaptativo na evolução (evolução dos fenótipos), sendo que cada indivíduo da população é representado por uma máquina de estados finitos que processa uma sequência de símbolos.
- d) Estratégias evolutivas (do inglês *Evolutionary Strategies*, ES): são voltadas para modelar os parâmetros estratégicos que controlam a variação na evolução, sendo que o principal operador básico de evolução é a mutação.
- e) Evolução diferencial (do inglês *Differential Evolution*, DE): é semelhante aos algoritmos genéticos, diferindo no mecanismo de reprodução usado e que introduz um mecanismo diferencial para explorar o espaço de busca.
- f) Evolução cultural (do inglês *Cultural Evolution*): modela a evolução da cultura de uma população e como a cultura influencia a evolução genética e dos fenótipos dos indivíduos.
- g) Coevolução (do inglês *Coevolution*): onde indivíduos inicialmente menos aptos evoluem por meio da cooperação, ou em competição entre si, adquirindo as características necessárias para sobreviver.

Apesar da variedade de modelos computacionais propostos, os EAs possuem em comum o conceito de simulação da evolução das espécies por meio da seleção, mutação e reprodução, processos estes que dependem do desempenho dos indivíduos da espécie dentro do ambiente. Os conceitos comuns aos EAs são (BÄCK; FOGEL; MICHALEWICZ, 1997; LINDEN, 2008; SALCEDO-SANZ, 2016):

- a) Os EAs utilizam o processo de aprendizado coletivo de uma população de indivíduos. Geralmente, cada indivíduo representa (ou codifica) um ponto de pesquisa (solução) no espaço de possíveis soluções para um determinado problema. Além disso, os indivíduos também podem incorporar mais informações, como por exemplo, parâmetros de estratégia do algoritmo evolutivo.
- b) Descendentes de indivíduos são gerados por processos aleatórios destinados a modelar a mutação e a recombinação ou cruzamento. A mutação causa modificações em certos indivíduos da população (normalmente, pequenas modificações são mais prováveis que as grandes), que ajudam o algoritmo a escapar dos ótimos locais durante a evolução. O operador de cruzamento é aplicado para gerar novas soluções a partir de pares de indivíduos existentes na população. A Figura 5 apresenta um exemplo de operador de cruzamento com dois pontos de cruzamento e um exemplo de operador de mutação para um algoritmo genético com representação inteira (SALCEDO-SANZ, 2016).
- c) Por meio da avaliação de indivíduos em seu ambiente, uma medida de qualidade ou valor de adequação como solução do problema em questão pode ser atribuída aos indivíduos. Como requisito mínimo é possível uma comparação da aptidão individual, produzindo uma decisão binária (melhor ou pior). De acordo com a medida de adequação, o processo de seleção favorece que indivíduos melhores se reproduzam com maior frequência que aqueles que são relativamente piores.

O procedimento básico de um EA inclui as seguintes operações (EIBEN; SMITH, 2003; SALCEDO-SANZ, 2016):

- a) geração da população inicial de soluções;
- b) avaliação da função objetivo;

- c) aplicação do operador de seleção que visa selecionar os indivíduos mais aptos que farão parte da população para a próxima geração, de acordo com uma estratégia de seleção;
- d) aplicação do operador de recombinação ou cruzamento para gerar novas soluções a partir de pares de indivíduos existentes na população;
- e) aplicação do operador de mutação que causa mudanças em certos indivíduos da população, auxiliando o algoritmo a escapar dos ótimos locais durante a evolução;
- f) geração de uma nova população de soluções candidatas.

Figura 5 – Exemplo de (a) operador de cruzamento com dois pontos de cruzamento e (b) operador de mutação em um EA



Fonte: Adaptado de Salcedo-Sanz (2016).

Sobre a população inicial, normalmente ela é gerada aleatoriamente, mas pode ser produzida por outro procedimento, como inicialização heurística, diversificação sequencial ou diversificação paralela. Em relação aos critérios de parada, além daqueles adotados para as meta-heurísticas de solução única, tais como o número máximo de iterações ou a estagnação da solução (quando a solução encontrada não é melhorada após um determinado número de iterações), outros critérios podem ser definidos para as meta-heurísticas populacionais com base em estatísticas da população (por exemplo, a diversidade populacional) ou na evolução de uma população (TALBI, 2009).

Os EAs são aplicados com sucesso a muitos problemas reais e complexos, como em problemas NP-completos, multimodais, com múltiplos objetivos, com condições ruidosas ou altamente restritos. Os EAs não necessitam do conhecimento das características do problema de otimização e não dependem de certas propriedades da função objetivo, tais como convexidade ou diferenciabilidade (LINDEN, 2008; TALBI, 2009; KELLER; LIU; FOGEL, 2016). Slowik e Kwasnicka (2020) apresentaram as principais propriedades dos algoritmos evolutivos (GA, GP, DE, ES e EP), variantes destes métodos evolutivos, aplicações práticas e possibilidades de pesquisas. Os autores selecionaram 46 algoritmos das famílias GA, GP e DE e 24 algoritmos das famílias ES e EP.

## **2.5 Teorema *No Free Lunch***

O teorema “sem almoço grátis” (do inglês *no free lunch*, NFL) de Wolpert e Macready (1997) afirma que, se um algoritmo apresenta um bom desempenho com determinada classe de problemas, terá necessariamente um desempenho inferior em outras classes de problemas.

Não existe algoritmo para a resolução de todos os problemas de otimização que seja sempre superior a outro algoritmo, ou seja, é impossível desenvolver uma estratégia de otimização que seja de uso universal (HO; PEPYNE, 2002).

Baseado no teorema NFL, pode-se somente afirmar que se um algoritmo apresenta desempenho superior a outros algoritmos na solução de algumas classes de problemas, deve apresentar desempenho inferior para outras classes de problemas. Conforme Salcedo-Sanz (2016), o teorema NFL é a razão pela qual existem tantas meta-heurísticas para otimização global pois, dependendo da estrutura da meta-heurística, alguma será adequada para uma classe de problemas de otimização e apresentará desempenho inferior em outras classes de problemas de otimização.

O teorema NFL pode ser confirmado pela análise dos EAs em relação a métodos exatos de otimização. Os métodos exatos de otimização são mais eficientes para a resolução de problemas lineares, quadráticos, fortemente convexos, unimodais e separáveis. Os EAs apresentam desempenho aceitável principalmente em problemas que são descontínuos, não diferenciáveis, multimodais, ruidosos e quando

superfícies de resposta não convencionais estão envolvidas (BÄCK; FOGEL; MICHALEWICZ, 1997).

Como consequência do NFL, a única maneira de um algoritmo superar outro é projetando o algoritmo especificamente para a resolução de um problema (HO; PEPYNE, 2002).

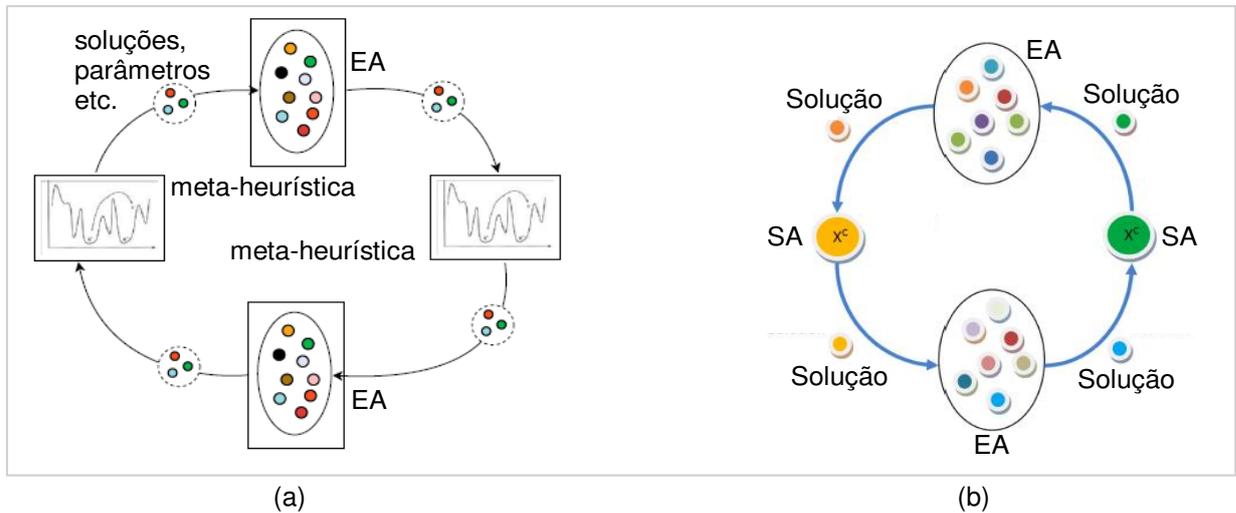
## **2.6 Hibridização de Meta-heurísticas**

Existem muitas técnicas de otimização local e global bem estabelecidas que podem colaborar entre si e com novas técnicas para se alcançar um desempenho melhor que apenas uma delas aplicada a determinado problema. Cada método possui pontos fortes e fracos que, uma vez identificados, podem ser combinados para se conseguir soluções melhores (LINDEN, 2008). A combinação de uma meta-heurística com outras técnicas de otimização é denominada meta-heurística híbrida ou hibridização de meta-heurísticas.

Conforme Blum e Roli (2008), em geral as abordagens meta-heurísticas híbridas podem ser classificadas como combinações colaborativas ou combinações integrativas. As combinações colaborativas são baseadas na troca de informações entre diferentes meta-heurísticas, e possivelmente outras técnicas de otimização, executadas sequencialmente ou em paralelo. A Figura 6 apresenta meta-heurísticas híbridas colaborativas, onde na Figura 6 (a) tem-se uma meta-heurística híbrida obtida com EAs independentes que trocam informações sobre o processo de busca (soluções, parâmetros etc.) (LOZANO; GARCÍA-MARTÍNEZ, 2010) e na Figura 6 (b), um exemplo de meta-heurística híbrida obtida com múltiplos EAs e SAs executando em paralelo (RODRIGUEZ; GARCÍA-MARTÍNEZ; LOZANO, 2012).

As combinações integrativas são baseadas na integração dos conceitos relacionados a diferentes técnicas de otimização, ou seja, uma meta-heurística (subordinada) se torna um componente de outra meta-heurística (mestre). Nas combinações integrativas, a meta-heurística híbrida pode ser resultante da combinação de duas ou mais meta-heurísticas ou da combinação de uma meta-heurística com outras técnicas da área de pesquisa operacional ou inteligência artificial, tais como a programação inteira e técnicas de mineração de dados (TALBI, 2002; LOZANO; GARCÍA-MARTÍNEZ, 2010; QING, 2009).

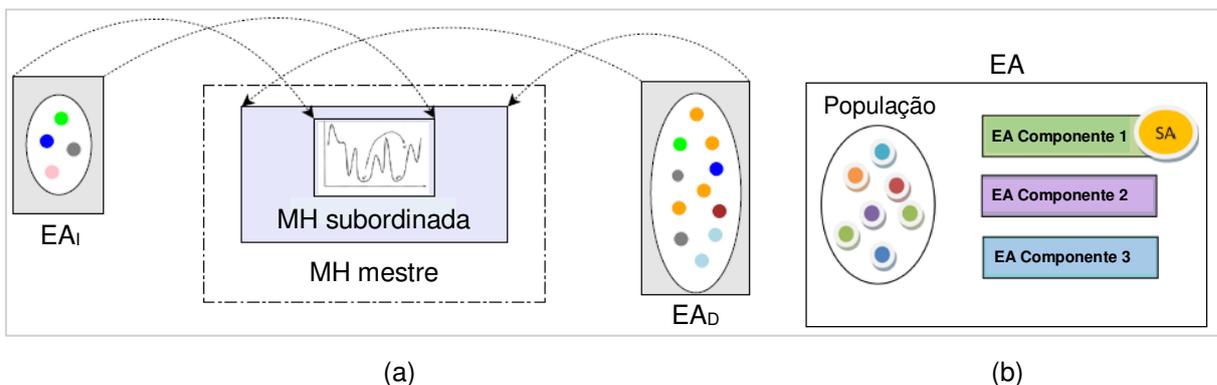
Figura 6 – Meta-heurísticas híbridas colaborativas: (a) EAs independentes que trocam informações sobre o processo de busca, (b) múltiplos EAs e SAs sendo executados em paralelo



Fonte: Adaptado de Lozano e García-Martínez (2010); Rodriguez, García-Martínez e Lozano (2012).

A Figura 7 ilustra dois exemplos de meta-heurísticas híbridas integrativas. Na Figura 7 (a) tem-se uma meta-heurística híbrida onde a busca global é realizada por um EA especializado em diversificação ( $EA_D$ ) e a tarefa de refinar as soluções é realizada por um EA especializado em intensificação ( $EA_I$ ) (LOZANO; GARCÍA-MARTÍNEZ, 2010). A Figura 7 (b) apresenta um exemplo de meta-heurística híbrida onde componentes do EA usam princípios do SA (RODRIGUEZ; GARCÍA-MARTÍNEZ; LOZANO, 2012).

Figura 7 – Meta-heurísticas híbridas integrativas: (a) utilizando um  $EA_D$  e um  $EA_I$ , (b) componente do EA adotando princípios do SA



Fonte: Adaptado de Lozano e García-Martínez (2010); Rodriguez, García-Martínez e Lozano (2012).

Existem várias publicações que fornecem taxonomias para meta-heurísticas híbridas ou subcategorias específicas. Talbi (2002, 2009) propôs uma taxonomia para meta-heurísticas híbridas visando fornecer uma terminologia comum e mecanismos de classificação. Com base em várias taxonomias de meta-heurísticas híbridas sugeridas anteriormente na literatura, Raidl (2006) apresentou uma classificação e uma visão unificada sobre meta-heurísticas híbridas. Ele também reuniu informações sobre os principais componentes de 15 meta-heurísticas e mostrou como combiná-los para obter uma meta-heurística híbrida eficaz, adaptada às características específicas dos problemas em questão. Raidl (2006) apresentou ainda possibilidades de combinação de meta-heurísticas com programação por restrições e com programação linear inteira.

Jourdan, Basseur e Talbi (2009) apresentaram uma extensão do trabalho de Talbi (2002) para a cooperação entre meta-heurísticas e algoritmos exatos, tais como o algoritmo *Branch and Bound*, a programação linear e a programação dinâmica. Lozano e García-Martínez (2010) mostraram uma visão geral das meta-heurísticas híbridas com algoritmos evolutivos especializados em intensificação e diversificação. Blum *et al.* (2011) realizaram a hibridização de meta-heurísticas com meta-heurísticas e com técnicas de otimização combinatória (programação por restrição, técnicas de busca em árvores e programação dinâmica).

Rodríguez, García-Martínez e Lozano (2012) forneceram um panorama de diferentes combinações entre Algoritmos Evolutivos e *Simulated Annealing* para a obtenção de meta-heurísticas híbridas, denominadas HMs-EA/SA, propuseram uma taxonomia baseada nas propostas de Talbi (2002) e Raidl (2006), e analisaram diversos modelos HMs-EA/SA disponíveis na literatura. Talbi (2016) apresentou a descrição das principais ideias para quatro tipos diferentes de combinações: meta-heurísticas com meta-heurísticas, meta-heurísticas com métodos de programação matemática, meta-heurísticas com métodos de programação por restrições, e meta-heurísticas com técnicas de aprendizado de máquina e mineração de dados.

Um exemplo da combinação de meta-heurísticas com métodos de programação por restrições foi apresentado por Khichane, Albert e Solnon (2010) que combinaram ACO com programação por restrições para resolver problemas de otimização combinatória. Li *et al.* (2015) apresentaram um algoritmo híbrido combinando PSO e *k-means* para a identificação de conjuntos de descontinuidade de

rochas com base em orientações de descontinuidade, exemplificando a combinação de meta-heurísticas com técnicas de mineração de dados.

Shafigh, Defersha e Moussa (2017) apresentaram um algoritmo híbrido de *Simulated Annealing* com programação linear para resolver um modelo no projeto e operação de sistemas de manufatura baseados em leiaute<sup>2</sup> distribuído, sendo este um exemplo da combinação de meta-heurísticas com métodos de programação matemática. Como exemplo da combinação de meta-heurísticas, em Raju *et al.* (2019) foi utilizado um algoritmo evolutivo híbrido PSO e BFO para a otimização de parâmetros do processo de modelagem por fusão e deposição, que é uma tecnologia de impressão 3D usada em aplicações industriais.

## 2.7 Evolução Diferencial

O algoritmo de Evolução Diferencial é um otimizador global estocástico simples e eficaz proposto por Kenneth Price e Rainer Storn (STORN; PRICE, 1997) e, desde então, amplamente aplicado na solução de problemas científicos e de engenharia. O algoritmo DE foi desenvolvido a partir do algoritmo de Recozimento Genético (do inglês *Genetic Annealing*) de Price, que substituiu a codificação binária pela codificação real com operações aritméticas. Adicionalmente, os autores propuseram o operador de mutação diferencial (QING, 2009).

A DE clássica envolve dois estágios: inicialização<sup>2</sup> e evolução. O vetor de população inicial é gerado aleatoriamente. A etapa evolucionária consiste em três operações executadas sequencialmente: mutação diferencial, cruzamento e seleção (STORN; PRICE, 1997; QING, 2009).

De acordo com Chen e Chiang (2015), um indivíduo codifica uma solução para o problema de otimização e uma população é composta de muitos indivíduos. Em uma geração, novos indivíduos são produzidos por meio dos operadores de reprodução (cruzamento e mutação) e indivíduos aptos sobrevivem para a próxima geração através do operador de seleção. A população evolui repetindo a reprodução e a seleção. Espera-se que os indivíduos se tornem cada vez melhores, o que também significa que as soluções se aproximam do ideal. Este processo é repetido até que um critério de parada seja atingido como, por exemplo, o número máximo de gerações ou

---

<sup>2</sup> Termo presente no Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa ([www.academia.org.br/nossa-lingua/busca-no-vocabulario](http://www.academia.org.br/nossa-lingua/busca-no-vocabulario)).

quando o melhor indivíduo encontrado fornecer uma solução dentro de uma precisão pré-estabelecida.

A versão clássica do algoritmo DE pode ser definida pelos elementos representados de forma simplificada no fluxograma da Figura 8 (STORN, 2008).

A população  $\mathbf{P}$  de uma geração  $g$  possui  $N_P$  vetores  $D$ -dimensionais (indivíduos  $\mathbf{x}_i$ )<sup>3</sup>, cada um representando uma solução candidata para o problema de otimização, equação (1) (PRICE; STORN; LAMPINEN, 2005).

$$\mathbf{P}_{x,g} = (\mathbf{x}_{i,g}) \quad i = 1, \dots, N_P, \quad g = 1, \dots, g_{max} \quad (1)$$

$$\mathbf{x}_{i,g} = (x_{i,k,g}) \quad k = 1, \dots, D \quad (2)$$

em que  $N_P$  representa o número de vetores da população,  $g$  define o contador de gerações,  $g_{max}$  é o número máximo de gerações (critério de parada) e  $D$  a dimensão do problema, ou seja, o número de parâmetros do problema a ser otimizado. A população inicial do DE é gerada aleatoriamente com distribuição uniforme, equação (3).

$$x_{i,k} = \text{rand}_k [0,1] \cdot (b_k^U - b_k^L) + b_k^L \quad (3)$$

Os vetores de inicialização  $D$ -dimensionais  $\mathbf{b}^U$  e  $\mathbf{b}^L$  indicam os limites inferior e superior dos vetores de parâmetros. O gerador de números aleatórios  $\text{rand}_k [0,1]$  retorna um número aleatório gerado com distribuição uniforme no intervalo  $[0, 1]$ . O subscrito  $k$  indica que um novo valor aleatório é gerado para cada parâmetro.

Uma vez iniciado, o algoritmo de DE realiza a mutação diferencial e a recombinação da população para produzir uma população de vetores de tentativas. Para cada indivíduo da população corrente  $\mathbf{x}_{i,g}$ , um vetor mutante  $\mathbf{v}_{i,g}$  é gerado pela combinação linear de três vetores distintos obtidos aleatoriamente da população ( $\mathbf{x}_{r1}$ ,  $\mathbf{x}_{r2}$ ,  $\mathbf{x}_{r3}$ ), equação (4).

$$\mathbf{v}_{i,g} = \mathbf{x}_{r3,g} + F(\mathbf{x}_{r1,g} - \mathbf{x}_{r2,g}) \quad (4)$$

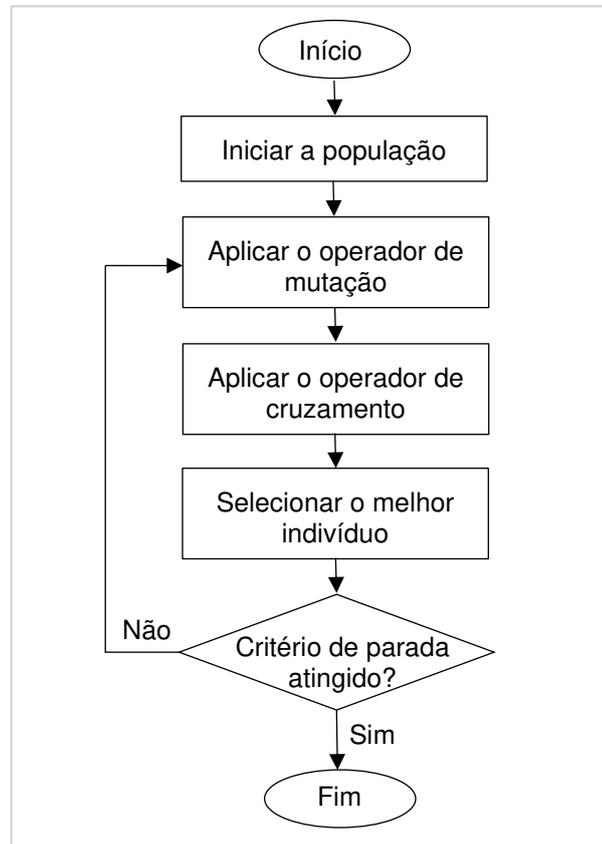
De acordo com Storn e Price (1997), o fator de escala  $F$ , também conhecido como fator de mutação, é um fator com valor real e constante no intervalo  $[0, 2]$ , sendo

---

<sup>3</sup> Procurou-se manter os símbolos apresentados similares às referências citadas e, ao mesmo tempo, preservar a coerência entre as seções de um capítulo e entre capítulos. A repetição de alguns símbolos em diferentes contextos foi inevitável, já que alguns símbolos são tradicionais na literatura especializada. A Lista de Símbolos apresenta os símbolos mais relevantes para esta tese e que ocorrem com maior frequência.

responsável pela intensidade do vetor diferença. Outras variações do operador de mutação se baseiam na escolha do vetor alvo  $\mathbf{x}_{i,g}$  e no número de vetores diferença.

Figura 8 – Fluxograma do algoritmo DE



Fonte: Elaborado pelo autor.

O operador de cruzamento (do inglês *crossover*) é introduzido para aumentar a diversidade dos novos indivíduos que sofreram mutação. A operação clássica para aumento da diversidade é o cruzamento, o qual mescla elementos do vetor mutante  $\mathbf{v}_{i,g}$  com o vetor alvo  $\mathbf{x}_{i,g}$  para gerar o vetor experimental  $\mathbf{u}_{i,g}$ . A forma mais comum de operador de cruzamento ou recombinação é dada por

$$\mathbf{u}_{i,k,g} = \begin{cases} \mathbf{v}_{i,k,g} & \text{se } \text{rand}_k[0,1] \leq CR \text{ ou } k = k_{rand} \\ \mathbf{x}_{i,k,g} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5)$$

na qual  $k_{rand}$  é um número aleatório inteiro com distribuição uniforme selecionado de  $\{1, 2, \dots, D\}$  cuja função é assegurar que o vetor experimental herde pelo menos uma componente do vetor mutante, e  $CR$  a taxa de cruzamento, tal que  $CR \in [0, 1]$ . A taxa de cruzamento é definida pelo usuário e representa a probabilidade do cruzamento

ocorrer, ou seja, a probabilidade do vetor experimental herdar os valores das variáveis do vetor mutante (PRICE; STORN; LAMPINEN, 2005).

A seleção determina qual indivíduo entre o vetor alvo e o vetor experimental é passado para a geração seguinte, conforme a equação (6). Para decidir se o vetor experimental  $\mathbf{u}_{i,g}$  será membro da geração  $g + 1$ , ele é comparado ao vetor  $\mathbf{x}_{i,g}$ . Se o vetor  $\mathbf{u}_{i,g}$  é melhor que o vetor alvo  $\mathbf{x}_{i,g}$ , então  $\mathbf{u}_{i,g}$  substitui a solução atual. Em caso contrário, a solução  $\mathbf{x}_{i,g}$  é mantida na população mais uma geração.

$$\mathbf{x}_{i,g+1} = \begin{cases} \mathbf{u}_{i,g} & \text{se } f(\mathbf{u}_{i,g}) \leq f(\mathbf{x}_{i,g}) \\ \mathbf{x}_{i,g} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6)$$

em que  $f(\cdot)$  é a função objetivo do problema a ser otimizado.

Conforme Price, Storn e Lampinen (2005), ao se comparar cada vetor experimental com o vetor alvo do qual ele herda parâmetros, o algoritmo DE integra mais fortemente a recombinação e seleção do que outros EAs.

A Figura 9 ilustra as etapas da versão clássica do DE. A população inicial é gerada aleatoriamente e cada vetor é indexado com um número de 0 a  $N_P - 1$  (Figura 9 (a)). A DE realiza a diferença de dois vetores da população ( $\mathbf{x}_{r_1} - \mathbf{x}_{r_2}$ ) selecionados aleatoriamente, Figura 9 (b), e ponderados pelo fator de escala  $F$ . O vetor mutante  $\mathbf{v}_0$  é gerado, conforme a equação (4), adicionando um terceiro vetor selecionado aleatoriamente da população, Figura 9 (c).

O vetor experimental  $\mathbf{u}_0$ , equação (5), é gerado e, na etapa de seleção, este vetor compete com o vetor alvo de mesmo índice da população, que na Figura 9 (d) é o vetor de índice 0. O vetor com o menor valor da função objetivo é marcado como vetor 0 da população da próxima geração.

Na Figura 9 (d), o vetor experimental  $\mathbf{u}_0$  possui menor valor da função objetivo e substitui o vetor alvo de índice 0, sendo passado para a próxima geração. O procedimento se repete, Figura 9 (e) e Figura 9 (f), até que todos os  $N_P$  vetores da população tenham competido com um vetor experimental gerado aleatoriamente e seja criada a população da próxima geração (PRICE; STORN; LAMPINEN, 2005).

As estratégias da evolução diferencial podem variar de acordo com o tipo de indivíduo a ser modificado na formação do vetor mutante, o número de indivíduos considerados para a perturbação e o tipo de cruzamento a ser usado. A notação usada para representar estas estratégias é definida como DE/J/K/L (TALBI, 2009), em que:

- a)  $J$  representa o vetor a ser mutado, que normalmente pode ser *rand* (um vetor da população escolhido aleatoriamente) ou *best* (o vetor do melhor indivíduo da população);
- b)  $K$  representa a quantidade de vetores diferença usados;
- c)  $L$  define o mecanismo de cruzamento utilizado, por exemplo *exp* para exponencial e *bin* para binomial.

A versão clássica do algoritmo DE é definida como DE/*rand*/1/*bin* pois o vetor base é uma escolha aleatória distribuída uniformemente ( $J = \textit{rand}$ ), apenas 1 vetor diferença é utilizado para perturbar o vetor base ( $K = 1$ ) e o cruzamento é do tipo binomial ( $L = \textit{bin}$ ) (TALBI, 2009).

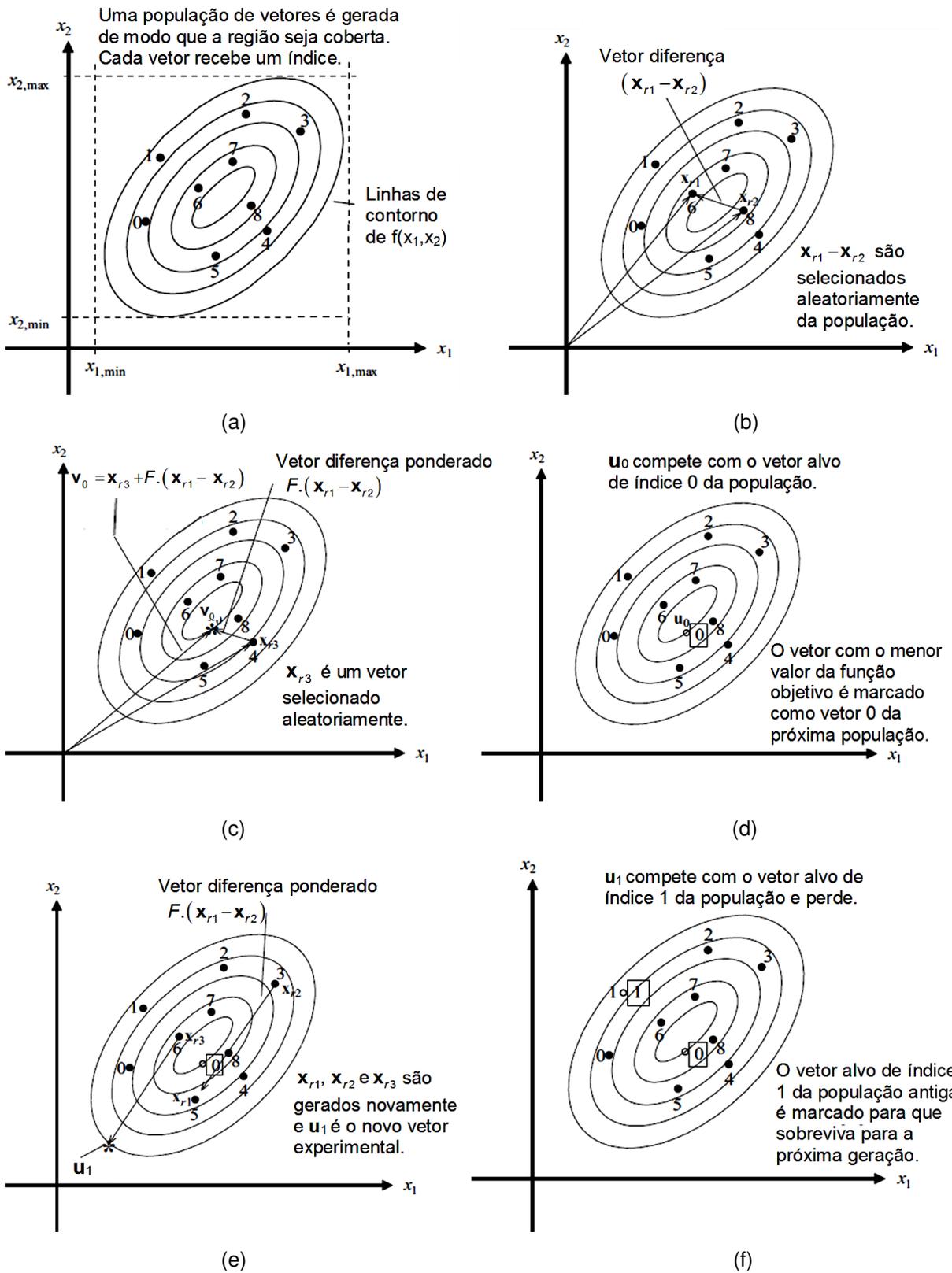
O algoritmo DE possui três parâmetros principais de controle: o tamanho da população  $N_P$ , o fator de escala  $F$  e a taxa de cruzamento  $CR$ . Estes parâmetros devem ser definidos pelo usuário. A configuração destes parâmetros é crucial para o desempenho do algoritmo e estes são, geralmente, os principais fatores que afetam a convergência do DE.

Segundo Storn e Price (1997), o DE é mais sensível à escolha do fator de escala  $F$  do que à escolha da taxa de cruzamento  $CR$ . Os parâmetros de controle são, frequentemente, definidos arbitrariamente dentro de alguns intervalos pré-definidos ou obtidos por experimentos empíricos que determinam os melhores valores para esses parâmetros, processo este que demanda tempo e esforço do usuário.

Storn e Price (1997) sugerem que um valor razoável para  $N_P$  esteja entre 5  $D$  e 10  $D$ , em que  $D$  é a dimensão do problema, e uma boa escolha inicial para  $F$  seria 0,5. Valores menores que 0,4 e maiores que 1 para  $F$  poderiam ocasionar uma degradação do desempenho do algoritmo. Em relação ao  $CR$ , quanto menor seu valor, menor a probabilidade do vetor experimental receber componentes do vetor mutante, enquanto valores altos de  $CR$  (próximos a 1) fazem com que a maioria dos componentes do vetor mutante seja herdada (DAS; SUGANTHAN, 2011).

Segundo Eiben *et al.* (2007), existem duas formas principais de definir os valores dos parâmetros do DE: ajuste dos parâmetros e controle dos parâmetros. O ajuste dos parâmetros é a abordagem normalmente praticada que tenta encontrar bons valores para os parâmetros antes de rodar o algoritmo e, em seguida, executa o algoritmo usando esses valores, que permanecem fixos durante seu processamento.

Figura 9 – Etapas do DE: (a) inicialização da população, (b) vetor diferença, (c) mutação, (d) seleção, (e) mutação do vetor novo, (f) seleção do vetor novo



Fonte: Adaptado de Price, Storn e Lampinen (2005).

No controle dos parâmetros, os valores dos parâmetros são alterados durante a execução. Os métodos para alterar o valor de um parâmetro podem ser classificados em uma das três categorias a seguir:

- a) O controle dos parâmetros de maneira determinística ocorre quando o valor de um parâmetro é alterado utilizando alguma regra determinística. Esta regra modifica o parâmetro de maneira fixa e predeterminada.
- b) O controle dos parâmetros de maneira adaptativa dá-se quando existe alguma forma de realimentação da busca, a qual serve como entrada para um mecanismo usado para determinar a direção ou a magnitude da alteração do parâmetro.
- c) O controle dos parâmetros de maneira autoadaptativa ocorre quando os parâmetros a serem adaptados são codificados nos cromossomos e sofrem mutação e recombinação. Os melhores valores desses parâmetros codificados levam a indivíduos mais aptos, que por sua vez são mais propensos a sobreviver e produzir descendentes, e a propagar esses valores. Usualmente, a maneira autoadaptativa é aplicada para ajuste do fator de escala  $F$  e da taxa de cruzamento  $CR$ .

De acordo com Das e Suganthan (2011), existem algumas razões para a utilização do DE como uma ferramenta de otimização quando comparado com outros algoritmos evolutivos: o DE é mais simples de implementar, o desempenho do DE e suas variantes é melhor em uma ampla variedade de problemas reais de otimização, o número de parâmetros de controle do DE é pequeno ( $CR$ ,  $F$  e  $N_P$  no DE clássico) e os efeitos destes parâmetros no desempenho do algoritmo são bem estudados, e a complexidade do espaço do DE é baixa.

Diversos autores realizaram revisões bibliográficas, tutoriais, aplicações e variantes (incluindo híbridas) do algoritmo DE. Das e Suganthan (2011) apresentaram uma revisão dos conceitos básicos da evolução diferencial, um levantamento de suas principais variantes, algoritmos híbridos com DE e aplicações em problemas de otimização em engenharia. Das, Sullick e Suganthan (2016) resumiram e organizaram as informações sobre os conceitos de DE, propostas de adaptação de parâmetros, aplicações em problemas complexos de otimização, hibridização com outros otimizadores, desenvolvimentos e apresentaram direções para pesquisas futuras na área de DE.

Peñuñuri *et al.* (2016) realizaram um extenso estudo numérico sobre a seleção de parâmetros para o DE clássico com a técnica *dither*. Piotrowski (2017) discutiu o impacto do tamanho da população no desempenho de vários algoritmos DE e propôs algumas regras para definir o tamanho da população, e se este deve ser fixo ou adaptativo durante a execução do algoritmo.

Vasconcelos Segundo *et al.* (2017a) apresentaram uma nova variante do DE, denominada Tsallis *Differential Evolution* (TDE), aplicada no processo de otimização do projeto de trocadores de calor do tipo casco e tubos. Bilal *et al.* (2020) apresentaram uma revisão de mais de duas décadas de pesquisa sobre o DE, abordando 283 publicações e apresentando aspectos básicos, geração da população, esquemas de mutação e cruzamento, modificação de parâmetros e variantes hibridizadas, juntamente com diversas aplicações.

Muitas variantes do DE foram desenvolvidas visando obter algoritmos com desempenho cada vez melhor em problemas de otimização. Como exemplos desses algoritmos tem-se JADE (ZHANG; SANDERSON, 2007), Evolução Diferencial Autoadaptativa (do inglês *Self-adaptive Differential Evolution*, SaDE) (QIN; SUGANTHAN, 2005), *Composite Differential Evolution* (CoDE) (WANG; CAI; ZHANG, 2011), *Success-History based Adaptive DE* (SHADE) (TANABE; FUKUNAGA, 2013a) e L-SHADE (TANABE; FUKUNAGA, 2014).

Brest *et al.* (2007) realizaram a comparação entre quatro algoritmos autoadaptativos de DE que utilizam diferentes mecanismos para o controle dos parâmetros. Chiang, Chen e Lin (2013) apresentaram uma taxonomia para classificar 23 algoritmos de DE em nove categorias, de acordo com diferentes características dos parâmetros. Mashwani (2014) resumiu diversas variantes do DE e algoritmos híbridos publicados em conferências e periódicos entre 2010 e 2013. Dragoi e Dafinescu (2016) revisaram métodos adaptativos e autoadaptativos para ajuste dos parâmetros de controle do DE, e diferentes algoritmos de hibridização que empregavam o DE.

Al-Dabbagh *et al.* (2018) apresentaram uma taxonomia para os algoritmos evolutivos, analisaram 28 variantes de algoritmos DE adaptativos, discutiram as vantagens e desvantagens desses algoritmos e propuseram diretrizes para o projeto e a implementação de algoritmos DE adaptativos. Mohamed, Hadi e Jambi (2019) discutiram sobre diversas variantes do algoritmo DE e apresentaram uma nova estratégia de mutação para os algoritmos SHADE e L-SHADE.

Os algoritmos JADE, L-SHADE e TSDE são usados para comparação com o algoritmo proposto neste trabalho e são apresentados nas seções 2.7.1, 2.7.2 e 2.7.3.

### 2.7.1 JADE

Zhang e Sanderson apresentaram um novo algoritmo de evolução diferencial adaptativo chamado JADE (do inglês *J Adaptive Differential Evolution*) durante o Congresso Internacional de Computação Evolutiva do Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos (do inglês *IEEE International Congress on Evolutionary Computation*) de 2007 (CEC 2007). Nesse artigo os autores propuseram uma nova estratégia de mutação gananciosa (do inglês *greedy*), DE/*current-to-pbest*, que utiliza a informação de duas ou mais soluções melhor classificadas. Trata-se de uma generalização do esquema DE/*current-to-best* com o objetivo de evitar a convergência prematura e aumentar a diversidade da população (ZHANG; SANDERSON, 2007).

Conforme ilustrado na Figura 10, no esquema DE/*current-to-pbest*/1 (sem arquivo) o vetor de mutação é gerado como mostra a equação (7).

$$\mathbf{v}_{i,g} = \mathbf{x}_{i,g} + F_i(\mathbf{x}_{best,g}^p - \mathbf{x}_{i,g}) + F_i(\mathbf{x}_{r1,g} - \mathbf{x}_{r2,g}) \quad (7)$$

na qual  $\mathbf{x}_{best,g}^p$  é escolhido aleatoriamente com distribuição uniforme dentre os 100p% indivíduos da população atual com melhor desempenho,  $p \in (0,1]$  e  $F_i$  é o fator de escala associado ao indivíduo  $\mathbf{x}_i$  atualizado a cada geração por meio de um mecanismo de adaptação.

Na Figura 10, as curvas tracejadas representam os contornos do problema de otimização e  $\mathbf{v}_i$  é o vetor mutante gerado para o indivíduo  $\mathbf{x}_i$  usando o fator de escala  $F_i$  associado.

O fator de escala  $F_i$  é gerado de acordo com a distribuição de Cauchy com parâmetro de localização  $\mu_F$  e parâmetro de escala 0,1 de tal modo que  $0 < F_i \leq 1$ . Segundo os autores, a distribuição de Cauchy é melhor que a distribuição normal na diversificação dos fatores de mutação.

O parâmetro de localização  $\mu_F$  é atualizado a cada iteração por

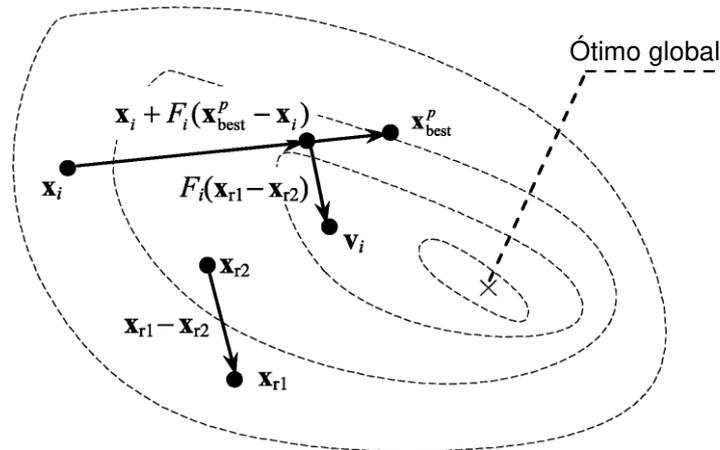
$$\mu_F = (1 - c)\mu_F + c M_L(S_F) \quad (8)$$

em que  $M_L(\cdot)$  é a média de Lehmer,  $S_F$  constitui o conjunto dos fatores de mutação correspondentes aos indivíduos aptos da prole e  $c$  é uma constante positiva entre 0 e

1. A média de Lehmer, equação (9), promove a propagação de fatores de mutação maiores, evitando a convergência prematura.

$$M_L(S_F) = \frac{\sum_{F \in S_F} F^2}{\sum_{F \in S_F} F} \quad (9)$$

Figura 10 – Estratégia de mutação DE/*current-to-pbest/1* adotada no JADE



Fonte: Adaptado de Zhang e Sanderson (2009).

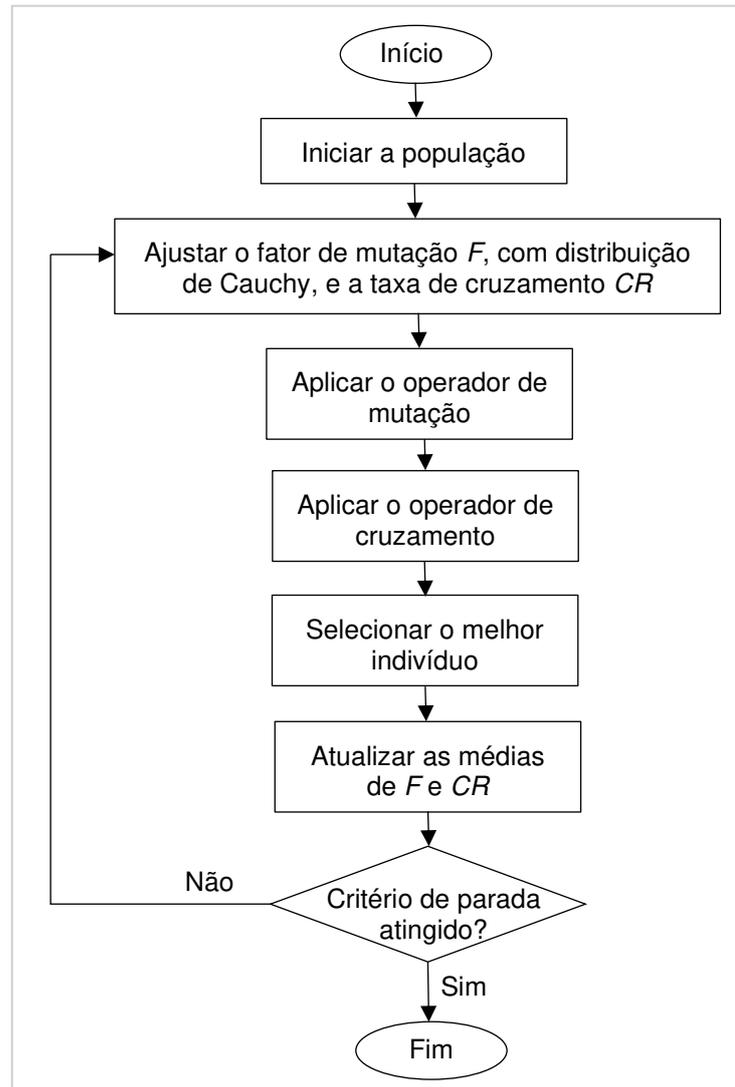
JADE também adota a operação de cruzamento binária apresentada na equação (5), sendo a taxa de cruzamento individual  $CR_i$  ajustada a cada iteração de acordo com uma distribuição normal com média  $\mu_{CR}$  e desvio padrão 0,1, restrita ao intervalo  $[0, 1]$ . Definindo  $S_{CR}$  como o conjunto das probabilidades de cruzamento bem sucedidas, a média  $\mu_{CR}$  é atualizada a cada geração por

$$\mu_{CR} = (1 - c)\mu_{CR} + c M_A(S_{CR}) \quad (10)$$

em que  $M_A(\cdot)$  é a média aritmética simples. A Figura 11 apresenta o fluxograma do JADE.

Enquanto o DE clássico apresenta dois parâmetros que necessitam de ajuste pelo usuário,  $F$  e  $CR$ , e que dependem diretamente do problema relacionado, JADE têm outros dois parâmetros,  $c$  e  $p$ . O primeiro controla a taxa de adaptação dos parâmetros e o segundo determina a ganância da estratégia de mutação. A princípio estes parâmetros se mostraram insensíveis aos problemas de teste aplicados para as faixas de  $p \in [0,05, 0,2]$  e  $1/c \in [5,20]$ .

Figura 11 – Fluxograma do algoritmo JADE



Fonte: Elaborado pelo autor.

Posteriormente, em 2009, Zhang e Sanderson apresentaram uma extensão do algoritmo JADE com a opção de arquivo externo (ZHANG; SANDERSON, 2009). Nesse arquivo são armazenadas soluções inferiores recentemente avaliadas que são comparadas com a população atual. Este procedimento provê informação adicional para formação do vetor de mutação, melhorando a diversidade da população. Seja  $\mathbf{A}$  o conjunto de soluções inferiores armazenadas recentemente e  $\mathbf{P}$  a população atual. No esquema DE/*current-to-pbest/1* com arquivo, o vetor de mutação é gerado por

$$\mathbf{v}_{i,g} = \mathbf{x}_{i,g} + F_i(\mathbf{x}_{i,\text{best},g}^p - \mathbf{x}_{i,g}) + F_i(\mathbf{x}_{r1,g} - \tilde{\mathbf{x}}_{r2,g}) \quad (11)$$

em que  $\tilde{\mathbf{x}}_{r,2,g}$  é selecionado aleatoriamente da união dos indivíduos da população atual e dos indivíduos do arquivo,  $\mathbf{P} \cup \mathbf{A}$ . Os demais vetores são selecionados da população atual  $\mathbf{P}$ , conforme apresentado na equação (4).

No início do processo de otimização o arquivo  $\mathbf{A}$  está vazio. Então, no final de cada geração, os vetores alvos que foram substituídos pelos respectivos vetores experimentais durante a seleção são adicionados ao arquivo. Se o tamanho do arquivo exceder um certo limite, então algumas soluções são aleatoriamente eliminadas do arquivo mantendo-se, portanto, o tamanho do arquivo fixo.

Diversos autores apresentaram aplicações, algoritmos híbridos e variantes do algoritmo JADE. Shokri-Ghaleh e Alfi (2014) empregaram onze algoritmos evolutivos, dentre eles o JADE, visando aperfeiçoar o desempenho para a sincronização de sistemas de teleoperação bilateral sujeitos a atrasos variantes no tempo. Nesta aplicação, os algoritmos evolutivos foram utilizados para obter os melhores parâmetros para o controlador de sincronização. Fan e Yan (2015) utilizaram sete variantes do algoritmo DE, entre estes o JADE, para otimizar as cinco principais condições operacionais do processo de reação de oxidação do p-xileno, um processo de reação altamente não-linear.

Liu (2017) utilizou o algoritmo JADE para otimizar os parâmetros do *Just-in-time* (JIT) e os parâmetros da máquina de vetor de relevância (do inglês *Relevant Vector Machine*, RVM) para a modelagem de sensores virtuais aplicados em estações de tratamento de águas residuais. Vasconcelos Segundo *et al.* (2017b) apresentaram uma nova variante do JADE, denominada Tsallis JADE (TJADE), para a otimização de trocadores de calor. Basetti, Chandel e Subramanyam (2018) utilizaram o algoritmo JADE para resolver o problema de estimativa do estado de sistemas de energia, sendo o estimador de estado um componente vital do sistema de gerenciamento de energia.

### 2.7.2 SHADE e L-SHADE

Tanabe e Fukunaga (2013a, 2013b) propuseram o algoritmo SHADE (*Success-History based Adaptive DE*) como uma variante aprimorada do algoritmo JADE. O algoritmo SHADE utiliza um mecanismo de adaptação dos parâmetros  $F$  e  $CR$  baseado no histórico de desempenho dos mesmos em vez de gerar o par de parâmetros  $\mu_F$  e  $\mu_{CR}$  do JADE.

Em JADE é possível que  $S_F$  e  $S_{CR}$  incluam valores deficientes para  $F$  e  $CR$  devido à natureza probabilística do DE. Neste caso, a equação (8) e a equação (10) podem resultar em valores indesejados para  $\mu_F$  e  $\mu_{CR}$ , degradando o desempenho da busca. A fim de melhorar a robustez do JADE, SHADE mantém uma memória com  $H$  posições para cada um dos parâmetros de controle:  $M_F$  para  $F$  e  $M_{CR}$  para  $CR$ . No início, os conteúdos de  $M_{F,q}$  e  $M_{CR,q}$  ( $q = 1, \dots, H$ ) possuem valores 0,5. A cada geração  $g$ , um par  $F_i$  e  $CR_i$ , selecionados aleatoriamente de  $M_F$  e  $M_{CR}$ , respectivamente, é associado a um indivíduo  $\mathbf{x}_i$ , tal que

$$F_i = \text{randc}_i(M_{F,r_i}, 0,1) \quad (12)$$

$$CR_i = \text{randn}_i(M_{CR,r_i}, 0,1) \quad (13)$$

O fator de escala  $F_i$  é gerado de acordo com a distribuição de Cauchy com parâmetro de localização  $M_{F,r_i}$  e parâmetro de escala 0,1, e a taxa de cruzamento  $CR_i$  é ajustada a cada iteração de acordo com uma distribuição normal com média  $M_{CR,r_i}$  e desvio padrão 0,1.

Os valores de  $F_i$  e  $CR_i$  usados pelos indivíduos bem sucedidos são gravados em  $S_F$  e  $S_{CR}$ , como em JADE. Ao final de uma iteração, os conteúdos das memórias são atualizados, conforme as equações (14) e (15), nas quais  $\text{mean}_{\text{WL}}(S_F)$  é a média de Lehmer ponderada do conjunto dos fatores de mutação e  $\text{mean}_{\text{WA}}(S_{CR})$  é a média aritmética ponderada do conjunto das probabilidades de cruzamento.

$$M_{F,q,g+1} = \begin{cases} \text{mean}_{\text{WL}}(S_F) & \text{se } S_F \neq \emptyset \\ M_{F,q,g} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (14)$$

$$M_{CR,q,g+1} = \begin{cases} \text{mean}_{\text{WA}}(S_{CR}) & \text{se } S_{CR} \neq \emptyset \\ M_{CR,q,g} & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (15)$$

O índice  $q$  determina a posição da memória a ser atualizada. No início da busca,  $q$  é inicializado em 1. O valor de  $q$  é incrementado enquanto um novo elemento é inserido no histórico. Se  $q > H$ ,  $q$  é feito igual a 1. Na geração  $g$ , o elemento  $q$ -ésimo da memória é atualizado.

A média aritmética ponderada  $\text{mean}_{\text{WA}}(S_{CR})$  é calculada usando a equação (16) e  $\Delta f_j$ , equação (18), é usado para influenciar a adaptação dos parâmetros  $S_{CR}$ .

$$\text{mean}_{\text{WA}}(S_{CR}) = \sum_{j=1}^{|S_{CR}|} w_j \cdot S_{CR,j} \quad (16)$$

$$w_j = \frac{\Delta f_j}{\sum_{j=1}^{|S_{CR}|} \Delta f_j} \quad (17)$$

$$\Delta f_j = |f(\mathbf{u}_{j,g}) - f(\mathbf{x}_{j,g})| \quad (18)$$

em que  $|S_{CR}|$  representa a cardinalidade de  $S_{CR}$ .

A média de Lehmer ponderada  $\text{mean}_{\text{WL}}(S_F)$  é calculada usando a equação (19) e, como em  $\text{mean}_{\text{WA}}(S_{CR})$ , o valor atualizado é usado para influenciar a adaptação dos parâmetros.

$$\text{mean}_{\text{WL}}(S_F) = \frac{\sum_{j=1}^{|S_F|} w_j \cdot S_{F,j}^2}{\sum_{j=1}^{|S_F|} w_j \cdot S_{F,j}} \quad (19)$$

Embora JADE adapte os parâmetros de controle  $F$  e  $CR$ , o parâmetro  $p$ , que determina a ganância da estratégia de mutação *current-to-pbest/1*, é fixo e definido manualmente. No SHADE, cada indivíduo  $\mathbf{x}_i$  possui um  $p_i$  associado, que é definido de acordo com a equação (20).

$$p_i = \text{rand}[p_{\min}, 0,2] \quad (20)$$

na qual  $p_{\min}$  é definido de modo que pelo menos dois indivíduos com melhor aptidão sejam selecionados, isto é,  $p_{\min} = 2/N_P$ . Na equação (20), o valor 0,2 é o valor máximo do intervalo para  $p$  sugerido por Zhang e Sanderson (2007).

SHADE possui dois parâmetros que precisam ser definidos pelo usuário: o tamanho da população e o tamanho da memória  $H$ . Conforme Tanabe e Fukunaga (2013a), o desempenho do SHADE depende do tamanho da memória e o valor 100 parece ser uma configuração adequada para  $H$ .

Tanabe e Fukunaga (2014) desenvolveram o algoritmo SHADE 1.1 e, segundo os autores, o algoritmo SHADE 1.1 obteve desempenho melhor que o SHADE 1.0 proposto por eles em 2013 (TANABE; FUKUNAGA, 2013a; TANABE; FUKUNAGA, 2013b). No algoritmo SHADE 1.1, a média de Lehmer ponderada  $\text{mean}_{\text{WL}}(S_F)$  é calculada usando a equação (21), na qual  $S$  refere-se a  $S_{CR}$  ou  $S_F$ .

$$\text{mean}_{\text{WL}}(S) = \frac{\sum_{j=1}^{|S|} w_j \cdot S_j^2}{\sum_{j=1}^{|S|} w_j \cdot S_j} \quad (21)$$

$$w_j = \frac{\Delta f_j}{\sum_{j=1}^{|S|} \Delta f_j} \quad (22)$$

$$\Delta f_j = \left| f(\mathbf{u}_{j,g}) - f(\mathbf{x}_{j,g}) \right| \quad (23)$$

Enquanto o SHADE 1.0 e o SHADE 1.1 ajustam automaticamente os parâmetros  $F$  e  $CR$ , o tamanho da população  $N_P$  permanece constante durante toda a busca. O tamanho da população usada pelos EAs desempenha um papel significativo no controle da taxa de convergência.

Para aprimorar o algoritmo SHADE 1.1, Tanabe e Fukunaga (2014) propuseram o L-SHADE que incorpora a técnica de redução linear do tamanho da população (do inglês *Linear Population Size Reduction*, LPSR), um método determinístico simples de redimensionamento da população que reduz continuamente o tamanho da população de acordo com uma função linear.

No L-SHADE, a LPSR reduz continuamente a população para corresponder a uma função linear onde o tamanho da população na primeira geração é  $N^{init}$  e da população no final da execução é  $N^{min}$ . Após cada geração  $g$ , o tamanho da população na próxima geração,  $N_{g+1}$ , é calculado de acordo com

$$N_{g+1} = \text{round} \left[ \left( \frac{N^{min} - N^{init}}{\text{MAX}_{\text{NFE}}} \right) N_{fe} + N^{init} \right] \quad (24)$$

em que  $N_{fe}$  é o número de avaliações da função objetivo,  $\text{MAX}_{\text{NFE}}$  é o número máximo de avaliações permitida,  $N^{init}$  é o tamanho inicial da população e  $N^{min}$  é o número mínimo de indivíduos para que os operadores evolutivos possam ser aplicados. No caso de L-SHADE tem-se  $N^{min} = 4$  porque o operador de mutação *current-to-pbest* necessita de 4 indivíduos. Sempre que  $N_{g+1} < N_g$ , os  $(N_g - N_{g+1})$  indivíduos com piores classificações são excluídos da população.

O tamanho do arquivo de soluções é reajustado com o tamanho atual da população, descartando o número necessário das piores soluções (DAS; SULLICK; SUGANTHAN, 2016).

Os parâmetros de controle do algoritmo L-SHADE são: tamanho inicial da população  $N^{init}$ , tamanho do arquivo externo  $|\mathbf{A}|$ , tamanho da memória  $H$  e porcentagem  $p$  para a mutação  $current-to-pbest/1$ . Seguindo o procedimento prático para definição do tamanho da população em algoritmos DE, o tamanho inicial da população é dado pela dimensão  $D$  do problema multiplicada pelo parâmetro  $r^{N^{init}}$ , ou seja,  $N^{init} = \text{round}(D \times r^{N^{init}})$  (TANABE; FUKUNAGA, 2014).

Diversas aplicações dos algoritmos SHADE e L-SHADE foram apresentadas na literatura. Aranha *et al.* (2015) utilizaram os algoritmos SHADE, jDE, DE clássica e PSO para a otimização de três modelos de reservatórios de petróleo, sendo que o algoritmo SHADE apresentou o melhor desempenho. Pham (2016) aplicou um novo algoritmo de evolução diferencial, denominado ANDE, e o algoritmo L-SHADE para a otimização de treliças com restrições dinâmicas.

Hamdi *et al.* (2018) usaram o algoritmo L-SHADE para resolver um problema de despacho econômico prático. Wen *et al.* (2018) aplicaram um novo algoritmo de evolução diferencial denominado iLSHADE, baseado no L-SHADE, bem como os algoritmos L-SHADE, JADE e CoDE para o planejamento a longo prazo de grandes estações hidrelétricas em cascata, que é um problema de alta dimensão, não linear e com restrições complexas.

Goudos *et al.* (2019) empregaram uma nova estrutura baseadas em Redes Neurais Artificiais (RNAs) para a modelagem de canal de comunicações sem fio de veículos aéreos não tripulados. O treinamento das RNAs foi realizado pelos algoritmos evolutivos CoDE, jDE, SaDE, JADE e L-SHADE, sendo que o melhor desempenho foi obtido com o algoritmo L-SHADE.

Piotrowski e Napiorkowski (2018) apresentaram um histórico dos algoritmos que se originaram da variante JADE e os resultados da comparação de desempenho de 22 variantes baseadas em JADE e SHADE propostas entre 2009 e 2017, utilizando conjunto de testes artificiais e problemas de engenharia. Li *et al.* (2019) desenvolveram um *ensemble* de dois estágios, sendo que no estágio inicial são utilizadas três variantes do DE (SHADE, JADE e DE/ $current-to-rand/1$ ) e no estágio posterior é utilizado L-SHADE.

### 2.7.3 TSDE

Liu *et al.* (2016) propuseram um novo algoritmo DE com um mecanismo de otimização em dois estágios, denominado TSDE. Para atender aos diferentes requisitos relativos à diversificação e à intensificação, o TSDE divide o processo evolutivo em dois estágios com base no  $N_{fe}$ : o estágio anterior (*former stage*) e o estágio posterior (*latter stage*). No estágio anterior, algumas estratégias de geração de vetores experimentais com bom desempenho são escolhidas para gerar o vetor experimental. Enquanto no estágio posterior, com o objetivo de acelerar a convergência, são selecionadas algumas estratégias gananciosas de geração de vetores experimentais para produzir os descendentes.

No TSDE, tanto o estágio anterior quanto o estágio posterior desempenham papéis importantes no desempenho do DE e são considerados de igual importância. Sendo  $MAX_{NFE}$  o número máximo de avaliações da função objetivo, se o  $N_{fe}$  for menor que  $MAX_{NFE}/2$  significa que o DE está no estágio anterior. Em caso contrário, o DE está no estágio posterior.

No TSDE, diferentes conjuntos de estratégias pré-definidas são construídos para gerar os vetores experimentais nos dois estágios. O TSDE visa melhorar a capacidade de diversificação no estágio anterior para evitar a convergência prematura. No primeiro conjunto de estratégias pré-definidas são utilizadas três estratégias de geração do vetor experimental:

- a) DE/*rand/1/bin*, que é a estratégia utilizada na versão clássica do DE;
- b) DE/*rand/2/bin*, que contém dois vetores diferença e possui melhor capacidade de diversificação;
- c) DE/*current-to-rand/1*, em que o cruzamento é substituído por uma recombinação linear aritmética.

Já na etapa posterior, a convergência rápida do DE se torna mais atraente. Desta forma, no segundo conjunto de estratégias pré-definidas são utilizadas duas estratégias de geração do vetor experimental:

- a) DE/*current-to-best/1/bin*, que utiliza as informações do melhor indivíduo da população atual para orientar a evolução, o que aumenta a velocidade de convergência;
- b) DE/*current-to-rand/1*.

No TSDE, para cada vetor alvo, uma estratégia de geração do vetor experimental é selecionada aleatoriamente do primeiro ou segundo conjunto de estratégias pré-definidas, de acordo com o estágio evolutivo.

O TSDE utiliza o conjunto de combinações de valores pré-definidos para os parâmetros de controle  $F$  e  $CR$  do algoritmo CoDE (WANG; CAI; ZHANG, 2011) e todas as configurações de parâmetros de controle do conjunto possuem a mesma probabilidade de serem selecionadas para gerar o vetor experimental.

Para construir um conjunto de combinações de valores para os parâmetros de controle que contenha configurações representativas destes parâmetros, cada estratégia de geração do vetor experimental no CoDE seleciona aleatoriamente uma combinação de valores dos parâmetros de controle a partir do conjunto de combinações de valores pré-definidos. Para equilibrar a convergência e a diversidade da população, todas as combinações de valores pré-definidos para os parâmetros de controle são cuidadosamente selecionadas e podem se complementar.

O conjunto de combinações de valores pré-definidos para os parâmetros de controle consiste das seguintes combinações:

- a)  $F = 1,0$  e  $CR = 1,0$ ;
- b)  $F = 1,0$  e  $CR = 0,9$ ;
- c)  $F = 0,8$  e  $CR = 0,2$ .

Estas três combinações de parâmetros de controle são amplamente utilizadas em muitas variantes do DE. Enquanto  $F = 1,0$  e  $CR = 1,0$  são adequados para resolver problemas separáveis,  $F = 1,0$  e  $CR = 0,9$  são usados para incentivar a diversificação em todo o espaço de busca e  $F = 0,8$  e  $CR = 0,2$  são aplicados para aprimorar o desempenho da convergência do DE.

O TSDE funciona da seguinte forma: os vetores alvo são produzidos de acordo com a equação (3). No início de cada iteração é verificado se o TSDE está no estágio anterior ou no estágio posterior. Para cada vetor alvo, uma estratégia de geração do vetor experimental é escolhida aleatoriamente do conjunto de estratégias pré-definidas e uma combinação de parâmetros de controle é escolhida aleatoriamente do conjunto de combinações de valores pré-definidos. Ao combinar a estratégia de geração do vetor experimental com a combinação de parâmetros de controle, um vetor experimental é gerado. Em seguida, o vetor experimental é comparado com seu vetor

alvo e o melhor sobrevive para a próxima geração. O processo é repetido até que o critério de parada seja alcançado (LIU *et al.*, 2016).

## 2.8 Inteligência de Enxame

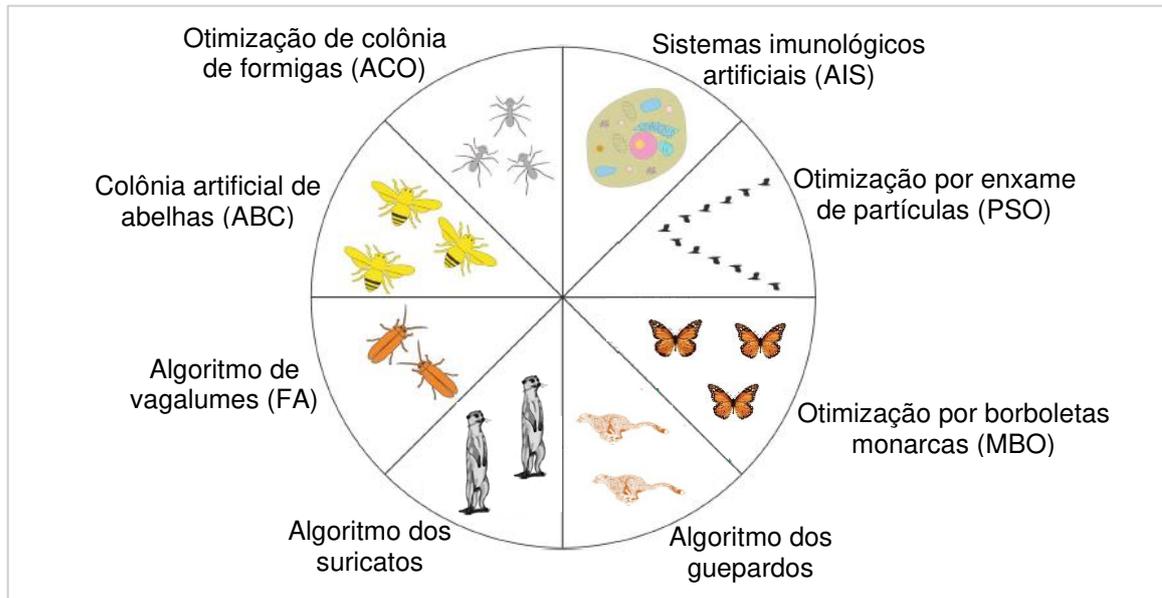
A Inteligência de Enxame (do inglês *Swarm Intelligence*, SI), também denominada de Inteligência de Colônias ou Inteligência Coletiva, lida com comportamentos coletivos de sistemas descentralizados e auto-organizados, que resultam das interações locais de componentes individuais entre si e com seu ambiente. Millonas (1993) apresentou cinco princípios básicos de um sistema de inteligência de enxame:

- a) Proximidade: os indivíduos devem ser capazes de interagir de modo a formar vínculos sociais.
- b) Qualidade: os indivíduos devem poder avaliar suas interações com o meio ambiente e entre si.
- c) Diversidade: o sistema deve reagir a situações desconhecidas e inesperadas.
- d) Estabilidade: os indivíduos não devem mudar seus comportamentos sempre que o ambiente muda.
- e) Adaptabilidade: a população deve ser capaz de mudar seu comportamento quando for computacionalmente adequado.

Um sistema de enxame é composto por um conjunto de indivíduos capazes de interagir entre si e com o meio ambiente e a inteligência de enxame é uma propriedade emergente do sistema de enxame como resultado de seus princípios de proximidade, qualidade, diversidade, estabilidade e adaptabilidade (DE CASTRO, 2007).

A maioria das espécies de animais apresenta comportamentos sociais. Alguns exemplos de enxames que praticam comportamento coletivo são: bandos de pássaros, cardumes de peixes e colônia de insetos sociais, como formigas e abelhas. Os indivíduos obtêm várias vantagens através do grupo, tais como reduzir as chances de serem capturados por predadores, seguir rotas de migração de maneira precisa e robusta por meio de sensoriamento coletivo, e melhorar a eficiência energética durante a viagem (SIMON, 2013; FISTER *et al.*, 2015; DU; SWAMY, 2016). A Figura 12 apresenta as fontes de inspiração na natureza para o desenvolvimento de alguns algoritmos baseados em SI (FISTER *et al.*, 2015; KLEIN, 2016).

Figura 12 – Exemplos de meta-heurísticas baseadas em SI



Fonte: Elaborado pelo autor.

As técnicas de otimização inspiradas na inteligência de enxame imitam o comportamento social dos enxames. Diversos autores apresentaram revisões bibliográficas, tutoriais e aplicações sobre técnicas de otimização inspiradas na inteligência de enxame, além de propor novos algoritmos e algoritmos híbridos baseados em SI. Pham e Castellani (2014) apresentaram os resultados experimentais da aplicação de algoritmos evolutivos PSO e ABC em 25 funções de teste projetadas pelos autores. Klein (2016) apresentou duas novas meta-heurísticas bioinspiradas baseadas no comportamento dos guepardos africanos e dos suricatos que foram aplicadas em otimização contínua mono-objetivo.

Gotmare *et al.* (2017) apresentaram uma revisão sobre a aplicação de várias técnicas de computação evolutiva e de inteligência de enxame nas áreas de identificação de sistemas e projeto de filtros digitais de resposta ao impulso infinita (do inglês *Infinite-Duration Impulse Response*, IIR). Mavrovouniotis, Lib e Yang (2017) discutiram sobre aplicações de otimização dinâmica por inteligência de enxame em problemas discretos, contínuos, restritos, multiobjetivos e em casos práticos, e realizaram algumas considerações sobre pesquisas futuras. Slowik e Kwasnicka (2018) apresentaram o conceito de SI e as propriedades, aplicações e variantes das meta-heurísticas PSO e ACO.

### 2.8.1 Otimização por Enxame de Partículas

A Otimização por Enxame de Partículas (do inglês *Particle Swarm Optimization*, PSO) é uma meta-heurística estocástica baseada em população proposta por Kennedy e Eberhart (1995) como um método para otimização de funções não lineares relacionado à metodologia de enxame de partículas e foi desenvolvida com o objetivo de simular o movimento de bando de pássaros e cardume de peixes.

Diferente de outros métodos baseados em população, PSO não gera novos indivíduos e descarta antigos durante as iterações, ou seja, não possui seleção de indivíduos. Em vez disso, o PSO mantém uma população cujos indivíduos são aprimorados em resposta a novas descobertas sobre o espaço de busca (LUKE, 2015).

De acordo com Kennedy, Eberhart e Shi (2001), o algoritmo PSO baseia-se em uma teoria sócio-cognitiva simples. Cada indivíduo de uma população possui sua própria experiência e, por serem indivíduos sociais, eles também possuem conhecimento sobre o comportamento dos seus vizinhos. Esses dois tipos de informação correspondem à aprendizagem individual (componente cognitivo) e à transmissão cultural (componente social), respectivamente. O processo de adaptação cultural pode ser resumido em três princípios, que podem ser combinados para permitir que os indivíduos se adaptem a desafios ambientais complexos:

- a) Avaliar: o aprendizado não pode ocorrer a menos que o indivíduo possa distinguir características atrativas ou repulsivas do ambiente.
- b) Comparar: os indivíduos geralmente usam os outros como padrões para se avaliar, o que pode servir como motivação para aprender e mudar.
- c) Imitar: a imitação é central para a sociabilidade dos indivíduos e importante para a aquisição e manutenção de habilidades.

No algoritmo PSO, os indivíduos que procuram soluções para um determinado problema aprendem com suas próprias experiências passadas e com as experiências de outros. Os indivíduos se avaliam, comparam-se aos vizinhos e imitam apenas aqueles vizinhos que são superiores a si mesmos. Portanto, os indivíduos são capazes de avaliar, comparar e imitar uma série de situações possíveis que o ambiente lhes oferece (DE CASTRO, 2007).

O algoritmo PSO se baseia em parâmetros de velocidade global e individual de forma a movimentar os elementos do enxame, denominados partículas, onde cada

partícula é uma solução possível para o problema de otimização. Em toda iteração, o algoritmo PSO encontra a melhor solução global ajustando o movimento de cada partícula de acordo com sua melhor posição pessoal e melhores posições globais das partículas do enxame inteiro no espaço de busca. Conforme ocorrem as iterações, o enxame se concentra cada vez mais em uma área do espaço de busca que contém as melhores soluções para o problema (DU; SWAMY, 2016).

O movimento de uma partícula em determinada direção depende da posição atual da partícula  $\mathbf{x}_i(t)$ , de uma velocidade  $\mathbf{v}_i(t+1)$ , da posição pessoal da partícula com o melhor desempenho e da posição da partícula com o melhor desempenho global do enxame. A melhor posição pessoal da partícula é denominada *pbest* (*personal best*) ou *lbest* (*local best*) e a melhor posição global que qualquer partícula do enxame já ocupou é denominada *gbest* (*global best*) (ENGELBRECHT, 2007; TALBI, 2009).

A equação (25) de atualização do vetor velocidade proposta por Shi e Eberhart (1998) utiliza o peso de inércia  $\omega$  com decrescimento linear (MARINI; WALCZAK, 2015).

$$\mathbf{v}_i(t+1) = \omega(t+1)\mathbf{v}_i(t) + c_1[\mathbf{p}_i - \mathbf{x}_i(t)]\mathbf{R}_1 + c_2[\mathbf{g} - \mathbf{x}_i(t)]\mathbf{R}_2 \quad (25)$$

na qual  $t$  é a iteração atual,  $\mathbf{v}_i$  é o vetor velocidade,  $\mathbf{R}_1$  e  $\mathbf{R}_2$  são matrizes diagonais de números aleatórios gerados a partir de uma distribuição uniforme em  $[0, 1]$ ,  $\mathbf{p}_i$  é a posição *pbest*,  $\mathbf{g}$  é a posição *gbest*,  $c_1$  e  $c_2$  são os coeficientes de aceleração (constantes reais positivas).

A posição de cada partícula na próxima iteração é atualizada adicionando a velocidade calculada  $\mathbf{v}_i(t+1)$  à sua posição  $\mathbf{x}_i(t)$ .

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{v}_i(t+1) \quad (26)$$

As equações (25) e (26) são executadas em cada iteração, de forma que a atualização da velocidade e da posição das partículas são realizadas visando evitar a convergência precoce das partículas em direção àquela com melhor desempenho.

A primeira parcela da equação (25) é o termo de momento da partícula e o peso de inércia  $\omega$  representa o grau de momento da partícula. A segunda parcela da equação (25) consiste do componente cognitivo, que representa o conhecimento de uma partícula, e é proporcional à distância da partícula e sua melhor posição (referida como a melhor posição pessoal da partícula). A terceira parcela é a componente

social, que representa as informações trocadas socialmente e a colaboração entre as partículas, onde a melhor posição já encontrada por qualquer partícula é usada para guiar o cálculo da nova velocidade da partícula em questão. Os coeficientes de aceleração  $c_1$  e  $c_2$  representam a ponderação das partes cognitiva e social, respectivamente, que levam cada partícula em direção a  $pbest$  e  $gbest$  (ENGELBRECHT, 2007).

Para limitar a velocidade de uma partícula, e evitar que o sistema não extrapole o espaço de busca, são definidos dois valores para a mudança de posição da partícula,  $v_{max}$  e  $v_{min}$ , garantindo que as partículas se movam dentro de limites predefinidos: se  $V_{i,k} > v_{max}$  então  $V_{i,k} = v_{max}$ , ou se  $V_{i,k} < v_{min}$  então  $V_{i,k} = v_{min}$ . A definição do valor  $v_{max}$  é importante, pois um  $v_{max}$  alto favorece a busca global, enquanto um  $v_{max}$  baixo enfatiza as buscas locais (DE CASTRO, 2007; TALBI, 2009).

Marini e Walczak (2015) apresentaram o potencial da otimização do PSO na solução de problemas de otimização em quimiometria. Zhang, Wang e Ji (2015) apresentaram uma pesquisa abrangente sobre o PSO, incluindo características, seleção de parâmetros, diversas variantes, hibridização com outras meta-heurísticas, levantamento das publicações entre 2000 e 2013 e aplicações em oito áreas.

Bonyadi e Michalewicz (2017) revisaram estudos sobre PSO relacionados com suas propriedades de convergência, adaptação de coeficientes, dimensionamento da população, topologia, hibridização, problemas de otimização com restrições, entre outros. Sengupta, Basak e Peters II (2018) apresentaram uma revisão do algoritmo PSO, hibridização com outras meta-heurísticas e diferentes implementações.

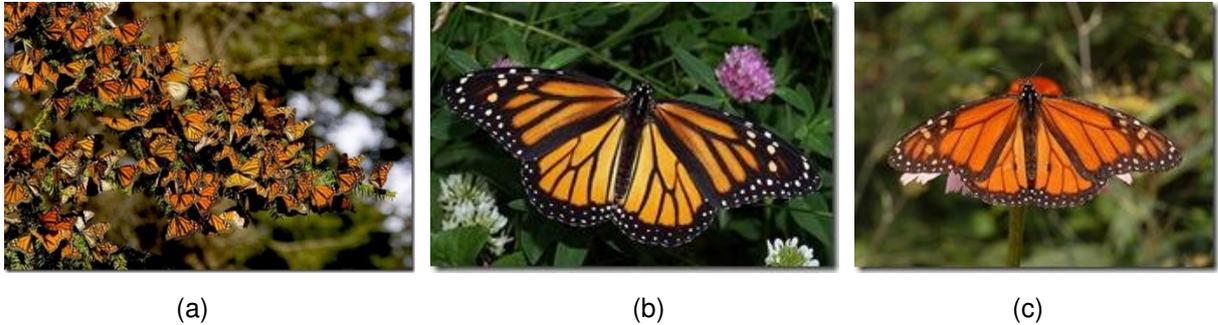
## 2.9 Otimização por Borboletas Monarcas

O movimento migratório das borboletas monarcas da América do Norte inspirou o desenvolvimento da meta-heurística denominada Otimização por Borboletas Monarcas (do inglês *Monarch Butterfly Optimization*, MBO) por Wang, Deb e Cui (2015). As borboletas monarcas se deslocam da América do Norte (Estados Unidos e Canadá) para o México no outono e em sentido contrário na primavera.

A Figura 13 apresenta fotos das borboletas monarcas e a Figura 14 apresenta as rotas de migração das borboletas monarcas no outono e na primavera, as áreas

de reprodução na primavera e no verão e as áreas de descanso no inverno (MONARCH WATCH, 2020).

Figura 13 – Borboletas monarcas: (a) enxame, (b) fêmea, (c) macho



Fonte: Monarch Watch (2020).

Para representar o processo de migração, pode-se considerar que as borboletas monarcas permanecem na América do Norte de abril a agosto (5 meses) e no México de setembro a março (7 meses). O comportamento de migração das borboletas monarcas é estruturado a partir das seguintes regras:

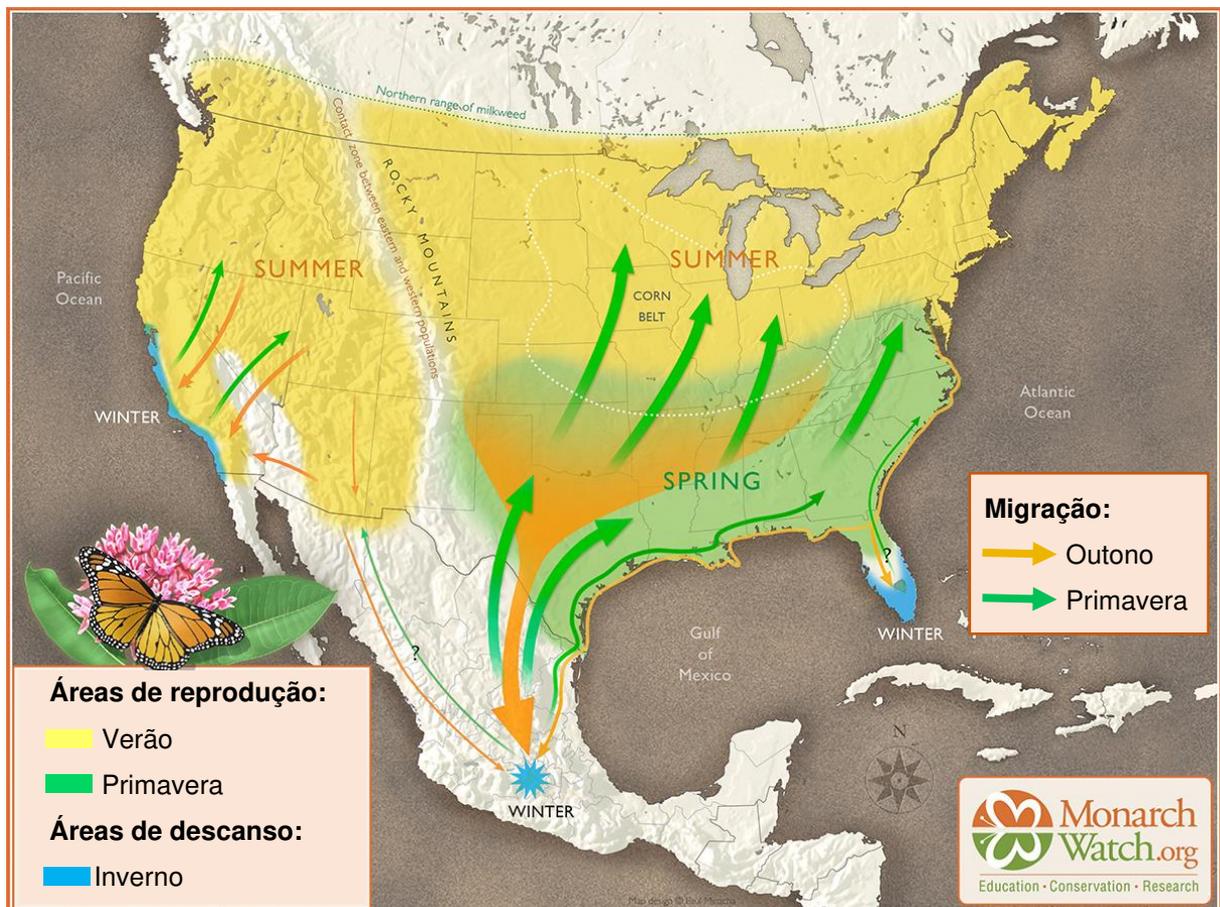
- a) Todas as borboletas monarcas estão localizadas apenas na América do Norte ou no México. Isto significa que as borboletas monarcas na América do Norte e no México compõem toda a população de borboletas monarcas.
- b) Cada indivíduo é gerado pelo operador de migração da borboleta monarca na América do Norte ou no México.
- c) O número total de borboletas da população não é alterado. Os indivíduos mais aptos são mantidos para a próxima geração no método MBO<sup>4</sup>, ou seja, o novo indivíduo da prole será mantido somente se possuir melhor desempenho que seu pai.
- d) Os indivíduos com melhor desempenho passam automaticamente para a próxima geração e não podem ser alterados por nenhum operador. Isto pode garantir que a qualidade ou a eficácia da população de borboletas monarcas não se deteriore com o incremento de gerações.

Semelhante a outros algoritmos evolutivos e baseados em enxame, o MBO segue um ciclo iterativo para gerar e atualizar seus indivíduos. Este ciclo pode ser descrito com os seguintes processos (FARIS; ALJARAH; MIRJALILI, 2017):

<sup>4</sup> Esta estratégia consta no artigo de Wang, Deb e Cui (2015). No entanto, ela não foi implementada no código em MATLAB disponibilizado pelos mesmos autores. Com a introdução do GCMBO (WANG; ZHAO; DEB, 2015), fica evidente que o MBO não apresenta o operador de seleção.

- a) Inicialização: o MBO começa gerando aleatoriamente um número pré-definido de borboletas (a população), onde cada borboleta forma uma possível solução para o problema alvo.
- b) Avaliações de desempenho: todas as borboletas são avaliadas usando uma função objetivo e classificadas de acordo com seu desempenho.
- c) Divisão: a população é dividida em subpopulação  $S_1$  e subpopulação  $S_2$ , cujos tamanhos são controlados por uma proporção fixa pré-definida  $p$ .
- d) Migração: este operador é usado para construir a primeira parte da nova geração usando borboletas selecionadas aleatoriamente de  $S_1$  e  $S_2$ .
- e) Ajuste: este operador é aplicado para construir a segunda parte da nova geração. Diferentemente do operador de migração, o operador de ajuste gera um novo indivíduo com base no melhor indivíduo e em outros indivíduos aleatórios de  $S_2$ .

Figura 14 – Rotas de migração, áreas de reprodução e de descanso das borboletas monarcas



Fonte: Adaptado de Monarch Watch (2020).

O algoritmo MBO divide a população de borboletas monarcas em dois grupos conforme a localização das mesmas: América do Norte (subpopulação  $S_1$ ) e México (subpopulação  $S_2$ ). O número de borboletas monarcas na subpopulação  $S_1$  é  $N_{p1} = \text{ceil}(p \times N_p)$ , na qual  $\text{ceil}(x)$  arredonda  $x$  para o inteiro maior ou igual a  $x$ ,  $N_p$  é o tamanho total da população e  $p$  é a proporção de borboletas monarcas na subpopulação  $S_1$ , e o número de borboletas monarcas na subpopulação  $S_2$  é  $N_{p2} = N_p - N_{p1}$ .

Os grupos se reproduzem e os indivíduos mais aptos são mantidos para a próxima geração. O número total de borboletas é mantido constante. A etapa de reprodução denominada operador de migração é realizada pelas equações (27) e (28).

$$r = \text{rand} \times \text{peri} \quad (27)$$

$$x_{i,k}(t+1) = \begin{cases} x_{r1,k}(t) & \text{se } r \leq p \\ x_{r2,k}(t) & \text{se } r > p \end{cases} \quad (28)$$

em que  $\text{peri}$  indica o período de migração,  $\text{rand}$  é um número escolhido aleatoriamente de uma distribuição uniforme,  $p$  é a proporção de borboletas de  $S_1$ ,  $t$  é a geração atual,  $x_{r1,k}(t)$  refere-se à  $k$ -ésima componente de  $\mathbf{x}_{r1}$  selecionada aleatoriamente de  $S_1$ ,  $x_{r2,k}(t)$  corresponde à  $k$ -ésima componente de  $\mathbf{x}_{r2}$  selecionada aleatoriamente de  $S_2$  e  $x_{i,k}(t+1)$  corresponde à  $k$ -ésima componente de  $\mathbf{x}_i$  da próxima geração de  $S_1$ .

No método MBO, se o valor de  $p$  é grande, mais elementos das borboletas monarcas de  $S_1$  são selecionados, o que indica que a subpopulação  $S_1$  desempenha um papel mais importante no indivíduo gerado. Se  $p$  é pequeno, mais elementos das borboletas da subpopulação  $S_2$  são selecionados, o que indica que a subpopulação  $S_2$  desempenha um papel mais importante no indivíduo gerado.

Independentemente do operador de migração, as posições dos membros do grupo  $S_2$  são atualizadas aleatoriamente pelo operador de ajuste da borboleta observando determinadas condições. O operador de ajuste também inclui o voo de Lévy (XING; GAO, 2014) para calcular o deslocamento de cada borboleta. As equações (29) a (32) descrevem o operador de ajuste da borboleta.

$$d\mathbf{x} = L(\mathbf{x}_j(t)) \quad (29)$$

$$\alpha = S_{\max} / t^2 \quad (30)$$

$$x_{j,k}(t+1) = \begin{cases} x_{best,k}(t) & \text{se } rand \leq p \\ x_{r3,k}(t) & \text{se } rand > p \end{cases} \quad (31)$$

$$x_{j,k}(t+1) = x_{j,k}(t+1) + \alpha(dx_k - 0,5) \quad \text{se } rand > p \text{ e } rand > \text{BAR} \quad (32)$$

para as quais  $\mathbf{dx}$  refere-se ao deslocamento aleatório da borboleta  $j$  pertencente a  $S_2$  calculado pelo voo de Lévy  $L(\cdot)$ <sup>5</sup>,  $S_{\max}$  é o deslocamento máximo permitido,  $\alpha$  é um fator de ponderação,  $t$  é a geração atual,  $x_{best,k}(t)$  corresponde à componente de  $\mathbf{x}_{best}$  – o indivíduo com melhor avaliação de  $S_1$  e  $S_2$ ,  $x_{r3,k}(t)$  refere-se à  $k$ -ésima componente de  $\mathbf{x}_{r3}$  selecionada aleatoriamente de  $S_2$ , BAR é um parâmetro pré-definido que indica a taxa de ajuste da borboleta cujo valor pertence ao intervalo  $[0, 1]$  e  $x_{j,k}(t+1)$  corresponde à  $k$ -ésima componente do indivíduo  $\mathbf{x}_j$  da próxima geração de  $S_2$ .

As duas subpopulações geradas são combinadas para formar uma nova população. Os mesmos processos são repetidos para dividir, atualizar e combinar as gerações até que uma solução satisfatória seja encontrada ou que um número máximo de iterações seja alcançado (FARIS; ALJARAH; MIRJALILI, 2017). O fluxograma de execução do algoritmo MBO é apresentado na Figura 15 (WANG; DEB; CUI, 2015).

Chen, Chen e Gao (2017) utilizaram um algoritmo MBO modificado em um problema de roteamento dinâmico de veículos, que é um problema NP-difícil, e obtiveram doze novas e melhores soluções para o problema. Ehteram *et al.* (2017) usaram o algoritmo MBO para otimizar a utilização de um sistema de múltiplos reservatórios com o objetivo de melhorar a produção de energia hidrelétrica. Sambariya e Gupta (2017) aplicaram o algoritmo MBO para obter os valores dos parâmetros para o controlador PID de um sistema regulador de tensão automático.

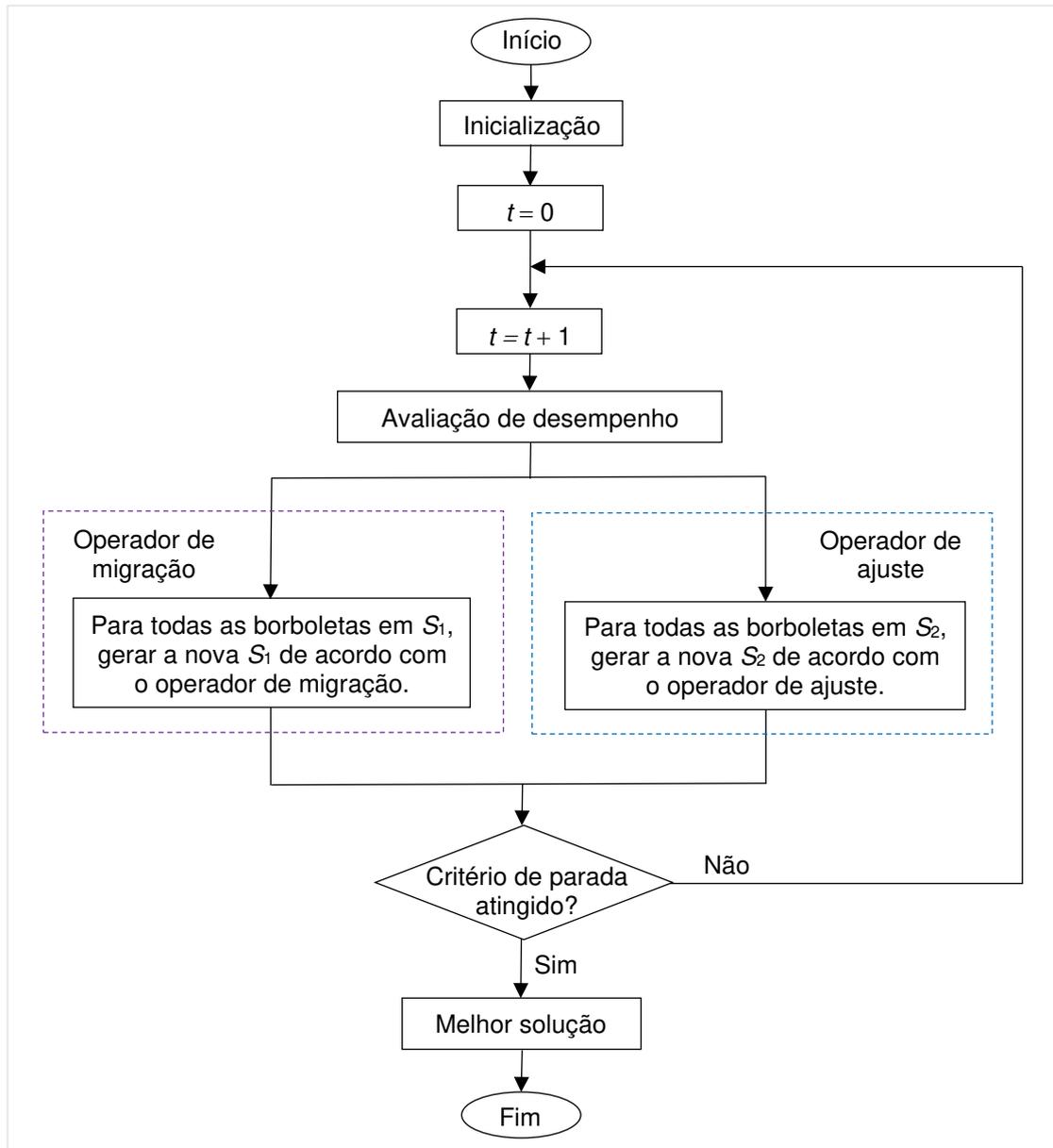
Strumberger *et al.* (2018a) aplicaram o algoritmo MBO para resolver o problema de otimização de redes de sensores sem fio, que é um problema NP-difícil. O principal objetivo deste problema é encontrar as coordenadas geográficas dos nós sensores com posições desconhecidas, implantados aleatoriamente na área de monitoramento. Yadav e Ghoshal (2018) utilizaram MBO para resolver o problema de fluxo de potência

---

<sup>5</sup> De fato, no código em MATLAB disponibilizado pelos autores,  $\mathbf{dx}$  independe de  $\mathbf{x}_j$ . Esta equação foi mantida aqui como apresentada no artigo de Wang, Deb e Cui (2015). Ainda se deve considerar que os autores aplicaram a distribuição de Cauchy (não da forma exata), que é um caso especial da distribuição de Lévy.

ótimo, que consiste em definir a melhor estratégia de operação de um sistema de energia elétrica assegurando o atendimento das restrições operacionais e físicas do sistema.

Figura 15 – Fluxograma do algoritmo MBO



Fonte: Adaptado de Wang, Deb e Cui (2015).

Yi, Wang e Wang (2019) utilizaram o MBO e uma versão modificada dele para resolver o problema de roteamento de veículos de emergência em desastres repentinos em uma região da China. Kim e Chae (2019) aplicaram o algoritmo MBO para determinar a configuração do leiaute e definição do caminho mais curto para o equipamento de manuseio de materiais em um processo industrial. Soltani e

Hadavandi (2019) desenvolveram um simulador com RNA treinada pelo algoritmo MBO para prever a tenacidade dos fios utilizados em um processo de fiação, visando otimizar a seleção das matérias primas e melhorar a qualidade do fio.

### 2.9.1 GCMBO

O algoritmo MBO apresentado por Wang, Deb e Cui (2015) apresenta valores piores para o desvio padrão e valor médio da função objetivo para algumas funções de teste, segundo os próprios autores. No mesmo ano uma variante do algoritmo MBO é proposta, o *Greedy Strategy and Self-Adaptive Crossover Operator* MBO (GCMBO) (WANG; ZHAO; DEB, 2015; WANG *et al.*, 2016).

Similar ao MBO, o número de borboletas monarcas na subpopulação  $S_1$  é  $N_{p1} = \text{ceil}(p \times N_p)$ , e na subpopulação  $S_2$  é  $N_{p2} = N_p - N_{p1}$ , em que  $N_p$  é o tamanho total da população e  $p$  é a proporção de borboletas monarcas na subpopulação  $S_1$ . O  $x_{i,k}(t+1)$  na subpopulação  $S_1$  é obtido pelas equações (27) e (28). Todos os indivíduos da subpopulação  $S_2$  são atualizados conforme as equações (29) a (32), e os indivíduos gerados passam a ser denominados  $\mathbf{x}_{j1}(t+1)$ .

O GCMBO consiste na adição de duas estratégias ao algoritmo MBO. Enquanto todos<sup>6</sup> os indivíduos gerados após a aplicação dos operadores de migração e ajuste são passados para a próxima geração no MBO, o GCMBO incorpora a estratégia gananciosa, onde somente os indivíduos da prole com melhor desempenho que seus pais são aceitos. Esta estratégia é formulada conforme a equação (33).

$$\mathbf{x}_{i,new}(t+1) = \begin{cases} \mathbf{x}_i(t+1) & \text{se } f(\mathbf{x}_i(t+1)) < f(\mathbf{x}_i(t)) \\ \mathbf{x}_i(t) & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (33)$$

na qual  $\mathbf{x}_{i,new}(t+1)$  são os indivíduos da próxima geração,  $f(\mathbf{x}_i(t+1))$  e  $f(\mathbf{x}_i(t))$  são os valores da função objetivo a ser minimizada das gerações  $t+1$  e  $t$ , respectivamente. A estratégia gananciosa é aplicada tanto na etapa de migração quanto no operador de ajuste.

A segunda estratégia é um operador de cruzamento melhorado, chamado de cruzamento autoadaptativo (do inglês *Self-Adaptive Crossover Operator*, SAC), o qual

---

<sup>6</sup> Exceto os indivíduos da seleção elitista.

é inserido no operador de ajuste do MBO com o objetivo de aumentar a diversidade da população. Este operador é dado por

$$\mathbf{x}_{j_2}(t+1) = \mathbf{x}_{j_1}(t+1) \times (1 - CR) + \mathbf{x}_j(t) \times CR \quad (34)$$

em que  $\mathbf{x}_{j_2}(t+1)$  é um novo indivíduo gerado a partir de  $\mathbf{x}_{j_1}(t+1)$  e  $\mathbf{x}_j(t)$  e  $CR$  é a taxa de cruzamento. O autoajuste adaptativo do operador  $CR$  é realizado por

$$CR = 0,8 + 0,2 \times \frac{f(\mathbf{x}_j(t)) - f(\mathbf{x}_{best})}{f(\mathbf{x}_{worst}) - f(\mathbf{x}_{best})} \quad (35)$$

em que  $f(\mathbf{x}_j(t))$  é o valor da função objetivo da borboleta  $j$  na subpopulação  $S_2$ ,  $\mathbf{x}_{best}$  e  $\mathbf{x}_{worst}$  são os indivíduos com melhor e pior avaliação da função objetivo da população e suas funções objetivo são, respectivamente,  $f(\mathbf{x}_{best})$  e  $f(\mathbf{x}_{worst})$ . Segundo os autores, a equação (35) resulta em valores para  $CR$  no intervalo  $[0,2, 0,8]$ <sup>7</sup>.

Em seguida, o novo indivíduo é obtido usando a estratégia gananciosa, formulada por

$$\mathbf{x}_{j,new}(t+1) = \begin{cases} \mathbf{x}_{j_1}(t+1) & \text{se } f(\mathbf{x}_{j_1}(t+1)) < f(\mathbf{x}_{j_2}(t+1)) \\ \mathbf{x}_{j_2}(t+1) & \text{se } f(\mathbf{x}_{j_2}(t+1)) < f(\mathbf{x}_{j_1}(t+1)) \end{cases} \quad (36)$$

na qual  $f(\mathbf{x}_{j_1}(t+1))$  e  $f(\mathbf{x}_{j_2}(t+1))$  são os valores da função objetivo para os indivíduos  $\mathbf{x}_{j_1}(t+1)$  e  $\mathbf{x}_{j_2}(t+1)$ , respectivamente, e  $\mathbf{x}_{j,new}(t+1)$  são os indivíduos gerados para a próxima geração.

### 2.9.2 IMBO

Faris, Aljarah e Mirjalili (2017) propuseram um operador de ajuste que substitui o operador equivalente do MBO. Como justificativa, citam a convergência prematura e alto tempo de execução deste algoritmo. O novo algoritmo obtido é chamado *Improved MBO* (IMBO).

No IMBO o operador de ajuste passa a ser realizado pelo mecanismo de intensificação do otimizador multiverso (do inglês *Multiverse Optimizer*, MVO) (MIRJALILI; MIRJALILI; HATAMLOU, 2016). O operador de ajuste do IMBO possui a mesma tarefa que o do MBO, que é construir a segunda parte da população, mas

<sup>7</sup> Conforme apresentado nos artigos de Wang, Zhao e Deb (2015) e Wang *et al.* (2016),  $CR$  possui valores no intervalo  $[0,2, 0,8]$ , o que não corresponde à formulação da equação (35).

utilizando uma abordagem diferente. O objetivo do operador de ajuste do IMBO é alcançar um melhor equilíbrio entre intensificação e diversificação no algoritmo MBO.

O operador de ajuste do IMBO gera um indivíduo  $\mathbf{x}_j(t+1)$  da nova geração usando o melhor indivíduo  $\mathbf{x}_{best}(t)$  e o indivíduo  $\mathbf{x}_j(t)$  da geração anterior. Cada elemento  $k$  do novo indivíduo  $\mathbf{x}_j(t+1)$  é obtido a partir do mecanismo apresentado na equação (37).

$$x_{j,k}(t+1) = \begin{cases} x_{j,k}(t), & \text{se } s_1 > C \\ x_{best,k}(t) - S \times rand & \text{se } s_1 \leq C \text{ e } s_2 \leq 0,5 \\ x_{best,k}(t) + S \times rand & \text{se } s_1 \leq C \text{ e } s_2 > 0,5 \end{cases} \quad (37)$$

As variáveis de chaveamento  $s_1$  e  $s_2$  são aleatórias e distribuídas uniformemente no intervalo  $[0, 1]$ . A variável  $s_1$  é usada para determinar se um novo elemento  $k$  deve ser gerado com base no melhor indivíduo  $\mathbf{x}_{best}(t)$  ou no  $\mathbf{x}_j(t)$  da geração anterior. Se o valor de  $s_1$  for maior que o limite  $C$ , então o valor de  $x_{j,k}(t+1)$  é copiado de  $x_{j,k}(t)$ , ou seja, o indivíduo herda o elemento  $j$  de sua versão anterior. Em contraste, a variável  $s_2$  é usada para determinar a direção quando construindo  $x_{j,k}(t+1)$  baseado em  $x_{best,k}(t)$ .

O valor de  $C$  é dinâmico e aumenta linearmente com o número de iterações do algoritmo. O valor de  $C$  é calculado usando a equação (38), sendo  $N$  o número total de iterações,  $l$  o número da iteração corrente e  $b \in [0, 0,5]$  o coeficiente linear.

$$C = b + \left( \frac{1-b}{N} \right) l \quad (38)$$

A variável  $S$ , usada para determinar o tamanho do passo no processo de intensificação, é calculada usando a equação (39), na qual  $n$  é uma constante inteira.

$$S = 1 - \left( \frac{l}{N} \right)^{\left( \frac{1}{n} \right)} \quad (39)$$

Faris, Aljarah e Mirjalili (2017) aplicaram doze meta-heurísticas, dentre elas MBO, GCMBO e IMBO, como algoritmos de treinamento para RNAs do tipo Perceptron Multicamadas com uma camada oculta.

### 2.9.3 MBO-FS

Os resultados de testes empíricos obtidos por Strumberger *et al.* (2018b) mostraram a deficiência do algoritmo MBO ocasionado pelo operador de ajuste da borboleta. A convergência prematura em mínimos locais leva a valores médios elevados com alta dispersão em funções de teste de otimização global.

Para tratar essa deficiência, os autores propuseram a hibridização do algoritmo MBO com a meta-heurística Algoritmo de Vagalumes (do inglês *Firefly Algorithm*, FA) (YANG, 2010b). O algoritmo híbrido desenvolvido chama-se MBO *Firefly Search* (MBO-FS).

No algoritmo a equação de busca do FA é usada nas iterações iniciais em substituição ao operador de ajuste da borboleta. No FA, o movimento de um vagalume  $i$  na direção de outro vagalume mais atrativo (brilhante)  $j$  é determinado por

$$\mathbf{x}_i(t+1) = \mathbf{x}_i(t) + \beta_0 e^{-\gamma r_{i,j}^2} [\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_i(t)] + \alpha \epsilon_i \quad (40)$$

em que o segundo termo é devido à atração, enquanto o terceiro é aleatório com o vetor de variáveis aleatórias  $\epsilon_i$  extraído de uma distribuição gaussiana. Na equação (40),  $t+1$  é a próxima iteração,  $t$  é a iteração atual,  $\beta_0$  é a atratividade à distância  $r=0$ ,  $\gamma$  é o coeficiente de absorção de luz e caracteriza a variação da atratividade,  $r_{i,j}$  é a distância entre o vagalume  $i$  e  $j$ , e  $\alpha$  é uma constante, sendo que tipicamente  $\alpha \in [0, 1]$  (YANG, 2010b).

### 3 AVALIAÇÃO DE DESEMPENHO DE ALGORITMOS DE OTIMIZAÇÃO

Este capítulo apresenta a revisão da literatura sobre conjunto de teste, apresentação de resultados, inferência estatística, testes não paramétricos e testes de comparações múltiplas<sup>8</sup>.

Para Jamil e Yang (2013), um novo algoritmo de otimização global deve ter seu desempenho validado e comparado com outros algoritmos existentes utilizando um conjunto de teste adequado. Acrescentam ainda que, idealmente, os problemas usados devem ser diversos e não tendenciosos, apesar de não haver um conjunto de teste unânime na literatura.

Ao se avaliar um algoritmo, deve-se comparar seu desempenho em relação a outros considerando as classes de problemas abordados. Assim se pode determinar para quais aplicações um algoritmo é adequado. Para isso é essencial dispor de um conjunto de teste suficientemente grande, com uma ampla variedade de problemas, tais como unimodais, multimodais, regulares, irregulares, separáveis, não separáveis e multidimensionais (JAMIL; YANG, 2013; RÖNKKÖNEN *et al.*, 2011).

Diferentes problemas para avaliação de algoritmos de otimização têm sido propostos na literatura, principalmente a partir dos anos 1960, além de métricas de desempenho, orientações para realização dos testes e métodos para apresentação dos resultados (BEIRANVAND; HARE; LUCET, 2017).

Beiranvand, Hare e Lucet (2017) conceberam um *framework* para avaliação comparativa de algoritmos de otimização (Figura 16). A comparação pode ter várias motivações, como auxiliar na seleção do melhor algoritmo para tratar um problema real, apresentar o valor de um novo algoritmo quando contraposto a métodos exatos, comparar a nova versão de um algoritmo com versões anteriores e avaliar o desempenho de um algoritmo quando diferentes ajustes nos parâmetros são usados.

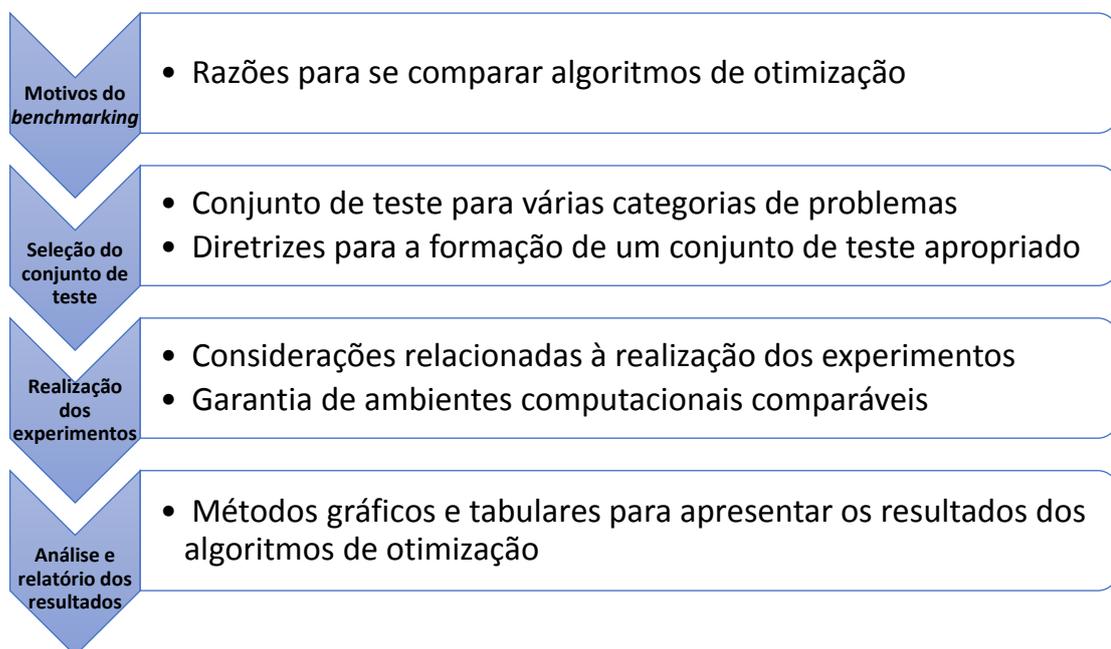
Um conjunto de teste é uma coleção de problemas de teste que, em geral, pode ser formado por casos de aplicação ou problemas gerados artificialmente. O uso de um conjunto ou outro depende do objetivo para o qual o algoritmo foi desenvolvido. Casos de aplicação servem para avaliar o desempenho de um algoritmo na solução de problemas de uma mesma categoria e seus resultados dificilmente podem ser generalizados. Por outro lado, os problemas artificiais fornecem uma grande

---

<sup>8</sup> Frequentemente designados como testes ou procedimentos *post-hoc* (depois disto, do latim).

quantidade de dados comparativos a partir dos quais se pode caracterizar um algoritmo, apesar de muitas vezes não terem relação direta com problemas de interesse prático. Independentemente do objetivo, para um conjunto de teste apropriado, devem ser considerados o número de problemas envolvidos, a diversidade dos problemas, problemas com soluções conhecidas, os pontos de partida do algoritmo e as estruturas dos problemas<sup>9</sup> (BEIRANVAND; HARE; LUCET, 2017).

Figura 16 – *Framework* para avaliação de algoritmos de otimização



Fonte: Elaborado pelo autor.

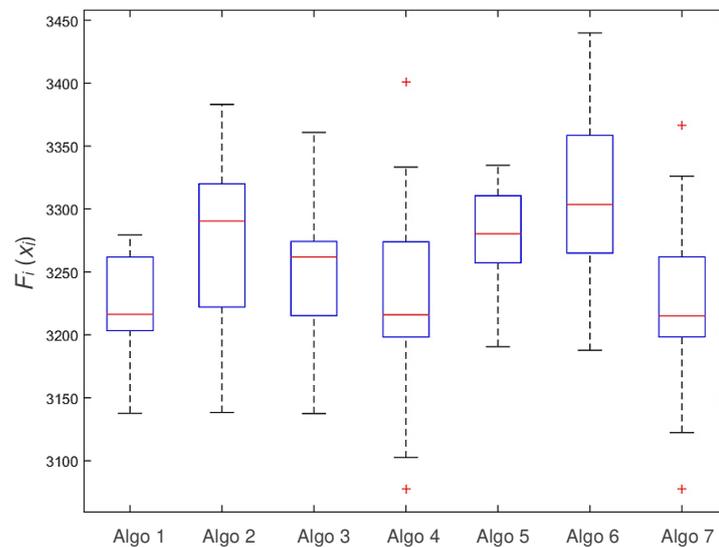
Segundo Beiranvand, Hare e Lucet (2017), fatores ambientais devem ser considerados na realização dos experimentos, pois eles podem alterar os resultados. Fatores ambientais incluem as características do sistema computacional (como processador, sistema operacional e memória), a linguagem de programação, o compilador e as habilidades do programador.

Quanto à apresentação dos resultados, tabelas numéricas e gráficos podem expressar os valores obtidos por um teste de modo conciso e permitir a comparação, mesmo que qualitativa, de desempenho entre algoritmos.

<sup>9</sup> Como exemplo, artigos recentes ainda usam funções de teste com os limites do espaço de busca simétricos em relação à origem e com mínimo global em  $[0, 0, \dots, 0]^D$ .

Medidas descritivas, por exemplo, são comumente expressas em tabelas e apresentam informações estatísticas que são calculadas sobre os resultados de várias execuções de um algoritmo. Dentre as medidas descritivas pode-se citar: o valor máximo, o valor mínimo, o quartil superior ou terceiro quartil ( $Q_3$ ), a média, a mediana (Md), o quartil inferior ou primeiro quartil ( $Q_1$ ), o desvio padrão e o desvio absoluto mediano (MAD). Os extremos e quartis podem ser representados em diagramas de caixa (do inglês *boxplot*), como ilustra a Figura 17 (MONTGOMERY; RUNGER, 2003).

Figura 17 – Exemplo de diagrama de caixa



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os diagramas de caixa também podem mostrar os resultados atípicos, também chamados de extremos ou discrepantes (do inglês *outliers*), ou seja, resultados maiores que o limite superior ( $L_s$ ) ou menores que o limite inferior ( $L_l$ ), conhecidos como limites de fio de bigode (do inglês *whiskers*). Esses limites são definidos como

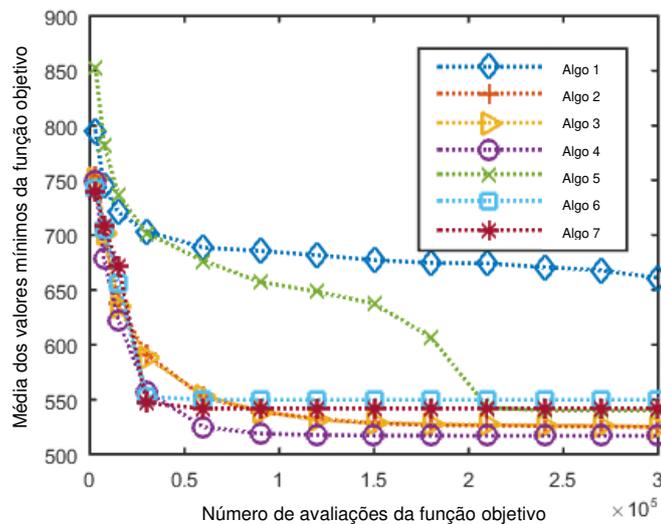
$$L_s = Q_3 + c \cdot \text{AIQ} \quad (41)$$

$$L_l = Q_1 - c \cdot \text{AIQ} \quad (42)$$

sendo AIQ a amplitude interquartil e  $c$  uma constante real positiva, tipicamente igual a 1,5. Segundo Zar (2014), nos casos em que os valores extremos são dados válidos, não devem ser empregadas técnicas estatísticas que requerem normalidade da população e igualdade de variâncias.

Outro tipo de gráfico frequentemente usado na avaliação de desempenho de algoritmos é o gráfico de convergência. Neste tipo de gráfico, o desempenho de diferentes métodos de otimização é visualizado traçando o melhor valor de função encontrado em relação a alguma medida de avaliação fundamental. A Figura 18 apresenta um exemplo de gráfico de convergência hipotético para sete algoritmos que mostra a evolução da média dos valores mínimos encontrados para um dado problema de otimização em relação ao número de avaliações da função objetivo. Os gráficos de convergência são úteis para discutir alguns comportamentos específicos do algoritmo, mas são inadequados para uma avaliação comparativa global, pois só podem ser usados para analisar um problema de teste por vez (BEIRANVAND; HARE; LUCET, 2017).

Figura 18 – Exemplo de gráfico de convergência



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os recursos gráficos e tabulares facilitam a visualização dos resultados, mas são difíceis de serem analisados, principalmente quando a quantidade de dados é grande. Métodos de inferência estatística permitem interpretar os resultados de um conjunto de teste e obter conclusões apropriadas.

### 3.1 Inferência Estatística

A inferência estatística é um ramo da estatística que consiste de métodos para obtenção de conclusões a respeito de uma população a partir de uma amostra

aleatória da mesma. Ela se divide em duas grandes áreas: a estimação de parâmetros e os testes de hipóteses.

A estimação de parâmetros consiste em fazer afirmações probabilísticas sobre o modelo probabilístico da população a partir de uma amostra aleatória desta população. Os testes de hipóteses permitem fazer inferências sobre outras características do modelo probabilístico da população além dos parâmetros (MONTGOMERY; RUNGER, 2003; MORETTIN, 2009).

O teste de hipóteses é um procedimento ou regra de decisão que permite aceitar ou rejeitar uma hipótese estatística, com um grau de risco conhecido e com base nas evidências (informações) fornecidas pela amostra (MONTGOMERY; RUNGER, 2003; MORETTIN, 2009). São formuladas duas hipóteses básicas:

- $H_0$ : hipótese nula – hipótese estatística aceita como verdadeira até prova estatística em contrário.
- $H_1$ : hipótese alternativa – hipótese contrária à hipótese nula.

No caso da comparação de desempenho dos algoritmos, a hipótese nula é a afirmação de nenhum efeito ou diferença, enquanto a hipótese alternativa representa a presença de um efeito ou diferença entre os algoritmos.

Ao realizar um teste de hipóteses, um nível de significância ( $\alpha$ ) é utilizado para determinar em qual nível a hipótese pode ser rejeitada (MONTGOMERY; RUNGER, 2003; DERRAC *et al.*, 2011).

Um teste de hipóteses pode ser bilateral (não direcional) ou unilateral (direcional). Considerando um teste de hipóteses bilateral envolvendo duas médias  $\mu_a$  e  $\mu_b$ , por exemplo, tem-se como hipótese nula  $H_0: \mu_a = \mu_b$  e como hipótese alternativa  $H_1: \mu_a \neq \mu_b$ . Considerando um teste de hipóteses unilateral pode-se ter como hipótese nula  $H_0: \mu_a \geq \mu_b$  e como hipótese alternativa  $H_1: \mu_a < \mu_b$ , ou como hipótese nula  $H_0: \mu_a \leq \mu_b$  e como hipótese alternativa  $H_1: \mu_a > \mu_b$ . As hipóteses nula e alternativa também podem ser escritas como  $H_0: \mu_a - \mu_b = 0$  e  $H_1: \mu_a - \mu_b \neq 0$ ;  $H_0: \mu_a - \mu_b \leq 0$  e  $H_1: \mu_a - \mu_b > 0$ ;  $H_0: \mu_a - \mu_b \geq 0$  e  $H_1: \mu_a - \mu_b < 0$  (SHESKIN, 2011). Zar (2014) apresenta que, quando os testes não paramétricos são apropriados, os testes de hipóteses (bilateral e unilateral) utilizam a diferença da soma dos postos ou a diferença dos postos médios.

Num teste de hipóteses estatístico, o  $p$ -valor<sup>10</sup> é a probabilidade de se observar um valor da estatística maior ou igual ao valor efetivamente observado, supondo que  $H_0$  seja verdadeiro. Um  $p$ -valor informa se um teste de hipóteses é significativo ou não. Deve-se verificar o  $p$ -valor com relação ao nível de significância ( $\alpha$ ) para a tomada de decisão, ou seja, se o  $p$ -valor for menor que o valor definido para  $\alpha$ , a hipótese nula deve ser rejeitada (MONTGOMERY; RUNGER, 2003; DERRAC *et al.*, 2011).

Ao se realizar um teste de hipóteses existem dois tipos de erros que podem ser cometidos. O erro do Tipo I consiste em rejeitar  $H_0$  quando de fato  $H_0$  é verdadeiro, sendo que o nível de significância ( $\alpha$ ) é a probabilidade de se cometer um erro do Tipo I. O erro do Tipo II consiste em aceitar  $H_0$  quando de fato  $H_0$  é falsa, sendo representado por  $\beta$ . O poder de um teste estatístico representa a capacidade do teste de rejeitar  $H_0$  quando de fato  $H_0$  é falsa, sendo definido por  $1 - \beta$  (MONTGOMERY; RUNGER, 2003; GARCIA *et al.*, 2010).

O procedimento geral para a realização de um teste de hipóteses consiste em: definir as hipóteses de teste ( $H_0$  e  $H_1$ ), identificar o teste estatístico apropriado para os dados que se deseja analisar, definir o nível de significância ( $\alpha$ ) ou o nível de confiança ( $1 - \alpha$ ), calcular a estatística de teste ou obter a probabilidade ( $p$ -valor), e avaliar o resultado para a tomada de decisão, que consiste em aceitar ou rejeitar a hipótese nula (MORETTIN, 2009).

Outra abordagem é obter um intervalo de confiança para expressar o grau de incerteza associado a uma estimativa. A estimativa intervalar de um parâmetro é um intervalo entre duas estatísticas (limite inferior e limite superior) que inclui o verdadeiro valor do parâmetro com uma dada probabilidade. Este intervalo é denominado de intervalo de confiança de nível  $100(1 - \alpha)\%$ , sendo o intervalo de confiança de 95% o mais utilizado. Se o intervalo de confiança é calculado, o resultado do teste de hipóteses pode ser inferido em um nível de significância estatística associado. Em um teste de hipóteses bilateral, se o intervalo de confiança para um certo parâmetro não incluir o valor sob a hipótese nula que está sendo testada, a hipótese nula será rejeitada e, quando o intervalo de confiança incluir o valor sob a hipótese nula que está sendo testada, esta será aceita (MONTGOMERY; RUNGER, 2003; BERRAR; LOZANO, 2013).

---

<sup>10</sup> Outras traduções para  $p$ -value: P-valor, valor-p, valor p, valor de p, valor de P.

O resultado de um teste de hipóteses consiste em aceitar ou rejeitar a hipótese nula. O  $p$ -valor resultante de um teste de hipóteses não pode ser interpretado como a probabilidade de que um algoritmo tenha um desempenho superior sobre o seu concorrente. Outra interpretação incorreta é que um  $p$ -valor muito pequeno (por exemplo, menor que 0,001) implica em uma grande diferença de desempenho entre os algoritmos, enquanto um  $p$ -valor logo abaixo de 0,05 implica em um efeito moderado. Essa interpretação não é correta, pois o  $p$ -valor depende do tamanho da amostra (BERRAR; LOZANO, 2013). Quanto maior o tamanho da amostra, maior será o poder do teste estatístico, trazendo evidências de que uma diferença estatisticamente significativa sempre poderá ser alcançada.

Após a realização dos testes de hipóteses, podem ser aplicados testes para estimar o tamanho do efeito ou a magnitude do efeito (do inglês *effect size*). Conforme Cohen (1988), o tamanho do efeito pode ser interpretado como um índice do grau de desvio em relação à hipótese nula. Quanto maior o valor do tamanho do efeito, maior será o grau de concordância entre os sujeitos em estudo. Os valores para os níveis de tamanho do efeito sugeridos por Cohen (1988) são: efeito fraco (baixa concordância) de 0,1 a 0,3; efeito médio ou moderado de 0,3 a 0,5 e efeito forte (alta concordância) para valores acima de 0,5. Com a mesma base descritiva, diferentes tamanhos de amostra resultam em diferentes  $p$ -valores, mas não resultam em diferenças nas estimativas dos tamanhos dos efeitos. Tomczak e Tomczak (2014) apresentaram vários testes para estimar o tamanho do efeito em diferentes testes paramétricos e não paramétricos.

Muitos testes estatísticos tradicionais baseiam-se em amostras que satisfazem condições chamadas parâmetros. Tais testes são chamados testes paramétricos ou testes dependentes de distribuição de referência. Essas condições incluem (DEMSAR, 2006; GARCIA *et al.*, 2009; CORDER; FOREMAN, 2014):

- a) as observações devem ser independentes;
- b) as observações devem ser obtidas aleatoriamente de uma população normalmente distribuída;
- c) as observações devem ter variâncias iguais (homoscedasticidade<sup>11</sup>).

Para a verificação da normalidade da amostra de uma população pode-se realizar o teste de Shapiro-Wilk, Anderson-Darling, Kolmogorov-Smirnov, entre outros.

---

<sup>11</sup> A grafia homoscedasticidade consta no Vocabulário Ortográfico da Língua Portuguesa, apesar da grafia homocedasticidade ser frequente nas referências em português.

A homoscedasticidade pode ser averiguada pelos testes de Bartlett (adequado para dados com distribuição normal), de Levene e de Fligner-Killeen (mais robustos para dados com distribuição não normal), por exemplo (MONTGOMERY; RUNGER, 2003; ZAR, 2014; HOLLANDER; WOLFE; CHICKEN, 2014).

Outros testes, no entanto, extraem inferências sobre populações sem se referir a parâmetros. Tais procedimentos são chamados de testes não paramétricos ou testes livres de distribuição. Estes testes não fazem qualquer suposição a respeito da forma da distribuição dos dados (DERRAC *et al.*, 2011; CORDER; FOREMAN, 2014).

A determinação do teste estatístico apropriado, paramétrico ou não paramétrico, para os dados das amostras que se deseja analisar, inicialmente deve-se verificar a normalidade e a homoscedasticidade. Os resultados obtidos são analisados para se definir o teste estatístico adequado na comparação de desempenho dos algoritmos.

Se as condições de normalidade e homoscedasticidade são satisfeitas, devem ser aplicados os testes paramétricos como, por exemplo, o teste de análise de variância (do inglês *Analysis of Variance*, ANOVA) para três ou mais amostras<sup>12</sup>. Se apenas a normalidade for satisfeita, devem ser aplicados testes paramétricos como, por exemplo, o teste *t* de *Student* para duas amostras com variâncias diferentes (GARCIA *et al.*, 2009; LATORRE *et al.*, 2020).

Quando as condições de normalidade e homoscedasticidade não são atendidas, devem ser aplicados testes não paramétricos como o teste de Wilcoxon, para duas amostras dependentes, e o teste de Friedman, para três ou mais amostras dependentes (DERRAC *et al.*, 2011; LATORRE *et al.*, 2020). Carrasco *et al.* (2020) realizaram um levantamento sobre os diferentes testes estatísticos, paramétricos e não paramétricos, utilizados para a comparação de algoritmos de aprendizado de máquina e otimização.

Nesta tese foi utilizado o teste não paramétrico de Friedman, pois os testes de normalidade e homoscedasticidade sobre os dados obtidos com os experimentos mostraram que estas condições não foram atendidas.

---

<sup>12</sup> A ANOVA pode ser aplicada para amostras independentes ou dependentes (pareadas). No caso de amostras dependentes, ela é denominada ANOVA para medidas repetidas.

### 3.2 Teste de Friedman

O teste de Friedman é um método de análise não paramétrico aplicado a um experimento em blocos ao acaso (aleatorizado), particularmente quando os dados não atendem aos pressupostos de normalidade e homoscedasticidade da análise de variância (ZAR, 2014). O teste de Friedman é utilizado para três ou mais grupos dependentes ou pareados, ou seja, cada observação de um grupo depende ou está relacionada a uma dada observação do outro grupo.

Para o teste de Friedman, os dados podem ser dispostos em uma tabela com  $n$  linhas e  $k$  colunas com apenas uma observação  $c$  em cada uma das  $n \times k$  células, conforme Tabela 1. As observações nas diferentes linhas são independentes, mas as colunas não, pois apresentam alguma unidade de associação. As linhas representam os blocos, que neste caso contém apenas um sujeito cada, e as colunas representam os tratamentos. Os  $k$  tratamentos são aplicados aos  $n$  sujeitos. A observação de cada tratamento deve ser substituída pelo seu respectivo posto<sup>13</sup> (do inglês *rank*) relativo às outras observações no mesmo bloco (CHAKRABORTI; GIBBONS, 2010).

Tabela 1 – Exemplo de disposição dos dados para o teste de Friedman

		Tratamentos			
		$T_1$	$T_2$	...	$T_k$
Blocos	$B_1$	$r_{11}$	$r_{12}$		$r_{1k}$
	$B_2$	$r_{21}$	$r_{22}$		$r_{2k}$
	$\vdots$				
	$B_n$	$r_{n1}$	$r_{n2}$		$r_{nk}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

As observações de cada bloco  $i$  são classificadas em ordem ascendente de 1 a  $k$ . O posto é, portanto, o número de ordem de uma observação. No caso de observações iguais (do inglês *ties*), deve-se calcular a média dos postos inicialmente atribuídos e então substituí-los pela média obtida.

Sendo  $r_{ij}$  o posto da observação do bloco  $i$  e tratamento  $j$  obtém-se  $R_j$ , a média dos postos das células do tratamento  $j$ ,

<sup>13</sup> Tradução encontrada com maior frequência.

$$R_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_{ij} \quad \text{para } j = 1, \dots, k \quad (43)$$

Considerando a hipótese nula, em que todos os algoritmos são equivalentes e, portanto, suas classificações  $R_j$  devem ser iguais, a estatística de Friedman pode ser calculada como

$$\chi_F^2 = \frac{12n}{k(k+1)} \left[ \sum_j R_j^2 - \frac{k(k+1)^2}{4} \right] \quad (44)$$

A distribuição da estatística de Friedman  $\chi_F^2$  se aproxima da distribuição  $\chi^2$  (qui-quadrado) com  $k-1$  graus de liberdade quando se tem, como regra geral<sup>14</sup>,  $n > 10$  e  $k > 5$  (DEMSAR, 2006; DERRAC *et al.*, 2011). Para um número menor de tratamentos e/ou blocos, os valores exatos devem ser calculados (ZAR, 2014).

A estimativa do tamanho do efeito para o teste de Friedman é calculada pela equação (45) (TOMCZAK; TOMCZAK, 2014; ZAR, 2014).

$$W = \frac{\chi_F^2}{n(k-1)} \quad (45)$$

na qual  $W$  é o valor do coeficiente de concordância de Kendall e  $\chi_F^2$  é a estatística de Friedman. O coeficiente de Kendall é usado como uma medida da concordância dos postos nos blocos, assumindo valores de 0 (indica sem concordância) até 1 (indica uma concordância perfeita). O coeficiente de concordância de Kendall utiliza os níveis de tamanho do efeito sugeridos por Cohen (1988).

Se a hipótese nula é rejeitada no teste de Friedman, a detecção de quais diferenças são significativas entre os algoritmos pode ser feita com a aplicação de testes de comparações múltiplas, também denominados testes *post-hoc*, que são métodos utilizados para comparar um tratamento de controle<sup>15</sup> com dois ou mais tratamentos ou para comparar todos os tratamentos entre si.

### 3.3 Testes de Comparações Múltiplas

Para realizar a comparação entre mais de dois tratamentos devem ser utilizados testes de comparações múltiplas.

<sup>14</sup> Não há consenso na literatura consultada quanto aos valores mínimos de  $n$  e  $k$  para a aplicação da estatística qui-quadrado, já que esta se trata de uma aproximação assintótica da estatística de Friedman, ou seja, para  $nk \rightarrow \infty$ .

<sup>15</sup> Também denominado grupo de controle ou apenas controle.

Nas comparações múltiplas  $1 \times N$ , um dos tratamentos é considerado como tratamento de controle, podendo ser o tratamento de melhor desempenho ou um novo tratamento proposto. Nas comparações múltiplas  $N \times N$  todos os tratamentos são comparados entre si.

Nas comparações múltiplas  $1 \times N$  são comparados os  $k - 1$  tratamentos do estudo com o tratamento de controle, enquanto que nas comparações múltiplas  $N \times N$  são consideradas  $(k - 1) / 2$  comparações possíveis entre os tratamentos. Portanto, o grupo de hipóteses será composto por  $k - 1$  hipóteses nas comparações  $1 \times N$  ou  $(k - 1) / 2$  hipóteses nas comparações  $N \times N$ , que podem ser ordenadas pelo  $p$ -valor, do menor ao maior.

Os  $p$ -valores de todas as hipóteses do grupo podem ser obtidos por meio da conversão da classificação dos postos calculados aplicando a estatística do teste  $z$  para comparação do tratamento  $i$  com o tratamento  $j$ . Se o teste não paramétrico de Friedman é utilizado, a estatística do teste  $z$  é dada por (DEMSAR, 2006; GARCIA *et al.*, 2010; DERRAC *et al.*, 2011)

$$z = \frac{R_i - R_j}{\sqrt{\frac{k(k+1)}{6n}}} \quad (46)$$

em que  $R_i$  e  $R_j$  são os postos médios dos tratamentos comparados,  $k$  o número total de tratamentos e  $n$  o número de blocos. O valor  $z$  é usado para obter a probabilidade correspondente da tabela de distribuição normal, que é então comparada com o  $\alpha$  especificado no procedimento.

Nas comparações múltiplas ocorre um erro acumulado proveniente das combinações das comparações entre os pares de tratamentos. Isto significa que não se tem controle sobre a taxa de erro da família de testes (do inglês *Family-Wise Error Rate*, FWER), definida como a probabilidade de fazer uma ou mais descobertas falsas entre todas as hipóteses ao realizar vários testes de pares de tratamentos. Desta forma, quando um  $p$ -valor é considerado em um teste de comparações múltiplas, ele reflete o erro de probabilidade de uma determinada comparação, mas não leva em consideração as demais comparações (DEMSAR, 2006; DERRAC *et al.*, 2011; ZAR, 2014).

Os testes de comparações múltiplas resolvem este problema considerando o erro acumulado do grupo e calculando os  $p$ -valores corrigidos (do inglês *Adjusted*

*P-Value*, APV). Desta forma, os testes *post-hoc* são realizados considerando o FWER e os APVs podem ser comparados diretamente com qualquer nível de significância ( $\alpha$ ) escolhido. Os testes de comparações múltiplas diferem na maneira como ajustam o  $\alpha$  para compensar as comparações múltiplas (DEMSAR, 2006; GARCIA *et al.*, 2009; GARCIA *et al.*, 2010; TRAWINSKI *et al.*, 2012).

Conforme Derrac *et al.* (2011), nas comparações múltiplas  $1 \times N$ , todas as hipóteses de igualdade entre o controle e os demais tratamentos podem ser testadas pela aplicação dos seguintes testes de comparações múltiplas: Bonferroni, Holm, Hochberg, Hommel, Holland, Rom, Finner e Li (DEMSAR, 2006; GARCIA *et al.*, 2009; GARCIA *et al.*, 2010; TRAWINSKI *et al.*, 2012; CARRASCO *et al.*, 2020).

Conforme Trawinski *et al.* (2012), nas comparações múltiplas  $N \times N$ , em que são analisadas as hipóteses de igualdade entre todas as comparações de pares de tratamentos existentes, podem ser utilizados os seguintes testes de comparações múltiplas: Nemenyi, Holm, Shaffer e Bergmann-Hommel (DEMSAR, 2006; GARCIA; HERRERA, 2008; DERRAC *et al.*, 2011; CARRASCO *et al.*, 2020).

Garcia e Herrera (2008), Derrac *et al.* (2011) e Trawinski *et al.* (2012) mostram que o teste de Bergmann-Hommel é o de melhor desempenho e Derrac *et al.* (2011) sugerem a utilização deste teste quando as diferenças entre os algoritmos comparados forem pouco significativas.

Nesta tese aplicaram-se os testes de comparações múltiplas  $N \times N$  de Nemenyi e de Bergmann-Hommel. Adicionalmente foram gerados os intervalos de confiança para comparação das diferenças de postos médios obtidos pelo teste de Friedman.

### 3.3.1 Teste de Nemenyi

No teste de Nemenyi, o valor de  $\alpha$  é ajustado em uma única etapa, dividindo-o pelo número de comparações realizadas entre os algoritmos,  $m = (k - 1)/2$ . O  $p$ -valor corrigido (APV) é dado por

$$APV_i = \min\{\nu, 1\} \quad \nu = mp_i \quad (47)$$

em que  $m$  é o número de comparações realizadas entre os tratamentos e  $p_i$  é o  $i$ -ésimo  $p$ -valor obtido da  $i$ -ésima hipótese (DERRAC *et al.*, 2011; TRAWINSKI *et al.*, 2012).

O desempenho de dois tratamentos pode ser considerado significativamente diferente se a diferença dos postos médios correspondentes supera a diferença crítica (do inglês *Critical Difference*, CD) calculada por (DEMSAR, 2006)

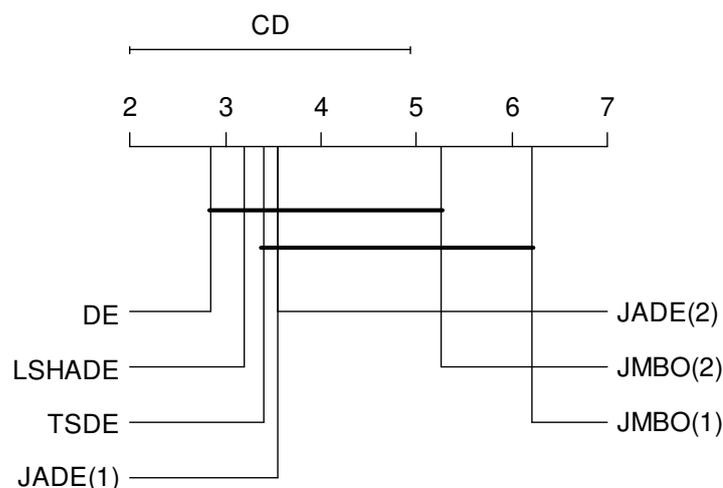
$$CD = q_{\alpha} \sqrt{\frac{k(k+1)}{6n}} \quad (48)$$

na qual os valores críticos  $q_{\alpha}$  são baseados na estatística estudentizada dividida por  $\sqrt{2}$ .

Demsar (2006) propôs o gráfico de diferenças críticas. Quando vários tratamentos são comparados, os resultados dos testes podem ser representados visualmente por um gráfico que mostra a diferença crítica e os tratamentos ordenados pelos postos médios. Os tratamentos que não são estatisticamente diferentes são conectados por uma barra, ou seja, quando a hipótese  $H_0$  é aceita pelo teste de hipóteses são formados grupos de tratamentos.

A Figura 19 apresenta um exemplo de gráfico de diferenças críticas utilizando o teste de Nemenyi. Neste exemplo os tratamentos são algoritmos de otimização. O gráfico de CD mostra que os algoritmos DE, L-SHADE, TSDE, JADE(1), JADE(2) e JMBO(2) são considerados estatisticamente iguais, assim como os algoritmos TSDE, JADE(1), JADE(2), JMBO(2) e JMBO(1). Já os algoritmos DE e L-SHADE são estatisticamente diferentes do algoritmo JMBO(1).

Figura 19 – Gráfico de diferenças críticas utilizando o teste de Nemenyi



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com o gráfico de diferenças críticas de Nemenyi pode-se visualizar os tratamentos que não são estatisticamente diferentes e seus postos médios, mas não

se pode decidir qual é o melhor dos tratamentos. O teste de Nemenyi é um teste simples e conservador, possui pouco poder e pode não encontrar diferença significativa entre os pares de tratamentos testados (DEMSAR, 2006; DERRAC *et al.*, 2011; TRAWINSKI *et al.*, 2012).

### 3.3.2 Teste de Bergmann-Hommel

O teste de Bergmann-Hommel consiste na busca exaustiva de todos os conjuntos possíveis de hipóteses para uma determinada comparação e todas as hipóteses elementares que não podem ser rejeitadas (GARCIA; HERRERA, 2008; TRAWINSKI *et al.*, 2012). A formulação do procedimento de Bergmann-Hommel utiliza a seguinte definição (GARCIA; HERRERA, 2008; DERRAC *et al.*, 2011):

**Definição:** Um conjunto de hipóteses com índice  $I \subseteq \{1, \dots, m\}$  é chamado de exaustivo se exatamente todo  $H_j$ , com  $j \in I$ , puder ser verdade.

Baseado nesta definição, o procedimento de Bergmann-Hommel rejeita todo  $H_j$  com  $j \notin A$ , sendo o conjunto de aceitação  $A$ , conjunto de índices de hipóteses nulas que são retidas, dado por

$$A = \cup \{I : I \text{ exaustivo}, \min\{P_i : i \in I\} > \alpha/|I|\} \quad (49)$$

em que  $|I|$  representa a cardinalidade do conjunto  $I$ .

Para este procedimento, deve-se verificar em cada subconjunto  $I$  de  $\{1, \dots, m\}$  se  $I$  é exaustivo, o que resulta em custo computacional alto. Em função disto, um conjunto  $E$  que conterà todos os conjuntos exaustivos de possíveis hipóteses para uma determinada comparação é previamente calculado. Uma vez obtido o conjunto  $E$ , as hipóteses que não pertencem ao conjunto  $A$  são rejeitadas (GARCIA; HERRERA, 2008; DERRAC *et al.*, 2011).

O  $p$ -valor corrigido (APV) do teste de Bergmann-Hommel é dado por (TRAWINSKI *et al.*, 2012; CARRASCO *et al.*, 2020)

$$APV_i = \min\{\nu, 1\}, \nu = \max\{|I| \cdot \min\{p_j, j \in I\} : I \text{ exaustivo}, i \in I\} \quad (50)$$

### 3.3.3 Intervalo de Confiança para o Teste de Friedman

O procedimento de comparação para o teste de Friedman é baseado na aplicação do método de Bonferroni-Dunn. A diferença crítica entre dois postos médios  $R_i$  e  $R_j$ , designada por  $CD_F$ , é obtida pela equação (51) (SHESKIN, 2011).

$$CD_F = z_{adj} \sqrt{\frac{k(k+1)}{6n}} \quad (51)$$

na qual o valor de  $z_{adj}$  é obtido da tabela da distribuição normal. Para o teste de hipóteses bilateral,  $z_{adj}$  é o valor de  $z$  correspondente ao valor de  $\alpha_{FW}/2m$ , em que  $m$  é o número total de comparações entre os tratamentos. No caso do teste de hipóteses unilateral,  $z_{adj}$  é o valor de  $z$  correspondente ao valor de  $\alpha_{FW}/m$ . O valor de  $z_{adj}$  é função da taxa máxima de erro Tipo I da família de testes ( $\alpha_{FW}$ ) que pode ser aceita no procedimento e do número de comparações que são realizadas.

O intervalo de confiança para comparação das diferenças de postos médios obtidos pelo teste de Friedman é calculado através da adição e subtração do valor de  $CD_F$  à diferença entre os postos médios:  $(R_i - R_j) \pm CD_F$  (SHESKIN, 2011).

## 4 FILTROS DIGITAIS

Este capítulo apresenta os conceitos fundamentais sobre filtros digitais de resposta ao impulso finita (FIR).

### 4.1 Sistemas de Tempo Discreto

Um sistema de tempo discreto linear e invariante no tempo pode ser descrito por uma equação de diferenças lineares que relaciona a entrada  $x(n)$  e a saída  $y(n)$  por

$$\sum_{k=0}^N a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (52)$$

com coeficientes  $a_k$  e  $b_k$  constantes e reais. O maior atraso, em amostras, define a ordem do sistema. Portanto, a ordem do sistema apresentado na equação (52) é  $\max\{M, N\}$  (LATHI; GREEN, 2014).

Considerando  $a_0 = 0$ , a equação (52) pode ser reescrita como

$$y(n) = -\sum_{k=1}^N a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (53)$$

Na equação (53), a saída  $y(n)$  se apresenta como dependente das amostras da entrada  $x(n)$ , ...,  $x(n-M)$  e das amostras anteriores da saída  $y(n-1)$ , ...,  $y(n-N)$ . Neste caso, diz-se que o sistema é recursivo. Quando  $a_k = 0$ , para  $k = \{0, \dots, N\}$ , a saída  $y(n)$  depende apenas das amostras da entrada. Sendo assim, o sistema passa a ser denominado não recursivo e representado por

$$y(n) = \sum_{k=0}^M b_k x(n-k) \quad (54)$$

A equação (54) compara-se à soma de convolução dada pela equação (55), que corresponde a um sistema discreto com resposta ao impulso  $h(k) = b_k$  tal que

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \quad (55)$$

Sendo  $b_k$  definido apenas para  $0 \leq k \leq M$ , então  $h(k)$  é não nula no mesmo intervalo de  $k$ . Logo, um sistema definido pela equação (54) tem resposta ao impulso de duração finita. Sistemas discretos como tal são comumente chamados de filtros FIR (do inglês *Finite-Duration Impulse Response*). Já os sistemas discretos recursivos

descritos pela equação (53) apresentam, de modo geral, resposta ao impulso de duração infinita e, por isso, são denominados filtros IIR (do inglês *Infinite-Duration Impulse Response*) (DINIZ; SILVA; NETTO, 2010). Um filtro digital é um sistema de tempo discreto que remodela o espectro de um sinal de entrada para produzir características espectrais desejadas no sinal de saída (SCHILLING; HARRIS, 2012).

Em geral, filtros IIR têm ordem menor que um filtro FIR equivalente e, portanto, operam com menor atraso de processamento e requerem menos memória, apesar de serem suscetíveis à exatidão dos coeficientes. Por outro lado, frequentemente é mais simples projetar um filtro FIR com característica de reposta em frequência arbitrária. Além disso, os filtros FIR podem ter resposta de fase linear e têm sempre estabilidade garantida, mesmo se considerando limitações de implementação, como a quantização, ao contrário dos filtros IIR. Os métodos de projeto para filtros IIR e FIR são distintos (LATHI; GREEN, 2014; INGLE; PROAKIS, 2016).

Apesar dos filtros FIR e IIR terem características diferentes, ainda assim eles podem ser projetados para atender as mesmas especificações. Em alguns casos, o filtro FIR é chamado de filtro de média móvel e o filtro IIR de filtro autorregressivo de média móvel. Um filtro FIR tem uma função de transferência polinomial em  $z^{-1}$  e se trata de um filtro *all-zero*, significando que somente seus zeros no plano  $z$  determinam sua característica de resposta de magnitude. Geralmente, um filtro IIR pode resultar em uma faixa de transição estreita se comparada com um filtro FIR de mesma ordem. Contudo, um filtro IIR causal não pode alcançar uma resposta de fase linear exata, como no caso do FIR. As características de fase e atraso de grupo de filtros FIR são geralmente melhores que um filtro IIR convencional (PARKS; BURRUS, 1987).

## 4.2 Filtros Digitais FIR

A partir das equações (54) e (55), a resposta temporal do filtro FIR é

$$y(n) = \sum_{k=0}^M h(k)x(n-k) \quad (56)$$

Aplicando-se a transformada  $z$  na equação (56) resulta em

$$H(z) = \sum_{k=0}^M h(k)z^{-k} \quad (57)$$

na qual  $H(z)$  expressa a função de transferência do filtro FIR. Funções de transferência são frequentemente usadas para caracterizar sistemas lineares de

tempo discreto. A ordem do filtro é  $M$  e o comprimento do filtro, ou número de coeficientes, é  $M + 1$ . O filtro tem  $M$  polos na origem ( $z = 0$ ) e  $M$  zeros no plano  $z$  (INGLE; PROAKIS, 2016; DINIZ; SILVA; NETTO, 2010).

Como a região de convergência para  $H(z)$  é todo o plano  $z$ , exceto em  $z = 0$ , a resposta em frequência  $H(\omega)$  do filtro digital pode ser obtida a partir da sua função de transferência avaliada sobre o círculo unitário (MITRA, 2001). Então,

$$H(\omega) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (58)$$

$$H(\omega) = \sum_{k=0}^M h(k) e^{-j\omega k} \quad (59)$$

e a resposta temporal  $y(n)$  para uma entrada  $x(n)$  exponencial complexa  $x(n) = e^{j\omega n}$  é

$$y(n) = H(\omega) e^{j\omega n} \quad (60)$$

A função de transferência complexa  $H(\omega)$  também pode ser representada pela resposta de magnitude  $|H(\omega)|$  e resposta de fase  $\theta(\omega) \triangleq \arg[H(\omega)]$ . Logo,

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\theta(\omega)} \quad (61)$$

e a resposta temporal  $y(n)$  para uma entrada  $x(n)$  real

$$x(n) = e^{j\omega n} + e^{-j\omega n} = 2\cos(\omega n) \quad (62)$$

pode ser escrita como (PARKS; BURRUS, 1987)

$$y(n) = 2|H(\omega)| \cos[\omega n + \theta(\omega)] \quad (63)$$

Em geral, o projeto de um filtro deve satisfazer determinadas características de magnitude  $|H(\omega)|$  e de fase  $\theta(\omega)$ . Deve-se notar que, ao se processar digitalmente um sinal de tempo contínuo, a correspondente frequência  $\Omega$  deve ser devidamente relacionada à frequência de tempo discreto  $\omega$ <sup>16</sup>. Isto pode ser feito ao se amostrar um sinal senoidal  $x_a(t) = e^{j\Omega t}$ . Considerando  $\Omega_s = 2\pi/T$  a frequência de amostragem, então

$$x_a(t) \Big|_{t=nT} = x_a(nT) = e^{j\Omega nT} = e^{j\omega n} = x(n) \quad (64)$$

Portanto,

$$\omega = \Omega T = 2\pi \frac{\Omega}{\Omega_s} \quad (65)$$

<sup>16</sup> A unidade de  $\omega$  é rad, às vezes indicada como rad/amostra.

indicando que o intervalo de frequências  $[-\pi, \pi)$  para a resposta em frequência de um sistema de tempo discreto corresponde ao intervalo de frequências  $[-\Omega_s / 2, \Omega_s / 2)$  no domínio do tempo contínuo (DINIZ; SILVA; NETTO, 2010).

Definindo

$$\tau_p = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} \quad (66)$$

então o sinal de saída  $y(n)$  sofre um atraso de  $\tau_p$ . O termo  $\tau_p$  é chamado atraso de fase do sistema. Substituindo na equação (63) tem-se

$$y(n) = 2|H(\omega)| \cos[\omega(n - \tau_p)] \quad (67)$$

O atraso de grupo de um sistema é definido como

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (68)$$

Em um filtro de fase linear, todas as componentes de frequência apresentam o mesmo atraso de fase pois o atraso de grupo é constante.

Em contraste com um sistema de tempo contínuo, a resposta em frequência de um sistema de tempo discreto é sempre periódica com período igual à frequência de amostragem, ou seja,  $2\pi$  rad (PARKS; BURRUS, 1987).

### 4.3 Filtros FIR de Fase Linear

Os filtros de fase linear constituem uma classe de filtros FIR que apresentam simetria par (simétricos) ou ímpar (antissimétricos) em relação ao ponto médio da resposta ao impulso  $h(k)$ . Tais filtros implicam em atraso constante no sinal de resposta e, portanto, sem distorção de fase. Os filtros FIR de fase linear podem ser classificados em quatro tipos de acordo com o tipo de simetria apresentada por  $h(k)$ :

- a) Tipo I, simétrico de comprimento ímpar;
- b) Tipo II, simétrico de comprimento par;
- c) Tipo III, antissimétrico de comprimento ímpar;
- d) Tipo IV, antissimétrico de comprimento par.

A simetria de  $h(k)$  impõe restrições aos zeros dessas categorias de filtros, o que limita a aplicação dos mesmos. Os filtros FIR do Tipo I apresentam poucas restrições e são adequados para as características de resposta em frequência mais comuns

(passa-baixa, passa-alta, passa-faixa, rejeita-faixa e multibanda) (LATHI; GREEN, 2014).

Para o desenvolvimento de um filtro de fase linear, assume-se a seguinte forma geral para a função fase,

$$\theta(\omega) = \beta - \alpha\omega \quad (69)$$

na qual o atraso de grupo  $\alpha$  é constante.

Fazendo inicialmente  $\beta = 0$ , então  $h(k)$  deve ser simétrica, equação (70). Neste caso,  $h(k)$  é simétrica em relação ao ponto médio  $\alpha$ , tal que  $\alpha$  não é necessariamente um inteiro, para  $M$  par ou ímpar.

$$h(k) = h(M-k) \quad 0 \leq k \leq M \text{ com } \alpha = \frac{M}{2} \quad (70)$$

Admitindo  $\beta = \pm \pi/2$ , a resposta ao impulso  $h(k)$  é antissimétrica em relação a  $\alpha$ , para  $M$  par ou ímpar, equação (71).

$$h(k) = -h(M-k) \quad 0 \leq k \leq M \text{ com } \alpha = \frac{M}{2} \quad (71)$$

Combinando os casos de simetria e antissimetria com  $M$  par ou ímpar obtém-se quatro tipos de filtros FIR de fase linear. Para estas respostas em frequência pode-se escrever

$$H(\omega) = A(\omega)e^{j(\beta-\alpha\omega)} \quad \beta = \frac{\pi}{2}, \alpha = \frac{M}{2} \quad (72)$$

na qual  $A(\omega)$  é a resposta em frequência de amplitude. Diferentemente da resposta de magnitude,  $A(\omega)$  é uma função real que pode ser positiva ou negativa. A resposta de fase que corresponde à resposta de magnitude é uma função descontínua, enquanto a resposta de fase relacionada à resposta de amplitude é uma função linear contínua (INGLE; PROAKIS, 2016).

As respostas de magnitude e de fase do filtro FIR linear são dadas por (MITRA, 2001)

$$|H(\omega)| = |A(\omega)| \quad (73)$$

$$\theta(\omega) = \begin{cases} \beta - \frac{M\omega}{2} & \text{para } A(\omega) \geq 0 \\ \beta - \pi - \frac{M\omega}{2} & \text{para } A(\omega) < 0 \end{cases} \quad (74)$$

O atraso de grupo para todos os casos é

$$\tau_g(\omega) = \frac{M}{2} \quad (75)$$

A resposta em frequência de um filtro FIR Tipo I é da forma

$$H(\omega) = A(\omega)e^{-jM\omega/2} \quad (76)$$

em que  $A(\omega)$  é dada por

$$A(\omega) = h\left[\frac{M}{2}\right] + 2\sum_{k=1}^{M/2} h\left[\frac{M}{2} - k\right] \cos(\omega k) \quad (77)$$

A resposta em frequência de um filtro FIR Tipo II é da forma da equação (76), com  $A(\omega)$  sendo

$$A(\omega) = 2\sum_{k=1}^{(M+1)/2} h\left[\frac{M+1}{2} - k\right] \cos[\omega(k-1/2)] \quad (78)$$

A resposta em frequência de um filtro FIR Tipo III é da forma

$$H(\omega) = A(\omega)e^{\pi/2 - jM\omega/2} \quad (79)$$

com  $A(\omega)$  dada por

$$A(\omega) = 2\sum_{k=1}^{M/2} h\left[\frac{M}{2} - k\right] \sin(\omega k) \quad (80)$$

A resposta em frequência de um filtro FIR Tipo IV é da forma da equação (79), para a qual  $A(\omega)$  é

$$A(\omega) = 2\sum_{k=1}^{(M+1)/2} h\left[\frac{M+1}{2} - k\right] \sin[\omega(k-1/2)] \quad (81)$$

#### 4.4 Especificações de Magnitude para Filtros Digitais

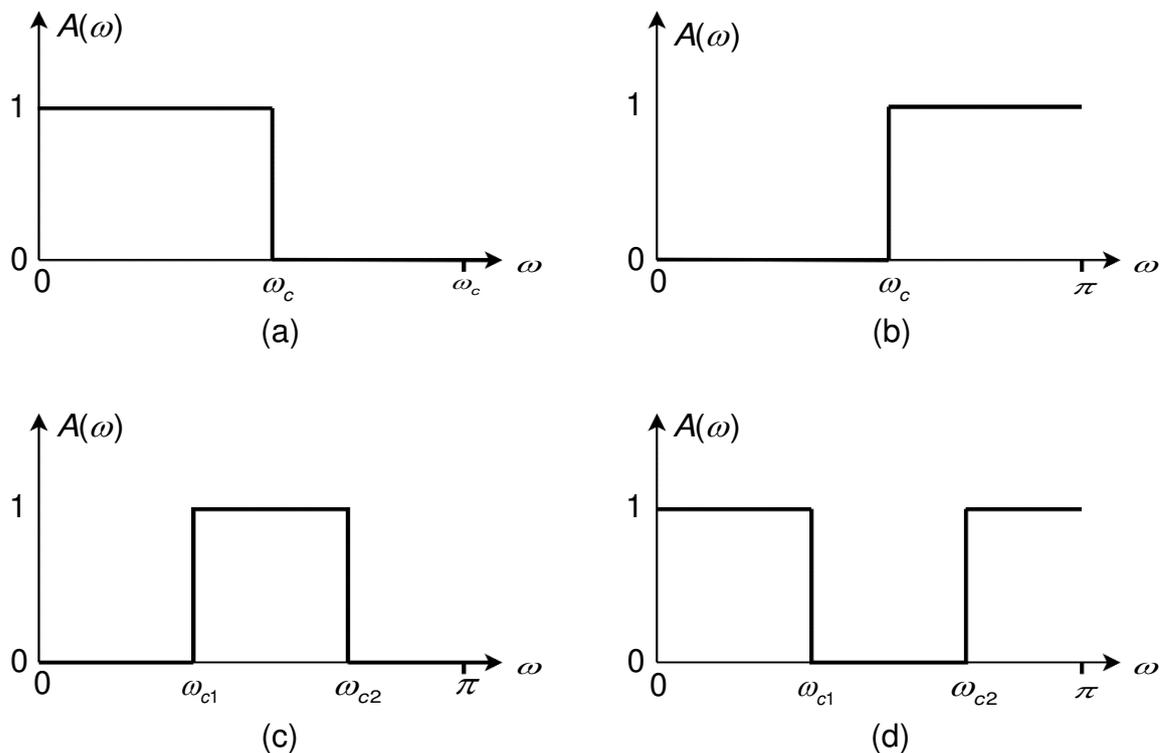
Na maioria das aplicações práticas interessa o desenvolvimento de uma aproximação realizável para um filtro digital a partir da especificação da resposta de magnitude. A resposta de fase pode ser previamente definida em um projeto, como no caso de filtros FIR de fase linear, por exemplo, ou corrigida posteriormente adicionando filtros passa-tudo em cascata (MITRA, 2001). Desse modo, somente as especificações em frequência de magnitude (ou amplitude) são apresentadas.

Os filtros seletores de frequência mais comuns dividem-se em quatro categorias básicas: passa-baixa, passa-alta, passa-faixa e rejeita-faixa. As respostas de amplitude ideais para os quatro tipos básicos são apresentadas na Figura 20.

Filtros seletores ideais são não causais, instáveis e apresentam resposta ao impulso de comprimento infinito bilateralmente (SCHILLING; HARRIS, 2012; MITRA, 2001).

Os diagramas da Figura 20 apresentam a resposta em frequência de amplitude para  $\omega \in [0, \pi)$ , já que  $A(\omega)$  tem simetria par. As faixas de frequências tais que  $A(\omega) = 1$  são chamadas de faixas de passagem e as faixas de frequências em que  $A(\omega) = 0$  são denominadas faixas de rejeição<sup>17</sup>. As frequências de transição  $\omega_c$ , normalmente referidas como frequências de corte, de modo geral não possuem relação com as frequências de corte correspondentes à variação de  $-3$  dB do ganho da faixa de passagem.

Figura 20 – Resposta em frequência de amplitude para filtros seletores ideais: (a) passa-baixa, (b) passa-alta, (c) passa-faixa e (d) rejeita-faixa



Fonte: Adaptado de Schilling e Harris (2012).

Para que se possa obter funções de transferência estáveis e realizáveis, as especificações das respostas em frequência de amplitude ideais apresentadas na Figura 20 são relaxadas. Insere-se uma faixa de transição entre as faixas de passagem e de rejeição para permitir uma variação gradual da resposta de magnitude

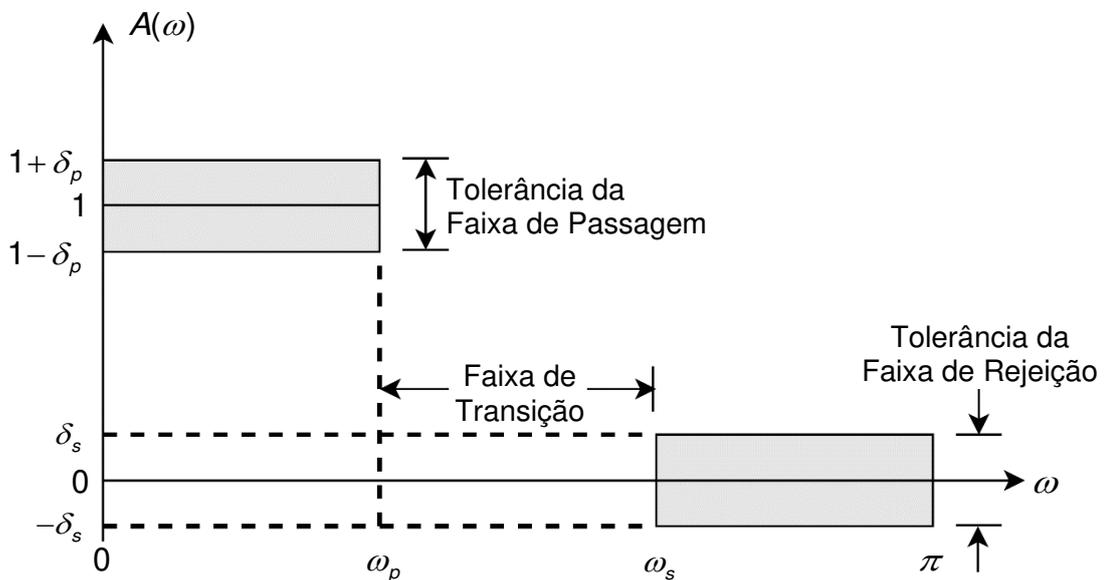
<sup>17</sup> Outras denominações, tanto para os filtros básicos quanto para os intervalos de frequência de ganho unitário ou nulo, são comuns em português.

entre elas. Além disso, admite-se que haja uma pequena variação da magnitude em ambas as faixas.

As especificações de amplitude ou magnitude podem ser dadas de duas formas. Na primeira, as especificações de tolerância são expressas em valores absolutos, como no exemplo da Figura 21. Estas especificações são geralmente usadas para filtros FIR. Na segunda, chamada de especificações relativas, os limites de magnitude para cada faixa são expressos em decibel (dB) (INGLE; PROAKIS, 2016).

Na Figura 21, as especificações são dadas para um filtro passa-baixa<sup>18</sup>. A faixa  $[0, \omega_p]$  é chamada de faixa de passagem e  $\delta_p$  é a tolerância aceitável da amplitude nesta faixa. A faixa  $[\omega_s, \pi]$  é chamada de faixa de rejeição e  $\delta_s$  é a tolerância correspondente. O intervalo  $(\omega_p, \omega_s)$  é denominado de faixa de transição, a qual não impõe qualquer restrição na resposta de amplitude. Estas mesmas especificações podem ser estendidas para os filtros passa-alta, passa-faixa e rejeita-faixa.

Figura 21 – Especificações absolutas de amplitude para um filtro passa-baixa



Fonte: Adaptado de Ingle e Proakis (2016).

<sup>18</sup> As especificações das tolerâncias das faixas de passagem e de rejeição podem ser expressas de modo diferente, dependendo do interesse do autor.

#### 4.5 Projeto por Amostragem de Frequência

A transformada discreta de Fourier (do inglês *Discrete Fourier Transform*, DFT) pode ser usada para determinar a resposta em frequência da resposta ao impulso de comprimento  $N$ , definida como

$$C(k) = \sum_{n=0}^{N-1} h(n) e^{-j2\pi nk/N} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (82)$$

Comparando-se a equação (59) com a equação (82), resulta em

$$C(k) = H(\omega) \Big|_{\omega=2\pi k/N} = H\left(\frac{2\pi k}{N}\right) \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (83)$$

Isto significa que a DFT de  $h(n)$  fornece  $N$  amostras de frequência igualmente espaçadas da função de resposta em frequência  $H(\omega)$ . Esta abordagem direta é chamada de projeto por amostragem de frequência e pode ser vista como um problema de interpolação. Quando  $H(\omega)$  é de fase linear, o uso da DFT inversa pode ser simplificado, bastando aplicar as equações desenvolvidas para os quatro tipos de filtros FIR de fase linear – equações (77), (78), (80) e (81) (PARKS; BURRUS, 1987).

Verifica-se que a resposta em frequência de um filtro digital se aproxima da resposta ideal na medida que o comprimento do filtro aumenta. Se a resposta em frequência desejada é a ideal, com descontinuidades, o projeto por amostragem de frequência resulta em muitas oscilações entre as amostras e, neste caso, uma região de transição pode ser adicionada à resposta ideal (Figura 21). A forma da função de transição pode ser relevante em um projeto.

Geralmente três critérios baseados na medida do erro são usados no projeto de filtros FIR. Um adota o erro quadrático médio na aproximação da resposta em frequência, chamado aproximação dos quadrados mínimos (do inglês *Least Squares*, LS). Outro especifica o erro máximo para faixas específicas da resposta em frequência, a aproximação de Chebyshev. A terceira abordagem é baseada na aproximação da série de Taylor para a resposta desejada, conhecida como aproximação de Butterworth ou maximamente plana. A maioria dos métodos de projeto são baseados em uma destas três aproximações, podendo ser ainda combinações ou modificações das mesmas (PARKS; BURRUS, 1987). Os critérios anteriores também são conhecidos como aproximações do filtro FIR por otimização (DINIZ; SILVA; NETTO, 2010).

#### 4.5.1 Projeto no Domínio da Frequência pelo Erro Quadrático Mínimo

A descrição de sinais é frequentemente dada pelos seus espectros de frequência ou energia em determinadas faixas. Por esta razão, as especificações dos filtros são geralmente dadas no domínio da frequência e, como a energia de um sinal se relaciona com o quadrado de sua amplitude, um critério de aproximação baseado no erro quadrático é apropriado (PARKS; BURRUS, 1987).

Considerando a resposta em frequência de um filtro digital como apresentada na equação (59), pode-se definir a função erro como

$$E = \sum_{k=0}^{L-1} |H(\omega_k) - H_d(\omega_k)|^2 \quad (84)$$

na qual  $H_d(\omega_k)$  são amostras da resposta em frequência desejada e  $\omega_k$  são  $L$  amostras de frequência, em geral, igualmente espaçadas. Considerando o caso com espaçamentos iguais e que o problema se restrinja ao projeto de filtros FIR de fase linear, pode-se aproximar a função real da resposta de amplitude  $A(\omega)$  em vez de  $H(\omega)$ . Nestas condições, a equação (84) torna-se

$$E = \sum_{k=0}^{L-1} |A(\omega_k) - A_d(\omega_k)|^2 \quad (85)$$

A equação (85) é equivalente ao critério de aproximação pela integral do erro quadrático da equação (86) para  $L$  grande.

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |A(\omega) - A_d(\omega)|^2 \quad (86)$$

#### 4.5.2 Regiões de Transição e Funções de Ponderação

A mudança da resposta em frequência desejada ideal pela inserção de uma região de transição entre as faixas de passagem e de rejeição elimina as descontinuidades e evita o fenômeno de Gibbs, oscilações com grande amplitude nas transições. A modificação mais simples conecta os extremos das faixas de transição e rejeição por uma função linear (BURRUS; SOEWITO; GOPINATH, 1992). Como exemplo, a resposta de amplitude para um filtro passa-baixa pode ser definida como

$$A_d(\omega) = \begin{cases} 1 & 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ \frac{\omega_p - \omega}{\omega_p - \omega_s} & \omega_p < \omega < \omega_s \\ 0 & \omega_s \leq \omega \leq \pi \end{cases} \quad (87)$$

A adição de uma função de ponderação positiva  $W(\omega)$  à definição do erro da equação (85) pode dar pesos diferentes às diferentes faixas de importância (PARKS; BURRUS, 1987).

$$E_W = \sum_{k=0}^{L-1} W(\omega_k) |A(\omega_k) - A_d(\omega_k)|^2 \quad (88)$$

Tal abordagem é denominada método dos mínimos quadrados ponderados e  $E_W$  é o erro quadrático ponderado (DINIZ; SILVA; NETTO, 2010). Para um função  $W(\omega)$  não constante, o fenômeno de Gibbs ainda pode ocorrer, mas a energia em cada faixa pode diferir.

## 5 METODOLOGIA APLICADA

Para atingir os objetivos desta tese foram realizadas as seguintes etapas:

- a) consolidação da pesquisa bibliográfica sobre o tema abordado na tese;
- b) seleção de dois algoritmos de otimização para hibridização;
- c) desenvolvimento de um novo algoritmo híbrido;
- d) aplicação do algoritmo proposto a um conjunto de teste para otimização mono-objetivo com restrições laterais;
- e) realização de projetos de filtros digitais FIR de fase linear utilizando o algoritmo proposto;
- f) avaliação de desempenho do algoritmo proposto.

A pesquisa da literatura pode ser realizada utilizando duas abordagens: o mapeamento sistemático e a revisão sistemática da literatura. O mapeamento sistemático, também conhecido como estudo de escopo, fornece uma visão geral de uma área de pesquisa, visando detectar as principais abordagens presentes na literatura para a área de pesquisa. Os resultados de um estudo de mapeamento podem identificar áreas adequadas para a realização de revisões sistemáticas da literatura e também áreas em que um estudo primário é mais apropriado (PETERSEN; VAKKALANKA; KUZNIARZ, 2015).

O mapeamento sistemático da literatura foi realizado para a seleção dos algoritmos de otimização para hibridização a partir de busca no portal de periódicos da CAPES utilizando a base de dados Scopus<sup>®</sup>, que indexa artigos das bases de dados ACM Digital Library, Emerald Insight, Hindawi, IEEE Xplore, Inderscience Enterprises, ScienceDirect (Elsevier), Springer Link, Taylor & Francis Online, Wiley Online Library, World Scientific, dentre outras. A base de dados Scopus<sup>®</sup> indexa mais de 21.500 revistas, de 5.000 editores internacionais, além de outros documentos (CAPES, 2020).

Dentre os algoritmos de inspiração natural consultados, existe um número relativamente menor de trabalhos sobre MBO, tanto em aplicações quanto em versões aprimoradas. No caso de aplicações, não foram encontrados artigos na base de dados Scopus<sup>®</sup> em que a meta-heurística MBO tenha sido utilizada no projeto de filtros digitais FIR de fase linear. Em relação ao desempenho do MBO, as referências consultadas são unânimes em afirmar que o operador de ajuste da borboleta é responsável pelo algoritmo apresentar convergência lenta, rápida estagnação em

mínimos locais (em problemas de minimização) e tempo de processamento relativamente elevado (WANG; ZHAO; DEB, 2015; FARIS; ALJARAH; MIRJALILI, 2017; STRUMBERGER *et al.* 2018b; YANG, 2010b).

No caso do JADE, trata-se de um algoritmo de evolução diferencial adaptativo bem-sucedido que tem gerado novas implementações e aplicações. Na base de dados Scopus® não foram encontrados estudos de aplicação de meta-heurísticas híbridas baseadas em DE e MBO no projeto de filtros digitais FIR de fase linear.

Dessa forma, com base no mapeamento sistemático da literatura realizado, foram selecionados os algoritmos MBO e JADE para hibridização, sendo o MBO o algoritmo a ser melhorado.

Uma revisão sistemática da literatura é um meio de identificar, avaliar e interpretar um conjunto de estudos relevantes que abordam uma questão de pesquisa específica. Estudos individuais que investigam uma questão de pesquisa específica e contribuem para uma revisão sistemática são chamados estudos primários. Uma revisão sistemática é uma forma de estudo secundário, pois analisa os estudos primários relacionados a uma questão de pesquisa específica com o objetivo de integrar e sintetizar as evidências relacionadas a essa questão de pesquisa (KITCHENHAM; CHARTERS, 2007).

Os princípios que orientaram a revisão sistemática da literatura foram o objetivo geral e a hipótese desta pesquisa enunciados no Capítulo 1. Como objetivo geral propôs-se desenvolver uma nova meta-heurística híbrida para otimização mono-objetivo aplicada ao projeto de filtros FIR. A partir deste objetivo, levantou-se a seguinte hipótese: “um algoritmo híbrido que combine o algoritmo MBO com o algoritmo JADE é capaz de melhorar o desempenho do algoritmo MBO”.

## **5.1 Revisão Sistemática da Literatura**

Nesta seção é realizada a Revisão Sistemática da Literatura (RSL) sobre trabalhos desenvolvidos entre 2009 e julho de 2020 relativos às aplicações de meta-heurísticas no projeto de filtros digitais FIR de fase linear tipo passa-alta, passa-baixa, passa-faixa e rejeita-faixa.

Através de pesquisa no portal de periódicos da CAPES, utilizando a base de dados Scopus®, foram encontrados quatro artigos em que os autores realizaram

revisões da literatura sobre a utilização de meta-heurísticas no projeto de filtros digitais FIR de uma dimensão.

Kumari e Jaglan (2017) apresentaram uma revisão do projeto de filtros FIR utilizando PSO, referenciando 16 artigos entre 2000 e 2016, sendo 12 artigos a partir de 2009. Singh e Potnis (2017) revisaram 12 artigos, entre 2003 e 2016, que utilizaram as meta-heurísticas ABC, CSA, GA e PSO no projeto de filtros FIR de fase linear.

Dwivedi, Ghosh e Londhe (2018) realizaram uma revisão da literatura sobre o projeto de filtros digitais FIR, de uma e duas dimensões, com base em algoritmos evolutivos e algoritmos de inteligência de enxame. Os artigos de projeto de filtros FIR de uma dimensão foram publicados entre os anos 1991 e 2015, com 51 artigos referenciados utilizando os algoritmos ABC, BFO, Otimização de Bando de Gatos (do inglês *Cat Swarm Optimization*, CSO), CSA, DE, *Differential Evolution Particle Swarm Optimization Algorithm* (DE-PSO), GA, Algoritmo de Busca Gravitacional (do inglês *Gravitational Search Algorithm*, GSA), Algoritmo de Busca Harmônica Oposicional (do inglês *Opposition-Based Harmony Search Algorithm*, OHS), PSO, SA e *Seeker Optimization Algorithm* (SOA), sendo 23 artigos posteriores ao ano de 2009.

Ravi *et al.* (2019) apresentaram uma revisão do projeto de filtros FIR, IIR e de bancos de filtros, de uma e duas dimensões, para processamento de sinal, imagem e vídeo. Os artigos revisados foram publicados entre os anos de 1995 e 2016 e utilizaram os algoritmos de otimização ABC, BA, CSA, DE, GA, GSA, OHS e PSO. Foram apresentados 28 artigos de projeto de filtros FIR de uma dimensão publicados entre 2009 e 2016.

Os estudos de revisão disponíveis sobre a utilização de meta-heurísticas no projeto de filtros FIR de uma dimensão são poucos e abordados em artigos publicados até o ano de 2016. Além disso, Kumari e Jaglan (2017) realizaram a revisão somente sobre a aplicação do PSO e Singh e Potnis (2017) somente sobre a aplicação do ABC, CSA, GA e PSO. Enquanto Dwivedi, Ghosh e Londhe (2018) realizaram a revisão sobre o projeto de filtros digitais FIR de uma e duas dimensões, e Ravi *et al.* (2019) revisaram o projeto de filtros FIR, IIR e bancos de filtros, de uma e duas dimensões.

Esta tese adota a RSL segundo as diretrizes apresentadas em Kitchenham e Charters (2007) e Kitchenham e Brereton (2013). A RSL foi dividida em três fases principais: planejamento (definição das questões de pesquisa), condução (definição dos critérios de inclusão e exclusão, definição das estratégias para realizar a busca

em bases de dados, avaliação crítica e extração dos dados) e síntese dos resultados encontrados na revisão.

O objetivo principal desta RSL é pesquisar os trabalhos desenvolvidos entre 2009 e julho de 2020 relativos às aplicações de meta-heurísticas no projeto de filtros digitais FIR de fase linear passa-alta, passa-baixa, passa-faixa e rejeita-faixa. Partindo deste objetivo foram definidas as seguintes questões de pesquisa:

- QP1: Quais são as principais meta-heurísticas utilizadas no projeto de filtros digitais FIR de fase linear?
- QP2: Existem estudos de aplicação de meta-heurísticas híbridas baseadas em DE e MBO no projeto de filtros digitais FIR de fase linear?

Após a formulação das questões de pesquisa são definidos os critérios de inclusão e exclusão, as estratégias para realizar a busca em bases de dados, a avaliação crítica dos artigos e a seleção dos estudos que devem ser incluídos na RSL.

Os critérios de inclusão dos artigos têm como objetivo identificar os estudos primários que forneçam evidência direta a respeito das questões de pesquisa (KITCHENHAM; CHARTERS, 2007). Os critérios de inclusão definidos foram:

- a) publicações de estudos primários;
- b) publicações relacionadas à utilização de meta-heurísticas no projeto de filtros FIR de fase linear;
- c) ano de 2009 em diante;
- d) artigos de revistas e conferências;
- e) publicações escritas em inglês.

O idioma inglês foi escolhido porque a maioria das conferências e periódicos relacionados com o tema da pesquisa são apresentados neste idioma e por ser o idioma utilizado pela maioria das bases de dados disponíveis no portal de periódicos da CAPES.

Os critérios de exclusão foram definidos visando descartar estudos irrelevantes no contexto das questões de pesquisa. Os critérios de exclusão definidos foram:

- a) publicações de estudos secundários;
- b) livros, dissertações de mestrado, teses de doutorado, capítulos de livros, relatórios técnicos e artigos não escritos em inglês;
- c) publicações sobre o projeto de outros tipos de filtros digitais;
- d) publicações sobre o projeto de filtros FIR que não sejam de fase linear;

- e) publicações sobre o projeto de filtros FIR utilizando outras técnicas, ou seja, que não utilizam meta-heurísticas;
- f) publicações que não estão disponíveis para *download* nas bases de dados.

Na sequência é definida a *string* de busca com as palavras-chave a serem pesquisadas nas bases de dados para contemplar as questões de pesquisa. Para a geração da *string* de busca, os sinônimos são conectados através de um operador OR e os grupos de termos de busca são conectados com um operador AND, sendo que cada base de dados possui sua própria sintaxe de busca.

Como um dos critérios de inclusão é que a pesquisa inclua somente artigos de revistas e conferências escritos em inglês, a *string* de busca genérica gerada foi:

("digital filter" OR "finite impulse response" OR "FIR") AND  
("metaheuristic" OR "differential evolution" OR "particle swarm  
optimization" OR "monarch butterfly optimization").

Com os critérios de exclusão e inclusão e a *string* de busca definidos, o próximo passo foi definir as bases de dados para a realização da busca dos artigos. A busca foi realizada no portal de periódicos da CAPES utilizando a base de dados Scopus® (CAPES, 2020).

Para a pesquisa na base de dados Scopus® foi utilizada a opção de busca avançada. Esta opção permite configurar diferentes parâmetros que podem considerar alguns critérios de inclusão ou de exclusão como, por exemplo, delimitação do período de busca e seleção do idioma das publicações.

A primeira etapa da busca foi realizada utilizando somente a *string* de busca, sendo selecionados 2.457 documentos. Na sequência (Etapa 2) foi realizada a configuração dos parâmetros para a pesquisa da *string* de busca nos campos título, resumo e palavras-chave, bem como para a seleção dos artigos de acordo com os critérios de inclusão. Nesta etapa foram selecionados 385 documentos.

Na Etapa 3 aplicaram-se os critérios de exclusão aos documentos selecionados na Etapa 2, foram analisados os títulos dos artigos e excluídos aqueles com títulos que claramente indicavam que estavam fora do escopo da RSL, sendo identificados 185 documentos. Na Etapa 4 foi realizada a análise dos documentos pelo resumo e conclusão, resultando em 126 documentos. Na última etapa (Etapa 5) foi realizada a análise dos textos completos, resultando em 93 artigos (35 de revistas e 58 de conferências), sendo que cada um destes artigos cumpre os critérios de inclusão e não possui nenhum dos critérios de exclusão.

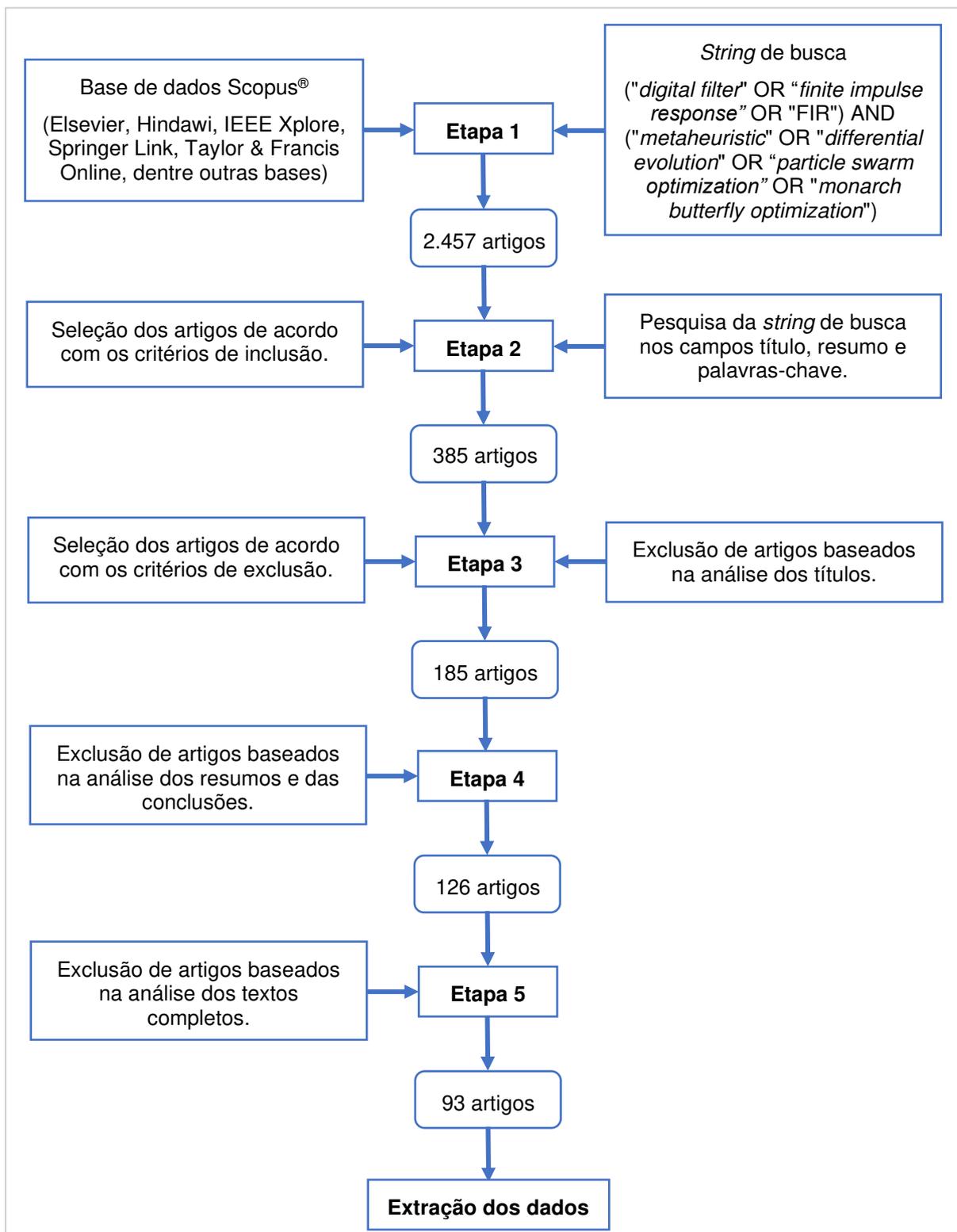
A extração dos dados foi realizada nos 93 estudos primários selecionados, sendo obtidas informações básicas de cada artigo (tais como título, autores, ano de publicação e tipo de publicação) e informações específicas (algoritmos de referência, algoritmos utilizados para comparação de desempenho, tipos de filtros FIR projetados, entre outros). A Figura 22 apresenta uma visão geral da metodologia de pesquisa para a RSL com o número de documentos identificados em cada etapa. O método utilizado para a síntese dos resultados encontrados na revisão sistemática de literatura foi o descritivo (KITCHENHAM; CHARTERS, 2007).

A Figura 23 apresenta o número de publicações por ano que utilizam meta-heurísticas no projeto de filtros digitais FIR de fase linear, totalizando 93 publicações sendo 35 de revistas e 58 de conferências. A pesquisa foi concluída em julho de 2020 e compreende os anos de 2009 até 2020. Em 2009 e 2010 não houve publicações em revistas que cumprissem os critérios de inclusão e de exclusão definidos e nos anos 2009, 2019 e 2020 não houve publicações em conferências que cumprissem estes mesmos critérios. É possível observar que o número de artigos publicados é significativo, com maior número de publicações entre os anos de 2011 e 2017 e com diminuição do número de publicações a partir de 2017. A Figura 24 apresenta a porcentagem de publicações por ano em revistas e em conferências.

A Figura 25 (a) apresenta o número de publicações por base de dados (IEEE Xplore, Elsevier, Springer, Taylor & Francis, Hindawi e Inderscience Enterprises), e a Figura 25 (b) o número total e a porcentagem de publicações de artigos em revistas e em conferências nos 93 estudos primários selecionados.

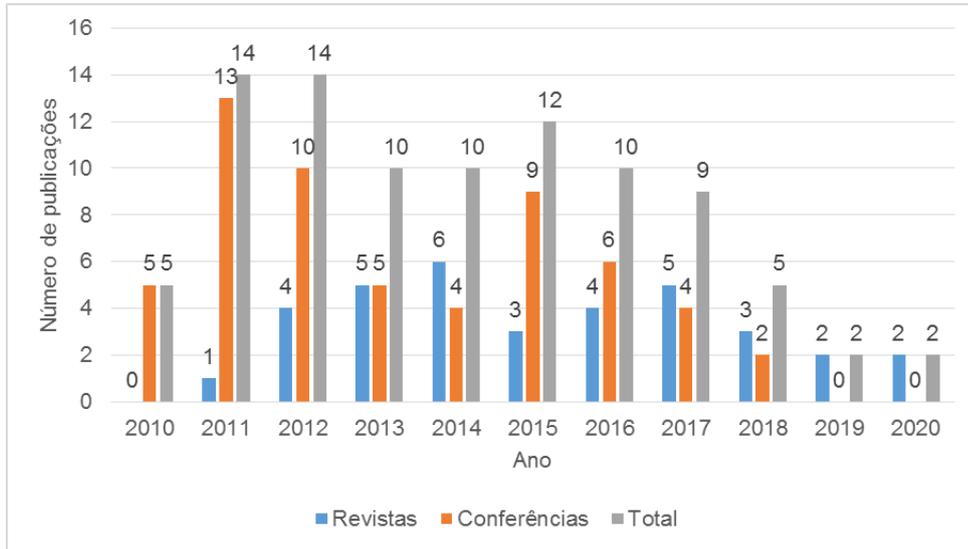
A Tabela 2 apresenta as revistas responsáveis pelas publicações que utilizaram meta-heurísticas no projeto de filtros digitais FIR de fase linear e que tenham ao menos duas publicações sobre o tema. Da Tabela 2 verifica-se que 11 revistas foram responsáveis por 68,6% das publicações entre 2011 e 2020, sendo que em 2009 e 2010 não houve publicações em revistas que cumprissem os critérios de inclusão e de exclusão definidos.

Figura 22 – Visão geral da revisão sistemática de literatura



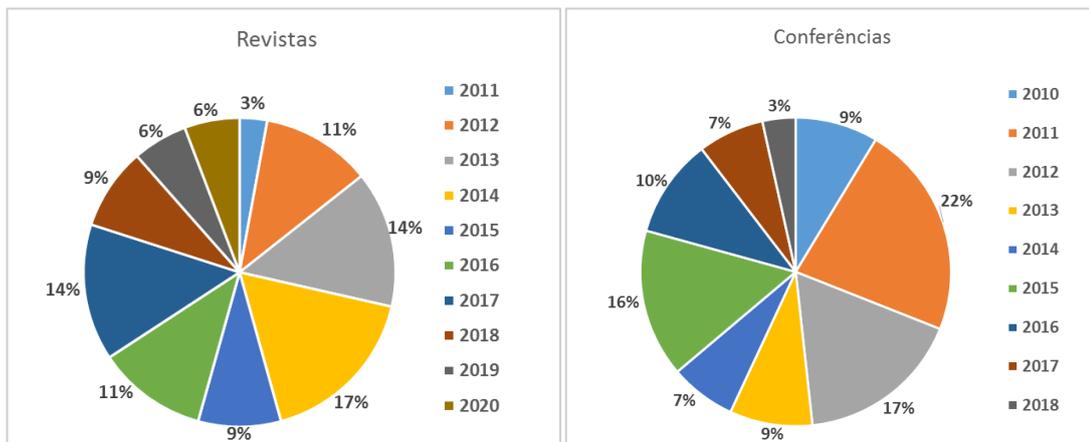
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 23 – Número de publicações por ano que aplicam meta-heurísticas no projeto de filtros digitais FIR de fase linear



Fonte: Elaborado pelo autor.

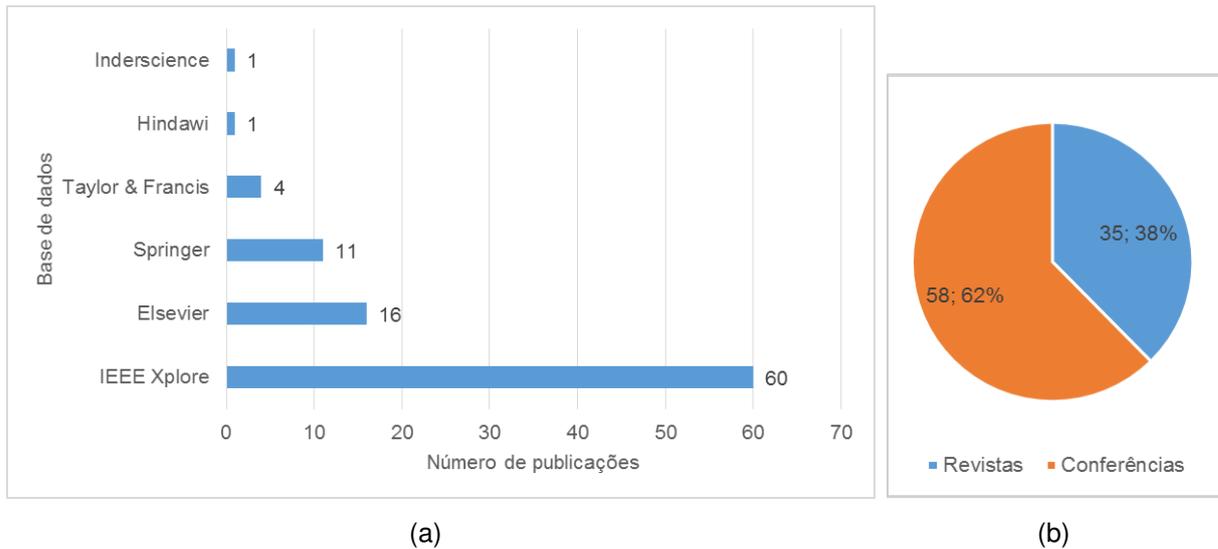
Figura 24 – Porcentagem de publicações por ano em revistas e em conferências



Fonte: Elaborado pelo autor.

Saha *et al.* (2012) realizaram o projeto dos quatro tipos de filtro FIR de fase linear (passa-baixa, passa-alta, passa-faixa e rejeita-faixa) utilizando a meta-heurística SOA e realizaram a comparação com os projetos de filtros utilizando *Real-Coded Genetic Algorithm* (RCGA), PSO e o algoritmo de Parks e McClellan (PM). Vasundhara *et al.* (2013) realizaram o projeto de filtros FIR de fase linear passa-alta e passa-baixa utilizando o algoritmo *Random PSO* (RPSO) hibridizado com o algoritmo DE, conhecido como *Random PSODE* (RPSODE) e compararam os resultados obtidos com DE, PSO e PSODE.

Figura 25 – Número de publicações (a) por base de dados e (b) em revistas e conferências



(a) Fonte: Elaborado pelo autor.

(b)

Tabela 2 – Principais revistas com publicações que utilizaram meta-heurísticas no projeto de filtros digitais FIR de fase linear

Revista	Frequência absoluta	Frequência Percentual
<i>Applied Soft Computing</i>	3	8,6%
<i>International Journal of Electronics and Communications</i>	3	8,6%
<i>Circuits Systems and Signal Processing</i>	2	5,7%
<i>Engineering Applications of Artificial Intelligence</i>	2	5,7%
<i>Engineering Science and Technology, an International Journal</i>	2	5,7%
<i>Expert Systems with Applications</i>	2	5,7%
<i>IET Signal Processing</i>	2	5,7%
<i>International Journal of Electronics</i>	2	5,7%
<i>ISA Transactions</i>	2	5,7%
<i>Signal, Image and Video Processing</i>	2	5,7%
<i>Soft Computing</i>	2	5,7%
Outras (com um artigo cada)	11	31,4%
<b>Total</b>	<b>35</b>	<b>100,0%</b>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Aggarwal, Rawat e Upadhyay (2016) apresentaram o projeto de filtros FIR de fase linear passa-alta e rejeita-faixa utilizando as meta-heurísticas CSA, PSO e RCGA. O projeto de filtros FIR passa-alta e passa-faixa utilizando CSA adaptativo (ACSA) foi apresentado por Sarangi *et al.* (2018), que compararam com os filtros utilizando RCGA, PSO, ABC, DE e CSA.

A Tabela 3 apresenta as conferências com publicações que utilizaram meta-heurísticas no projeto de filtros digitais FIR de fase linear, sendo explicitadas as que possuem a partir de duas publicações. Da Tabela 3 verifica-se que 43 conferências, com apenas um artigo cada, foram responsáveis por 74,1% das publicações entre 2010 e 2018, sendo que em 2009, 2019 e 2020 não houve publicações em conferências que cumprissem os critérios de inclusão e de exclusão definidos.

Tabela 3 – Principais conferências com publicações que utilizaram meta-heurísticas no projeto de filtros digitais FIR de fase linear

<b>Conferência</b>	<b>Frequência absoluta</b>	<b>Frequência Percentual</b>
<i>2017 IEEE 30th Canadian Conference on Electrical and Computer Engineering</i>	3	5,2%
<i>2011 IEEE Student Conference on Research and Development</i>	2	3,4%
<i>2011 IEEE Symposium on Industrial Electronics and Applications</i>	2	3,4%
<i>2011 Second International Conference on Sustainable Energy and Intelligent System</i>	2	3,4%
<i>2012 IEEE Symposium on Humanities, Science and Engineering Research</i>	2	3,4%
<i>2013 Asia-Pacific Signal and Information Processing Association Annual Summit and Conference</i>	2	3,4%
<i>2016 International Conference on Communication and Signal Processing</i>	2	3,4%
Outras (com um artigo cada)	43	74,1%
<b>Total</b>	<b>58</b>	<b>100,0%</b>

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em Kar *et al.* (2011) foi aplicado um algoritmo PSO melhorado, denominado *Particle Swarm Optimization with Constriction Factor and Inertia Weight Approach* (PSOCFIWA), para o projeto de filtros FIR de fase linear passa-faixa que foram comparados com os filtros obtidos com a meta-heurística RGA. Mandal *et al.* (2012) apresentaram o projeto de um filtro FIR passa-faixa utilizando *Novel* PSO (NPSO) e compararam com os projetos obtidos utilizando RGA, PSO, DE e PM.

Sharma, Arya e Katiyal (2014) utilizaram o algoritmo DE para obter os coeficientes do filtro FIR passa-baixa. Severino, Linhares e Araújo (2015) utilizaram as meta-heurísticas PSO e BA para o projeto de filtros FIR passa-baixa e compararam o desempenho com o filtro utilizando PM. Das *et al.* (2016) apresentaram um procedimento para otimizar o projeto dos coeficientes dos filtros FIR utilizando GA,

PSO e BA. Raju, Kwan e Jiang (2018) apresentaram o projeto de filtros FIR de fase linear passa-baixa utilizando a meta-heurística ABC.

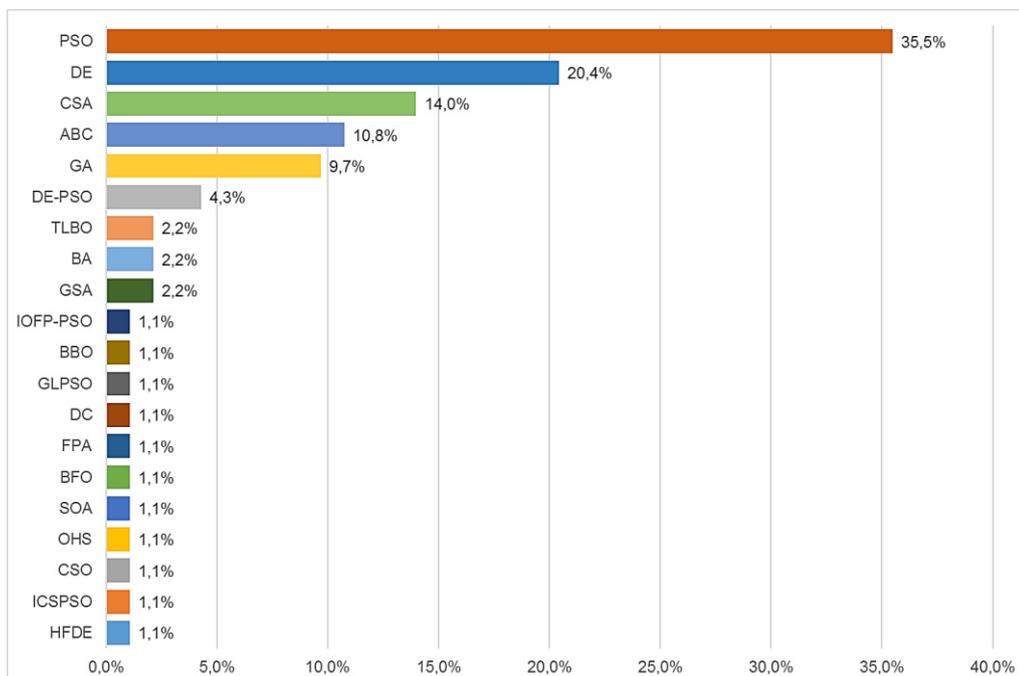
A Figura 26 apresenta as meta-heurísticas de referência utilizadas nas 93 publicações selecionadas. Para facilitar a visualização do gráfico, o algoritmo de referência e suas variantes, exceto híbridas, foram agrupados e representados pela sigla do algoritmo de referência. Desta forma, PSO foi utilizado em 33 artigos (35,5%), DE em 19 artigos (20,4%), CSA em 13 artigos (14,0%), ABC em 10 artigos (10,8%), GA em 9 artigos (9,7%), em 2 artigos (2,2%) foram utilizados BA, GSA e TLBO, enquanto em 1 artigo (1,1%) cada foram utilizados CSO, OHS, SOA, *Differential Cultural Algorithm* (DC), BFO, FPA e BBO.

Conforme a Figura 26, os algoritmos híbridos utilizados como meta-heurísticas de referência foram o DE-PSO em 4 artigos (4,3%), enquanto em 1 artigo (1,1%) cada foram utilizados o *Hybrid Firefly Differential Evolution Algorithm* (HFDE), o *Improved Cuckoo Search Particle Swarm Optimization* (ICSPSO), o *Genetic Lbest Particle Swarm Optimization* (GLPSO), e o *Improved Firefly Position Optimization - Particle Swarm Optimization* (IOFP-PSO).

A Figura 27 apresenta as meta-heurísticas comparadas utilizadas nas 93 publicações selecionadas. De modo a permitir melhor compreensão do gráfico, o algoritmo comparado e suas variantes, exceto híbridas, foram agrupados e representados pela sigla do algoritmo comparado. Assim sendo, PSO foi utilizado em 60 artigos (64,5%), GA em 33 artigos (35,5%), DE em 30 artigos (32,3%), CSA em 9 artigos (9,7%), ABC em 8 artigos (8,6%), CSO em 3 artigos (3,2%), em 2 artigos (2,2%) foram utilizados SOA, BFO, FPA e OHS, enquanto em 1 artigo (1,1%) cada foram utilizados *Bee Swarm Optimization* (BSO), FA, BA, GSA e TLBO. Os algoritmos híbridos utilizados como meta-heurísticas comparadas foram o DE-PSO em 5 artigos (5,4%) e o *Cuckoo Search Particle Swarm Optimization* (CSPSO) utilizado em 1 artigo (1,1%).

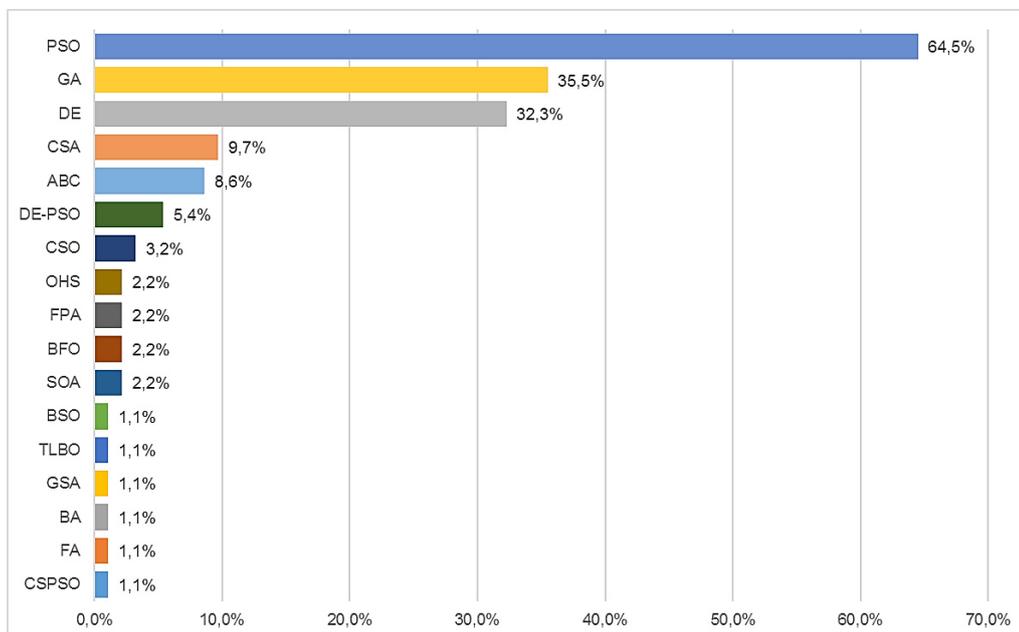
Para finalizar a síntese dos resultados encontrados na RSL foi utilizado o programa VOSviewer, que é uma ferramenta para construção e visualização de redes bibliométricas que permite a criação de redes de relações de citação, cocitação, coautoria ou coocorrência entre palavras-chave (VAN ECK; WALTMAN, 2010).

Figura 26 – Meta-heurísticas de referência nos artigos selecionados



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 27 – Meta-heurísticas de comparação nos artigos selecionados



Fonte: Elaborado pelo autor.

Através da análise de redes de coautoria é possível identificar como os pesquisadores se relacionam de acordo com a quantidade de artigos que realizam individualmente e publicam conjuntamente. Na visualização da rede, os itens são representados por círculos ou rótulos, o tamanho de um círculo é determinado pelo

peso do item (número de publicações e citações efetuadas) e somente parte deles tem seu nome apresentado para evitar sobreposições. Os autores com publicações em comum são exibidos agrupados, sendo a cor do item determinada pelo *cluster* ao qual o item pertence e a largura dos *links* depende do número de publicações comuns entre os autores. Quanto mais próximos dois *clusters* estão localizados, mais fortes são suas relações (VAN ECK; WALTMAN, 2010).

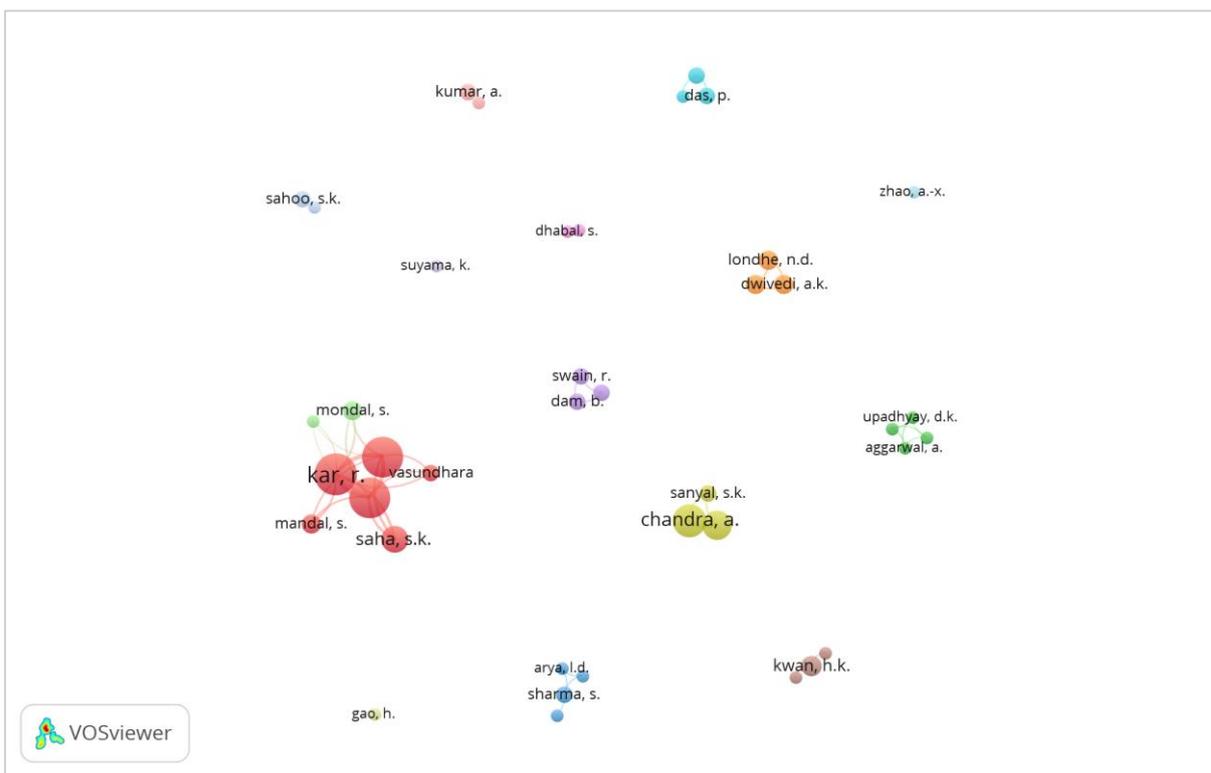
Para a elaboração das redes foram utilizadas as informações dos 93 artigos nos formatos “csv” ou “ris” obtidas da base de dados Scopus®. A Figura 28 apresenta as redes de coautoria quando são considerados apenas os autores com pelo menos 2 artigos e pelo menos 2 citações de suas respectivas obras. Dos 152 autores das publicações selecionadas, 40 se enquadraram nestas restrições, distribuídos em 15 *clusters* de colaboração em pesquisa. O maior *cluster* da rede (na cor vermelha) é constituído por seis autores, sendo Rajib Kar o autor com maior número de artigos (20) e com 7 *links* com os demais autores, enquanto Sakti Prasad Ghoshal e Durbadal Mandal publicaram 19 artigos e apresentam 7 *links* com autores de seu *cluster* (Sangeeta Mandal, Suman Kumar Saha ou Vasunhara) e de outro *cluster* (Sangeeta Mondal ou Dishari Chakraborty).

As redes de ligação dos autores podem ser visualizadas considerando o ano das publicações. A partir de todos os 152 autores obtêm-se as redes de coautoria da Figura 29, onde se verifica, a partir da legenda dada e pela cor dos círculos, que o maior número de publicações ocorreu entre os anos 2011 e 2017, em concordância com as informações apresentadas na Figura 23 e na Figura 24. Com o VOSviewer pode-se obter a informação dos países dos autores dos 93 artigos selecionados, resultando em 65 artigos com autores da Índia, 12 da China, 5 do Canadá, 3 dos Estados Unidos, 2 do Japão e 11 artigos que possuem autores de outros 11 países, dentre estes o Brasil (SEVERINO; LINHARES; ARAÚJO, 2015).

Quando são selecionados somente os autores com publicações em comum dentre os 152 autores, a rede de coautoria resultante é apresentada na Figura 30, onde se tem 25 autores em 7 *clusters* que possuem relação entre si.

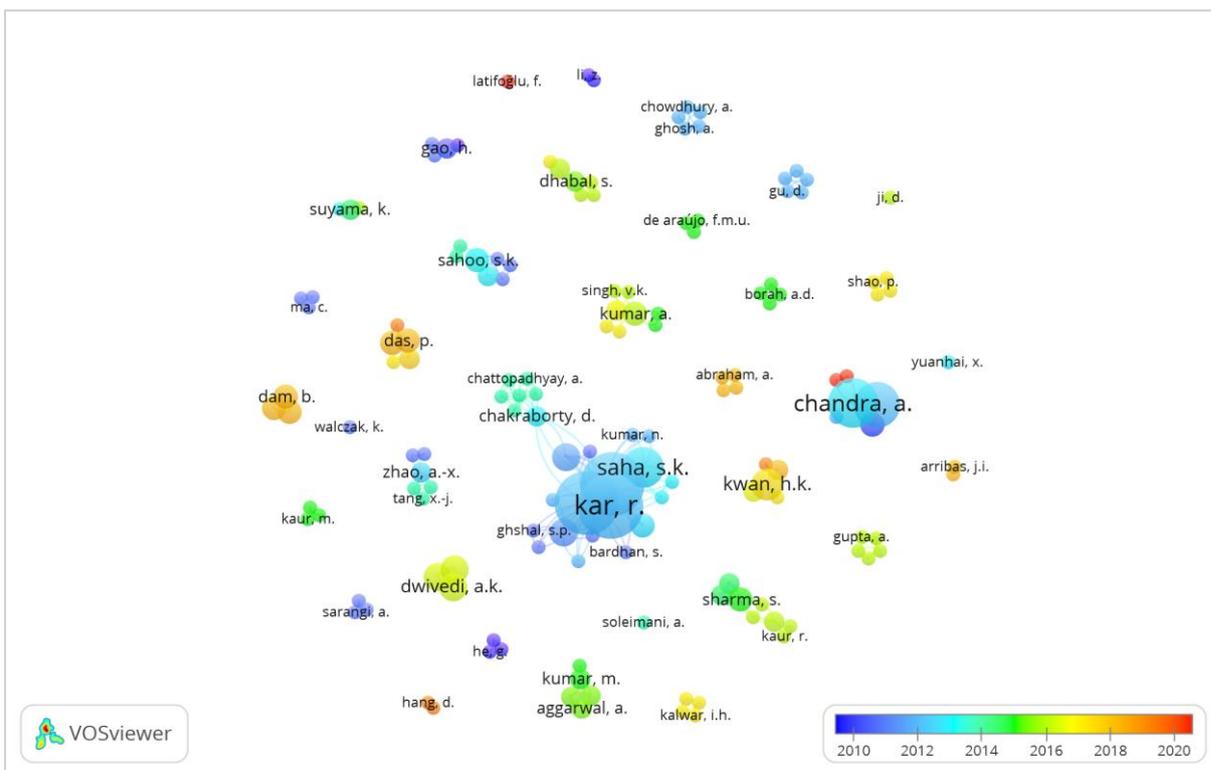
A relação de coocorrência entre duas palavras-chave é determinada pelo número de artigos em que ambas ocorrem conjuntamente, seja no título, no resumo ou na lista de palavras-chave (VAN ECK; WALTMAN, 2010). O tamanho do nó indica a frequência de ocorrência de uma palavra e quanto mais próximos estão os nós, mais forte é a relação entre estes.

Figura 28 – Redes de coautoria com as restrições definidas



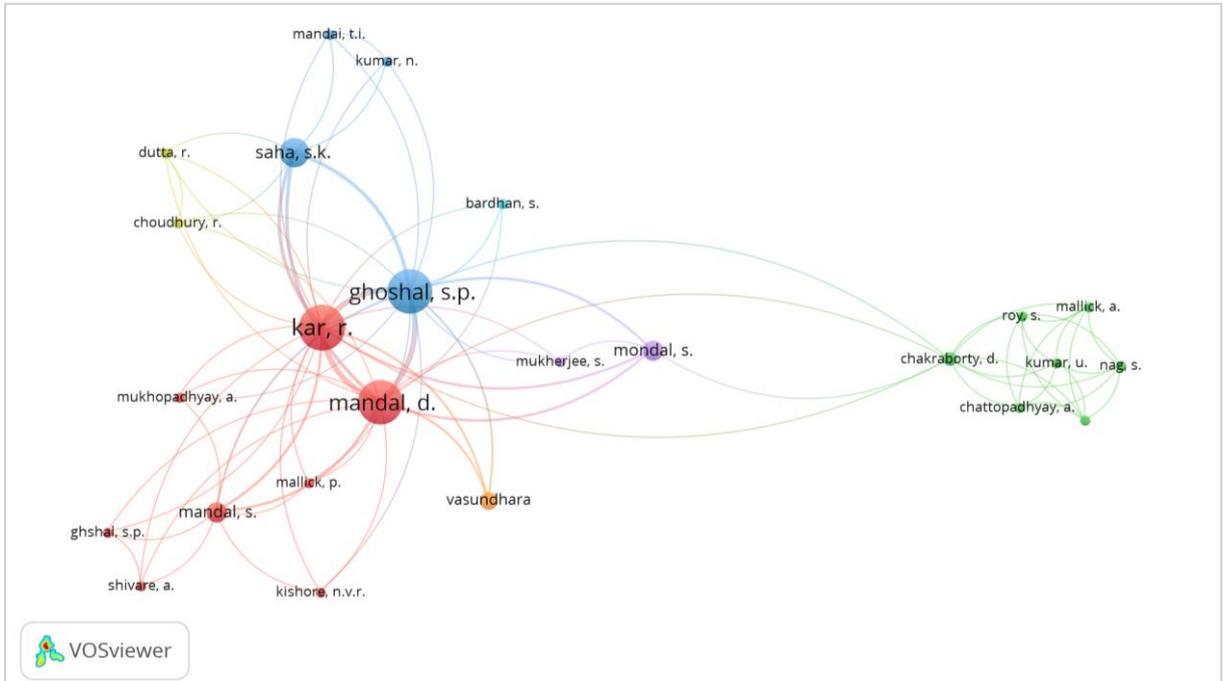
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 29 – Redes de coautoria considerando o ano das publicações



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 30 – Rede com autores com publicações em comum

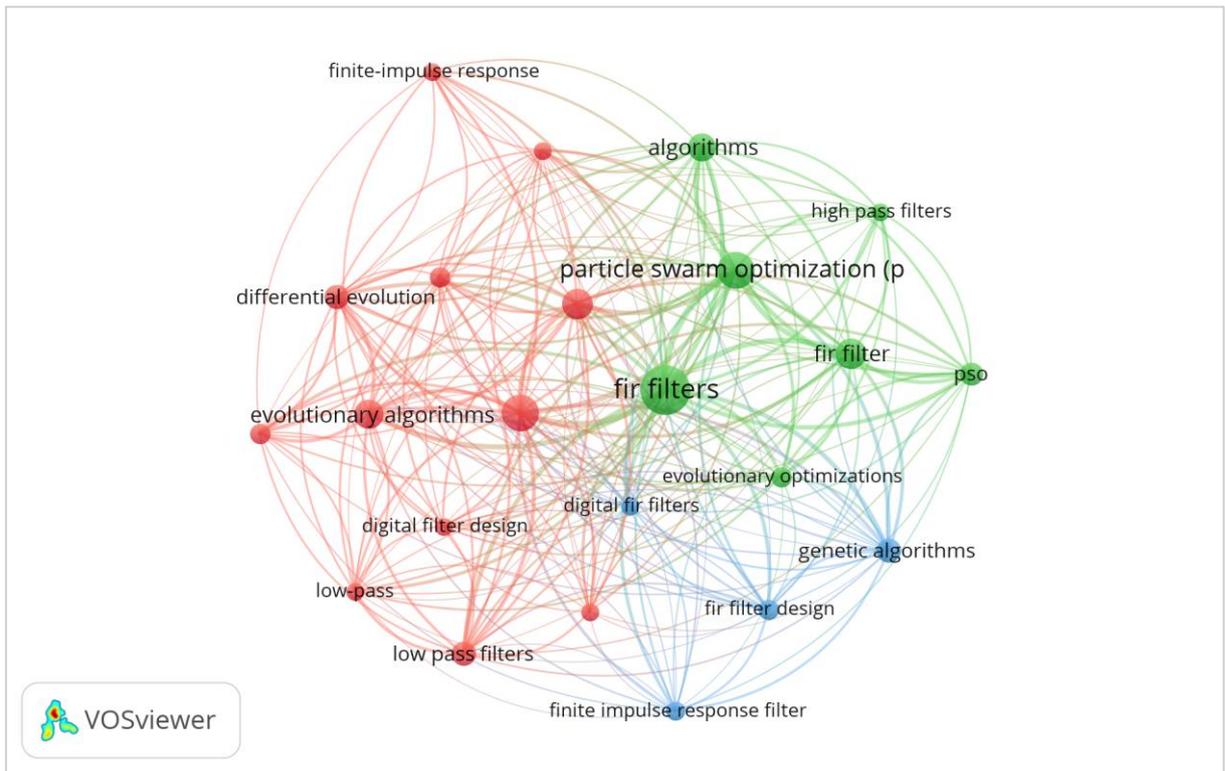


Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 31 apresenta as redes de coocorrência de palavras-chave para os 93 artigos selecionados. Para facilitar a visualização, na formação das redes foram selecionadas as palavras-chave com dez ou mais ocorrências e foram retiradas da pesquisa as palavras sem relação com o tema de pesquisa. Das 691 palavras-chave inicialmente identificadas, a rede resultante possui 27 organizadas em 3 *clusters*. O tamanho do círculo é referente ao número de ocorrências de um termo, as palavras presentes nos *clusters* possuem relação direta entre si, o tamanho de cada palavra no *cluster* está relacionado com a sua ocorrência nos artigos e os *links* entre as palavras indicam a quantidade de artigos em que dois termos ocorrem juntos. A Figura 31 mostra que as meta-heurísticas que possuem as maiores ocorrências na rede são PSO, DE e GA, sendo estas as meta-heurísticas de referência ou comparadas mais utilizadas nos artigos selecionados, conforme Figura 26 e Figura 27.

Através da síntese dos resultados encontrados na RSL podem ser respondidas as questões de pesquisa formuladas.

Figura 31 – Redes de coocorrência de palavras-chave



Fonte: Elaborado pelo autor.

**QP1:** Quais são as principais meta-heurísticas utilizadas no projeto de filtros digitais FIR de fase linear?

Através da RSL realizada foi possível identificar que a meta-heurística de referência mais utilizada foi o PSO, aplicado em 35,5% dos artigos selecionados, e a segunda meta-heurística de referência mais utilizada foi o DE (20,4%). As cinco meta-heurísticas de referência mais utilizadas foram PSO, DE, CSA, ABC e GA.

Com relação as meta-heurísticas utilizadas para comparação nos artigos, o PSO foi utilizado em 64,5% dos artigos, o GA em 35,5% e o DE 32,3%. Ressalta-se que não foram encontrados artigos na base de dados Scopus® em que a meta-heurística MBO tenha sido utilizada no projeto de filtros digitais FIR de fase linear.

**QP2:** Existem estudos de aplicação de meta-heurísticas híbridas baseadas em DE e MBO no projeto de filtros digitais FIR de fase linear?

Com relação aos algoritmos híbridos utilizados como meta-heurísticas de referência nos artigos selecionados têm-se DE com FA (algoritmo HFDE) e DE com PSO (algoritmo DE-PSO), e híbridos do PSO com CSA (algoritmo ICSPSO), com GA (algoritmo GLPSO) e com FA (algoritmo IOFP-PSO). Os algoritmos híbridos utilizados como meta-heurísticas comparadas foram o DE-PSO e o CSA com PSO (algoritmo

CSPSO). Na base de dados Scopus® não foram encontrados estudos de aplicação de meta-heurísticas híbridas baseadas em DE e MBO no projeto de filtros digitais FIR de fase linear.

## 5.2 Desenvolvimento do Algoritmo Híbrido

A seleção do algoritmo MBO como candidato a ser modificado ocorreu após o mapeamento sistemático da literatura. Algumas variantes do algoritmo MBO foram apresentadas na seção 2.9. Visto que as alternativas ao algoritmo MBO clássico ainda são reduzidas e que seu desempenho é aquém do esperado para um algoritmo de otimização, o algoritmo MBO foi adotado nesta tese como base para o desenvolvimento de uma nova variante do mesmo.

A solução apresentada para melhoria do algoritmo MBO consiste no procedimento de hibridização. A hibridização realizada substitui inteiramente o operador de ajuste da borboleta por outro código de uma meta-heurística associada com a etapa de intensificação do algoritmo doador. No processo de hibridização procurou-se preservar as características essenciais do algoritmo MBO mantendo a relação com a inspiração biológica. O algoritmo doador selecionado foi o JADE, um algoritmo de evolução diferencial adaptativo bem-sucedido que tem gerado novas implementações de grande desempenho, como aqueles citados na seção 2.7.

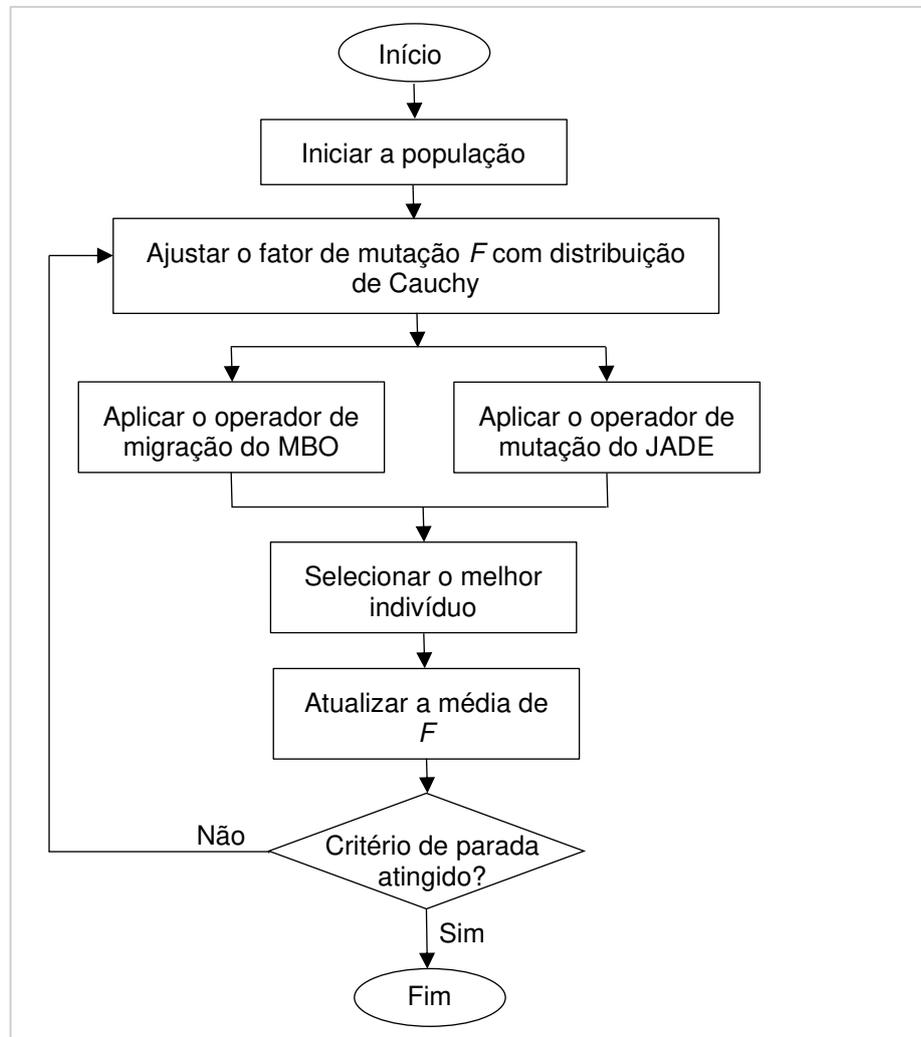
O algoritmo desenvolvido neste trabalho, denominado JMBO, adota o operador de migração do algoritmo MBO e o mecanismo de mutação adaptativo do algoritmo JADE, sem e com arquivo (Figura 32). Neste algoritmo é mantido o paralelismo dos operadores de migração e de ajuste, como no MBO, sendo o primeiro aplicado à subpopulação  $S_1$  e o segundo à subpopulação  $S_2$ .

## 5.3 Avaliação de Desempenho

Inicialmente o algoritmo JMBO foi aplicado a um conjunto de teste e seu desempenho foi comparado com outros algoritmos de otimização submetidos ao mesmo conjunto. A avaliação dos resultados foi realizada usando métricas tradicionais e testes de hipóteses. Após, o JMBO foi utilizado na solução de um problema de engenharia: o projeto de filtros digitais não recursivos pelo método de amostragem em frequência. Os desempenhos dos filtros FIR obtidos pela nova meta-heurística

também foram comparados com os resultados de outras meta-heurísticas de otimização.

Figura 32 – Fluxograma do algoritmo JMBO



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 5.3.1 Algoritmos de Comparação e Conjuntos de Teste

A revisão sistemática da literatura mostrou que as meta-heurísticas mais utilizadas para comparação de desempenho são PSO, GA e DE. Como o JMBO é resultado de um algoritmo de inteligência de enxame e outro de evolução diferencial, o PSO e o DE foram selecionados para comparação. Além destes, o JMBO foi comparado com o MBO, o JADE e variantes desenvolvidas a partir do MBO (GCMBO, IMBO, MBO-FS), do DE (TSDE) e do JADE (L-SHADE).

Cada algoritmo foi submetido ao conjunto de problemas de referência para otimização mono-objetivo com restrições laterais do Congresso Internacional de Computação Evolutiva do Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos (do inglês *IEEE International Congress on Evolutionary Computation*) de 2017 (CEC 2017). Este conjunto de teste atende aos requisitos elencados no Capítulo 3.

Os algoritmos de otimização mono-objetivo com restrições laterais servem como base para algoritmos de otimização mais complexos, como os algoritmos de otimização multiobjetivo, e toda nova estratégia é testada em problemas de otimização mono-objetivo. Para o CEC 2017 foram propostas 30 funções de teste<sup>19</sup>. Para todas as funções, o intervalo de busca é o mesmo:  $[-100, 100]^D$ , em que  $D$  é a dimensão do problema. As funções definidas são divididas nas seguintes categorias: funções unimodais ( $F_{1-3}$ ), funções multimodais básicas ( $F_{4-10}$ ), funções híbridas ( $F_{11-20}$ ) e funções compostas ( $F_{21-30}$ ). O valor ótimo para uma função é dado por  $F_i(x^*) = 100i$ , em que  $i$  é o número da função. Como exemplos, a função  $F_1$  tem um valor mínimo global igual a 100, enquanto a função  $F_{20}$  tem um valor mínimo global igual a 2.000 (AWAD *et al.*, 2016).

Como um segundo conjunto de teste, seis perfis de resposta em frequência de amplitude são propostos para o projeto de filtros digitais FIR de fase linear Tipo I. A função objetivo para o problema de otimização irrestrita dos filtros é formulada em termos de mínimos quadrados ponderados.

### 5.3.2 Procedimento Experimental

O procedimento experimental a seguir se baseia em algumas das diretrizes definidas por Awad *et al.* (2016) e foi adaptado para esta tese. Os algoritmos são avaliados para as dimensões 30 e 100 e cada problema é executado 51 vezes. O critério de parada adotado é o número máximo de avaliações da função objetivo, fixado em  $10^4 D$ .

Para se garantir a reprodutibilidade dos resultados, a semente do gerador de números pseudoaleatórios é a mesma para cada execução de um algoritmo, ou seja,

---

<sup>19</sup> A função  $F_2$  foi excluída por apresentar comportamento instável e variações de desempenho para um mesmo algoritmo implementado em C e MATLAB®.

a primeira execução inicia com a mesma semente para todo algoritmo, que é diferente das sementes das execuções subsequentes.

O tamanho da população é  $2D$  em todos os casos<sup>20</sup>. Para o algoritmo L-SHADE este tamanho refere-se ao tamanho da população inicial. A população inicial gerada é aleatória, uniformemente distribuída e idêntica em todas as execuções, independente do algoritmo ou da função de teste. Ao se garantir a mesma população para cada execução, exclui-se um fator aleatório e anula-se o efeito que esta população poderia ter sobre o resultado de um algoritmo.

Uma vez obtidos os dados das 51 execuções para cada dimensão, algoritmo e função de teste, uma análise comparativa é realizada empregando estatística descritiva e inferência estatística (testes de hipóteses).

Essas análises utilizam o valor mínimo alcançado por um algoritmo nas 51 execuções das funções de teste em vez do erro absoluto, ou seja, da diferença absoluta entre o valor mínimo obtido e o valor mínimo conhecido de cada função  $i$ ,  $F_i(x^*)$ . Este procedimento foi adotado para que as comparações gráficas fossem possíveis, já que as diferenças dos resultados entre algoritmos chegam a potências de dez e a escala logarítmica teve que ser empregada.

Também são avaliadas a taxa de convergência e a complexidade dos algoritmos. Os gráficos de convergência são apresentados em função do número de avaliações da função objetivo ( $N_{fe}$ ). Estes gráficos apresentam as curvas medianas, em vez de curvas médias, da evolução do valor ótimo da função objetivo. Adicionalmente são gerados gráficos de barras verticais que mostram a evolução da mediana do valor ótimo da função objetivo para cada dimensão, algoritmo e função de teste a 5, 10, 20 e 50% do número máximo de avaliações da função objetivo. A finalidade destes gráficos de barras é evidenciar a taxa de convergência dos algoritmos. Mesmo assim, a grande quantidade de gráficos dificulta uma análise comparativa da convergência entre algoritmos. Para isto propõe-se uma métrica de desempenho baseada no erro, denominada Erro Cumulativo de Convergência (ECC), expressa por

$$ECC_i = \sum_{j=1}^r p_j \{ \text{Md}[F_i(x_j)] - F_i(x^*) \} \quad (89)$$

---

<sup>20</sup> Este tamanho de população é relativamente baixo. O valor típico para problemas similares encontrado nas referências consultadas é  $10D$ , o que pode aumentar significativamente o custo computacional, dependendo da dimensão do problema e do número máximo de iterações.

na qual  $p_j \in P$ , com  $P = (0, 1]$  de cardinalidade  $r$ ,  $x_j = p_j N_{fe}$ ,  $F_i(x^*)$  é o valor mínimo conhecido da função  $i$ , e  $Md[F_i(x_j)]$  é a mediana das 51 avaliações da função  $F_i$  em  $x_j$ . Nesta tese adotou-se  $P = \{0,05, 0,1, 0,2, 0,3, 0,5, 0,8\}$ .

A complexidade de cada algoritmo é determinada pelo tempo médio de 30 execuções da função de teste  $F_{18}$  para as dimensões 30 e 100. O número máximo de avaliações da função objetivo adotado é  $2 \cdot 10^5$ . As execuções foram realizadas em série em vez de paralelas, já que se verificou que a variância do tempo de execução no modo paralelo é maior no MATLAB<sup>®</sup>. Todos os testes de tempo foram realizados no mesmo computador.

Medidas descritivas são calculadas para os valores mínimos de 51 execuções de todos os algoritmos aplicados às 29 funções do CEC 2017 para as dimensões 30 e 100. As medidas descritivas são: valor máximo, valor mínimo, quartil superior ou terceiro quartil ( $Q_3$ ), mediana (Md), quartil inferior ou primeiro quartil ( $Q_1$ ) e desvio absoluto mediano (MAD). O MAD, definido como a mediana dos desvios absolutos em relação à mediana dos dados, é uma medida robusta da variabilidade de dados quantitativos.

Os extremos e quartis também são apresentados por diagramas de caixa. Os dados são superpostos aos diagramas de caixa na forma de gráficos de dispersão (do inglês *scatter-plot*) para representar a distribuição dos mesmos. São considerados resultados extremos ou discrepantes (do inglês *outliers*) os resultados superiores a  $L_s$  ou inferiores a  $L_l$ , calculados pelas equações (41) e (42) com  $c = 1,5$ .

Resultados discrepantes retornados por um algoritmo de otimização podem indicar a convergência prematura em mínimos locais e, possivelmente, uma deficiência no operador ou etapa de diversificação desse algoritmo. No entanto, a presença de valores extremos em um conjunto de dados não significa, necessariamente, que esses valores apresentam uma diferença absoluta expressiva em relação à mediana, mas apenas que se encontram além dos limites de fio de bigode,  $L_s$  e  $L_l$ . Então, para quantificar o efeito dos valores discrepantes propõe-se que a raiz quadrada do erro quadrático médio (do inglês *root mean square error*, RMSE) seja aplicada aos 51 valores ótimos da função objetivo obtidos pelos algoritmos para cada dimensão e função de teste avaliadas. O objetivo é dar ênfase

principalmente aos valores extremos maiores que  $L_s$  e que ocorrem com maior frequência nos algoritmos testados.

Adicionalmente são criados gráficos que mostram os pares (Md, MAD) dos algoritmos para cada dimensão e função. Esses gráficos expressam a exatidão e a variabilidade de um algoritmo.

Os gráficos e métricas de desempenho citados anteriormente fornecem informações úteis para se comparar o desempenho de algoritmos, no entanto é necessário avaliar cada procedimento individualmente, considerando sua especificidade, e extrair conclusões pontuais sobre cada caso, observando um ou mais fatores do problema (dimensão, algoritmo, função). O resultado desta análise gera diversas conclusões parciais que são difíceis de serem expressas quando o conjunto de dados é grande, além de permitir diferentes interpretações dependendo do ponto de vista do avaliador. Os testes de hipóteses podem, nestes casos, fornecer uma conclusão abrangente sobre o desempenho relativo de um algoritmo.

Os testes estatísticos realizados utilizam as 51 soluções ótimas obtidas por um algoritmo, após  $10^4 D$  avaliações da função objetivo, para cada uma das 29 funções de teste do CEC 2017. Os resultados são arranjados como apresentados na Tabela 4 para cada dimensão  $D$ . Trata-se de um experimento em blocos ao acaso com igual número de observações (réplicas) por combinação bloco-tratamento (HOLLANDER; WOLFE; CHICKEN, 2014). Um experimento em blocos é formado por  $k$  tratamentos,  $n$  blocos e  $n \times k$  células, onde cada célula contém  $c$  observações. No experimento proposto, os  $A_k$  algoritmos representam os tratamentos, cada bloco contém apenas uma função de teste  $F_i$  e todas as células contêm o mesmo número de observações, 51 valores da função objetivo correspondentes a cada combinação de  $F_i$  e  $A_k$ .

O teste de Friedman (HOLLANDER; WOLFE; CHICKEN, 2014) é um teste de hipóteses não paramétrico para experimentos com dois fatores quando o número de observações  $c$  em cada célula é igual a 1. No presente experimento, o número de observações por célula é 51. Neste caso, autores clássicos sugerem outros métodos equivalentes ao teste de Friedman para avaliar experimentos com  $c > 1$  (HOLLANDER; WOLFE; CHICKEN, 2014; ZAR, 2014). Por outro lado, artigos relacionados ao tema desta tese substituem as  $c$  observações pela média aritmética das mesmas quando  $c > 1$  (GARCIA *et al.*, 2010; DERRAC *et al.*, 2011; CARRASCO *et al.*, 2020). A análise realizada sobre os dados obtidos (Capítulo 6) mostra que a

adoção de medidas paramétricas não é adequada para o presente caso. Sendo assim, adotou-se a mediana das 51 observações de cada célula e o teste de Friedman foi utilizado.

Tabela 4 – Arranjo dos resultados para cada dimensão

		Algoritmos			
		$A_1$	$A_2$	...	$A_k$
$F_1$		$f_{1,1,1}$	$f_{1,2,1}$		$f_{1,k,1}$
		$f_{1,1,2}$	$f_{1,2,2}$		$f_{1,k,2}$
		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
		$f_{1,1,c}$	$f_{1,2,c}$		$f_{1,k,c}$
$F_2$		$f_{2,1,1}$	$f_{2,2,1}$		$f_{2,k,1}$
		$f_{2,1,2}$	$f_{2,2,2}$		$f_{2,k,2}$
		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
		$f_{2,1,c}$	$f_{2,2,c}$		$f_{2,k,c}$
$\vdots$					
$F_n$		$f_{n,1,1}$	$f_{n,2,1}$		$f_{n,k,1}$
		$f_{n,1,2}$	$f_{n,2,2}$		$f_{n,k,2}$
		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
		$f_{n,1,c}$	$f_{n,2,c}$		$f_{n,k,c}$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Em razão da disparidade dos resultados obtidos pelos algoritmos de comparação selecionados, estes foram divididos em dois grupos: o grupo das Meta-heurísticas de Inteligência de Enxame (do inglês *Swarm Intelligence Metaheuristics*, SIM<sup>21</sup>), formado pelos algoritmos PSO, MBO, GCMBO, IMBO e MBO-FS; e o grupo das Meta-heurísticas baseadas na Evolução Diferencial (do inglês *Differential Evolution-based Metaheuristics*, DEM<sup>21</sup>), que inclui DE, JADE (sem e com arquivo), TSDE e L-SHADE. O algoritmo proposto (JMBO), nas versões sem e com

<sup>21</sup> Termos definidos pelo autor.

arquivo, é adicionado aos dois grupos para se realizar os testes estatísticos. Portanto, cada grupo é constituído por sete algoritmos, ou seja,  $k = 7$ .

Em relação às funções de teste utilizadas, os testes estatísticos são aplicados aos grupos das 29 funções do CEC 2017. O primeiro grupo contém as funções unimodais ( $F_{1-3}$ ) e as funções multimodais básicas ( $F_{4-10}$ ), e os outros dois são avaliados separadamente, o grupo das funções híbridas ( $F_{11-20}$ ) e o grupo das funções compostas ( $F_{21-30}$ ). Logo, para cada grupo de funções de teste tem-se  $n = 9$ ,  $n = 10$  e  $n = 10$ , respectivamente (Tabela 5).

O teste de Friedman não poderia ser aplicado ao grupo das funções unimodais por este conter apenas duas funções de teste ( $F_1$  e  $F_3$ ). Quando  $n = 2$ , o coeficiente de correlação de postos de Spearman deve ser empregado (ZAR, 2014). Nesta tese, optou-se por reunir as funções unimodais e multimodais em um mesmo grupo denominado unimultimodais, com  $n = 9$ , e aplicar o teste de Friedman para os três grupos de funções.

Como exemplo, a Tabela 6 apresenta os resultados para as funções unimultimodais com dimensão 30 aplicadas ao grupo SIM. Cada célula apresenta a mediana dos 51 valores da função objetivo obtida para cada par função de teste e algoritmo, e o correspondente posto ( $r$ ). Ao final da tabela são apresentados a soma dos postos ( $R_s$ ) e o posto médio ( $R_j$ ) para cada algoritmo. A Tabela 7 ilustra os resultados das funções compostas com dimensão 100 para os algoritmos DEM.

Uma vez calculada a estatística de Friedman ( $\chi_F^2$ ) para cada caso, ela é comparada com o valor crítico para determinar se há diferenças significativas entre os algoritmos. O valor crítico utilizado é obtido a partir da distribuição qui-quadrado ( $\chi^2$ ) com  $k - 1$  graus de liberdade e  $\alpha = 0,05$ . A estimativa do tamanho do efeito para o teste de Friedman é calculada pelo coeficiente de Kendall ( $W$ ), equação (45).

Se o teste rejeita a hipótese nula de que o desempenho dos algoritmos comparados é similar, um teste de comparações múltiplas é aplicado para encontrar pares de algoritmos com desempenho distintos.

Tabela 5 – Experimentos elaborados, totalizando 12 casos

Dimensão	Algoritmos ( <i>k</i> tratamentos)	Funções ( <i>n</i> blocos)	( <i>k</i> , <i>n</i> )
<i>D</i> = 30	SIM	$F_{1-10}$	(7, 9)
		$F_{11-20}$	(7,10)
		$F_{21-30}$	(7,10)
	DEM	$F_{1-10}$	(7, 9)
		$F_{11-20}$	(7,10)
		$F_{21-30}$	(7,10)
<i>D</i> = 100	SIM	$F_{1-10}$	(7, 9)
		$F_{11-20}$	(7,10)
		$F_{21-30}$	(7,10)
	DEM	$F_{1-10}$	(7, 9)
		$F_{11-20}$	(7,10)
		$F_{21-30}$	(7,10)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 6 – Resultados do grupo SIM unimultimodais com *D* = 30

	PSO		MBO		MBO-FS		GCMBO		IMBO		JMBO(1)		JMBO(2)	
	<i>Md</i>	<i>r</i>												
$F_{01}$	5,231E+05	4	4,043E+10	6	5,684E+10	7	2,260E+10	5	1,274E+03	3	1,000E+02	2	1,000E+02	1
$F_{03}$	3,280E+02	3	1,382E+05	7	1,373E+05	6	1,064E+05	5	1,767E+04	4	3,000E+02	2	3,000E+02	1
$F_{04}$	5,394E+02	4	6,495E+03	6	1,223E+04	7	3,065E+03	5	5,120E+02	3	4,040E+02	1	4,586E+02	2
$F_{05}$	6,079E+02	3	8,755E+02	6	9,676E+02	7	7,980E+02	5	7,511E+02	4	5,497E+02	2	5,418E+02	1
$F_{06}$	6,176E+02	3	6,807E+02	6	6,912E+02	7	6,525E+02	4	6,597E+02	5	6,002E+02	2	6,000E+02	1
$F_{07}$	8,159E+02	3	1,537E+03	5	2,167E+03	6	1,271E+03	4	2,280E+03	7	8,017E+02	2	7,775E+02	1
$F_{08}$	9,070E+02	3	1,179E+03	6	1,225E+03	7	1,102E+03	5	1,043E+03	4	8,468E+02	2	8,458E+02	1
$F_{09}$	1,079E+03	3	1,575E+04	6	1,634E+04	7	8,328E+03	5	8,035E+03	4	9,337E+02	2	9,093E+02	1
$F_{10}$	4,718E+03	3	7,933E+03	6	8,294E+03	7	7,359E+03	5	5,524E+03	4	4,373E+03	2	4,207E+03	1
$R_s$		29		54		61		43		38		17		10
$R_f$		3,22		6,00		6,78		4,78		4,22		1,89		1,11

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 7 – Resultados do grupo DEM compostas com  $D = 100$ 

	DE		JADE(1)		JADE(2)		L-SHADE		TSDE		JMBO(1)		JMBO(2)	
	Md	r												
$F_{21}$	3,186E+03	7	2,496E+03	4	2,496E+03	3	2,400E+03	1	3,145E+03	6	2,502E+03	5	2,487E+03	2
$F_{22}$	3,254E+04	7	1,697E+04	5	1,691E+04	4	1,194E+04	1	3,045E+04	6	1,594E+04	3	1,538E+04	2
$F_{23}$	3,692E+03	7	2,986E+03	4	2,978E+03	3	2,895E+03	1	3,606E+03	6	2,975E+03	2	2,997E+03	5
$F_{24}$	4,105E+03	7	3,427E+03	2	3,428E+03	3	3,401E+03	1	4,067E+03	6	3,476E+03	4	3,502E+03	5
$F_{25}$	3,216E+03	2	3,290E+03	7	3,262E+03	4	3,216E+03	1	3,280E+03	6	3,265E+03	5	3,227E+03	3
$F_{26}$	1,389E+04	7	7,176E+03	3	7,107E+03	2	6,908E+03	1	1,331E+04	6	8,646E+03	5	8,172E+03	4
$F_{27}$	3,339E+03	1	3,430E+03	5	3,382E+03	2	3,396E+03	3	3,412E+03	4	3,600E+03	7	3,506E+03	6
$F_{28}$	3,338E+03	4	3,353E+03	6	3,322E+03	1	3,322E+03	2	3,369E+03	7	3,346E+03	5	3,335E+03	3
$F_{29}$	8,652E+03	7	5,127E+03	2	5,140E+03	3	4,687E+03	1	7,888E+03	6	5,755E+03	5	5,578E+03	4
$F_{30}$	7,039E+03	6	5,787E+03	2	5,825E+03	3	5,713E+03	1	8,223E+03	7	6,424E+03	5	6,413E+03	4
$R_s$		55		40		28		13		60		46		38
$R_j$		5,50		4,00		2,80		1,30		6,00		4,60		3,80

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nesta tese foram realizadas comparações múltiplas  $N \times N$ , onde todos os algoritmos são comparados entre si, e são aplicados os testes *post-hoc* de Nemenyi e de Bergmann-Hommel. Deve-se observar que, quando se deseja avaliar estatisticamente o desempenho de um novo algoritmo, recomendam-se as comparações múltiplas  $1 \times N$  (GARCIA; HERRERA, 2008; DERRAC *et al.*, 2011). A opção por comparações múltiplas  $N \times N$  foi possibilitar a avaliação de duas parametrizações do algoritmo JMBO, a opção sem ou com arquivo.

Conforme Garcia e Herrera (2008), Derrac *et al.* (2011) e Trawinski *et al.* (2012), o teste de Nemenyi é um teste conservador e pode não encontrar diferença significativa entre os pares de algoritmos testados, enquanto o teste de Bergmann-Hommel é considerado o de melhor desempenho. Ambos os testes assumem como hipótese nula que não há diferença estatisticamente significativa entre os algoritmos comparados.

Após o teste de Nemenyi, os resultados obtidos das comparações entre os algoritmos são representados por um gráfico que mostra a diferença crítica (CD) e os algoritmos ordenados pelos respectivos postos médios.

Enquanto os testes de Nemenyi e de Bergmann-Hommel são testes de hipóteses bilaterais, nos quais se assume que a hipótese alternativa indica a existência de diferença de desempenho entre os algoritmos comparados, para o intervalo de confiança das diferenças de postos médios obtidos pelo teste de Friedman o teste de hipóteses é unilateral à direita (direcional), adotado nesta tese como

$$\begin{cases} H_0 : R_i - R_j = 0 \\ H_1 : R_i - R_j > 0 \end{cases} \quad (90)$$

sendo  $R_i$  e  $R_j$  os postos médios dos algoritmos  $i$  e  $j$ . A hipótese nula é que não há diferença de desempenho entre o par de algoritmos comparados, já a hipótese alternativa é que o algoritmo  $j$  apresenta desempenho superior ao algoritmo  $i$ .

Na sequência, o desempenho do algoritmo JMBO (sem e com arquivo) é comparado com os algoritmos PSO, MBO, GCMBO, IMBO, MBO-FS, DE, JADE (sem e com arquivo), TSDE e L-SHADE em um caso de aplicação: o projeto de filtros digitais FIR de fase linear Tipo I. São realizados projetos de filtros seletores típicos – passa-baixa, passa-alta, passa-faixa e rejeita-faixa – de ordem 20 e 60. A minimização da soma dos erros quadrados ponderados é adotada como critério de otimização, equação (88). Para esta avaliação, todos os algoritmos iniciam com a mesma população, 51 execuções são realizadas e o critério de parada é o número máximo de avaliações da função objetivo, adotado igual a  $3 \cdot 10^3 D$ . A mediana dos erros quadráticos mínimos ( $ME_w$ ) alcançada por um algoritmo e a correspondente mediana do número de avaliações da função objetivo para convergência ( $n_{fe}$ ) com tolerância de  $10^{-6}$  em cada execução, são usados como índices de desempenho nas comparações.

## 6 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Este capítulo apresenta a comparação de desempenho do algoritmo proposto (JMBO) com algoritmos básicos (DE e PSO), algoritmos de base (JADE e MBO) e variantes desenvolvidas a partir destes (GCMBO, IMBO, MBO-FS, L-SHADE e TSDE) utilizando os procedimentos apresentados no Capítulo 5. Inicialmente o algoritmo híbrido JMBO foi codificado a partir do fluxograma da Figura 32, como apresentado no pseudocódigo do Algoritmo 1. O procedimento de hibridização realizado substituiu o operador de ajuste do MBO pelo operador de outra meta-heurística, da mesma forma que Faris, Aljarah e Mirjalili (2017) e Strumberger *et al.* (2018b). O JMBO adota o operador de mutação adaptativo do JADE, equação (7). Ainda, quando comparado ao MBO, o JMBO exclui o operador elitismo, adiciona o mecanismo de seleção, preserva o paralelismo entre os operadores de migração e de ajuste, e mantém a ordenação da população pelo *fitness* ao final de cada iteração.

Os códigos do JMBO e dos demais algoritmos de comparação foram implementados em MATLAB® R2015a. As operações comuns aos algoritmos, como a geração da população inicial, a verificação das restrições laterais e a seleção foram codificadas igualmente para permitir uma avaliação mais justa possível da complexidade de cada implementação – o tempo médio de execução.

Sobre o tratamento das violações das restrições laterais, diferentes alternativas são propostas para tratar essa violação (PRICE; STORN; LAMPINEN, 2005). O método denominado *bounce-back* foi adotado em todos algoritmos avaliados. Este método redefine a componente excedida ( $v_{i,k,g}$ ) como sendo a média entre o limite violado ( $x_k^{lb}$ ,  $x_k^{ub}$ ) e a correspondente componente do vetor gerador ( $x_{i,k,g}$ ), ou seja,

$$v_{i,k,g} = (x_k^{lb} + x_{i,k,g})/2 \quad \text{se } v_{i,k,g} < x_k^{lb} \quad (91)$$

$$v_{i,k,g} = (x_k^{ub} + x_{i,k,g})/2 \quad \text{se } v_{i,k,g} > x_k^{ub} \quad (92)$$

Especificamente sobre o algoritmo PSO, utilizou-se a formulação modificada para atualização do vetor velocidade proposta por Shi e Eberhart (1998), equação (25).

Para alguns algoritmos, o código fonte em MATLAB® estava disponível na internet. Para outros foi necessário escrever o código a partir dos artigos de origem. Em todos os casos, os códigos foram comparados com o artigo de origem, adaptados (algumas operações foram vetorizadas), uniformizados em relação às mesmas

operações e testados individualmente antes de serem submetidos ao conjunto de teste do CEC 2017.

### Algoritmo 1 – Pseudocódigo do JMBO

---

```

% Parâmetros principais de entrada do algoritmo JMBO:
% - partition,period (MBO)
% - c,p,Fm,Afactor (JADE)
%
% Inicia a população inicial
1 Pop ← gera_pop(numPop,numVar)
% Avalia a população inicial
2 PopCost ← avalia(Pop)
% Ordena a população conforme PopCost
3 Pop ← ordena(PopCost,Pop)
% Define tamanho das subpopulações Pop1 e Pop2
4 numPop1 ← calcula_numPop1(numPop,partition)
5 numPop2 ← numPop - numPop1
6 Enquanto a condição de parada não é satisfeita
    % Divide Pop em Pop1 e Pop2
7    [Pop1,Pop2] ← divide(Pop,numPop1,numPop2)
    % =====
    % Operador de migração baseado no MBO
    % =====
8    for i ← 1:numButterfly1
9        for j ← 1:numVar
10           r1 ← rand*period
11           if r1 ≤ partition
12              NewPop1(i,j) ← Pop1(rand,j)
13           else
14              NewPop1(i,j) ← Pop2(rand,j)
15           end
16        end
17    end
    % =====
    % Operador de mutação baseado no JADE
    % =====
    % Gera F de acordo com a distribuição de Cauchy
18    F ← randF(numButterfly2,Fm)
    % Seleciona as p melhores soluções
19    pBest ← seleciona_pbest(Pop)
    % Seleciona soluções aleatórias a partir de Pop2 e arquivo
20    if Afactor = TRUE
21        popAll ← seleciona_solucoes_rand({Pop2 U Pop_arquivo})
22    else
23        popAll ← { }
24    end
    % Mutação
25    NewPop2 ← Pop2+F*(pBest-Pop2+Pop2(rand)-popAll(rand));
    % Combina as duas subpopulações
26    NewPop ← {NewPop1 U NewPop2}
    % Verifica violações das restrições laterais
27    NewPop ← restricoes_laterais(NewPop,limite_sup,limite_inf);
    % Avalia nova a população
28    NewPopCost ← avalia(NewPop)
    % A população atual substitui a anterior se possuir melhor aptidão

```

---

```

29 [Pop,PopCost] ← seleciona_aptos(Pop,PopCost,NewPop,NewPopCost)
30 Pop_arquivo ← atualiza_arquivo(Pop,PopCost)
   % Extrai o fator de escala dos indivíduos aptos
31 goodF ← extrai_F(Pop,PopCost,F)
   % Atualiza parâmetro de localização
32 Fm ← media_Lehmer(c,Fm,goodF)
   % Ordena a população conforme PopCost
33 Pop ← ordena(PopCost,Pop)
34 Retorno para verificação da condição de parada

```

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os parâmetros adotados para cada algoritmo foram os mesmos apresentados nas referências, Tabela 8. Para todos os algoritmos relacionados o tamanho da população ( $N_p$ ) é um parâmetro constante e predeterminado, com exceção do L-SHADE. Alguns parâmetros requerem consulta à referência citada para uma descrição mais detalhada.

Tabela 8 – Configuração dos parâmetros dos algoritmos

Algoritmo (Referência)	Parâmetro		Descrição
	Símbolo	Valor	
<b>PSO</b> (MARINI; WALCZAK, 2015)	<i>c1</i>	2,0	Coefficiente de aceleração (peso cognitivo)
	<i>c2</i>	2,0	Coefficiente de aceleração (peso social)
	<i>wmax</i>	0,9	Peso máximo de inércia
	<i>wmin</i>	0,4	Peso mínimo de inércia
	<i>k1</i>	0,28	Coefficiente limitador da velocidade máxima
	<i>k2</i>	0,01	Coefficiente limitador da velocidade mínima
<b>MBO</b> (WANG; DEB; CUI, 2015)	<i>keep</i>	2	Número de indivíduos aptos para a próxima geração
	<i>maxStepSize</i>	1,0	Tamanho máximo do passo
	<i>partition</i>	5/12	Percentual de indivíduos da subpopulação 1
	<i>period</i>	1,2	Período de migração (12 meses/ano)
	<i>BAR</i>	5/12	Taxa de ajuste da borboleta
<b>GCMBO</b> (WANG; ZHAO; DEB, 2015)	<i>keep</i>	2	Número de indivíduos aptos para a próxima geração
	<i>maxStepSize</i>	1,0	Tamanho máximo do passo
	<i>partition</i>	5/12	Percentual de indivíduos da subpopulação 1
	<i>period</i>	1,2	Período de migração (12 meses/ano)
	<i>BAR</i>	5/12	Taxa de ajuste da borboleta

(Tabela 8 – Continuação)

Algoritmo (Referência)	Parâmetro		Descrição
	Símbolo	Valor	
<b>IMBO</b> (FARIS; ALJARAH; MIRJALILI, 2017)	<i>keep</i>	2	Número de indivíduos aptos para a próxima geração
	<i>partition</i>	5/12	Percentual de indivíduos da subpopulação 1
	<i>period</i>	1,2	Período de migração (12 meses/ano)
	<i>b</i>	0,2	Coefficiente linear
	<i>n</i>	6	Coefficiente constante
<b>MBO-FS</b> (STRUMBERGER <i>et al.</i> , 2018b)	<i>keep</i>	2	Número de indivíduos aptos para a próxima geração
	<i>maxStepSize</i>	1,0	Tamanho máximo do passo
	<i>partition</i>	5/12	Percentual de indivíduos da subpopulação 1
	<i>period</i>	1,2	Período de migração (12 meses/ano)
	<i>BAR</i>	5/12	Taxa de ajuste da borboleta
	<i>alpha</i>	0,5	Coefficiente de aleatorização
	<i>beta0</i>	1	Atratividade em $r = 0$
	<i>betamin</i>	0	Valor mínimo para a atratividade
<b>DE</b> (PRICE, 2017)	<i>F</i>	0,5	Fator de escala
	<i>CR</i>	0,9	Taxa de cruzamento
	<i>strategy</i>	DE/rand/1/bin	Estratégia de mutação
<b>JADE</b> (ZHANG; SANDERSON, 2007)	<i>c</i>	0,1	Constante positiva para adaptação
	<i>p</i>	0,05	Porcentagem de indivíduos com melhor aptidão usados na mutação
	<i>CRm</i>	0,5	Valor inicial para <i>CRm</i> (valor médio na determinação de <i>CR</i> )
	<i>Fm</i>	0,5	Valor inicial para <i>Fm</i> (parâmetro de localização na determinação de <i>F</i> )
	<i>Afactor</i>	0 ou 1	Opção de uso das soluções arquivadas
<b>TSDE</b> (LIU <i>et al.</i> , 2016)	<i>F</i>	{1,0, 1,0, 0,8}	Valores pré-definidos para <i>F</i>
	<i>CR</i>	{0,1, 0,9, 0,2}	Valores pré-definidos para <i>CR</i>
<b>L-SHADE</b> (TANABE; FUKUNAGA, 2014)	<i>p_best_rate</i>	0,11	Porcentagem de indivíduos com melhor aptidão usados na mutação
	<i>arc_rate</i>	1,4	Tamanho máximo do arquivo
	<i>memory_size</i>	5	Tamanho da memória histórica
	<i>max_pop_size</i>	0	Tamanho inicial da população ( $N_p$ se 0)
<b>JMBO</b> (WANG; DEB; CUI, 2015; ZHANG; SANDERSON, 2007)	<i>partition</i>	5/12	Percentual de indivíduos da subpopulação 1
	<i>period</i>	1,2	Período de migração (12 meses/ano)
	<i>c</i>	0,1	Constante positiva para adaptação
	<i>p</i>	0,05	Porcentagem de indivíduos com melhor aptidão usados na mutação
	<i>Fm</i>	0,5	Valor inicial para <i>Fm</i> (parâmetro de localização na determinação de <i>F</i> )
	<i>Afactor</i>	0 ou 1	Opção de uso das soluções arquivadas

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 6.2 Avaliação de Desempenho sobre o Conjunto de Teste CEC 2017

Como explanado no Capítulo 5, os algoritmos foram separados no grupo SIM (PSO, MBO, GCMBO, IMBO e MBO-FS) e no grupo DEM (DE, JADE sem e com arquivo, L-SHADE e TSDE), tendo o JMBO sem e com arquivo participado de ambos. Esta divisão permitiu analisar isoladamente o desempenho do JMBO em relação ao grupo SIM e ao grupo DEM.

A partir desta seção, JADE(1) refere-se ao algoritmo JADE sem arquivo, JADE(2) ao JADE com arquivo, JMBO(1) ao JMBO sem arquivo e JMBO(2) ao JMBO com arquivo. Quando citado apenas JADE ou JMBO, está-se referindo às versões sem e com arquivo de cada algoritmo, simultaneamente.

As medidas descritivas calculadas para os resultados das 51 execuções de todos os algoritmos aplicados às 29 funções do CEC 2017, para as dimensões 30 e 100, são apresentadas na Tabela 27 até a Tabela 38 do Apêndice A. As seguintes medidas descritivas foram determinadas: valor máximo (Max), valor mínimo (Min), quartil superior ou terceiro quartil ( $Q_3$ ), mediana (Md), quartil inferior ou primeiro quartil ( $Q_1$ ) e desvio absoluto mediano (MAD). Os extremos e quartis calculados foram representados na forma de diagramas de caixa com seus dados superpostos para indicar a dispersão dos mesmos<sup>22</sup>, como mostram a Figura 121 até a Figura 140 do Apêndice B. Adicionalmente, os pares (Md, MAD) por função e dimensão são apresentados na Figura 141 até a Figura 150 do Apêndice B. Considerando as medidas descritivas e suas representações pode-se observar que, de modo geral, quando JMBO(1) e JMBO(2) são comparados ao grupo SIM, eles obtiveram valores medianos inferiores e dispersões menores, tanto para a dimensão 30 quanto para a dimensão 100. No caso do grupo DEM com dimensão 30, os resultados para o JMBO foram desfavoráveis para a maioria das funções de teste, no entanto, para a dimensão 100 o JMBO equiparou-se aos demais algoritmos em muitos casos.

Tanto a mediana (Md) quanto o desvio absoluto mediano (MAD) são medidas robustas, sendo mais resilientes a resultados discrepantes que a média e o desvio padrão, respectivamente. Entretanto, meta-heurísticas de otimização estão sujeitas a convergir para mínimos locais. Nestes casos, considera-se que os valores extremos

---

<sup>22</sup> Também foram obtidos os diagramas tipo *notched boxplot*, *violin plot* e *box-percentile plot*. No entanto, os diagramas ficaram distorcidos para muitos casos do grupo SIM em função da distribuição dos dados e por isso foram considerados inadequados para apresentação nesta tese.

são relevantes para se caracterizar o operador, ou etapa, de diversificação de um algoritmo. Para se comparar os erros em relação ao mínimo global de cada função do conjunto de teste,  $F_i(x^*)$ , foi calculado o RMSE. Os resultados estão disponíveis da Tabela 39 à Tabela 42 (Apêndice A), e de forma gráfica na Figura 151 e na Figura 152 para cada dimensão e função de teste (Apêndice B). No Quadro 1, os desempenhos relativos dados pelo RMSE são comparados. Segundo este critério, o JMBO obteve um desempenho superior aos demais algoritmos para as funções unimultimodais, ficando atrás apenas do TSDE para as funções com dimensão 30. No caso das funções híbridas, o JMBO superou todos os algoritmos SIM, obteve um RMSE menor que JADE para as funções com dimensão 30 e menor que DE e TSDE para as funções com dimensão 100. O RMSE do JMBO foi menor que todos os algoritmos SIM para as funções compostas e obteve um RMSE menor que DE e TSDE para estas funções com dimensão 100.

Quadro 1 – Comparação dos algoritmos pelo RMSE

Grupo de funções	D	Algoritmos
Unimultimodais	30	TSDE < <u>JMBO(2)</u> < <u>JMBO(1)</u> < DE < JADE(2) < JADE(1) < L-SHADE < IMBO < PSO < GCMBO < MBO < MBO-FS
	100	<u>JMBO(2)</u> < <u>JMBO(1)</u> < TSDE < L-SHADE < JADE(1) < JADE(2) < DE < PSO < IMBO < GCMBO < MBO < MBO-FS
Híbridas	30	TSDE < L-SHADE < DE < <u>JMBO(2)</u> < <u>JMBO(1)</u> < JADE(1) < JADE(2) < IMBO < PSO < GCMBO < MBO < MBO-FS
	100	JADE(2) < L-SHADE < JADE(1) < <u>JMBO(1)</u> < <u>JMBO(2)</u> < DE < TSDE < PSO < IMBO < GCMBO < MBO < MBO-FS
Compostas	30	DE < TSDE < L-SHADE < JADE(2) < JADE(1) < <u>JMBO(2)</u> < <u>JMBO(1)</u> < PSO < IMBO < GCMBO < MBO < MBO-FS
	100	L-SHADE < JADE(2) < JADE(1) < <u>JMBO(2)</u> < <u>JMBO(1)</u> < TSDE < DE < IMBO < PSO < GCMBO < MBO < MBO-FS

Fonte: Elaborado pelo autor.

Da Figura 81 até a Figura 120 do Apêndice B são exibidos os gráficos de convergência nos quais se pode observar a tendência da mediana do valor ótimo da função objetivo apresentado em relação ao número de avaliações da função objetivo ( $N_{fe}$ ). Ao lado de cada gráfico de convergência está o gráfico de barras verticais da mediana do valor ótimo da função objetivo a 5, 10, 20 e 50% do número máximo de avaliações da função objetivo por dimensão e grupo de funções. A métrica proposta como índice de desempenho para a taxa de convergência dos algoritmos, o ECC, foi calculada para cada caso pela equação (89) com  $P = \{0,05, 0,1, 0,2, 0,3, 0,5, 0,8\}$ . A

Tabela 9 apresenta os postos médios dos ECCs para cada dimensão, algoritmo e função.

Segundo os postos médios dos ECCs, o JMBO exibiu postos médios inferiores aos algoritmos SIM para todos os grupos de funções, tanto com dimensão 30 quanto com dimensão 100. No caso dos algoritmos DEM com dimensão 30, o JMBO obteve posto médio menor que DE e TSDE para as funções unimodais, os maiores postos médios para as funções híbridas e somente o JMBO(2) obteve um posto médio menor que DE e TSDE para as funções compostas. Já para os algoritmos DEM com dimensão 100, o posto médio do JMBO(2) foi maior apenas que L-SHADE nos três grupos de funções. Ainda sobre os algoritmos DEM com dimensão 100, o posto médio do JMBO(1) foi menor que JADE(1), DE e TSDE para as funções unimodais, menor que DE e TSDE para as funções híbridas e menor que JADE(1), DE e TSDE para as funções compostas.

Tabela 9 – Postos médios dos ECCs

Grupos de funções	$D$	PSO	MBO	MBO-FS	GCMBO	IMBO	DE	JADE(1)	JADE(2)	L-SHADE	TSDE	JMBO(1)	JMBO(2)
Uni-multimodais	30	7,33	10,78	12,00	9,67	9,22	7,00	2,33	3,22	1,67	6,56	4,56	3,67
	100	6,78	11,00	11,78	9,89	8,67	6,89	4,00	3,11	1,78	7,56	3,89	2,67
Híbridas	30	8,10	11,10	11,90	10,00	8,90	2,70	3,40	3,50	2,10	5,80	5,60	4,90
	100	6,70	11,00	12,00	9,90	8,80	7,10	3,30	3,30	1,70	7,50	3,60	3,10
Compostas	30	7,60	10,90	12,00	8,80	9,60	5,20	3,00	2,60	1,80	6,30	5,60	4,60
	100	7,80	11,00	12,00	7,90	8,90	6,60	4,60	3,30	1,30	7,50	4,10	3,00

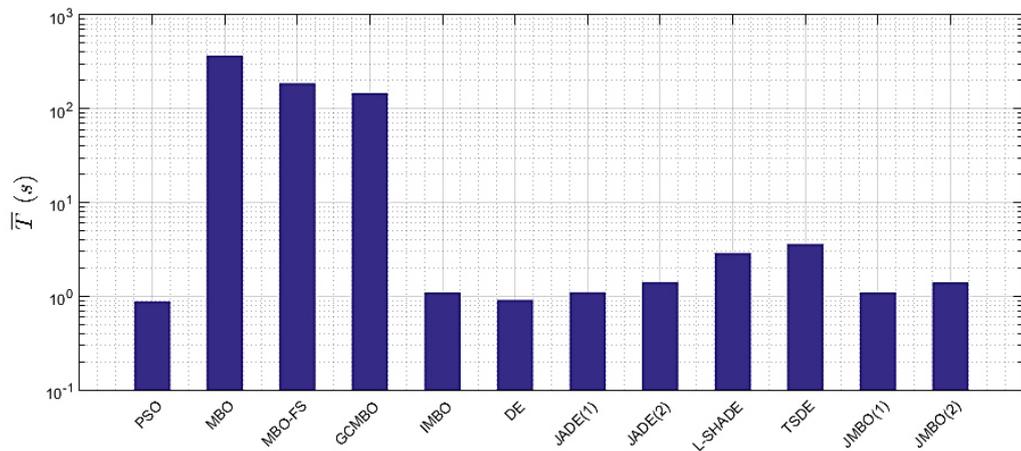
Fonte: Elaborado pelo autor.

A avaliação da complexidade dos algoritmos utilizando o tempo médio ( $\bar{T}$ ) de execução, em segundos, da função  $F_{18}$  com dimensões 30 e 100 é apresentada na Figura 33. Os testes foram realizados no MATLAB® 2015b em um mesmo computador com a seguinte configuração: placa mãe PCWARE IPMB250, processador Intel® Core i5-7400 3 GHz e 8 GB de RAM DDR4.

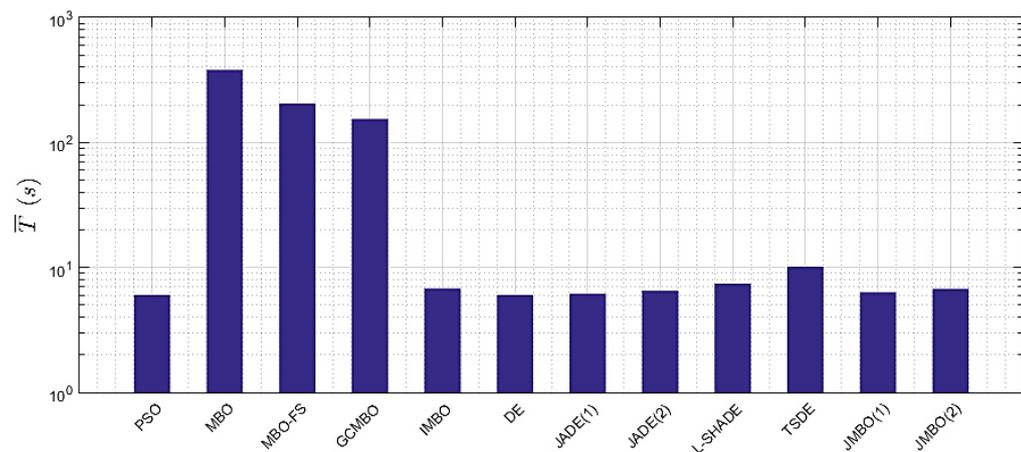
O tempo médio de execução da função  $F_{18}$  com dimensão 30 para o JMBO(1) foi de 1,09 s, menor que JADE(1) (1,10 s), JMBO(2) (1,41 s), JADE(2) (1,41 s), L-SHADE (2,88 s), TSDE (3,60 s), GCMBO (146,28 s), MBO-FS (187,19 s) e MBO (368,64 s). Em relação à dimensão 100, o JMBO(1) apresentou tempo médio de

6,33 s, menor que JADE(2) (6,51 s), JMBO(2) (6,74 s), IMBO (6,79 s), L-SHADE (7,41 s), TSDE (10,12 s), GCMBO (154,77 s), MBO-FS (204,21 s) e MBO (380,41 s).

Figura 33 – Tempos médios de execução para (a)  $D = 30$  e (b)  $D = 100$



(a)



(b)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Na sequência são apresentados os resultados tabulados por grupos de funções e aplicados testes de hipóteses, como disposto no Procedimento Experimental (seção 5.3.2). Todos os testes estatísticos e gráficos que seguem foram realizados com o *software* R.

Para todos os casos foram realizadas análises de normalidade utilizando o teste de Shapiro-Wilk e de homoscedasticidade utilizando o teste de Levene. Como estas duas condições não foram atendidas, foram aplicados testes não paramétricos. Para realizar a comparação entre mais de três algoritmos diferentes com amostras dependentes, selecionou-se o teste não paramétrico de Friedman.

A Tabela 10 até a Tabela 21 apresentam a mediana dos 51 valores da função objetivo ( $Md$ ) obtida para cada par função de teste e algoritmo, e o correspondente posto ( $r$ ). A soma dos postos ( $R_s$ ) e o posto médio ( $R_j$ ) para cada algoritmo são apresentados ao final de cada tabela.

Para as funções unimultimodais com dimensão 30 (Tabela 10) e 100 (Tabela 11) aplicadas aos algoritmos SIM verifica-se que o JMBO(2) foi o algoritmo com o menor posto médio, seguido pelo JMBO(1).

Para as funções híbridas com dimensão 30 aplicadas aos algoritmos SIM (Tabela 12) verifica-se que o JMBO(2) foi o algoritmo com o menor posto médio, e para a dimensão 100 (Tabela 13) os algoritmos JMBO(1) e JMBO(2) obtiveram o mesmo posto médio, sendo o menor dentre os algoritmos comparados.

Para as funções compostas com dimensão 30 e 100, Tabela 14 e Tabela 15, respectivamente, o JMBO(2) foi o algoritmo com o menor posto médio, do mesmo modo que os grupos de funções anteriores.

Para todos os grupos de funções com dimensão 30 e 100 aplicados aos algoritmos SIM (Tabela 10 até Tabela 15), o algoritmo com o maior valor do posto médio foi o MBO-FS.

Para as funções unimultimodais com dimensão 30 aplicadas aos algoritmos DEM (Tabela 16) verifica-se que o JADE(2) foi o algoritmo com o menor posto médio e para a dimensão 100 (Tabela 17) os algoritmos JADE(2) e L-SHADE obtiveram o menor posto médio.

Para as funções híbridas com dimensão 30 aplicadas aos algoritmos DEM (Tabela 18), o algoritmo TSDE apresentou o menor posto médio. Para as funções compostas com dimensão 30 (Tabela 20) o menor posto médio foi obtido pelo algoritmo DE. Para as funções híbridas e compostas com dimensão 100, Tabela 19 e Tabela 21, respectivamente, o L-SHADE apresentou o menor posto médio.

O algoritmo com o maior posto médio foi o JMBO(1) para todas as funções com dimensão 30 do grupo DEM (Tabela 16, Tabela 18 e Tabela 20), o algoritmo DE obteve os maiores postos médios para as funções unimultimodais e híbridas com dimensão 100 (Tabela 17 e Tabela 19) e o TSDE obteve o maior valor do posto médio para as funções compostas com dimensão 100 (Tabela 21).

Tabela 10 – Resultados do grupo SIM unimultimodais com  $D = 30$ 

	PSO		MBO		MBO-FS		GCMBO		IMBO		JMBO(1)		JMBO(2)	
	Md	r												
$F_{01}$	5,231E+05	4	4,043E+10	6	5,684E+10	7	2,260E+10	5	1,274E+03	3	1,000E+02	2	1,000E+02	1
$F_{03}$	3,280E+02	3	1,382E+05	7	1,373E+05	6	1,064E+05	5	1,767E+04	4	3,000E+02	2	3,000E+02	1
$F_{04}$	5,394E+02	4	6,495E+03	6	1,223E+04	7	3,065E+03	5	5,120E+02	3	4,040E+02	1	4,586E+02	2
$F_{05}$	6,079E+02	3	8,755E+02	6	9,676E+02	7	7,980E+02	5	7,511E+02	4	5,497E+02	2	5,418E+02	1
$F_{06}$	6,176E+02	3	6,807E+02	6	6,912E+02	7	6,525E+02	4	6,597E+02	5	6,002E+02	2	6,000E+02	1
$F_{07}$	8,159E+02	3	1,537E+03	5	2,167E+03	6	1,271E+03	4	2,280E+03	7	8,017E+02	2	7,775E+02	1
$F_{08}$	9,070E+02	3	1,179E+03	6	1,225E+03	7	1,102E+03	5	1,043E+03	4	8,468E+02	2	8,458E+02	1
$F_{09}$	1,079E+03	3	1,575E+04	6	1,634E+04	7	8,328E+03	5	8,035E+03	4	9,337E+02	2	9,093E+02	1
$F_{10}$	4,718E+03	3	7,933E+03	6	8,294E+03	7	7,359E+03	5	5,524E+03	4	4,373E+03	2	4,207E+03	1
$R_s$		29		54		61		43		38		17		10
$R_j$		3,22		6,00		6,78		4,78		4,22		1,89		1,11

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 11 – Resultados do grupo SIM unimultimodais com  $D = 100$ 

	PSO		MBO		MBO-FS		GCMBO		IMBO		JMBO(1)		JMBO(2)	
	Md	r												
$F_{01}$	2,775E+09	3	3,369E+11	6	3,463E+11	7	2,407E+11	5	7,025E+10	4	1,381E+03	2	3,999E+02	1
$F_{03}$	1,843E+04	3	8,056E+05	7	6,578E+05	5	7,311E+05	6	3,729E+05	4	1,480E+04	2	3,628E+03	1
$F_{04}$	1,043E+03	3	9,091E+04	6	1,526E+05	7	6,197E+04	5	3,626E+03	4	5,382E+02	1	5,696E+02	2
$F_{05}$	1,080E+03	3	2,567E+03	6	2,589E+03	7	2,208E+03	5	1,708E+03	4	7,348E+02	2	6,672E+02	1
$F_{06}$	6,480E+02	3	7,328E+02	6	7,426E+02	7	7,221E+02	5	6,797E+02	4	6,018E+02	2	6,007E+02	1
$F_{07}$	1,583E+03	3	8,673E+03	5	1,205E+04	7	5,660E+03	4	9,874E+03	6	1,057E+03	2	1,022E+03	1
$F_{08}$	1,447E+03	3	2,748E+03	6	3,013E+03	7	2,469E+03	5	2,206E+03	4	1,031E+03	2	9,801E+02	1
$F_{09}$	2,497E+04	3	1,121E+05	7	1,100E+05	6	8,632E+04	5	3,977E+04	4	1,296E+03	2	1,060E+03	1
$F_{10}$	1,469E+04	3	3,122E+04	6	3,126E+04	7	2,925E+04	5	1,617E+04	4	1,381E+04	2	1,347E+04	1
$R_s$		27		55		60		45		38		17		10
$R_j$		3,00		6,11		6,67		5,00		4,22		1,89		1,11

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 12 – Resultados do grupo SIM híbridas com  $D = 30$ 

	PSO		MBO		MBO-FS		GCMBO		IMBO		JMBO(1)		JMBO(2)	
	Md	r												
$F_{11}$	1,254E+03	3	6,151E+03	6	7,588E+03	7	3,597E+03	5	1,294E+03	4	1,216E+03	1	1,230E+03	2
$F_{12}$	1,664E+06	4	3,596E+09	6	6,005E+09	7	1,692E+09	5	5,825E+05	3	9,606E+03	1	1,001E+04	2
$F_{13}$	6,737E+04	3	1,514E+09	6	3,213E+09	7	5,291E+08	5	8,865E+04	4	3,939E+03	2	2,798E+03	1
$F_{14}$	2,516E+03	3	2,877E+06	7	9,030E+05	5	1,100E+06	6	3,241E+03	4	1,593E+03	2	1,586E+03	1
$F_{15}$	1,139E+04	3	9,969E+06	6	3,014E+08	7	6,472E+06	5	7,039E+04	4	1,830E+03	2	1,782E+03	1
$F_{16}$	2,267E+03	3	4,134E+03	6	4,527E+03	7	3,546E+03	5	3,135E+03	4	2,093E+03	2	1,988E+03	1
$F_{17}$	2,058E+03	3	2,939E+03	6	3,204E+03	7	2,699E+03	5	2,513E+03	4	1,885E+03	2	1,884E+03	1
$F_{18}$	6,616E+04	3	1,169E+07	6	1,351E+07	7	8,191E+06	5	9,740E+04	4	5,394E+03	2	3,049E+03	1
$F_{19}$	4,802E+03	3	1,855E+08	6	5,158E+08	7	6,043E+07	5	1,471E+05	4	2,153E+03	2	2,076E+03	1
$F_{20}$	2,339E+03	3	2,908E+03	7	2,829E+03	5	2,839E+03	6	2,605E+03	4	2,176E+03	2	2,157E+03	1
$R_s$		31		62		66		52		39		18		12
$R_j$		3,10		6,20		6,60		5,20		3,90		1,80		1,20

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 13 – Resultados do grupo SIM híbridas com  $D = 100$ 

	PSO		MBO		MBO-FS		GCMBO		IMBO		JMBO(1)		JMBO(2)	
	Md	r												
$F_{11}$	2,965E+03	3	1,918E+05	6	2,559E+05	7	1,825E+05	5	1,483E+04	4	1,982E+03	1	2,268E+03	2
$F_{12}$	8,047E+08	3	1,481E+11	6	1,689E+11	7	1,051E+11	5	2,329E+09	4	3,488E+05	1	5,391E+05	2
$F_{13}$	2,422E+05	4	2,736E+10	6	4,530E+10	7	1,258E+10	5	6,568E+04	3	4,655E+03	2	2,881E+03	1
$F_{14}$	4,160E+05	4	5,860E+07	6	8,884E+07	7	5,220E+07	5	2,246E+05	3	6,458E+03	2	2,110E+03	1
$F_{15}$	8,543E+04	3	9,887E+09	6	1,701E+10	7	4,601E+09	5	8,643E+04	4	2,914E+03	1	3,213E+03	2
$F_{16}$	5,375E+03	3	1,682E+04	6	1,862E+04	7	1,345E+04	5	7,366E+03	4	3,932E+03	2	3,930E+03	1
$F_{17}$	5,117E+03	3	1,177E+05	6	4,859E+05	7	1,176E+04	5	6,570E+03	4	3,605E+03	2	3,594E+03	1
$F_{18}$	7,417E+05	4	8,949E+07	6	1,481E+08	7	6,701E+07	5	3,691E+05	3	1,493E+05	2	6,934E+04	1
$F_{19}$	2,933E+05	3	1,057E+10	6	1,582E+10	7	3,208E+09	5	1,302E+06	4	2,966E+03	1	3,176E+03	2
$F_{20}$	4,762E+03	3	7,460E+03	6	7,584E+03	7	6,992E+03	5	6,044E+03	4	3,739E+03	1	3,800E+03	2
$R_s$		33		60		70		50		37		15		15
$R_j$		3,30		6,00		7,00		5,00		3,70		1,50		1,50

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 14 – Resultados do grupo SIM compostas com  $D = 30$ 

	PSO		MBO		MBO-FS		GCMBO		IMBO		JMBO(1)		JMBO(2)	
	Md	r												
$F_{21}$	2,419E+03	3	2,644E+03	6	2,688E+03	7	2,561E+03	5	2,546E+03	4	2,350E+03	2	2,343E+03	1
$F_{22}$	2,461E+03	3	8,544E+03	6	8,996E+03	7	7,867E+03	5	3,002E+03	4	2,300E+03	2	2,300E+03	1
$F_{23}$	2,860E+03	3	3,209E+03	6	3,211E+03	7	3,040E+03	4	3,162E+03	5	2,699E+03	2	2,698E+03	1
$F_{24}$	3,077E+03	3	3,419E+03	5	3,438E+03	7	3,262E+03	4	3,432E+03	6	2,865E+03	1	2,868E+03	2
$F_{25}$	2,895E+03	3	3,911E+03	6	5,122E+03	7	3,436E+03	5	2,945E+03	4	2,888E+03	2	2,887E+03	1
$F_{26}$	4,160E+03	1	8,567E+03	6	1,004E+04	7	7,754E+03	4	8,400E+03	5	4,621E+03	3	4,232E+03	2
$F_{27}$	3,278E+03	4	3,855E+03	7	3,771E+03	6	3,200E+03	1	3,679E+03	5	3,227E+03	3	3,226E+03	2
$F_{28}$	3,276E+03	4	6,305E+03	6	6,504E+03	7	3,300E+03	5	3,258E+03	3	3,100E+03	1,5	3,100E+03	1,5
$F_{29}$	3,741E+03	3	5,532E+03	6	5,683E+03	7	5,099E+03	5	4,418E+03	4	3,568E+03	2	3,536E+03	1
$F_{30}$	1,629E+05	3	1,655E+08	6	3,034E+08	7	7,804E+07	5	6,815E+05	4	7,463E+03	2	6,828E+03	1
$R_s$		30		60		69		43		44		21		14
$R_j$		3,00		6,00		6,90		4,30		4,40		2,05		1,35

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 15 – Resultados do grupo SIM compostas com  $D = 100$ 

	PSO		MBO		MBO-FS		GCMBO		IMBO		JMBO(1)		JMBO(2)	
	Md	r												
$F_{21}$	3,124E+03	3	4,532E+03	6	4,565E+03	7	4,052E+03	5	3,992E+03	4	2,502E+03	2	2,487E+03	1
$F_{22}$	1,823E+04	3	3,388E+04	6	3,396E+04	7	3,188E+04	5	1,905E+04	4	1,594E+04	2	1,538E+04	1
$F_{23}$	4,423E+03	3	5,833E+03	7	5,760E+03	6	5,193E+03	5	5,149E+03	4	2,975E+03	1	2,997E+03	2
$F_{24}$	4,978E+03	3	8,829E+03	6	8,911E+03	7	8,403E+03	5	7,253E+03	4	3,476E+03	1	3,502E+03	2
$F_{25}$	3,433E+03	3	4,966E+04	6	6,900E+04	7	3,563E+04	5	5,206E+03	4	3,265E+03	2	3,227E+03	1
$F_{26}$	1,635E+04	3	4,804E+04	6	5,210E+04	7	4,090E+04	4	4,106E+04	5	8,646E+03	2	8,172E+03	1
$F_{27}$	4,013E+03	4	9,942E+03	6	1,017E+04	7	3,200E+03	1	6,150E+03	5	3,600E+03	3	3,506E+03	2
$F_{28}$	4,068E+03	4	3,786E+04	6	4,687E+04	7	3,300E+03	1	1,185E+04	5	3,346E+03	3	3,335E+03	2
$F_{29}$	8,336E+03	3	4,967E+04	6	1,243E+05	7	2,263E+04	5	1,068E+04	4	5,755E+03	2	5,578E+03	1
$F_{30}$	1,763E+07	4	1,823E+10	6	2,368E+10	7	6,745E+09	5	1,129E+07	3	6,424E+03	2	6,413E+03	1
$R_s$		33		61		69		41		42		20		14
$R_j$		3,30		6,10		6,90		4,10		4,20		2,00		1,40

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 16 – Resultados do grupo DEM unimultimodais com  $D = 30$ 

	DE		JADE(1)		JADE(2)		L-SHADE		TSDE		JMBO(1)		JMBO(2)	
	Md	r												
$F_{01}$	1,000E+02	2	1,000E+02	4,5	1,000E+02	2	1,000E+02	2	1,000E+02	4,5	1,000E+02	7	1,000E+02	6
$F_{03}$	3,000E+02	7	3,000E+02	3,5	3,000E+02	3,5	3,000E+02	5	3,000E+02	6	3,000E+02	2	3,000E+02	1
$F_{04}$	4,586E+02	7	4,040E+02	1	4,586E+02	3,5	4,586E+02	5	4,586E+02	6	4,040E+02	2	4,586E+02	3,5
$F_{05}$	6,609E+02	7	5,249E+02	2	5,253E+02	3	5,169E+02	1	5,398E+02	4	5,497E+02	6	5,418E+02	5
$F_{06}$	6,000E+02	2	6,000E+02	2	6,000E+02	2	6,000E+02	6	6,000E+02	4	6,002E+02	7	6,000E+02	5
$F_{07}$	8,977E+02	7	7,542E+02	2	7,544E+02	3	7,513E+02	1	7,709E+02	4	8,017E+02	6	7,775E+02	5
$F_{08}$	9,600E+02	7	8,262E+02	3	8,251E+02	2	8,179E+02	1	8,408E+02	4	8,468E+02	6	8,458E+02	5
$F_{09}$	9,000E+02	2	9,000E+02	4	9,000E+02	2	9,041E+02	5	9,000E+02	2	9,337E+02	7	9,093E+02	6
$F_{10}$	7,602E+03	7	2,879E+03	3	2,839E+03	2	2,789E+03	1	3,171E+03	4	4,373E+03	6	4,207E+03	5
$R_s$		48		25		23		27		39		49		42
$R_j$		5,33		2,78		2,56		3,00		4,28		5,44		4,61

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 17 – Resultados do grupo DEM unimultimodais com  $D = 100$ 

	DE		JADE(1)		JADE(2)		L-SHADE		TSDE		JMBO(1)		JMBO(2)	
	Md	r												
$F_{01}$	3,311E+03	6	1,000E+02	3	1,000E+02	1	1,000E+02	2	1,787E+04	7	1,381E+03	5	3,999E+02	4
$F_{03}$	4,076E+05	7	3,000E+02	3	3,000E+02	2	3,000E+02	1	1,339E+04	5	1,480E+04	6	3,628E+03	4
$F_{04}$	6,204E+02	7	5,438E+02	4	4,692E+02	1	5,100E+02	2	6,114E+02	6	5,382E+02	3	5,696E+02	5
$F_{05}$	1,352E+03	7	6,909E+02	4	6,779E+02	3	5,766E+02	1	1,310E+03	6	7,348E+02	5	6,672E+02	2
$F_{06}$	6,000E+02	3	6,000E+02	1	6,000E+02	2	6,010E+02	6	6,004E+02	4	6,018E+02	7	6,007E+02	5
$F_{07}$	1,654E+03	7	9,993E+02	3	9,838E+02	2	9,249E+02	1	1,616E+03	6	1,057E+03	5	1,022E+03	4
$F_{08}$	1,653E+03	7	9,869E+02	4	9,757E+02	2	8,776E+02	1	1,596E+03	6	1,031E+03	5	9,801E+02	3
$F_{09}$	9,000E+02	1	9,183E+02	3	9,096E+02	2	1,002E+03	5	9,427E+02	4	1,296E+03	7	1,060E+03	6
$F_{10}$	3,065E+04	7	1,476E+04	4	1,478E+04	5	9,682E+03	1	2,827E+04	6	1,381E+04	3	1,347E+04	2
$R_s$		52		29		20		20		50		46		35
$R_j$		5,78		3,22		2,22		2,22		5,56		5,11		3,89

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 18 – Resultados do grupo DEM híbridas com  $D = 30$ 

	DE		JADE(1)		JADE(2)		L-SHADE		TSDE		JMBO(1)		JMBO(2)	
	Md	r												
$F_{11}$	1,108E+03	1	1,130E+03	3	1,133E+03	4	1,174E+03	5	1,109E+03	2	1,216E+03	6	1,230E+03	7
$F_{12}$	1,436E+04	7	7,206E+03	4	3,538E+03	1	3,861E+03	3	3,789E+03	2	9,606E+03	5	1,001E+04	6
$F_{13}$	1,379E+03	5	1,356E+03	2	1,366E+03	3	1,372E+03	4	1,323E+03	1	3,939E+03	7	2,798E+03	6
$F_{14}$	1,422E+03	2	1,462E+03	4	1,485E+03	5	1,458E+03	3	1,408E+03	1	1,593E+03	7	1,586E+03	6
$F_{15}$	1,508E+03	2	1,596E+03	4	1,626E+03	5	1,562E+03	3	1,506E+03	1	1,830E+03	7	1,782E+03	6
$F_{16}$	1,784E+03	1	1,975E+03	4	1,911E+03	2	1,918E+03	3	1,989E+03	6	2,093E+03	7	1,988E+03	5
$F_{17}$	1,738E+03	1	1,761E+03	3	1,762E+03	4	1,768E+03	5	1,738E+03	2	1,885E+03	7	1,884E+03	6
$F_{18}$	1,866E+03	2	1,868E+03	3	1,926E+03	4	1,926E+03	5	1,823E+03	1	5,394E+03	7	3,049E+03	6
$F_{19}$	1,905E+03	2	1,959E+03	4	2,001E+03	5	1,939E+03	3	1,905E+03	1	2,153E+03	7	2,076E+03	6
$F_{20}$	2,021E+03	1	2,152E+03	3	2,156E+03	4	2,160E+03	6	2,023E+03	2	2,176E+03	7	2,157E+03	5
$R_s$		24		34		37		40		19		67		59
$R_j$		2,40		3,40		3,70		4,00		1,90		6,70		5,90

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 19 – Resultados do grupo DEM híbridas com  $D = 100$ 

	DE		JADE(1)		JADE(2)		L-SHADE		TSDE		JMBO(1)		JMBO(2)	
	Md	r												
$F_{11}$	1,736E+03	2	2,295E+03	6	2,376E+03	7	2,184E+03	4	1,716E+03	1	1,982E+03	3	2,268E+03	5
$F_{12}$	1,322E+06	6	2,758E+04	3	1,718E+04	1	2,288E+04	2	2,334E+06	7	3,488E+05	4	5,391E+05	5
$F_{13}$	2,932E+03	2	3,138E+03	4	3,408E+03	5	3,894E+03	6	2,972E+03	3	4,655E+03	7	2,881E+03	1
$F_{14}$	1,778E+03	2	1,903E+03	3	1,975E+03	4	1,976E+03	5	1,747E+03	1	6,458E+03	7	2,110E+03	6
$F_{15}$	2,091E+03	5	1,864E+03	3	1,819E+03	1	1,824E+03	2	2,044E+03	4	2,914E+03	6	3,213E+03	7
$F_{16}$	9,454E+03	7	4,607E+03	4	4,703E+03	5	3,693E+03	1	8,442E+03	6	3,932E+03	3	3,930E+03	2
$F_{17}$	6,616E+03	7	4,082E+03	5	4,050E+03	4	3,214E+03	1	5,464E+03	6	3,605E+03	3	3,594E+03	2
$F_{18}$	2,573E+05	7	2,876E+03	3	2,262E+03	1	2,472E+03	2	3,969E+03	4	1,493E+05	6	6,934E+04	5
$F_{19}$	2,158E+03	5	2,116E+03	1	2,140E+03	3	2,149E+03	4	2,128E+03	2	2,966E+03	6	3,176E+03	7
$F_{20}$	6,689E+03	7	4,387E+03	6	4,349E+03	5	3,484E+03	1	4,012E+03	4	3,739E+03	2	3,800E+03	3
$R_s$		50		38		36		28		38		47		43
$R_j$		5,00		3,80		3,60		2,80		3,80		4,70		4,30

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 20 – Resultados do grupo DEM compostas com  $D = 30$ 

	DE		JADE(1)		JADE(2)		L-SHADE		TSDE		JMBO(1)		JMBO(2)	
	Md	r												
$F_{21}$	2,441E+03	7	2,327E+03	3	2,326E+03	2	2,319E+03	1	2,342E+03	4	2,350E+03	6	2,343E+03	5
$F_{22}$	2,300E+03	3	2,300E+03	3	2,300E+03	3	2,300E+03	6,5	2,300E+03	3	2,300E+03	6,5	2,300E+03	3
$F_{23}$	2,670E+03	2	2,675E+03	4	2,673E+03	3	2,669E+03	1	2,684E+03	5	2,699E+03	7	2,698E+03	6
$F_{24}$	2,845E+03	4	2,843E+03	2	2,844E+03	3	2,841E+03	1	2,853E+03	5	2,865E+03	6	2,868E+03	7
$F_{25}$	2,887E+03	2	2,887E+03	5	2,887E+03	4	2,887E+03	3	2,887E+03	1	2,888E+03	7	2,887E+03	6
$F_{26}$	3,692E+03	1	3,819E+03	3	3,835E+03	4	3,796E+03	2	3,934E+03	5	4,621E+03	7	4,232E+03	6
$F_{27}$	3,195E+03	2	3,207E+03	3	3,207E+03	4	3,212E+03	5	3,184E+03	1	3,227E+03	7	3,226E+03	6
$F_{28}$	3,100E+03	4,5	3,100E+03	4,5	3,100E+03	4,5	3,100E+03	4,5	3,100E+03	7	3,100E+03	1,5	3,100E+03	1,5
$F_{29}$	3,320E+03	1	3,376E+03	4	3,379E+03	5	3,371E+03	3	3,331E+03	2	3,568E+03	7	3,536E+03	6
$F_{30}$	5,046E+03	2	5,106E+03	4	5,097E+03	3	5,185E+03	5	4,979E+03	1	7,463E+03	7	6,828E+03	6
$R_s$		29		36		36		32		34		62		53
$R_j$		2,85		3,55		3,55		3,20		3,40		6,20		5,25

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 21 – Resultados do grupo DEM compostas com  $D = 100$ 

	DE		JADE(1)		JADE(2)		L-SHADE		TSDE		JMBO(1)		JMBO(2)	
	Md	r												
$F_{21}$	3,186E+03	7	2,496E+03	4	2,496E+03	3	2,400E+03	1	3,145E+03	6	2,502E+03	5	2,487E+03	2
$F_{22}$	3,254E+04	7	1,697E+04	5	1,691E+04	4	1,194E+04	1	3,045E+04	6	1,594E+04	3	1,538E+04	2
$F_{23}$	3,692E+03	7	2,986E+03	4	2,978E+03	3	2,895E+03	1	3,606E+03	6	2,975E+03	2	2,997E+03	5
$F_{24}$	4,105E+03	7	3,427E+03	2	3,428E+03	3	3,401E+03	1	4,067E+03	6	3,476E+03	4	3,502E+03	5
$F_{25}$	3,216E+03	2	3,290E+03	7	3,262E+03	4	3,216E+03	1	3,280E+03	6	3,265E+03	5	3,227E+03	3
$F_{26}$	1,389E+04	7	7,176E+03	3	7,107E+03	2	6,908E+03	1	1,331E+04	6	8,646E+03	5	8,172E+03	4
$F_{27}$	3,339E+03	1	3,430E+03	5	3,382E+03	2	3,396E+03	3	3,412E+03	4	3,600E+03	7	3,506E+03	6
$F_{28}$	3,338E+03	4	3,353E+03	6	3,322E+03	1	3,322E+03	2	3,369E+03	7	3,346E+03	5	3,335E+03	3
$F_{29}$	8,652E+03	7	5,127E+03	2	5,140E+03	3	4,687E+03	1	7,888E+03	6	5,755E+03	5	5,578E+03	4
$F_{30}$	7,039E+03	6	5,787E+03	2	5,825E+03	3	5,713E+03	1	8,223E+03	7	6,424E+03	5	6,413E+03	4
$R_s$		55		40		28		13		60		46		38
$R_j$		5,50		4,00		2,80		1,30		6,00		4,60		3,80

Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados das tabelas anteriores, Tabela 10 à Tabela 21, foram submetidos a testes estatísticos. Calcularam-se os  $p$ -valores e os valores estimados dos tamanhos dos efeitos para o teste de Friedman, realizaram-se testes de comparações múltiplas com a estatística de teste  $z$ , equação (46), e foram obtidos os intervalos de confiança das diferenças entre os postos médios obtidos pelo teste de Friedman utilizando a diferença crítica ( $CD_F$ ), equação (51).

A Tabela 22 apresenta os  $p$ -valores dos testes de Friedman e os valores estimados dos tamanhos dos efeitos dados pelo coeficiente de concordância de Kendall ( $W$ ), conforme a equação (45). As informações entre parênteses na Tabela 22 correspondem ao intervalo de confiança dos tamanhos dos efeitos.

Tabela 22 –  $P$ -valores do teste de Friedman e tamanhos dos efeitos

Grupo de funções	$D = 30$		$D = 100$	
	$p$ -valor	$W$	$p$ -valor	$W$
SIM Unimultimodais	5,364E-09	0,920 (0,87 – 0,98)	3,028E-09	0,944 (0,90 – 0,99)
SIM Híbridas	1,940E-10	0,948 (0,92 – 0,99)	1,131E-10	0,967 (0,96 – 0,98)
SIM Compostas	1,501E-09	0,875 (0,80 – 0,97)	2,157E-09	0,861 (0,81 – 0,97)
DEM Unimultimodais	0,008731	0,445 (0,31 – 0,76)	0,0001778	0,488 (0,29 – 0,88)
DEM Híbridas	6,373E-07	0,654 (0,49 – 0,88)	0,3222	0,116 (0,06 – 0,45)
DEM Compostas	0,00331	0,481 (0,33 – 0,73)	1,069E-05	0,556 (0,41 – 0,84)

Fonte: Elaborado pelo autor.

Observando os  $p$ -valores na Tabela 22, verifica-se que somente o grupo das funções híbridas com dimensão 100 aplicadas aos algoritmos DEM obteve um  $p$ -valor  $> 0,05$ , sendo aceita a hipótese nula de que não existem diferenças significativas no desempenho entre os algoritmos comparados. A hipótese nula foi rejeitada para os demais casos. O valor estimado do tamanho do efeito para o grupo das funções híbridas com dimensão 100 aplicadas ao grupo DEM híbridas foi de  $W = 0,116$ , o que representa uma baixa concordância, de acordo com os níveis sugeridos por Cohen (1988).

Quanto maior o valor estimado do tamanho do efeito, maior é o grau de concordância das funções de teste em cada grupo. Os grupos das funções

unimultimodais, híbridas e compostas para as dimensões 30 e 100 aplicadas aos algoritmos SIM obtiveram valores de  $W$  superiores a 0,8, representando uma alta concordância. Os grupos das funções unimultimodais e compostas para as dimensões 30 e 100 e das funções híbridas com dimensão 30 aplicadas aos algoritmos DEM obtiveram estimativas moderadas dos tamanhos dos efeitos, segundo os níveis sugeridos por Cohen (1988).

Quando a hipótese nula foi rejeitada no teste de Friedman, a detecção de quais diferenças são significativas entre os algoritmos foi realizada utilizando a comparação de todos os algoritmos entre si (comparações múltiplas  $N \times N$ ) com a aplicação dos testes de comparações múltiplas de Nemenyi e Bergmann-Hommel. O nível de significância utilizado em todos os testes foi de 5% ( $\alpha = 0,05$ ).

Os intervalos de confiança para comparação das diferenças dos postos médios obtidos pelo teste de Friedman foram organizados de tal forma que o posto médio de  $R_i$  seja maior que o posto médio de  $R_j$ . Os intervalos de confiança foram obtidos por  $(R_i - R_j) \pm CD_F$ , sendo  $CD_F$  calculado pela equação (51). A taxa máxima de erro Tipo I da família de testes ( $\alpha_{FW}$ ) aceita nos procedimentos foi 0,05 e foram realizadas 21 comparações entre os sete algoritmos de cada grupo.

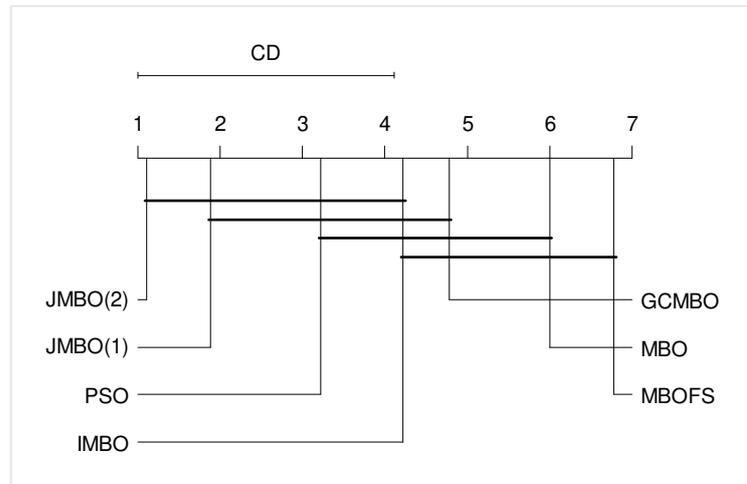
Na sequência são apresentados os resultados dos testes de comparações múltiplas de Nemenyi e de Bergmann-Hommel, e o intervalo de confiança da diferença entre os postos médios para cada grupo de funções.

### 6.2.1 Grupo SIM Unimultimodais com $D = 30$

O teste de Nemenyi aplicado ao grupo SIM de funções unimultimodais com dimensão 30 determinou o valor da diferença crítica  $CD = 3,002$ . No respectivo gráfico da CD, Figura 34, observa-se que os algoritmos que não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho são conectados por uma barra, formando os seguintes conjuntos:

- JMBO(2), JMBO(1), PSO e IMBO;
- JMBO(1), PSO, IMBO e GCMBO;
- PSO, IMBO, GCMBO e MBO;
- IMBO, GCMBO, MBO e MBO-FS.

Figura 34 – Diferença crítica do grupo SIM unimultimodais com  $D = 30$



Fonte: Elaborado pelo autor.

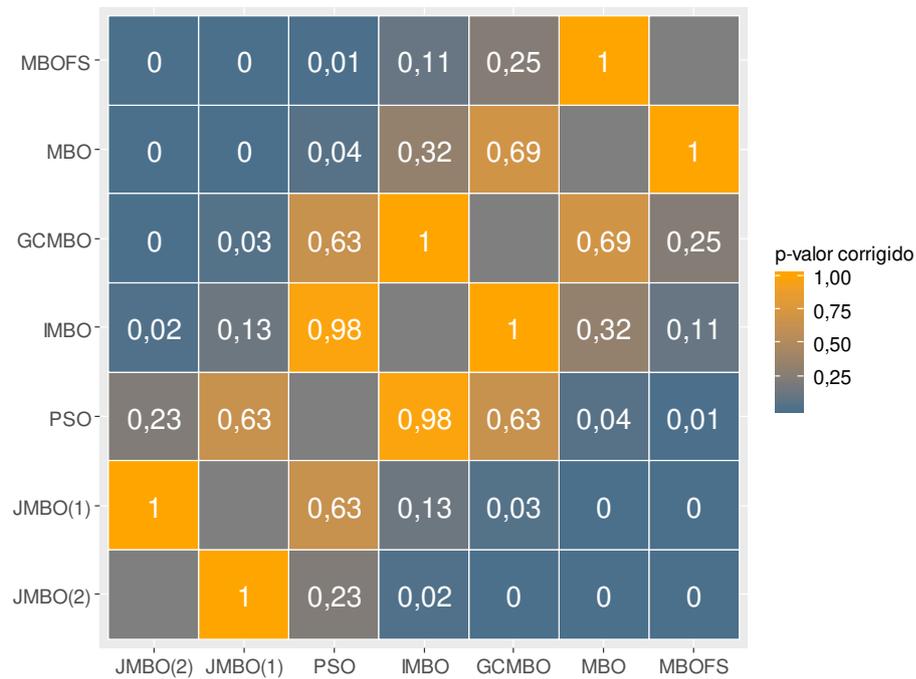
Segundo o teste de Nemenyi, o desempenho de dois algoritmos pode ser considerado significativamente diferente se os postos médios correspondentes diferem em, pelo menos, o valor da CD. Isto se apresenta na comparação do PSO com MBO-FS; do JMBO(1) com MBO e MBO-FS; e do JMBO(2) com MBO, MBO-FS e GCMBO. Estes algoritmos não estão conectados por barras na Figura 34.

Os  $p$ -valores corrigidos obtidos com o teste de Bergmann-Hommel para o grupo SIM de funções unimultimodais com dimensão 30 são apresentados na Figura 35. O teste considera que não há diferença estatística significativa entre dois algoritmos comparados quando o  $p$ -valor corrigido é maior ou igual a  $\alpha$  (hipótese nula) e, portanto, são significativamente diferentes se o  $p$ -valor corrigido é menor que  $\alpha$  (hipótese alternativa). O nível de significância adotado no teste foi de 5%.

Os  $p$ -valores corrigidos resumidos na Figura 35 indicam diferenças estatísticas entre os seguintes pares de algoritmos: {{JMBO(2), IMBO}, {JMBO(2), GCMBO}, {JMBO(2), MBO}, {JMBO(2), MBO-FS}, {JMBO(1), GCMBO}, {JMBO(1), MBO}, {JMBO(1), MBO-FS}, {PSO, MBO}, {PSO, MBO-FS}}.

Quando são comparados os resultados do teste de Bergmann-Hommel com os resultados do teste de Nemenyi, verifica-se que o teste de Bergmann-Hommel detectou diferenças estatísticas significativas entre IMBO e JMBO(2) ( $p$ -valor corrigido = 0,02), entre JMBO(1) e GCMBO ( $p$ -valor corrigido = 0,03) e entre MBO e PSO ( $p$ -valor corrigido = 0,04).

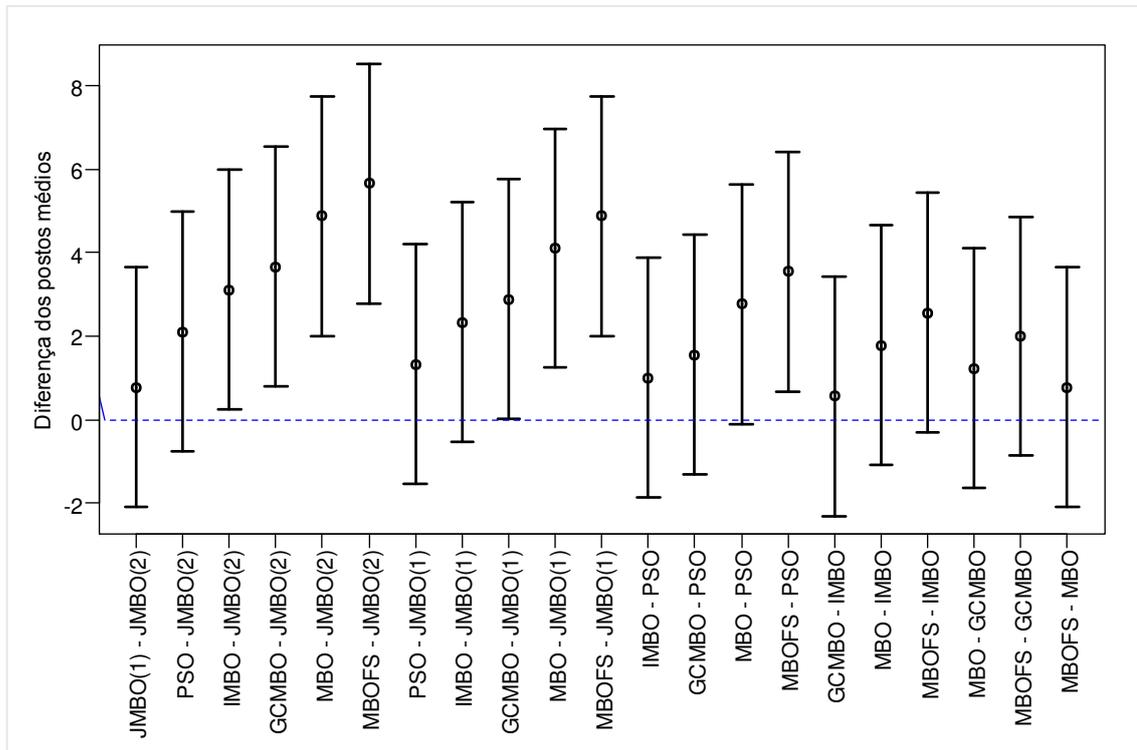
Figura 35 –  $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo SIM unimultimodais com  $D = 30$



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 36 apresenta os intervalos de confiança para o grupo SIM de funções unimultimodais com dimensão 30. Os intervalos de confiança foram construídos para a diferença dos postos médios dos algoritmos,  $R_i - R_j$ , considerando  $\alpha_{FW} = 0,05$ . Um intervalo acima do valor zero indica que a diferença é estatisticamente significativa, ou seja, o desempenho do algoritmo  $j$  é superior ao do algoritmo  $i$  (hipótese alternativa).

De acordo com os intervalos de confiança da Figura 36, o JMBO(2) apresentou desempenho superior ao IMBO, GCMBO, MBO e MBO-FS; o JMBO(1) apresentou desempenho superior ao MBO, MBO-FS e GCMBO (este último com limite inferior do intervalo de confiança de 0,014); e o PSO apresentou desempenho superior ao MBO-FS. Na comparação do PSO com MBO, o limite inferior do intervalo de confiança foi de  $-0,097$ , indicando que PSO e MBO não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho.

Figura 36 – Intervalos de confiança do grupo SIM unimultimodais com  $D = 30$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

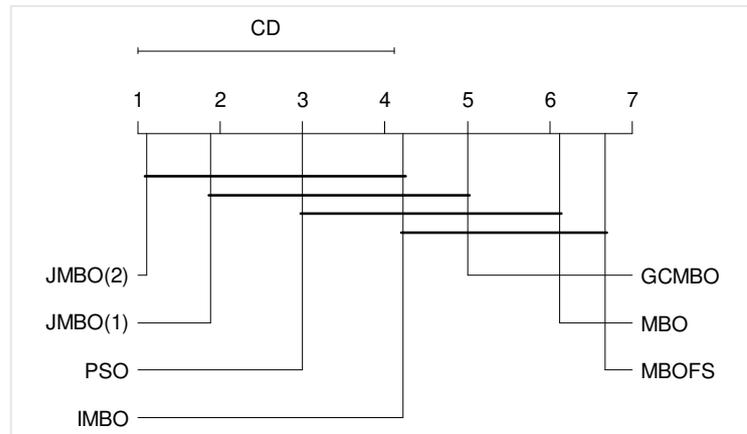
### 6.2.2 Grupo SIM Unimultimodais com $D = 100$

O teste de Nemenyi aplicado ao grupo SIM de funções unimultimodais com dimensão 100 determinou o valor da diferença crítica  $CD = 3,002$ . No respectivo gráfico da CD, Figura 37, observa-se que os conjuntos de algoritmos que não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho foram:

- JMBO(2), JMBO(1), PSO e IMBO;
- JMBO(1), PSO, IMBO e GCMBO;
- PSO, IMBO, GCMBO e MBO;
- IMBO, GCMBO, MBO e MBO-FS.

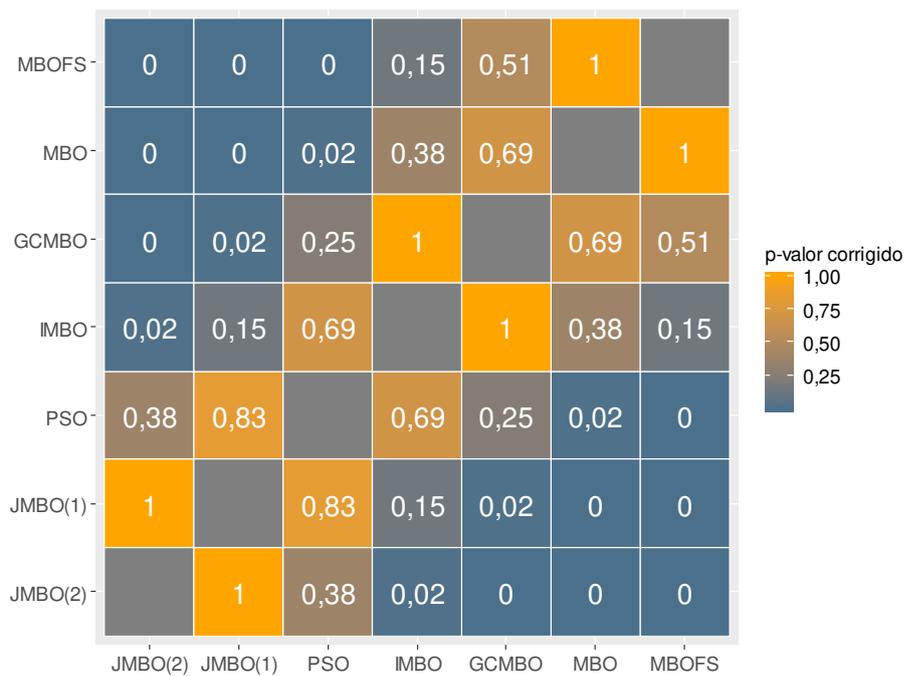
Os  $p$ -valores corrigidos obtidos com o teste de Bergmann-Hommel para o grupo SIM de funções unimultimodais com dimensão 100 são resumidos na Figura 38. Estes  $p$ -valores indicam diferenças estatísticas entre os seguintes pares de algoritmos: {{JMBO(2), IMBO}, {JMBO(2), GCMBO}, {JMBO(2), MBO}, {JMBO(2), MBO-FS}, {JMBO(1), GCMBO}, {JMBO(1), MBO}, {JMBO(1), MBO-FS}, {PSO, MBO}, {PSO, MBO-FS}}.

Figura 37 – Diferença crítica do grupo SIM unimultimodais com  $D = 100$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 38 –  $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo SIM unimultimodais com  $D = 100$



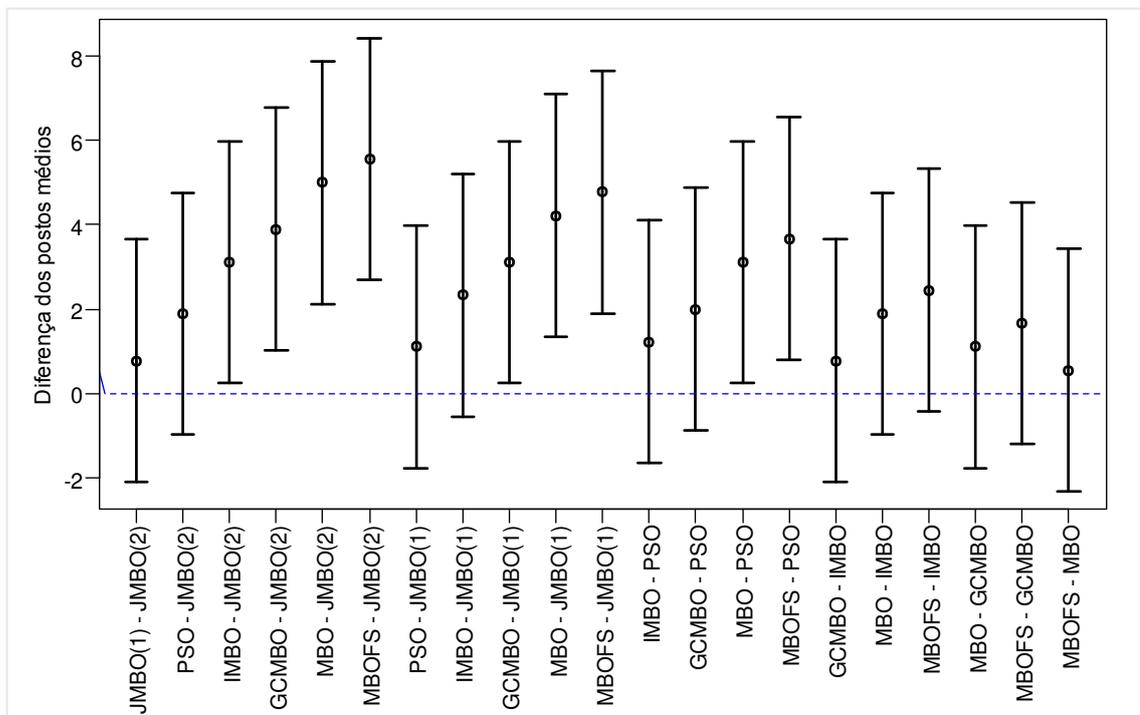
Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando são comparados os resultados do teste de Bergmann-Hommel com os resultados do teste de Nemenyi, verifica-se que o teste de Bergmann-Hommel detectou diferenças estatísticas significativas entre IMBO e JMBO(2) ( $p$ -valor corrigido = 0,02), entre GCMBO e JMBO(1) ( $p$ -valor corrigido = 0,02) e entre MBO e PSO ( $p$ -valor corrigido = 0,02).

A Figura 39 apresenta os intervalos de confiança para o grupo SIM de funções unimodais com dimensão 100. De acordo com estes intervalos, o JMBO(2) apresentou desempenho superior ao IMBO, GCMBO, MBO e MBO-FS; o JMBO(1) apresentou desempenho superior ao GCMBO, MBO e MBO-FS; e o PSO apresentou desempenho superior ao MBO-FS e MBO.

Os pares de algoritmos com diferenças estatísticas significativas de desempenho no teste de Bergmann-Hommel foram os mesmos evidenciados nos intervalos de confiança.

Figura 39 – Intervalos de confiança do grupo SIM unimodais com  $D = 100$

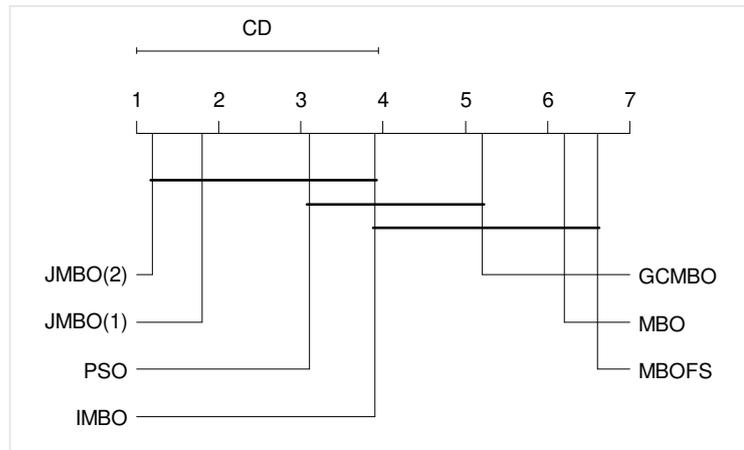


Fonte: Elaborado pelo autor.

### 6.2.3 Grupo SIM Híbridas com $D = 30$

O teste de Nemenyi aplicado ao grupo SIM de funções híbridas com dimensão 30 determinou o valor da diferença crítica  $CD = 2,845$ . No respectivo gráfico da CD, Figura 40, observa-se que os conjuntos de algoritmos que não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho foram:

- JMBO(2), JMBO(1), PSO e IMBO;
- PSO, IMBO e GCMBO;
- IMBO, GCMBO, MBO e MBO-FS.

Figura 40 – Diferença crítica do grupo SIM híbridas com  $D = 30$ 

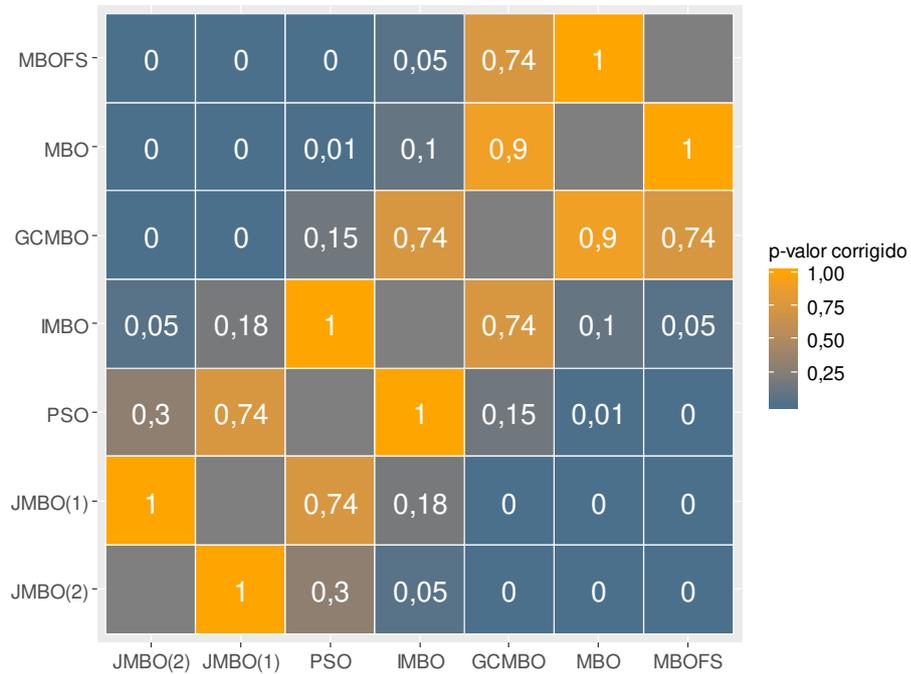
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os  $p$ -valores corrigidos obtidos com o teste de Bergmann-Hommel para o grupo SIM de funções híbridas com dimensão 30 são resumidos na Figura 41. Estes  $p$ -valores indicam diferenças estatísticas entre os seguintes pares de algoritmos:  $\{JMBO(2), GCMBO\}$ ,  $\{JMBO(2), MBO\}$ ,  $\{JMBO(2), MBO-FS\}$ ,  $\{JMBO(1), GCMBO\}$ ,  $\{JMBO(1), MBO\}$ ,  $\{JMBO(1), MBO-FS\}$ ,  $\{PSO, MBO\}$ ,  $\{PSO, MBO-FS\}$ . Ao se comparar o IMBO com o JMBO(2) obteve-se um  $p$ -valor corrigido de 0,05, no limite do nível de significância definido nos testes, e o mesmo ocorreu quando o MBO-FS e o IMBO foram comparados.

A Figura 42 apresenta os intervalos de confiança para o grupo SIM de funções híbridas com dimensão 30. De acordo com estes intervalos, o JMBO(2) apresentou desempenho superior ao GCMBO, MBO e MBO-FS; o JMBO(1) apresentou desempenho superior ao GCMBO, MBO e MBO-FS; e o PSO apresentou desempenho superior ao MBO-FS e MBO. Os limites inferiores dos intervalos de confiança foram de  $-0,027$  na comparação entre JMBO(2) e IMBO e entre MBO-FS e o IMBO.

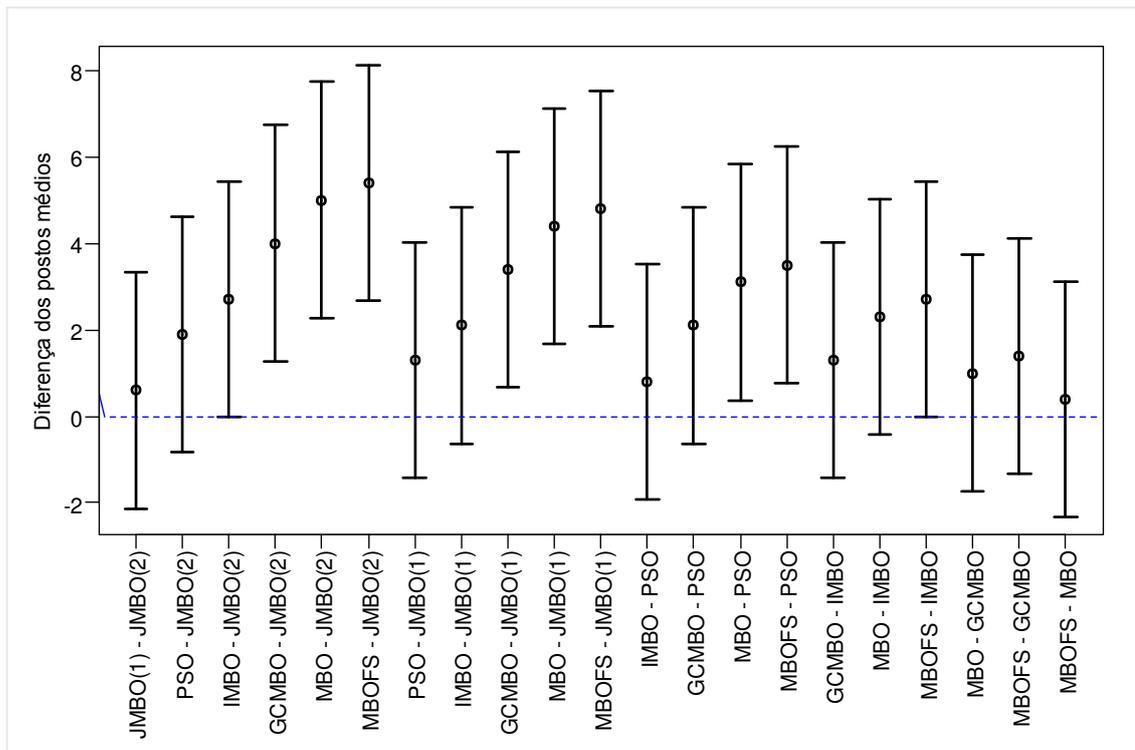
Os pares de algoritmos com diferenças estatísticas significativas de desempenho no teste de Bergmann-Hommel foram os mesmos evidenciados nos intervalos de confiança.

Figura 41 – *P*-valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo SIM híbridas com  $D = 30$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 42 – Intervalos de confiança do grupo SIM híbridas com  $D = 30$



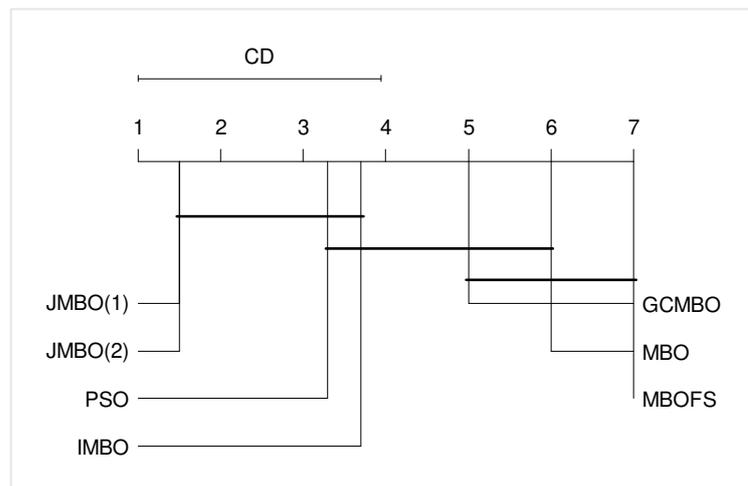
Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 6.2.4 Grupo SIM Híbridas com $D = 100$

O teste de Nemenyi aplicado ao grupo SIM de funções híbridas com dimensão 100 determinou o valor da diferença crítica  $CD = 2,845$ . No respectivo gráfico da CD, Figura 43, observa-se que os conjuntos de algoritmos que não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho foram:

- JMBO(2), JMBO(1), PSO e IMBO;
- PSO, IMBO, GCMBO e MBO;
- GCMBO, MBO e MBO-FS.

Figura 43 – Diferença crítica do grupo SIM híbridas com  $D = 100$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os  $p$ -valores corrigidos obtidos com o teste de Bergmann-Hommel para o grupo SIM de funções híbridas com dimensão 100 são resumidos na Figura 44. Estes  $p$ -valores indicam diferenças estatísticas entre os seguintes pares de algoritmos:  $\{\{JMBO(2), GCMBO\}, \{JMBO(2), MBO\}, \{JMBO(2), MBO-FS\}, \{JMBO(1), GCMBO\}, \{JMBO(1), MBO\}, \{JMBO(1), MBO-FS\}, \{PSO, MBO\}, \{PSO, MBO-FS\}\}$ .

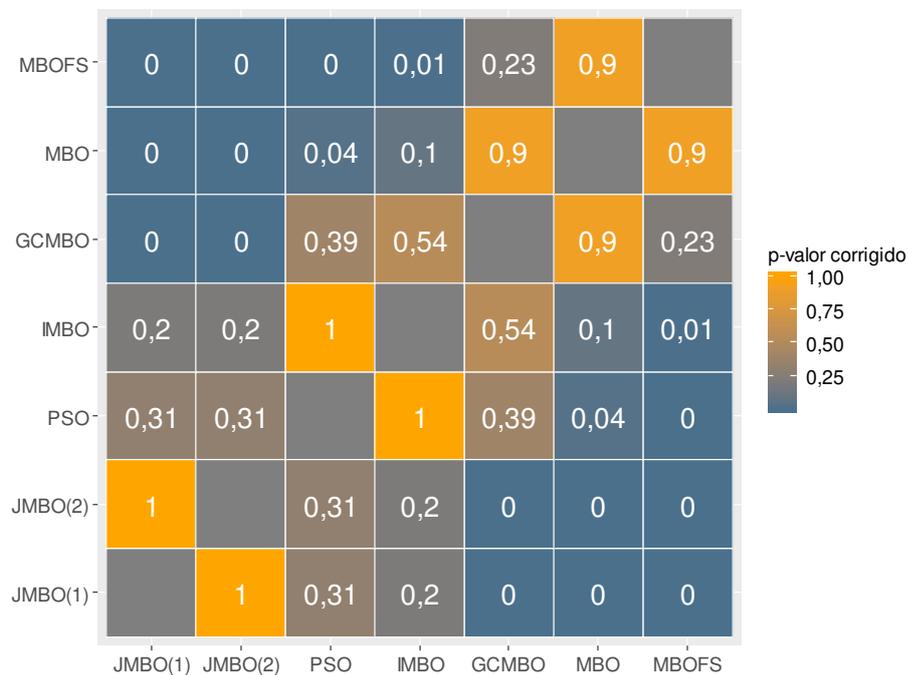
Quando são comparados os resultados do teste de Bergmann-Hommel com os resultados do teste de Nemenyi, verifica-se que o teste de Bergmann-Hommel detectou diferenças estatísticas significativas entre MBO e PSO ( $p$ -valor corrigido = 0,04).

A Figura 45 apresenta os intervalos de confiança para o grupo SIM de funções híbridas com dimensão 100. De acordo com estes intervalos, JMBO(1) e JMBO(2) apresentaram desempenhos superiores ao GCMBO, MBO e MBO-FS; o PSO

apresentou desempenho superior ao MBO-FS; e o IMBO apresentou desempenho superior ao MBO-FS. O limite inferior do intervalo de confiança foi de  $-0,027$  na comparação entre PSO e MBO.

Os pares de algoritmos com diferenças estatísticas significativas de desempenho no teste de Bergmann-Hommel foram os mesmos evidenciados nos intervalos de confiança, com exceção do par PSO e MBO.

Figura 44 –  $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo SIM híbridas com  $D = 100$



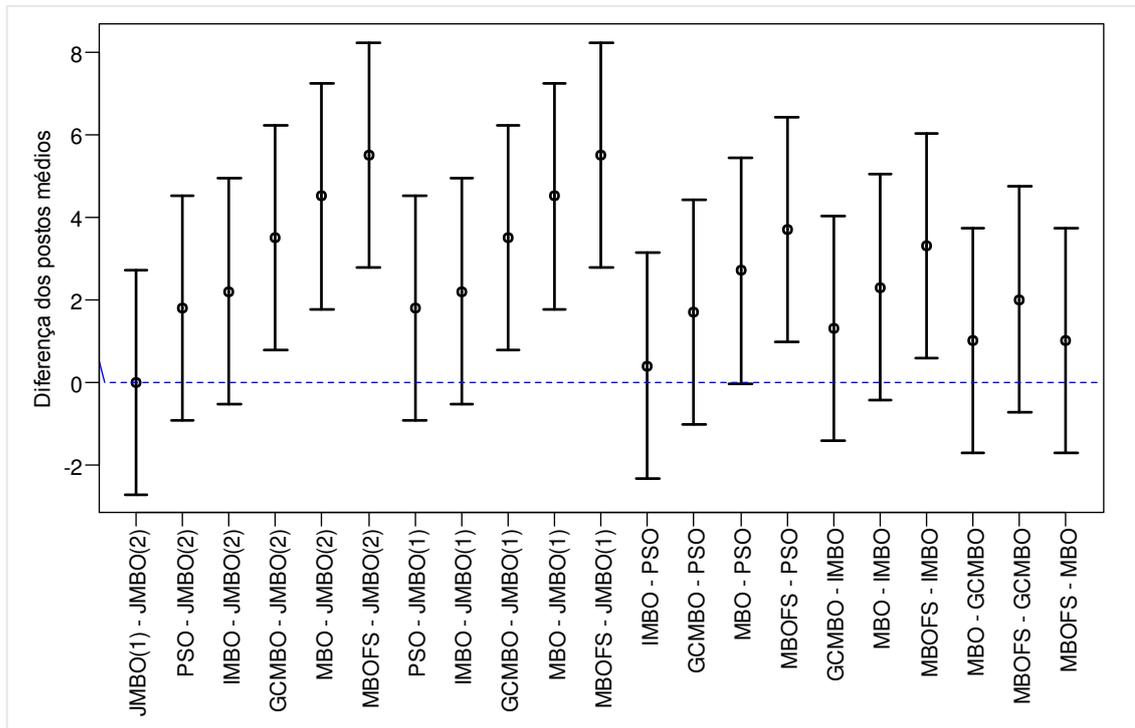
Fonte: Elaborado pelo autor.

### 6.2.5 Grupo SIM Compostas com $D = 30$

O teste de Nemenyi aplicado ao grupo SIM de funções compostas com dimensão 30 determinou o valor da diferença crítica  $CD = 2,845$ . No respectivo gráfico da CD, Figura 46, observa-se que os conjuntos de algoritmos que não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho foram:

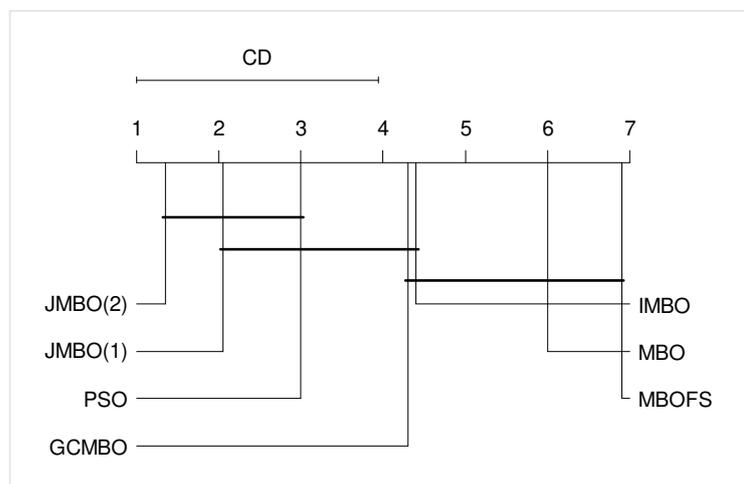
- JMBO(2), JMBO(1) e PSO;
- JMBO(1), PSO, IMBO e GCMBO;
- GCMBO, IMBO, MBO e MBO-FS.

Figura 45 – Intervalos de confiança do grupo SIM híbridas com  $D = 100$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 46 – Diferença crítica do grupo SIM compostas com  $D = 30$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Os  $p$ -valores corrigidos obtidos com o teste de Bergmann-Hommel para o grupo SIM de funções compostas com dimensão 30 são resumidos na Figura 47. Estes  $p$ -valores indicam diferenças estatísticas entre os seguintes pares de algoritmos: {{JMBO(2), IMBO}, {JMBO(2), GCMBO}, {JMBO(2), MBO}, {JMBO(2), MBO-FS},

{JMBO(1), MBO}, {JMBO(1), MBO-FS}, {PSO, MBO}, {PSO, MBO-FS}}, os mesmos apresentados no teste de Nemenyi.

Figura 47 – *P*-valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo SIM compostas com  $D = 30$



Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 48 apresenta os intervalos de confiança para o grupo SIM de funções compostas com dimensão 30. De acordo com estes intervalos, o JMBO(2) apresentou desempenho superior ao GCMBO, IMBO, MBO e MBO-FS; o algoritmo JMBO(1) apresentou desempenho superior ao MBO e MBO-FS; e o PSO apresentou desempenho superior ao MBO e MBO-FS.

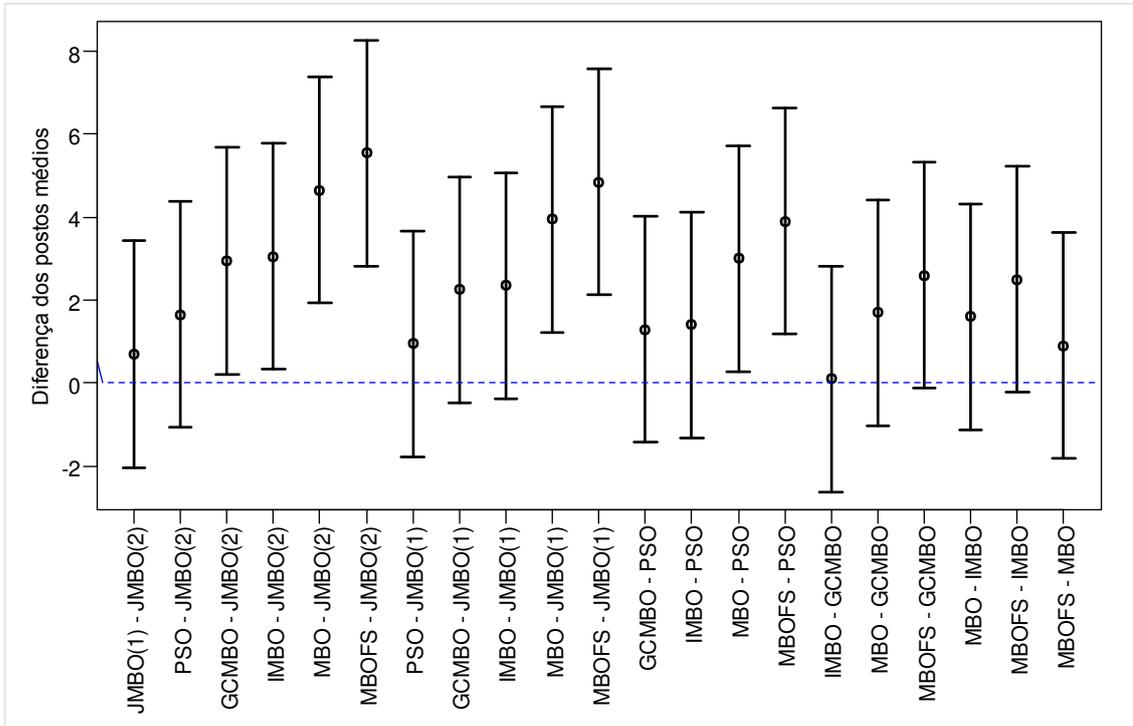
Os pares de algoritmos com diferenças estatísticas significativas de desempenho no teste de Bergmann-Hommel foram os mesmos evidenciados nos intervalos de confiança.

#### 6.2.6 Grupo SIM Compostas com $D = 100$

O teste de Nemenyi aplicado ao grupo SIM de funções compostas com dimensão 100 determinou o valor da diferença crítica  $CD = 2,845$ . No respectivo gráfico da CD, Figura 49, observa-se que os conjuntos de algoritmos que não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho foram:

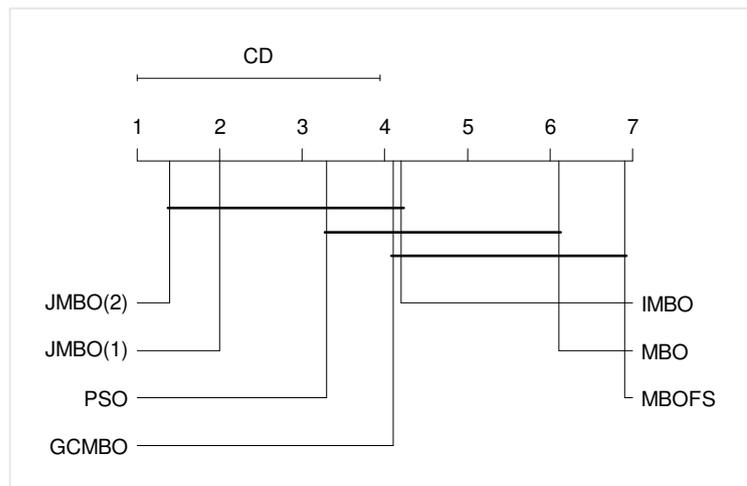
- JMBO(2), JMBO(1), PSO, GCMBO e IMBO;
- PSO, GCMBO, IMBO e MBO;
- GCMBO, IMBO, MBO e MBO-FS.

Figura 48 – Intervalos de confiança do grupo SIM compostas com  $D = 30$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 49 – Diferença crítica do grupo SIM compostas com  $D = 100$

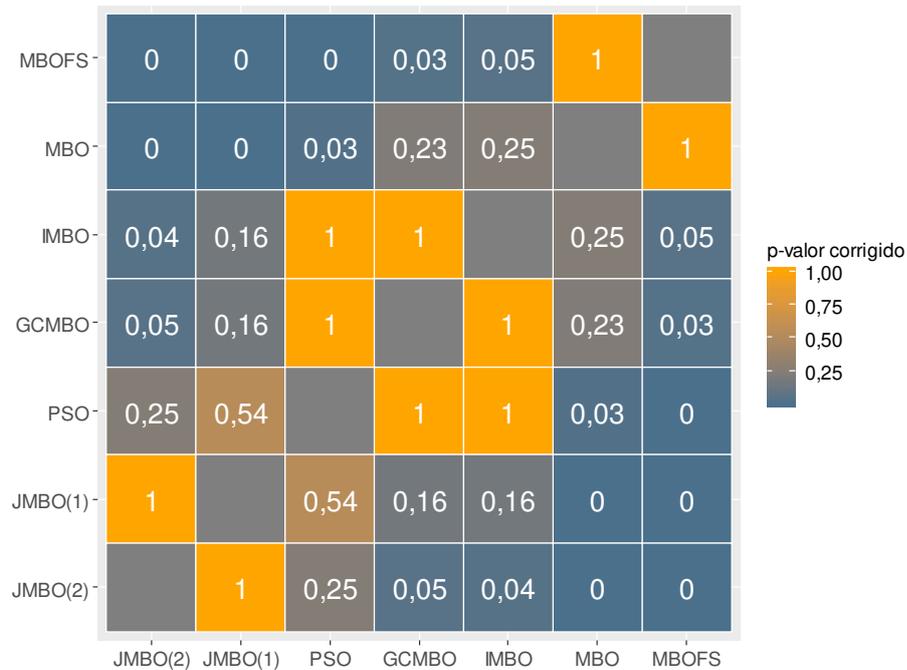


Fonte: Elaborado pelo autor.

Os  $p$ -valores corrigidos obtidos com o teste de Bergmann-Hommel para o grupo SIM de funções compostas com dimensão 100 são resumidos na Figura 50. Estes

$p$ -valores indicam diferenças estatísticas entre os seguintes pares de algoritmos: {{JMBO(2), IMBO}, {JMBO(2), MBO}, {JMBO(2), MBO-FS}, {JMBO(1), MBO}, {JMBO(1), MBO-FS}, {PSO, MBO}, {PSO, MBO-FS}, {GCMBO, MBO-FS}}.

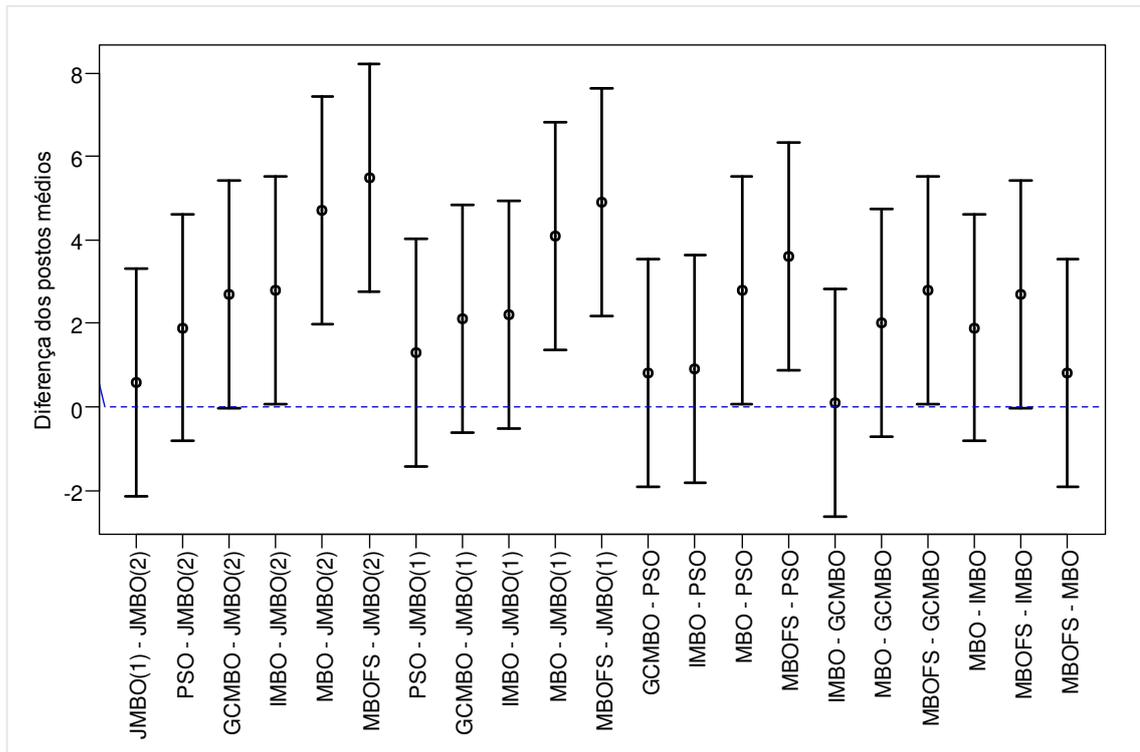
Figura 50 –  $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo SIM compostas com  $D = 100$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Quando são comparados os resultados do teste de Bergmann-Hommel com os resultados do teste de Nemenyi, verifica-se que o teste de Bergmann-Hommel detectou diferenças estatísticas significativas entre IMBO e JMBO(2) ( $p$ -valor corrigido = 0,04), entre MBO e PSO ( $p$ -valor corrigido = 0,03) e entre MBO-FS e GCMBO ( $p$ -valor corrigido = 0,03). Ao se comparar o GCMBO com o JMBO(2) obteve-se um  $p$ -valor corrigido de 0,05, no limite do nível de significância definido nos testes, e o mesmo ocorreu quando MBO-FS e IMBO foram comparados.

A Figura 51 apresenta os intervalos de confiança para o grupo SIM de funções compostas com dimensão 100. De acordo com estes intervalos, o JMBO(2) apresentou desempenho superior ao IMBO, MBO e MBO-FS; o JMBO(1) apresentou desempenho superior ao MBO e MBO-FS; o PSO apresentou desempenho superior ao MBO e MBO-FS; e o GCMBO apresentou desempenho superior ao MBO-FS. Os limites inferiores dos intervalos de confiança foram de  $-0,027$  na comparação entre JMBO(2) e GCMBO e entre MBO-FS e IMBO.

Figura 51 – Intervalos de confiança do grupo SIM compostas com  $D = 100$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

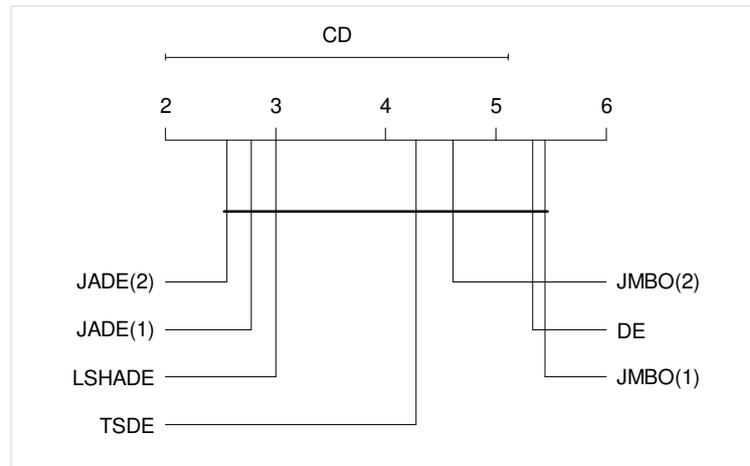
Os pares de algoritmos com diferenças estatísticas significativas de desempenho no teste de Bergmann-Hommel foram os mesmos evidenciados nos intervalos de confiança.

### 6.2.7 Grupo DEM Unimultimodais com $D = 30$

O grupo DEM de funções unimultimodais com dimensão 30 apresentou um  $p$ -valor de 0,008731 no teste de Friedman, denotando que existem diferenças estatisticamente significativas entre os algoritmos, e um valor estimado do tamanho do efeito  $W = 0,445$ . Desta forma, realizaram-se os testes de comparações múltiplas de Nemenyi e de Bergmann-Hommel e obtiveram-se os intervalos de confiança.

O teste de Nemenyi determinou o valor da diferença crítica  $CD = 3,002$ . Na Figura 52 observa-se que todos os algoritmos estão conectados por uma barra, o que representa que não há diferenças estatísticas significativas no desempenho dos algoritmos. Os  $p$ -valores corrigidos obtidos com o teste de Bergmann-Hommel, Figura 53, todos superiores a 0,05, também foram favoráveis à hipótese nula.

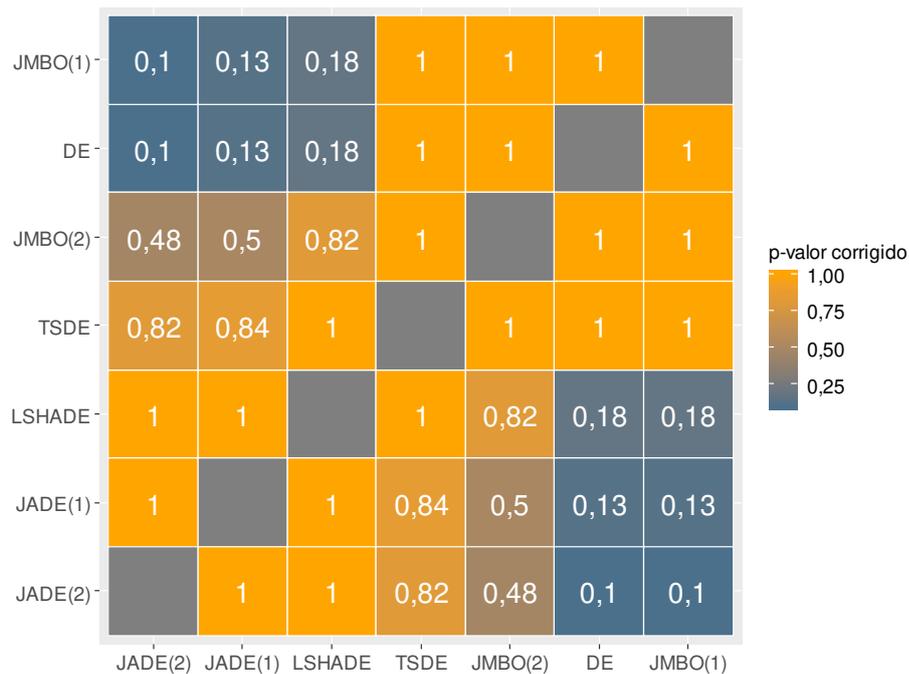
Figura 52 – Diferença crítica do grupo DEM unimultimodais com  $D = 30$



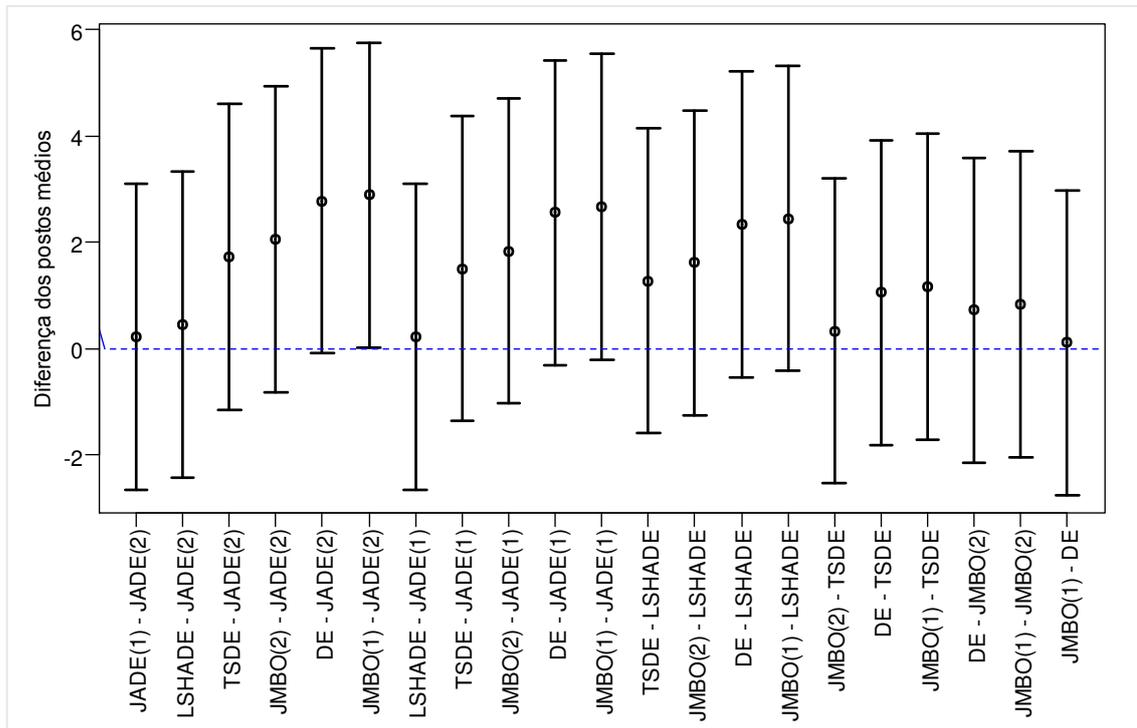
Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 54 apresenta os intervalos de confiança para o grupo DEM de funções unimultimodais com dimensão 30. Na comparação do JADE(2) com o JMBO(1), o limite inferior do intervalo de confiança ficou acima do zero (0,0143), indicando que JADE(2) possui desempenho superior ao JMBO(1). Quando estes algoritmos foram comparados no teste de Bergmann-Hommel, obteve-se um  $p$ -valor corrigido de 0,0957.

Figura 53 –  $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo DEM unimultimodais com  $D = 30$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 54 – Intervalos de confiança do grupo DEM unimultimodais com  $D = 30$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

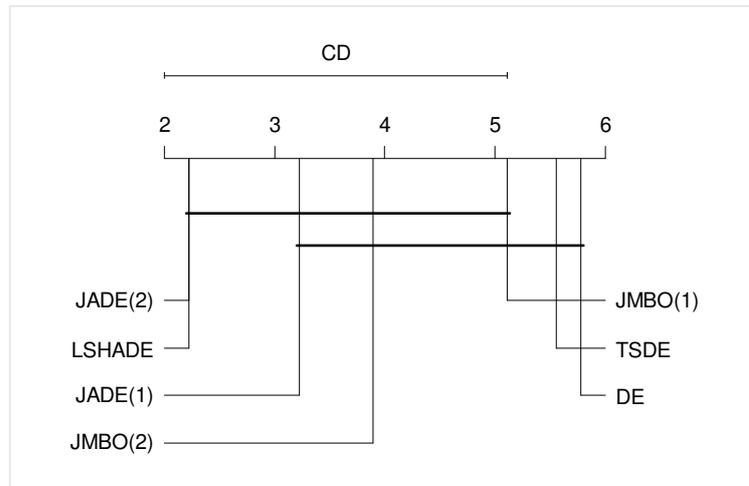
### 6.2.8 Grupo DEM Unimultimodais com $D = 100$

O teste de Nemenyi aplicado ao grupo DEM de funções unimultimodais com dimensão 100 determinou o valor da diferença crítica  $CD = 3,002$ . No respectivo gráfico da CD, Figura 55, observa-se que os conjuntos de algoritmos que não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho foram:

- JADE(2), L-SHADE, JADE(1), JMBO(2) e JMBO(1);
- JADE(1), JMBO(2), JMBO(1), TSDE e DE.

Os  $p$ -valores corrigidos obtidos com o teste de Bergmann-Hommel para o grupo DEM de funções unimultimodais com dimensão 100 são resumidos na Figura 56. Estes  $p$ -valores indicam diferenças estatísticas entre os seguintes pares de algoritmos  $\{\{JADE(2), TSDE\}, \{JADE(2), DE\}, \{L-SHADE, TSDE\}, \{L-SHADE, DE\}\}$ . Ao se comparar o JMBO(1) com o JADE(2) obteve-se um  $p$ -valor corrigido de 0,05, no limite do nível de significância definido nos testes, e o mesmo ocorreu quando o JMBO(1) e o L-SHADE foram comparados.

Figura 55 – Diferença crítica do grupo DEM unimultimodais com  $D = 100$

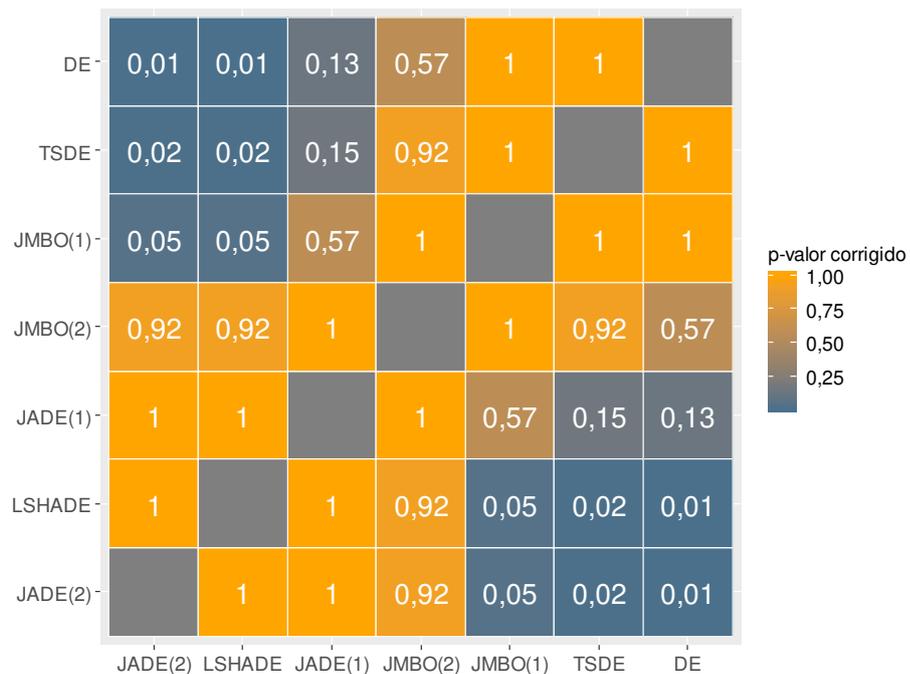


Fonte: Elaborado pelo autor.

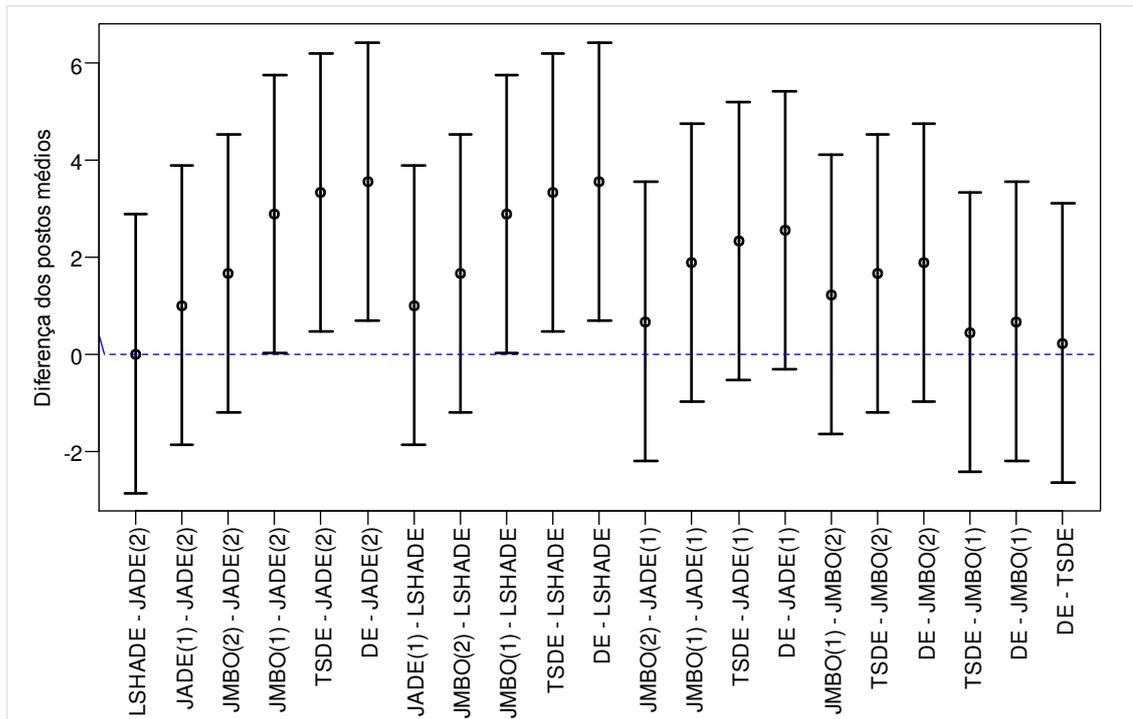
Os resultados dos testes de Nemenyi e de Bergmann-Hommel foram consonantes em relação aos algoritmos que não possuem diferenças estatísticas significativas no desempenho.

A Figura 57 apresenta os intervalos de confiança para o grupo DEM de funções unimultimodais com dimensão 100.

Figura 56 –  $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo DEM unimultimodais com  $D = 100$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 57 – Intervalos de confiança do grupo DEM unimultimodais com  $D = 100$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

De acordo com estes intervalos, o JADE(2) apresentou desempenho superior ao TSDE, DE e JMBO(1), e o L-SHADE apresentou desempenho superior ao TSDE, DE e JMBO(1). Na comparação do JMBO(1) com JADE(2) e do JMBO(1) com L-SHADE, o limite inferior do intervalo de confiança foi de 0,014 para ambos os casos.

### 6.2.9 Grupo DEM Híbridas com $D = 30$

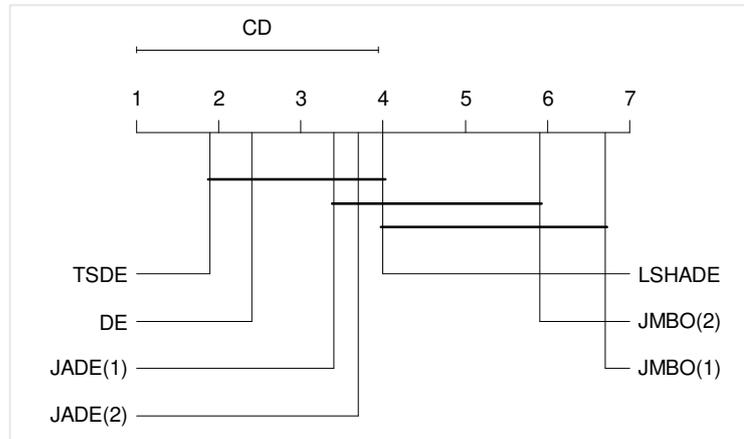
O teste de Nemenyi aplicado ao grupo DEM de funções híbridas com dimensão 30 determinou o valor da diferença crítica  $CD = 2,845$ . No respectivo gráfico da CD, Figura 58, observa-se que os conjuntos de algoritmos que não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho foram:

- TSDE, DE, JADE(1), JADE(2) e L-SHADE;
- JADE(1), JADE(2), L-SHADE e JMBO(2);
- L-SHADE, JMBO(2) e JMBO(1).

Os  $p$ -valores corrigidos obtidos com o teste de Bergmann-Hommel para o grupo DEM de funções híbridas com dimensão 30 são resumidos na Figura 59. Estes  $p$ -valores indicam diferenças estatísticas entre os seguintes pares de algoritmos:

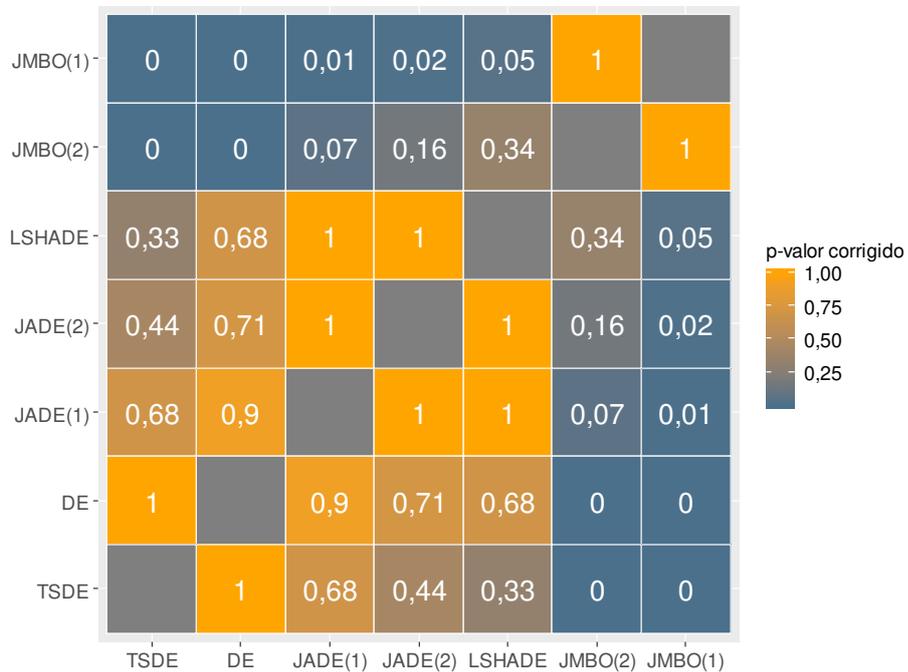
{{JMBO(1), TSDE}, {JMBO(2), TSDE}, {JMBO(1), DE}, {JMBO(2), DE}, {JADE(1), JMBO(1)}, {JADE(2), JMBO(1)}}.

Figura 58 – Diferença crítica do grupo DEM híbridas com  $D = 30$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 59 –  $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo DEM híbridas com  $D = 30$



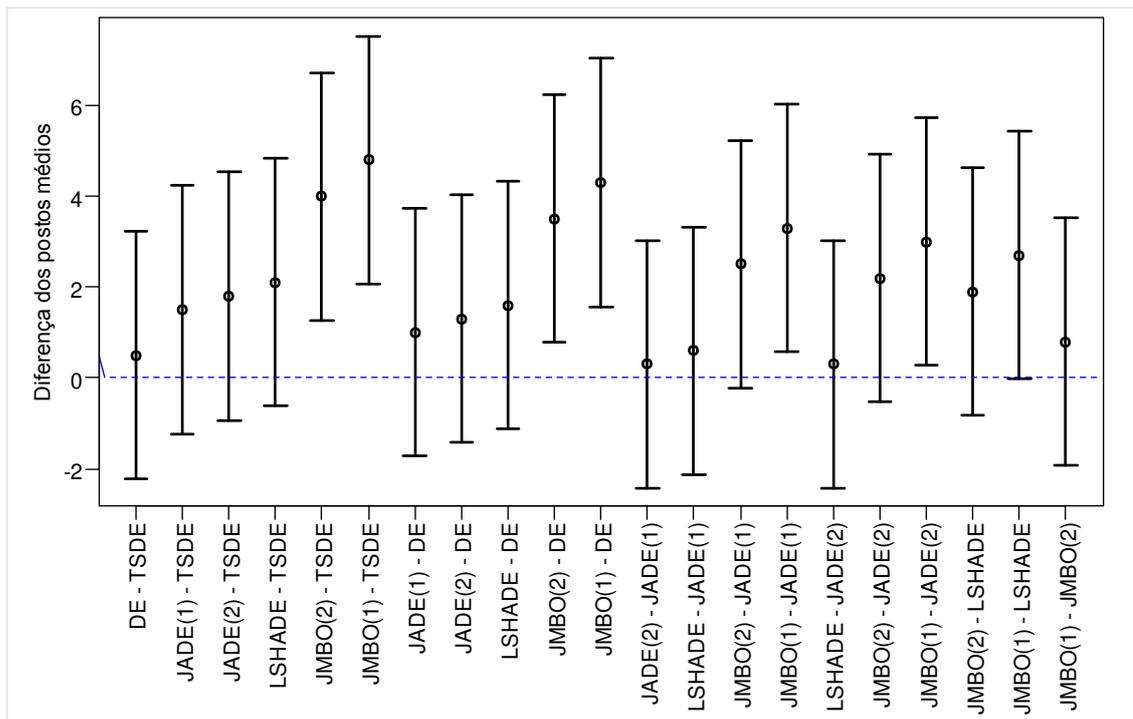
Fonte: Elaborado pelo autor.

Os resultados dos testes de Nemenyi e de Bergmann-Hommel foram consonantes em relação aos algoritmos que não possuem diferenças estatísticas significativas no desempenho. Ao se comparar o L-SHADE com o JMBO(1) obteve-se um  $p$ -valor corrigido de 0,05, no limite do nível de significância definido nos testes.

A Figura 60 apresenta os intervalos de confiança para o grupo DEM de funções híbridas com dimensão 30. De acordo com estes intervalos, o TSDE apresentou desempenho superior ao JMBO(2) e JMBO(1); o DE apresentou desempenho superior ao JMBO(2) e JMBO(1); e tanto JADE(1) quanto JADE(2) apresentaram desempenhos superiores ao JMBO(1). Na comparação do L-SHADE com JMBO(1), o limite inferior do intervalo de confiança foi de  $-0,027$ , indicando que os mesmos não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho. Este par obteve um valor corrigido do  $p$ -valor de 0,05 no teste de Bergmann-Hommel.

Os pares de algoritmos com diferenças estatísticas significativas de desempenho no teste de Bergmann-Hommel foram os mesmos evidenciados nos intervalos de confiança.

Figura 60 – Intervalos de confiança do grupo DEM híbridas com  $D = 30$



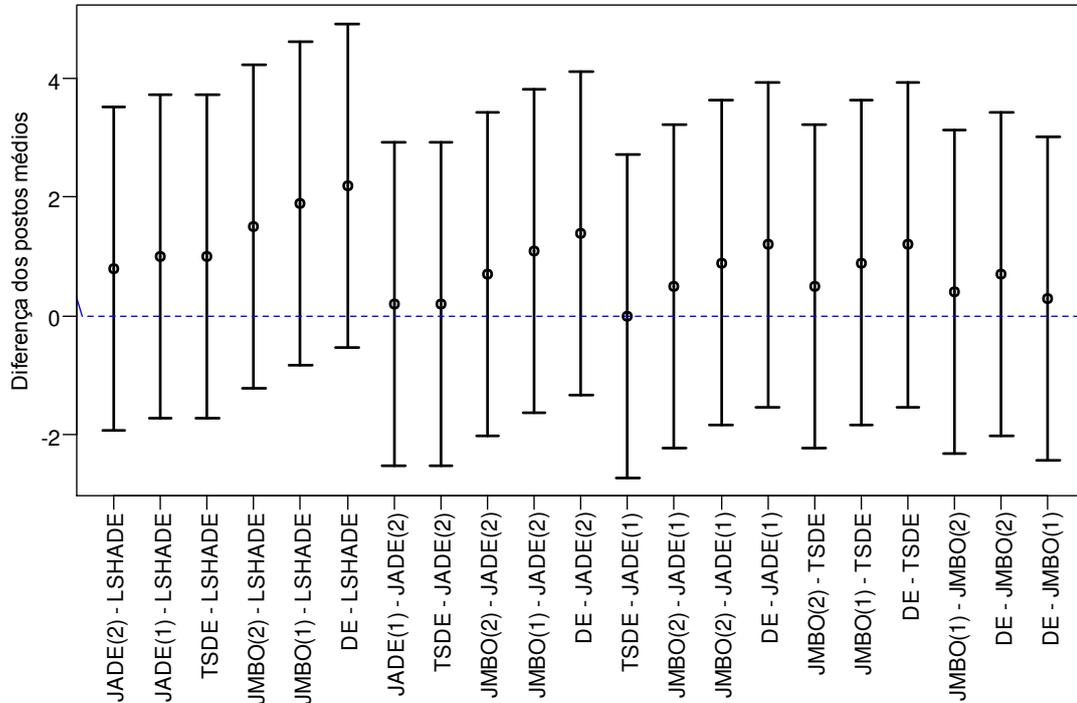
Fonte: Elaborado pelo autor.

#### 6.2.10 Grupo DEM Híbridas com $D = 100$

O grupo DEM de funções híbridas com dimensão 100 apresentou um  $p$ -valor de 0,3222 no teste de Friedman, denotando que não há diferenças estatisticamente significativas entre os algoritmos, e um valor estimado do tamanho do efeito  $W = 0,116$ . Desta forma, não foram realizados os testes de comparações múltiplas.

Na Figura 61, apresentada apenas como confirmação do resultado anterior, verifica-se que todos os intervalos de confiança incluem o valor zero.

Figura 61 – Intervalos de confiança do grupo DEM híbridas com  $D = 100$



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 6.2.11 Grupo DEM Compostas com $D = 30$

O teste de Nemenyi aplicado ao grupo DEM de funções compostas com dimensão 30 determinou o valor da diferença crítica  $CD = 2,845$ . No respectivo gráfico da CD, Figura 62, observa-se que os conjuntos de algoritmos que não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho foram:

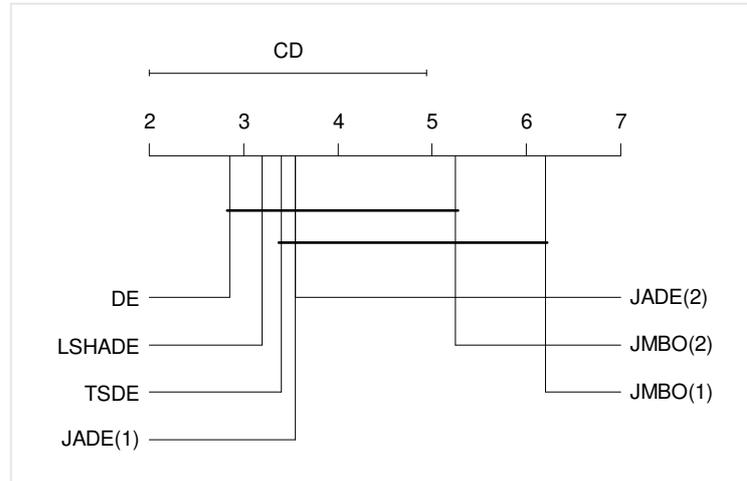
- DE, L-SHADE, TSDE, JADE(1), JADE(2) e JMBO(2);
- TSDE, JADE(1), JADE(2), JMBO(2) e JMBO(1).

Os  $p$ -valores corrigidos obtidos com o teste de Bergmann-Hommel para o grupo DEM de funções compostas com dimensão 30 são resumidos na Figura 63. Estes  $p$ -valores indicam diferenças estatísticas entre os seguintes pares de algoritmos:  $\{\{JMBO(1), DE\}, \{JMBO(1), L-SHADE\}, \{JMBO(1), TSDE\}\}$ .

Quando são comparados os resultados do teste de Bergmann-Hommel com os resultados do teste de Nemenyi, verifica-se que o teste de Bergmann-Hommel

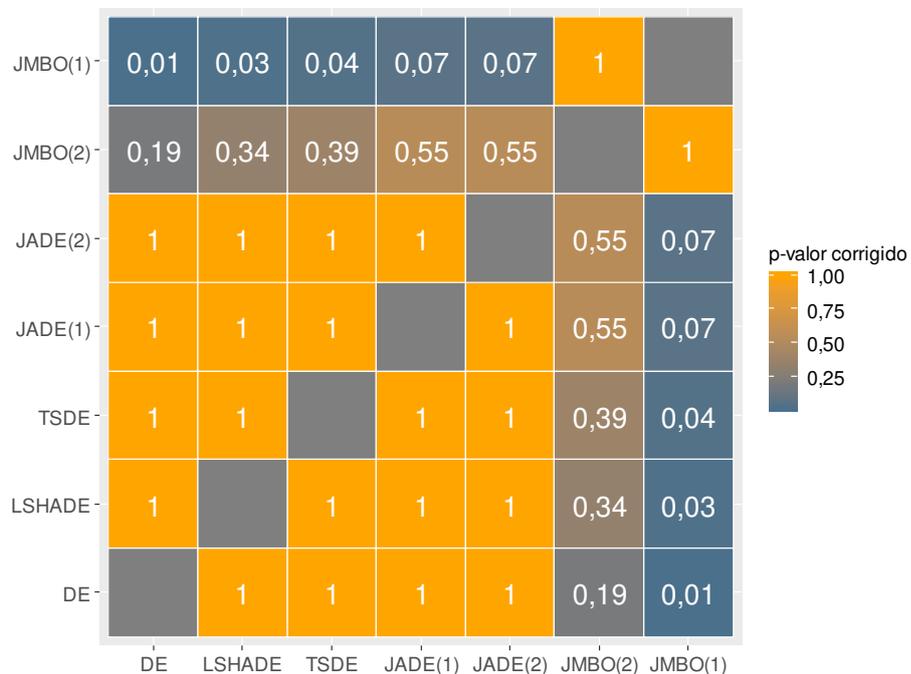
detectou diferenças estatísticas significativas entre JMBO(1) e TSDE ( $p$ -valor corrigido = 0,04).

Figura 62 – Diferença crítica do grupo DEM compostas com  $D = 30$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 63 –  $P$ -valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo DEM compostas com  $D = 30$



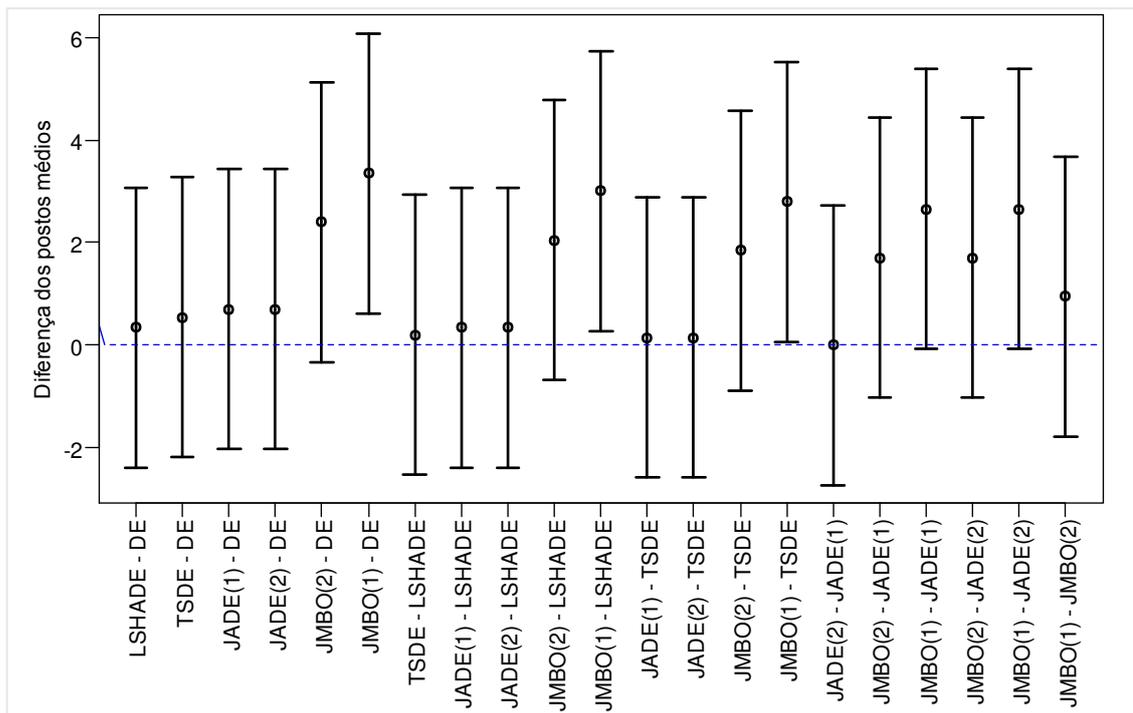
Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 64 apresenta os intervalos de confiança para o grupo DEM de funções compostas com dimensão 30. De acordo com estes intervalos, DE e L-SHADE apresentam desempenhos superiores ao JMBO(1), e o TSDE apresentou

desempenho superior ao JMBO(1) com limite inferior do intervalo de confiança de 0,014. Os limites inferiores dos intervalos de confiança foram de  $-0,027$  na comparação entre JMBO(1) e JADE(1) e entre JMBO(1) e JADE(2).

Os pares de algoritmos com diferenças estatísticas significativas de desempenho no teste de Bergmann-Hommel foram os mesmos evidenciados nos intervalos de confiança.

Figura 64 – Intervalos de confiança do grupo DEM compostas com  $D = 30$



Fonte: Elaborado pelo autor.

### 6.2.12 Grupo DEM Compostas com $D = 100$

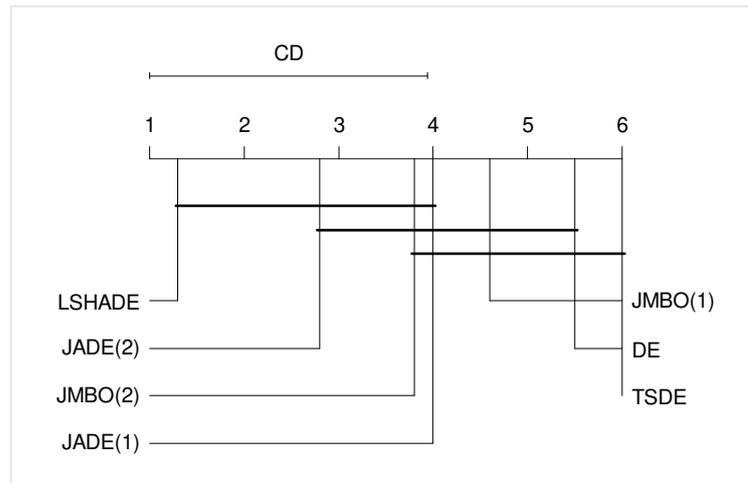
O teste de Nemenyi aplicado ao grupo DEM de funções compostas com dimensão 100 determinou o valor da diferença crítica  $CD = 2,845$ . No respectivo gráfico da CD, Figura 65, observa-se que os conjuntos de algoritmos que não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho foram:

- L-SHADE, JADE(2), JMBO(2) e JADE(1);
- JADE(2), JMBO(2), JADE(1), JMBO(1) e DE;
- JMBO(2), JADE(1), JMBO(1), DE e TSDE.

Os  $p$ -valores corrigidos obtidos com o teste de Bergmann-Hommel para o grupo DEM de funções compostas com dimensão 100 são resumidos na Figura 66. Estes

$p$ -valores indicam diferenças estatísticas entre os seguintes pares de algoritmos: {{L-SHADE, JMBO(1)}, {L-SHADE, DE}, {L-SHADE, TSDE}, {JADE(2), TSDE}}. Ao se comparar o L-SHADE com o JADE(1) obteve-se um  $p$ -valor corrigido de 0,05, no limite do nível de significância definido nos testes, e o mesmo ocorreu quando o JADE(2) e o DE foram comparados.

Figura 65 – Diferença crítica do grupo DEM compostas com  $D = 100$



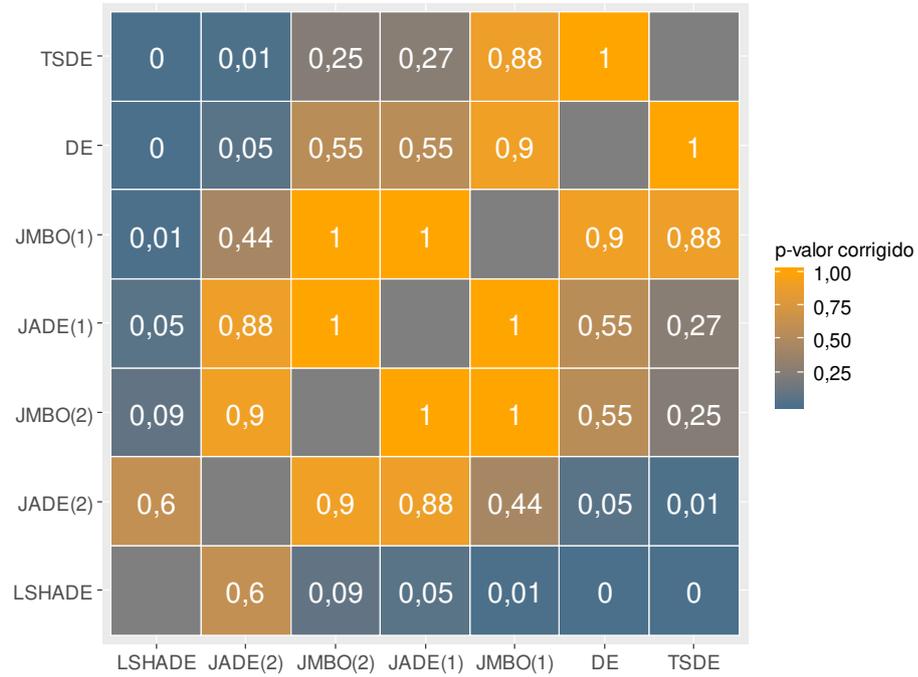
Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 67 apresenta os intervalos de confiança para o grupo DEM de funções compostas com dimensão 100. De acordo com estes intervalos, o L-SHADE apresentou desempenho superior ao JMBO(1), TSDE e DE, e o JADE(2) apresentou desempenho superior ao TSDE. Os limites inferiores dos intervalos de confiança foram de  $-0,027$  na comparação entre JADE(1) e L-SHADE e entre JADE(2) e DE.

Os pares de algoritmos com diferenças estatísticas significativas de desempenho no teste de Bergmann-Hommel foram os mesmos evidenciados nos intervalos de confiança.

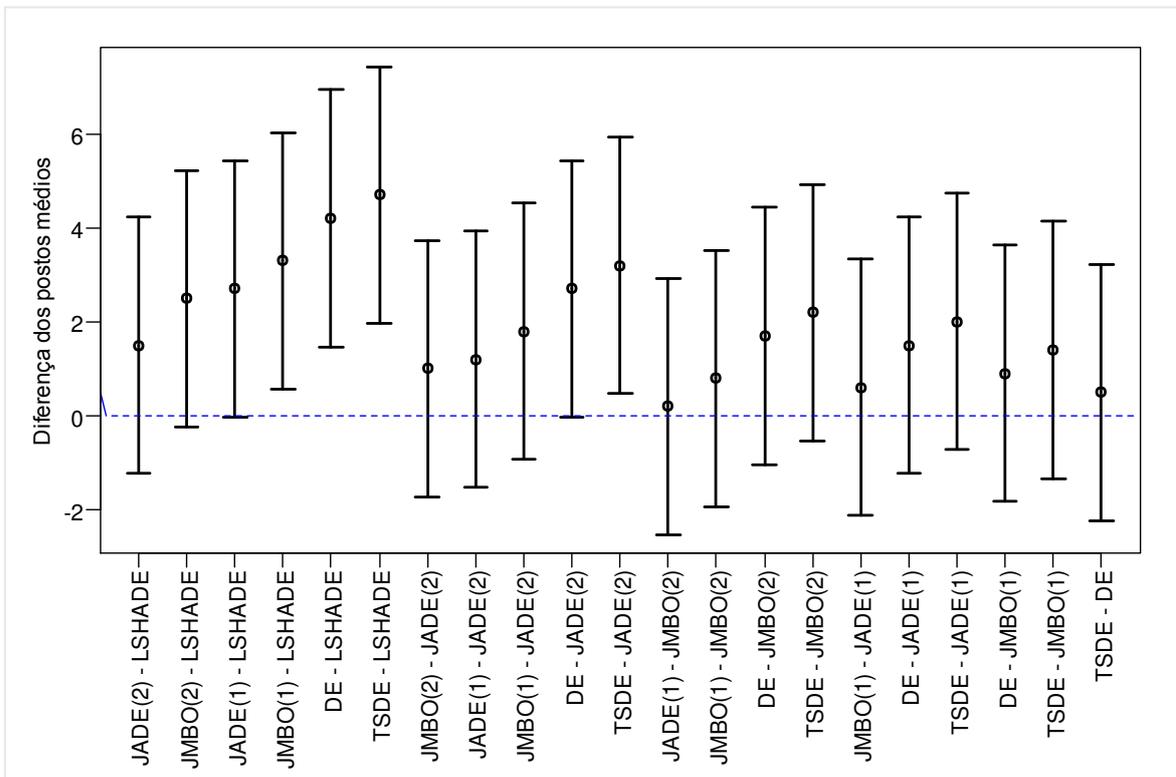
Os testes de comparações múltiplas de Nemenyi e de Bergmann-Hommel indicaram os pares de algoritmos que apresentaram diferenças estatísticas significativas de desempenho.

Figura 66 – P-valores corrigidos do teste de Bergmann-Hommel do grupo DEM compostas com  $D = 100$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 67 – Intervalos de confiança do grupo DEM compostas com  $D = 100$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Com os intervalos de confiança para o teste de Friedman foi possível determinar quais algoritmos apresentaram desempenhos superiores nas comparações aos pares. O Quadro 2 apresenta os resultados dos testes de comparações de desempenho nos grupos SIM e o Quadro 3 apresenta os resultados das comparações de desempenho nos grupos DEM.

Nestes quadros foi utilizada a seguinte convenção: a cor verde indica que o desempenho do JMBO foi superior ao desempenho do algoritmo comparado; a cor vermelha indica que o desempenho do algoritmo comparado foi superior ao desempenho do JMBO; e a cor amarela indica que os testes não detectaram diferenças estatísticas significativas no desempenho dos algoritmos comparados.

Quadro 2 – Desempenho do JMBO nos grupos SIM

Grupos de funções	Algoritmo	$D = 30$		$D = 100$	
		JMBO(1)	JMBO(2)	JMBO(1)	JMBO(2)
Unimultimodais	MBO	●	●	●	●
	IMBO	●	●	●	●
	GCMBO	●	●	●	●
	MBO-FS	●	●	●	●
	PSO	●	●	●	●
Híbridas	MBO	●	●	●	●
	IMBO	●	●	●	●
	GCMBO	●	●	●	●
	MBO-FS	●	●	●	●
	PSO	●	●	●	●
Compostas	MBO	●	●	●	●
	IMBO	●	●	●	●
	GCMBO	●	●	●	●
	MBO-FS	●	●	●	●
	PSO	●	●	●	●

Legenda: ● desempenho superior do JMBO em relação ao algoritmo comparado  
 ● não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho

Fonte: Elaborado pelo autor.

Quadro 3 – Desempenho do JMBO nos grupos DEM

Grupos de funções	Algoritmo	$D = 30$		$D = 100$	
		JMBO(1)	JMBO(2)	JMBO(1)	JMBO(2)
Unimultimodais	DE	●	●	●	●
	JADE(1)	●	●	●	●
	JADE(2)	●	●	●	●
	TSDE	●	●	●	●
	L-SHADE	●	●	●	●
Híbridas	DE	●	●	●	●
	JADE(1)	●	●	●	●
	JADE(2)	●	●	●	●
	TSDE	●	●	●	●
	L-SHADE	●	●	●	●
Compostas	DE	●	●	●	●
	JADE(1)	●	●	●	●
	JADE(2)	●	●	●	●
	TSDE	●	●	●	●
	L-SHADE	●	●	●	●

Legenda: ● desempenho superior do algoritmo comparado em relação ao JMBO  
 ● não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 6.3 Avaliação dos Algoritmos no Projeto de Filtros FIR de Fase Linear

O projeto básico de filtros digitais envolve os seguintes passos:

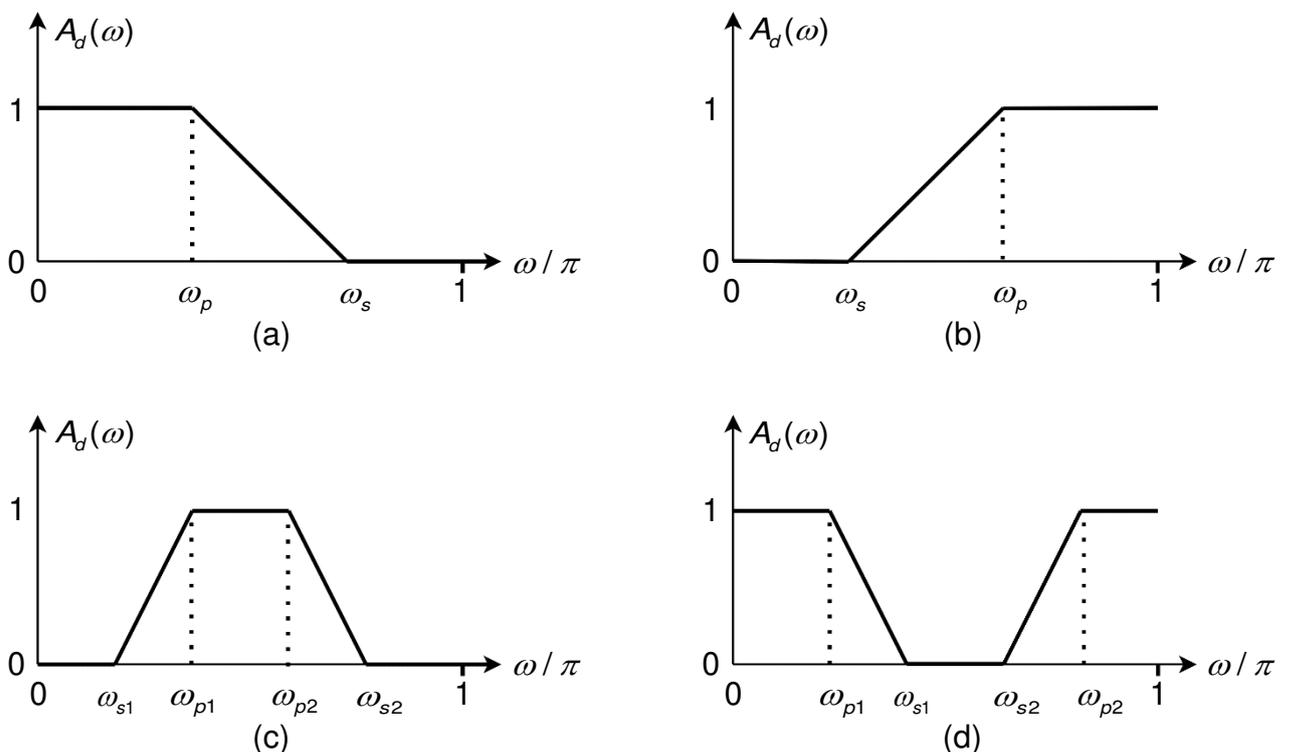
- escolha da resposta em frequência desejada;
- seleção de uma categoria de filtros;
- definição de uma métrica de desempenho da resposta do filtro quando comparada à resposta desejada;
- aplicação ou desenvolvimento de um método para encontrar o melhor membro da categoria de filtros selecionada segundo o critério de desempenho adotado.

Para a avaliação do algoritmo proposto foram definidos seis perfis de resposta em frequência de amplitude  $A_d(\omega)$  como referências para os filtros projetados, todos baseados nos tradicionais filtros passa-baixa, passa-alta, passa-faixa e rejeita-faixa apresentados na Figura 68, com o eixo de frequências normalizado. As frequências de passagem ( $\omega_p$ ) e de rejeição ( $\omega_s$ ) normalizadas para cada perfil são:

- 1) Passa-baixa (PB):  $\{\omega_p, \omega_s\} = \{0,45, 0,55\}$  ;
- 2) Passa-alta (PA):  $\{\omega_s, \omega_p\} = \{0,45, 0,55\}$  ;
- 3) Passa-faixa (PF):  $\{\omega_{s1}, \omega_{p1}, \omega_{p2}, \omega_{s2}\} = \{0,30, 0,35, 0,65, 0,70\}$  ;
- 4) Rejeita-faixa (RF):  $\{\omega_{p1}, \omega_{s1}, \omega_{s2}, \omega_{p2}\} = \{0,30, 0,35, 0,65, 0,70\}$  ;
- 5) Passa-faixa ideal (PFi):  $\{\omega_{s1}, \omega_{p1}, \omega_{p2}, \omega_{s2}\} = \{0,35, 0,35, 0,65, 0,65\}$  ;
- 6) Rejeita-faixa (estreita) (RFe):  $\{\omega_{p1}, \omega_{s1}, \omega_{s2}, \omega_{p2}\} = \{0,48, 0,48, 0,52, 0,52\}$  .

Como as frequências de transição são diferentes para os perfis 1 a 4, uma função linear foi gerada na faixa de transição da resposta em frequência desejada, equação (87). Os perfis 5 e 6 são ideais (Figura 20).

Figura 68 – Respostas em frequência desejadas para os filtros (a) passa-baixa, (b) passa-alta, (c) passa-faixa e (d) rejeita-faixa



Fonte: Elaborado pelo autor.

Dois filtros foram projetados para cada um dos seis perfis, um de ordem 20 e outro de ordem 60. Selecionou-se o filtro FIR de fase linear Tipo I, adequado para todos os perfis definidos. Os coeficientes reais dos filtros foram limitados ao intervalo  $[-1, 1]$ . A ponderação adotada para uma faixa de passagem foi 100, enquanto para uma faixa de rejeição foi 50. As amostras de frequências da função  $A(\omega)$  foram obtidas a partir da equação (77). O número de amostras de frequências para  $\omega \in [0, \pi]$  foi 1.000, igualmente espaçadas.

O problema de otimização proposto para aproximação de filtros FIR de fase linear consiste em determinar o conjunto de coeficientes  $h(k)$  da resposta ao impulso que minimiza o erro ponderado apresentado na equação (88).

Os coeficientes dos filtros foram gerados pelas meta-heurísticas de otimização. Cada algoritmo foi executado 51 vezes e o critério de parada foi o número máximo de avaliações da função objetivo, fixado em  $3 \cdot 10^3 D$ , em que  $D$  é a dimensão do problema. A população inicial foi gerada aleatória e normalmente distribuída. O tamanho da população adotado foi  $2M$ , ou seja, duas vezes a ordem do filtro. No caso do L-SHADE,  $2M$  correspondeu ao tamanho inicial da população.

Para se garantir a reprodutibilidade dos resultados, a semente do gerador de números pseudoaleatórios foi a mesma para cada execução de um algoritmo, ou seja, a primeira execução inicia com a mesma semente para todo algoritmo, que é diferente das sementes das execuções subsequentes.

Os projetos dos filtros foram realizados no MATLAB® 2015a e utilizaram-se os algoritmos do grupo SIM (PSO, MBO, GCMBO, MBO-FS e IMBO) e do grupo DEM (DE, JADE(1), JADE(2), L-SHADE e TSDE), sendo que o JMBO(1) e o JMBO(2) foram inseridos em ambos os grupos para comparação. A parametrização dos algoritmos seguiu os valores apresentados na Tabela 8.

Os resultados dos filtros FIR de fase linear de ordem 20 e 60 projetados pelas meta-heurísticas são apresentados na Tabela 23 à Tabela 26. As tabelas mostram a mediana dos 51 valores mínimos do erro quadrático ponderado ( $ME_w$ ) que cada algoritmo obteve no projeto dos filtros passa-baixa (PB), passa-alta (PA), passa-faixa (PF), rejeita-faixa (RF), passa-faixa ideal (PFi) e rejeita-faixa de banda estreita (RFe), cujos perfis foram descritos anteriormente nesta seção. Adicionalmente são apresentadas as medianas do número de avaliações da função objetivo para

convergência,  $n_{fe}$ , realizados pelo algoritmo para alcançar seu respectivo valor ótimo,  $ME_W$ , com tolerância de  $10^{-6}$ .

No projeto dos filtros de ordem 20, Tabela 23, tanto o JMBO(1) quanto o JMBO(2) obtiveram as menores  $ME_W$  do grupo SIM, seguidos pelo IMBO, o qual alcançou valores similares para a  $ME_W$ . Em todos os casos, o JMBO necessitou de um número menor de avaliações da função objetivo.

No projeto dos filtros de ordem 20 pelo grupo DEM, Tabela 24, todos os algoritmos apresentaram os mesmos valores da  $ME_W$ . O JMBO(1) e o JMBO(2) se destacaram por convergirem com o menor  $n_{fe}$  para todos os filtros.

Tabela 23 – Resultados do grupo SIM para os filtros de ordem 20

	PSO		MBO		MBO-FS		GCMBO		IMBO		JMBO(1)		JMBO(2)	
	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$								
PB	104,1	30200	212,1	30840	664,1	31920	142,7	32044	68,1	32960	68,0	5360	68,0	5440
PA	99,5	29160	284,8	30840	603,6	32320	132,9	31918	68,1	32960	68,0	5200	68,0	5520
PF	439,1	29880	838,5	27840	1325,7	30320	517,2	30973	409,1	32960	409,0	5040	409,0	5440
RF	419,1	30040	1466,5	27360	3442,5	31120	722,2	31099	382,6	32960	382,4	5160	382,4	5480
PFi	1158,0	29200	2045,8	26720	3532,0	29560	1397,2	31540	1129,8	32960	1129,7	5120	1129,7	5400
RFe	1557,2	30080	1690,6	30600	2506,6	31200	1491,7	31792	1471,5	32960	1471,4	4920	1471,4	5440

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 24 – Resultados do grupo DEM para os filtros de ordem 20

	DE		JADE(1)		JADE(2)		L-SHADE		TSDE		JMBO(1)		JMBO(2)	
	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$
PB	68,0	11280	68,0	7360	68,0	8280	68,0	6276	68,0	25360	68,0	5360	68,0	5440
PA	68,0	11400	68,0	7360	68,0	8320	68,0	6276	68,0	25440	68,0	5200	68,0	5520
PF	409,0	11240	409,0	7360	409,0	8280	409,0	6243	409,0	25000	409,0	5040	409,0	5440
RF	382,4	11400	382,4	7360	382,4	8400	382,4	6276	382,4	25240	382,4	5160	382,4	5480
PFi	1129,7	11320	1129,7	7240	1129,7	8240	1129,7	6210	1129,7	25000	1129,7	5120	1129,7	5400
RFe	1471,4	11280	1471,4	7320	1471,4	8200	1471,4	6375	1471,4	24400	1471,4	4920	1471,4	5440

Fonte: Elaborado pelo autor.

O MBO e o MBO-FS apresentaram valores baixos para  $n_{fe}$  no projeto dos filtros de ordem 60 (Tabela 25) quando comparados aos demais algoritmos. Especificamente, para todos os perfis no caso do MBO e para os filtros PB e RFe no caso do MBO-FS. Estes números indicam uma rápida estagnação local quando se verificam os respectivos valores da  $ME_W$ . Desconsiderando estes resultados, o JMBO obteve os menores  $ME_W$  e  $n_{fe}$  do grupo.

Todos os algoritmos do grupo DEM apresentaram os mesmos valores da  $ME_W$  no projeto dos filtros de ordem 60 (Tabela 26). O L-SHADE obteve os menores valores para  $n_{fe}$ , para todos os perfis. O JMBO(2) foi segundo com melhor desempenho neste critério, seguido pelo JMBO(1). A maior diferença das medianas do número de avaliações da função objetivo para convergência entre JMBO(2) e L-SHADE foi de 442 (1,81%) e a menor de 52 (0,22%).

Tabela 25 – Resultados do grupo SIM para os filtros de ordem 60

	PSO		MBO		MBO-FS		GCMBO		IMBO		JMBO(1)		JMBO(2)	
	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$								
PB	612,5	88440	2,5E+5	8160	8,2E+5	240	3780,2	51990	5,4	92880	2,0	29040	2,0	24360
PA	572,6	89520	6,0E+4	13560	6,2E+4	53640	1141,2	86000	5,4	92880	2,0	29160	2,0	24360
PF	544,6	88920	1,6E+5	14880	1,0E+5	54240	2188,4	79160	11,0	92880	7,8	28200	7,8	24120
RF	662,0	88920	1,8E+5	15360	1,6E+4	60840	1,4E+4	77260	12,9	93000	9,0	29520	9,0	24360
PFi	963,8	88440	8,7E+4	19320	1,9E+4	56160	4332,3	64150	437,2	92880	434,3	28440	434,3	23880
RFe	1283,7	89520	4,8E+5	6600	1,1E+6	240	6572,1	61870	498,7	92880	494,7	27240	494,7	23520

Fonte: Elaborado pelo autor.

Tabela 26 – Resultados do grupo DEM para os filtros de ordem 60

	DE		JADE(1)		JADE(2)		L-SHADE		TSDE		JMBO(1)		JMBO(2)	
	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$	$ME_W$	$n_{fe}$
PB	2,0	92520	2,0	33240	2,0	35160	2,0	24008	152,9	92280	2,0	29040	2,0	24360
PA	2,0	92520	2,0	33240	2,0	34920	2,0	23918	151,7	92280	2,0	29160	2,0	24360
PF	7,8	92760	7,8	32880	7,8	34800	7,8	23918	124,2	92400	7,8	28200	7,8	24120
RF	9,0	92640	9,0	33600	9,0	35280	9,0	23918	157,4	92040	9,0	29520	9,0	24360
PFi	434,3	92520	434,3	33000	434,3	34560	434,3	23828	544,8	92640	434,3	28440	434,3	23880
RFe	494,7	92640	494,7	33360	494,7	35160	494,7	23918	610,0	92040	494,7	27240	494,7	23520

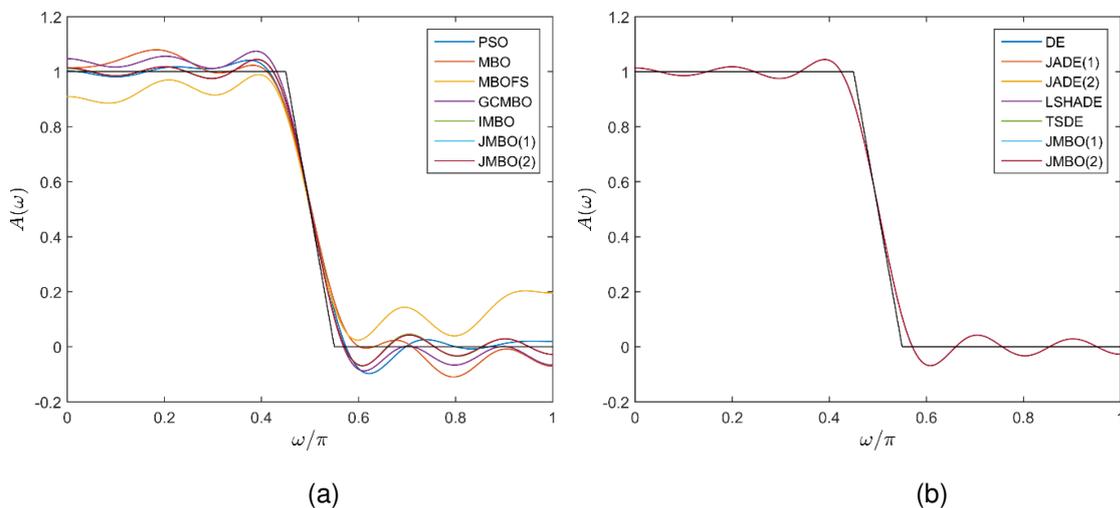
Fonte: Elaborado pelo autor.

Da Figura 69 até a Figura 74 são apresentadas as respostas em frequência de amplitude dos filtros FIR de ordem 20 projetados. Enquanto as curvas dos filtros do grupo DEM são concordantes para todos os perfis, observa-se uma variação acentuada nas curvas do grupo SIM, principalmente naquelas correspondentes aos algoritmos MBO, MBO-FS e GCMBO, em consonância com os valores altos da  $ME_W$  apresentados por estes na Tabela 23.

Em relação às respostas em frequência de amplitude dos filtros FIR de ordem 60, Figura 75 à Figura 80, o grupo SIM apresenta os maiores desvios em relação às curvas ideais de projeto, principalmente os algoritmos MBO, MBO-FS e GCMBO. O JMBO teve o melhor ajuste para todos os perfis. No grupo DEM, apenas o TSDE

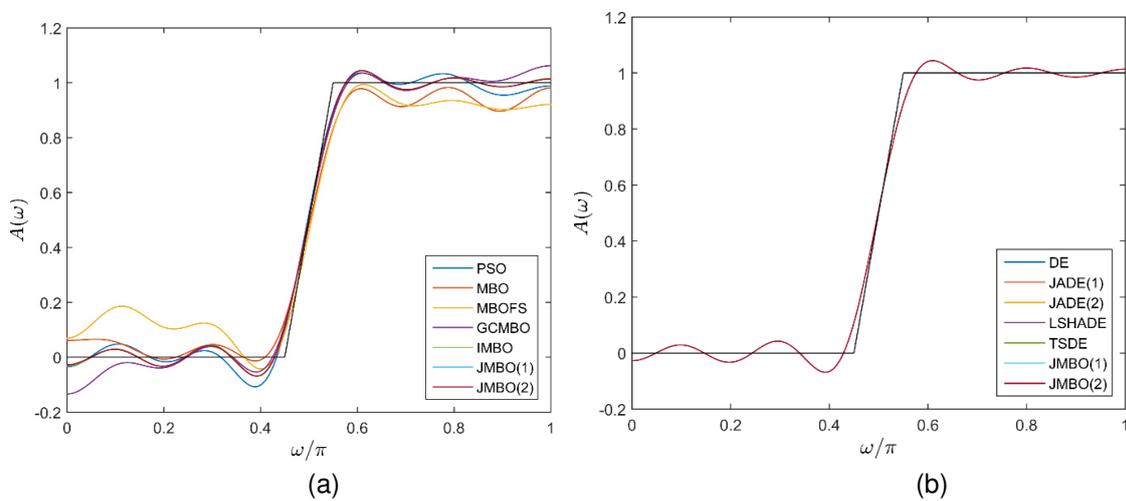
apresentou variações de amplitude na faixa de passagem e de rejeição quando comparado aos demais algoritmos, os quais obtiveram curvas similares em cada projeto.

Figura 69 – Filtro passa-baixa de ordem 20: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM



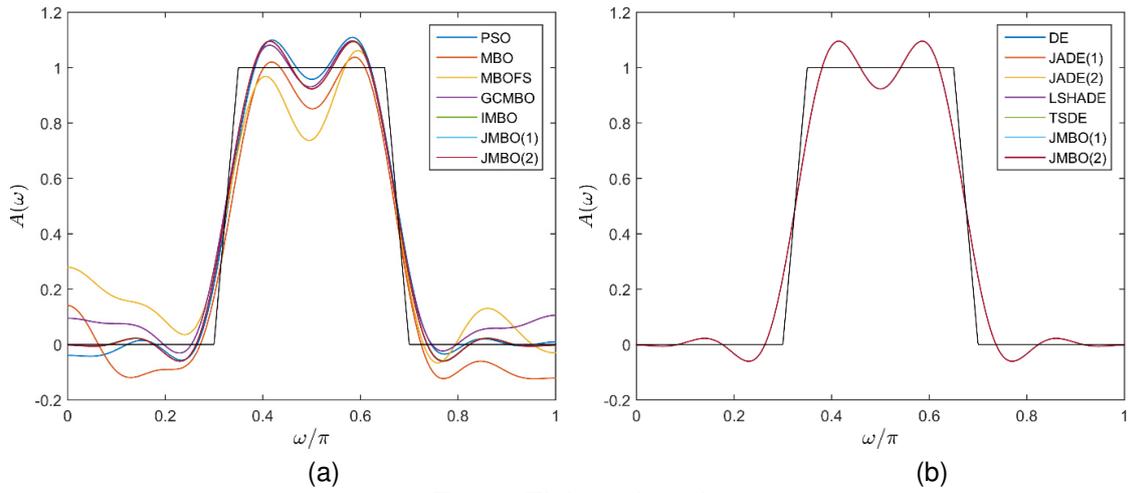
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 70 – Filtro passa-alta de ordem 20: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM



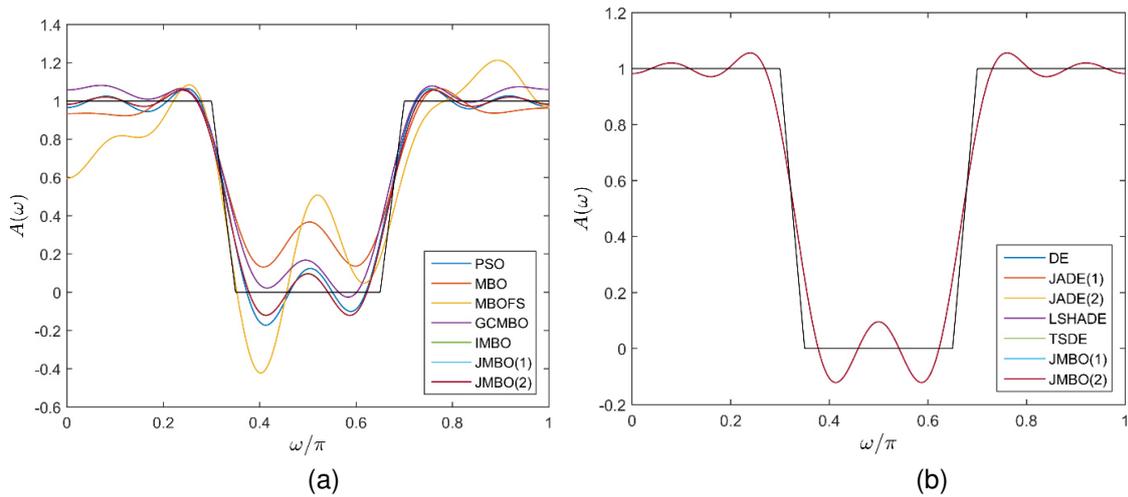
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 71 – Filtro passa-faixa de ordem 20: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM



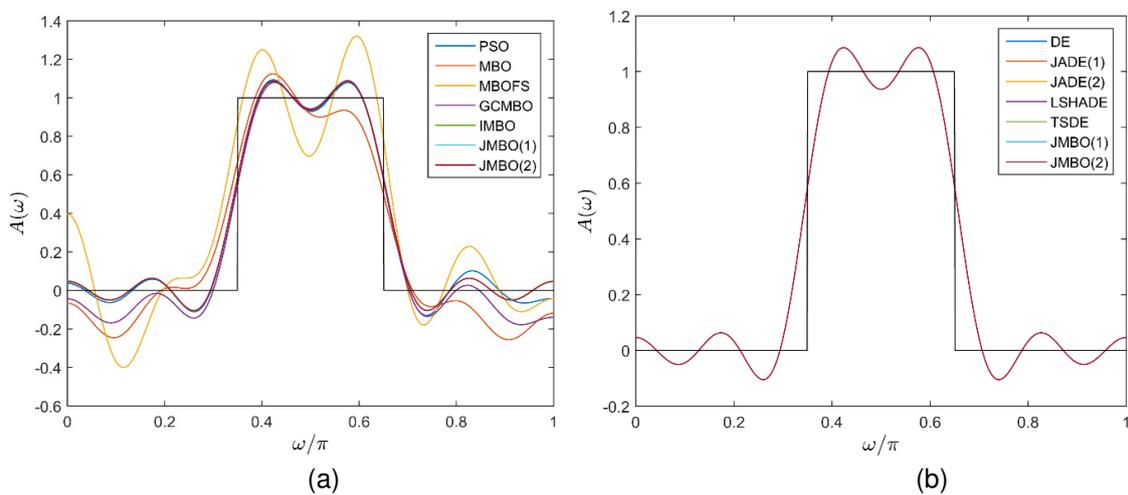
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 72 – Filtro rejeita-faixa de ordem 20: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM



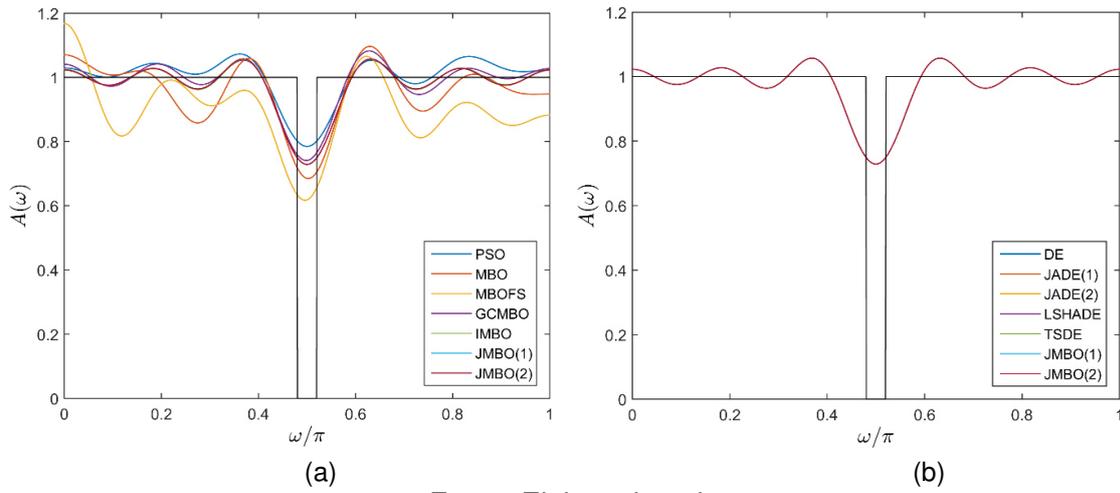
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 73 – Filtro passa-faixa ideal de ordem 20: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM



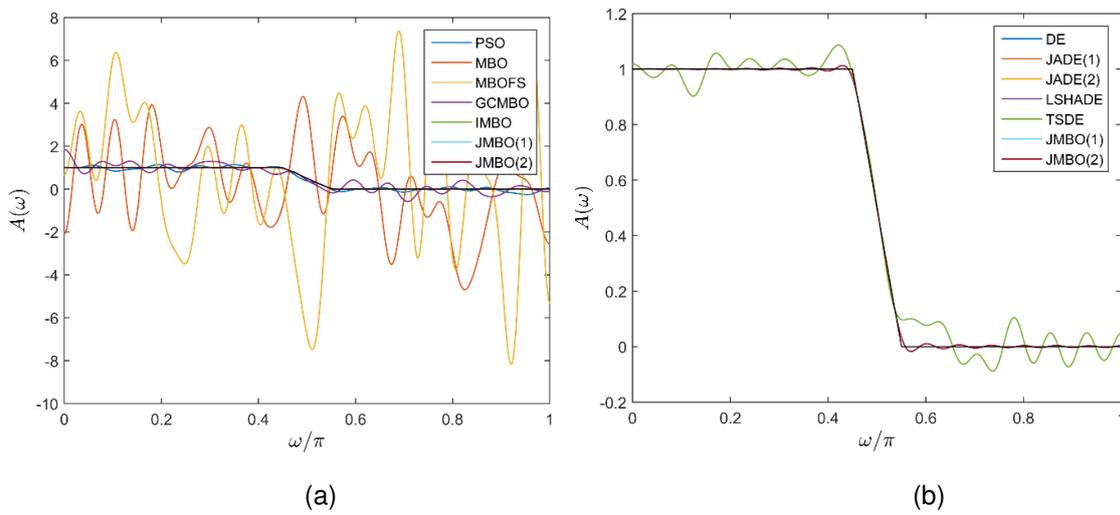
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 74 – Filtro rejeita-faixa (RFe) de ordem 20: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM



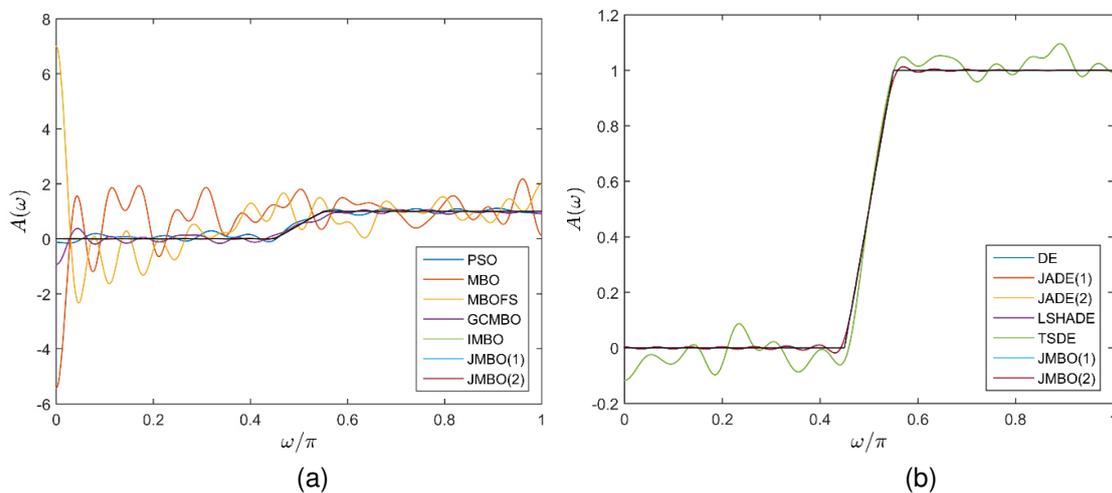
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 75 – Filtro passa-baixa de ordem 60: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM



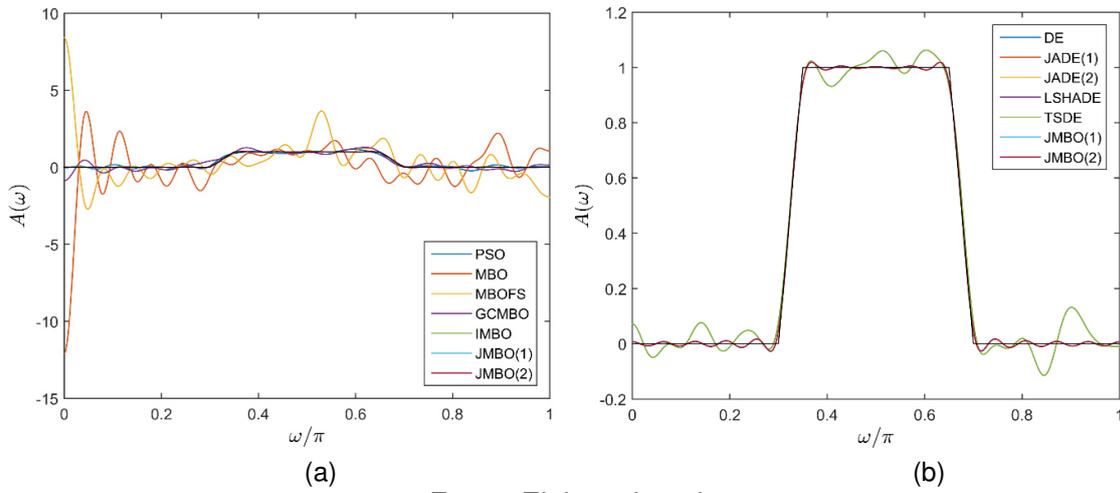
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 76 – Filtro passa-alta de ordem 60: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM



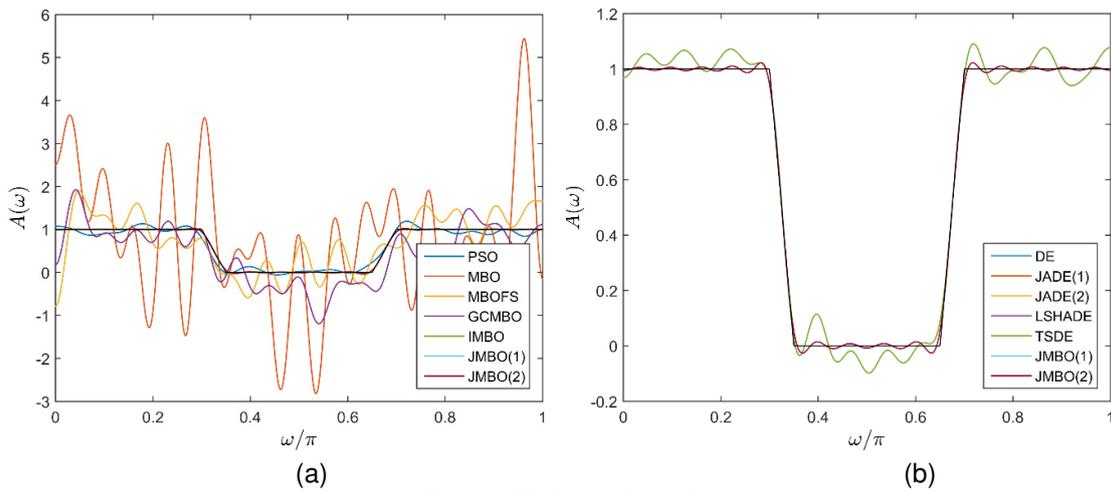
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 77 – Filtro passa-faixa de ordem 60: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM



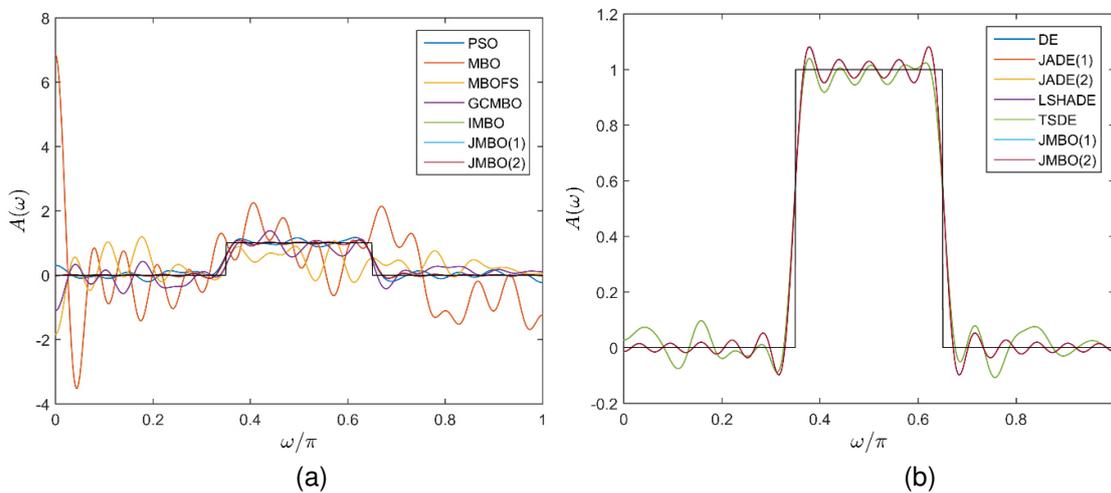
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 78 – Filtro rejeita-faixa de ordem 60: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM



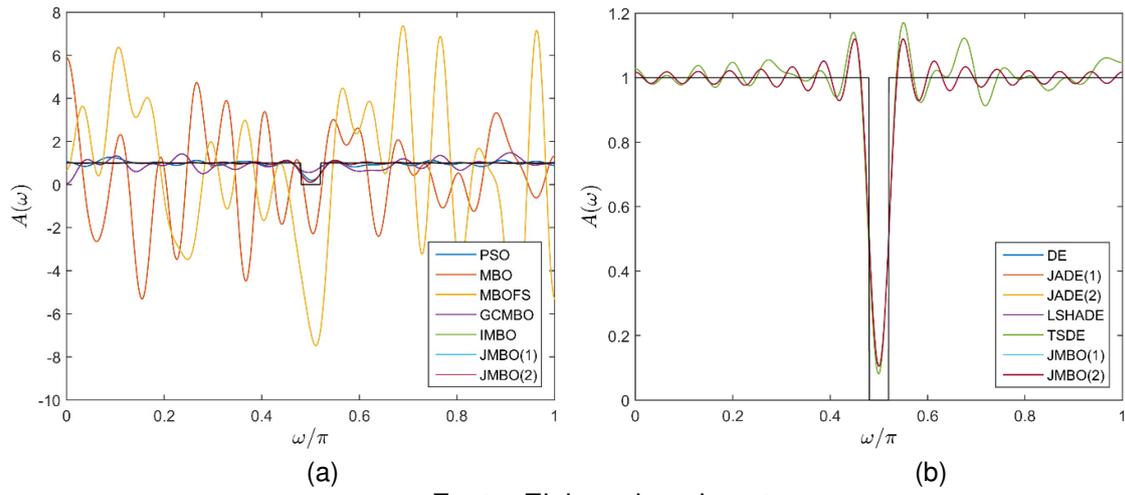
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 79 – Filtro passa-faixa ideal de ordem 60: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 80 – Filtro rejeita-faixa (RFe) de ordem 60: (a) grupo SIM e (b) grupo DEM



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo desenvolver uma nova meta-heurística híbrida para otimização mono-objetivo e aplicá-la no projeto de filtros digitais FIR.

O mapeamento sistemático da literatura foi realizado para a seleção dos algoritmos de otimização para hibridização a partir de consulta ao portal de periódicos da CAPES utilizando a base de dados Scopus®. Dois algoritmos foram selecionados para a implementação do novo algoritmo híbrido, o MBO e o JADE. O MBO possui um número relativamente menor de publicações, tanto em casos de aplicação quanto em versões aprimoradas, e um desempenho degradado devido ao operador de ajuste da borboleta. O JADE é um algoritmo de evolução diferencial adaptativo bem-sucedido que tem gerado novas implementações e aplicações. A revisão sistemática da literatura não identificou quaisquer estudos de aplicação de meta-heurísticas híbridas baseadas em DE e MBO no projeto de filtros digitais FIR de fase linear na base de dados Scopus®.

Com base na revisão sistemática da literatura levantou-se a hipótese que um algoritmo híbrido combinando o MBO com o JADE seria capaz de melhorar o desempenho do algoritmo MBO. Então foi desenvolvido o algoritmo híbrido, denominado JMBO, que manteve o operador de migração MBO e substituiu seu operador de ajuste pelo mecanismo de mutação adaptativo do JADE.

Para avaliar o desempenho do novo algoritmo híbrido, o JMBO (sem arquivo e com arquivo) foi comparado com algoritmos básicos (DE e PSO), algoritmos de base (JADE sem arquivo, JADE com arquivo e MBO) e variantes desenvolvidas a partir destes (GCMBO, IMBO, MBO-FS, L-SHADE e TSDE). Os algoritmos foram submetidos a dois conjuntos de teste: os problemas de referência para otimização mono-objetivo com restrições laterais do CEC 2017 e o projeto de filtros FIR de fase linear Tipo I.

Ressalta-se que nenhuma medida de sintonia dos parâmetros dos algoritmos foi realizada. Os parâmetros usados foram os mesmos citados pelos seus respectivos autores. No caso do DE e do PSO foram adotados parâmetros típicos citados na literatura. O JMBO manteve os parâmetros em comum com JADE e com MBO. Os experimentos realizados nesta tese sempre tiveram como premissa básica a equiparidade de condições para todos os algoritmos e a reprodutibilidade dos resultados.

Foram calculadas medidas descritivas para os valores ótimos obtidos como resultados das 51 execuções de todos os algoritmos aplicados às 29 funções do CEC 2017 para as dimensões 30 e 100. Avaliaram-se também a convergência, a complexidade e o RMSE dos algoritmos. Os resultados, com base nestes critérios, mostraram um desempenho superior do JMBO em relação ao MBO e às suas variantes.

As medianas dos 51 valores ótimos para cada algoritmo, função e dimensão foram comparadas estatisticamente através de testes não paramétricos. O teste estatístico de Friedman foi utilizado, pois os conjuntos de dados não atenderam às condições de normalidade e de homoscedasticidade, e foram realizadas comparações em grupos de sete algoritmos com amostras dependentes. Adicionalmente estimaram-se os valores dos tamanhos dos efeitos para avaliar o grau de concordância das funções de teste em cada grupo. Após a realização do teste de Friedman, somente o grupo das funções híbridas com dimensão 100 aplicadas aos algoritmos DEM teve aceita a hipótese nula de que os algoritmos comparados não apresentaram diferenças estatísticas significativas no desempenho.

Quando a hipótese nula foi rejeitada no teste de Friedman, a detecção de quais diferenças são significativas entre os algoritmos foi realizada utilizando a comparação de todos os algoritmos entre si (comparações múltiplas  $N \times N$ ) com a aplicação dos testes de comparações múltiplas de Nemenyi e de Bergmann-Hommel. Com a realização destes dois testes foram identificados os pares de algoritmos que tiveram diferenças estatísticas significativas no desempenho. Adicionalmente foram gerados os intervalos de confiança para comparação das diferenças de postos médios obtidos pelo teste de Friedman aplicando um teste de hipóteses unilateral para verificação dos algoritmos que apresentam desempenhos superiores nas comparações.

O Quadro 2 resumiu os resultados das comparações de desempenho no grupo de funções SIM. O algoritmo JMBO(2) apresentou desempenho superior aos algoritmos MBO, IMBO, GCMBO e MBO-FS para os grupos de funções unimultimodais ( $D = 30$  e  $D = 100$ ) e compostas ( $D = 30$ ), aos algoritmos MBO, GCMBO e MBO-FS para os grupos de funções híbridas ( $D = 30$  e  $D = 100$ ) e aos algoritmos MBO, IMBO e MBO-FS para os grupos de funções compostas ( $D = 100$ ). O Quadro 3 mostrou os resultados das comparações de desempenho no grupo de funções DEM, sendo que o JMBO(2) apresentou desempenho equivalente aos

algoritmos comparados, tanto com  $D = 30$  quanto com  $D = 100$ , exceto para os algoritmos DE e TSDE no grupo das funções híbridas com dimensão 30.

Considerando o Quadro 2, o algoritmo JMBO(1) apresentou desempenho superior aos algoritmos MBO, GCMBO e MBO-FS para os grupos de funções unimultimodais e híbridas ( $D = 30$  e  $D = 100$ ) e aos algoritmos MBO e MBO-FS para os grupos de funções compostas ( $D = 30$  e  $D = 100$ ). O Quadro 3 mostra que o JMBO(1) obteve desempenho equivalente ao DE, JADE(1) e TSDE, com  $D = 30$  e  $D = 100$ , e L-SHADE com  $D = 30$ , para as funções unimultimodais; a todos os algoritmos para as funções híbridas com  $D = 100$ ; ao JADE com  $D = 30$  e a todos os algoritmos, exceto L-SHADE com  $D = 100$ , para as funções compostas.

Logo, em relação aos testes estatísticos realizados sobre as medianas dos 51 valores ótimos para cada algoritmo, dimensão e função de teste do CEC 2017, tendo em vista o Procedimento Experimental como descrito na seção 5.3.2, especialmente as comparações múltiplas  $N \times N$ , constata-se que o algoritmo híbrido JMBO obteve desempenho superior ao MBO e às variantes deste, e desempenho algumas vezes similar à DE e às suas variantes.

O segundo conjunto de teste é baseado em um caso de aplicação, o projeto de filtros digitais. Foram realizados projetos de filtros FIR de fase linear do Tipo I, adequado para os perfis dos filtros testados – passa-alta, passa-baixa, passa-faixa e rejeita-faixa. Os resultados dos projetos de filtro FIR de fase linear excederam a expectativa pois, ao contrário dos resultados do conjunto de teste CEC 2017, o JMBO apresentou desempenho melhor que o DE e suas variantes, obtendo o menor número de avaliações da função objetivo para convergência, exceto quando comparado ao L-SHADE nos filtros de ordem 60, com diferença igual ou inferior a 1,81%. O JMBO foi superior aos algoritmos PSO, MBO, MBO-FS, GCMBO E IMBO no projeto dos filtros de ordem 20 e 60, apresentando menor erro quadrático médio e menor número de avaliações da função objetivo para convergência em todos os casos.

Conclui-se com esta tese que o algoritmo híbrido JMBO foi capaz de melhorar o desempenho do MBO e de superar suas variantes (GCMBO, IMBO e MBO-FS) considerando as métricas e métodos de avaliação propostos sobre os resultados dos conjuntos de teste CEC 2017 e projeto de filtros digitais FIR de fase linear.

Desta forma, a hipótese sugerida foi confirmada e os objetivos específicos propostos na tese foram realizados. Como principais contribuições desta tese

consideram-se a implementação de um novo algoritmo híbrido, denominado JMBO, a partir do mapeamento sistemático e da revisão sistemática da literatura, a avaliação estatística de desempenho dos algoritmos por diferentes testes de hipóteses não paramétricos e a aplicação do algoritmo proposto no projeto de filtros digitais FIR de fase linear.

Para trabalhos futuros sugere-se:

- a) avaliar o algoritmo JMBO em conjunto de teste com restrições;
- b) obter o valor exato da estatística de Friedman, pois o número de blocos e o número de tratamentos estão próximos do limite mínimo citado na literatura para uso da aproximação do qui-quadrado;
- c) comparar estatisticamente as métricas usadas para avaliar a convergência (ECC) e a complexidade (tempo médio) dos algoritmos;
- d) aplicar testes estatísticos bayesianos para comparação entre algoritmos;
- e) adaptar o algoritmo proposto para o caso mutiobjetivo aplicado ao projeto de filtros digitais.

## REFERÊNCIAS

- AGGARWAL, Apoorva; RAWAT, Tarun K.; UPADHYAY, Dharmendra K. Design of optimal digital FIR filters using evolutionary and swarm optimization techniques. **International Journal of Electronics and Communications**, v. 70, p. 373-385, 2016.
- AKYOL, Sinem; ALATAS, Bilal. Plant intelligence-based metaheuristic optimization algorithms. **Artificial Intelligence Review**, v. 47, n. 4, p. 417-462, 2017.
- AL-DABBAGH, Rawaa D.; NERI, Ferrante; IDRIS, Norisma; BABA, Mohd S. Algorithmic design issues in adaptive differential evolution schemes: review and taxonomy. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 43, p. 284-311, 2018.
- APPOLINÁRIO, Fábio. **Metodologia da ciência: filosofia e prática da pesquisa**. 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2012.
- ARANHA, Claus; TANABE, Ryoji; CHASSAGNE, Romain; FUKUNAGA, Alex. Optimization of oil reservoir models using tuned evolutionary algorithms and adaptive differential evolution. *In: IEEE CONGRESS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION*, 2015, Sendai. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2015. p. 877-884.
- AWAD, Noor H.; ALI, Mostafa Z.; LIANG, J. J.; QU, B. Y.; SUGANTHAN, Ponnuthurai N. **Problem definitions and evaluation criteria for the CEC 2017 special session and competition on single objective real-parameter numerical optimization**: technical report. 2016.
- BÄCK, Thomas; FOGEL, David B.; MICHALEWICZ, Zbigniew. **Handbook of evolutionary computation**. New York: Oxford University Press, 1997.
- BASETTI, Vedik; CHANDEL, Ashwani K.; SUBRAMANYAM, K. B. V. S. R. Power system static state estimation using JADE-adaptive differential evolution technique. **Soft Computing**, v. 22, p. 7157-7176, 2018.
- BEIRANVAND, Vahid; HARE, Warren; LUCET, Yves. Best practices for comparing optimization algorithms. **Optimization and Engineering**, v. 18, n. 4, p. 815-848, 2017.
- BENNIS, Fouad; BHATTACHARJYA, Rajib K. **Nature-inspired methods for metaheuristics optimization**: algorithms and applications in science and engineering. Cham: Springer Nature, 2020.
- BERRAR, Daniel; LOZANO, Jose A. Significance tests or confidence intervals: which are preferable for the comparison of classifiers? **Journal of Experimental & Theoretical Artificial Intelligence**, v. 25, n. 2, p. 189-206, 2013.
- BILAL; PANT, Millie; ZAHEER, Hira; GARCIA-HERNANDEZ, Laura; ABRAHAM, Ajith. Differential evolution: a review of more than two decades of research. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 90, p. 1-24, 2020.

BLUM, Christian; PUCHINGER, Jakob; RAIDL, Günther R.; ROLI, Andrea. Hybrid metaheuristics in combinatorial optimization: a survey. **Applied Soft Computing**, v. 11, p. 4135-4151, 2011.

BLUM, Christian; ROLI, Andrea. Hybrid metaheuristics: an introduction. *In*: BLUM, Christian; AGUILERA, Maria J. B.; ROLI, Andrea; SAMPELS, Michael (ed.). **Hybrid metaheuristics: an emerging approach to optimization**. Berlin: Springer-Verlag, 2008. p. 1-30.

BONYADI, Mohammad R.; MICHALEWICZ, Zbigniew. Particle swarm optimization for single objective continuous space problems: a review. **Evolutionary Computation**, v. 25, n. 1, p. 1-54, 2016.

BOUSSAÏD, Ilhem; LEPAGNOT, Julien; SIARRY, Patrick. A survey on optimization metaheuristics. **Information Sciences**, v. 237, p. 82-117, 2013.

BREST, Janez; BOŠKOVIC, Borko; GREINER, Sašo; ŽUMER, Viljem; MAUCEC, Mirjam S. Performance comparison of self-adaptive and adaptive differential evolution algorithms. **Soft Computing**, v. 11, p. 617-629, 2007.

BURRUS, Charles S.; SOEWITO, Admadji W.; GOPINATH, Ramesh A. Least squared error FIR filter design with transition bands. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v. 40, n. 6, p. 1327-1340, 1992.

CAPES. **Portal de periódicos da CAPES**. Disponível em: <<https://www.periodicos.capes.gov.br>>. Acesso em: 20 jul. 2020.

CARRASCO, Jacinto; GARCÍA, Salvador; RUEDA, M. M.; DAS, Swagatam; HERRERA, Francisco. Recent trends in the use of statistical tests for comparing swarm and evolutionary computing algorithms: practical guidelines and a critical review. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 54, p. 1-20, 2020.

CHAKRABORTI, Subhabrata; GIBBONS, Jean D. **Nonparametric statistical inference**. 5th ed. New York: Chapman & Hall/CRC, 2010.

CHEN, Chi-An; CHIANG, Tsung-Che. Adaptive differential evolution: a visual comparison. *In*: IEEE CONGRESS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION, 2015, Sendai. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2015. p. 401-408.

CHEN, Shifeng; CHEN, Rong; GAO, Jian. A monarch butterfly optimization for the dynamic vehicle routing problem. **Algorithms**, v. 10, n. 3, p. 107-126, 2017.

CHIANG, Tsung-Che; CHEN, Cheng-Nan; LIN, Yu-Chieh. Parameter control mechanisms in differential evolution: a tutorial review and taxonomy. *In*: IEEE SYMPOSIUM ON DIFFERENTIAL EVOLUTION, 2013, Singapore. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2013. p. 1-8.

COHEN, Jacob. **Statistical power analysis for the behavioral sciences**. 2nd ed. New York: Lawrence Erlbaum Associates, 1988.

CORDER, Gregory W.; FOREMAN, Dale I. **Nonparametric statistics: a step-by-step approach**. 2nd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2014.

DAS, Poulami; NASKAR, Sudip K.; SAMANTA, Sourav; PATRA, Sankar N. An approach to optimize FIR filter coefficients using GA, PSO and BAT algorithm and their comparative analysis. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER, ELECTRICAL COMMUNICATION ENGINEERING*, 2016, Kolkata. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2016. p 1-6.

DAS, Swagatam; MULLICK, Sankha S.; SUGANTHAN, P. N. Recent advances in differential evolution: an updated survey. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 27, p. 1-30, 2016.

DAS, Swagatam; SUGANTHAN, Ponnuthurai N. Differential evolution: a survey of the state-of-the-art. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 15, n. 1, p. 4-31, 2011.

DE CASTRO, Leandro N. **Fundamentals of natural computing**: basic concepts, algorithms, and applications. New York: Chapman & Hall/CRC, 2007.

DEL SER, Javier; OSABA, Eneko; MOLINA, Daniel; YANG, Xin-She; SALCEDO-SANZ, Sancho; CAMACHO, Sancho; HERRERA, Francisco. Bio-inspired computation: where we stand and what's next. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 48, p. 220-250, 2019.

DEMSAR, Janez. Statistical comparisons of classifiers over multiple data sets. **Journal of Machine Learning Research**, v. 7, p. 1-30, 2006.

DERRAC, Joaquín; GARCIA, Salvador; MOLINA, Daniel; HERRERA, Francisco. A practical tutorial on the use of nonparametric statistical tests as a methodology for comparing evolutionary and swarm intelligence algorithms. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 1, n. 1, p. 3-18, 2011.

DINIZ, Paulo S. R.; SILVA, Eduardo A. B. da; NETTO, Sergio L. **Digital signal processing system analysis and design**. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2010.

DOKEROGLU, Tansel; SEVINC, Ender; KUCUKYILMAZ, Tayfun; COSAR, Ahmet. A survey on new generation metaheuristic algorithms. **Computers & Industrial Engineering**, v. 137, p. 1-29, 2019.

DRAGOI, Elena-Niculina; DAFINESCU, Vlad. Parameter control and hybridization techniques in differential evolution: a survey. **Artificial Intelligence Review**, v. 45, n. 4, p. 447-470, 2016.

DU, Ke-Lin; SWAMY, M. N. S. **Search and optimization by metaheuristics**: techniques and algorithms inspired by nature. Cham: Birkhäuser, 2016.

DWIVEDI, Atul K.; GHOSH, Subhojit; LONDHE, Narendra D. Review and analysis of evolutionary optimization-based techniques for FIR filter design. **Circuits, Systems, and Signal Processing**, v. 37, p. 4409-4430, 2018.

EHTERAM, Mohammad; KARAMI, Hojat; MOUSAVI, Sayed-Farhad; FARZIN, Saeed; KISI, Ozgur. Optimization of energy management and conversion in the

multi-reservoir systems based on evolutionary algorithms. **Journal of Cleaner Production**, v. 168, p. 1132-1142, 2017.

EIBEN, Aguston E.; MICHALEWICZ, Zbigniew; SCHOENAUER, Marc; SMITH, Jim E. Parameter control in evolutionary algorithms. *In*: LOBO, Fernando G.; LIMA, Cláudio F.; MICHALEWICZ, Zbigniew (ed.). **Parameter setting in evolutionary algorithms**. Berlin: Springer-Verlag, 2007. p. 19-46.

EIBEN, Aguston E.; SMITH, Jim E. **Introduction to evolutionary computing**. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

ENGELBRECHT, Andries P. **Computational intelligence: an introduction**. 2nd ed. West Sussex: John Wiley & Sons, 2007.

FAN, Qinqin, YAN, Xuefeng. Differential evolution algorithm with self-adaptive strategy and control parameters for P-xylene oxidation process optimization. **Soft Computing**, v. 19, p. 1363-1391, 2015.

FARIS, Hossam; ALJARAHA, Ibrahim; MIRJALILI, Seyedali. Improved monarch butterfly optimization for unconstrained global search and neural network training. **Applied Intelligence**, v. 48, n. 2, p. 445-464, 2017.

FEITOSA NETO, Antonino Alves. **Meta-heurísticas de otimização tradicionais e híbridas utilizadas para construção de comitês de classificação**. 2016. 196 f. Tese (Doutorado) - Programa de Pós-Graduação em Sistema e Computação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016.

FISTER, Iztok; STRNAD, Damjan; YANG, Xin-She; FISTER JR, Iztok. Adaptation and hybridization in nature-inspired algorithms. *In*: FISTER, Iztok; FISTER JR, Iztok (ed.). **Adaptation and hybridization in computational intelligence, adaptation, learning, and optimization**. Cham: Springer International, 2015. p. 3-50.

GARCIA, Salvador; FERNÁNDEZ, Alberto; LUENGO, Julián; HERRERA, Francisco. Advanced nonparametric tests for multiple comparisons in the design of experiments in computational intelligence and data mining: experimental analysis of power. **Information Sciences**, v. 180, n. 10, p. 2044-2064, 2010.

GARCIA, Salvador; HERRERA, Francisco. An extension on “statistical comparisons of classifiers over multiple data sets” for all pairwise comparisons. **Journal of Machine Learning Research**, v. 9, p. 2677-2694, 2008.

GARCIA, Salvador; MOLINA, Daniel; LOZANO, Manuel; HERRERA, Francisco. A study on the use of non-parametric tests for analyzing the evolutionary algorithms' behaviour: a case study on the CEC'2005 special session on real parameter optimization. **Journal of Heuristics**, v. 15, n. 6, p. 617-644, 2009.

GIL, Antônio C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GLOVER, Fred. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. **Computers & Operations Research**, v. 13, n. 5, p. 533-549, 1986.

GLOVER, Fred; KOCHENBERGER, Gary A. **Handbook of metaheuristics**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

GOTMARE, Akhilesh; BHATTACHARJEE, Sankha S.; PATIDAR, Rohan; GEORGE, Nithin V. Swarm and evolutionary computing algorithms for system identification and filter design: a comprehensive review. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 32, p. 68-84, 2017.

GOUDOS, Sotirios K.; TSOULOS, George V.; ATHANASIADOU, Georgia; BATISTATOS, Michael; ZARBOUTI, Dimitra; PSANNIS, Kostas E. Artificial neural network optimal modelling and optimization of UAV measurements for mobile communications using the L-SHADE algorithm. **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, v. 67, n. 6, p. 1-10, 2019.

HAMDI, Mounira; IDOUMGHAR, Lhassane; CHAOUI, Mondher; KACHOURI, Abdennaceur. Optimal economic dispatch with valve-point effect and multiple fuel option via L-SHADE algorithm. *In*: INTERNATIONAL MULTI-CONFERENCE ON SYSTEMS, SIGNALS & DEVICES, 15., 2018, Hammamet. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2018. p. 537-542.

HO, Yu-Chi; PEPYNE, Daniel L. Simple explanation of the no-free-lunch theorem and its implications. **Journal of Optimization Theory and Applications**, v. 115, n. 3, p. 549-570, 2002.

HOLLANDER, Myles; WOLFE, Douglas A.; CHICKEN, Eric. **Nonparametric statistical methods**. 3rd ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2014.

HUSSAIN, Kashif; SALLEH, Mohd N. M.; CHENG, Shi; SHI, Yuhui. Metaheuristic research: a comprehensive survey. **Artificial Intelligence Review**, v. 52, p. 2191-2233, 2019.

INGLE, Vinay K.; PROAKIS, John G. **Digital signal processing using MATLAB®**. 3rd ed. Stamford: Cengage Learning, 2016.

IZMAILOV, Alexey; SOLODOV, Mikhail. **Otimização: condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade**. v. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

JAMIL, Momin; YANG, Xin-She. A literature survey of benchmark functions for global optimisation problems. **International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation**, v. 4, n. 2, p. 150-194, 2013.

JOURDAN, Laëtitia; BASSEUR, Matthieu; TALBI, El-Ghazali. Hybridizing exact methods and metaheuristics: a taxonomy. **European Journal of Operational Research**, v. 199, p. 620-629, 2009.

KAR, Arpan K. Bio inspired computing – a review of algorithms and scope of applications. **Expert Systems with Applications**, v. 59, p. 20-32, 2016.

KAR, Rajib; MANDAL, Durbadal; BARDHAN, Soumi; GHOSHAL, Sakti P. Optimization of linear phase fir band pass filter using particle swarm optimization with constriction factor and inertia weight approach. *In*: IEEE SYMPOSIUM ON

INDUSTRIAL ELECTRONICS AND APPLICATIONS, 2011, Langkawi. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2011. p. 326-331.

KELLER, James M.; LIU, Derong; FOGEL, David B. **Fundamentals of computational intelligence**: neural networks, fuzzy, systems, and evolutionary computation. Hoboken: John Wiley & Sons, 2016.

KENNEDY, James; EBERHART, Russell C. Particle swarm optimization. *In*: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON NEURAL NETWORKS, 1995, Perth. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 1995. p. 1942-1948.

KENNEDY, James; EBERHART, Russell C.; SHI, Yuhui. **Swarm Intelligence**. San Francisco: Morgan Kaufmann, 2001.

KHICHANE, Madjid; ALBERT, Patrick; SOLNON, Christine. Strong combination of ant colony optimization with constraint programming optimization. *In*: LODI, Andrea; MILANO, Michela; TOTH, Paolo (ed.). **Integration of AI and OR techniques in constraint programming for combinatorial optimization problems**. Berlin: Springer-Verlag, 2010. p. 232-245.

KIM, Minhee; CHAE, Junjae. Monarch butterfly optimization for facility layout design based on a single loop material handling path. **Mathematics**, v. 7, n. 2, p. 154-176, 2019.

KITCHENHAM, Barbara; BRERETON, Pearl. A systematic review of systematic review process research in software engineering. **Information and Software Technology**, v. 55, n. 12, p. 2049-2075, 2013.

KITCHENHAM, Barbara; CHARTERS, Stuart. **Guidelines for performing systematic literature reviews in software engineering**: technical report. 2007.

KLEIN, Carlos E. **Novas metaheurísticas bioinspiradas aplicadas em otimização contínua mono-objetivo**. 2016. 239 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2016.

KUMARI, Neelam; JAGLAN, Priyanka. Design of FIR filter using PSO: a review. **International Journal of Engineering Sciences & Research Technology**, v. 6, n. 9, p. 282-286, 2017.

LATHI, Bhagawandas P.; GREEN, Roger. **Essentials of digital signal processing**. New York: Cambridge University Press, 2014.

LATORRE, Antonio; MOLINA, Daniel; OSABA, Eneko; DEL SER, Javier; HERRERA, Francisco. Fairness in bio-inspired optimization research: a prescription of methodological guidelines for comparing meta-heuristics. **Neural and Evolutionary Computing**, p. 1-43, 2020.

LI, Xiangping; DAI, Guangming; WANG, Maocai; LIAO, Zuowen; MA, Ke. A two-stage ensemble of differential evolution variants for numerical optimization. **IEEE Access**, v. 7, p. 56504-56519, 2019.

LI, Yanyan; WANG, Qing; CHEN, Jianping; XU, Liming; SONG, Shengyuan. K-means algorithm based on particle swarm optimization for the identification of rock discontinuity sets. **Rock Mechanics and Rock Engineering**, v. 48, p. 375-385, 2015.

LINDEN, Ricardo. **Algoritmos genéticos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Brasport, 2008.

LIU, Yiqi. Adaptive just-in-time and relevant vector machine based soft-sensors with adaptive differential evolution algorithms for parameter optimization. **Chemical Engineering Science**, v. 172, p. 571-584, 2017.

LIU, Zhi-Zhong; WANG, Yong; YANG, Shengxiang; CAI, Zixing. Differential evolution with a two-stage optimization mechanism for numerical optimization. *In: IEEE CONGRESS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION*, 2016, Vancouver. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2016. p. 3170-3177.

LONES, Michael A. Mitigating metaphors: a comprehensible guide to recent nature-inspired algorithms. **SN Computer Science**, v. 1, p. 1-49, 2020.

LOZANO, Manuel; GARCÍA-MARTÍNEZ, Carlos. Hybrid metaheuristics with evolutionary algorithms specializing in intensification and diversification: overview and progress report. **Computers & Operations Research**, v. 37, p. 481-497, 2010.

LUKE, Sean. **Essentials of metaheuristics**. 2nd ed. edition. 2015. Lulu. Disponível em: <<https://cs.gmu.edu/~sean/book/metaheuristics/Essentials.pdf>>. Acesso em: 10 fev. 2020.

MAHDAVI, Sedigheh; SHIRI, Mohammad E.; RAHNAMAYAN, Shahryar. Metaheuristics in large-scale global continues optimization: a survey. **Information Sciences**, v. 295, p. 407-428, 2015.

MANDAL, Sangeeta; MALLICK, Prabisha; MANDAL, Durbadal; KAR, Rajib; GHOSHAL, Sakti P. Optimal FIR band pass filter design using novel particle swarm optimization algorithm. *In: IEEE SYMPOSIUM ON HUMANITIES, SCIENCE AND ENGINEERING RESEARCH*, 2012, Kuala Lumpur. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2012. p. 141-146.

MARINI, Federico; WALCZAK, Beata. Particle swarm optimization (PSO): a tutorial. **Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems**, v. 149, p. 153-165, 2015.

MASHWANI, Wali K. Enhanced versions of differential evolution: state-of-the-art survey. **International Journal of Computing Science and Mathematics**, v. 5, n. 2, p. 107-126, 2014.

MAVROVOUNIOTIS, Michalis; LIB, Changhe; YANG, Shengxiang. A survey of swarm intelligence for dynamic optimization: algorithms and applications. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 33, p. 1-17, 2017.

MILLONAS, Mark M. Swarms, phase transitions, and collective intelligence (Paper 1); and A nonequilibrium statistical field theory of swarms and other spatially extended complex systems (Paper 2), p. 1-44, 1993. Disponível em:

<<https://www.santafe.edu/research/results/working-papers/swarms-phase-transitions-and-collective-intelligen>>. Acesso em: 10 jan. 2020.

MIRJALILI, Seyedali; MIRJALILI, Seyed M.; HATAMLOU, Abdolreza. Multi-verse optimizer: a nature-inspired algorithm for global optimization. **Neural Computing & Applications**, v. 27, n. 2, p. 495-513, 2016.

MITRA, Sanjit K. **Digital signal processing**: a computer-based approach. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 2001.

MOHAMED, Ali W.; HADI, Anas A.; JAMBI, Kamal M. Novel mutation strategy for enhancing SHADE and L-SHADE algorithms for global numerical optimization. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 50, p. 100455, 2019.

MOLINA, Daniel; POYATOS, Javier; DEL SER, Javier; GARCIA, Salvador; HUSSAIN, Amir; HERRERA, Francisco. Comprehensive taxonomies of nature- and bio-inspired optimization: inspiration versus algorithmic behavior, critical analysis recommendations. **Cognitive Computation**, v. 12, p. 897-939, 2020.

MONARCH WATCH. **Education, Conservation, Research**. Disponível em: <<https://monarchwatch.org>>. Acesso em: 10 fev. 2020.

MONTGOMERY, Douglas C.; RUNGER, George C. **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

MORALES-CASTAÑEDA, Bernardo; ZALDÍVAR, Daniel; CUEVAS, Erik; FAUSTO, Fernando; RODRÍGUEZ, Alma. A better balance in metaheuristic algorithms: does it exist? **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 54, p. 1-23, 2020.

MORETTIN, Luiz Gonzaga. **Estatística básica**: probabilidade e inferência. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

NESMACHNOW, Sergio. An overview of metaheuristics: accurate and efficient methods for optimisation. **International Journal of Metaheuristics**, v. 3, n. 4, p. 320-347, 2014.

OLIVEIRA, Silvio L. **Tratado de metodologia científica**: projetos de pesquisas, TGI, TCC, monografias, dissertações e teses. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1999.

PARKS, Thomas. W; BURRUS, Charles. S. **Digital filter design**. New York: John Wiley & Sons, 1987.

PEÑUÑURI, Francisco; CAB, Cesar; CARVENTE, Osvaldo; ZAMBRANO-ARJONA, Miguel A.; TAPIA, Jorge A. A study of the classical differential evolution control parameters. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 26, p. 86-96, 2016.

PETERSEN, Kai; VAKKALANKA, Sairam; KUZNIARZ, Ludwik. Guidelines for conducting systematic mapping studies in software engineering: an update. **Information and Software Technology**, v. 64, p. 1-18, 2015.

PHAM, Duc T.; CASTELLANI, Marco. Benchmarking and comparison of nature-inspired population-based continuous optimisation algorithms. **Soft Computing**, v. 18, p. 871-903, 2014.

PHAM, Hoang A. Truss optimization with frequency constraints using enhanced differential evolution based on adaptive directional mutation and nearest neighbor comparison. **Advances in Engineering Software**, v. 102, p. 142-154, 2016.

PIOTROWSKI, Adam P. Review of differential evolution population size. **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 32, p. 1-24, 2017.

PIOTROWSKI, Adam P.; NAPIORKOWSKI, Jaroslaw J. Step-by-step improvement of JADE and SHADE-based algorithms: success or failure? **Swarm and Evolutionary Computation**, v. 43, p. 88-108, 2018.

PIOTROWSKI, Adam P.; NAPIORKOWSKI, Maciej J.; NAPIORKOWSKI, Jaroslaw J.; ROWINSKI, Pawel M. Swarm intelligence and evolutionary algorithms: performance versus speed. **Information Sciences**, v. 384, p. 34-85, 2017.

PRICE, Kenneth V. How symmetry constrains evolutionary optimizers. *In: IEEE CONGRESS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION*, 2017, San Sebastian. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2017. p. 1712-1719.

PRICE, Kenneth V.; STORN, Rainer M.; LAMPINEN, Jouni A. **Differential evolution: a practical approach to global optimization**. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

QIN, Alex K.; SUGANTHAN, Ponnuthurai N. Self-adaptive differential evolution algorithm for numerical optimization. *In: IEEE CONGRESS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION*, 2005, Edinburgh. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2005. p. 1785-1791.

QING, Anyong. **Differential evolution - fundamentals and applications in electrical engineering differential evolution**. Singapore: John Wiley & Sons, 2009.

RAIDL, Günther R. A unified view on hybrid metaheuristics. *In: ALMEIDA, Francisco et al. (ed.). Hybrid metaheuristics*. Berlin: Springer-Verlag, 2006. p. 1-12.

RAJPUROHIT, Jitendra; SHARMA, Tarun K.; ABRAHAM, Ajith; VAISHALI. Glossary of metaheuristic algorithms. **International Journal of Computer Information Systems and Industrial Management Applications**, v. 9, p. 181-205, 2017.

RAJU, Maraboina; GUPTA, Munish K.; BHANOT, Neeraj; SHARMA, Vishal S. A hybrid PSO-BFO evolutionary algorithm for optimization of fused deposition modelling process parameters. **Journal of Intelligent Manufacturing**, v. 30, p. 2743-2758, 2019.

RAJU, Rija; KWAN, Hon K.; JIANG, Aimin. Sparse FIR filter design using artificial bee colony algorithm. *In: IEEE INTERNATIONAL MIDWEST SYMPOSIUM ON CIRCUITS AND SYSTEMS*, 61., 2018, Windsor. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2018. p. 956-959.

RAO, Singiresu S. **Engineering optimization: theory and practice**. 4th ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009.

RAVI, Renjith V.; SUBRAMANIAM, Kamalraj; ROSHINI, T. V.; MUTHUSAMY, Sundar P. B.; PRASANNA VENKATESAN, G. K. D. Optimization algorithms, an effective tool for the design of digital filters; a review. **Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing**, p. 1-17, 2019.

RODRIGUEZ, Francisco J.; GARCÍA-MARTÍNEZ, Carlos; LOZANO, Manuel. Hybrid metaheuristics based on evolutionary algorithms and simulated annealing: taxonomy, comparison, and synergy test. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 16, n. 6, p. 787-800, 2012.

RÖNKKÖNEN, Jani; LI, Xiaodong; KYRKI, Ville; LAMPINEN, Jouni. A framework for generating tunable test functions for multimodal optimization. **Soft Computing**, v. 15, n. 9, p. 1689-1706, 2011.

SAHA, Suman K.; KAR, Rajid; MANDAL, Durbadal; GHOSHAL, Sakti P. Seeker optimisation algorithm: application to the design of linear phase finite impulse response filter. **IET Signal Processing**, v. 6, n. 8, p. 763-771, 2012.

SALCEDO-SANZ, Sancho. Modern meta-heuristics based on nonlinear physics processes: a review of models and design procedures. **Physics Reports**, v. 655, p. 1-70, 2016.

SAMBARIYA, Dhanesh K.; GUPTA, Tripti. Optimal design of pid controller for an AVR system using monarch butterfly optimization. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATION, COMMUNICATION, INSTRUMENTATION AND CONTROL*, 2017, Indore. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2017. p. 1-6.

SARANGI, Shubhendu K.; PANDA, Rutuparna; DAS, Pradeep K.; ABRAHAM, Ajith. Design of optimal high pass and band stop FIR filters using adaptive Cuckoo search algorithm. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, v. 70, p. 67-80, 2018.

SCHILLING, Robert J.; HARRIS, Sandra L. **Fundamentals of digital signal processing using MATLAB**. Stamford: Cengage Learning, 2012.

SENGUPTA, Saptarshi; BASAK, Sanchita; PETERS II, Richard A. Particle swarm optimization: a survey of historical and recent developments with hybridization perspectives. **Machine Learning and Knowledge Extraction**, v. 1, p. 157-191, 2018.

SEVERINO, Alcemy G. V.; LINHARES, Leandro L. S.; ARAÚJO, Fábio M. U. de. Optimal design of digital low pass finite impulse response filter using particle swarm optimization and bat algorithm. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON INFORMATICS IN CONTROL, AUTOMATION AND ROBOTICS*, 12., 2015, Colmar. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2015. p. 207-214.

SHAFIGH, Farhad; DEFERSHA, Fantahun M.; MOUSSA, Soha E. A linear programming embedded simulated annealing in the design of distributed layout with

production planning and systems reconfiguration. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 88, p. 1119-1140, 2017.

SHARMA, Shekhar; ARYA, L. D.; KATIYAL, Sumant. Design of linear-phase digital FIR filter using differential evolution optimization with ripple constraint. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTING FOR SUSTAINABLE GLOBAL DEVELOPMENT, 2014, New Delhi. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2014. p. 474-480.

SHEKIN, David J. **Handbook of parametric and nonparametric statistical procedures**. 5th ed. New York: Chapman & Hall/CRC, 2011.

SHI, Yuhui; EBERHART, Russell. A modified particle swarm optimizer. *In*: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON EVOLUTIONARY COMPUTATION PROCEEDINGS, 1998, Anchorage. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 1998. p. 69-73.

SHOKRI-GHALEH, Hamid; ALFI, Alireza. A comparison between optimization algorithms applied to synchronization of bilateral teleoperation systems against time delay and modeling uncertainties. **Applied Soft Computing**, v. 24, p. 447-456, 2014.

SILVA, Edna L.; MENEZES, Estera M. **Metodologia da pesquisa e elaboração de dissertação**. 4. ed. Florianópolis: Laboratório de Ensino a Distância da UFSC, 2005.

SIMON, Dan. **Evolutionary optimization algorithms**: biologically-inspired and population-based approaches to computer intelligence. Hoboken: John Wiley & Sons, 2013.

SINGH, Neelam; POTNIS, Anjali. A review of different optimization algorithms for a linear phase FIR filter. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON RECENT INNOVATIONS IN SIGNAL PROCESSING AND EMBEDDED SYSTEMS, 2017, Bhopal. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2017. p. 44-48.

SLOWIK, Adam; KWASNICKA, Halina. Nature inspired methods and their industry applications - swarm intelligence algorithms. **IEEE Transactions on Industrial Informatics**, v. 14, n. 3, p. 1004-1015, 2018.

SLOWIK, Adam; KWASNICKA, Halina. Evolutionary algorithms and their applications to engineering problems. **Neural Computing and Applications**, v. 32, p. 12363-12379, 2020.

SOLTANI, Parham; HADAVANDI, Esmail. A monarch butterfly optimization-based neural network simulator for prediction of siro-spun yarn tenacity. **Soft Computing**, v. 23, p. 10521-10535, 2019.

STORN, Rainer M. Differential evolution research - trends and open questions. *In*: CHAKRABORTY, Uday K. (ed.). **Advances in differential evolution**. Berlin: Springer-Verlag, 2008. p. 1-31.

STORN, Rainer M.; PRICE, Kenneth V. Differential evolution – a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. **Journal of Global Optimization**, v. 11, p. 341-359, 1997.

STRUMBERGER, Ivana; SARAC, Marko; MARKOVIC, Dusan; BACANIN, Nebojsa. Hybridized monarch butterfly algorithm for global optimization problems. **International Journal of Computers**, v. 3, p. 63-68, 2018b.

STRUMBERGER, Ivana; TUBA, Eva; BACANIN, Nebojsa; BEKO, Marko; TUBA, Milan. Monarch butterfly optimization algorithm for localization in wireless sensor networks. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE RADIOELEKTRONIKA*, 28., 2018, Prague. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2018a. p. 1-6.

TALBI, El-Ghazali. A taxonomy of hybrid metaheuristics. **Journal of Heuristics**, v. 8, n. 5, p. 541-564, 2002.

TALBI, El-Ghazali. **Metaheuristics: from design to implementation**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2009.

TALBI, El-Ghazali. Combining metaheuristics with mathematical programming, constraint programming and machine learning. **Annals of Operations Research**, v. 240, n. 1, p. 171-215, 2016.

TANABE, Ryoji; FUKUNAGA, Alex S. Success-history based parameter adaptation for differential evolution. *In: IEEE CONGRESS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION*, 2013, Cancun. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2013a. p. 71-78.

TANABE, Ryoji; FUKUNAGA, Alex S. Evaluating the performance of SHADE on CEC 2013 benchmark problems. *In: IEEE CONGRESS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION*, 2013, Cancun. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2013b. p. 1952-1959.

TANABE, Ryoji; FUKUNAGA, Alex S. Improving the search performance of shade using linear population size reduction. *In: IEEE CONGRESS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION*, 2014, Beijing. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2014. p. 1658-1665.

TOMCZAK, Maciej; TOMCZAK, Ewa. The need to report effect size estimates revisited. An overview of some recommended measures of effect size. **Trends in Sport Sciences**, v. 1, n. 21, p. 19-25, 2014.

TRAWINSKI, Bogdan; SMŹTEK, Magdalena; TELEC, Zbigniew; LASOTA, Tadeusz. Nonparametric statistical analysis for multiple comparison of machine learning regression algorithms. **International Journal of Applied Mathematics and Computer Science**, v. 22, n. 4, p. 867-881, 2012.

VALADI, Jayaraman; SIARRY, Patrick. **Applications of metaheuristics in process engineering**. Cham: Springer International, 2014.

VAN ECK, Nees J.; WALTMAN, Ludo. Software survey: VOSviewer, a computer program for bibliometric mapping. **Scientometrics**, v. 84, p. 523-538, 2010.

VASCONCELOS SEGUNDO, Emerson H.; AMOROSO, Anderson L.; MARIANI, Viviana C.; COELHO, Leandro dos S. A wind driven approach using Lévy flights for global continuous optimization. *In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON*

ARTIFICIAL INTELLIGENCE, MODELLING AND SIMULATION, 2., 2014, Madrid. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2014. p. 75-80.

VASCONCELOS SEGUNDO, Emerson H.; AMOROSO, Anderson L.; MARIANI, Viviana C.; COELHO, Leandro dos S. Economic optimization design for shell-and-tube heat exchangers by a Tsallis differential evolution. **Applied Thermal Engineering**, v. 111, p. 143-151, 2017a.

VASCONCELOS SEGUNDO, Emerson H.; AMOROSO, Anderson L.; MARIANI, Viviana C.; COELHO, Leandro dos S. Thermodynamic optimization design for plate-fin heat exchangers by Tsallis JADE. **International Journal of Thermal Sciences**, v. 113, p. 136-144, 2017b.

VASUNDHARA; MANDAL, Durbadal; GHOSHAL, Sakti P.; KAR, Rajib. Digital FIR filter design using hybrid random particle swarm optimization with differential evolution. **International Journal of Computational Intelligence Systems**, v. 6, n. 5, p. 911-927, 2013.

WANG, Gai-Ge; DEB, Suash; CUI, Zhihua. Monarch butterfly optimization. **Neural Computing and Applications**, v. 310, n. 7, p. 1995-2014, 2015.

WANG, Gai-Ge; DEB, Suash; ZHAO, Xinchao; CUI, Zhihua. A new monarch butterfly optimization with an improved crossover operator. **Operational Research International Journal**, v. 18, p. 731-755, 2016.

WANG, Gai-Ge; ZHAO, Xinchao; DEB, Suash. A novel monarch butterfly optimization with greedy strategy and self-adaptive crossover operator. *In*: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SOFT COMPUTING AND MACHINE INTELLIGENCE, 2., 2015, Hong Kong. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2015. p. 45-50.

WANG, Yong; CAI, Zixing; ZHANG, Qingfu. Differential evolution with composite trial vector generation strategies and control parameters. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 15, n. 1, p. 55-66, 2011.

WEN, Xiaohao; ZHOU, Jianzhong; HE, Zhongzheng; WANG, Chao. Long-term scheduling of large-scale cascade hydropower stations using improved differential evolution algorithm. **Water**, v. 10, p. 383-401, 2018.

WOLPERT, David H.; MACREADY, William G. No free lunch theorems for optimization. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 1, n. 1, p. 67-82, 1997.

XING, Bo; GAO, Wen-Jing. **Innovative computational intelligence: a rough guide to 134 clever algorithms**. Cham: Springer International, 2014.

YADAV, Vivek; GHOSHAL, Sakti P. Optimal power flow for IEEE 30 and 118-bus systems using monarch butterfly optimization. *In*: TECHNOLOGIES FOR SMART-CITY ENERGY SECURITY AND POWER, 2018, Bhubaneswar. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2018. p. 1-6.

YANG, Xin-She. **Nature-inspired metaheuristic algorithms**. 2nd ed. Frome: Luniver, 2010a.

YANG, Xin-She. Firefly algorithm, stochastic test functions and design optimization. **International Journal of Bio-Inspired Computation**, v. 2, n. 2, p. 78-84, 2010b.

YANG, Xin-She. **Engineering optimization**: an introduction with metaheuristic applications. Hoboken: John Wiley & Sons, 2010c.

YI, Jiao-Hong; WANG, Jian Wang; WANG, Gai-Ge. Using monarch butterfly optimization to solve the emergency vehicle routing problem with relief materials in sudden disasters. **Open Geosciences**, v. 11, n. 1, p. 391-413, 2019.

ZAR, Jerrold H. **Biostatistical analysis**. 5th ed. London: Pearson Education, 2014.

ZHANG, Jingqiao; SANDERSON, Arthur C. JADE: self-adaptive differential evolution with fast and reliable convergence performance. *In*: IEEE CONGRESS ON EVOLUTIONARY COMPUTATION, 2007, Singapore. **Proceedings** [...]. Danvers: IEEE, 2007. p. 2251-2258.

ZHANG, Jingqiao; SANDERSON, Arthur C. JADE: adaptive differential evolution with optional external archive. **IEEE Transactions on Evolutionary Computation**, v. 13, n. 5, p. 945-958, 2009.

ZHANG, Yudong; WANG, Shuihua; JI, Genlin. A comprehensive survey on particle swarm optimization algorithm and its applications. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2015, p. 1-38, 2015.

## APÊNDICE A – TABELAS

Neste Apêndice são apresentadas as tabelas das medidas descritivas calculadas para os resultados das 51 execuções de todos os algoritmos aplicados às 29 funções do CEC 2017 para as dimensões 30 e 100.

A Tabela 27 até a Tabela 38 apresentam o valor máximo (Max), o valor mínimo (Min), o quartil superior ou terceiro quartil ( $Q_3$ ), a mediana (Md), o quartil inferior ou primeiro quartil ( $Q_1$ ) e o desvio absoluto mediano (MAD).

Os valores do RMSE calculados sobre o conjunto de teste estão disponíveis da Tabela 39 à Tabela 42.

Tabela 27 – Medidas descritivas do grupo SIM unimultimodais com  $D = 30$ 

		PSO	MBO	MBO-FS	GCMBO	IMBO	JMBO(1)	JMBO(2)
<b>F01</b>	Max	2,403E+09	7,575E+10	9,090E+10	5,168E+10	1,789E+04	1,224E+02	1,001E+02
	Q <sub>3</sub>	9,340E+05	5,172E+10	7,306E+10	2,974E+10	4,568E+03	1,001E+02	1,000E+02
	Md	5,231E+05	4,043E+10	5,684E+10	2,260E+10	1,274E+03	1,000E+02	1,000E+02
	Q <sub>1</sub>	4,318E+05	3,235E+10	4,517E+10	1,829E+10	4,627E+02	1,000E+02	1,000E+02
	Min	2,687E+05	1,951E+10	3,204E+10	1,192E+10	1,009E+02	1,000E+02	1,000E+02
	MAD	1,410E+05	8,390E+09	1,463E+10	5,559E+09	1,168E+03	4,022E-02	6,804E-04
<b>F03</b>	Max	3,999E+02	2,074E+05	1,723E+05	1,911E+05	2,611E+04	3,000E+02	3,000E+02
	Q <sub>3</sub>	3,348E+02	1,609E+05	1,538E+05	1,356E+05	2,226E+04	3,000E+02	3,000E+02
	Md	3,280E+02	1,382E+05	1,373E+05	1,064E+05	1,767E+04	3,000E+02	3,000E+02
	Q <sub>1</sub>	3,230E+02	1,055E+05	1,169E+05	8,940E+04	1,407E+04	3,000E+02	3,000E+02
	Min	3,139E+02	7,027E+04	7,025E+04	5,364E+04	3,681E+03	3,000E+02	3,000E+02
	MAD	5,041E+00	2,595E+04	1,850E+04	1,893E+04	4,530E+03	0,000E+00	0,000E+00
<b>F04</b>	Max	9,200E+02	2,824E+04	2,097E+04	6,749E+03	6,126E+02	4,719E+02	4,719E+02
	Q <sub>3</sub>	5,912E+02	9,757E+03	1,598E+04	3,982E+03	5,354E+02	4,042E+02	4,627E+02
	Md	5,394E+02	6,495E+03	1,223E+04	3,065E+03	5,120E+02	4,040E+02	4,586E+02
	Q <sub>1</sub>	4,932E+02	5,090E+03	8,954E+03	2,418E+03	4,928E+02	4,002E+02	4,040E+02
	Min	4,489E+02	3,462E+03	6,508E+03	1,507E+03	4,441E+02	4,000E+02	4,000E+02
	MAD	4,638E+01	1,867E+03	3,601E+03	7,213E+02	2,059E+01	2,313E-01	5,556E+00
<b>F05</b>	Max	6,835E+02	1,091E+03	1,049E+03	9,381E+02	9,378E+02	5,836E+02	5,674E+02
	Q <sub>3</sub>	6,325E+02	9,369E+02	9,862E+02	8,611E+02	8,025E+02	5,597E+02	5,485E+02
	Md	6,079E+02	8,755E+02	9,676E+02	7,980E+02	7,511E+02	5,497E+02	5,418E+02
	Q <sub>1</sub>	5,887E+02	8,419E+02	8,895E+02	7,555E+02	7,199E+02	5,408E+02	5,333E+02
	Min	5,621E+02	7,877E+02	8,523E+02	7,180E+02	6,153E+02	5,209E+02	5,199E+02
	MAD	2,088E+01	4,012E+01	4,081E+01	4,962E+01	4,540E+01	9,950E+00	6,965E+00
<b>F06</b>	Max	6,528E+02	7,237E+02	7,067E+02	6,884E+02	6,733E+02	6,014E+02	6,014E+02
	Q <sub>3</sub>	6,280E+02	7,011E+02	6,990E+02	6,641E+02	6,658E+02	6,005E+02	6,001E+02
	Md	6,176E+02	6,807E+02	6,912E+02	6,525E+02	6,597E+02	6,002E+02	6,000E+02
	Q <sub>1</sub>	6,115E+02	6,731E+02	6,832E+02	6,451E+02	6,566E+02	6,000E+02	6,000E+02
	Min	6,030E+02	6,504E+02	6,648E+02	6,333E+02	6,472E+02	6,000E+02	6,000E+02
	MAD	6,531E+00	1,377E+01	7,866E+00	9,082E+00	4,312E+00	1,428E-01	5,861E-03
<b>F07</b>	Max	8,828E+02	2,625E+03	3,179E+03	2,219E+03	2,989E+03	8,533E+02	8,093E+02
	Q <sub>3</sub>	8,343E+02	1,799E+03	2,647E+03	1,520E+03	2,465E+03	8,141E+02	7,837E+02
	Md	8,159E+02	1,537E+03	2,167E+03	1,271E+03	2,280E+03	8,017E+02	7,775E+02
	Q <sub>1</sub>	7,949E+02	1,325E+03	1,647E+03	1,155E+03	2,145E+03	7,843E+02	7,709E+02
	Min	7,662E+02	1,173E+03	1,312E+03	1,026E+03	1,885E+03	7,679E+02	7,585E+02
	MAD	1,973E+01	2,392E+02	4,988E+02	1,403E+02	1,504E+02	1,332E+01	6,335E+00
<b>F08</b>	Max	9,626E+02	1,298E+03	1,323E+03	1,249E+03	1,185E+03	8,915E+02	8,786E+02
	Q <sub>3</sub>	9,234E+02	1,237E+03	1,268E+03	1,153E+03	1,065E+03	8,587E+02	8,545E+02
	Md	9,070E+02	1,179E+03	1,225E+03	1,102E+03	1,043E+03	8,468E+02	8,458E+02
	Q <sub>1</sub>	8,899E+02	1,110E+03	1,179E+03	1,046E+03	1,009E+03	8,418E+02	8,368E+02
	Min	8,582E+02	1,038E+03	1,088E+03	9,727E+02	9,313E+02	8,229E+02	8,219E+02
	MAD	1,661E+01	6,039E+01	4,514E+01	5,443E+01	2,985E+01	6,965E+00	8,955E+00
<b>F09</b>	Max	3,969E+03	2,600E+04	2,530E+04	1,849E+04	1,515E+04	1,588E+03	9,686E+02
	Q <sub>3</sub>	1,651E+03	1,834E+04	1,895E+04	1,176E+04	9,545E+03	9,866E+02	9,166E+02
	Md	1,079E+03	1,575E+04	1,634E+04	8,328E+03	8,035E+03	9,337E+02	9,093E+02
	Q <sub>1</sub>	9,792E+02	1,017E+04	1,134E+04	6,087E+03	6,826E+03	9,159E+02	9,029E+02
	Min	9,088E+02	6,568E+03	7,736E+03	3,647E+03	4,097E+03	9,031E+02	9,006E+02
	MAD	1,541E+02	4,816E+03	3,645E+03	2,530E+03	1,440E+03	2,309E+01	6,803E+00
<b>F10</b>	Max	6,016E+03	9,108E+03	8,785E+03	8,749E+03	7,245E+03	5,801E+03	5,271E+03
	Q <sub>3</sub>	4,991E+03	8,300E+03	8,451E+03	8,046E+03	5,850E+03	4,814E+03	4,511E+03
	Md	4,718E+03	7,933E+03	8,294E+03	7,359E+03	5,524E+03	4,373E+03	4,207E+03
	Q <sub>1</sub>	4,272E+03	7,528E+03	8,028E+03	6,893E+03	5,109E+03	3,885E+03	3,804E+03
	Min	3,117E+03	5,728E+03	7,315E+03	5,541E+03	4,215E+03	2,784E+03	3,133E+03
	MAD	3,057E+02	3,689E+02	2,154E+02	5,563E+02	4,048E+02	4,653E+02	3,749E+02

Tabela 28 – Medidas descritivas do grupo SIM híbridas com  $D = 30$ 

		PSO	MBO	MBO-FS	GCMBO	IMBO	JMBO(1)	JMBO(2)
<b>F11</b>	Max	1,386E+03	1,697E+04	1,276E+04	1,334E+04	1,442E+03	1,333E+03	1,356E+03
	Q <sub>3</sub>	1,290E+03	8,835E+03	9,047E+03	4,965E+03	1,346E+03	1,251E+03	1,264E+03
	Md	1,254E+03	6,151E+03	7,588E+03	3,597E+03	1,294E+03	1,216E+03	1,230E+03
	Q <sub>1</sub>	1,224E+03	4,410E+03	5,796E+03	2,677E+03	1,259E+03	1,192E+03	1,199E+03
	Min	1,150E+03	3,119E+03	2,657E+03	1,770E+03	1,146E+03	1,154E+03	1,145E+03
	MAD	3,387E+01	1,829E+03	1,700E+03	1,025E+03	4,723E+01	2,786E+01	3,183E+01
<b>F12</b>	Max	2,008E+08	8,532E+09	1,115E+10	3,797E+09	2,466E+06	2,717E+04	3,724E+04
	Q <sub>3</sub>	3,720E+06	4,714E+09	8,655E+09	2,128E+09	1,117E+06	1,403E+04	1,864E+04
	Md	1,664E+06	3,596E+09	6,005E+09	1,692E+09	5,825E+05	9,606E+03	1,001E+04
	Q <sub>1</sub>	1,081E+06	2,756E+09	4,473E+09	1,084E+09	3,282E+05	6,910E+03	4,608E+03
	Min	2,920E+05	1,779E+09	1,819E+09	7,078E+08	8,072E+04	2,644E+03	2,388E+03
	MAD	8,699E+05	9,315E+08	1,944E+09	5,678E+08	3,170E+05	3,247E+03	5,671E+03
<b>F13</b>	Max	4,502E+06	1,071E+10	6,990E+09	2,802E+09	2,747E+05	3,280E+04	5,702E+03
	Q <sub>3</sub>	8,822E+04	2,904E+09	4,544E+09	9,364E+08	1,225E+05	6,495E+03	3,784E+03
	Md	6,737E+04	1,514E+09	3,213E+09	5,291E+08	8,865E+04	3,939E+03	2,798E+03
	Q <sub>1</sub>	5,112E+04	8,543E+08	2,361E+09	3,173E+08	5,713E+04	2,808E+03	2,175E+03
	Min	2,575E+04	1,675E+08	7,940E+08	2,391E+07	1,431E+04	1,620E+03	1,389E+03
	MAD	1,830E+04	7,840E+08	1,131E+09	2,852E+08	3,187E+04	1,371E+03	7,261E+02
<b>F14</b>	Max	9,535E+03	1,812E+07	2,133E+06	6,198E+06	1,217E+04	1,845E+03	1,734E+03
	Q <sub>3</sub>	3,897E+03	4,443E+06	1,366E+06	2,318E+06	5,027E+03	1,639E+03	1,615E+03
	Md	2,516E+03	2,877E+06	9,030E+05	1,100E+06	3,241E+03	1,593E+03	1,586E+03
	Q <sub>1</sub>	1,992E+03	1,360E+06	5,469E+05	4,708E+05	1,806E+03	1,559E+03	1,546E+03
	Min	1,766E+03	5,488E+05	4,068E+04	9,709E+04	1,655E+03	1,519E+03	1,496E+03
	MAD	6,343E+02	1,559E+06	3,741E+05	7,722E+05	1,457E+03	4,219E+01	3,004E+01
<b>F15</b>	Max	4,329E+04	4,597E+08	9,045E+08	1,762E+08	2,675E+05	2,704E+03	2,159E+03
	Q <sub>3</sub>	1,647E+04	6,901E+07	4,448E+08	2,092E+07	1,014E+05	1,921E+03	1,872E+03
	Md	1,139E+04	9,969E+06	3,014E+08	6,472E+06	7,039E+04	1,830E+03	1,782E+03
	Q <sub>1</sub>	7,339E+03	2,045E+06	1,529E+08	1,905E+06	3,620E+04	1,737E+03	1,702E+03
	Min	3,526E+03	1,578E+05	9,857E+06	1,403E+04	1,491E+04	1,612E+03	1,575E+03
	MAD	4,842E+03	9,106E+06	1,456E+08	6,122E+06	3,256E+04	9,224E+01	8,794E+01
<b>F16</b>	Max	2,657E+03	5,361E+03	5,342E+03	4,409E+03	4,123E+03	2,896E+03	2,589E+03
	Q <sub>3</sub>	2,399E+03	4,348E+03	4,753E+03	3,797E+03	3,405E+03	2,276E+03	2,110E+03
	Md	2,267E+03	4,134E+03	4,527E+03	3,546E+03	3,135E+03	2,093E+03	1,988E+03
	Q <sub>1</sub>	2,107E+03	3,847E+03	4,347E+03	3,323E+03	2,901E+03	1,973E+03	1,846E+03
	Min	1,702E+03	3,202E+03	3,651E+03	2,950E+03	2,219E+03	1,605E+03	1,665E+03
	MAD	1,485E+02	2,751E+02	2,096E+02	2,376E+02	2,470E+02	1,657E+02	1,398E+02
<b>F17</b>	Max	2,368E+03	3,913E+03	3,620E+03	3,158E+03	3,160E+03	2,159E+03	2,080E+03
	Q <sub>3</sub>	2,122E+03	3,145E+03	3,384E+03	2,927E+03	2,680E+03	1,919E+03	1,964E+03
	Md	2,058E+03	2,939E+03	3,204E+03	2,699E+03	2,513E+03	1,885E+03	1,884E+03
	Q <sub>1</sub>	1,960E+03	2,702E+03	3,066E+03	2,489E+03	2,354E+03	1,795E+03	1,815E+03
	Min	1,808E+03	2,205E+03	2,510E+03	2,097E+03	1,823E+03	1,745E+03	1,739E+03
	MAD	8,501E+01	2,332E+02	1,719E+02	2,167E+02	1,672E+02	7,898E+01	7,570E+01
<b>F18</b>	Max	1,899E+06	5,074E+07	5,212E+07	8,249E+07	4,888E+05	2,138E+04	5,440E+04
	Q <sub>3</sub>	9,813E+04	1,947E+07	1,846E+07	2,058E+07	1,168E+05	1,026E+04	4,715E+03
	Md	6,616E+04	1,169E+07	1,351E+07	8,191E+06	9,740E+04	5,394E+03	3,049E+03
	Q <sub>1</sub>	5,412E+04	5,820E+06	8,510E+06	2,595E+06	6,675E+04	3,470E+03	2,434E+03
	Min	3,323E+04	8,281E+05	2,134E+06	2,479E+05	2,839E+04	2,018E+03	1,879E+03
	MAD	2,007E+04	6,259E+06	4,994E+06	6,406E+06	2,731E+04	2,056E+03	9,192E+02
<b>F19</b>	Max	3,182E+05	1,122E+09	1,010E+09	3,379E+08	2,458E+05	5,074E+03	2,432E+03
	Q <sub>3</sub>	7,620E+03	4,555E+08	7,026E+08	1,092E+08	1,850E+05	2,240E+03	2,147E+03
	Md	4,802E+03	1,855E+08	5,158E+08	6,043E+07	1,471E+05	2,153E+03	2,076E+03
	Q <sub>1</sub>	3,577E+03	8,556E+07	3,043E+08	2,932E+07	9,408E+04	2,066E+03	2,026E+03
	Min	2,194E+03	3,714E+06	5,981E+07	6,972E+05	3,430E+04	1,954E+03	1,948E+03
	MAD	1,673E+03	1,299E+08	1,995E+08	3,712E+07	4,298E+04	9,238E+01	6,507E+01
<b>F20</b>	Max	2,502E+03	3,242E+03	3,029E+03	3,340E+03	2,963E+03	2,630E+03	2,390E+03
	Q <sub>3</sub>	2,376E+03	3,041E+03	2,912E+03	2,994E+03	2,809E+03	2,268E+03	2,183E+03
	Md	2,339E+03	2,908E+03	2,829E+03	2,839E+03	2,605E+03	2,176E+03	2,157E+03
	Q <sub>1</sub>	2,306E+03	2,747E+03	2,695E+03	2,670E+03	2,452E+03	2,156E+03	2,150E+03
	Min	2,254E+03	2,392E+03	2,464E+03	2,264E+03	2,285E+03	2,028E+03	2,022E+03
	MAD	3,500E+01	1,496E+02	1,134E+02	1,572E+02	1,736E+02	3,151E+01	1,332E+01

Tabela 29 – Medidas descritivas do grupo SIM compostas com  $D = 30$ 

		PSO	MBO	MBO-FS	GCMBO	IMBO	JMBO(1)	JMBO(2)
<b>F21</b>	Max	2,498E+03	2,756E+03	2,806E+03	2,695E+03	2,729E+03	2,386E+03	2,389E+03
	Q <sub>3</sub>	2,437E+03	2,679E+03	2,736E+03	2,590E+03	2,588E+03	2,363E+03	2,351E+03
	Md	2,419E+03	2,644E+03	2,688E+03	2,561E+03	2,546E+03	2,350E+03	2,343E+03
	Q <sub>1</sub>	2,401E+03	2,618E+03	2,671E+03	2,541E+03	2,510E+03	2,342E+03	2,337E+03
	Min	2,375E+03	2,542E+03	2,608E+03	2,501E+03	2,413E+03	2,326E+03	2,321E+03
	MAD	1,772E+01	3,047E+01	2,204E+01	2,393E+01	3,824E+01	9,908E+00	6,507E+00
<b>F22</b>	Max	3,068E+03	1,048E+04	9,966E+03	1,018E+04	8,200E+03	2,307E+03	5,931E+03
	Q <sub>3</sub>	2,564E+03	9,353E+03	9,337E+03	8,614E+03	5,914E+03	2,302E+03	2,300E+03
	Md	2,461E+03	8,544E+03	8,996E+03	7,867E+03	3,002E+03	2,300E+03	2,300E+03
	Q <sub>1</sub>	2,308E+03	7,277E+03	8,400E+03	6,579E+03	2,446E+03	2,300E+03	2,300E+03
	Min	2,305E+03	5,689E+03	5,534E+03	4,353E+03	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03
	MAD	1,526E+02	9,293E+02	4,054E+02	1,001E+03	6,975E+02	4,547E-13	0,000E+00
<b>F23</b>	Max	2,978E+03	3,411E+03	3,389E+03	3,130E+03	3,704E+03	2,759E+03	2,737E+03
	Q <sub>3</sub>	2,897E+03	3,246E+03	3,278E+03	3,068E+03	3,260E+03	2,721E+03	2,711E+03
	Md	2,860E+03	3,209E+03	3,211E+03	3,040E+03	3,162E+03	2,699E+03	2,698E+03
	Q <sub>1</sub>	2,831E+03	3,149E+03	3,168E+03	3,000E+03	3,076E+03	2,691E+03	2,692E+03
	Min	2,750E+03	3,036E+03	3,065E+03	2,937E+03	2,954E+03	2,668E+03	2,672E+03
	MAD	3,230E+01	4,536E+01	4,769E+01	3,397E+01	9,150E+01	1,180E+01	9,558E+00
<b>F24</b>	Max	3,226E+03	3,677E+03	3,579E+03	3,351E+03	3,603E+03	2,907E+03	2,917E+03
	Q <sub>3</sub>	3,131E+03	3,500E+03	3,489E+03	3,282E+03	3,501E+03	2,879E+03	2,879E+03
	Md	3,077E+03	3,419E+03	3,438E+03	3,262E+03	3,432E+03	2,865E+03	2,868E+03
	Q <sub>1</sub>	3,046E+03	3,376E+03	3,390E+03	3,223E+03	3,358E+03	2,856E+03	2,863E+03
	Min	2,969E+03	3,268E+03	3,231E+03	3,129E+03	3,129E+03	2,838E+03	2,843E+03
	MAD	4,739E+01	4,976E+01	4,947E+01	3,163E+01	7,092E+01	1,100E+01	7,428E+00
<b>F25</b>	Max	2,946E+03	8,064E+03	1,038E+04	4,777E+03	3,009E+03	2,941E+03	2,943E+03
	Q <sub>3</sub>	2,908E+03	4,712E+03	6,634E+03	3,637E+03	2,954E+03	2,889E+03	2,888E+03
	Md	2,895E+03	3,911E+03	5,122E+03	3,436E+03	2,945E+03	2,888E+03	2,887E+03
	Q <sub>1</sub>	2,889E+03	3,584E+03	4,309E+03	3,306E+03	2,919E+03	2,887E+03	2,887E+03
	Min	2,884E+03	3,380E+03	3,856E+03	3,190E+03	2,889E+03	2,884E+03	2,884E+03
	MAD	6,171E+00	3,701E+02	8,394E+02	1,492E+02	1,199E+01	8,972E-01	4,617E-01
<b>F26</b>	Max	6,669E+03	1,202E+04	1,202E+04	1,013E+04	1,130E+04	6,318E+03	4,727E+03
	Q <sub>3</sub>	5,526E+03	9,353E+03	1,074E+04	8,498E+03	9,326E+03	4,848E+03	4,403E+03
	Md	4,160E+03	8,567E+03	1,004E+04	7,754E+03	8,400E+03	4,621E+03	4,232E+03
	Q <sub>1</sub>	3,570E+03	8,199E+03	9,347E+03	7,267E+03	7,698E+03	4,429E+03	4,074E+03
	Min	2,814E+03	7,261E+03	8,248E+03	6,281E+03	2,900E+03	2,800E+03	2,800E+03
	MAD	1,056E+03	5,403E+02	7,071E+02	5,194E+02	8,720E+02	2,188E+02	1,592E+02
<b>F27</b>	Max	3,398E+03	4,325E+03	3,971E+03	3,200E+03	4,549E+03	3,281E+03	3,278E+03
	Q <sub>3</sub>	3,308E+03	3,932E+03	3,840E+03	3,200E+03	3,873E+03	3,237E+03	3,233E+03
	Md	3,278E+03	3,855E+03	3,771E+03	3,200E+03	3,679E+03	3,227E+03	3,226E+03
	Q <sub>1</sub>	3,236E+03	3,744E+03	3,705E+03	3,200E+03	3,536E+03	3,220E+03	3,217E+03
	Min	3,209E+03	3,525E+03	3,444E+03	3,200E+03	3,378E+03	3,207E+03	3,199E+03
	MAD	3,874E+01	1,017E+02	6,694E+01	6,732E-05	1,627E+02	7,606E+00	7,662E+00
<b>F28</b>	Max	3,592E+03	7,924E+03	8,363E+03	3,300E+03	3,320E+03	3,262E+03	3,258E+03
	Q <sub>3</sub>	3,292E+03	6,895E+03	7,504E+03	3,300E+03	3,280E+03	3,100E+03	3,169E+03
	Md	3,276E+03	6,305E+03	6,504E+03	3,300E+03	3,258E+03	3,100E+03	3,100E+03
	Q <sub>1</sub>	3,236E+03	5,796E+03	6,012E+03	3,300E+03	3,232E+03	3,100E+03	3,100E+03
	Min	3,211E+03	4,471E+03	4,704E+03	3,300E+03	3,193E+03	3,100E+03	3,100E+03
	MAD	3,461E+01	5,182E+02	6,769E+02	4,830E-03	2,476E+01	0,000E+00	0,000E+00
<b>F29</b>	Max	4,218E+03	8,284E+03	6,506E+03	5,968E+03	5,751E+03	4,025E+03	3,855E+03
	Q <sub>3</sub>	3,881E+03	5,744E+03	5,828E+03	5,366E+03	4,692E+03	3,660E+03	3,616E+03
	Md	3,741E+03	5,532E+03	5,683E+03	5,099E+03	4,418E+03	3,568E+03	3,536E+03
	Q <sub>1</sub>	3,631E+03	5,297E+03	5,390E+03	4,853E+03	4,234E+03	3,526E+03	3,498E+03
	Min	3,475E+03	4,964E+03	4,849E+03	4,286E+03	3,912E+03	3,379E+03	3,302E+03
	MAD	1,163E+02	2,144E+02	2,228E+02	2,640E+02	1,968E+02	7,369E+01	6,919E+01
<b>F30</b>	Max	3,898E+05	4,037E+08	7,134E+08	2,291E+08	1,974E+06	1,748E+04	1,509E+04
	Q <sub>3</sub>	2,175E+05	2,533E+08	4,002E+08	1,103E+08	1,132E+06	9,403E+03	9,273E+03
	Md	1,629E+05	1,655E+08	3,034E+08	7,804E+07	6,815E+05	7,463E+03	6,828E+03
	Q <sub>1</sub>	1,030E+05	1,223E+08	2,354E+08	5,346E+07	3,370E+05	6,050E+03	5,913E+03
	Min	3,662E+04	3,420E+07	6,071E+07	2,190E+07	1,120E+05	5,170E+03	5,149E+03
	MAD	5,808E+04	5,483E+07	7,732E+07	2,883E+07	3,784E+05	1,625E+03	1,237E+03

Tabela 30 – Medidas descritivas do grupo DEM unimultimodais com  $D = 30$ 

	DE	JADE(1)	JADE(2)	L-SHADE	TSDE	JMBO(1)	JMBO(2)
<b>F01</b>	Max	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,224E+02	1,001E+02
	Q <sub>3</sub>	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,001E+02	1,000E+02
	Md	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02
	Q <sub>1</sub>	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02
	Min	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02
	MAD	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	1,421E-14	4,022E-02
<b>F03</b>	Max	3,000E+02	3,049E+04	2,780E+04	8,371E+04	3,000E+02	3,000E+02
	Q <sub>3</sub>	3,000E+02	3,000E+02	1,211E+04	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02
	Md	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02
	Q <sub>1</sub>	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02
	Min	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02
	MAD	5,170E-06	5,684E-14	5,684E-14	5,684E-14	3,809E-11	0,000E+00
<b>F04</b>	Max	4,719E+02	4,719E+02	4,719E+02	4,679E+02	4,641E+02	4,719E+02
	Q <sub>3</sub>	4,641E+02	4,586E+02	4,586E+02	4,586E+02	4,586E+02	4,627E+02
	Md	4,586E+02	4,040E+02	4,586E+02	4,586E+02	4,586E+02	4,586E+02
	Q <sub>1</sub>	4,586E+02	4,000E+02	4,010E+02	4,586E+02	4,586E+02	4,002E+02
	Min	4,000E+02	4,000E+02	4,000E+02	4,000E+02	4,586E+02	4,000E+02
	MAD	5,556E+00	3,987E+00	5,556E+00	5,684E-14	2,990E-11	2,313E-01
<b>F05</b>	Max	6,851E+02	5,334E+02	5,336E+02	5,298E+02	5,739E+02	5,836E+02
	Q <sub>3</sub>	6,744E+02	5,285E+02	5,283E+02	5,206E+02	5,455E+02	5,597E+02
	Md	6,609E+02	5,249E+02	5,253E+02	5,169E+02	5,398E+02	5,497E+02
	Q <sub>1</sub>	5,513E+02	5,216E+02	5,218E+02	5,149E+02	5,331E+02	5,408E+02
	Min	5,129E+02	5,148E+02	5,122E+02	5,090E+02	5,209E+02	5,209E+02
	MAD	1,764E+01	3,310E+00	3,220E+00	1,992E+00	5,970E+00	9,950E+00
<b>F06</b>	Max	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,002E+02	6,000E+02	6,014E+02
	Q <sub>3</sub>	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,005E+02
	Md	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,002E+02
	Q <sub>1</sub>	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02
	Min	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02
	MAD	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	9,833E-03	1,655E-09	1,428E-01
<b>F07</b>	Max	9,179E+02	7,659E+02	7,633E+02	7,724E+02	8,098E+02	8,533E+02
	Q <sub>3</sub>	9,064E+02	7,579E+02	7,579E+02	7,554E+02	7,784E+02	8,141E+02
	Md	8,977E+02	7,542E+02	7,544E+02	7,513E+02	7,709E+02	8,017E+02
	Q <sub>1</sub>	8,878E+02	7,505E+02	7,519E+02	7,478E+02	7,639E+02	7,843E+02
	Min	7,481E+02	7,460E+02	7,424E+02	7,436E+02	7,455E+02	7,679E+02
	MAD	8,744E+00	3,692E+00	2,691E+00	3,876E+00	7,038E+00	1,332E+01
<b>F08</b>	Max	9,915E+02	8,370E+02	8,402E+02	8,269E+02	8,716E+02	8,915E+02
	Q <sub>3</sub>	9,708E+02	8,298E+02	8,278E+02	8,199E+02	8,488E+02	8,587E+02
	Md	9,600E+02	8,262E+02	8,251E+02	8,179E+02	8,408E+02	8,468E+02
	Q <sub>1</sub>	8,340E+02	8,226E+02	8,213E+02	8,159E+02	8,358E+02	8,418E+02
	Min	8,119E+02	8,174E+02	8,140E+02	8,119E+02	8,219E+02	8,229E+02
	MAD	1,633E+01	3,651E+00	3,085E+00	1,990E+00	7,960E+00	6,965E+00
<b>F09</b>	Max	9,017E+02	9,009E+02	9,006E+02	9,238E+02	9,000E+02	1,588E+03
	Q <sub>3</sub>	9,000E+02	9,002E+02	9,001E+02	9,072E+02	9,000E+02	9,866E+02
	Md	9,000E+02	9,000E+02	9,000E+02	9,041E+02	9,000E+02	9,337E+02
	Q <sub>1</sub>	9,000E+02	9,000E+02	9,000E+02	9,017E+02	9,000E+02	9,159E+02
	Min	9,000E+02	9,000E+02	9,000E+02	9,004E+02	9,000E+02	9,031E+02
	MAD	0,000E+00	1,137E-13	0,000E+00	2,540E+00	0,000E+00	2,309E+01
<b>F10</b>	Max	8,281E+03	3,444E+03	3,222E+03	3,412E+03	4,293E+03	5,801E+03
	Q <sub>3</sub>	7,942E+03	3,061E+03	2,992E+03	2,915E+03	3,487E+03	4,814E+03
	Md	7,602E+03	2,879E+03	2,839E+03	2,789E+03	3,171E+03	4,373E+03
	Q <sub>1</sub>	7,374E+03	2,651E+03	2,649E+03	2,619E+03	2,725E+03	3,885E+03
	Min	6,726E+03	2,239E+03	2,101E+03	2,275E+03	1,716E+03	2,784E+03
	MAD	3,012E+02	2,102E+02	1,565E+02	1,579E+02	3,950E+02	4,653E+02

Tabela 31 – Medidas descritivas do grupo DEM híbridas com  $D = 30$ 

	DE	JADE(1)	JADE(2)	L-SHADE	TSDE	JMBO(1)	JMBO(2)
<b>F11</b>	Max	1,171E+03	1,206E+03	1,207E+03	1,260E+03	1,171E+03	1,333E+03
	Q <sub>3</sub>	1,110E+03	1,155E+03	1,170E+03	1,200E+03	1,117E+03	1,251E+03
	Md	1,108E+03	1,130E+03	1,133E+03	1,174E+03	1,109E+03	1,216E+03
	Q <sub>1</sub>	1,106E+03	1,119E+03	1,125E+03	1,156E+03	1,107E+03	1,192E+03
	Min	1,102E+03	1,104E+03	1,114E+03	1,126E+03	1,103E+03	1,154E+03
	MAD	2,152E+00	1,312E+01	1,282E+01	2,077E+01	3,973E+00	2,786E+01
<b>F12</b>	Max	5,349E+04	2,718E+04	2,384E+04	4,082E+04	2,308E+04	2,717E+04
	Q <sub>3</sub>	2,431E+04	1,375E+04	5,759E+03	7,181E+03	8,193E+03	1,403E+04
	Md	1,436E+04	7,206E+03	3,538E+03	3,861E+03	3,789E+03	9,606E+03
	Q <sub>1</sub>	8,363E+03	3,899E+03	2,653E+03	2,721E+03	2,381E+03	6,910E+03
	Min	2,202E+03	2,220E+03	1,634E+03	1,736E+03	1,236E+03	2,644E+03
	MAD	7,497E+03	3,974E+03	1,089E+03	1,362E+03	1,782E+03	3,247E+03
<b>F13</b>	Max	1,471E+03	2,593E+03	2,478E+04	2,503E+03	1,332E+03	3,280E+04
	Q <sub>3</sub>	1,387E+03	1,397E+03	1,418E+03	1,413E+03	1,325E+03	6,495E+03
	Md	1,379E+03	1,356E+03	1,366E+03	1,372E+03	1,323E+03	3,939E+03
	Q <sub>1</sub>	1,370E+03	1,339E+03	1,344E+03	1,347E+03	1,319E+03	2,808E+03
	Min	1,321E+03	1,329E+03	1,327E+03	1,318E+03	1,306E+03	1,620E+03
	MAD	8,722E+00	2,380E+01	2,504E+01	2,711E+01	2,998E+00	1,371E+03
<b>F14</b>	Max	1,470E+03	2,390E+04	2,029E+04	1,532E+03	1,435E+03	1,845E+03
	Q <sub>3</sub>	1,430E+03	1,481E+03	1,610E+03	1,485E+03	1,411E+03	1,639E+03
	Md	1,422E+03	1,462E+03	1,485E+03	1,458E+03	1,408E+03	1,593E+03
	Q <sub>1</sub>	1,409E+03	1,446E+03	1,455E+03	1,444E+03	1,406E+03	1,559E+03
	Min	1,401E+03	1,429E+03	1,435E+03	1,424E+03	1,403E+03	1,519E+03
	MAD	1,198E+01	1,826E+01	3,783E+01	2,169E+01	2,010E+00	4,219E+01
<b>F15</b>	Max	1,536E+03	3,637E+03	6,884E+03	2,046E+03	1,515E+03	2,704E+03
	Q <sub>3</sub>	1,509E+03	1,682E+03	2,031E+03	1,601E+03	1,508E+03	1,921E+03
	Md	1,508E+03	1,596E+03	1,626E+03	1,562E+03	1,506E+03	1,830E+03
	Q <sub>1</sub>	1,506E+03	1,552E+03	1,573E+03	1,540E+03	1,504E+03	1,737E+03
	Min	1,503E+03	1,512E+03	1,517E+03	1,508E+03	1,502E+03	1,612E+03
	MAD	1,599E+00	5,224E+01	7,478E+01	2,484E+01	1,394E+00	9,224E+01
<b>F16</b>	Max	2,427E+03	2,220E+03	2,241E+03	2,206E+03	2,335E+03	2,896E+03
	Q <sub>3</sub>	2,025E+03	2,074E+03	2,019E+03	2,001E+03	2,048E+03	2,276E+03
	Md	1,784E+03	1,975E+03	1,911E+03	1,918E+03	1,989E+03	2,093E+03
	Q <sub>1</sub>	1,621E+03	1,895E+03	1,784E+03	1,840E+03	1,866E+03	1,973E+03
	Min	1,606E+03	1,652E+03	1,641E+03	1,614E+03	1,614E+03	1,605E+03
	MAD	1,676E+02	8,868E+01	1,126E+02	7,929E+01	1,032E+02	1,657E+02
<b>F17</b>	Max	1,851E+03	1,915E+03	1,985E+03	1,959E+03	1,844E+03	2,159E+03
	Q <sub>3</sub>	1,746E+03	1,781E+03	1,782E+03	1,786E+03	1,744E+03	1,919E+03
	Md	1,738E+03	1,761E+03	1,762E+03	1,768E+03	1,738E+03	1,885E+03
	Q <sub>1</sub>	1,730E+03	1,748E+03	1,751E+03	1,751E+03	1,726E+03	1,795E+03
	Min	1,705E+03	1,720E+03	1,720E+03	1,737E+03	1,710E+03	1,745E+03
	MAD	8,025E+00	1,325E+01	1,452E+01	1,711E+01	1,066E+01	7,898E+01
<b>F18</b>	Max	2,787E+03	1,672E+05	1,617E+05	2,246E+03	1,828E+03	2,138E+04
	Q <sub>3</sub>	2,023E+03	1,900E+03	2,025E+03	1,986E+03	1,825E+03	1,026E+04
	Md	1,866E+03	1,868E+03	1,926E+03	1,926E+03	1,823E+03	5,394E+03
	Q <sub>1</sub>	1,843E+03	1,842E+03	1,892E+03	1,854E+03	1,822E+03	3,470E+03
	Min	1,827E+03	1,810E+03	1,830E+03	1,827E+03	1,801E+03	2,018E+03
	MAD	3,483E+01	2,745E+01	5,464E+01	6,988E+01	1,686E+00	2,056E+03
<b>F19</b>	Max	1,911E+03	5,833E+03	1,687E+04	2,049E+03	1,908E+03	5,074E+03
	Q <sub>3</sub>	1,907E+03	2,021E+03	3,055E+03	1,966E+03	1,906E+03	2,240E+03
	Md	1,905E+03	1,959E+03	2,001E+03	1,939E+03	1,905E+03	2,153E+03
	Q <sub>1</sub>	1,905E+03	1,930E+03	1,963E+03	1,926E+03	1,904E+03	2,066E+03
	Min	1,902E+03	1,913E+03	1,909E+03	1,912E+03	1,902E+03	1,954E+03
	MAD	1,341E+00	3,350E+01	7,030E+01	1,617E+01	8,654E-01	9,238E+01
<b>F20</b>	Max	2,157E+03	2,202E+03	2,186E+03	2,223E+03	2,167E+03	2,630E+03
	Q <sub>3</sub>	2,100E+03	2,163E+03	2,169E+03	2,172E+03	2,134E+03	2,268E+03
	Md	2,021E+03	2,152E+03	2,156E+03	2,160E+03	2,023E+03	2,176E+03
	Q <sub>1</sub>	2,004E+03	2,057E+03	2,058E+03	2,060E+03	2,009E+03	2,156E+03
	Min	2,000E+03	2,018E+03	2,035E+03	2,032E+03	2,002E+03	2,028E+03
	MAD	1,707E+01	3,307E+01	1,658E+01	3,230E+01	1,540E+01	3,151E+01

Tabela 32 – Medidas descritivas do grupo DEM compostas com  $D = 30$ 

	DE	JADE(1)	JADE(2)	L-SHADE	TSDE	JMBO(1)	JMBO(2)
<b>F21</b>	Max	2,476E+03	2,338E+03	2,346E+03	2,328E+03	2,368E+03	2,389E+03
	Q <sub>3</sub>	2,459E+03	2,329E+03	2,328E+03	2,322E+03	2,349E+03	2,351E+03
	Md	2,441E+03	2,327E+03	2,326E+03	2,319E+03	2,342E+03	2,343E+03
	Q <sub>1</sub>	2,335E+03	2,324E+03	2,323E+03	2,317E+03	2,338E+03	2,337E+03
	Min	2,314E+03	2,314E+03	2,316E+03	2,309E+03	2,322E+03	2,321E+03
	MAD	2,653E+01	2,887E+00	2,481E+00	2,501E+00	6,203E+00	9,908E+00
<b>F22</b>	Max	2,300E+03	2,302E+03	2,302E+03	2,302E+03	2,300E+03	2,307E+03
	Q <sub>3</sub>	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03
	Md	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03
	Q <sub>1</sub>	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03
	Min	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03	2,300E+03
	MAD	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	0,000E+00	4,547E-13
<b>F23</b>	Max	2,826E+03	2,686E+03	2,688E+03	2,688E+03	2,715E+03	2,759E+03
	Q <sub>3</sub>	2,681E+03	2,679E+03	2,680E+03	2,674E+03	2,694E+03	2,721E+03
	Md	2,670E+03	2,675E+03	2,673E+03	2,669E+03	2,684E+03	2,699E+03
	Q <sub>1</sub>	2,663E+03	2,671E+03	2,671E+03	2,665E+03	2,677E+03	2,691E+03
	Min	2,648E+03	2,663E+03	2,664E+03	2,658E+03	2,660E+03	2,668E+03
	MAD	7,789E+00	4,015E+00	4,215E+00	4,630E+00	7,871E+00	1,180E+01
<b>F24</b>	Max	2,996E+03	2,856E+03	2,854E+03	2,859E+03	2,884E+03	2,907E+03
	Q <sub>3</sub>	2,861E+03	2,847E+03	2,847E+03	2,846E+03	2,861E+03	2,879E+03
	Md	2,845E+03	2,843E+03	2,844E+03	2,841E+03	2,853E+03	2,865E+03
	Q <sub>1</sub>	2,840E+03	2,838E+03	2,840E+03	2,838E+03	2,847E+03	2,856E+03
	Min	2,832E+03	2,832E+03	2,834E+03	2,832E+03	2,834E+03	2,838E+03
	MAD	7,494E+00	4,703E+00	3,273E+00	3,121E+00	7,091E+00	1,100E+01
<b>F25</b>	Max	2,887E+03	2,897E+03	2,889E+03	2,897E+03	2,887E+03	2,941E+03
	Q <sub>3</sub>	2,887E+03	2,888E+03	2,887E+03	2,888E+03	2,887E+03	2,889E+03
	Md	2,887E+03	2,887E+03	2,887E+03	2,887E+03	2,887E+03	2,888E+03
	Q <sub>1</sub>	2,887E+03	2,887E+03	2,887E+03	2,887E+03	2,887E+03	2,887E+03
	Min	2,887E+03	2,884E+03	2,883E+03	2,883E+03	2,887E+03	2,884E+03
	MAD	6,868E-02	1,876E-01	1,939E-01	1,859E-01	1,265E-02	8,972E-01
<b>F26</b>	Max	5,108E+03	4,136E+03	4,052E+03	3,979E+03	4,283E+03	6,318E+03
	Q <sub>3</sub>	3,766E+03	3,868E+03	3,895E+03	3,826E+03	4,041E+03	4,848E+03
	Md	3,692E+03	3,819E+03	3,835E+03	3,796E+03	3,934E+03	4,621E+03
	Q <sub>1</sub>	3,636E+03	3,781E+03	3,743E+03	3,750E+03	3,835E+03	4,429E+03
	Min	3,491E+03	2,900E+03	3,630E+03	3,556E+03	2,800E+03	2,800E+03
	MAD	6,781E+01	4,834E+01	7,030E+01	3,852E+01	1,028E+02	2,188E+02
<b>F27</b>	Max	3,220E+03	3,228E+03	3,223E+03	3,227E+03	3,207E+03	3,281E+03
	Q <sub>3</sub>	3,202E+03	3,212E+03	3,213E+03	3,216E+03	3,191E+03	3,237E+03
	Md	3,195E+03	3,207E+03	3,207E+03	3,212E+03	3,184E+03	3,227E+03
	Q <sub>1</sub>	3,190E+03	3,203E+03	3,203E+03	3,204E+03	3,179E+03	3,220E+03
	Min	3,170E+03	3,179E+03	3,187E+03	3,192E+03	3,167E+03	3,207E+03
	MAD	5,847E+00	4,534E+00	5,420E+00	5,579E+00	5,786E+00	7,606E+00
<b>F28</b>	Max	3,254E+03	3,260E+03	3,262E+03	3,262E+03	3,203E+03	3,262E+03
	Q <sub>3</sub>	3,201E+03	3,100E+03	3,203E+03	3,203E+03	3,100E+03	3,100E+03
	Md	3,100E+03	3,100E+03	3,100E+03	3,100E+03	3,100E+03	3,100E+03
	Q <sub>1</sub>	3,100E+03	3,100E+03	3,100E+03	3,100E+03	3,100E+03	3,100E+03
	Min	3,100E+03	3,100E+03	3,100E+03	3,100E+03	3,100E+03	3,100E+03
	MAD	4,547E-13	0,000E+00	4,547E-13	4,547E-13	3,824E-10	0,000E+00
<b>F29</b>	Max	3,423E+03	3,501E+03	3,485E+03	3,569E+03	3,469E+03	4,025E+03
	Q <sub>3</sub>	3,331E+03	3,403E+03	3,395E+03	3,397E+03	3,344E+03	3,660E+03
	Md	3,320E+03	3,376E+03	3,379E+03	3,371E+03	3,331E+03	3,568E+03
	Q <sub>1</sub>	3,307E+03	3,362E+03	3,361E+03	3,353E+03	3,313E+03	3,526E+03
	Min	3,231E+03	3,331E+03	3,260E+03	3,295E+03	3,234E+03	3,379E+03
	MAD	1,207E+01	1,963E+01	1,698E+01	1,948E+01	1,471E+01	7,369E+01
<b>F30</b>	Max	5,330E+03	1,238E+04	8,865E+03	5,916E+03	5,134E+03	1,748E+04
	Q <sub>3</sub>	5,090E+03	5,259E+03	5,289E+03	5,362E+03	5,028E+03	9,403E+03
	Md	5,046E+03	5,106E+03	5,097E+03	5,185E+03	4,979E+03	7,463E+03
	Q <sub>1</sub>	5,000E+03	5,059E+03	5,054E+03	5,079E+03	4,974E+03	6,050E+03
	Min	4,947E+03	4,974E+03	4,952E+03	4,952E+03	4,957E+03	5,170E+03
	MAD	4,545E+01	7,729E+01	7,819E+01	1,257E+02	2,011E+01	1,625E+03

Tabela 33 – Medidas descritivas do grupo SIM unimultimodais com  $D = 100$ 

		PSO	MBO	MBO-FS	GCMBO	IMBO	JMBO(1)	JMBO(2)
<b>F01</b>	Max	1,254E+10	5,271E+11	5,576E+11	4,489E+11	1,057E+11	2,416E+04	7,307E+03
	Q <sub>3</sub>	5,441E+09	3,875E+11	4,790E+11	3,209E+11	7,999E+10	3,472E+03	9,411E+02
	Md	2,775E+09	3,369E+11	3,463E+11	2,407E+11	7,025E+10	1,381E+03	3,999E+02
	Q <sub>1</sub>	1,449E+09	2,960E+11	2,492E+11	2,134E+11	5,819E+10	3,412E+02	1,758E+02
	Min	2,636E+07	2,117E+11	2,174E+11	1,624E+11	3,728E+10	1,007E+02	1,000E+02
	MAD	1,755E+09	4,288E+10	1,087E+11	4,307E+10	9,906E+09	1,076E+03	2,676E+02
<b>F03</b>	Max	3,338E+04	1,312E+06	7,583E+05	1,420E+06	4,910E+05	3,381E+04	1,053E+04
	Q <sub>3</sub>	2,085E+04	9,929E+05	7,125E+05	9,604E+05	4,166E+05	1,734E+04	5,670E+03
	Md	1,843E+04	8,056E+05	6,578E+05	7,311E+05	3,729E+05	1,480E+04	3,628E+03
	Q <sub>1</sub>	1,653E+04	6,533E+05	4,710E+05	3,621E+05	3,295E+05	1,159E+04	2,733E+03
	Min	1,042E+04	3,199E+05	3,283E+05	2,764E+05	2,792E+05	6,825E+03	1,234E+03
	MAD	2,068E+03	1,704E+05	7,318E+04	3,236E+05	4,394E+04	2,861E+03	1,379E+03
<b>F04</b>	Max	3,407E+03	1,794E+05	2,116E+05	1,356E+05	8,460E+03	6,246E+02	6,601E+02
	Q <sub>3</sub>	1,511E+03	1,171E+05	1,800E+05	8,149E+04	4,948E+03	5,718E+02	6,185E+02
	Md	1,043E+03	9,091E+04	1,526E+05	6,197E+04	3,626E+03	5,382E+02	5,696E+02
	Q <sub>1</sub>	9,166E+02	7,055E+04	8,916E+04	4,209E+04	2,777E+03	4,760E+02	4,999E+02
	Min	6,979E+02	5,010E+04	5,620E+04	2,757E+04	1,905E+03	4,593E+02	4,150E+02
	MAD	1,820E+02	2,331E+04	3,542E+04	1,985E+04	1,002E+03	6,101E+01	5,248E+01
<b>F05</b>	Max	1,226E+03	2,589E+03	2,589E+03	2,564E+03	1,799E+03	8,015E+02	7,159E+02
	Q <sub>3</sub>	1,127E+03	2,588E+03	2,589E+03	2,395E+03	1,730E+03	7,579E+02	6,821E+02
	Md	1,080E+03	2,567E+03	2,589E+03	2,208E+03	1,708E+03	7,348E+02	6,672E+02
	Q <sub>1</sub>	1,045E+03	2,497E+03	2,567E+03	1,985E+03	1,677E+03	7,084E+02	6,552E+02
	Min	9,352E+02	1,991E+03	2,496E+03	1,710E+03	1,502E+03	6,492E+02	6,274E+02
	MAD	3,958E+01	2,168E+01	0,000E+00	2,078E+02	2,678E+01	2,487E+01	1,293E+01
<b>F06</b>	Max	6,636E+02	7,426E+02	7,426E+02	7,391E+02	6,856E+02	6,042E+02	6,026E+02
	Q <sub>3</sub>	6,535E+02	7,401E+02	7,426E+02	7,273E+02	6,825E+02	6,022E+02	6,011E+02
	Md	6,480E+02	7,328E+02	7,426E+02	7,221E+02	6,797E+02	6,018E+02	6,007E+02
	Q <sub>1</sub>	6,405E+02	7,203E+02	7,400E+02	7,106E+02	6,780E+02	6,014E+02	6,004E+02
	Min	6,319E+02	6,984E+02	7,150E+02	6,856E+02	6,675E+02	6,006E+02	6,001E+02
	MAD	6,168E+00	7,947E+00	0,000E+00	7,140E+00	2,703E+00	4,476E-01	3,292E-01
<b>F07</b>	Max	1,893E+03	1,202E+04	1,264E+04	1,078E+04	1,137E+04	1,168E+03	1,128E+03
	Q <sub>3</sub>	1,684E+03	9,886E+03	1,244E+04	7,398E+03	1,014E+04	1,086E+03	1,045E+03
	Md	1,583E+03	8,673E+03	1,205E+04	5,660E+03	9,874E+03	1,057E+03	1,022E+03
	Q <sub>1</sub>	1,473E+03	7,171E+03	9,388E+03	4,046E+03	9,401E+03	1,026E+03	9,973E+02
	Min	1,338E+03	3,399E+03	3,720E+03	3,111E+03	8,172E+03	1,002E+03	9,476E+02
	MAD	1,047E+02	1,374E+03	5,564E+02	1,669E+03	3,690E+02	3,125E+01	2,400E+01
<b>F08</b>	Max	1,649E+03	3,217E+03	3,348E+03	3,004E+03	2,408E+03	1,109E+03	1,018E+03
	Q <sub>3</sub>	1,493E+03	2,854E+03	3,189E+03	2,593E+03	2,266E+03	1,055E+03	9,898E+02
	Md	1,447E+03	2,748E+03	3,013E+03	2,469E+03	2,206E+03	1,031E+03	9,801E+02
	Q <sub>1</sub>	1,381E+03	2,597E+03	2,591E+03	2,263E+03	2,102E+03	1,006E+03	9,696E+02
	Min	1,274E+03	2,294E+03	2,354E+03	2,071E+03	1,865E+03	9,781E+02	9,303E+02
	MAD	5,909E+01	1,434E+02	2,728E+02	1,801E+02	7,959E+01	2,487E+01	9,950E+00
<b>F09</b>	Max	4,065E+04	1,629E+05	1,632E+05	1,529E+05	4,790E+04	2,543E+03	1,990E+03
	Q <sub>3</sub>	2,949E+04	1,258E+05	1,178E+05	1,126E+05	4,154E+04	1,530E+03	1,145E+03
	Md	2,497E+04	1,121E+05	1,100E+05	8,632E+04	3,977E+04	1,296E+03	1,060E+03
	Q <sub>1</sub>	1,942E+04	8,896E+04	1,049E+05	6,674E+04	3,508E+04	1,164E+03	1,023E+03
	Min	1,080E+04	6,205E+04	6,304E+04	4,776E+04	3,081E+04	1,002E+03	9,421E+02
	MAD	5,128E+03	1,988E+04	5,474E+03	2,294E+04	3,160E+03	1,898E+02	5,333E+01
<b>F10</b>	Max	1,745E+04	3,304E+04	3,219E+04	3,209E+04	1,840E+04	1,583E+04	1,591E+04
	Q <sub>3</sub>	1,563E+04	3,181E+04	3,165E+04	2,998E+04	1,714E+04	1,465E+04	1,458E+04
	Md	1,469E+04	3,122E+04	3,126E+04	2,925E+04	1,617E+04	1,381E+04	1,347E+04
	Q <sub>1</sub>	1,401E+04	3,045E+04	3,088E+04	2,765E+04	1,515E+04	1,296E+04	1,287E+04
	Min	1,090E+04	2,830E+04	2,926E+04	2,564E+04	1,295E+04	1,130E+04	1,072E+04
	MAD	7,741E+02	6,587E+02	3,992E+02	9,307E+02	9,789E+02	8,440E+02	8,588E+02

Tabela 34 – Medidas descritivas do grupo SIM híbridas com  $D = 100$ 

		PSO	MBO	MBO-FS	GCMBO	IMBO	JMBO(1)	JMBO(2)
<b>F11</b>	Max	6,049E+03	4,866E+05	3,540E+05	4,074E+05	5,580E+04	2,374E+03	2,763E+03
	Q <sub>3</sub>	3,352E+03	3,004E+05	2,955E+05	2,929E+05	2,090E+04	2,084E+03	2,444E+03
	Md	2,965E+03	1,918E+05	2,559E+05	1,825E+05	1,483E+04	1,982E+03	2,268E+03
	Q <sub>1</sub>	2,816E+03	1,470E+05	1,778E+05	1,306E+05	9,558E+03	1,797E+03	2,118E+03
	Min	2,399E+03	1,186E+05	1,020E+05	9,257E+04	4,721E+03	1,589E+03	1,825E+03
	MAD	2,226E+02	6,468E+04	6,039E+04	6,649E+04	5,508E+03	1,182E+02	1,498E+02
<b>F12</b>	Max	7,634E+09	2,288E+11	2,588E+11	1,893E+11	8,644E+09	7,572E+05	1,430E+06
	Q <sub>3</sub>	2,239E+09	1,765E+11	2,180E+11	1,271E+11	3,656E+09	4,456E+05	8,008E+05
	Md	8,047E+08	1,481E+11	1,689E+11	1,051E+11	2,329E+09	3,488E+05	5,391E+05
	Q <sub>1</sub>	3,507E+08	1,319E+11	1,450E+11	7,575E+10	1,276E+09	2,628E+05	3,946E+05
	Min	1,698E+08	1,041E+11	1,068E+11	4,490E+10	3,661E+09	1,225E+05	2,263E+05
	MAD	5,142E+08	2,067E+10	3,426E+10	2,716E+10	1,141E+09	9,364E+04	1,616E+05
<b>F13</b>	Max	1,604E+09	4,662E+10	6,042E+10	3,625E+10	2,109E+05	1,208E+04	4,982E+04
	Q <sub>3</sub>	2,308E+07	3,376E+10	5,060E+10	2,086E+10	8,674E+04	6,335E+03	5,426E+03
	Md	2,422E+05	2,736E+10	4,530E+10	1,258E+10	6,568E+04	4,655E+03	2,881E+03
	Q <sub>1</sub>	1,713E+05	2,508E+10	3,531E+10	1,028E+10	5,206E+04	3,096E+03	2,067E+03
	Min	8,712E+04	1,566E+10	1,792E+10	7,528E+09	3,474E+04	1,566E+03	1,460E+03
	MAD	9,238E+04	3,804E+09	7,578E+09	3,381E+09	1,862E+04	1,577E+03	1,067E+03
<b>F14</b>	Max	3,440E+06	1,816E+08	1,629E+08	1,758E+08	5,511E+05	9,340E+04	3,198E+03
	Q <sub>3</sub>	5,335E+05	9,061E+07	1,107E+08	8,441E+07	3,277E+05	1,322E+04	2,247E+03
	Md	4,160E+05	5,860E+07	8,884E+07	5,220E+07	2,246E+05	6,458E+03	2,110E+03
	Q <sub>1</sub>	3,462E+05	3,207E+07	5,529E+07	3,002E+07	1,607E+05	4,471E+03	1,979E+03
	Min	1,602E+05	1,522E+07	2,235E+07	7,184E+06	7,976E+04	2,046E+03	1,677E+03
	MAD	9,268E+04	2,848E+07	2,613E+07	2,617E+07	7,337E+04	3,333E+03	1,361E+02
<b>F15</b>	Max	1,376E+09	2,097E+10	2,592E+10	1,737E+10	2,019E+05	1,795E+04	1,615E+04
	Q <sub>3</sub>	1,129E+05	1,397E+10	1,999E+10	7,539E+09	1,042E+05	5,366E+03	5,526E+03
	Md	8,543E+04	9,887E+09	1,701E+10	4,601E+09	8,643E+04	2,914E+03	3,213E+03
	Q <sub>1</sub>	6,526E+04	8,103E+09	1,417E+10	3,454E+09	6,538E+04	2,070E+03	2,216E+03
	Min	4,554E+04	6,179E+09	9,744E+09	1,118E+09	4,186E+04	1,814E+03	1,780E+03
	MAD	2,197E+04	2,016E+09	2,951E+09	2,060E+09	1,887E+04	9,397E+02	1,217E+03
<b>F16</b>	Max	7,282E+03	2,285E+04	2,493E+04	1,646E+04	9,331E+03	5,043E+03	5,212E+03
	Q <sub>3</sub>	5,915E+03	1,896E+04	2,176E+04	1,402E+04	7,719E+03	4,297E+03	4,379E+03
	Md	5,375E+03	1,682E+04	1,862E+04	1,345E+04	7,366E+03	3,932E+03	3,930E+03
	Q <sub>1</sub>	5,051E+03	1,530E+04	1,747E+04	1,261E+04	6,715E+03	3,591E+03	3,512E+03
	Min	4,372E+03	1,385E+04	1,503E+04	1,107E+04	5,508E+03	3,018E+03	2,998E+03
	MAD	4,690E+02	1,942E+03	1,636E+03	7,106E+02	4,707E+02	3,465E+02	4,595E+02
<b>F17</b>	Max	6,112E+03	6,365E+06	1,744E+06	1,704E+05	7,841E+03	4,957E+03	4,491E+03
	Q <sub>3</sub>	5,398E+03	1,842E+05	8,993E+05	1,531E+04	6,995E+03	3,873E+03	3,844E+03
	Md	5,117E+03	1,177E+05	4,859E+05	1,176E+04	6,570E+03	3,605E+03	3,594E+03
	Q <sub>1</sub>	4,742E+03	4,342E+04	2,379E+05	9,664E+03	6,199E+03	3,353E+03	3,374E+03
	Min	3,711E+03	1,241E+04	3,289E+04	7,981E+03	5,122E+03	2,832E+03	2,852E+03
	MAD	3,174E+02	7,049E+04	3,020E+05	2,358E+03	3,808E+02	2,654E+02	2,287E+02
<b>F18</b>	Max	1,972E+06	3,091E+08	2,723E+08	2,297E+08	9,451E+05	7,244E+05	1,470E+05
	Q <sub>3</sub>	9,247E+05	1,262E+08	1,758E+08	1,241E+08	5,141E+05	2,086E+05	7,922E+04
	Md	7,417E+05	8,949E+07	1,481E+08	6,701E+07	3,691E+05	1,493E+05	6,934E+04
	Q <sub>1</sub>	5,349E+05	5,311E+07	1,126E+08	3,643E+07	2,951E+05	1,079E+05	5,480E+04
	Min	3,597E+05	2,894E+07	3,452E+07	8,911E+06	2,145E+05	8,088E+04	2,415E+04
	MAD	1,966E+05	3,663E+07	3,420E+07	3,888E+07	8,294E+04	4,324E+04	1,265E+04
<b>F19</b>	Max	7,877E+07	1,899E+10	2,747E+10	1,249E+10	2,117E+06	1,686E+04	1,165E+04
	Q <sub>3</sub>	5,865E+05	1,432E+10	2,096E+10	5,366E+09	1,514E+06	4,849E+03	4,203E+03
	Md	2,933E+05	1,057E+10	1,582E+10	3,208E+09	1,302E+06	2,966E+03	3,176E+03
	Q <sub>1</sub>	1,145E+05	8,716E+09	1,215E+10	2,115E+09	1,091E+06	2,441E+03	2,478E+03
	Min	4,112E+04	3,603E+09	3,894E+09	9,834E+08	6,159E+05	2,019E+03	2,025E+03
	MAD	2,133E+05	2,548E+09	4,455E+09	1,373E+09	2,153E+05	7,086E+02	8,226E+02
<b>F20</b>	Max	5,656E+03	8,713E+03	8,109E+03	8,567E+03	6,524E+03	4,612E+03	4,912E+03
	Q <sub>3</sub>	5,039E+03	7,822E+03	7,743E+03	7,555E+03	6,247E+03	3,976E+03	4,007E+03
	Md	4,762E+03	7,460E+03	7,584E+03	6,992E+03	6,044E+03	3,739E+03	3,800E+03
	Q <sub>1</sub>	4,508E+03	7,012E+03	7,255E+03	6,415E+03	5,335E+03	3,523E+03	3,525E+03
	Min	3,860E+03	6,202E+03	6,534E+03	5,137E+03	4,312E+03	3,072E+03	3,065E+03
	MAD	2,743E+02	4,197E+02	2,409E+02	5,720E+02	2,521E+02	2,348E+02	2,461E+02

Tabela 35 – Medidas descritivas do grupo SIM compostas com  $D = 100$ 

		PSO	MBO	MBO-FS	GCMBO	IMBO	JMBO(1)	JMBO(2)
<b>F21</b>	Max	3,630E+03	5,073E+03	4,972E+03	4,800E+03	4,274E+03	2,573E+03	2,566E+03
	Q <sub>3</sub>	3,237E+03	4,769E+03	4,771E+03	4,340E+03	4,112E+03	2,514E+03	2,499E+03
	Md	3,124E+03	4,532E+03	4,565E+03	4,052E+03	3,992E+03	2,502E+03	2,487E+03
	Q <sub>1</sub>	3,022E+03	4,357E+03	4,448E+03	3,940E+03	3,870E+03	2,487E+03	2,480E+03
	Min	2,848E+03	4,126E+03	4,155E+03	3,724E+03	3,555E+03	2,450E+03	2,444E+03
	MAD	1,097E+02	1,884E+02	1,288E+02	1,459E+02	1,230E+02	1,396E+01	9,268E+00
<b>F22</b>	Max	2,157E+04	3,544E+04	3,495E+04	3,464E+04	2,234E+04	1,811E+04	1,900E+04
	Q <sub>3</sub>	1,959E+04	3,447E+04	3,428E+04	3,260E+04	2,046E+04	1,648E+04	1,656E+04
	Md	1,823E+04	3,388E+04	3,396E+04	3,188E+04	1,905E+04	1,594E+04	1,538E+04
	Q <sub>1</sub>	1,739E+04	3,283E+04	3,349E+04	3,079E+04	1,813E+04	1,511E+04	1,448E+04
	Min	1,540E+04	3,051E+04	3,252E+04	2,943E+04	1,510E+04	1,330E+04	1,211E+04
	MAD	9,313E+02	7,461E+02	3,619E+02	9,088E+02	1,190E+03	7,024E+02	9,852E+02
<b>F23</b>	Max	4,891E+03	6,356E+03	6,307E+03	6,327E+03	5,409E+03	3,046E+03	3,078E+03
	Q <sub>3</sub>	4,523E+03	6,019E+03	5,935E+03	5,568E+03	5,230E+03	3,004E+03	3,011E+03
	Md	4,423E+03	5,833E+03	5,760E+03	5,193E+03	5,149E+03	2,975E+03	2,997E+03
	Q <sub>1</sub>	4,277E+03	5,713E+03	5,616E+03	5,038E+03	4,880E+03	2,960E+03	2,980E+03
	Min	4,051E+03	5,400E+03	5,170E+03	4,714E+03	4,442E+03	2,913E+03	2,933E+03
	MAD	1,132E+02	1,666E+02	1,611E+02	1,888E+02	1,562E+02	1,764E+01	1,677E+01
<b>F24</b>	Max	5,545E+03	9,639E+03	9,991E+03	9,650E+03	7,678E+03	3,543E+03	3,614E+03
	Q <sub>3</sub>	5,209E+03	9,137E+03	9,237E+03	8,704E+03	7,371E+03	3,496E+03	3,553E+03
	Md	4,978E+03	8,829E+03	8,911E+03	8,403E+03	7,253E+03	3,476E+03	3,502E+03
	Q <sub>1</sub>	4,796E+03	8,472E+03	8,555E+03	7,989E+03	7,031E+03	3,456E+03	3,482E+03
	Min	4,422E+03	7,499E+03	7,649E+03	6,620E+03	6,503E+03	3,407E+03	3,422E+03
	MAD	2,021E+02	3,135E+02	3,492E+02	3,955E+02	1,479E+02	2,011E+01	3,039E+01
<b>F25</b>	Max	3,777E+03	8,879E+04	1,095E+05	7,792E+04	7,430E+03	3,393E+03	3,392E+03
	Q <sub>3</sub>	3,485E+03	6,355E+04	9,560E+04	5,098E+04	5,722E+03	3,325E+03	3,274E+03
	Md	3,433E+03	4,966E+04	6,900E+04	3,563E+04	5,206E+03	3,265E+03	3,227E+03
	Q <sub>1</sub>	3,401E+03	3,175E+04	2,779E+04	2,101E+04	4,643E+03	3,220E+03	3,198E+03
	Min	3,251E+03	1,799E+04	2,041E+04	1,236E+04	3,913E+03	3,138E+03	3,077E+03
	MAD	4,559E+01	1,626E+04	3,280E+04	1,517E+04	5,530E+02	5,878E+01	3,587E+01
<b>F26</b>	Max	2,452E+04	6,444E+04	6,451E+04	5,885E+04	4,978E+04	1,021E+04	9,091E+03
	Q <sub>3</sub>	1,804E+04	5,540E+04	5,931E+04	4,559E+04	4,260E+04	9,008E+03	8,392E+03
	Md	1,635E+04	4,804E+04	5,210E+04	4,090E+04	4,106E+04	8,646E+03	8,172E+03
	Q <sub>1</sub>	1,497E+04	4,323E+04	4,547E+04	3,470E+04	3,874E+04	8,358E+03	7,826E+03
	Min	1,148E+04	3,781E+04	4,127E+04	2,908E+04	3,358E+04	7,581E+03	7,419E+03
	MAD	1,433E+03	5,906E+03	6,924E+03	5,275E+03	1,873E+03	3,024E+02	2,930E+02
<b>F27</b>	Max	4,624E+03	1,244E+04	1,140E+04	3,200E+03	7,495E+03	3,786E+03	3,721E+03
	Q <sub>3</sub>	4,192E+03	1,079E+04	1,060E+04	3,200E+03	6,541E+03	3,665E+03	3,542E+03
	Md	4,013E+03	9,942E+03	1,017E+04	3,200E+03	6,150E+03	3,600E+03	3,506E+03
	Q <sub>1</sub>	3,890E+03	9,328E+03	9,574E+03	3,200E+03	5,658E+03	3,535E+03	3,471E+03
	Min	3,659E+03	8,442E+03	8,874E+03	3,200E+03	4,479E+03	3,450E+03	3,394E+03
	MAD	1,510E+02	6,815E+02	5,479E+02	7,903E-05	4,511E+02	6,629E+01	3,542E+01
<b>F28</b>	Max	7,815E+03	5,712E+04	5,849E+04	3,300E+03	1,632E+04	3,481E+03	3,434E+03
	Q <sub>3</sub>	5,039E+03	4,575E+04	5,376E+04	3,300E+03	1,296E+04	3,365E+03	3,353E+03
	Md	4,068E+03	3,786E+04	4,687E+04	3,300E+03	1,185E+04	3,346E+03	3,335E+03
	Q <sub>1</sub>	3,691E+03	3,298E+04	3,157E+04	3,300E+03	1,039E+04	3,339E+03	3,319E+03
	Min	3,463E+03	2,078E+04	2,289E+04	3,300E+03	6,081E+03	3,287E+03	3,278E+03
	MAD	4,971E+02	6,655E+03	8,360E+03	1,027E-04	1,436E+03	1,038E+01	1,655E+01
<b>F29</b>	Max	9,684E+03	2,184E+05	6,520E+05	1,649E+05	1,470E+04	7,213E+03	6,735E+03
	Q <sub>3</sub>	8,804E+03	8,425E+04	2,876E+05	2,977E+04	1,150E+04	6,066E+03	5,839E+03
	Md	8,336E+03	4,967E+04	1,243E+05	2,263E+04	1,068E+04	5,755E+03	5,578E+03
	Q <sub>1</sub>	7,919E+03	3,328E+04	9,335E+04	1,953E+04	9,896E+03	5,456E+03	5,211E+03
	Min	6,887E+03	2,164E+04	3,405E+04	1,474E+04	7,945E+03	4,886E+03	4,577E+03
	MAD	4,186E+02	1,879E+04	5,924E+04	3,788E+03	7,944E+02	3,111E+02	3,127E+02
<b>F30</b>	Max	1,474E+09	3,429E+10	3,846E+10	1,912E+10	5,536E+07	1,483E+04	9,711E+03
	Q <sub>3</sub>	1,593E+08	2,318E+10	2,692E+10	8,861E+09	1,997E+07	7,407E+03	6,931E+03
	Md	1,763E+07	1,823E+10	2,368E+10	6,745E+09	1,129E+07	6,424E+03	6,413E+03
	Q <sub>1</sub>	8,340E+06	1,435E+10	1,953E+10	5,057E+09	7,550E+06	5,952E+03	6,129E+03
	Min	1,763E+06	9,211E+09	1,255E+10	2,808E+09	3,777E+06	5,580E+03	5,586E+03
	MAD	1,186E+07	4,564E+09	3,282E+09	1,984E+09	5,096E+06	5,172E+02	3,905E+02

Tabela 36 – Medidas descritivas do grupo DEM unimultimodais com  $D = 100$ 

	DE	JADE(1)	JADE(2)	L-SHADE	TSDE	JMBO(1)	JMBO(2)	
<b>F01</b>	Max	1,980E+04	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	4,250E+04	2,416E+04	7,307E+03
	Q <sub>3</sub>	6,546E+03	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	2,342E+04	3,472E+03	9,411E+02
	Md	3,311E+03	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,787E+04	1,381E+03	3,999E+02
	Q <sub>1</sub>	6,629E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,480E+04	3,412E+02	1,758E+02
	Min	1,010E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,004E+04	1,007E+02	1,000E+02
	MAD	2,814E+03	6,460E-11	2,842E-14	4,461E-11	3,289E+03	1,076E+03	2,676E+02
<b>F03</b>	Max	4,873E+05	4,338E+05	4,621E+05	5,145E+05	2,368E+04	3,381E+04	1,053E+04
	Q <sub>3</sub>	4,220E+05	3,504E+05	3,882E+05	3,000E+02	1,478E+04	1,734E+04	5,670E+03
	Md	4,076E+05	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02	1,339E+04	1,480E+04	3,628E+03
	Q <sub>1</sub>	3,846E+05	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02	1,175E+04	1,159E+04	2,733E+03
	Min	3,437E+05	3,000E+02	3,000E+02	3,000E+02	7,247E+03	6,825E+03	1,234E+03
	MAD	1,812E+04	4,859E-04	2,406E-06	4,614E-09	1,512E+03	2,861E+03	1,379E+03
<b>F04</b>	Max	6,853E+02	6,353E+02	5,998E+02	6,277E+02	6,900E+02	6,246E+02	6,601E+02
	Q <sub>3</sub>	6,274E+02	5,561E+02	5,066E+02	5,839E+02	6,363E+02	5,718E+02	6,185E+02
	Md	6,204E+02	5,438E+02	4,692E+02	5,100E+02	6,114E+02	5,382E+02	5,696E+02
	Q <sub>1</sub>	6,007E+02	4,791E+02	4,033E+02	4,694E+02	6,059E+02	4,760E+02	4,999E+02
	Min	5,974E+02	4,620E+02	4,000E+02	4,000E+02	6,039E+02	4,593E+02	4,150E+02
	MAD	1,359E+01	5,692E+01	6,519E+01	7,395E+01	6,942E+00	6,101E+01	5,248E+01
<b>F05</b>	Max	1,388E+03	7,266E+02	7,237E+02	6,174E+02	1,357E+03	8,015E+02	7,159E+02
	Q <sub>3</sub>	1,362E+03	7,035E+02	6,886E+02	5,866E+02	1,327E+03	7,579E+02	6,821E+02
	Md	1,352E+03	6,909E+02	6,779E+02	5,766E+02	1,310E+03	7,348E+02	6,672E+02
	Q <sub>1</sub>	1,343E+03	6,743E+02	6,649E+02	5,727E+02	1,283E+03	7,084E+02	6,552E+02
	Min	1,304E+03	6,456E+02	6,283E+02	5,567E+02	1,222E+03	6,492E+02	6,274E+02
	MAD	9,807E+00	1,455E+01	1,262E+01	5,981E+00	2,195E+01	2,487E+01	1,293E+01
<b>F06</b>	Max	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,028E+02	6,005E+02	6,042E+02	6,026E+02
	Q <sub>3</sub>	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,013E+02	6,004E+02	6,022E+02	6,011E+02
	Md	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,010E+02	6,004E+02	6,018E+02	6,007E+02
	Q <sub>1</sub>	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,008E+02	6,003E+02	6,014E+02	6,004E+02
	Min	6,000E+02	6,000E+02	6,000E+02	6,003E+02	6,003E+02	6,006E+02	6,001E+02
	MAD	9,416E-05	6,290E-07	9,325E-06	2,877E-01	3,666E-02	4,476E-01	3,292E-01
<b>F07</b>	Max	1,685E+03	1,050E+03	1,028E+03	9,778E+02	1,663E+03	1,168E+03	1,128E+03
	Q <sub>3</sub>	1,671E+03	1,011E+03	1,001E+03	9,404E+02	1,634E+03	1,086E+03	1,045E+03
	Md	1,654E+03	9,993E+02	9,838E+02	9,249E+02	1,616E+03	1,057E+03	1,022E+03
	Q <sub>1</sub>	1,640E+03	9,874E+02	9,731E+02	9,149E+02	1,596E+03	1,026E+03	9,973E+02
	Min	1,611E+03	9,490E+02	9,435E+02	8,916E+02	1,546E+03	1,002E+03	9,476E+02
	MAD	1,675E+01	1,159E+01	1,455E+01	1,490E+01	1,850E+01	3,125E+01	2,400E+01
<b>F08</b>	Max	1,686E+03	1,049E+03	1,030E+03	8,965E+02	1,643E+03	1,109E+03	1,018E+03
	Q <sub>3</sub>	1,662E+03	9,980E+02	9,884E+02	8,826E+02	1,616E+03	1,055E+03	9,898E+02
	Md	1,653E+03	9,869E+02	9,757E+02	8,776E+02	1,596E+03	1,031E+03	9,801E+02
	Q <sub>1</sub>	1,642E+03	9,712E+02	9,586E+02	8,716E+02	1,575E+03	1,006E+03	9,696E+02
	Min	1,616E+03	9,542E+02	9,368E+02	8,587E+02	1,498E+03	9,781E+02	9,303E+02
	MAD	9,937E+00	1,252E+01	1,332E+01	4,982E+00	2,052E+01	2,487E+01	9,950E+00
<b>F09</b>	Max	9,017E+02	9,467E+02	9,337E+02	1,193E+03	1,018E+03	2,543E+03	1,990E+03
	Q <sub>3</sub>	9,000E+02	9,292E+02	9,139E+02	1,048E+03	9,553E+02	1,530E+03	1,145E+03
	Md	9,000E+02	9,183E+02	9,096E+02	1,002E+03	9,427E+02	1,296E+03	1,060E+03
	Q <sub>1</sub>	9,000E+02	9,131E+02	9,065E+02	9,721E+02	9,319E+02	1,164E+03	1,023E+03
	Min	9,000E+02	9,053E+02	9,033E+02	9,465E+02	9,211E+02	1,002E+03	9,421E+02
	MAD	9,881E-07	6,793E+00	3,588E+00	3,174E+01	1,161E+01	1,898E+02	5,333E+01
<b>F10</b>	Max	3,131E+04	1,581E+04	1,548E+04	1,045E+04	2,905E+04	1,583E+04	1,591E+04
	Q <sub>3</sub>	3,083E+04	1,495E+04	1,501E+04	1,013E+04	2,860E+04	1,465E+04	1,458E+04
	Md	3,065E+04	1,476E+04	1,478E+04	9,682E+03	2,827E+04	1,381E+04	1,347E+04
	Q <sub>1</sub>	3,037E+04	1,435E+04	1,444E+04	9,371E+03	2,795E+04	1,296E+04	1,287E+04
	Min	2,929E+04	1,238E+04	1,367E+04	7,812E+03	2,687E+04	1,130E+04	1,072E+04
	MAD	2,539E+02	2,697E+02	2,378E+02	3,370E+02	3,260E+02	8,440E+02	8,588E+02

Tabela 37 – Medidas descritivas do grupo DEM híbridas com  $D = 100$ 

	DE	JADE(1)	JADE(2)	L-SHADE	TSDE	JMBO(1)	JMBO(2)	
<b>F11</b>	Max	1,826E+03	2,262E+04	2,529E+04	3,101E+04	1,798E+03	2,374E+03	2,763E+03
	Q <sub>3</sub>	1,764E+03	1,651E+04	1,666E+04	2,321E+03	1,739E+03	2,084E+03	2,444E+03
	Md	1,736E+03	2,295E+03	2,376E+03	2,184E+03	1,716E+03	1,982E+03	2,268E+03
	Q <sub>1</sub>	1,700E+03	1,970E+03	2,005E+03	2,022E+03	1,691E+03	1,797E+03	2,118E+03
	Min	1,624E+03	1,688E+03	1,691E+03	1,807E+03	1,626E+03	1,589E+03	1,825E+03
	MAD	2,998E+01	4,827E+02	5,999E+02	1,426E+02	2,337E+01	1,182E+02	1,498E+02
<b>F12</b>	Max	4,167E+06	5,745E+04	4,184E+04	1,327E+05	5,945E+06	7,572E+05	1,430E+06
	Q <sub>3</sub>	1,515E+06	3,881E+04	2,168E+04	2,879E+04	3,129E+06	4,456E+05	8,008E+05
	Md	1,322E+06	2,758E+04	1,718E+04	2,288E+04	2,334E+06	3,488E+05	5,391E+05
	Q <sub>1</sub>	1,109E+06	1,885E+04	1,418E+04	1,822E+04	1,802E+06	2,628E+05	3,946E+05
	Min	5,685E+05	1,169E+04	5,430E+03	9,085E+03	1,093E+06	1,225E+05	2,263E+05
	MAD	2,032E+05	9,903E+03	3,595E+03	5,005E+03	5,864E+05	9,364E+04	1,616E+05
<b>F13</b>	Max	1,593E+04	7,548E+03	1,587E+04	5,883E+03	4,837E+03	1,208E+04	4,982E+04
	Q <sub>3</sub>	5,063E+03	4,602E+03	6,172E+03	4,528E+03	3,411E+03	6,335E+03	5,426E+03
	Md	2,932E+03	3,138E+03	3,408E+03	3,894E+03	2,972E+03	4,655E+03	2,881E+03
	Q <sub>1</sub>	1,987E+03	2,002E+03	2,277E+03	2,268E+03	2,581E+03	3,096E+03	2,067E+03
	Min	1,694E+03	1,417E+03	1,414E+03	1,469E+03	2,160E+03	1,566E+03	1,460E+03
	MAD	1,197E+03	1,171E+03	1,410E+03	1,167E+03	3,903E+02	1,577E+03	1,067E+03
<b>F14</b>	Max	1,818E+03	2,203E+03	2,280E+03	2,269E+03	1,785E+03	9,340E+04	3,198E+03
	Q <sub>3</sub>	1,789E+03	1,974E+03	2,063E+03	2,064E+03	1,755E+03	1,322E+04	2,247E+03
	Md	1,778E+03	1,903E+03	1,975E+03	1,976E+03	1,747E+03	6,458E+03	2,110E+03
	Q <sub>1</sub>	1,765E+03	1,822E+03	1,863E+03	1,860E+03	1,739E+03	4,471E+03	1,979E+03
	Min	1,732E+03	1,660E+03	1,710E+03	1,689E+03	1,707E+03	2,046E+03	1,677E+03
	MAD	1,120E+01	7,202E+01	1,118E+02	1,014E+02	7,497E+00	3,333E+03	1,361E+02
<b>F15</b>	Max	2,271E+03	2,955E+03	2,231E+03	2,018E+03	2,128E+03	1,795E+04	1,615E+04
	Q <sub>3</sub>	2,108E+03	1,974E+03	1,889E+03	1,868E+03	2,063E+03	5,366E+03	5,526E+03
	Md	2,091E+03	1,864E+03	1,819E+03	1,824E+03	2,044E+03	2,914E+03	3,213E+03
	Q <sub>1</sub>	2,068E+03	1,798E+03	1,752E+03	1,773E+03	2,011E+03	2,070E+03	2,216E+03
	Min	2,016E+03	1,714E+03	1,677E+03	1,691E+03	1,950E+03	1,814E+03	1,780E+03
	MAD	1,974E+01	6,941E+01	6,685E+01	4,871E+01	2,437E+01	9,397E+02	1,217E+03
<b>F16</b>	Max	9,814E+03	5,323E+03	5,357E+03	4,191E+03	9,294E+03	5,043E+03	5,212E+03
	Q <sub>3</sub>	9,524E+03	4,878E+03	4,868E+03	3,904E+03	8,686E+03	4,297E+03	4,379E+03
	Md	9,454E+03	4,607E+03	4,703E+03	3,693E+03	8,442E+03	3,932E+03	3,930E+03
	Q <sub>1</sub>	9,150E+03	4,409E+03	4,464E+03	3,336E+03	8,028E+03	3,591E+03	3,512E+03
	Min	8,796E+03	3,749E+03	4,087E+03	2,898E+03	5,114E+03	3,018E+03	2,998E+03
	MAD	1,651E+02	2,551E+02	1,724E+02	2,727E+02	2,900E+02	3,465E+02	4,595E+02
<b>F17</b>	Max	7,048E+03	4,500E+03	4,498E+03	3,632E+03	6,302E+03	4,957E+03	4,491E+03
	Q <sub>3</sub>	6,731E+03	4,229E+03	4,177E+03	3,333E+03	5,809E+03	3,873E+03	3,844E+03
	Md	6,616E+03	4,082E+03	4,050E+03	3,214E+03	5,464E+03	3,605E+03	3,594E+03
	Q <sub>1</sub>	6,461E+03	3,932E+03	3,842E+03	3,092E+03	5,086E+03	3,353E+03	3,374E+03
	Min	6,003E+03	3,557E+03	3,460E+03	2,559E+03	3,339E+03	2,832E+03	2,852E+03
	MAD	1,390E+02	1,490E+02	1,600E+02	1,187E+02	3,473E+02	2,654E+02	2,287E+02
<b>F18</b>	Max	3,902E+05	7,530E+03	3,239E+03	4,491E+03	1,012E+04	7,244E+05	1,470E+05
	Q <sub>3</sub>	3,000E+05	3,520E+03	2,433E+03	2,764E+03	4,689E+03	2,086E+05	7,922E+04
	Md	2,573E+05	2,876E+03	2,262E+03	2,472E+03	3,969E+03	1,493E+05	6,934E+04
	Q <sub>1</sub>	2,253E+05	2,484E+03	2,127E+03	2,278E+03	3,504E+03	1,079E+05	5,480E+04
	Min	1,485E+05	2,142E+03	1,983E+03	1,974E+03	2,678E+03	8,088E+04	2,415E+04
	MAD	3,693E+04	4,811E+02	1,392E+02	2,365E+02	5,548E+02	4,324E+04	1,265E+04
<b>F19</b>	Max	2,240E+03	2,272E+03	2,255E+03	2,290E+03	2,149E+03	1,686E+04	1,165E+04
	Q <sub>3</sub>	2,172E+03	2,150E+03	2,179E+03	2,179E+03	2,136E+03	4,849E+03	4,203E+03
	Md	2,158E+03	2,116E+03	2,140E+03	2,149E+03	2,128E+03	2,966E+03	3,176E+03
	Q <sub>1</sub>	2,143E+03	2,089E+03	2,100E+03	2,113E+03	2,114E+03	2,441E+03	2,478E+03
	Min	2,108E+03	2,044E+03	2,055E+03	2,048E+03	2,093E+03	2,019E+03	2,025E+03
	MAD	1,481E+01	2,952E+01	3,846E+01	3,387E+01	1,181E+01	7,086E+02	8,226E+02
<b>F20</b>	Max	7,081E+03	4,826E+03	4,822E+03	3,943E+03	5,444E+03	4,612E+03	4,912E+03
	Q <sub>3</sub>	6,835E+03	4,584E+03	4,454E+03	3,602E+03	4,406E+03	3,976E+03	4,007E+03
	Md	6,689E+03	4,387E+03	4,349E+03	3,484E+03	4,012E+03	3,739E+03	3,800E+03
	Q <sub>1</sub>	6,565E+03	4,216E+03	4,212E+03	3,326E+03	3,814E+03	3,523E+03	3,525E+03
	Min	6,163E+03	3,812E+03	3,841E+03	3,109E+03	2,978E+03	3,072E+03	3,065E+03
	MAD	1,258E+02	1,798E+02	1,098E+02	1,260E+02	2,969E+02	2,348E+02	2,461E+02

Tabela 38 – Medidas descritivas do grupo DEM compostas com  $D = 100$ 

	DE	JADE(1)	JADE(2)	L-SHADE	TSDE	JMBO(1)	JMBO(2)	
<b>F21</b>	Max	3,225E+03	2,546E+03	2,539E+03	2,426E+03	3,203E+03	2,573E+03	2,566E+03
	Q <sub>3</sub>	3,197E+03	2,514E+03	2,503E+03	2,409E+03	3,165E+03	2,514E+03	2,499E+03
	Md	3,186E+03	2,496E+03	2,496E+03	2,400E+03	3,145E+03	2,502E+03	2,487E+03
	Q <sub>1</sub>	3,171E+03	2,482E+03	2,483E+03	2,394E+03	3,123E+03	2,487E+03	2,480E+03
	Min	3,143E+03	2,455E+03	2,461E+03	2,385E+03	3,038E+03	2,450E+03	2,444E+03
	MAD	1,327E+01	1,507E+01	9,698E+00	6,664E+00	2,086E+01	1,396E+01	9,268E+00
<b>F22</b>	Max	3,323E+04	1,776E+04	1,798E+04	1,292E+04	3,152E+04	1,811E+04	1,900E+04
	Q <sub>3</sub>	3,291E+04	1,723E+04	1,736E+04	1,224E+04	3,082E+04	1,648E+04	1,656E+04
	Md	3,254E+04	1,697E+04	1,691E+04	1,194E+04	3,045E+04	1,594E+04	1,538E+04
	Q <sub>1</sub>	3,226E+04	1,669E+04	1,655E+04	1,136E+04	3,017E+04	1,511E+04	1,448E+04
	Min	3,114E+04	1,559E+04	1,512E+04	1,083E+04	2,880E+04	1,330E+04	1,211E+04
	MAD	3,164E+02	2,618E+02	4,285E+02	3,847E+02	3,149E+02	7,024E+02	9,852E+02
<b>F23</b>	Max	3,742E+03	3,016E+03	3,011E+03	2,984E+03	3,655E+03	3,046E+03	3,078E+03
	Q <sub>3</sub>	3,704E+03	2,996E+03	2,988E+03	2,917E+03	3,617E+03	3,004E+03	3,011E+03
	Md	3,692E+03	2,986E+03	2,978E+03	2,895E+03	3,606E+03	2,975E+03	2,997E+03
	Q <sub>1</sub>	3,677E+03	2,976E+03	2,970E+03	2,883E+03	3,580E+03	2,960E+03	2,980E+03
	Min	3,640E+03	2,937E+03	2,946E+03	2,864E+03	3,494E+03	2,913E+03	2,933E+03
	MAD	1,349E+01	9,742E+00	9,046E+00	1,403E+01	1,469E+01	1,764E+01	1,677E+01
<b>F24</b>	Max	4,152E+03	3,471E+03	3,519E+03	3,472E+03	4,120E+03	3,543E+03	3,614E+03
	Q <sub>3</sub>	4,126E+03	3,442E+03	3,440E+03	3,426E+03	4,091E+03	3,496E+03	3,553E+03
	Md	4,105E+03	3,427E+03	3,428E+03	3,401E+03	4,067E+03	3,476E+03	3,502E+03
	Q <sub>1</sub>	4,093E+03	3,413E+03	3,418E+03	3,388E+03	4,044E+03	3,456E+03	3,482E+03
	Min	4,026E+03	3,376E+03	3,389E+03	3,347E+03	3,980E+03	3,407E+03	3,422E+03
	MAD	1,861E+01	1,488E+01	1,059E+01	1,606E+01	2,363E+01	2,011E+01	3,039E+01
<b>F25</b>	Max	3,279E+03	3,383E+03	3,361E+03	3,401E+03	3,335E+03	3,393E+03	3,392E+03
	Q <sub>3</sub>	3,262E+03	3,320E+03	3,274E+03	3,274E+03	3,311E+03	3,325E+03	3,274E+03
	Md	3,216E+03	3,290E+03	3,262E+03	3,216E+03	3,280E+03	3,265E+03	3,227E+03
	Q <sub>1</sub>	3,203E+03	3,222E+03	3,215E+03	3,198E+03	3,257E+03	3,220E+03	3,198E+03
	Min	3,138E+03	3,138E+03	3,138E+03	3,078E+03	3,191E+03	3,138E+03	3,077E+03
	MAD	1,431E+01	3,679E+01	3,132E+01	4,590E+01	2,536E+01	5,878E+01	3,587E+01
<b>F26</b>	Max	1,433E+04	7,772E+03	7,508E+03	7,305E+03	1,397E+04	1,021E+04	9,091E+03
	Q <sub>3</sub>	1,408E+04	7,338E+03	7,250E+03	7,053E+03	1,353E+04	9,008E+03	8,392E+03
	Md	1,389E+04	7,176E+03	7,107E+03	6,908E+03	1,331E+04	8,646E+03	8,172E+03
	Q <sub>1</sub>	1,375E+04	7,018E+03	6,928E+03	6,782E+03	1,299E+04	8,358E+03	7,826E+03
	Min	1,322E+04	6,566E+03	6,699E+03	6,402E+03	1,151E+04	7,581E+03	7,419E+03
	MAD	1,736E+02	1,575E+02	1,486E+02	1,372E+02	2,590E+02	3,024E+02	2,930E+02
<b>F27</b>	Max	3,411E+03	3,492E+03	3,424E+03	3,536E+03	3,502E+03	3,786E+03	3,721E+03
	Q <sub>3</sub>	3,360E+03	3,448E+03	3,400E+03	3,437E+03	3,442E+03	3,665E+03	3,542E+03
	Md	3,339E+03	3,430E+03	3,382E+03	3,396E+03	3,412E+03	3,600E+03	3,506E+03
	Q <sub>1</sub>	3,319E+03	3,404E+03	3,367E+03	3,371E+03	3,397E+03	3,535E+03	3,471E+03
	Min	3,277E+03	3,362E+03	3,330E+03	3,329E+03	3,360E+03	3,450E+03	3,394E+03
	MAD	2,031E+01	1,943E+01	1,507E+01	3,226E+01	2,251E+01	6,629E+01	3,542E+01
<b>F28</b>	Max	3,390E+03	3,434E+03	3,390E+03	3,425E+03	3,403E+03	3,481E+03	3,434E+03
	Q <sub>3</sub>	3,352E+03	3,388E+03	3,344E+03	3,343E+03	3,377E+03	3,365E+03	3,353E+03
	Md	3,338E+03	3,353E+03	3,322E+03	3,322E+03	3,369E+03	3,346E+03	3,335E+03
	Q <sub>1</sub>	3,323E+03	3,345E+03	3,294E+03	3,319E+03	3,361E+03	3,339E+03	3,319E+03
	Min	3,283E+03	3,292E+03	3,100E+03	3,278E+03	3,347E+03	3,287E+03	3,278E+03
	MAD	1,454E+01	1,388E+01	2,436E+01	2,082E+01	7,969E+00	1,038E+01	1,655E+01
<b>F29</b>	Max	9,130E+03	5,788E+03	5,537E+03	5,623E+03	8,490E+03	7,213E+03	6,735E+03
	Q <sub>3</sub>	8,789E+03	5,288E+03	5,361E+03	4,878E+03	8,099E+03	6,066E+03	5,839E+03
	Md	8,652E+03	5,127E+03	5,140E+03	4,687E+03	7,888E+03	5,755E+03	5,578E+03
	Q <sub>1</sub>	8,397E+03	4,963E+03	5,005E+03	4,448E+03	7,639E+03	5,456E+03	5,211E+03
	Min	7,275E+03	4,576E+03	4,569E+03	3,976E+03	6,505E+03	4,886E+03	4,577E+03
	MAD	1,447E+02	1,635E+02	1,737E+02	2,132E+02	2,276E+02	3,111E+02	3,127E+02
<b>F30</b>	Max	8,670E+03	9,595E+03	1,114E+04	1,133E+04	9,626E+03	1,483E+04	9,711E+03
	Q <sub>3</sub>	7,312E+03	6,764E+03	6,958E+03	5,930E+03	8,683E+03	7,407E+03	6,931E+03
	Md	7,039E+03	5,787E+03	5,825E+03	5,713E+03	8,223E+03	6,424E+03	6,413E+03
	Q <sub>1</sub>	6,839E+03	5,538E+03	5,502E+03	5,523E+03	7,928E+03	5,952E+03	6,129E+03
	Min	6,428E+03	5,231E+03	5,277E+03	5,275E+03	7,127E+03	5,580E+03	5,586E+03
	MAD	2,453E+02	3,325E+02	3,938E+02	2,040E+02	3,414E+02	5,172E+02	3,905E+02

Tabela 39 – RMSE do grupo SIM com  $D = 30$ 

	PSO	MBO	MBO-FS	GCMBO	IMBO	JMBO(1)	JMBO(2)
<b>F01</b>	6,012E+08	4,547E+10	6,110E+10	2,704E+10	5,035E+03	3,152E+00	1,865E-02
<b>F03</b>	3,386E+01	1,397E+05	1,338E+05	1,180E+05	1,779E+04	2,380E-13	8,078E-14
<b>F04</b>	1,843E+02	9,539E+03	1,294E+04	3,084E+03	1,229E+02	2,837E+01	4,778E+01
<b>F05</b>	1,158E+02	4,048E+02	4,503E+02	3,173E+02	2,688E+02	5,091E+01	4,373E+01
<b>F06</b>	2,413E+01	8,839E+01	9,132E+01	5,618E+01	6,089E+01	4,602E-01	2,662E-01
<b>F07</b>	1,213E+02	9,782E+02	1,572E+03	7,178E+02	1,631E+03	1,018E+02	7,892E+01
<b>F08</b>	1,096E+02	3,808E+02	4,233E+02	3,120E+02	2,458E+02	5,065E+01	4,741E+01
<b>F09</b>	8,494E+02	1,505E+04	1,528E+04	9,197E+03	7,638E+03	1,580E+02	2,072E+01
<b>F10</b>	3,655E+03	6,907E+03	7,225E+03	6,452E+03	4,542E+03	3,417E+03	3,219E+03
<b>F11</b>	1,639E+02	7,234E+03	6,926E+03	3,888E+03	2,095E+02	1,285E+02	1,437E+02
<b>F12</b>	3,208E+07	4,214E+09	6,861E+09	1,922E+09	9,521E+05	1,116E+04	1,446E+04
<b>F13</b>	1,088E+06	3,435E+09	3,775E+09	9,797E+08	1,100E+05	8,430E+03	1,913E+03
<b>F14</b>	2,428E+03	4,989E+06	1,120E+06	2,347E+06	3,279E+03	2,134E+02	1,968E+02
<b>F15</b>	1,374E+04	1,010E+08	3,736E+08	4,168E+07	8,838E+04	4,040E+02	3,298E+02
<b>F16</b>	6,796E+02	2,555E+03	2,970E+03	2,017E+03	1,598E+03	5,678E+02	4,627E+02
<b>F17</b>	3,798E+02	1,286E+03	1,509E+03	1,045E+03	8,716E+02	2,045E+02	2,062E+02
<b>F18</b>	2,931E+05	1,845E+07	1,771E+07	2,250E+07	1,312E+05	7,199E+03	8,568E+03
<b>F19</b>	4,456E+04	3,851E+08	5,631E+08	1,163E+08	1,472E+05	6,354E+02	2,146E+02
<b>F20</b>	3,550E+02	9,106E+02	8,242E+02	8,559E+02	6,496E+02	2,474E+02	1,797E+02
<b>F21</b>	3,237E+02	5,526E+02	6,019E+02	4,721E+02	4,539E+02	2,527E+02	2,459E+02
<b>F22</b>	3,506E+02	6,304E+03	6,581E+03	5,465E+03	2,718E+03	1,010E+02	5,319E+02
<b>F23</b>	5,673E+02	9,099E+02	9,213E+02	7,360E+02	9,033E+02	4,071E+02	4,008E+02
<b>F24</b>	6,868E+02	1,040E+03	1,040E+03	8,510E+02	1,025E+03	4,677E+02	4,727E+02
<b>F25</b>	4,018E+02	2,323E+03	3,693E+03	1,060E+03	4,393E+02	3,917E+02	3,890E+02
<b>F26</b>	2,251E+03	6,303E+03	7,518E+03	5,410E+03	5,997E+03	2,089E+03	1,610E+03
<b>F27</b>	5,820E+02	1,174E+03	1,073E+03	5,000E+02	1,076E+03	5,286E+02	5,265E+02
<b>F28</b>	4,923E+02	3,580E+03	3,979E+03	5,000E+02	4,588E+02	3,232E+02	3,347E+02
<b>F29</b>	8,869E+02	2,808E+03	2,779E+03	2,259E+03	1,614E+03	7,049E+02	6,592E+02
<b>F30</b>	1,890E+05	2,158E+08	3,553E+08	1,018E+08	8,870E+05	6,179E+03	5,431E+03

Tabela 40 – RMSE do grupo DEM com  $D = 30$ 

	DE	JADE(1)	JADE(2)	L-SHADE	TSDE	JMBO(1)	JMBO(2)
<b>F01</b>	1,393E-14	3,221E-14	2,039E-14	2,461E-14	5,464E-14	3,152E+00	1,865E-02
<b>F03</b>	7,101E-04	1,080E+04	9,904E+03	2,277E+04	6,673E-10	2,380E-13	8,078E-14
<b>F04</b>	5,396E+01	3,947E+01	4,955E+01	5,411E+01	5,969E+01	2,837E+01	4,778E+01
<b>F05</b>	1,414E+02	2,513E+01	2,551E+01	1,812E+01	4,177E+01	5,091E+01	4,373E+01
<b>F06</b>	3,870E-05	1,137E-13	1,137E-13	5,465E-02	6,513E-09	4,602E-01	2,662E-01
<b>F07</b>	1,900E+02	5,459E+01	5,471E+01	5,279E+01	7,355E+01	1,018E+02	7,892E+01
<b>F08</b>	1,372E+02	2,702E+01	2,561E+01	1,846E+01	4,398E+01	5,065E+01	4,741E+01
<b>F09</b>	2,584E-01	2,696E-01	1,958E-01	6,983E+00	4,212E-14	1,580E+02	2,072E+01
<b>F10</b>	6,645E+03	1,884E+03	1,826E+03	1,796E+03	2,187E+03	3,417E+03	3,219E+03
<b>F11</b>	1,855E+01	4,673E+01	5,117E+01	8,326E+01	2,391E+01	1,285E+02	1,437E+02
<b>F12</b>	1,854E+04	1,005E+04	5,175E+03	1,072E+04	6,617E+03	1,116E+04	1,446E+04
<b>F13</b>	8,228E+01	2,064E+02	4,766E+03	1,942E+02	2,243E+01	8,430E+03	1,913E+03
<b>F14</b>	2,950E+01	4,754E+03	5,384E+03	7,024E+01	1,259E+01	2,134E+02	1,968E+02
<b>F15</b>	9,647E+00	3,980E+02	1,263E+03	1,203E+02	6,690E+00	4,040E+02	3,298E+02
<b>F16</b>	3,650E+02	3,962E+02	3,465E+02	3,429E+02	3,981E+02	5,678E+02	4,627E+02
<b>F17</b>	4,411E+01	9,380E+01	9,557E+01	9,363E+01	4,311E+01	2,045E+02	2,062E+02
<b>F18</b>	2,424E+02	3,449E+04	4,124E+04	1,762E+02	2,190E+01	7,199E+03	8,568E+03
<b>F19</b>	6,155E+00	6,984E+02	2,462E+03	5,742E+01	5,220E+00	6,354E+02	2,146E+02
<b>F20</b>	7,379E+01	1,302E+02	1,372E+02	1,411E+02	8,211E+01	2,474E+02	1,797E+02
<b>F21</b>	3,116E+02	2,268E+02	2,258E+02	2,194E+02	2,438E+02	2,527E+02	2,459E+02
<b>F22</b>	1,000E+02	1,000E+02	1,000E+02	1,003E+02	1,000E+02	1,010E+02	5,319E+02
<b>F23</b>	3,858E+02	3,750E+02	3,752E+02	3,698E+02	3,853E+02	4,071E+02	4,008E+02
<b>F24</b>	4,717E+02	4,429E+02	4,437E+02	4,418E+02	4,543E+02	4,677E+02	4,727E+02
<b>F25</b>	3,869E+02	3,874E+02	3,870E+02	3,874E+02	3,867E+02	3,917E+02	3,890E+02
<b>F26</b>	1,148E+03	1,228E+03	1,230E+03	1,189E+03	1,324E+03	2,089E+03	1,610E+03
<b>F27</b>	4,959E+02	5,069E+02	5,075E+02	5,106E+02	4,853E+02	5,286E+02	5,265E+02
<b>F28</b>	3,388E+02	3,182E+02	3,396E+02	3,520E+02	3,072E+02	3,232E+02	3,347E+02
<b>F29</b>	4,211E+02	4,901E+02	4,799E+02	4,858E+02	4,286E+02	7,049E+02	6,592E+02
<b>F30</b>	2,057E+03	2,518E+03	2,403E+03	2,250E+03	2,007E+03	6,179E+03	5,431E+03

Tabela 41 – RMSE do grupo SIM com  $D = 100$ 

	PSO	MBO	MBO-FS	GCMBO	IMBO	JMBO(1)	JMBO(2)
<b>F01</b>	5,394E+09	3,483E+11	3,740E+11	2,752E+11	7,234E+10	4,721E+03	1,589E+03
<b>F03</b>	1,898E+04	8,483E+05	6,067E+05	7,623E+05	3,804E+05	1,597E+04	4,313E+03
<b>F04</b>	1,149E+03	1,031E+05	1,478E+05	7,252E+04	3,955E+03	1,441E+02	1,701E+02
<b>F05</b>	5,913E+02	2,005E+03	2,076E+03	1,700E+03	1,203E+03	2,359E+02	1,692E+02
<b>F06</b>	4,819E+01	1,307E+02	1,396E+02	1,186E+02	7,980E+01	1,978E+00	9,521E-01
<b>F07</b>	8,920E+02	8,024E+03	1,017E+04	5,531E+03	9,158E+03	3,609E+02	3,250E+02
<b>F08</b>	6,465E+02	1,955E+03	2,144E+03	1,681E+03	1,389E+03	2,347E+02	1,811E+02
<b>F09</b>	2,470E+04	1,113E+05	1,130E+05	9,610E+04	3,813E+04	6,007E+02	2,664E+02
<b>F10</b>	1,394E+04	3,014E+04	3,020E+04	2,794E+04	1,514E+04	1,280E+04	1,268E+04
<b>F11</b>	2,395E+03	2,602E+05	2,487E+05	2,373E+05	1,819E+04	8,788E+02	1,194E+03
<b>F12</b>	2,067E+09	1,580E+11	1,851E+11	1,095E+11	3,106E+09	3,985E+05	6,815E+05
<b>F13</b>	2,572E+08	3,051E+10	4,414E+10	1,720E+10	8,281E+04	4,377E+03	8,926E+03
<b>F14</b>	7,619E+05	8,119E+07	9,159E+07	7,264E+07	2,741E+05	1,836E+04	8,043E+02
<b>F15</b>	2,542E+08	1,159E+10	1,763E+10	6,148E+09	9,388E+04	4,837E+03	3,699E+03
<b>F16</b>	3,987E+03	1,578E+04	1,804E+04	1,184E+04	5,761E+03	2,425E+03	2,474E+03
<b>F17</b>	3,398E+03	1,349E+06	7,018E+05	2,645E+04	4,890E+03	1,972E+03	1,940E+03
<b>F18</b>	8,493E+05	1,193E+08	1,548E+08	1,050E+08	4,594E+05	1,960E+05	7,168E+04
<b>F19</b>	1,127E+07	1,192E+10	1,737E+10	5,053E+09	1,354E+06	4,037E+03	2,749E+03
<b>F20</b>	2,817E+03	5,435E+03	5,493E+03	5,012E+03	3,861E+03	1,807E+03	1,843E+03
<b>F21</b>	1,047E+03	2,468E+03	2,495E+03	2,038E+03	1,891E+03	4,023E+02	3,909E+02
<b>F22</b>	1,637E+04	3,143E+04	3,170E+04	2,959E+04	1,700E+04	1,374E+04	1,334E+04
<b>F23</b>	2,124E+03	3,563E+03	3,481E+03	3,042E+03	2,785E+03	6,795E+02	6,979E+02
<b>F24</b>	2,633E+03	6,382E+03	6,499E+03	6,006E+03	4,797E+03	1,077E+03	1,115E+03
<b>F25</b>	9,479E+02	4,970E+04	6,952E+04	3,952E+04	2,906E+03	7,728E+02	7,383E+02
<b>F26</b>	1,419E+04	4,699E+04	5,062E+04	3,906E+04	3,829E+04	6,176E+03	5,537E+03
<b>F27</b>	1,364E+03	7,448E+03	7,437E+03	5,000E+02	3,495E+03	9,076E+02	8,153E+02
<b>F28</b>	2,097E+03	3,636E+04	4,188E+04	5,000E+02	9,043E+03	5,548E+02	5,344E+02
<b>F29</b>	5,470E+03	8,180E+04	2,370E+05	3,879E+04	7,992E+03	2,932E+03	2,676E+03
<b>F30</b>	3,789E+08	1,945E+10	2,432E+10	8,200E+09	1,931E+07	4,689E+03	3,807E+03

Tabela 42 – RMSE do grupo DEM com  $D = 100$ 

	DE	JADE(1)	JADE(2)	L-SHADE	TSDE	JMBO(1)	JMBO(2)
<b>F01</b>	6,768E+03	9,838E-09	1,920E-11	8,906E-10	2,102E+04	4,721E+03	1,589E+03
<b>F03</b>	4,062E+05	2,143E+05	2,641E+05	7,200E+04	1,390E+04	1,597E+04	4,313E+03
<b>F04</b>	2,210E+02	1,399E+02	9,323E+01	1,375E+02	2,227E+02	1,441E+02	1,701E+02
<b>F05</b>	8,528E+02	1,893E+02	1,775E+02	8,086E+01	8,066E+02	2,359E+02	1,692E+02
<b>F06</b>	8,586E-04	1,046E-04	1,026E-03	1,188E+00	3,719E-01	1,978E+00	9,521E-01
<b>F07</b>	9,530E+02	2,993E+02	2,868E+02	2,283E+02	9,129E+02	3,609E+02	3,250E+02
<b>F08</b>	8,509E+02	1,886E+02	1,773E+02	7,783E+01	7,903E+02	2,347E+02	1,811E+02
<b>F09</b>	2,849E-01	2,386E+01	1,250E+01	1,308E+02	5,485E+01	6,007E+02	2,664E+02
<b>F10</b>	2,958E+04	1,365E+04	1,372E+04	8,738E+03	2,723E+04	1,280E+04	1,268E+04
<b>F11</b>	6,323E+02	1,044E+04	1,084E+04	5,630E+03	6,170E+02	8,788E+02	1,194E+03
<b>F12</b>	1,471E+06	2,998E+04	1,939E+04	3,182E+04	2,757E+06	3,985E+05	6,815E+05
<b>F13</b>	4,233E+03	2,737E+03	4,006E+03	2,606E+03	1,879E+03	4,377E+03	8,926E+03
<b>F14</b>	3,770E+02	5,232E+02	5,822E+02	5,848E+02	3,473E+02	1,836E+04	8,043E+02
<b>F15</b>	5,943E+02	4,952E+02	3,506E+02	3,295E+02	5,418E+02	4,837E+03	3,699E+03
<b>F16</b>	7,777E+03	3,020E+03	3,093E+03	2,043E+03	6,750E+03	2,425E+03	2,474E+03
<b>F17</b>	4,913E+03	2,359E+03	2,314E+03	1,512E+03	3,727E+03	1,972E+03	1,940E+03
<b>F18</b>	2,643E+05	1,858E+03	5,814E+02	8,569E+02	2,691E+03	1,960E+05	7,168E+04
<b>F19</b>	2,603E+02	2,272E+02	2,487E+02	2,562E+02	2,250E+02	4,037E+03	2,749E+03
<b>F20</b>	4,683E+03	2,384E+03	2,350E+03	1,490E+03	2,172E+03	1,807E+03	1,843E+03
<b>F21</b>	1,084E+03	3,988E+02	3,956E+02	3,014E+02	1,041E+03	4,023E+02	3,909E+02
<b>F22</b>	3,033E+04	1,474E+04	1,470E+04	9,640E+03	2,819E+04	1,374E+04	1,334E+04
<b>F23</b>	1,391E+03	6,847E+02	6,798E+02	6,036E+02	1,297E+03	6,795E+02	6,979E+02
<b>F24</b>	1,705E+03	1,029E+03	1,031E+03	1,004E+03	1,664E+03	1,077E+03	1,115E+03
<b>F25</b>	7,217E+02	7,772E+02	7,506E+02	7,287E+02	7,815E+02	7,728E+02	7,383E+02
<b>F26</b>	1,128E+04	4,593E+03	4,505E+03	4,337E+03	1,061E+04	6,176E+03	5,537E+03
<b>F27</b>	6,403E+02	7,280E+02	6,822E+02	7,047E+02	7,179E+02	9,076E+02	8,153E+02
<b>F28</b>	5,378E+02	5,658E+02	5,249E+02	5,305E+02	5,700E+02	5,548E+02	5,344E+02
<b>F29</b>	5,693E+03	2,252E+03	2,255E+03	1,761E+03	4,922E+03	2,932E+03	2,676E+03
<b>F30</b>	4,124E+03	3,440E+03	3,650E+03	3,157E+03	5,337E+03	4,689E+03	3,807E+03

## APÊNDICE B – GRÁFICOS

Neste apêndice são apresentados os gráficos realizados.

Da Figura 81 até a Figura 120 estão os gráficos de convergência onde se pode observar a evolução da mediana do valor ótimo da função objetivo apresentada em relação ao número de avaliações da função objetivo ( $N_{fe}$ ). Nestas mesmas figuras são apresentados os gráficos de barras verticais, correspondentes a cada função de teste, que mostram a evolução da mediana do valor ótimo da função objetivo para cada dimensão e grupo de funções a 5, 10, 20 e 50% do número máximo de avaliações da função objetivo.

Da Figura 121 à Figura 140 são apresentados os diagramas de caixa (*boxplot*), com os dados superpostos na forma de gráficos de dispersão (*scatter-plot*) para representar a distribuição dos mesmos.

Da Figura 141 à Figura 150 os gráficos mostram os pares (Md, MAD) por função e dimensão.

A Figura 151 e a Figura 152 apresentam os gráficos do RMSE utilizados para avaliar o erro acumulado pelos algoritmos para cada dimensão e função teste.

Figura 81 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{01}$  a  $F_{04}$  com  $D = 30$

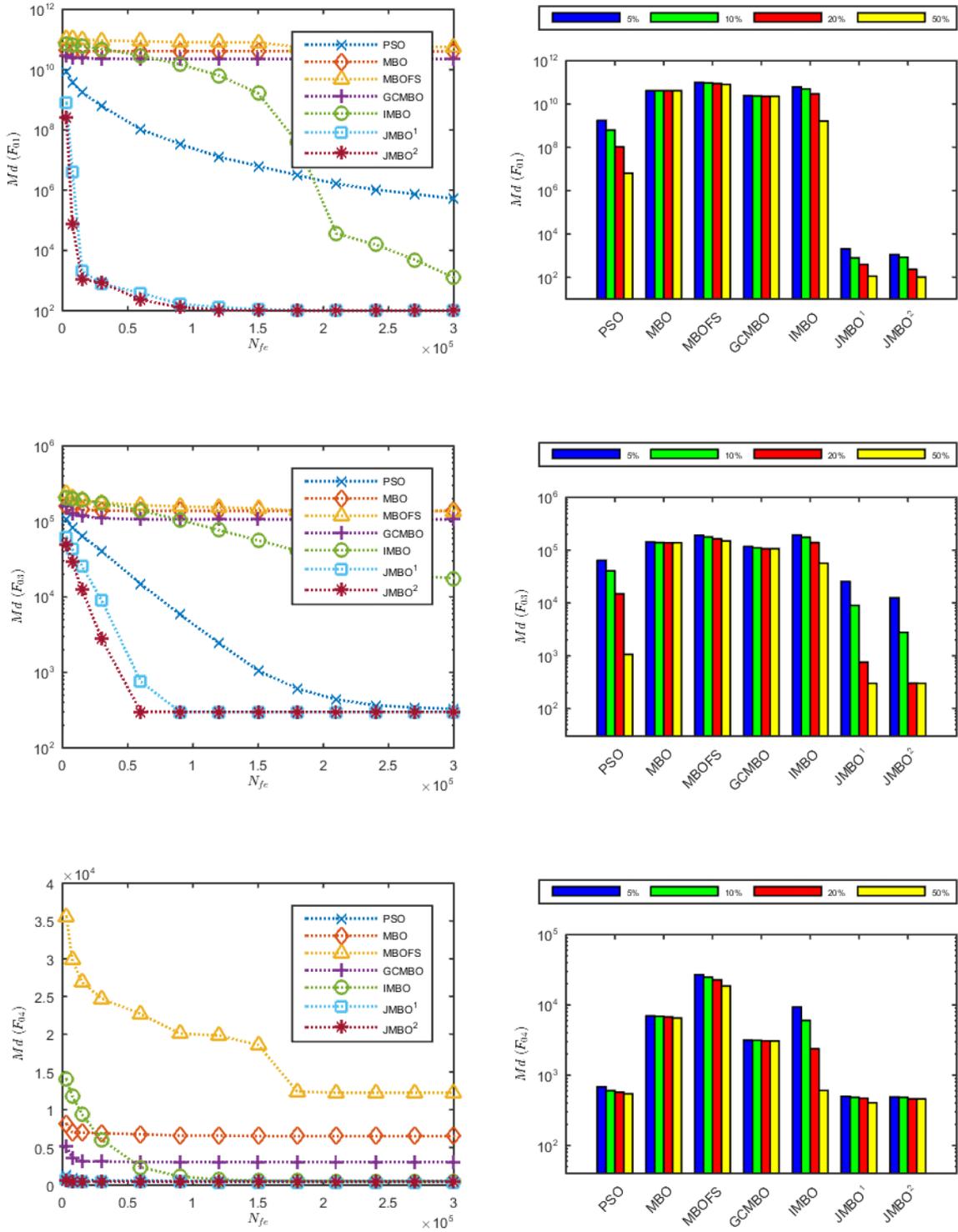


Figura 82 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{05}$  a  $F_{07}$  com  $D = 30$

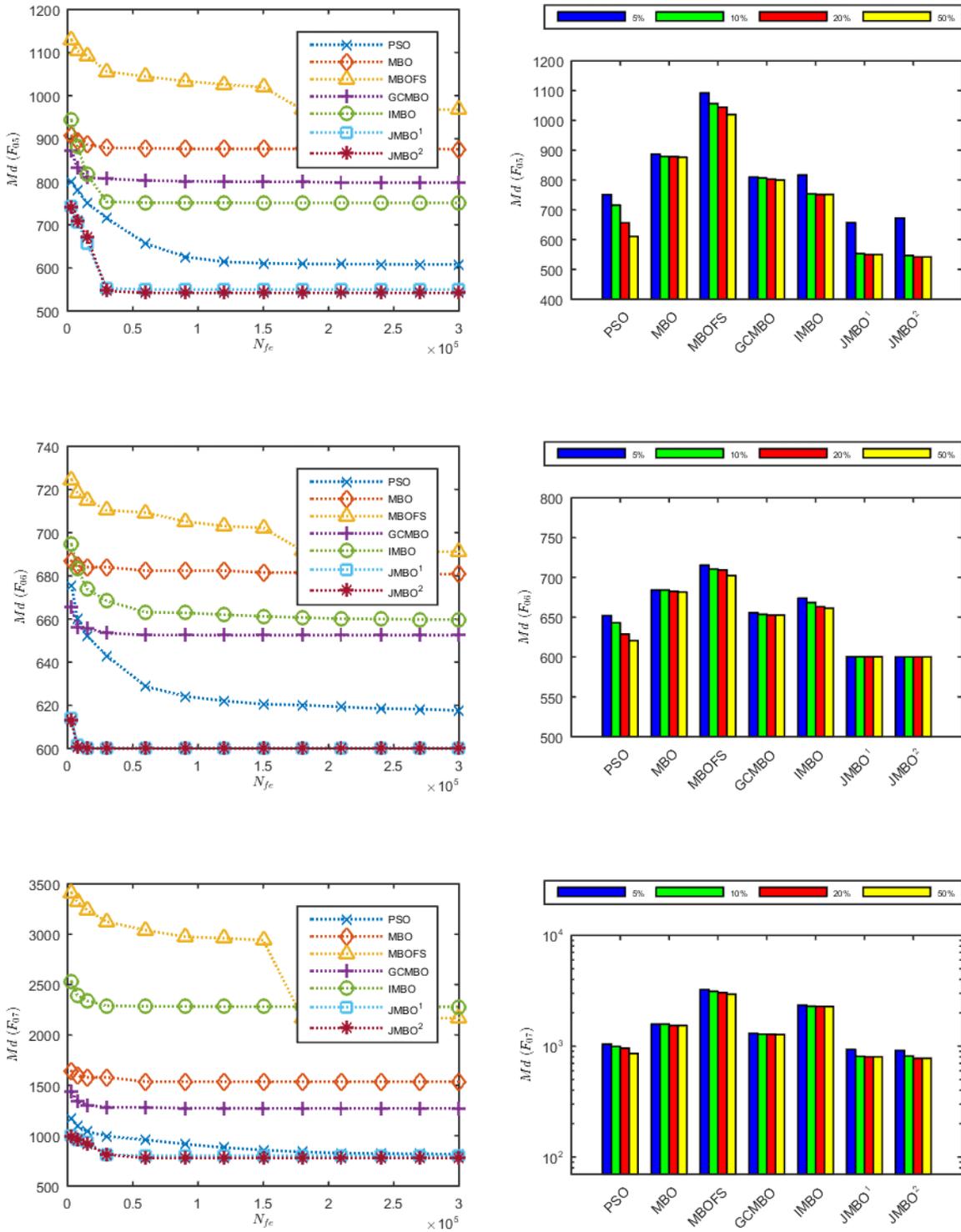


Figura 83 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{08}$  a  $F_{10}$  com  $D = 30$

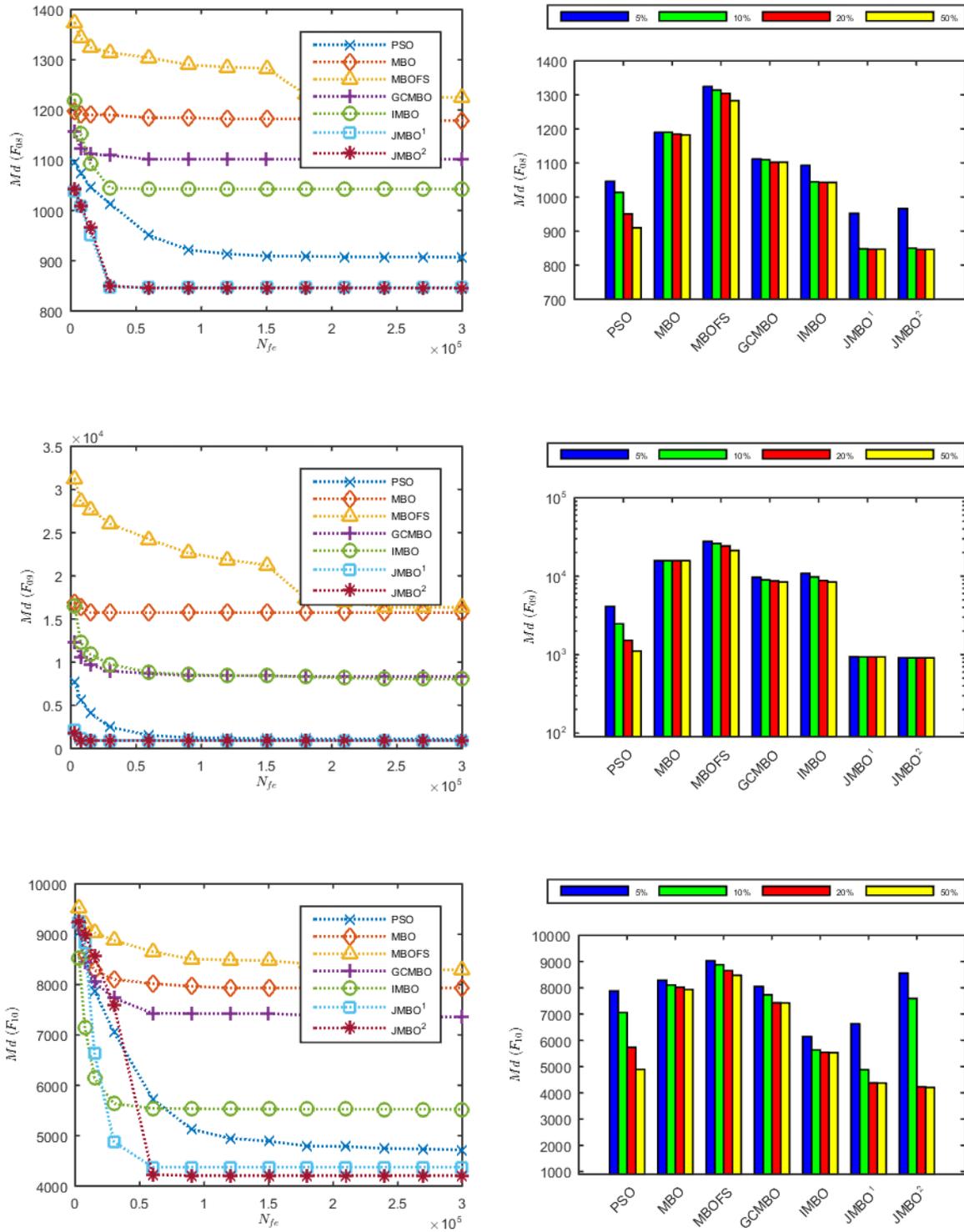


Figura 84 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{11}$  a  $F_{13}$  com  $D = 30$

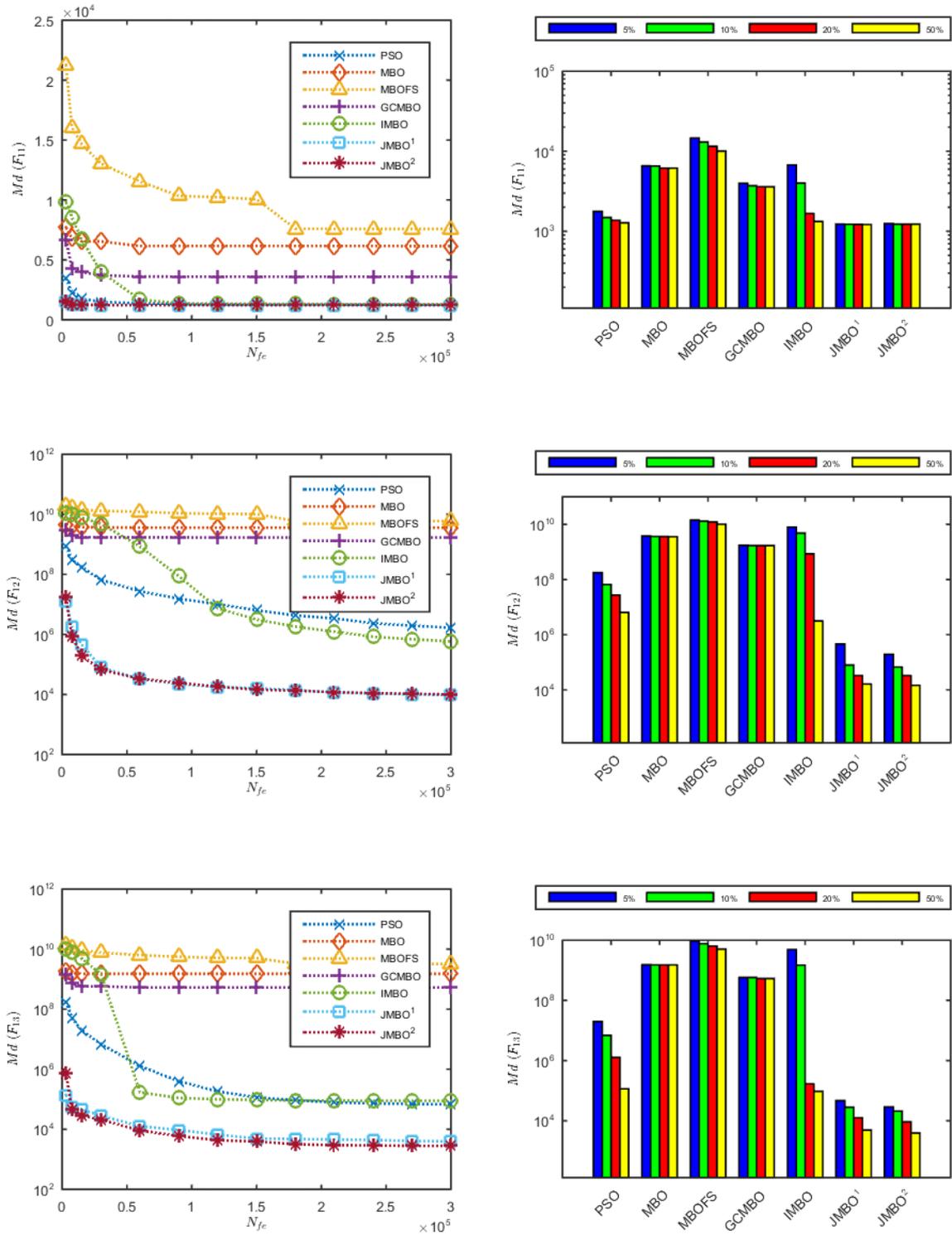


Figura 85 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{14}$  a  $F_{16}$  com  $D = 30$

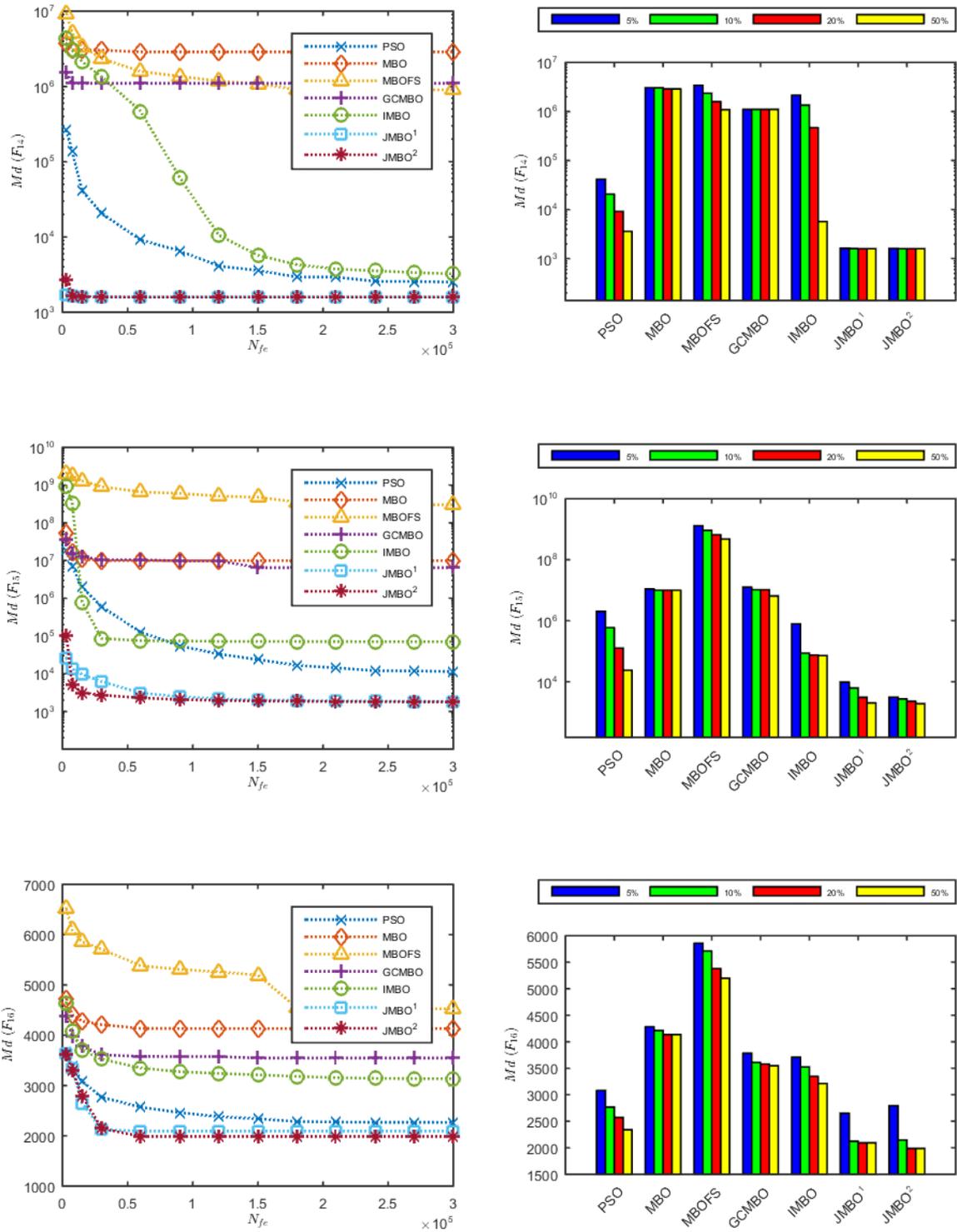


Figura 86 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{17}$  a  $F_{19}$  com  $D = 30$

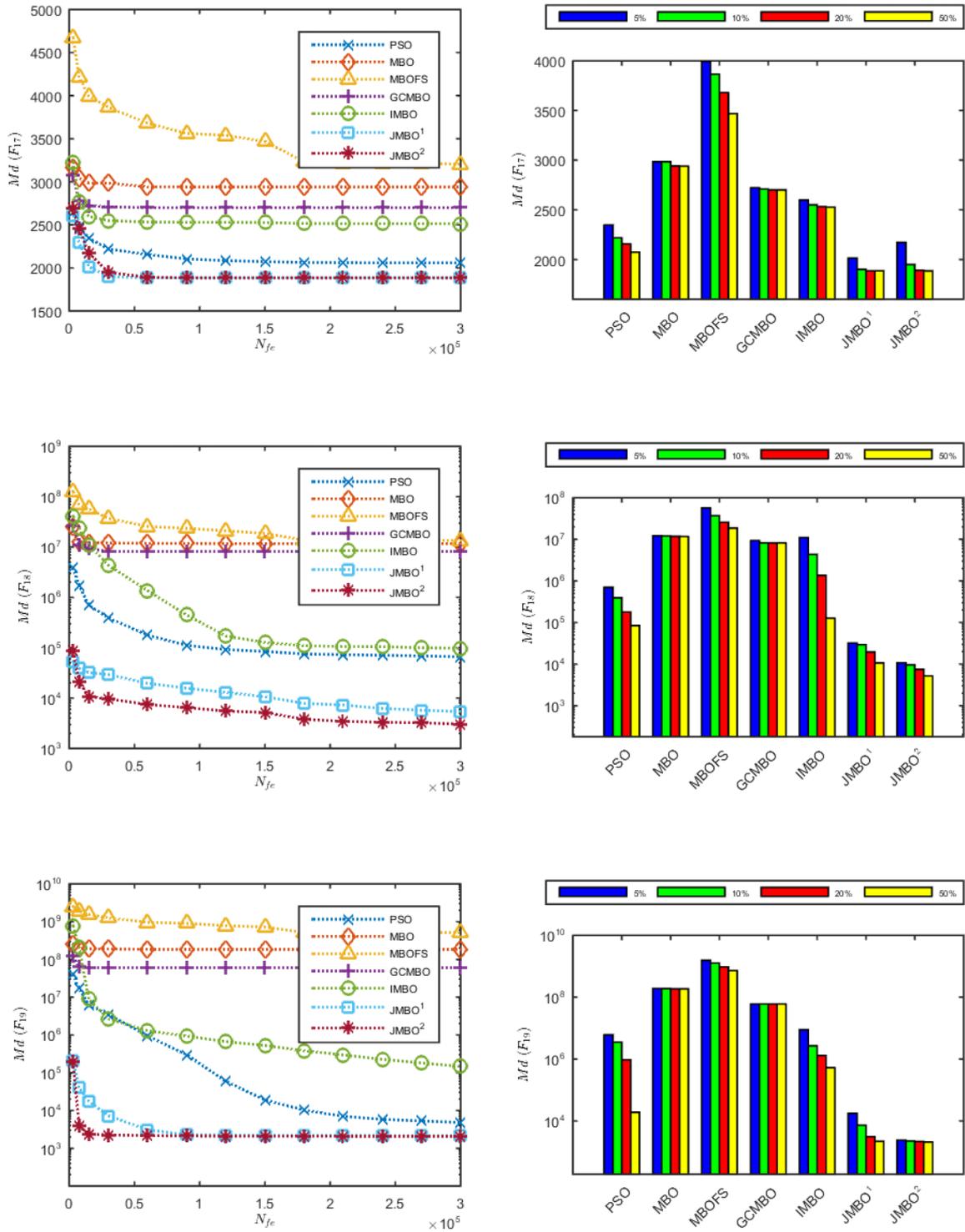


Figura 87 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{20}$  a  $F_{22}$  com  $D = 30$

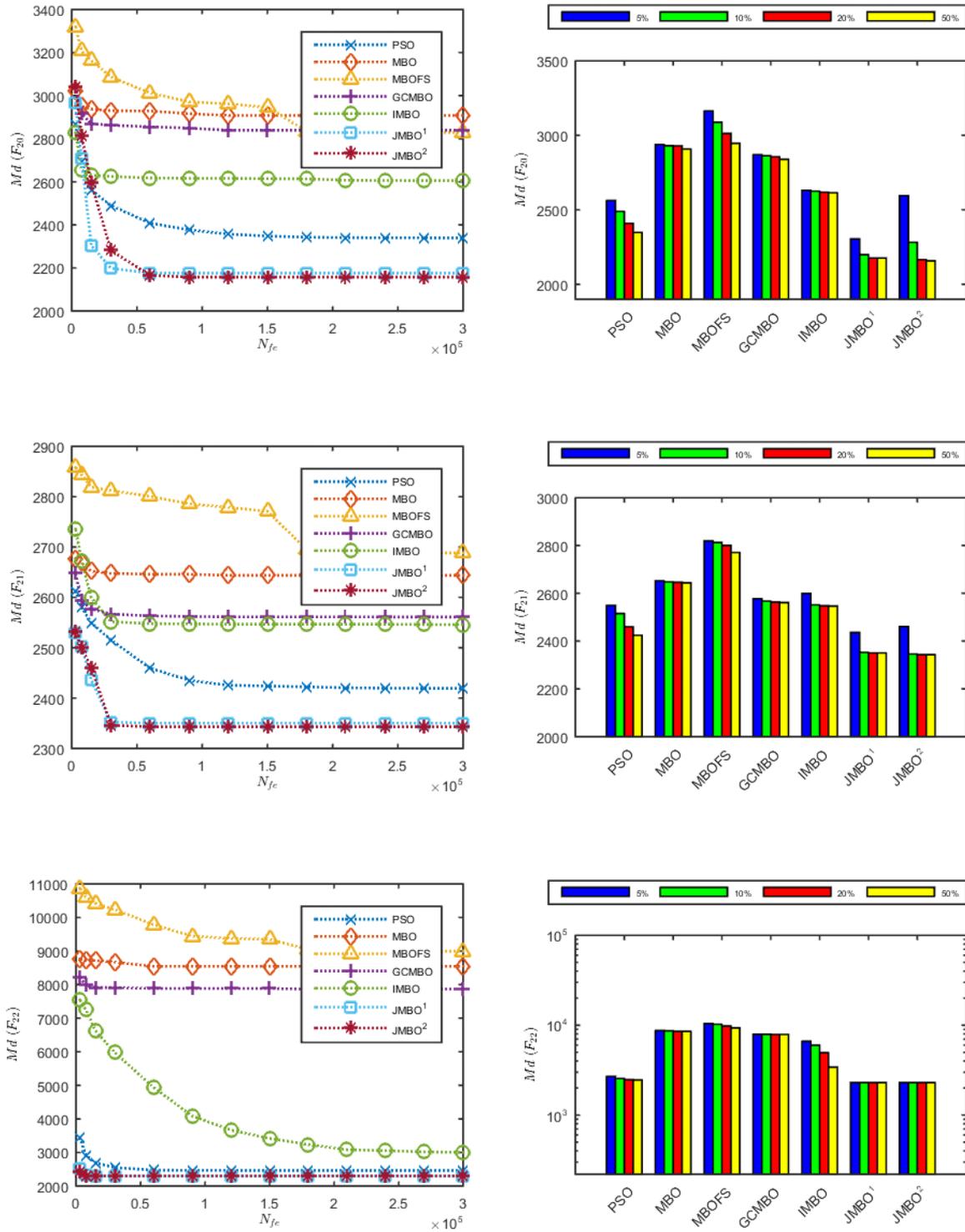


Figura 88 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{23}$  a  $F_{25}$  com  $D = 30$

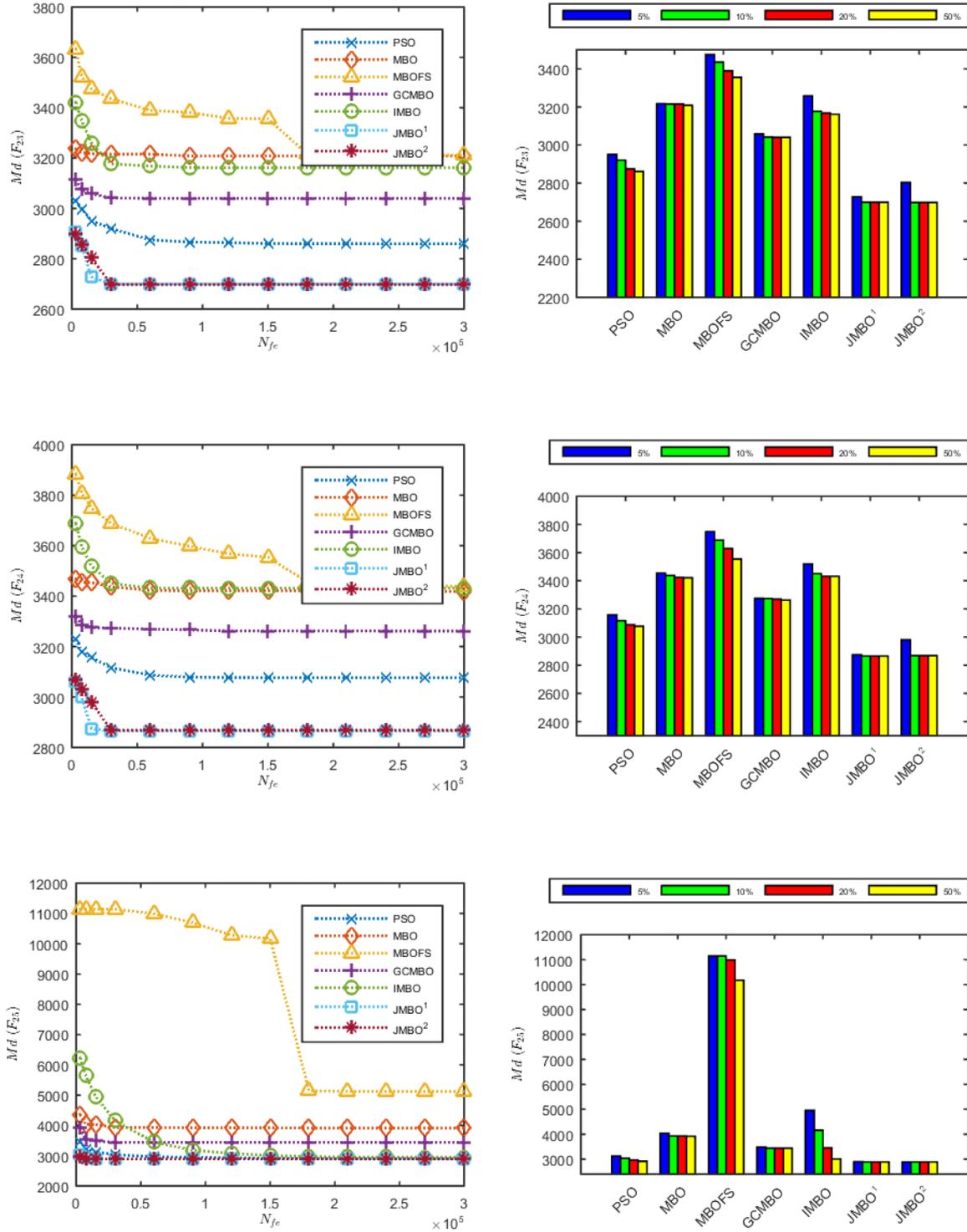


Figura 89 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{26}$  a  $F_{28}$  com  $D = 30$

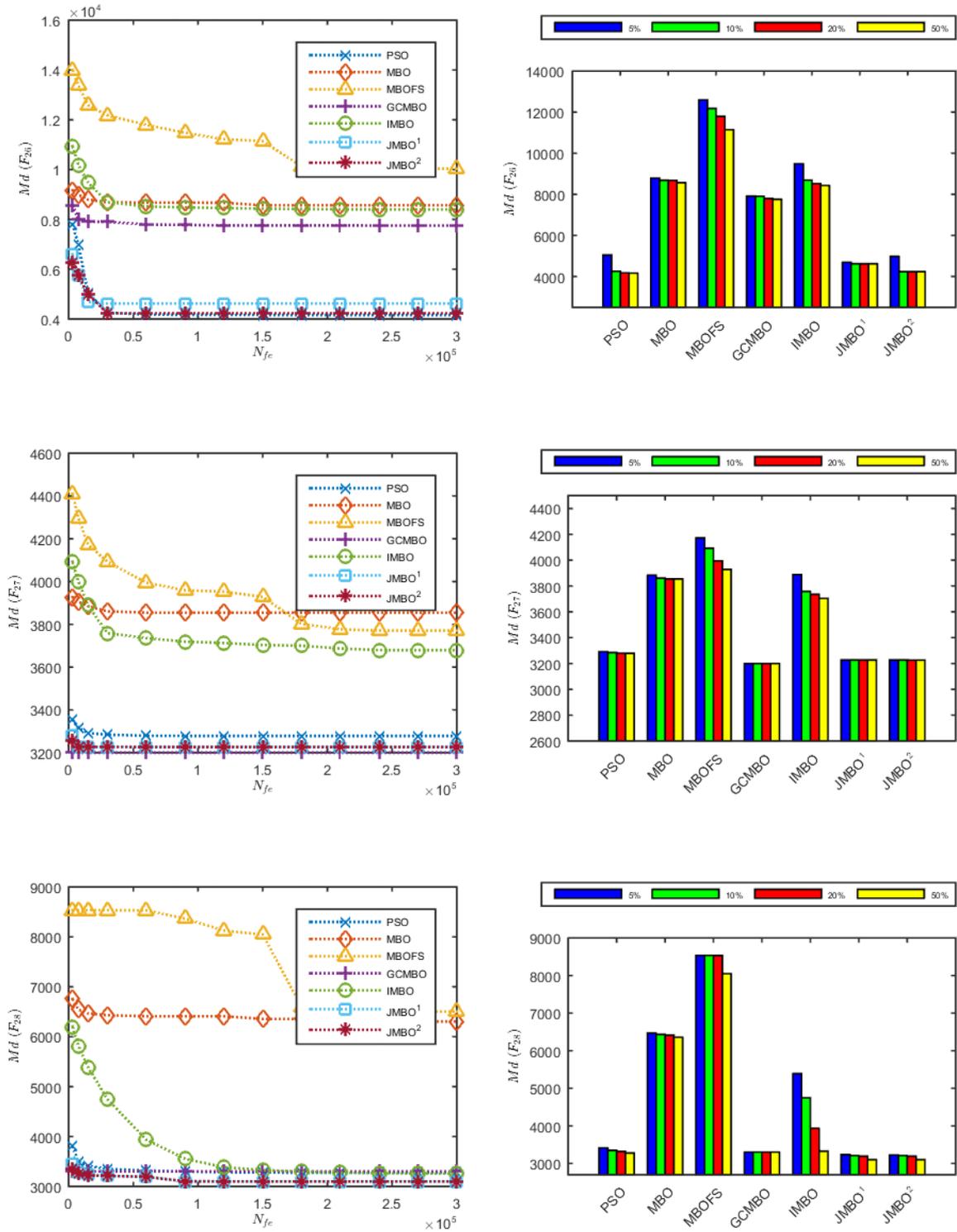


Figura 90 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{29}$  a  $F_{30}$  com  $D = 30$

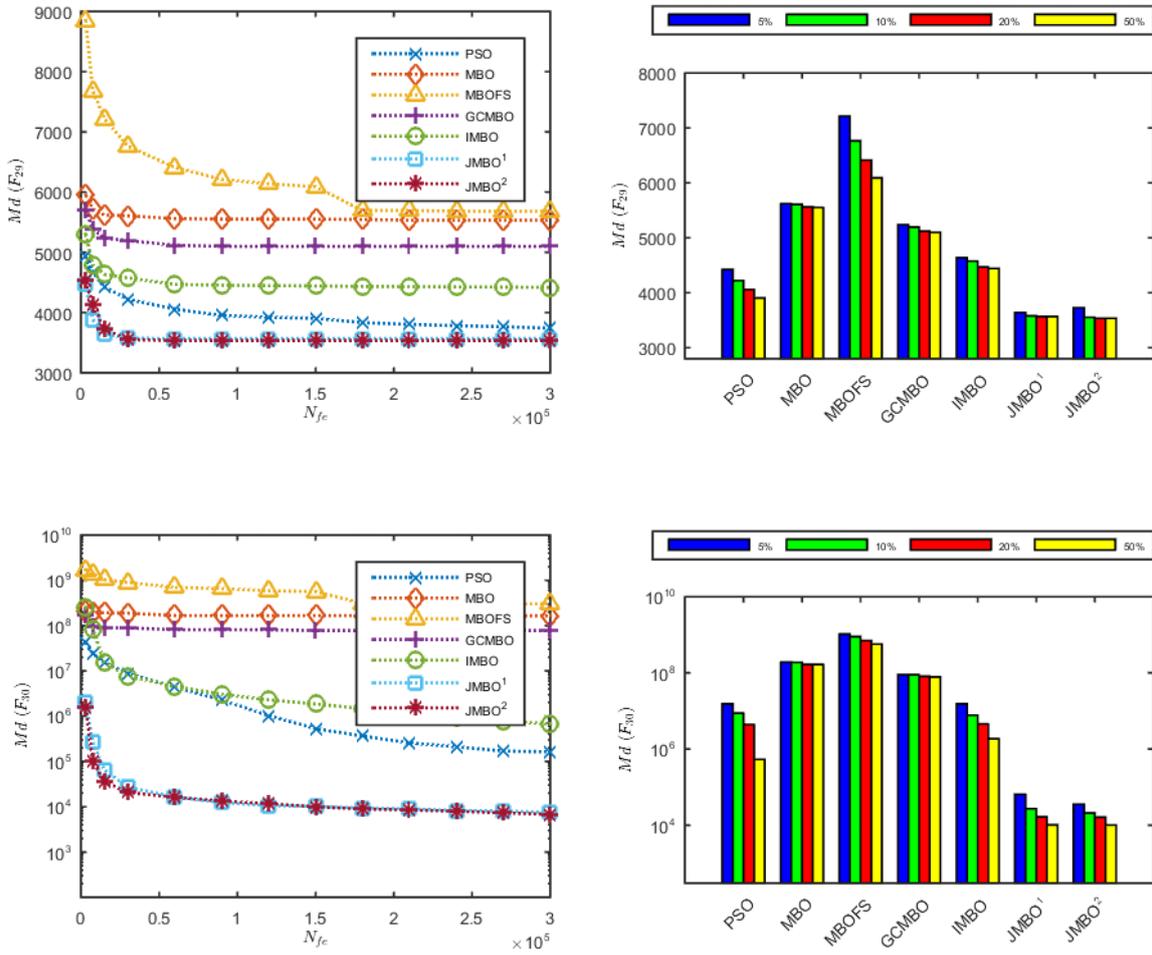


Figura 91 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{01}$  a  $F_{04}$  com  $D = 30$

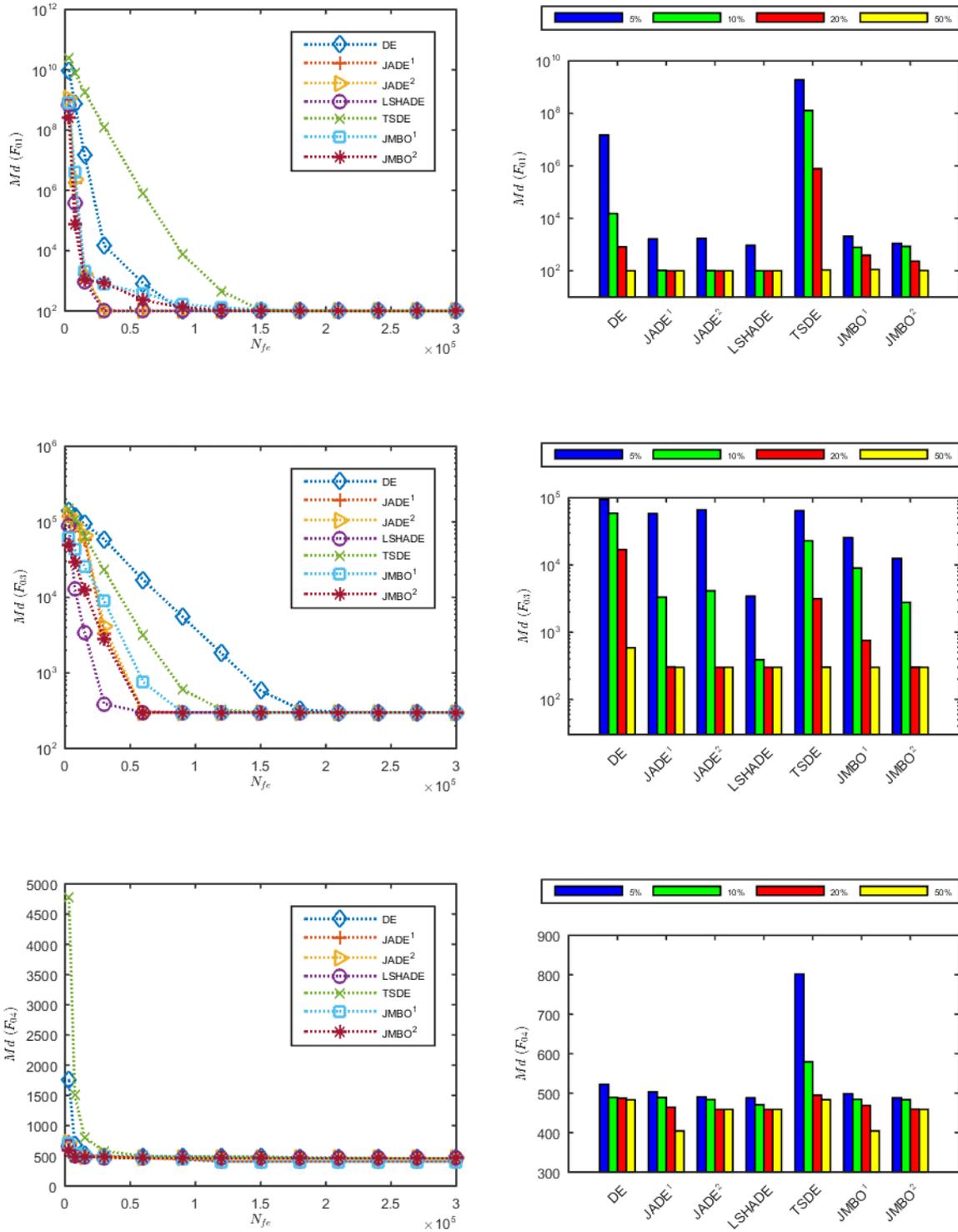


Figura 92 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{05}$  a  $F_{07}$  com  $D = 30$

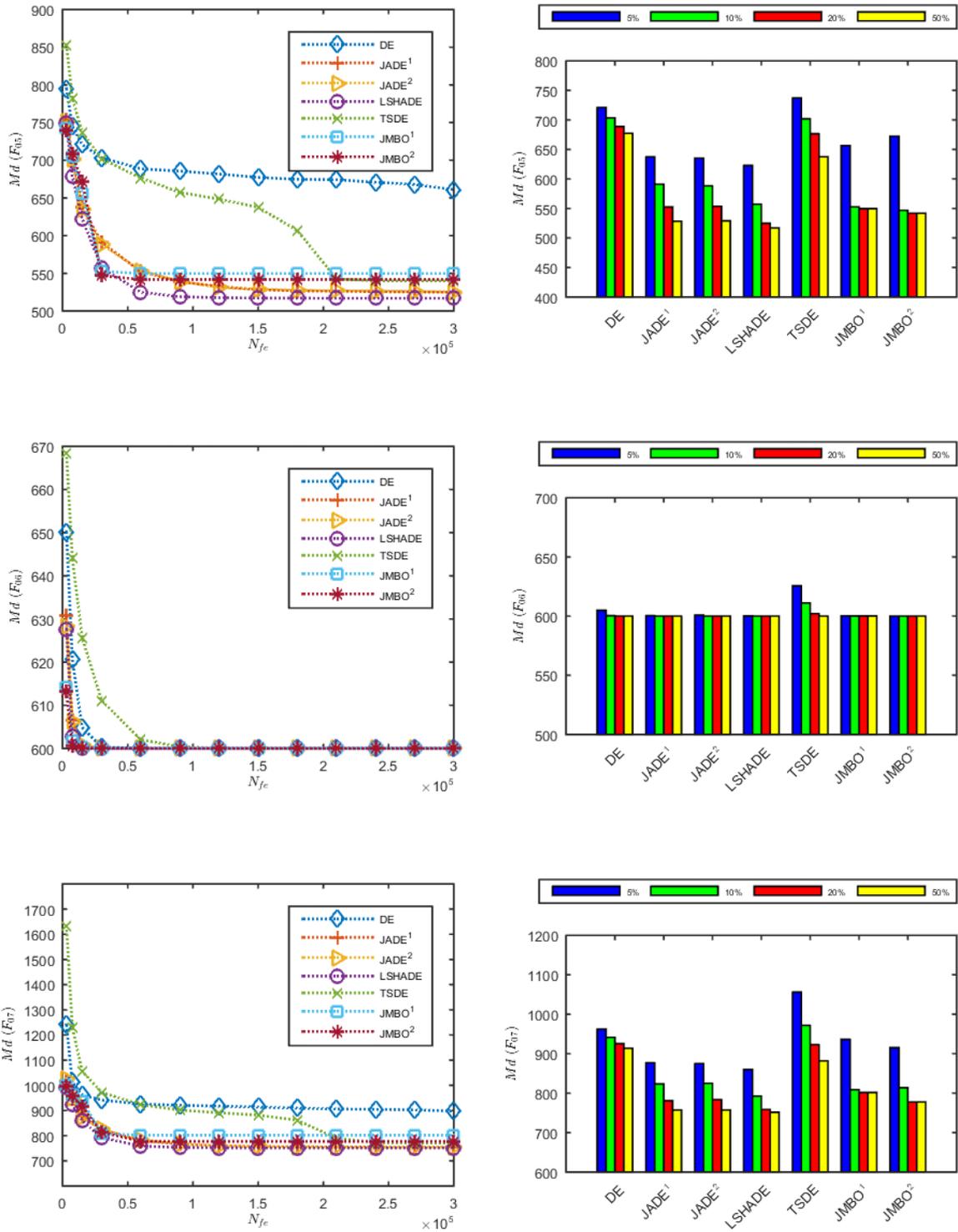


Figura 93 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{08}$  a  $F_{10}$  com  $D = 30$

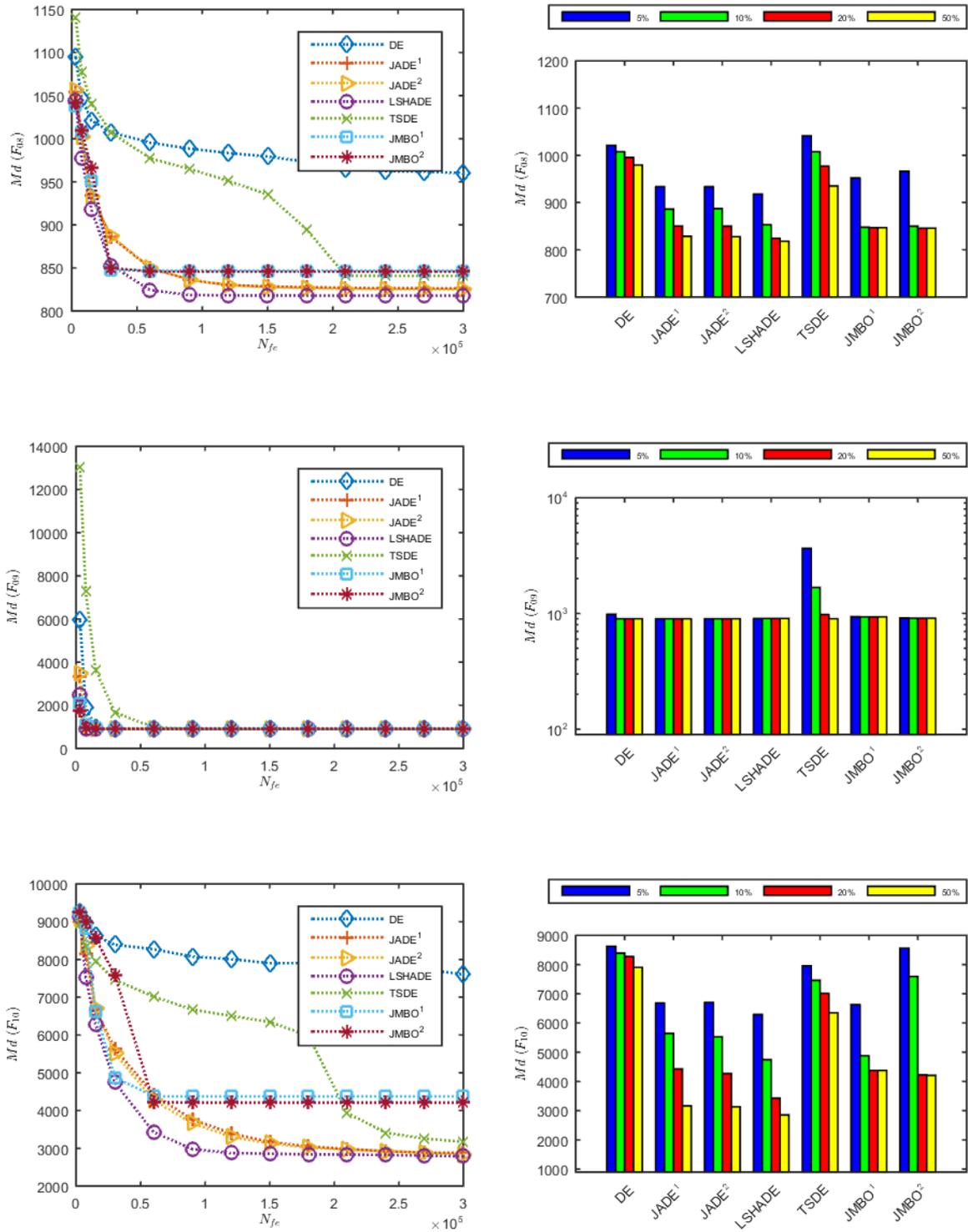


Figura 94 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{11}$  a  $F_{13}$  com  $D = 30$

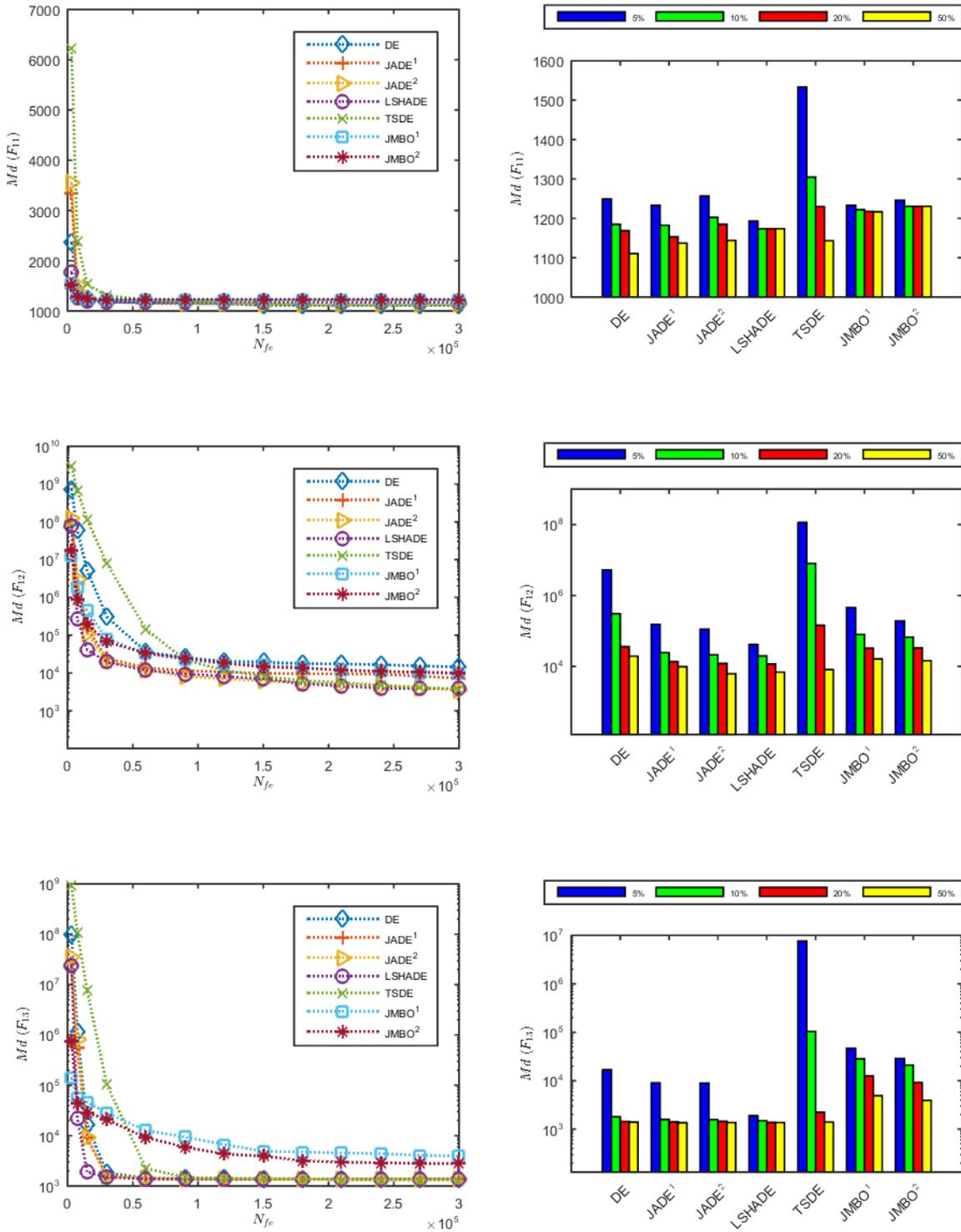


Figura 95 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{14}$  a  $F_{16}$  com  $D = 30$

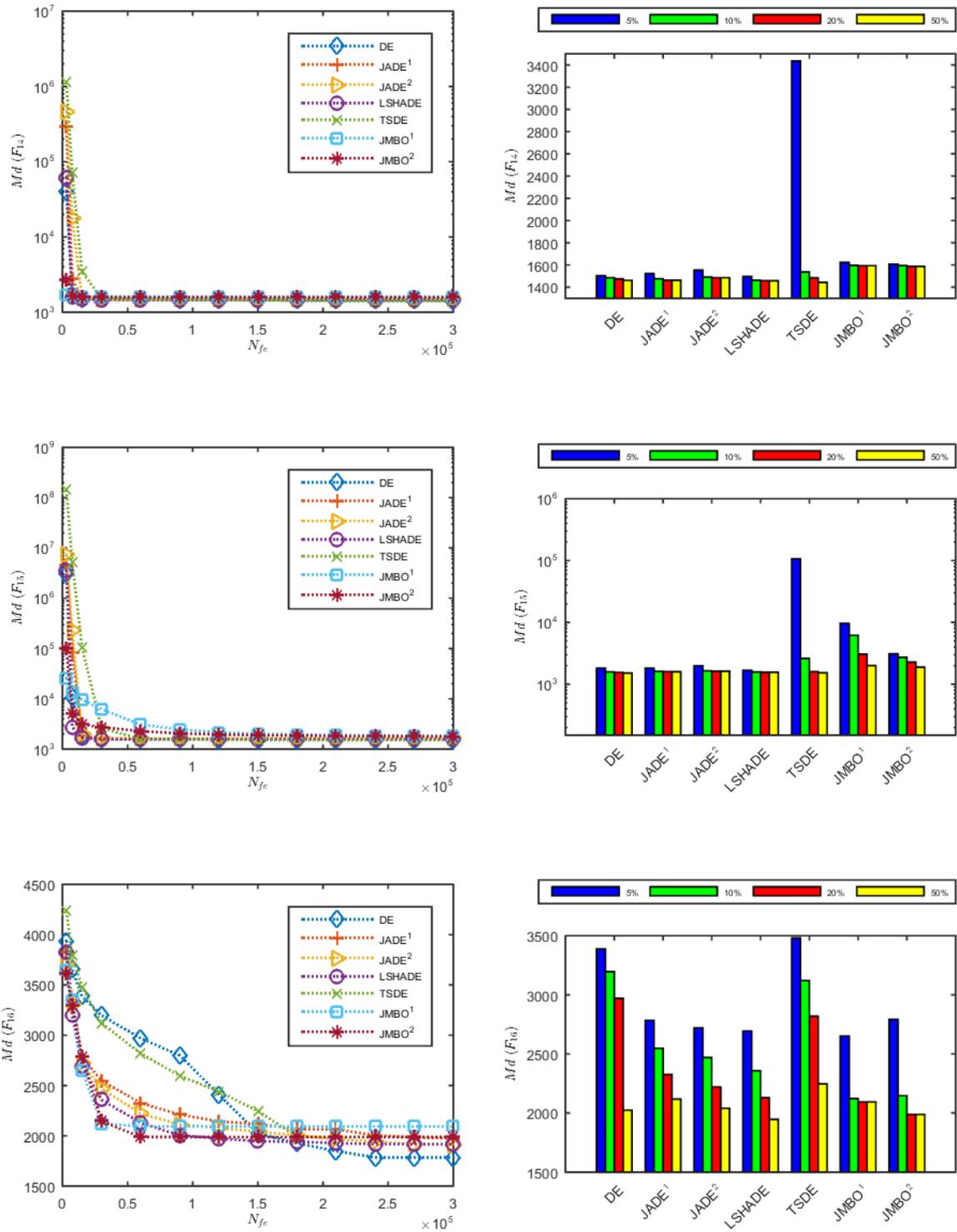


Figura 96 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{17}$  a  $F_{19}$  com  $D = 30$

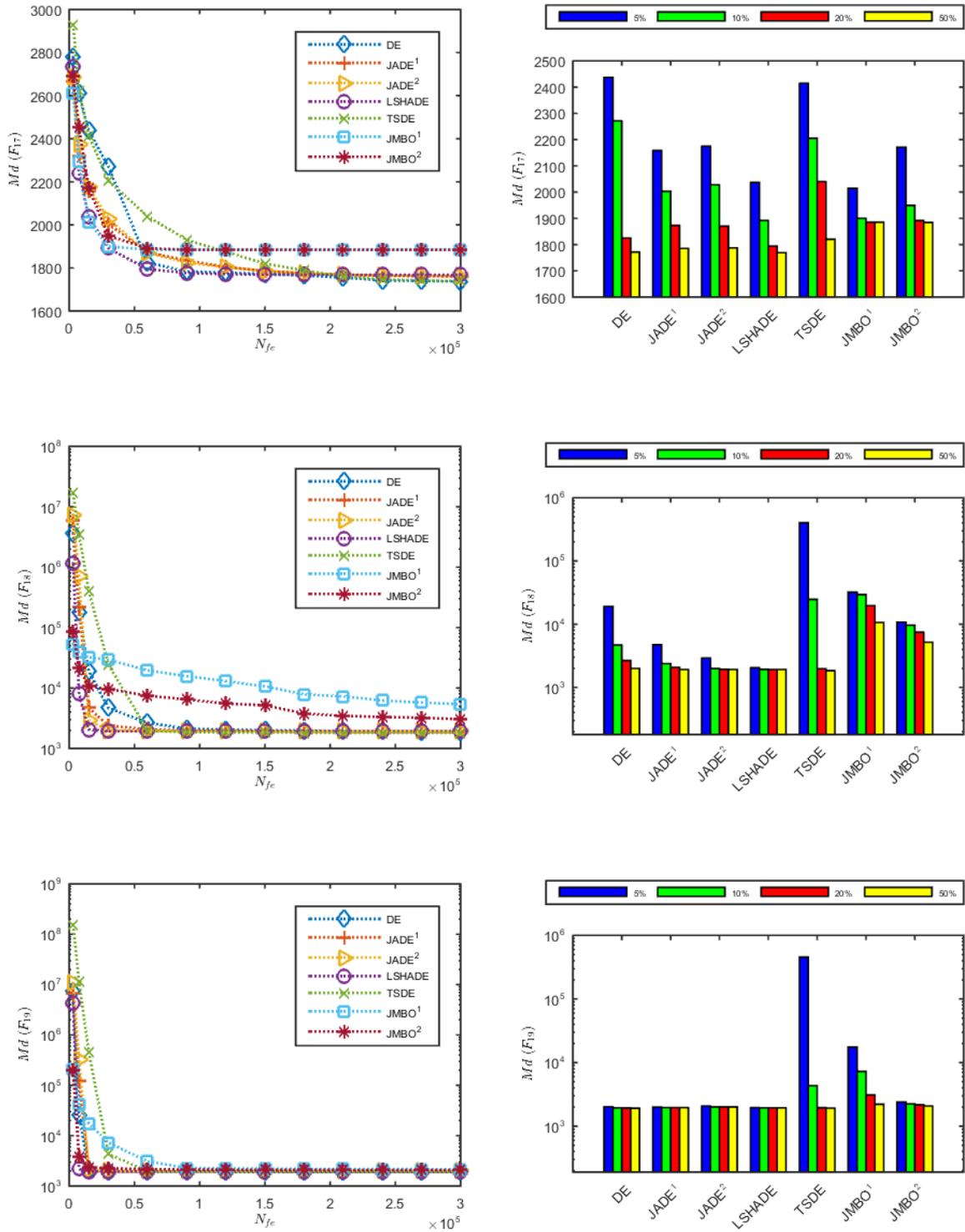


Figura 97 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{20}$  a  $F_{22}$  com  $D = 30$

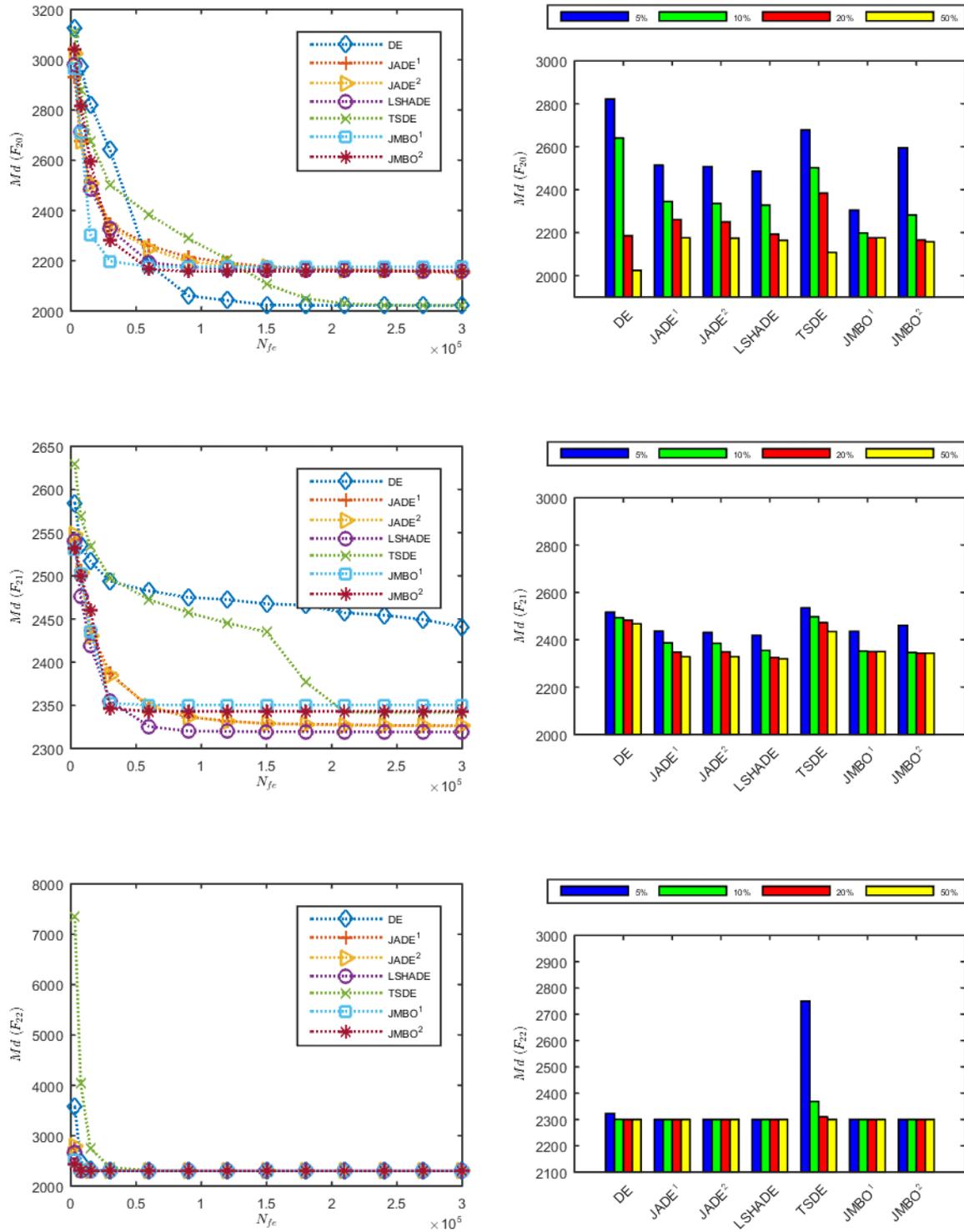


Figura 98 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{23}$  a  $F_{25}$  com  $D = 30$

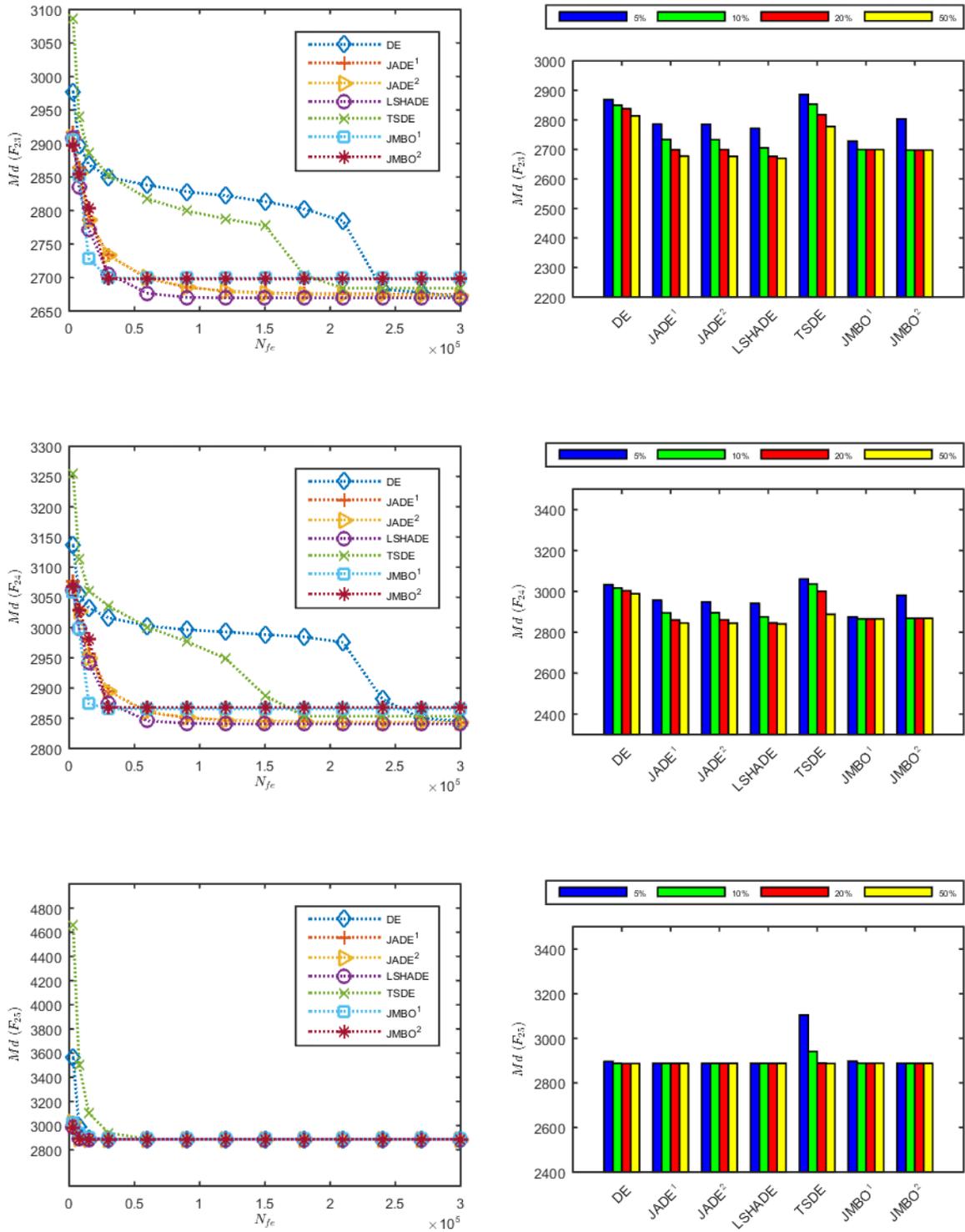


Figura 99 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{26}$  a  $F_{28}$  com  $D = 30$

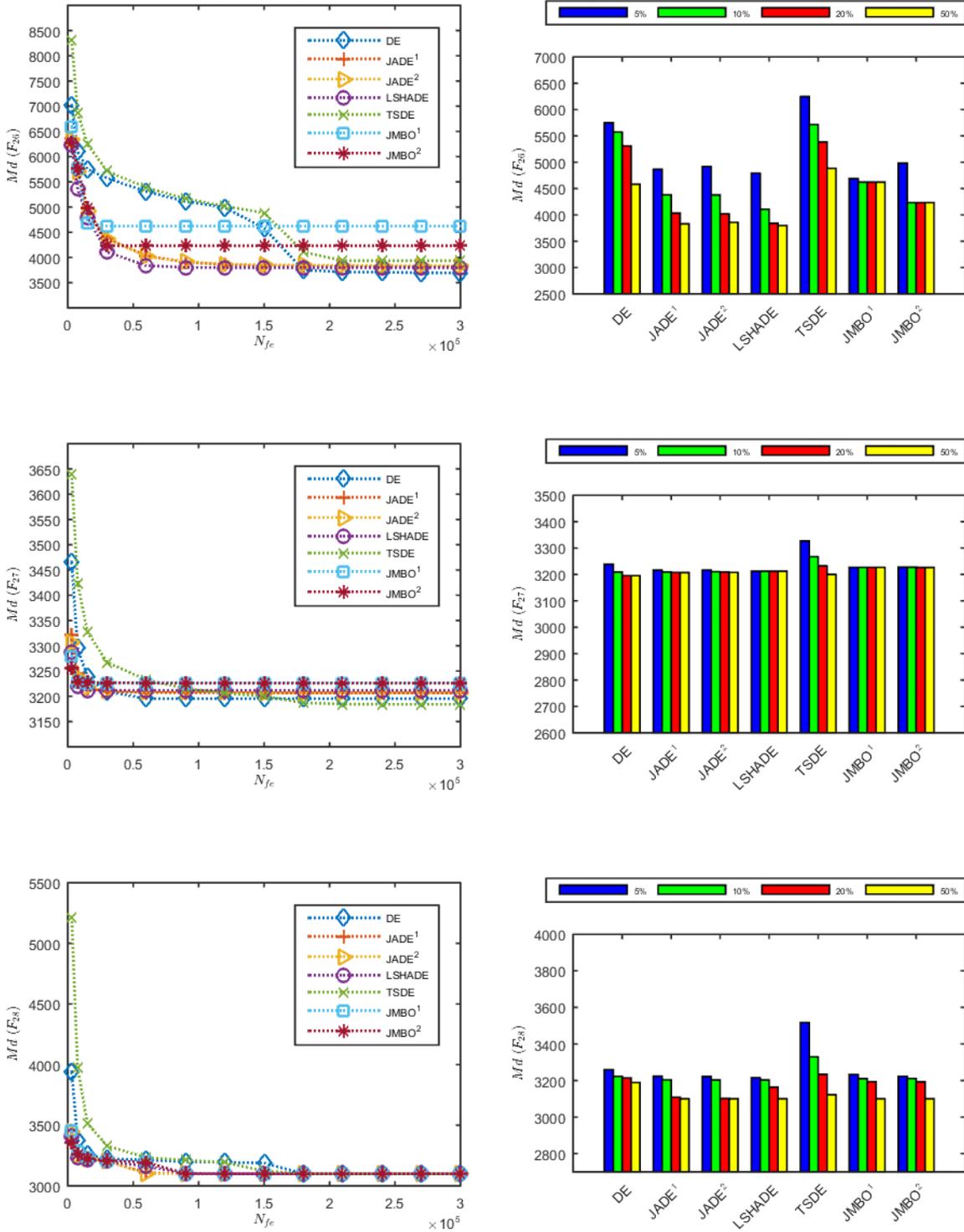


Figura 100 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{29}$  a  $F_{30}$  com  $D = 30$

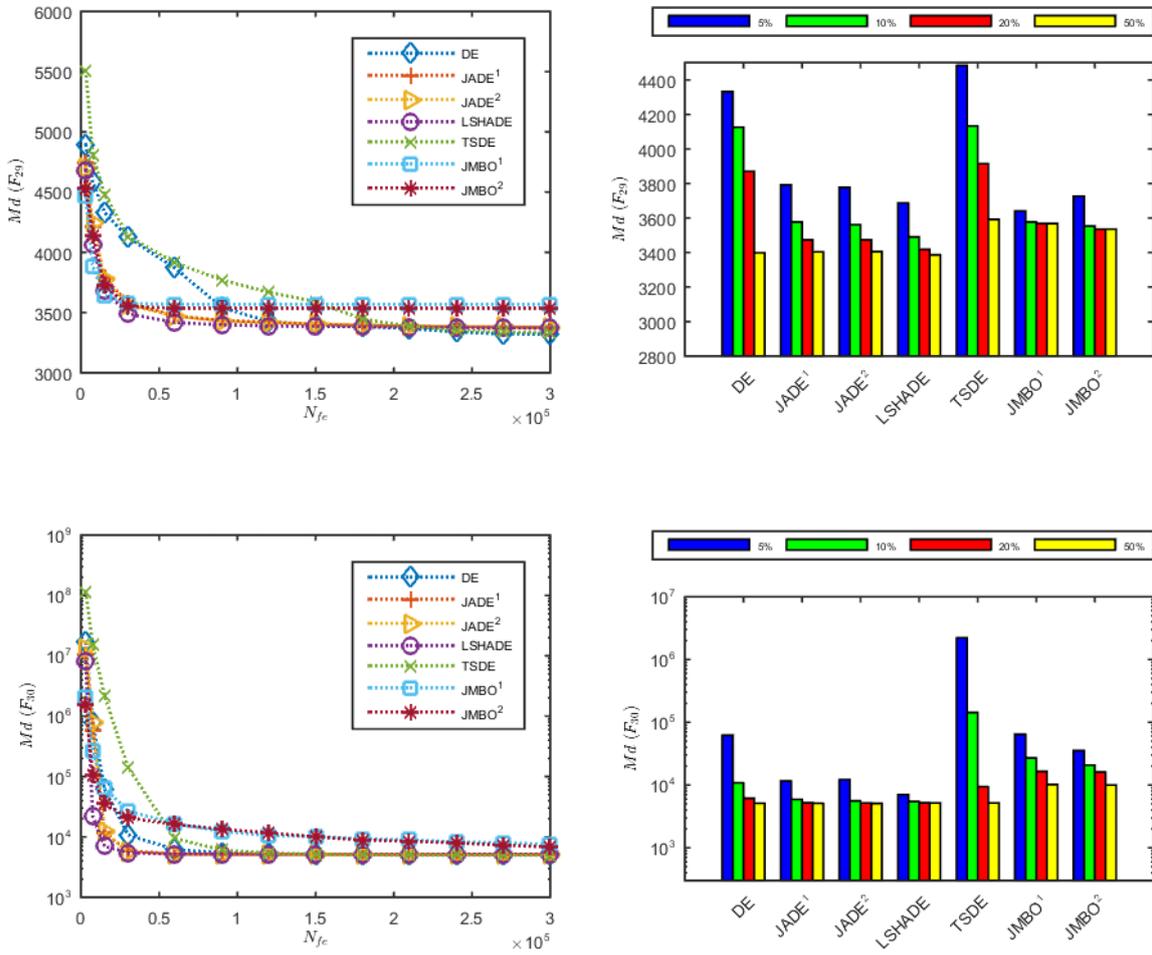




Figura 102 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{05}$  a  $F_{07}$  com  $D = 100$

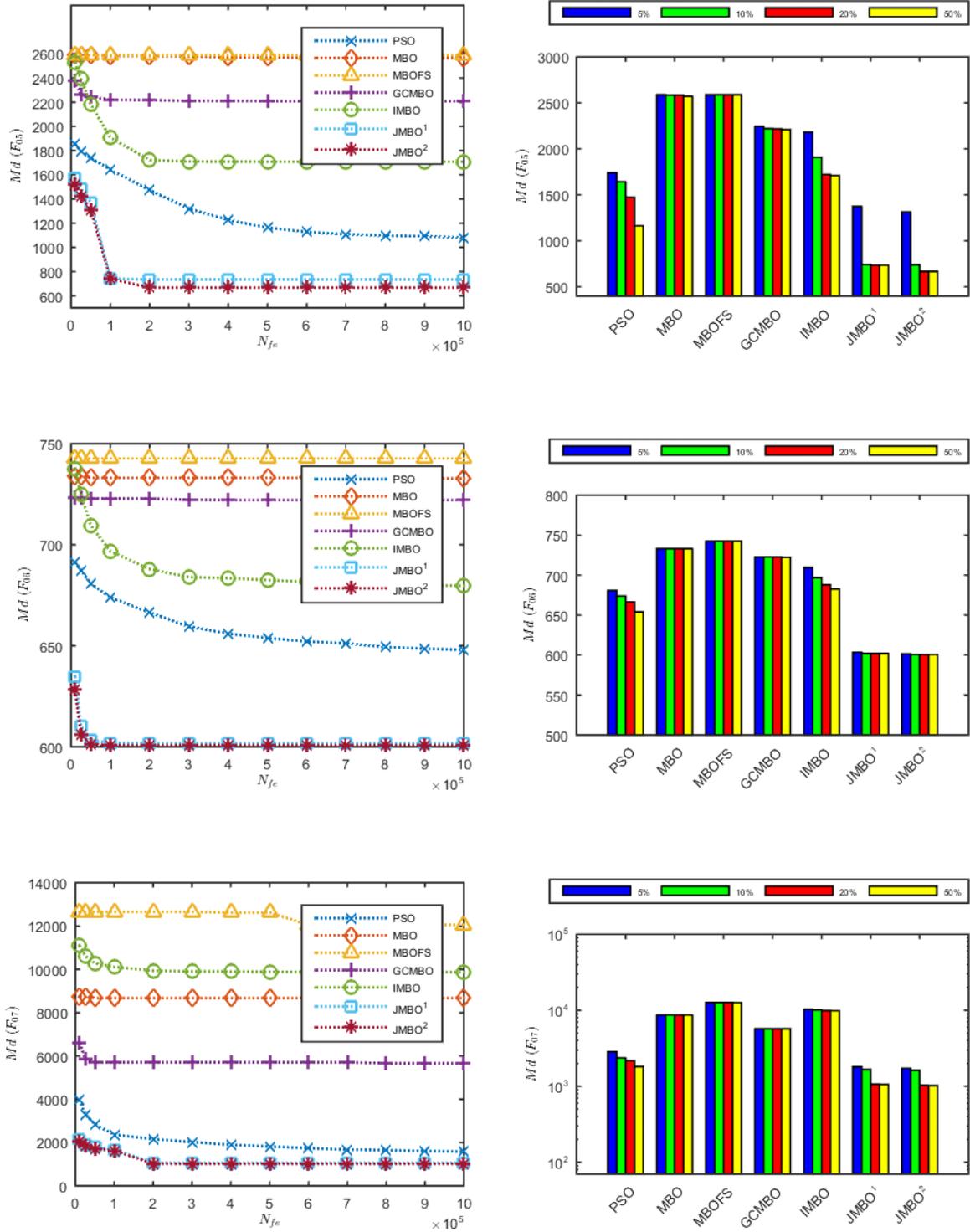


Figura 103 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{08}$  a  $F_{10}$  com  $D = 100$

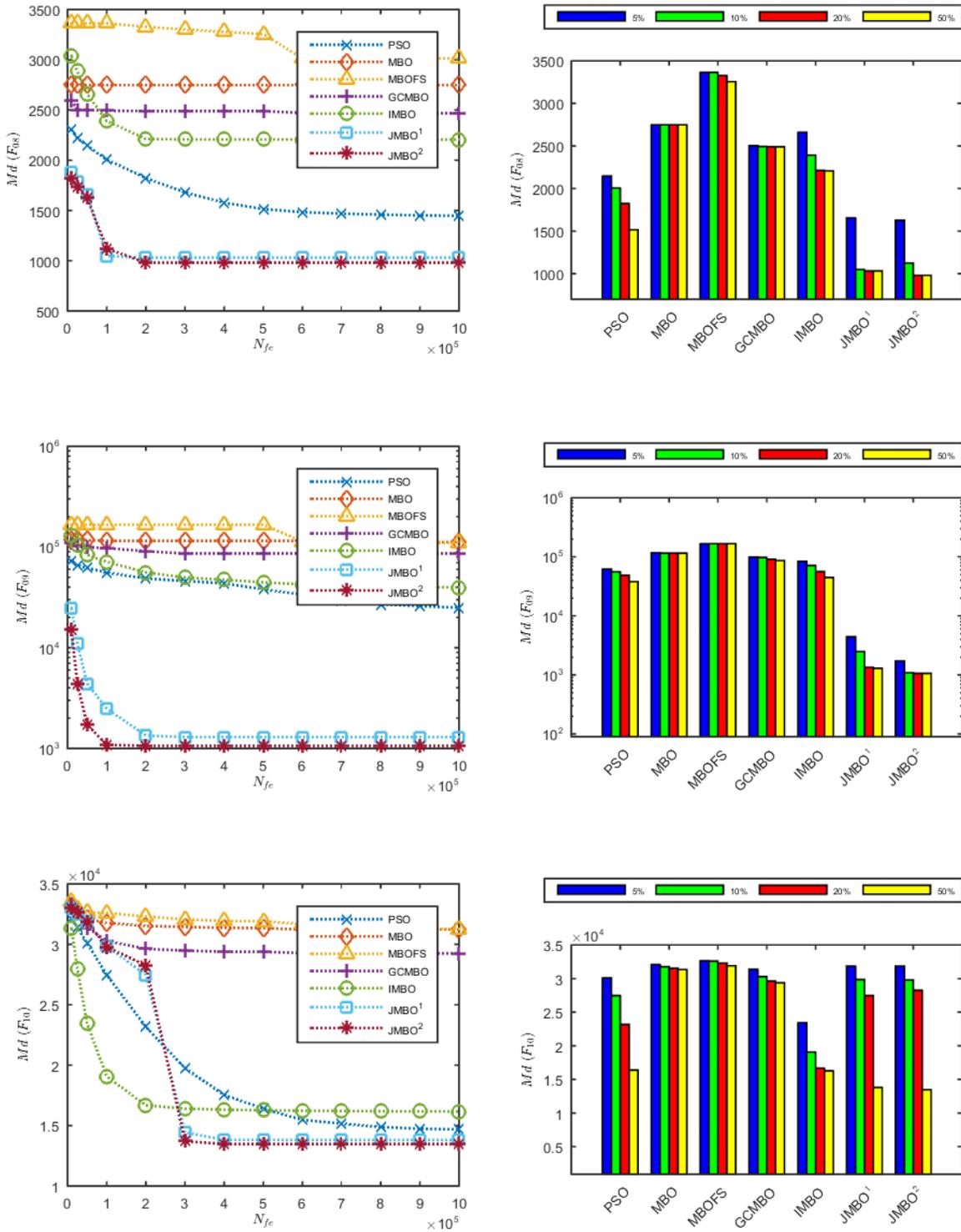


Figura 104 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{11}$  a  $F_{13}$  com  $D = 100$

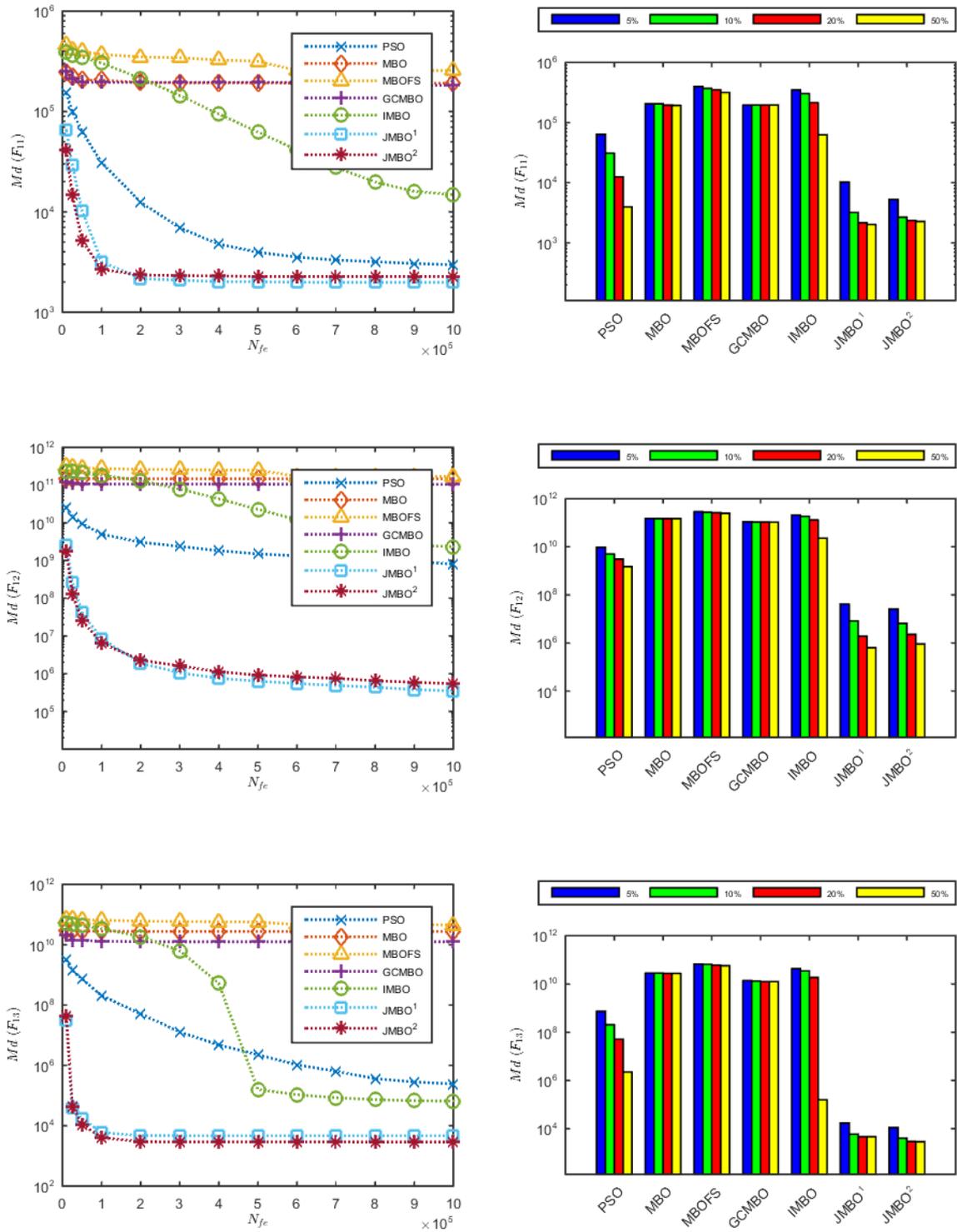


Figura 105 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{14}$  a  $F_{16}$  com  $D = 100$

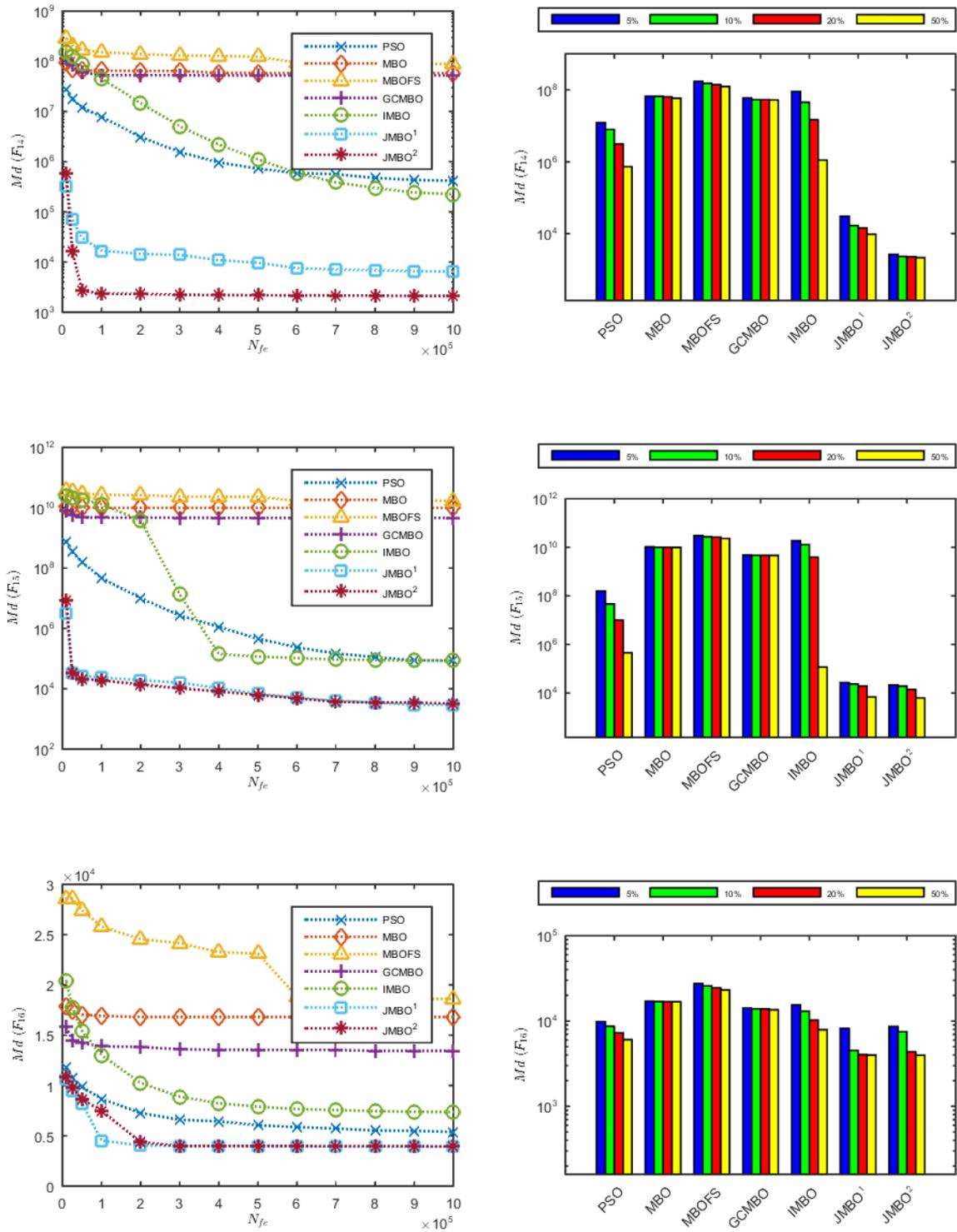


Figura 106 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{17}$  a  $F_{19}$  com  $D = 100$

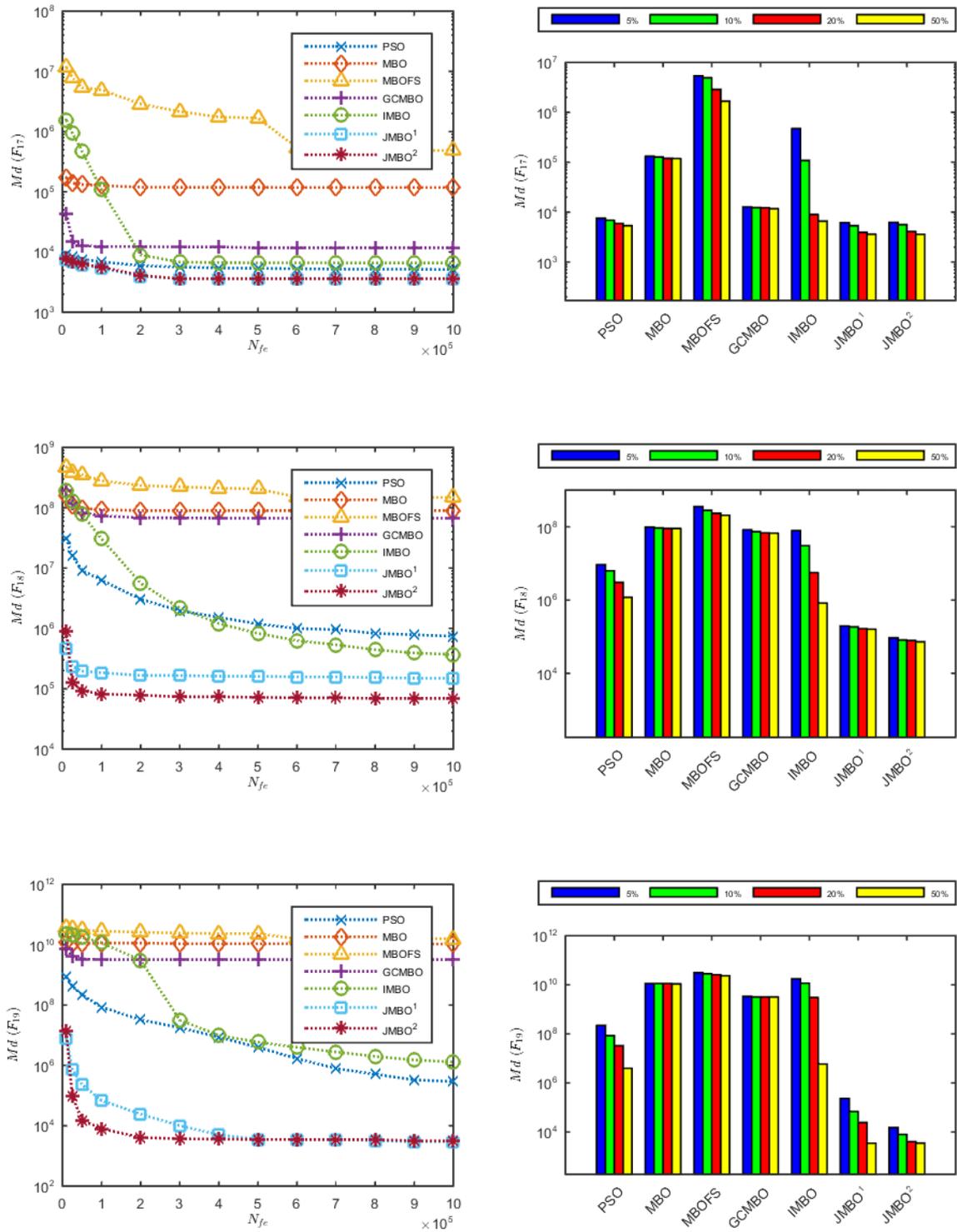


Figura 107 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{20}$  a  $F_{22}$  com  $D = 100$

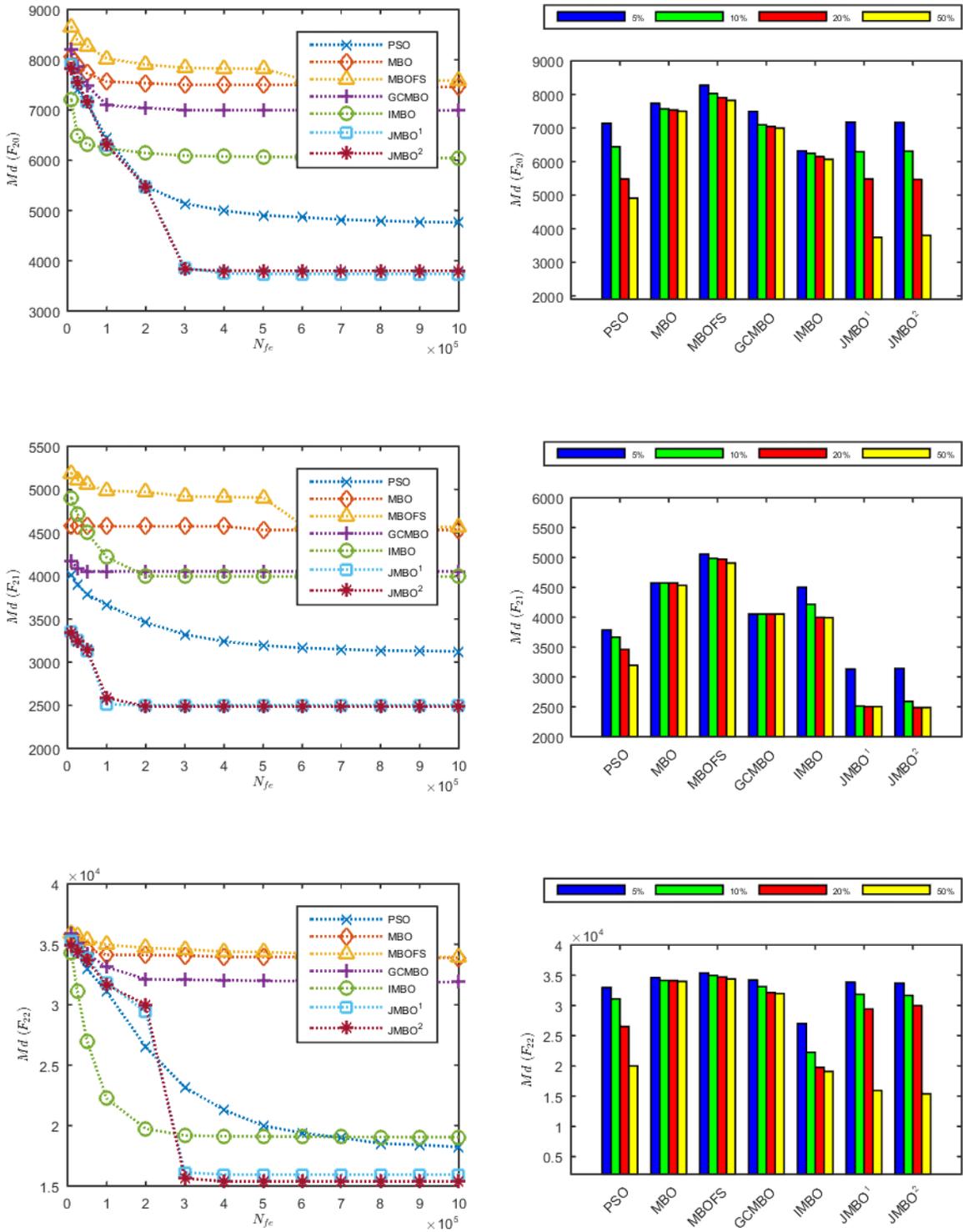


Figura 108 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{23}$  a  $F_{25}$  com  $D = 100$

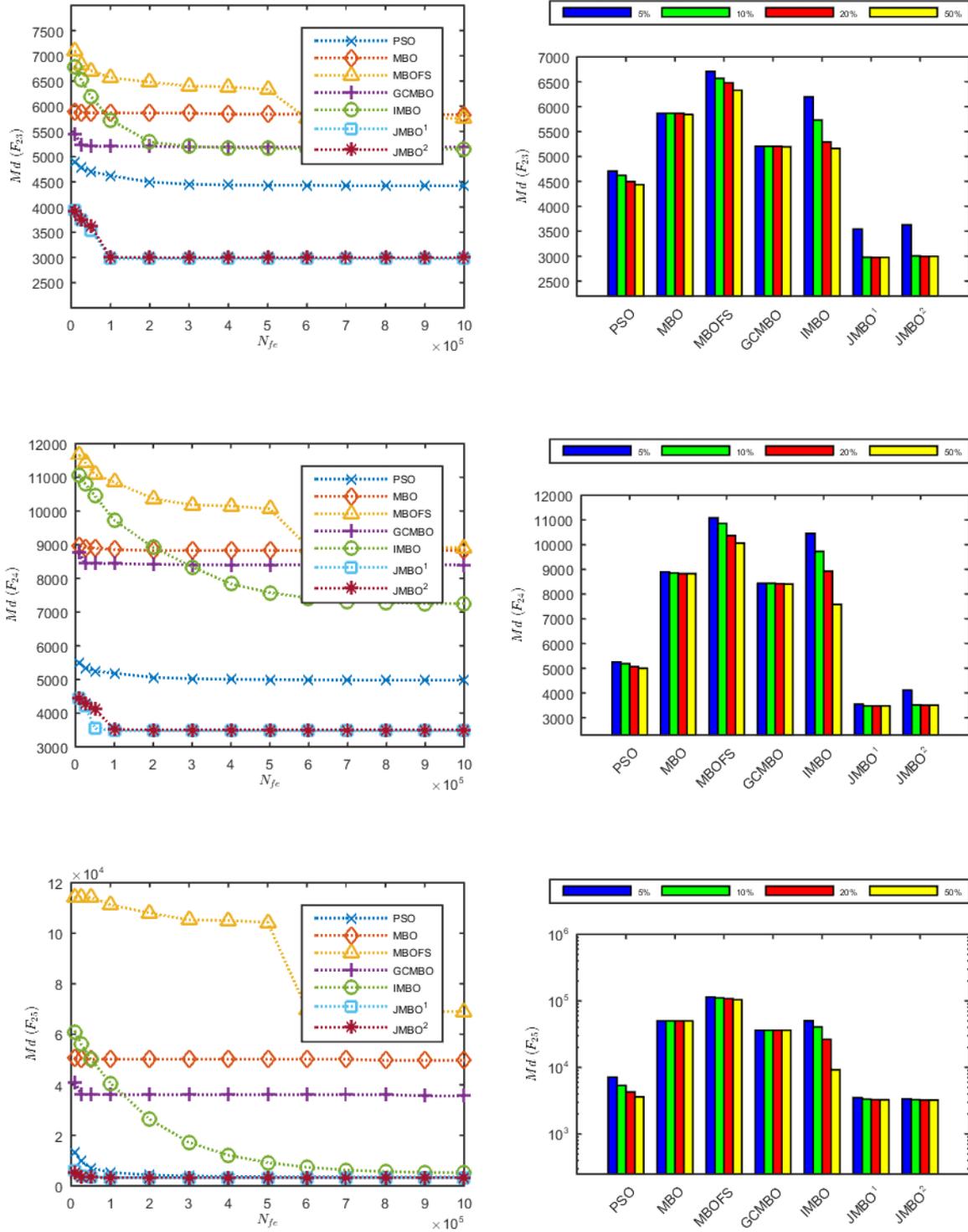


Figura 109 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{26}$  a  $F_{28}$  com  $D = 100$

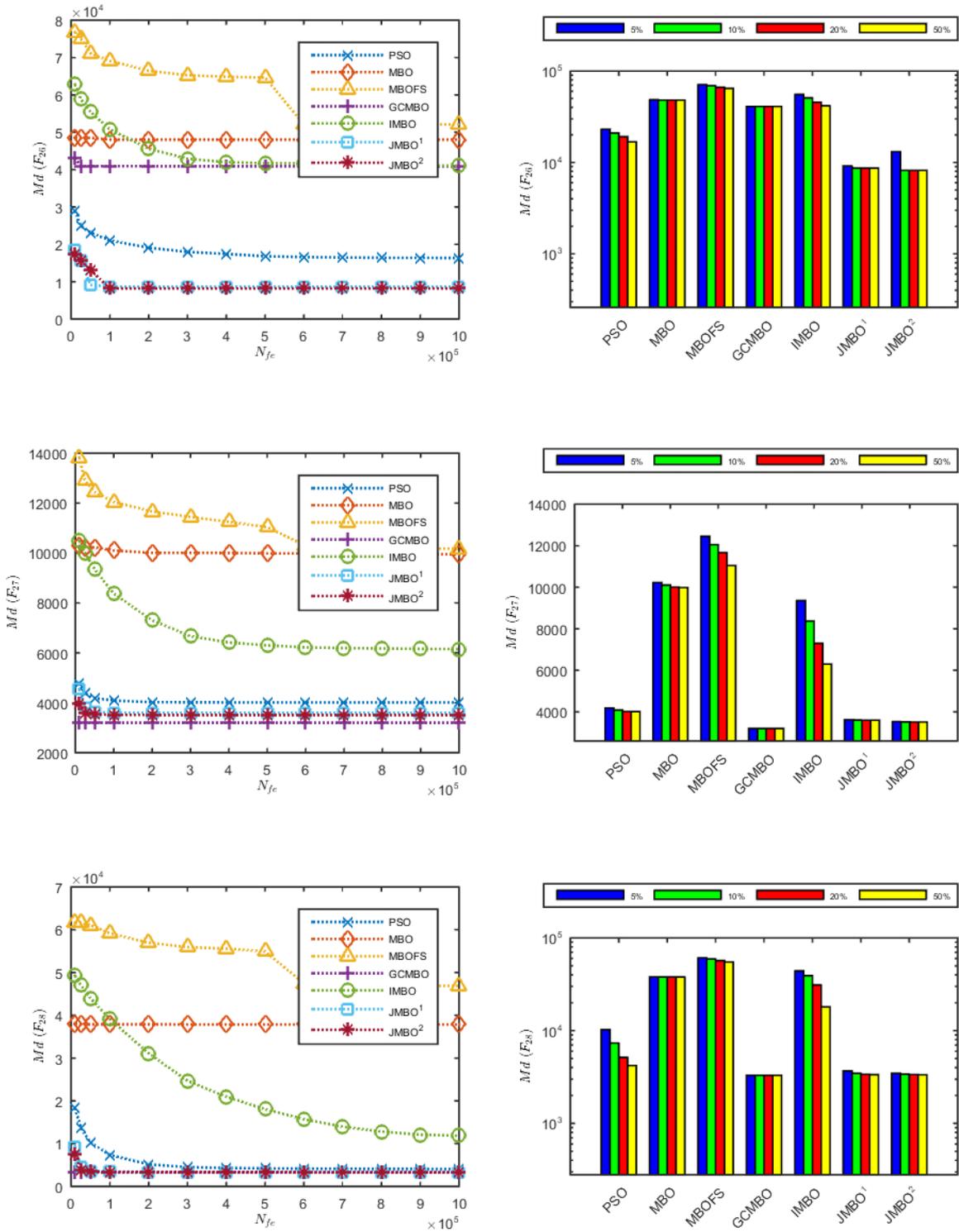


Figura 110 – Tendências de convergência do grupo SIM  $F_{29}$  a  $F_{30}$  com  $D = 100$

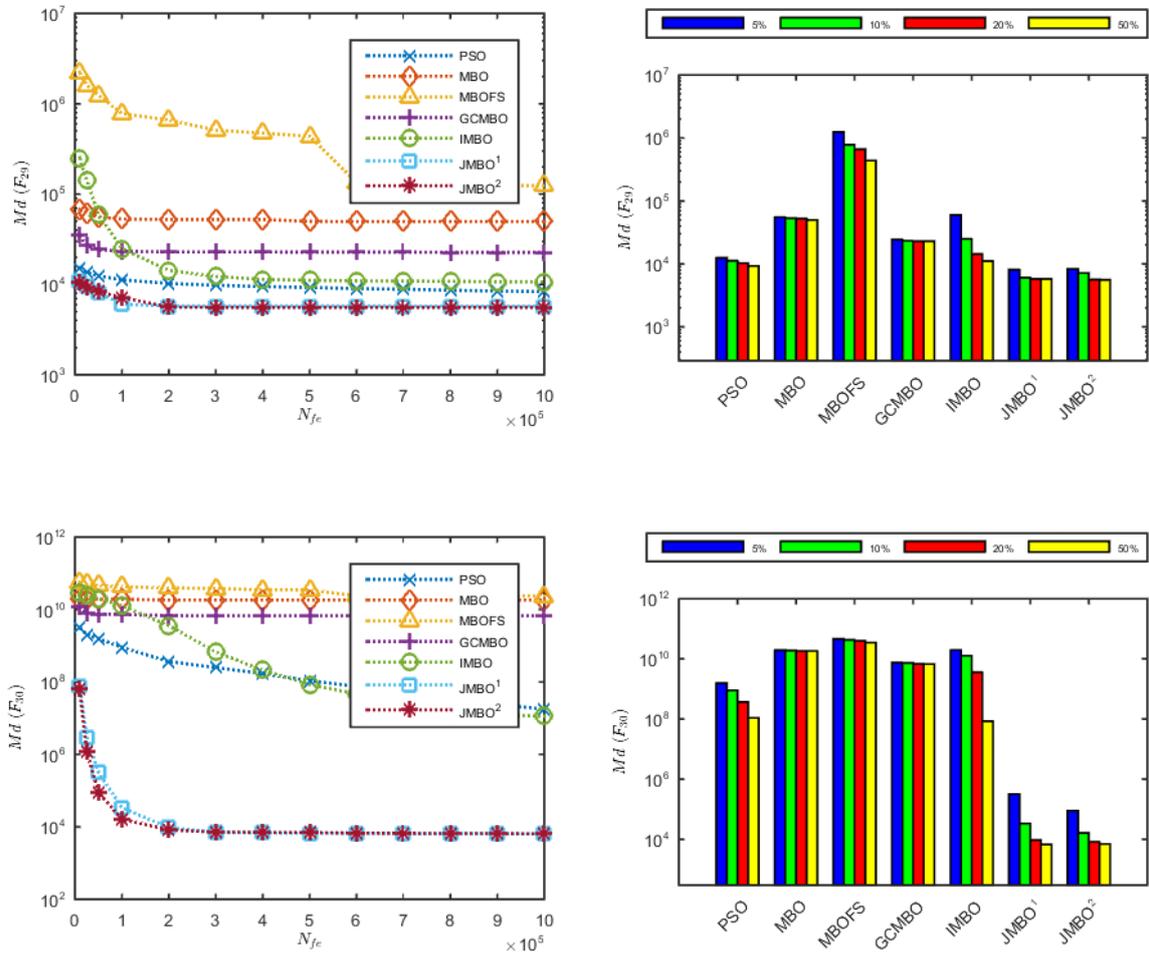


Figura 111 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{01}$  a  $F_{04}$  com  $D = 100$

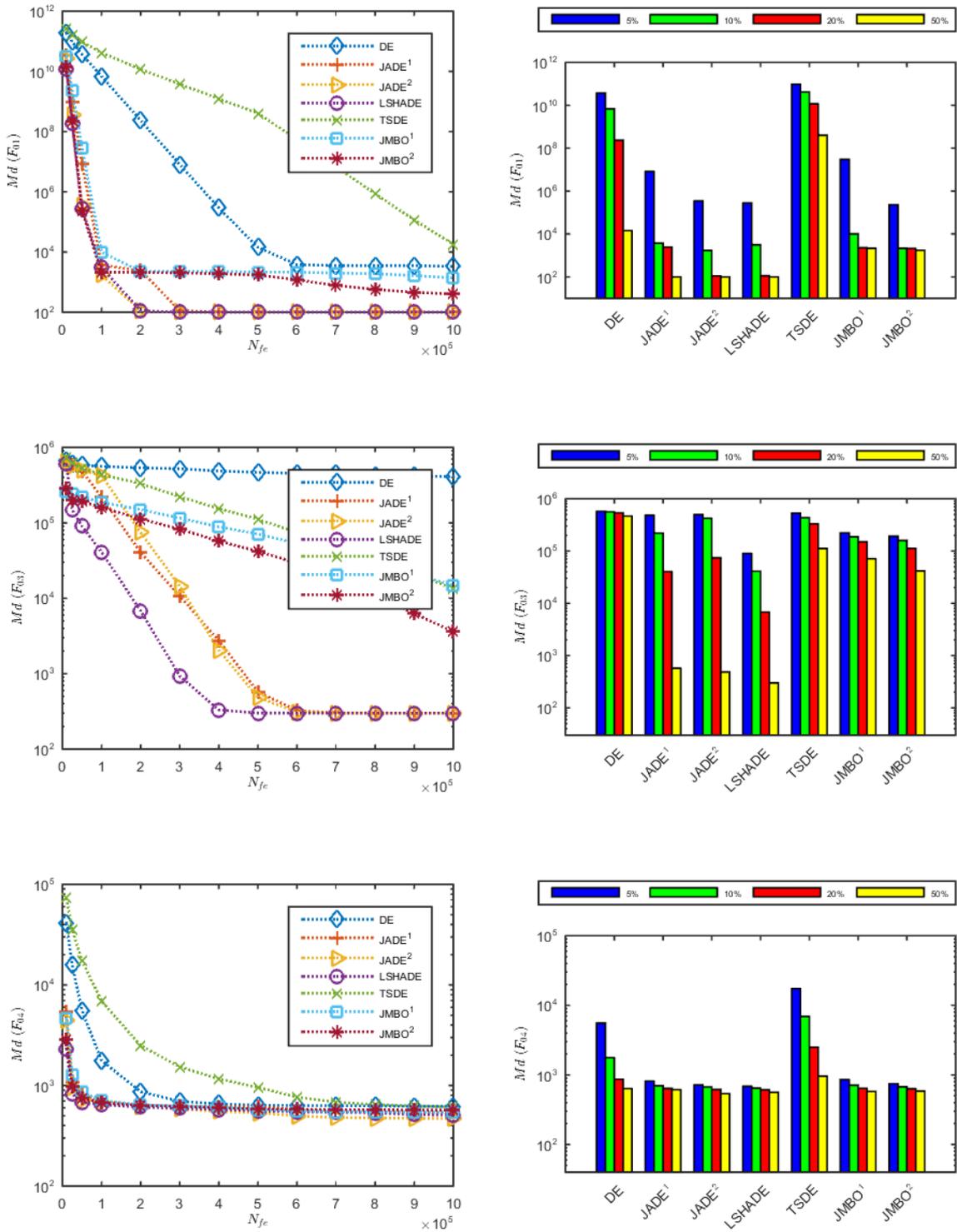


Figura 112 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{05}$  a  $F_{07}$  com  $D = 100$

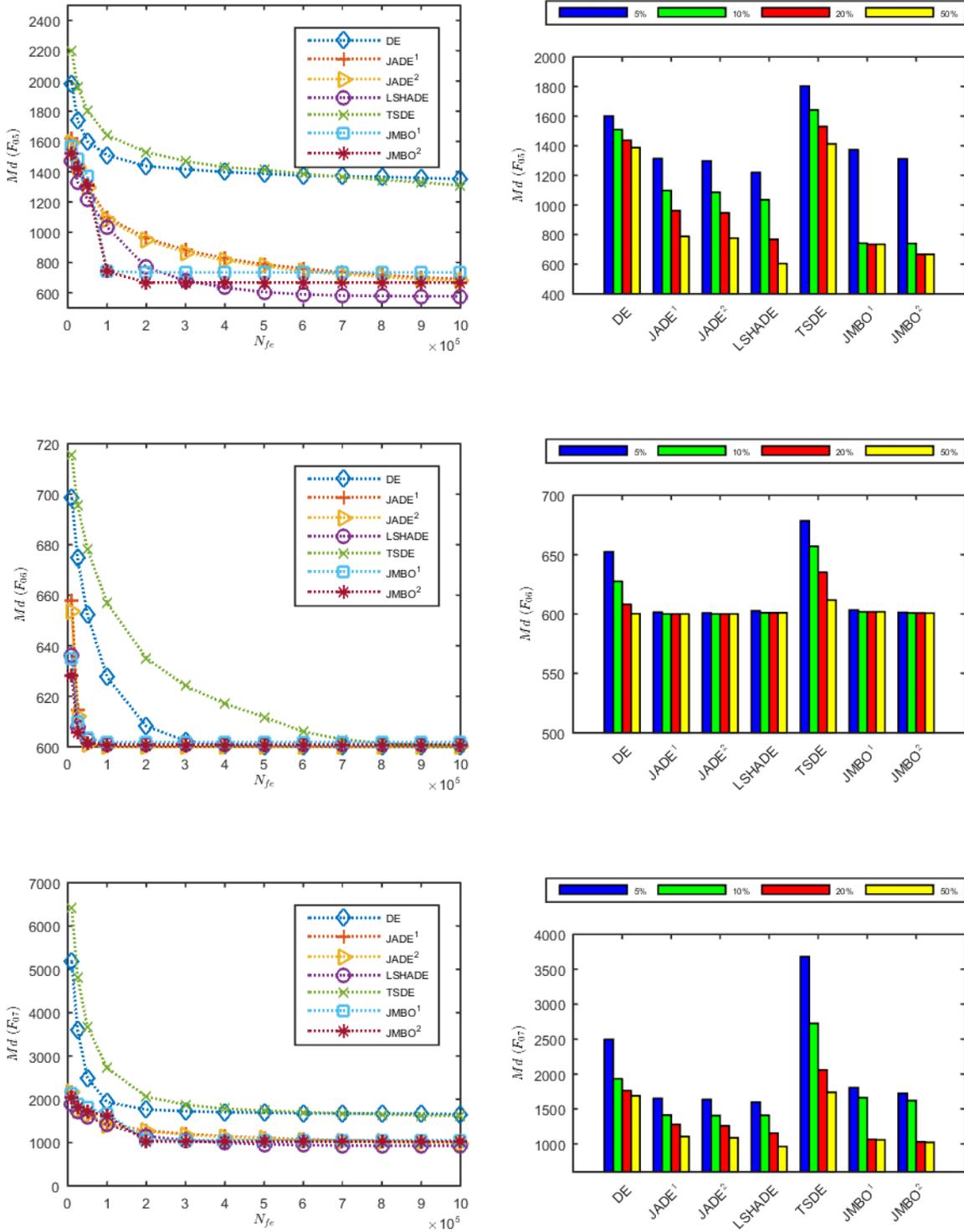


Figura 113 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{08}$  a  $F_{10}$  com  $D = 100$

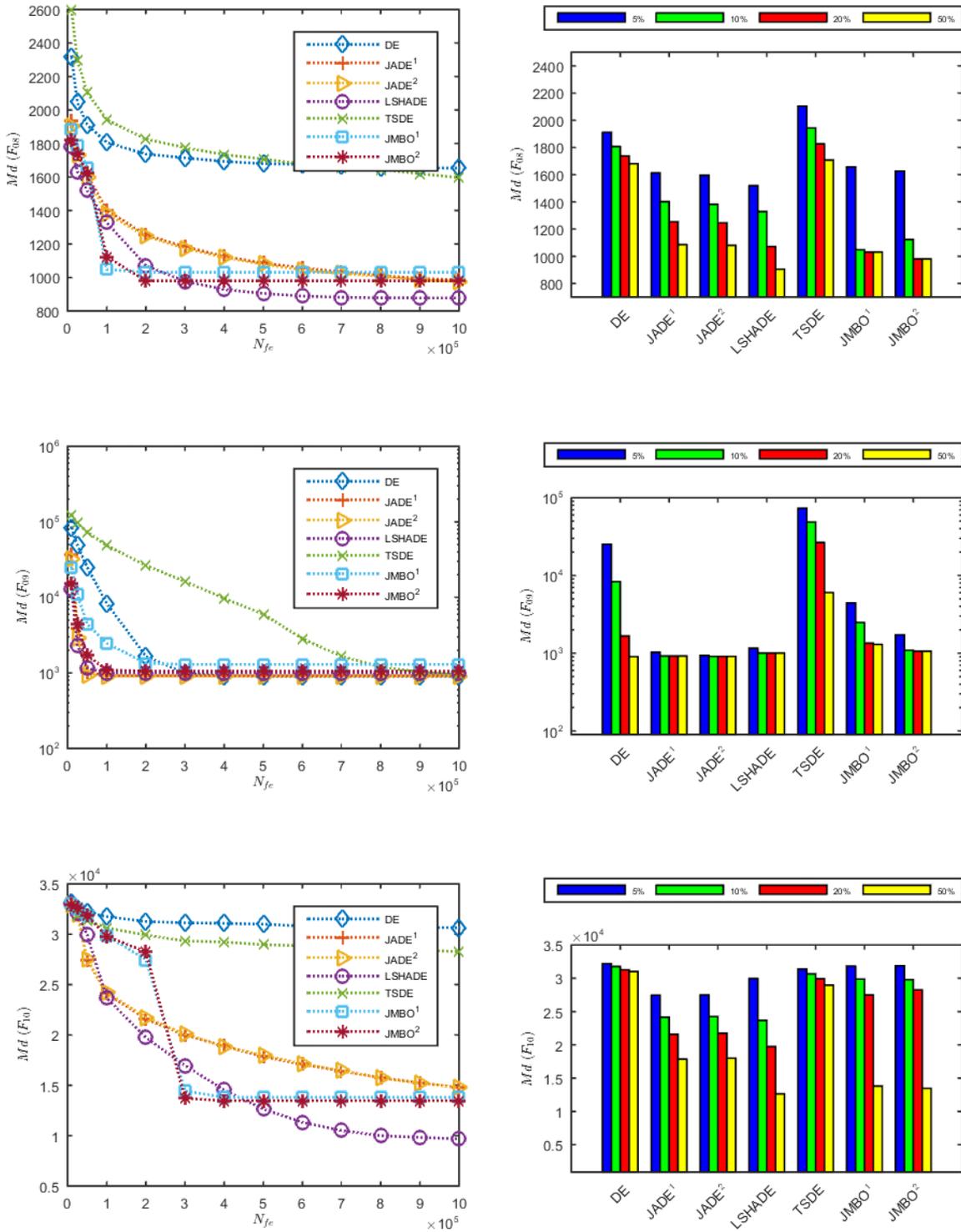


Figura 114 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{11}$  a  $F_{13}$  com  $D = 100$

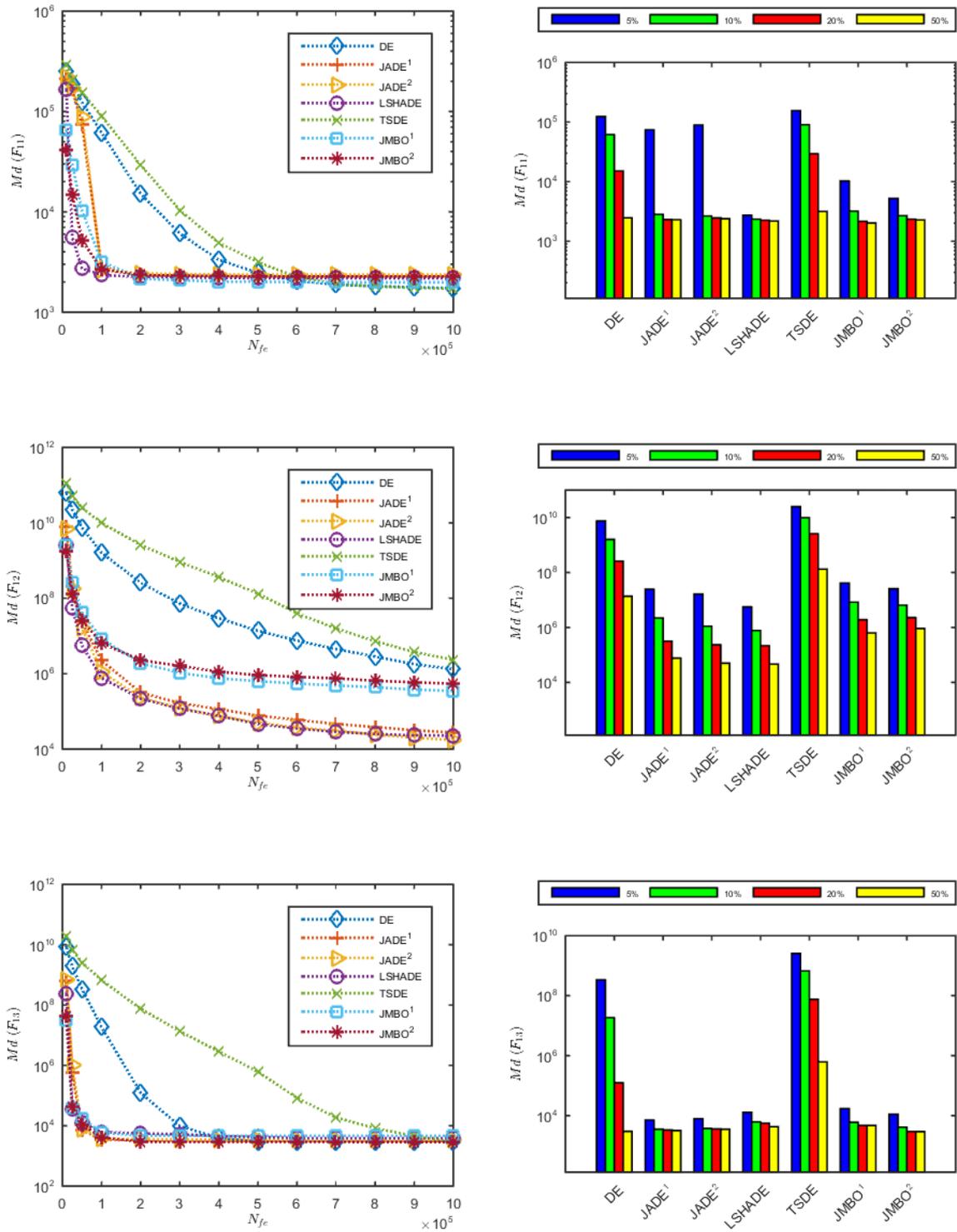


Figura 115 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{14}$  a  $F_{16}$  com  $D = 100$

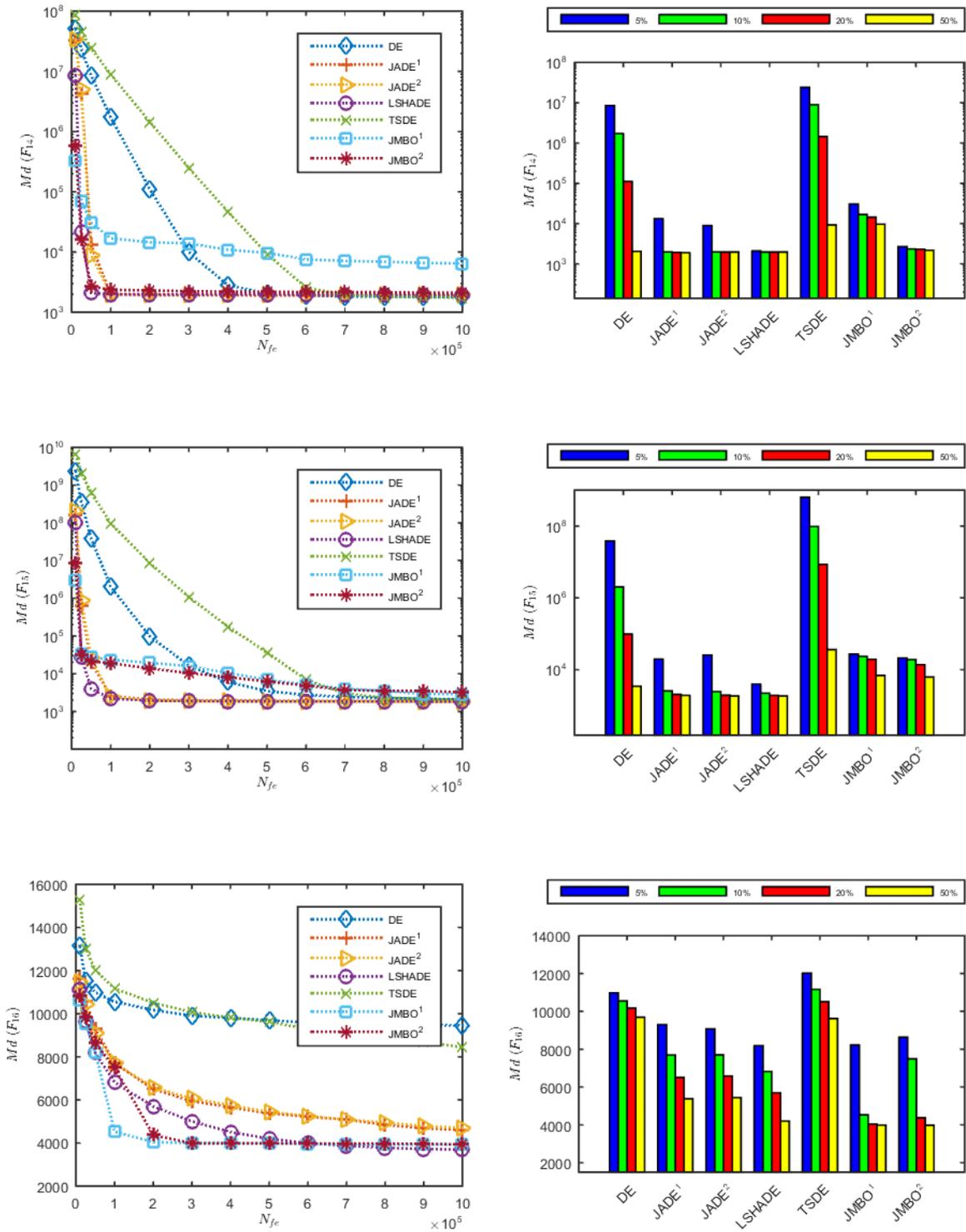


Figura 116 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{17}$  a  $F_{19}$  com  $D = 100$

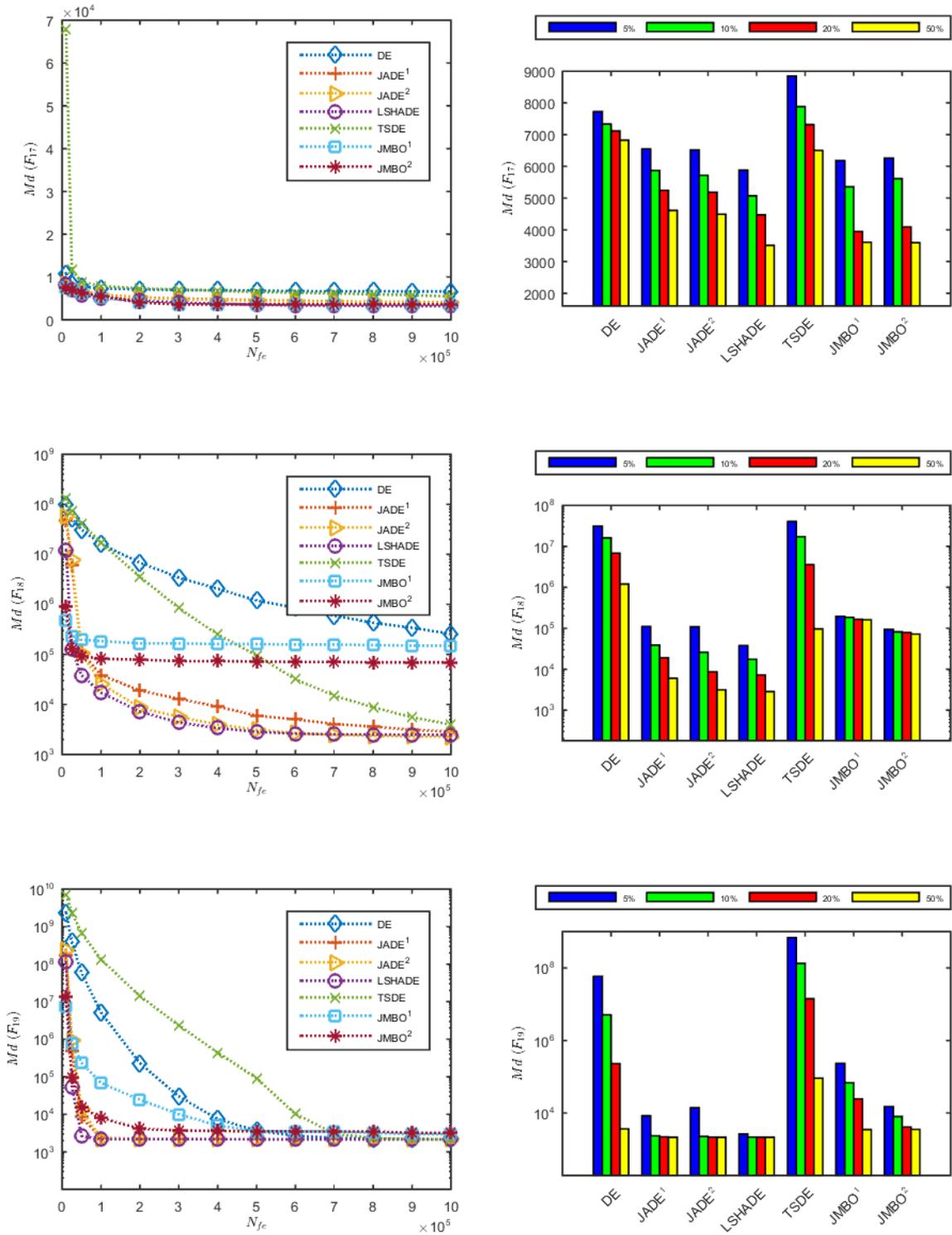


Figura 117 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{20}$  a  $F_{22}$  com  $D = 100$

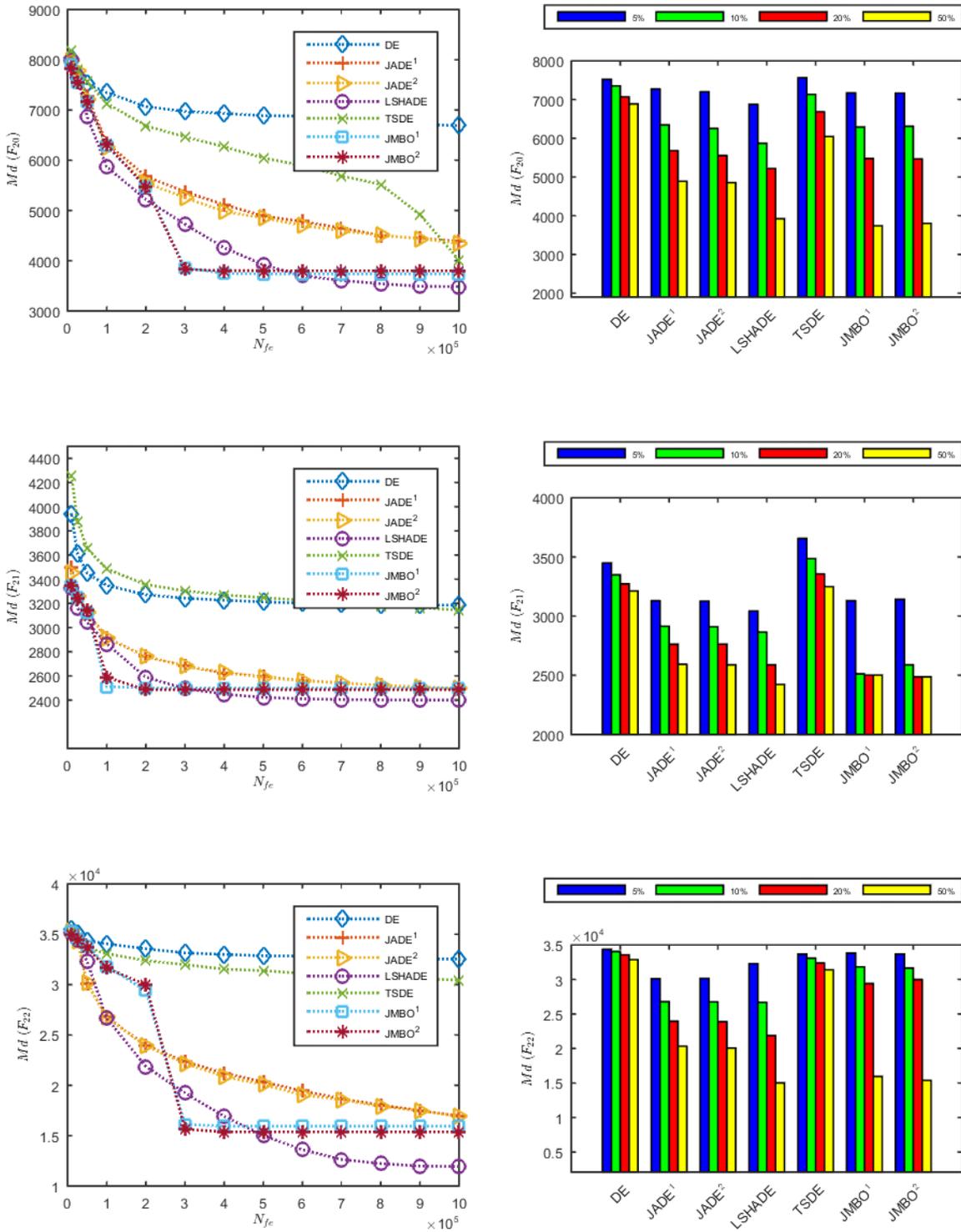


Figura 118 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{23}$  a  $F_{25}$  com  $D = 100$

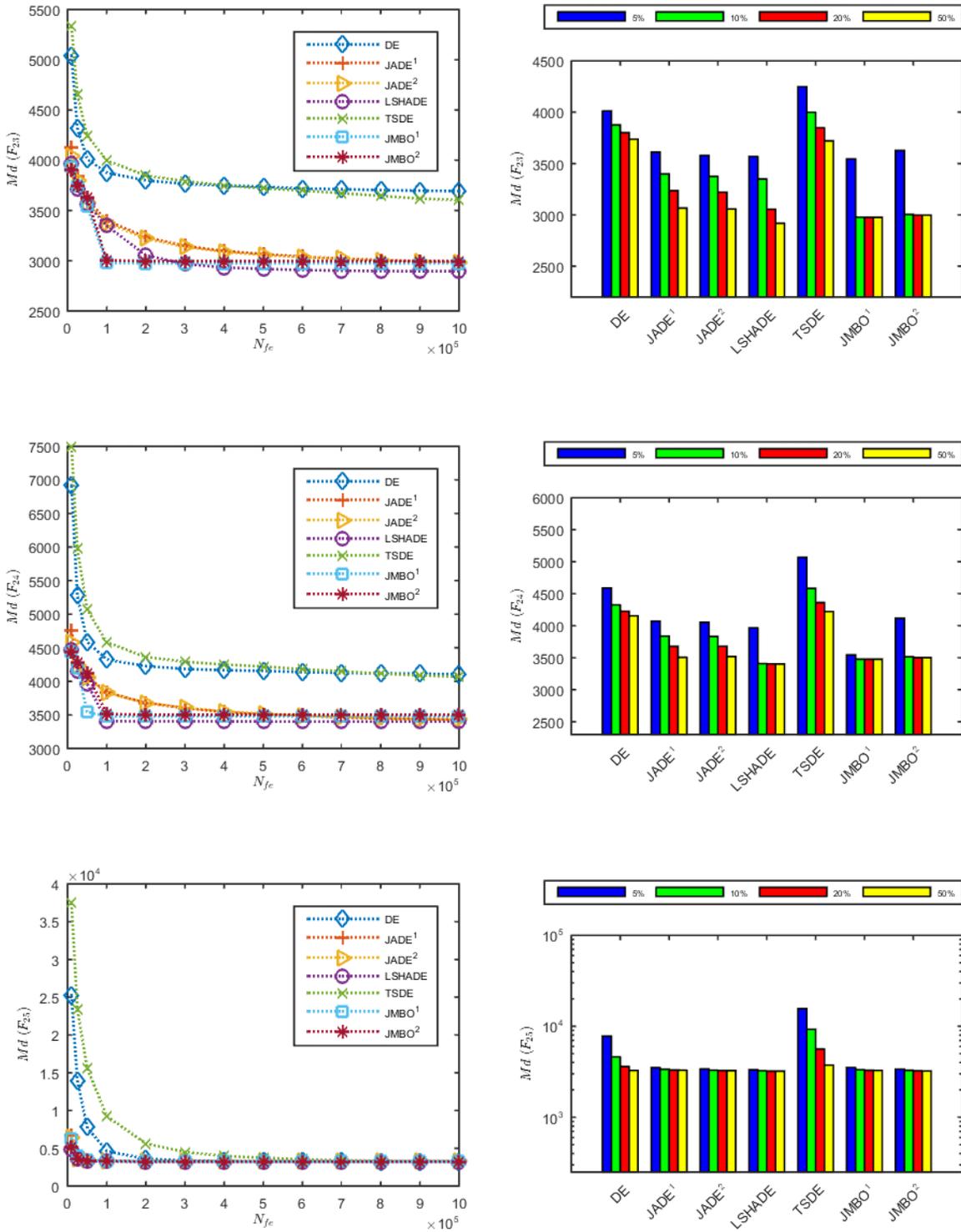


Figura 119 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{26}$  a  $F_{28}$  com  $D = 100$

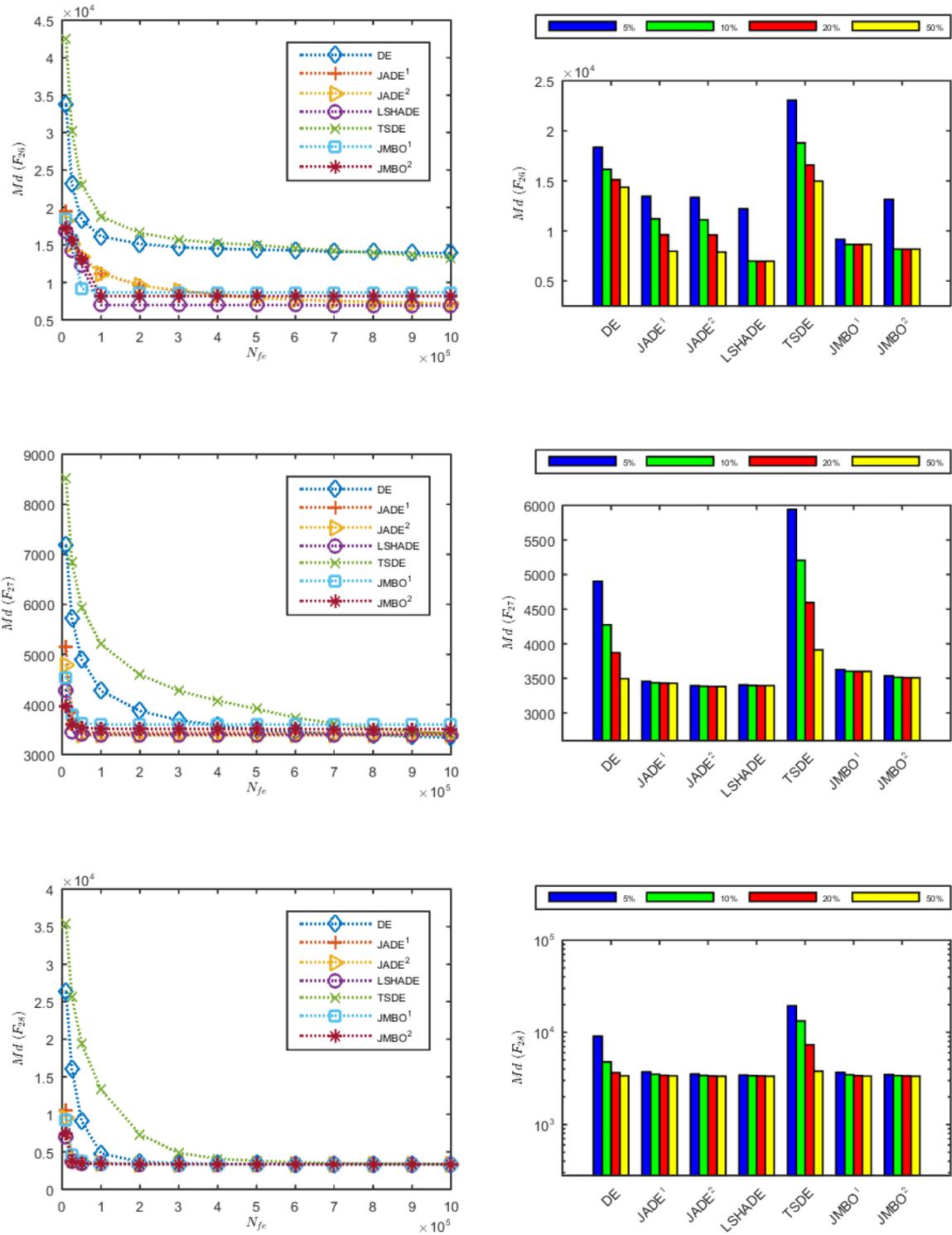


Figura 120 – Tendências de convergência do grupo DEM  $F_{29}$  a  $F_{30}$  com  $D = 100$

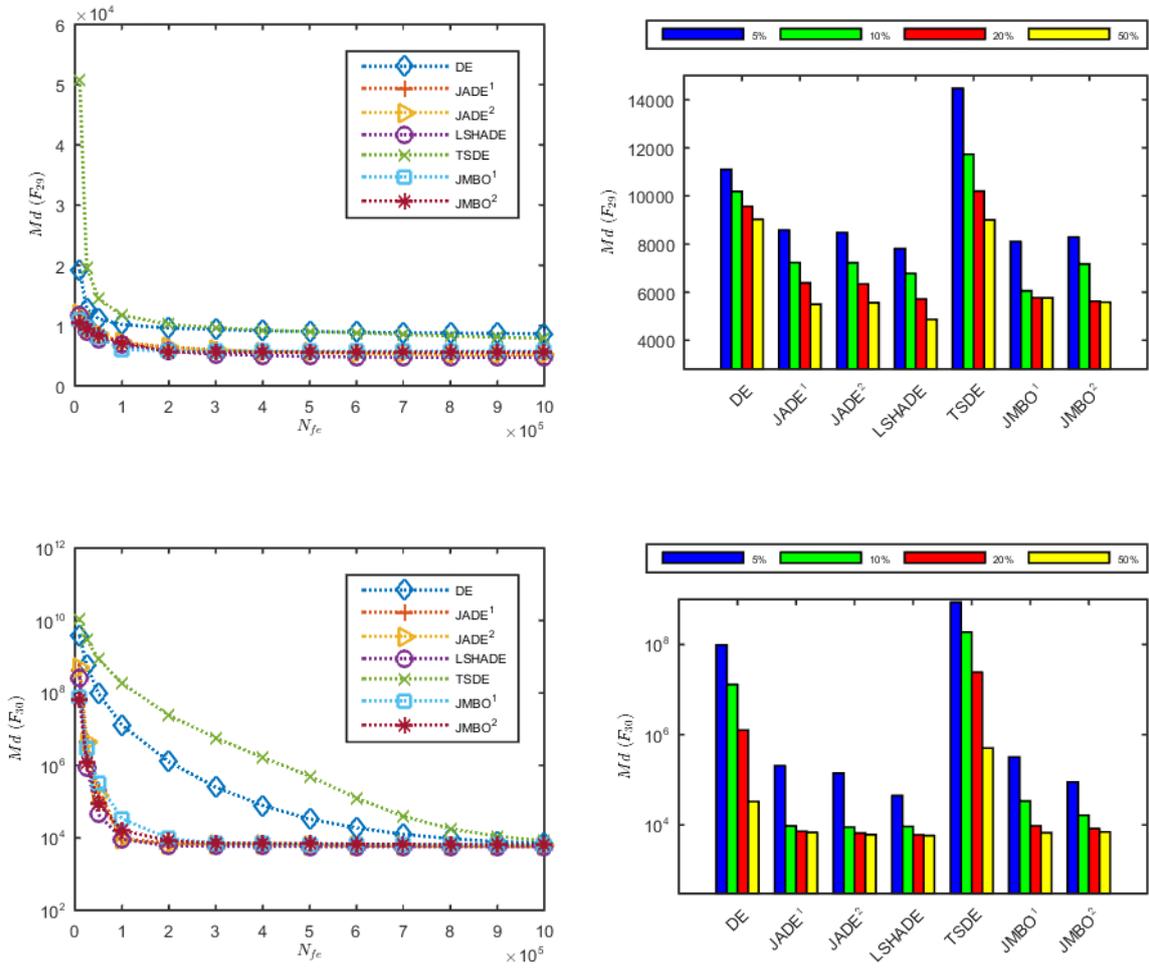


Figura 121 – Diagramas de caixa do grupo SIM  $F_{01}$  a  $F_{07}$  com  $D = 30$

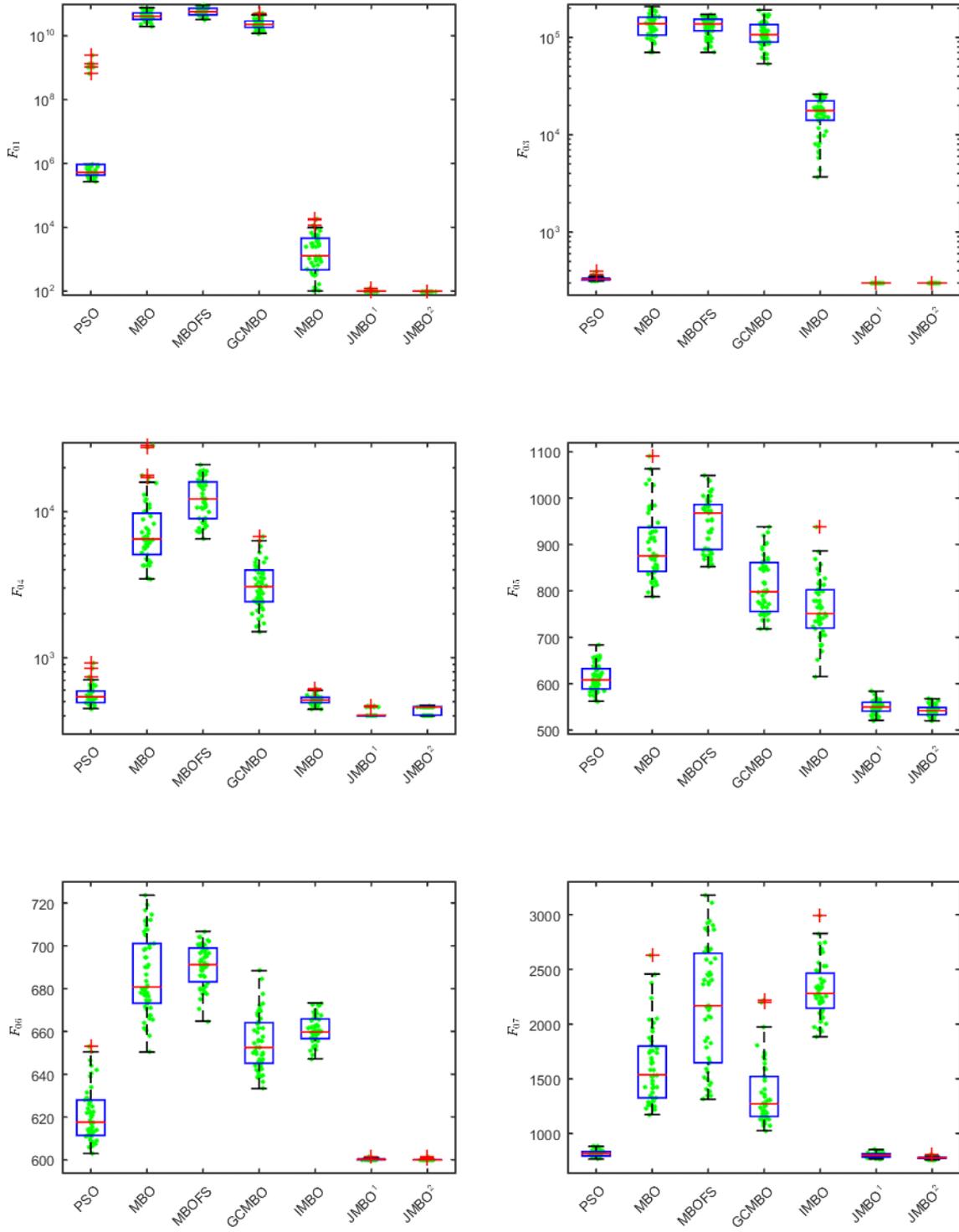


Figura 122 – Diagramas de caixa do grupo SIM  $F_{08}$  a  $F_{13}$  com  $D = 30$

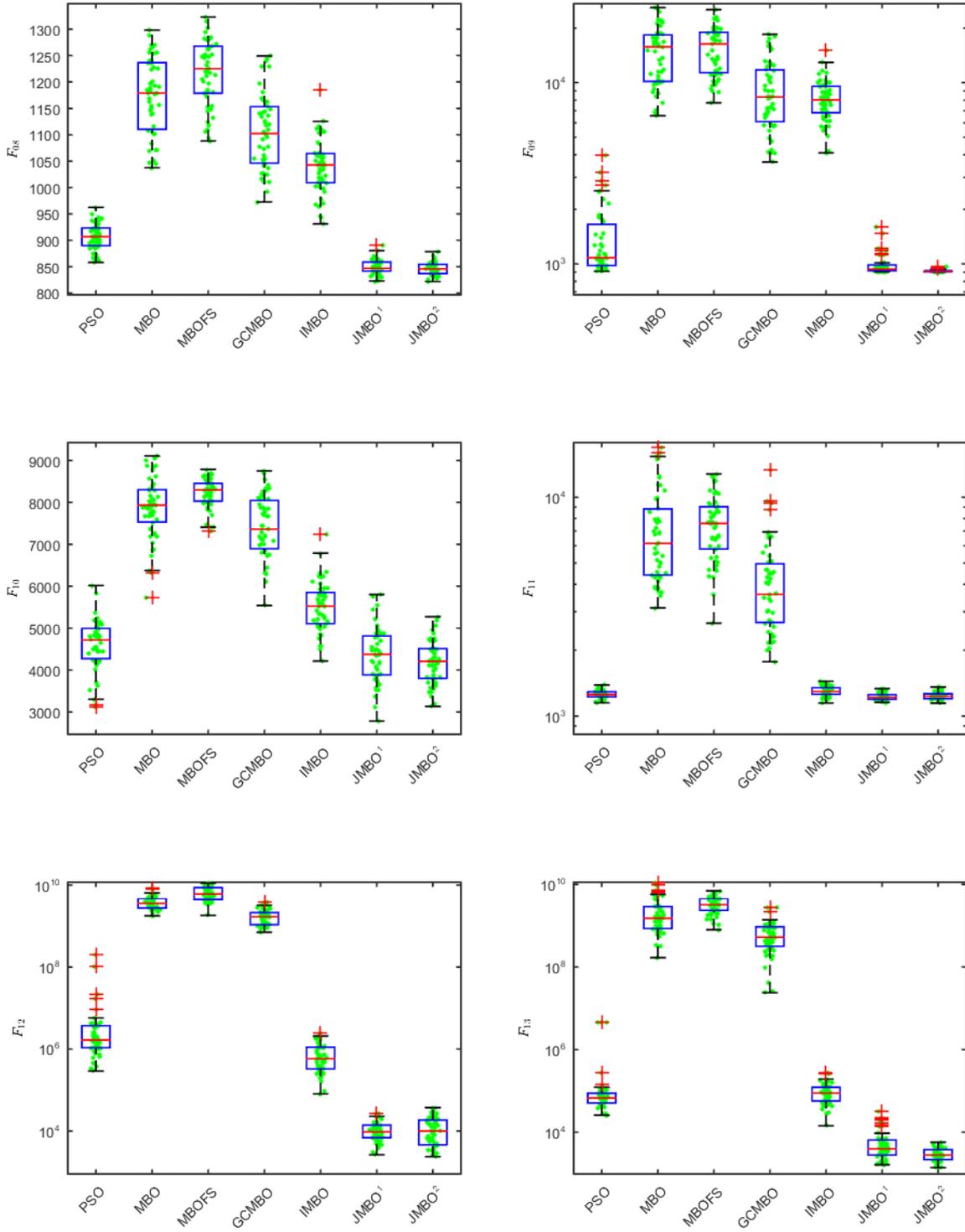


Figura 123 – Diagramas de caixa do grupo SIM  $F_{14}$  a  $F_{19}$  com  $D = 30$

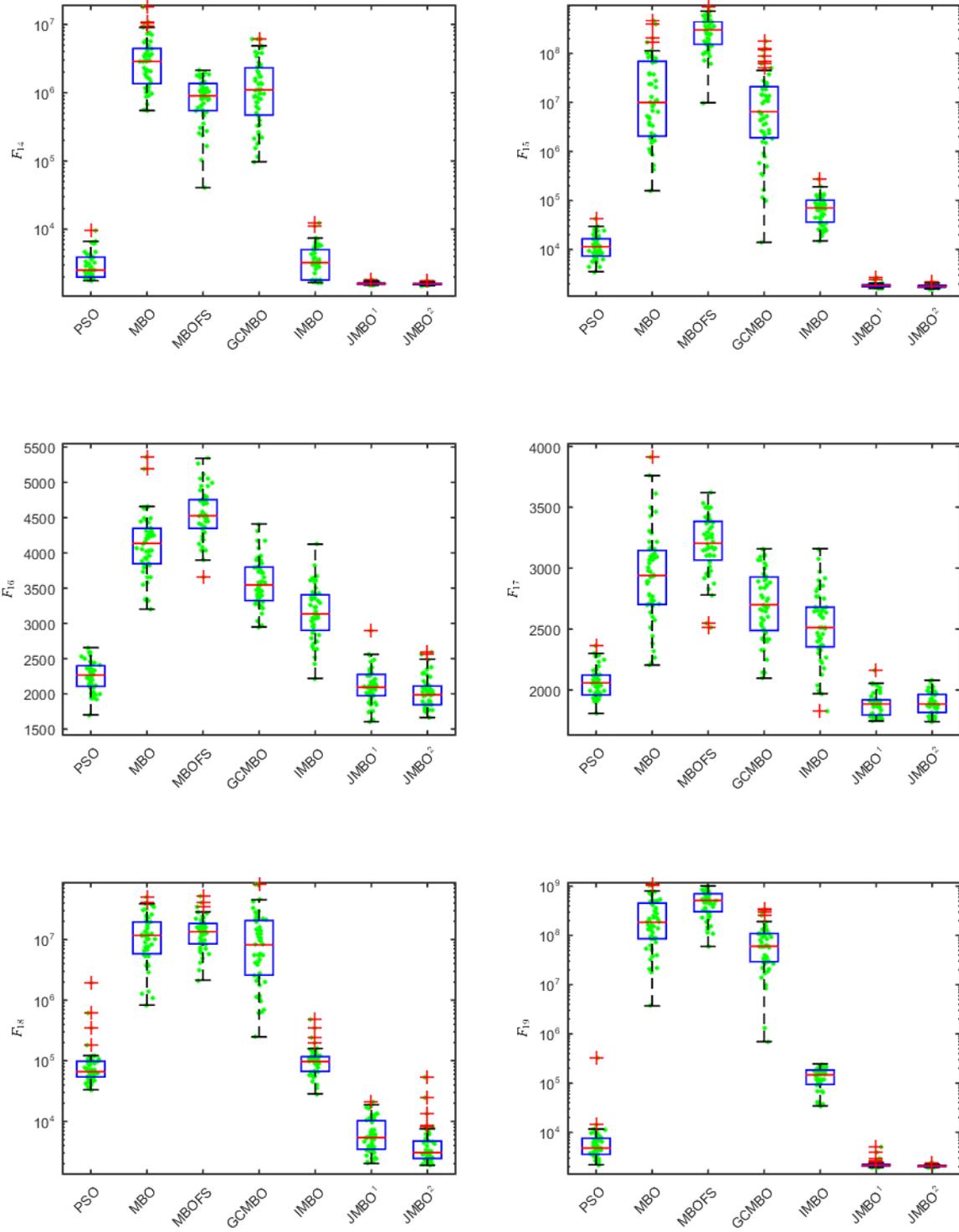


Figura 124 – Diagramas de caixa do grupo SIM  $F_{20}$  a  $F_{25}$  com  $D = 30$

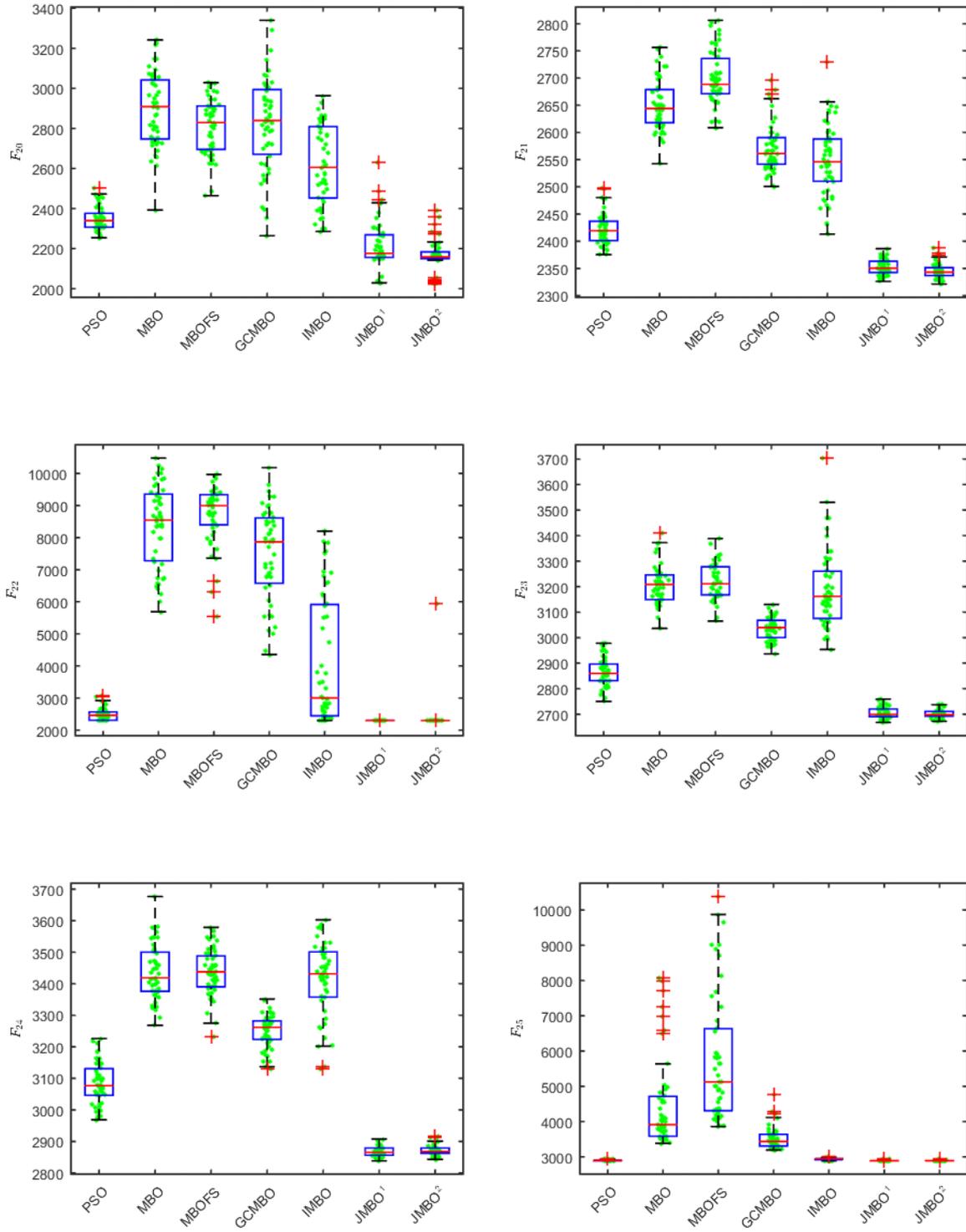


Figura 125 – Diagramas de caixa do grupo SIM  $F_{26}$  a  $F_{30}$  com  $D = 30$

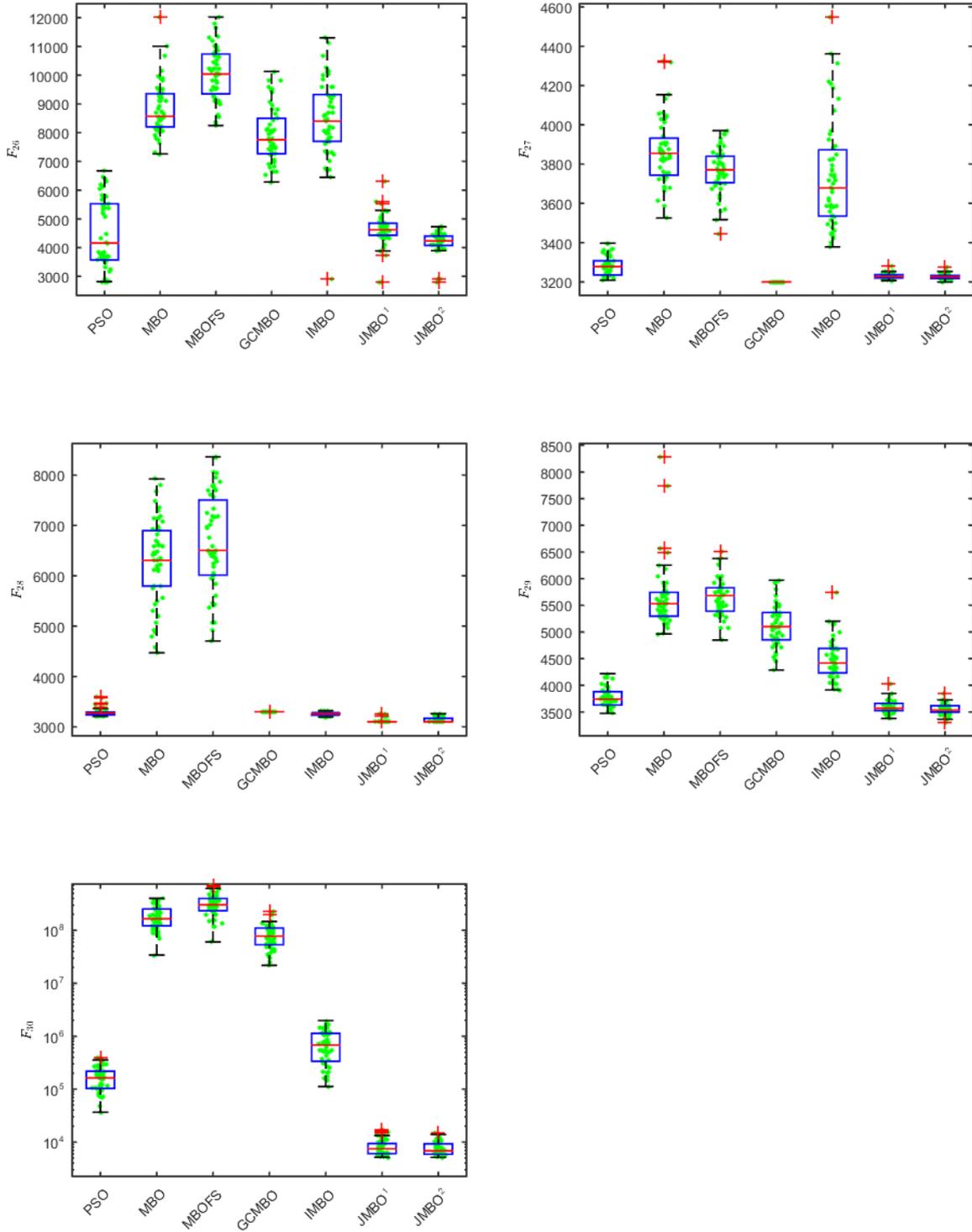


Figura 126 – Diagramas de caixa do grupo DEM  $F_{01}$  a  $F_{07}$  com  $D = 30$

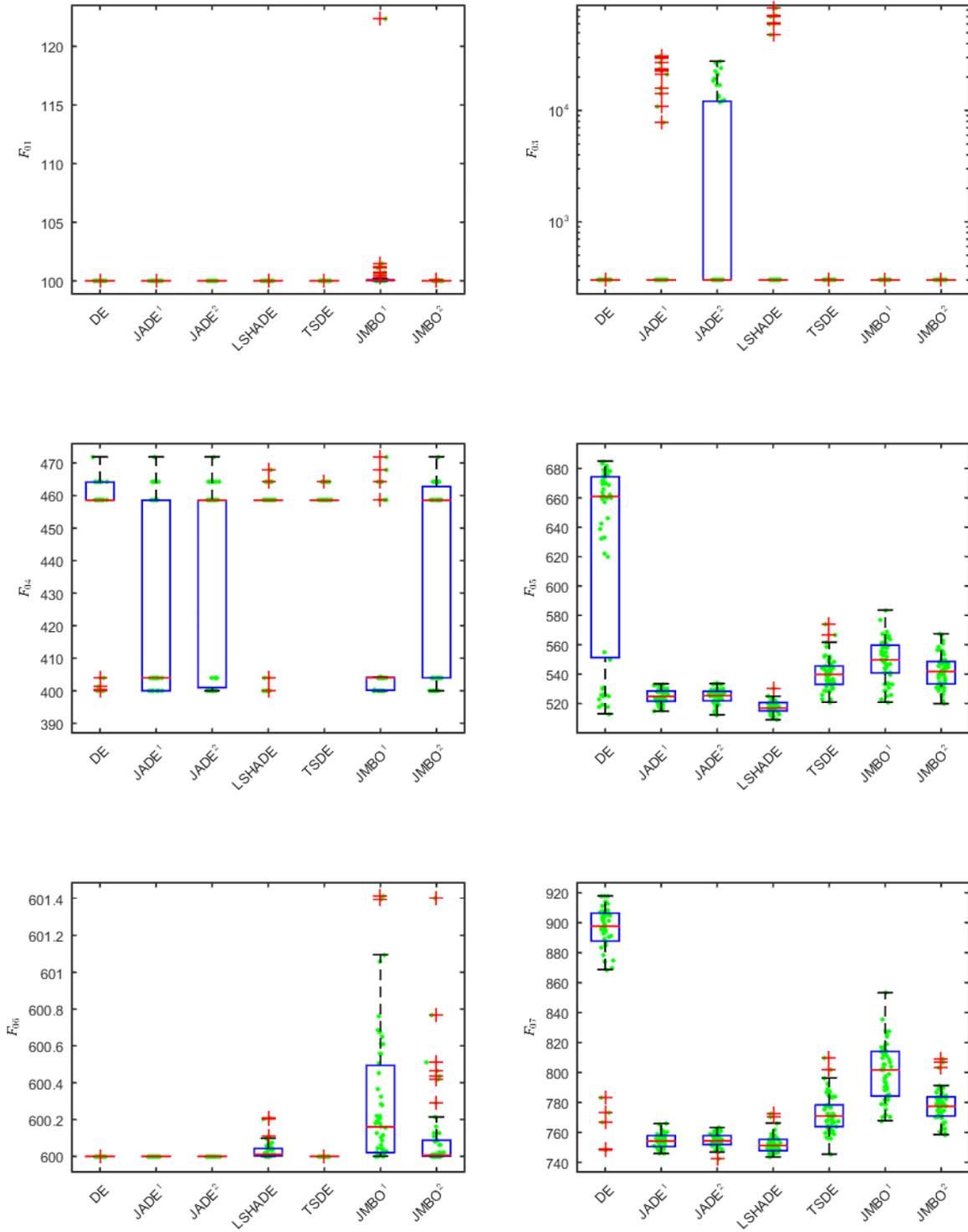


Figura 127 – Diagramas de caixa do grupo DEM  $F_{08}$  a  $F_{13}$  com  $D = 30$

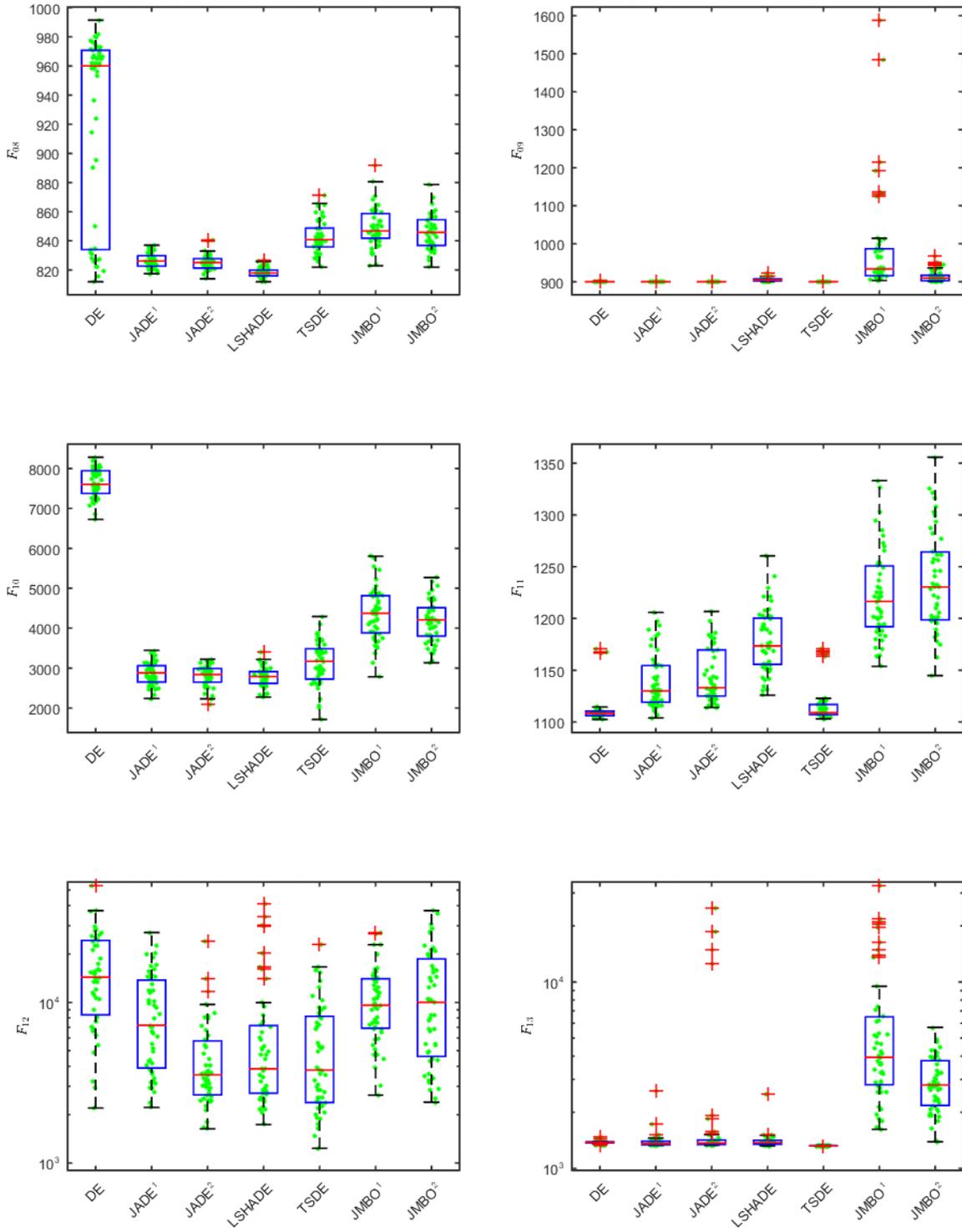


Figura 128 – Diagramas de caixa do grupo DEM  $F_{14}$  a  $F_{19}$  com  $D = 30$

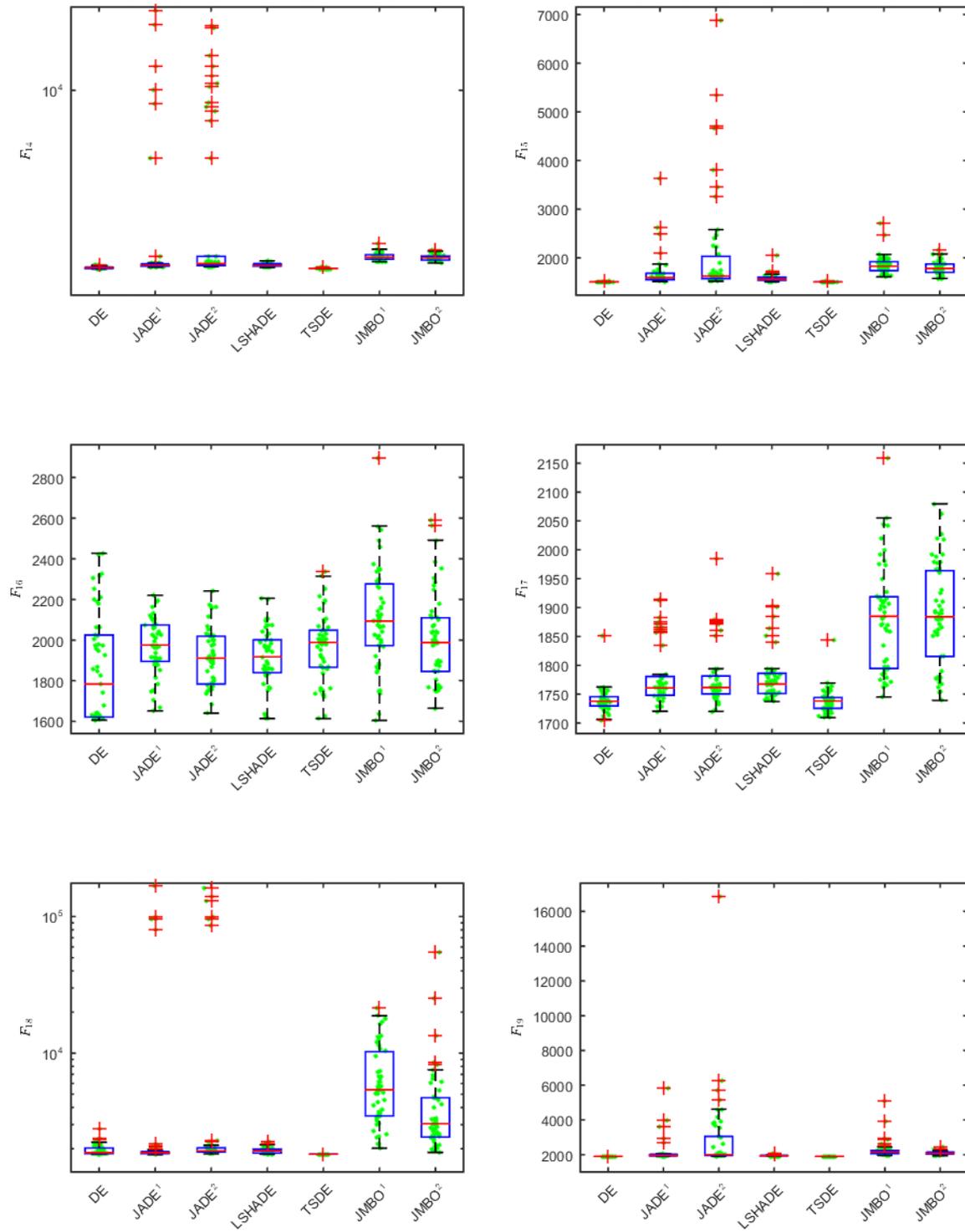


Figura 129 – Diagramas de caixa do grupo DEM  $F_{20}$  a  $F_{25}$  com  $D = 30$

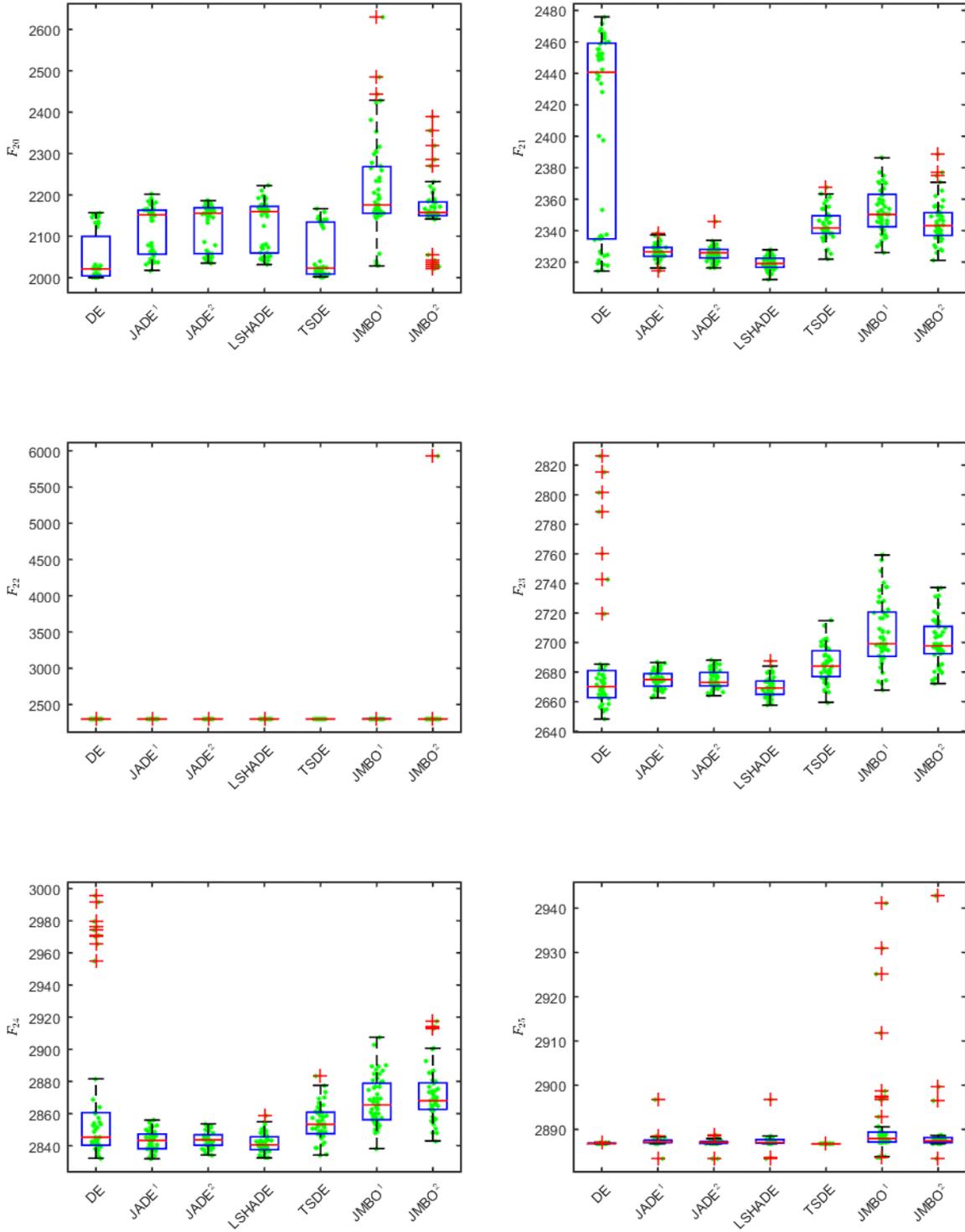


Figura 130 – Diagramas de caixa do grupo DEM  $F_{26}$  a  $F_{30}$  com  $D = 30$

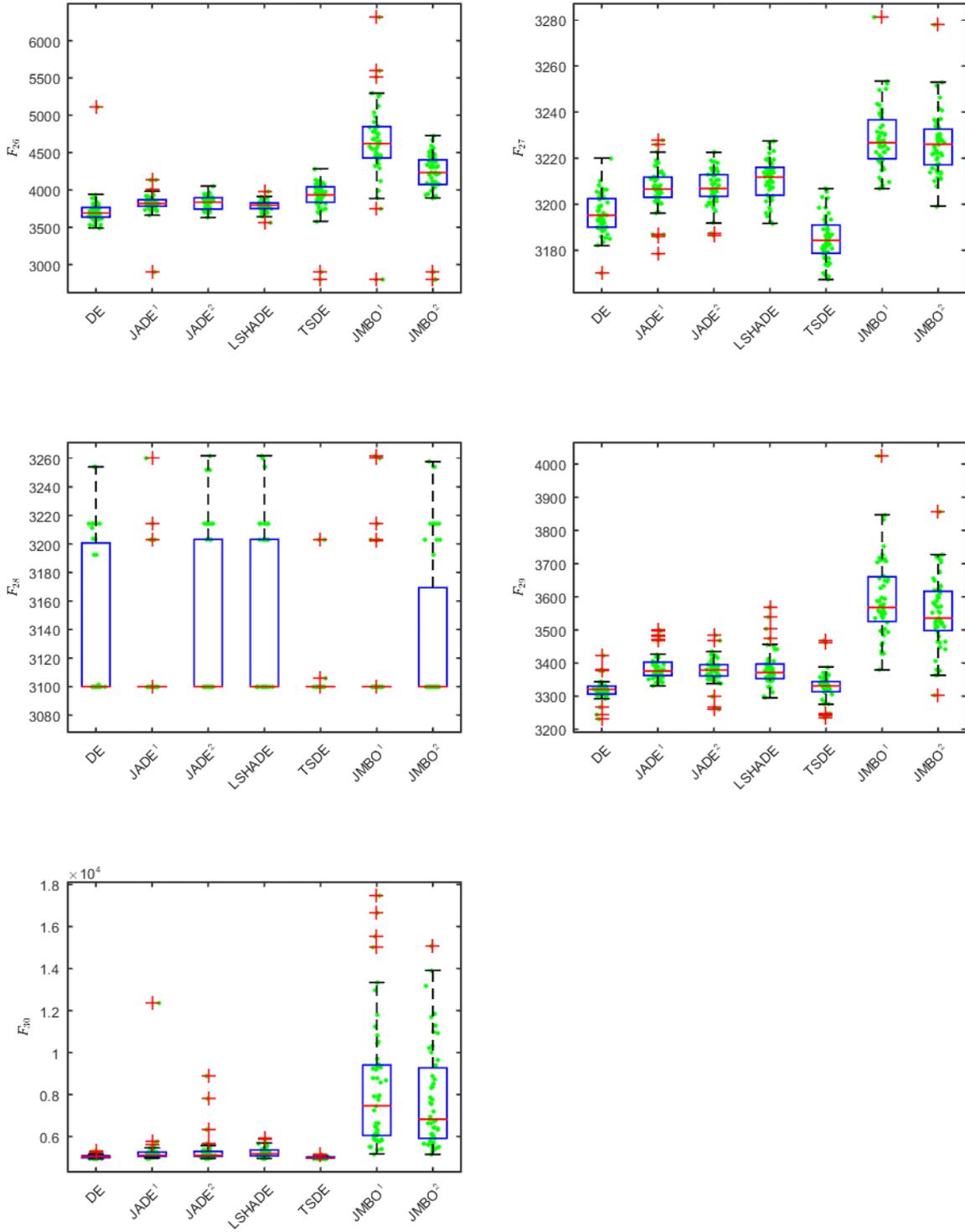


Figura 131 – Diagramas de caixa do grupo SIM  $F_{01}$  a  $F_{07}$  com  $D = 100$

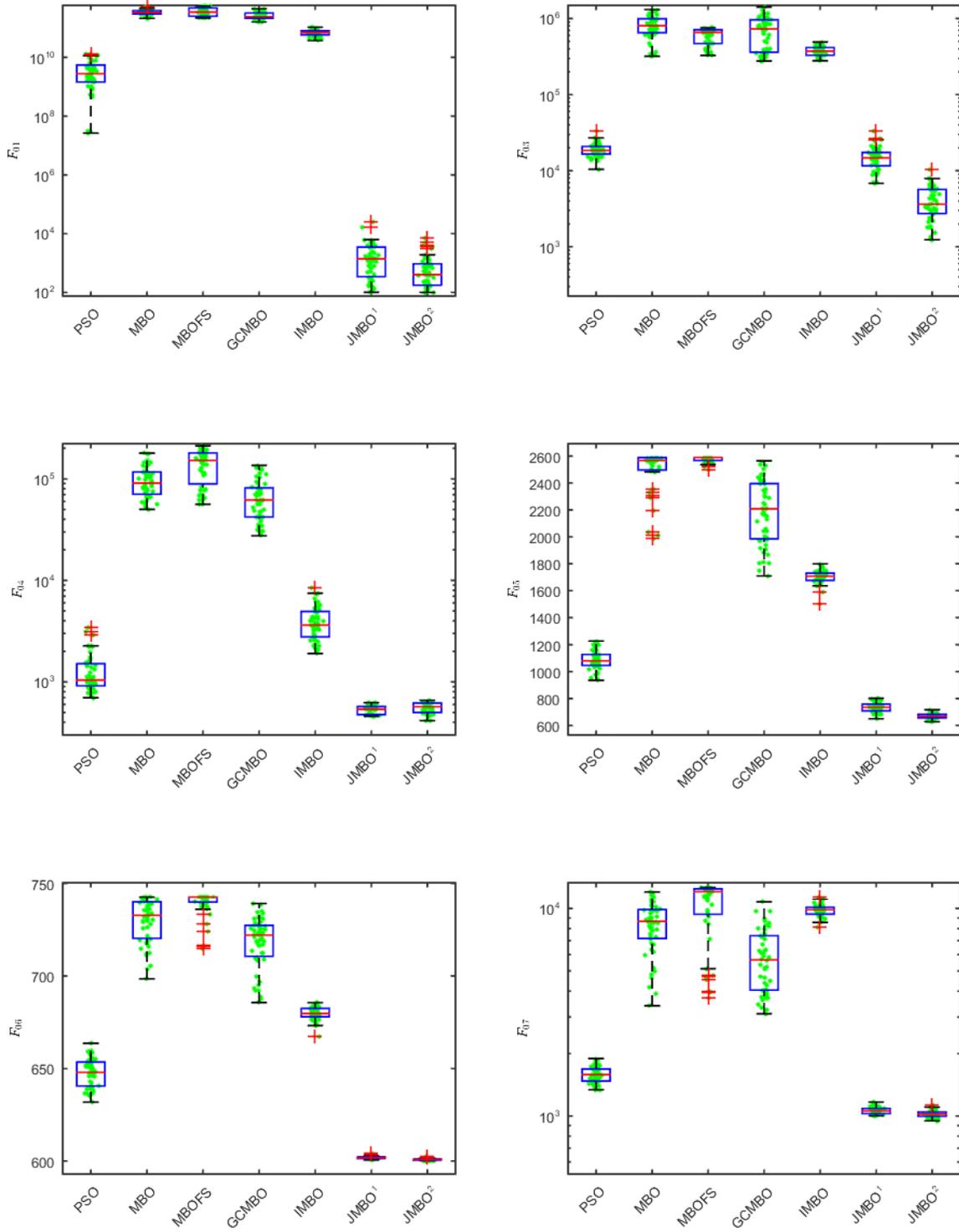


Figura 132 – Diagramas de caixa do grupo SIM  $F_{08}$  a  $F_{13}$  com  $D = 100$

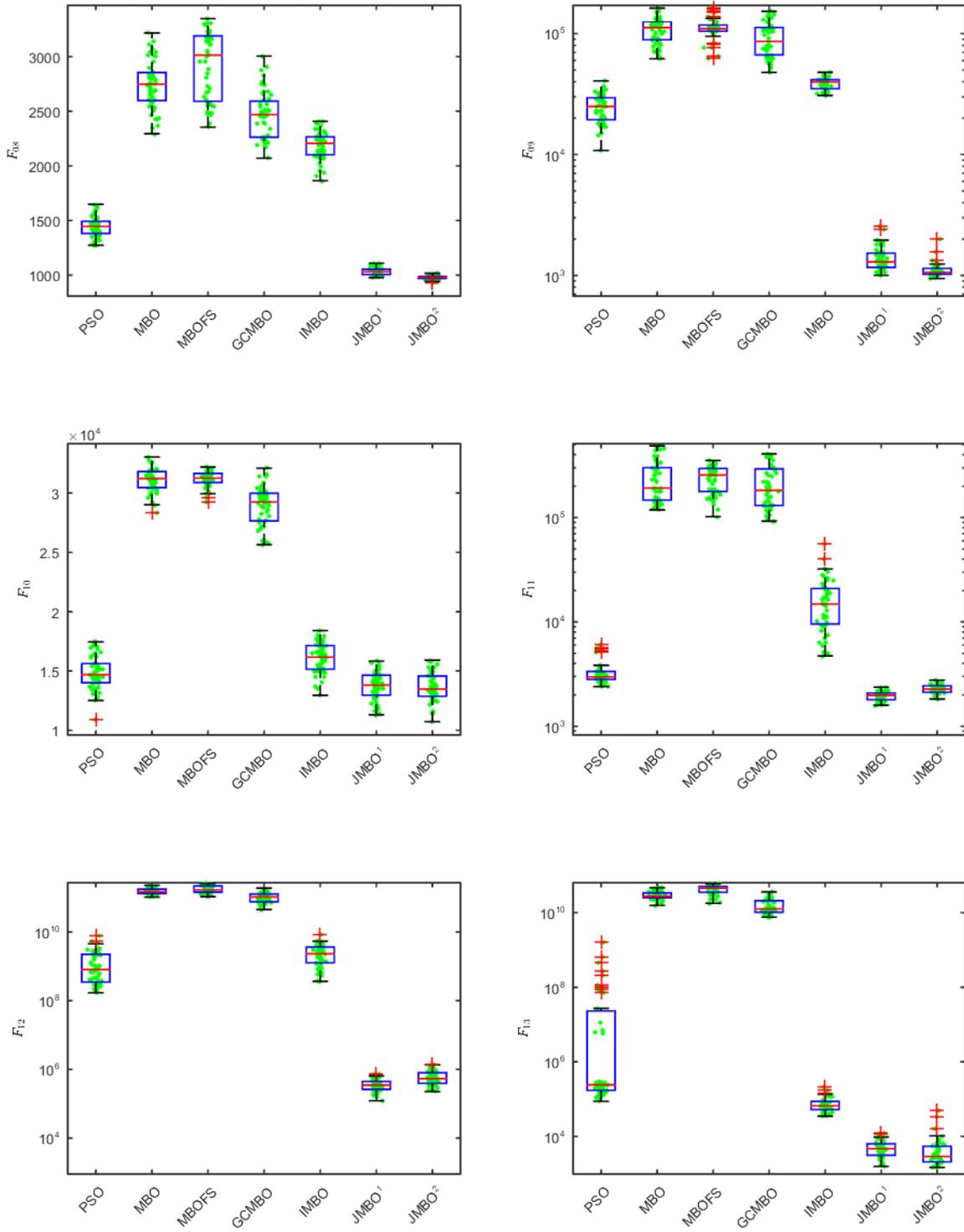


Figura 133 – Diagramas de caixa do grupo SIM  $F_{14}$  a  $F_{19}$  com  $D = 100$

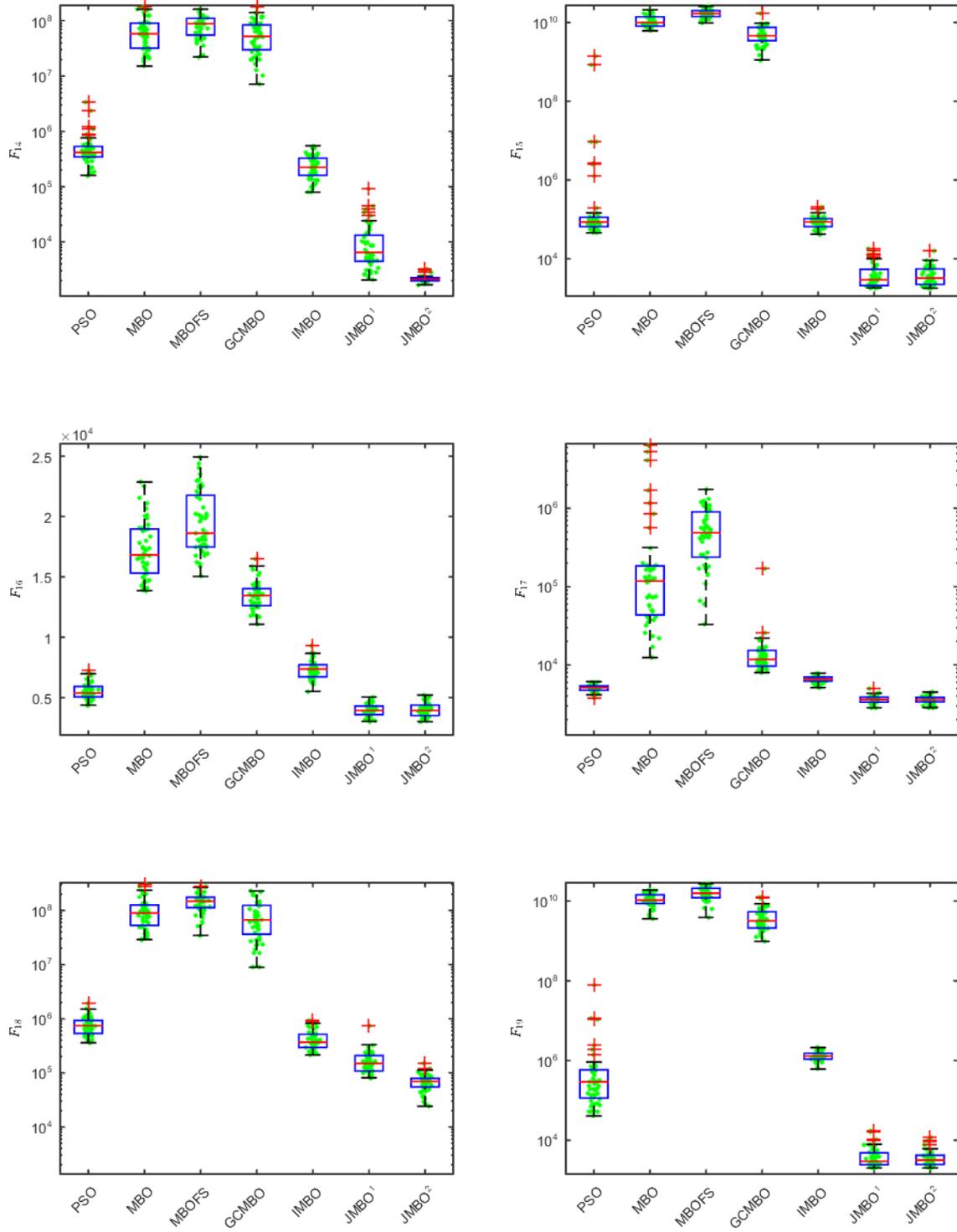


Figura 134 – Diagramas de caixa do grupo SIM  $F_{20}$  a  $F_{25}$  com  $D = 100$

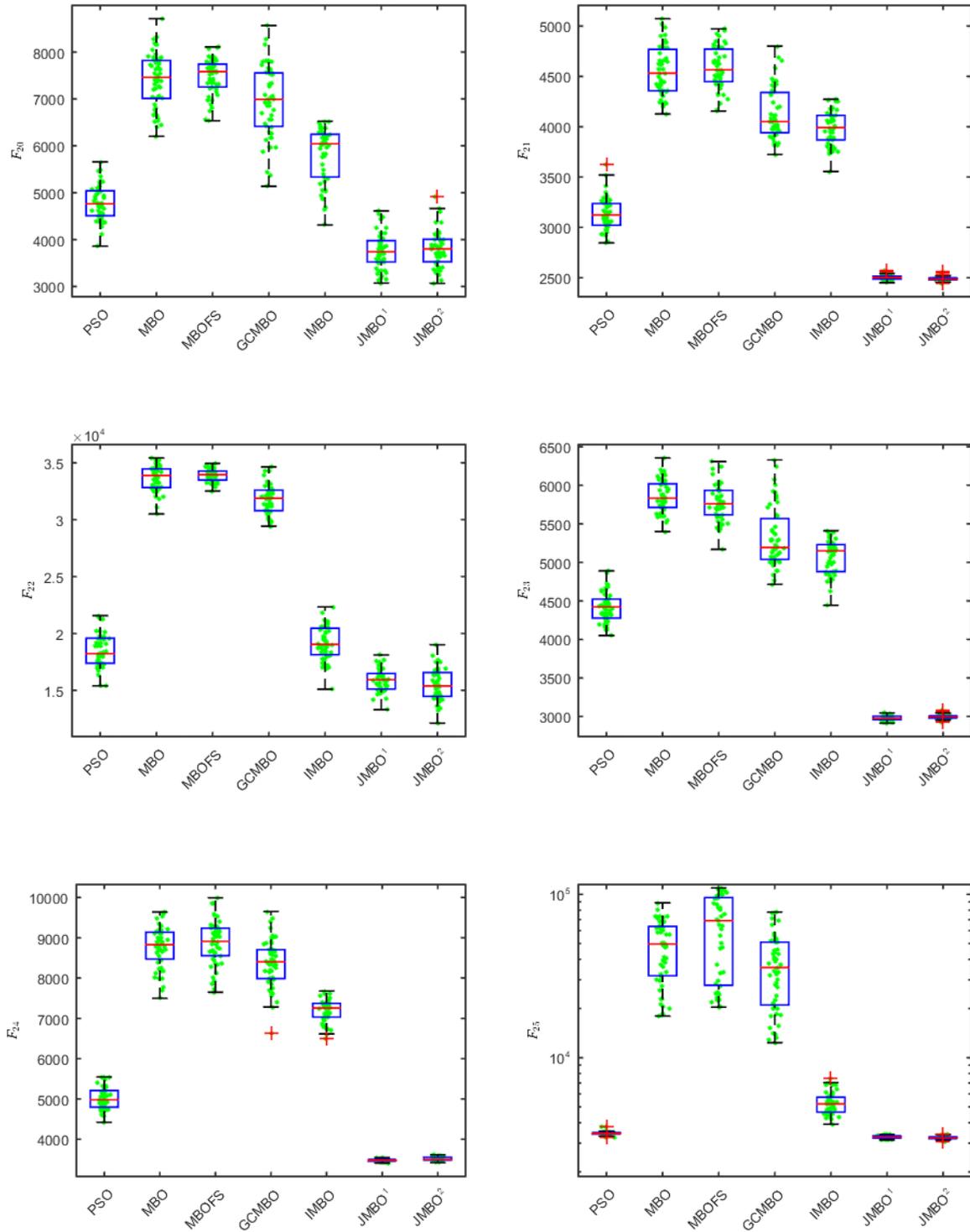


Figura 135 – Diagramas de caixa do grupo SIM  $F_{26}$  a  $F_{30}$  com  $D = 100$

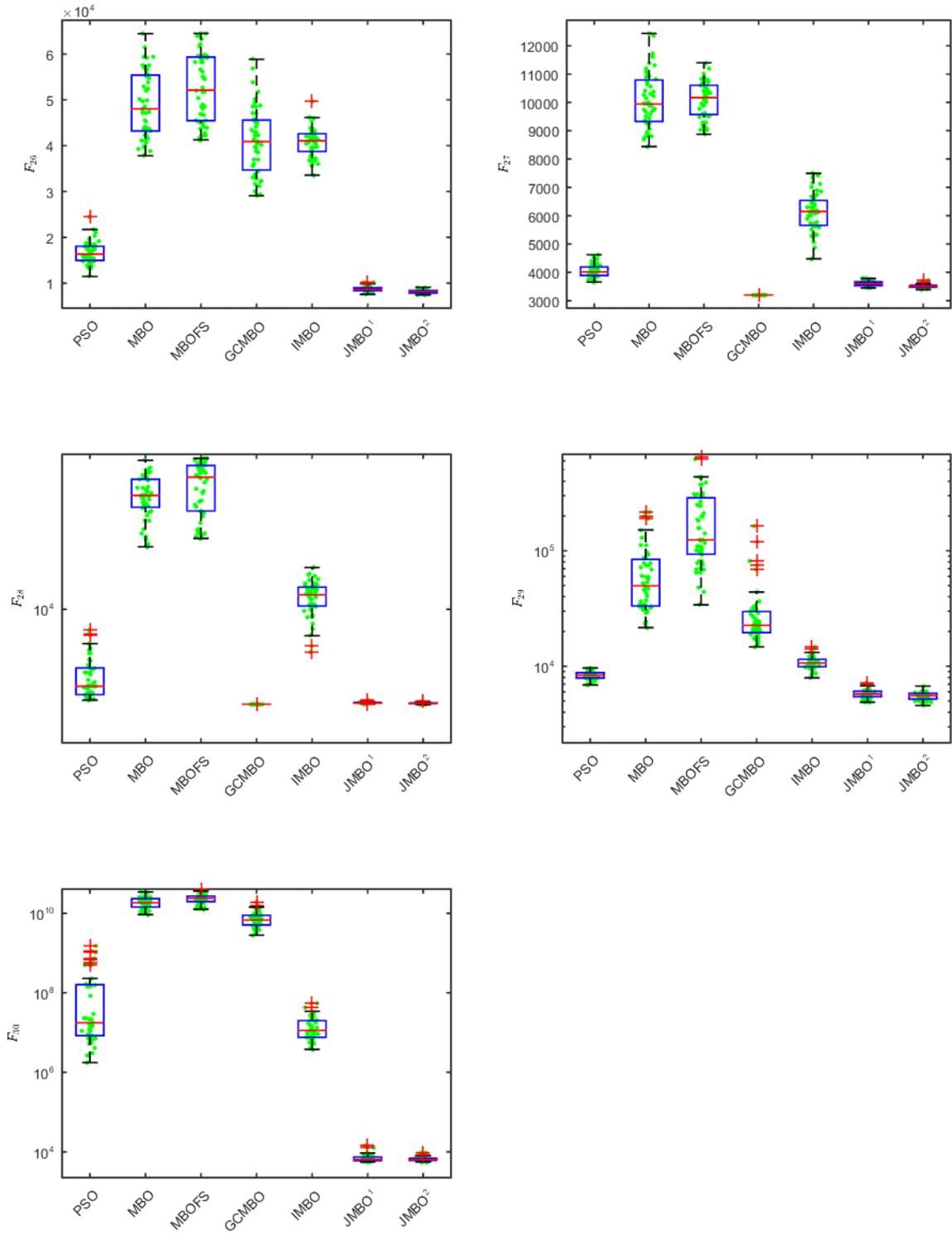


Figura 136 – Diagramas de caixa do grupo DEM  $F_{01}$  a  $F_{07}$  com  $D = 100$

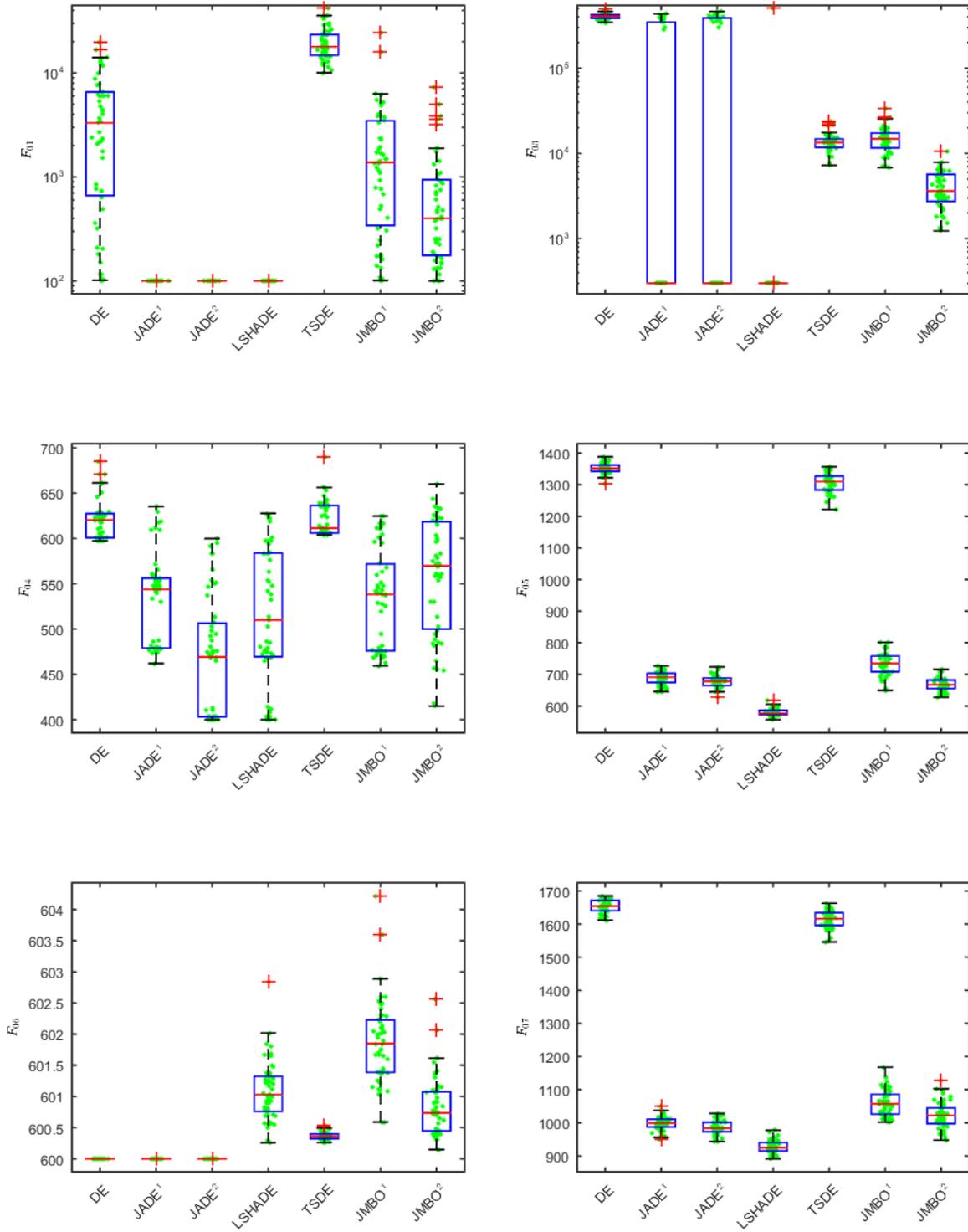


Figura 137 – Diagramas de caixa do grupo DEM  $F_{08}$  a  $F_{13}$  com  $D = 100$

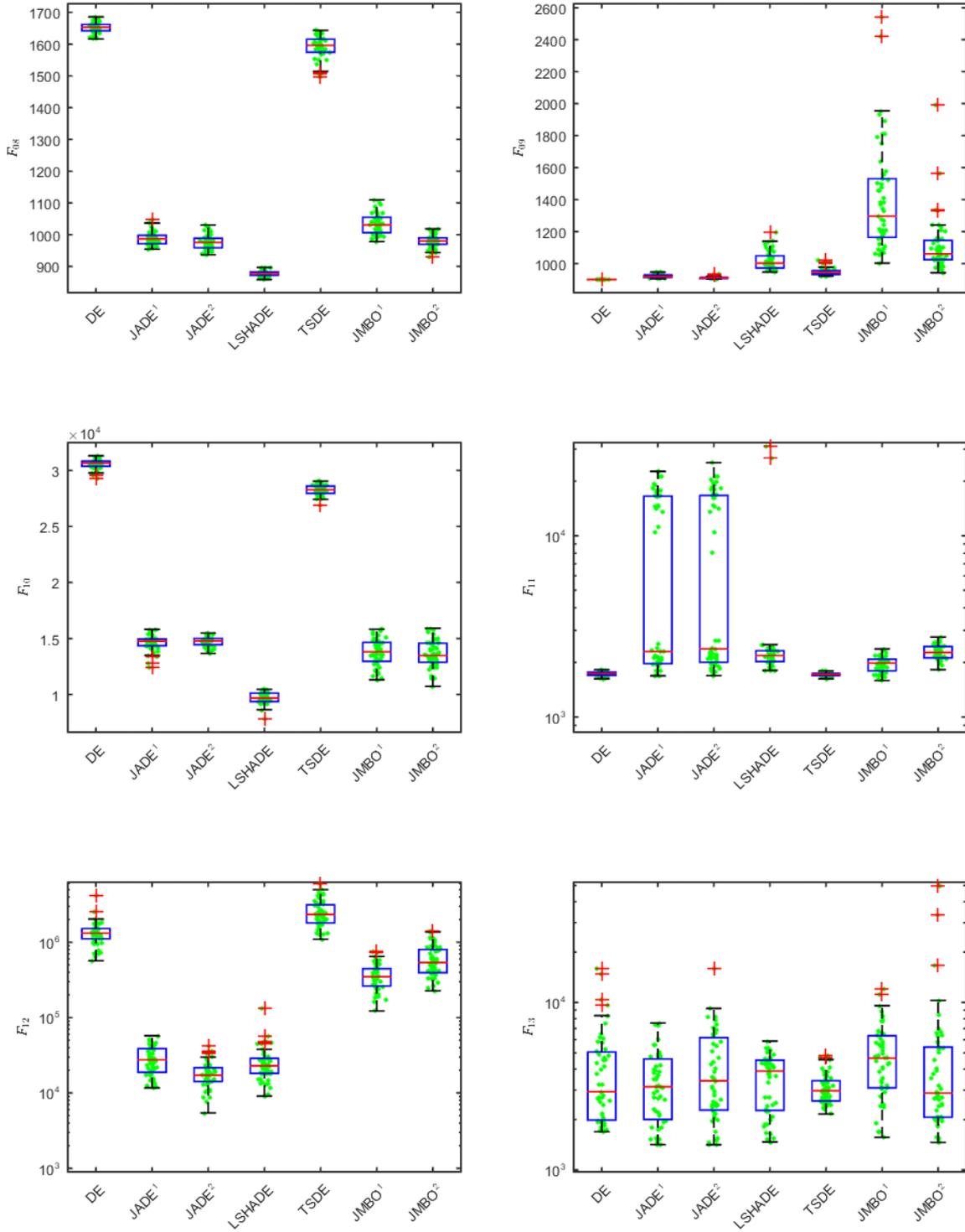


Figura 138 – Diagramas de caixa do grupo DEM  $F_{14}$  a  $F_{19}$  com  $D = 100$

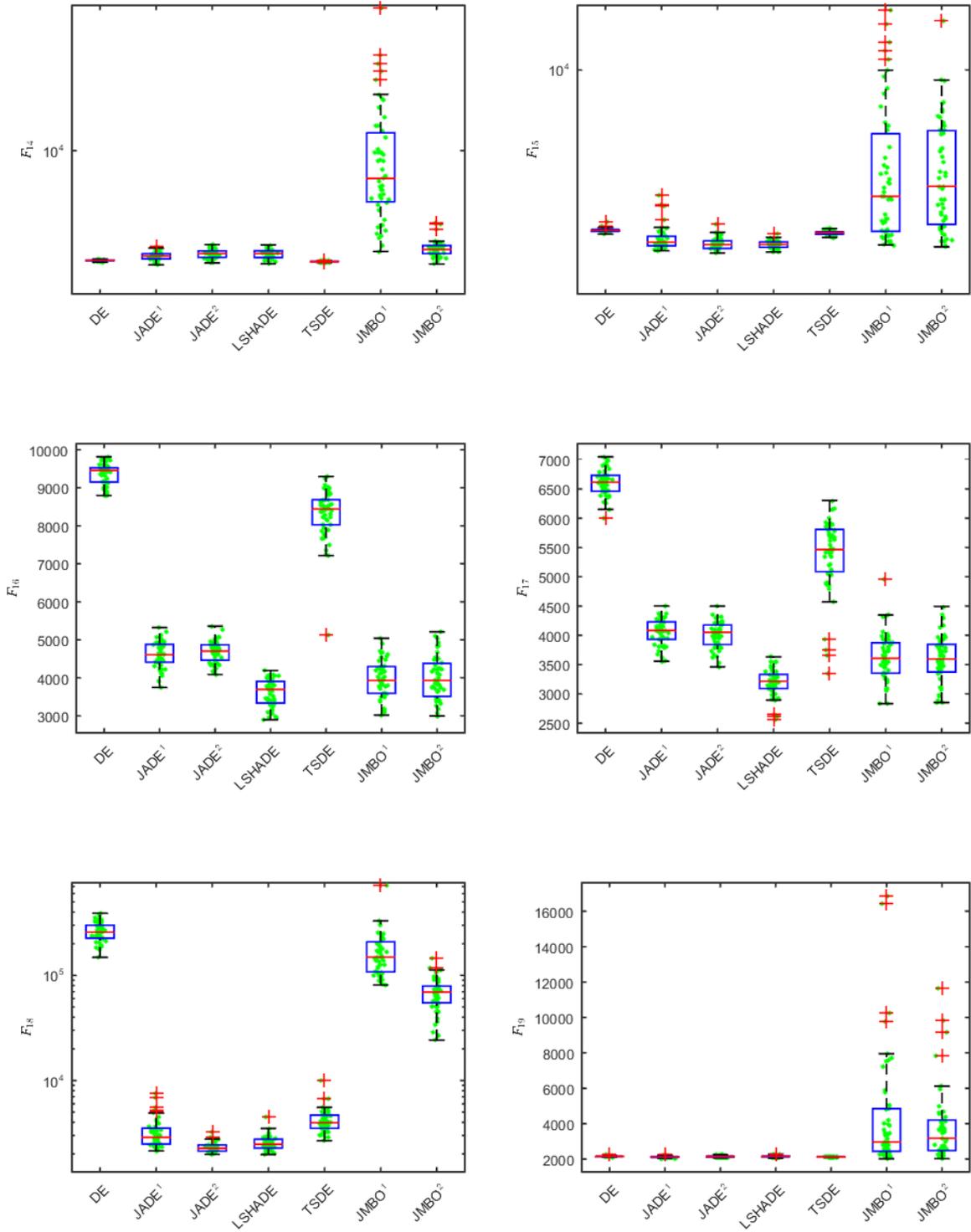


Figura 139 – Diagramas de caixa do grupo DEM  $F_{20}$  a  $F_{25}$  com  $D = 100$

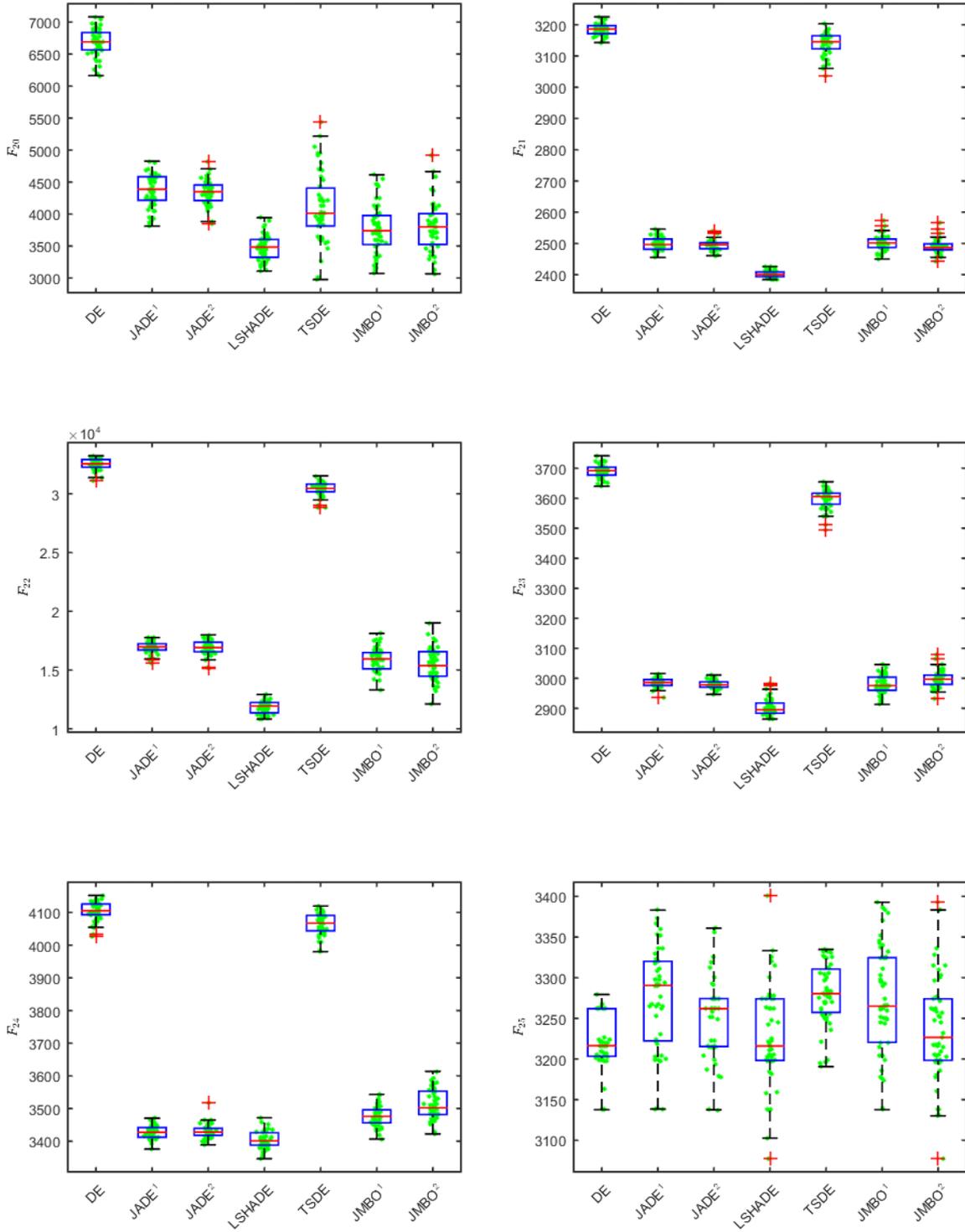


Figura 140 – Diagramas de caixa do grupo DEM  $F_{26}$  a  $F_{30}$  com  $D = 100$

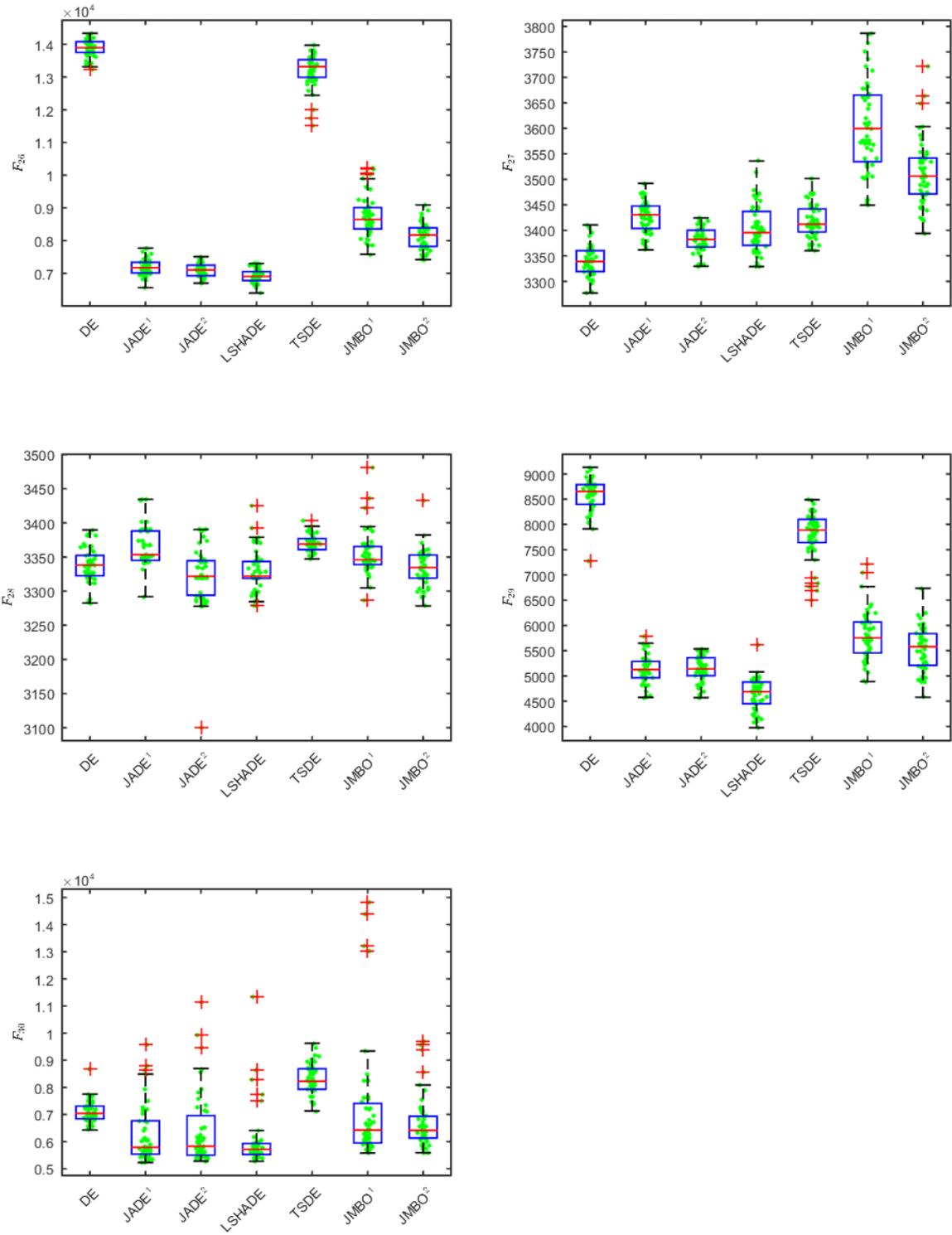


Figura 141 – (Md, MAD) para as funções  $F_{01}$  a  $F_{07}$  com  $D=30$

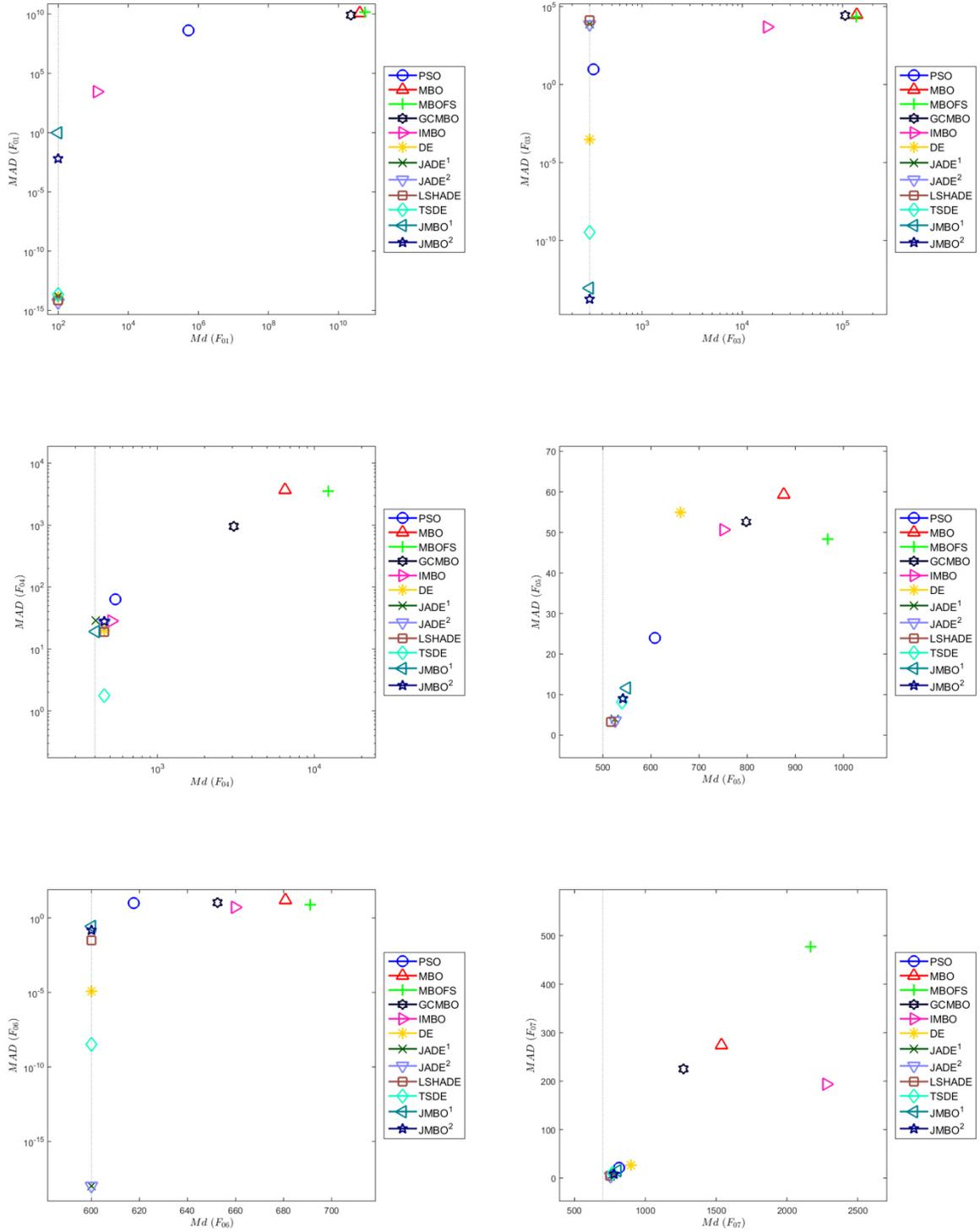


Figura 142 – (Md, MAD) para as funções  $F_{08}$  a  $F_{13}$  com  $D = 30$

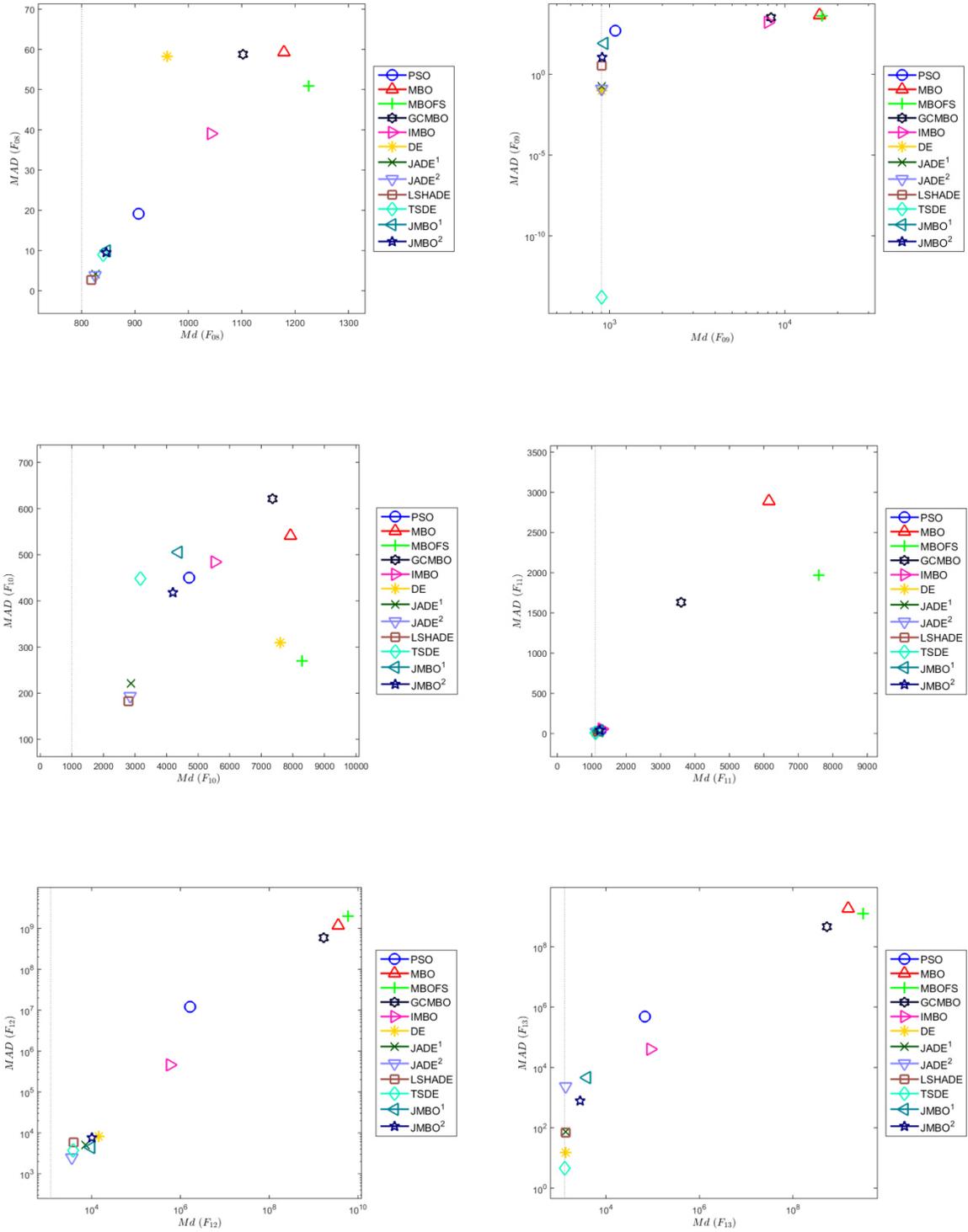


Figura 143 – (Md, MAD) para as funções  $F_{14}$  a  $F_{19}$  com  $D=30$

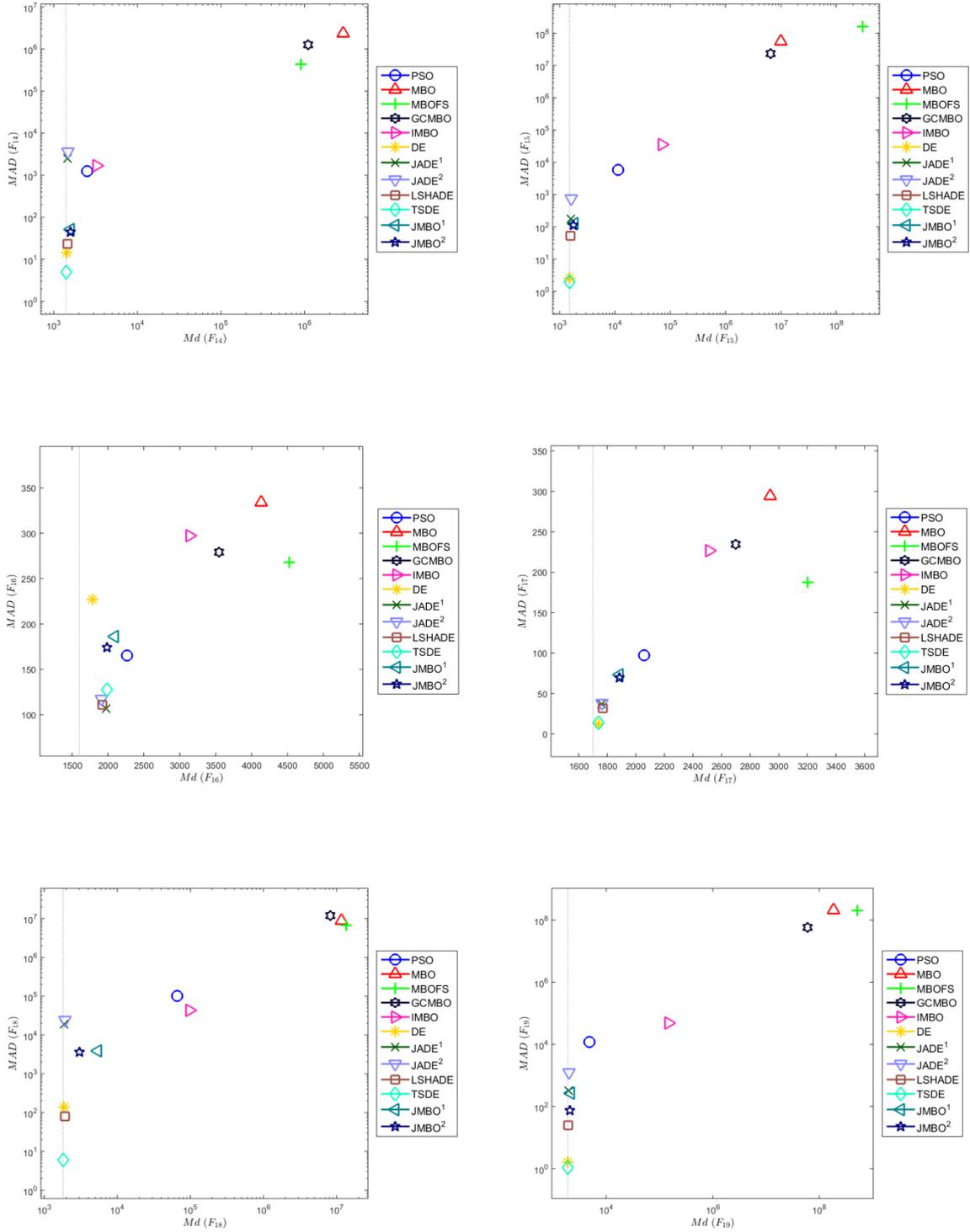


Figura 144 – (Md, MAD) para as funções  $F_{20}$  a  $F_{25}$  com  $D = 30$

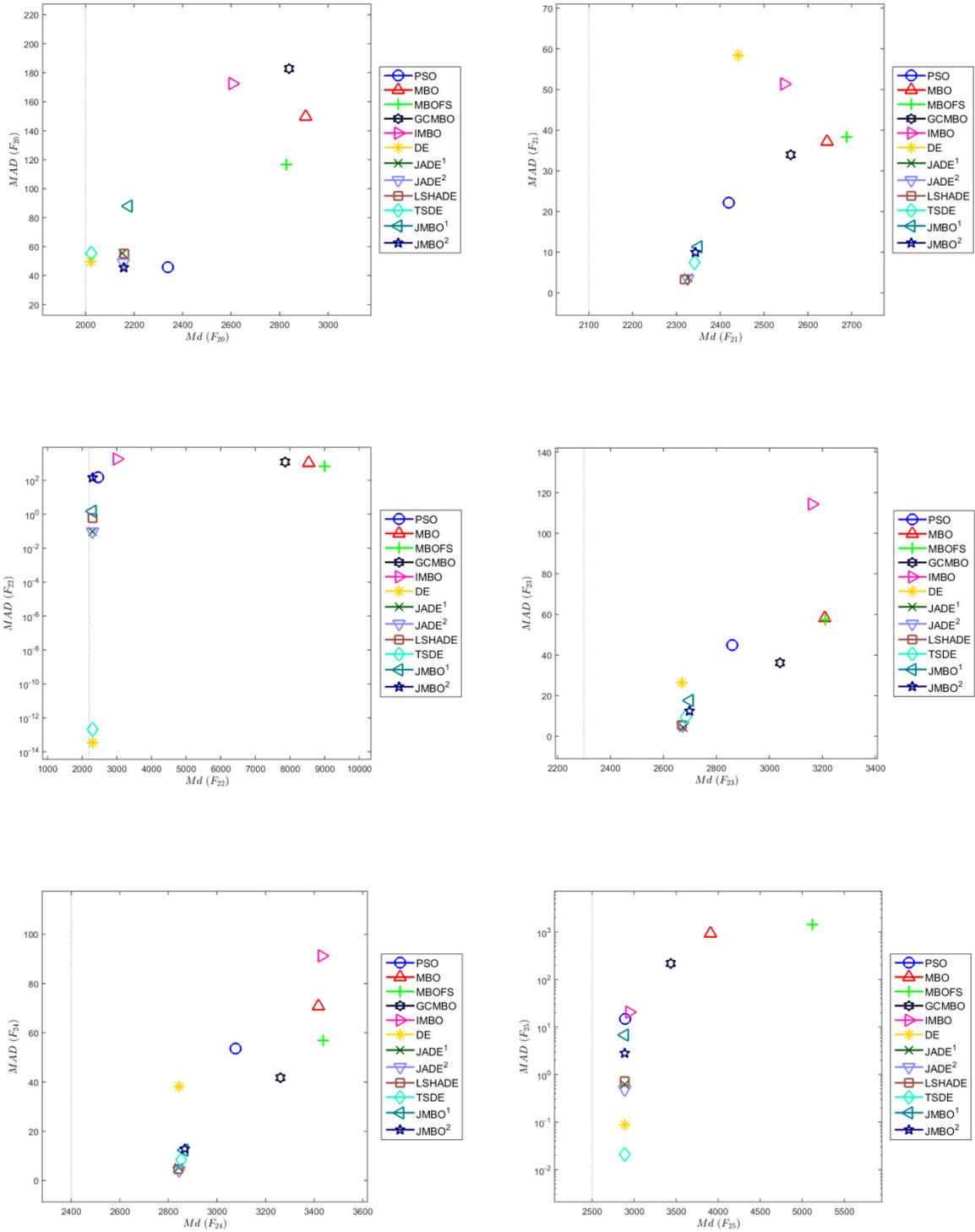


Figura 145 – (Md, MAD) para as funções  $F_{26}$  a  $F_{30}$  com  $D=30$

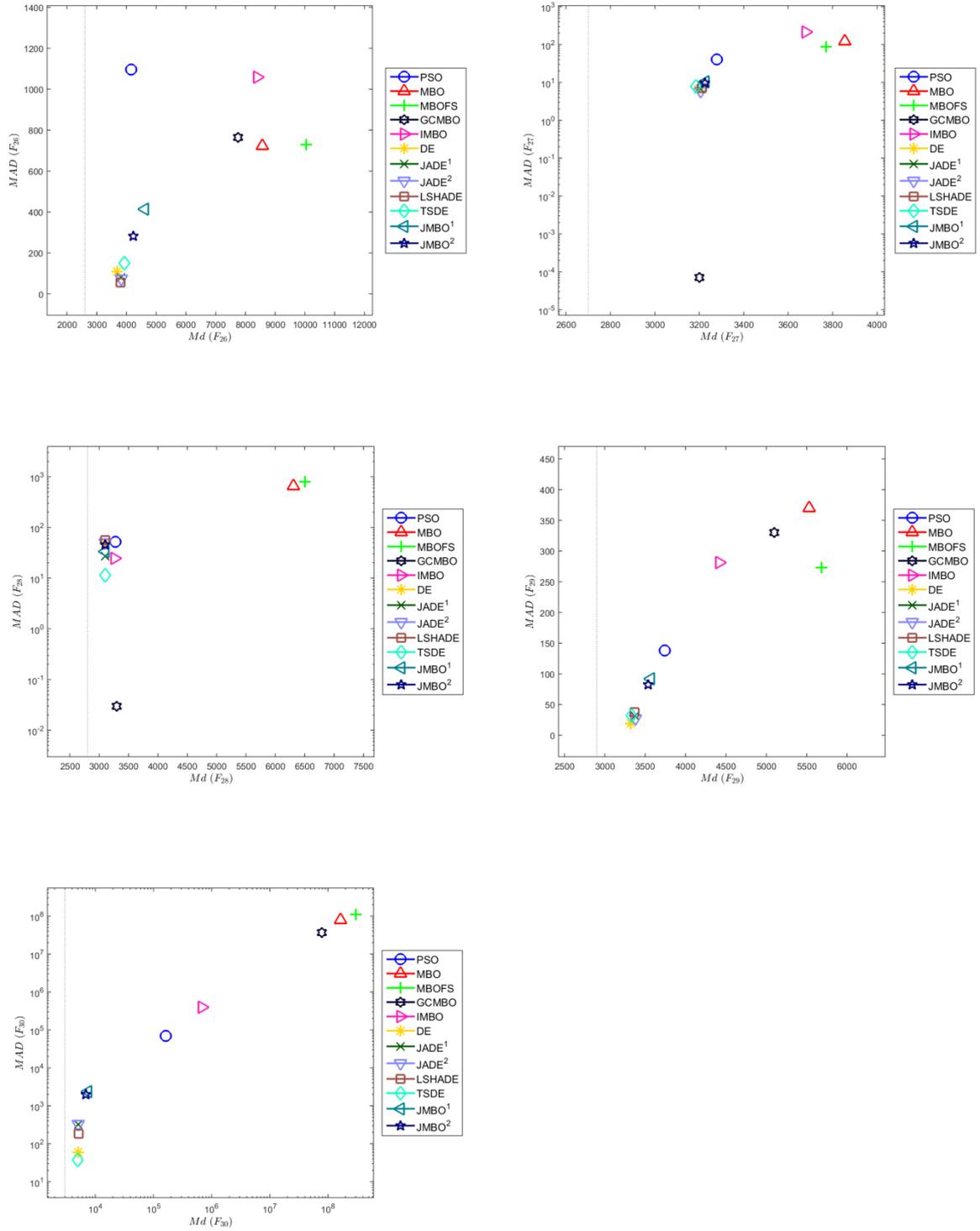


Figura 146 – (Md, MAD) para as funções  $F_{01}$  a  $F_{07}$  com  $D = 100$

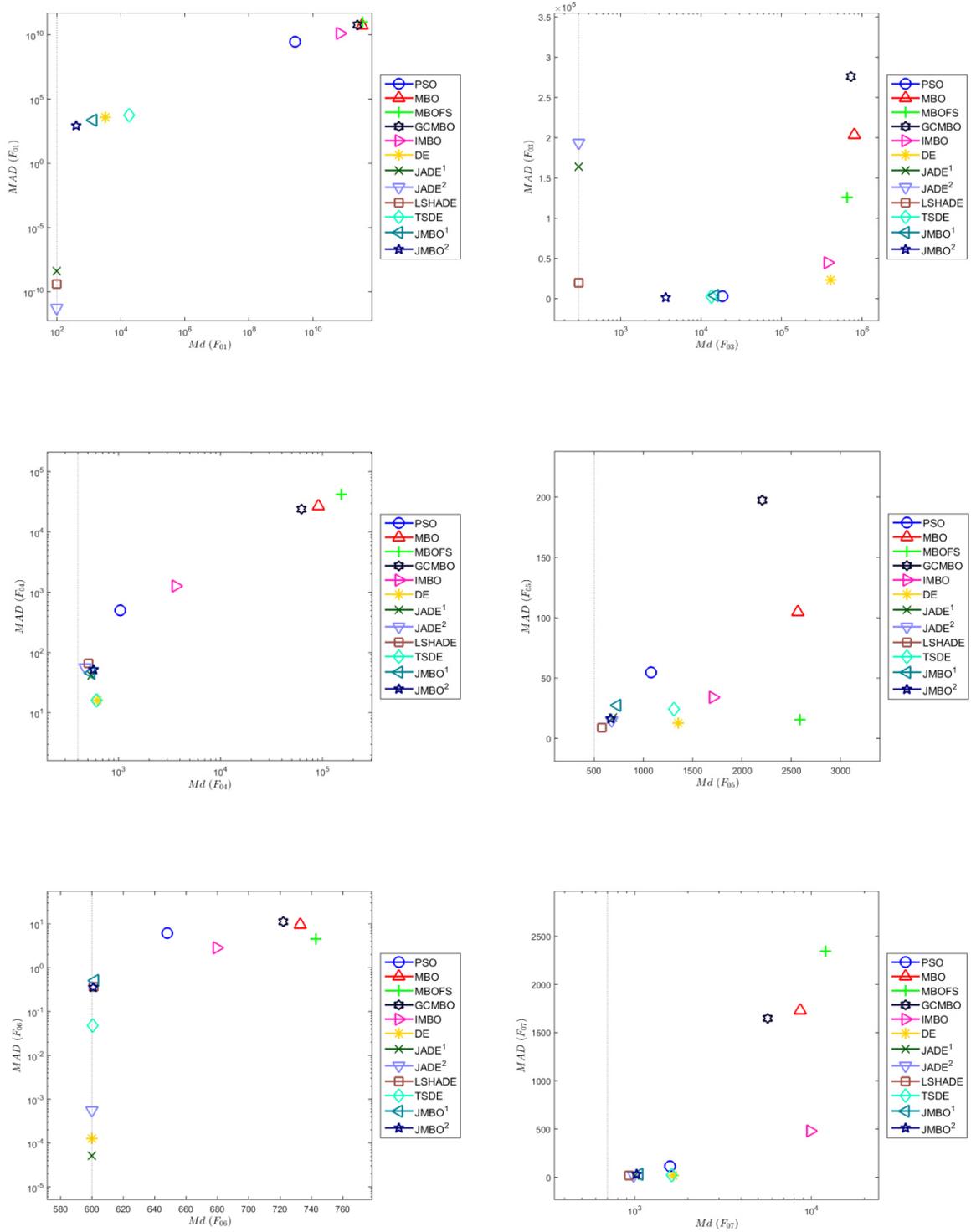


Figura 147 – (Md, MAD) para as funções  $F_{08}$  a  $F_{13}$  com  $D = 100$

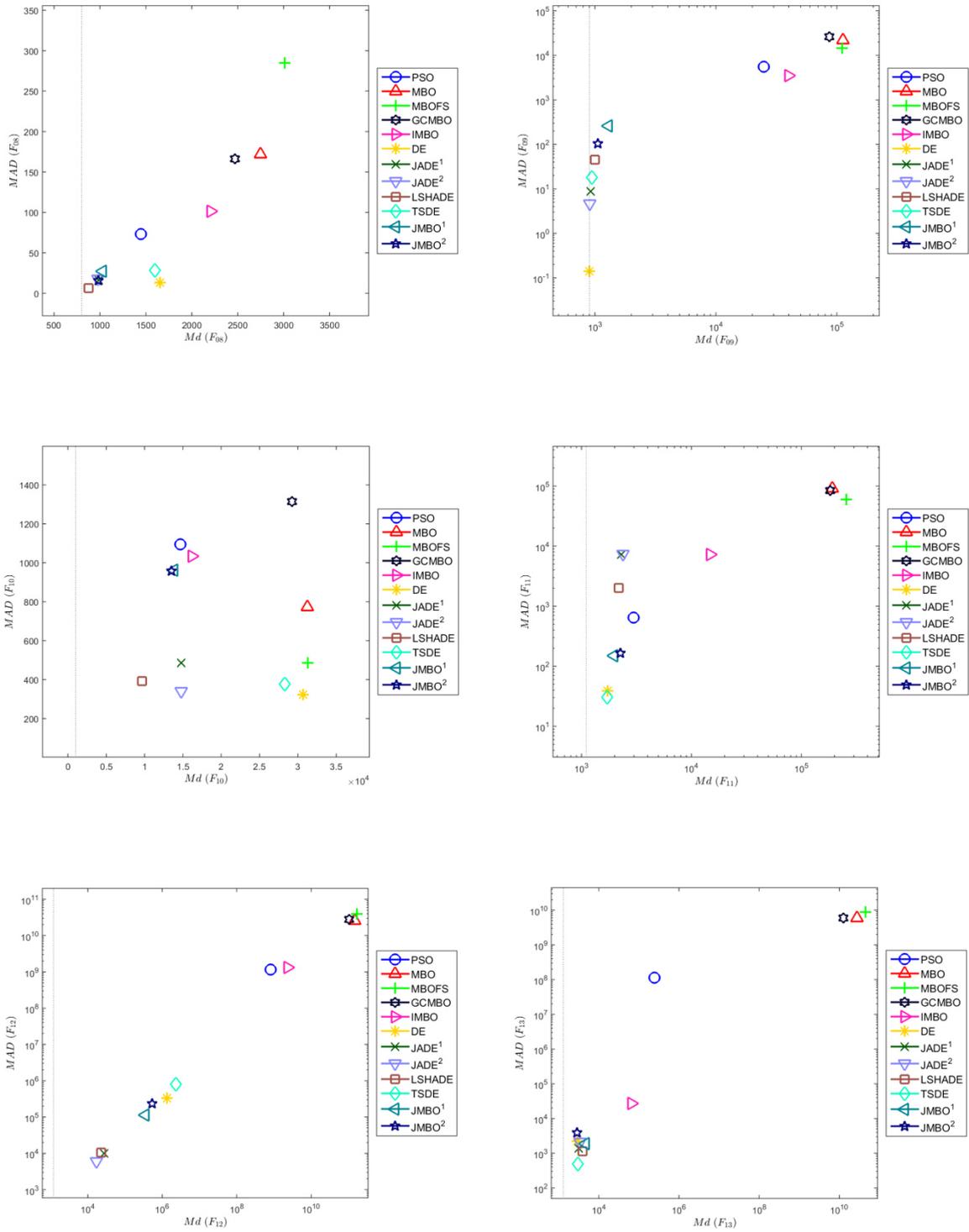


Figura 148 – (Md, MAD) para as funções  $F_{14}$  a  $F_{19}$  com  $D = 100$

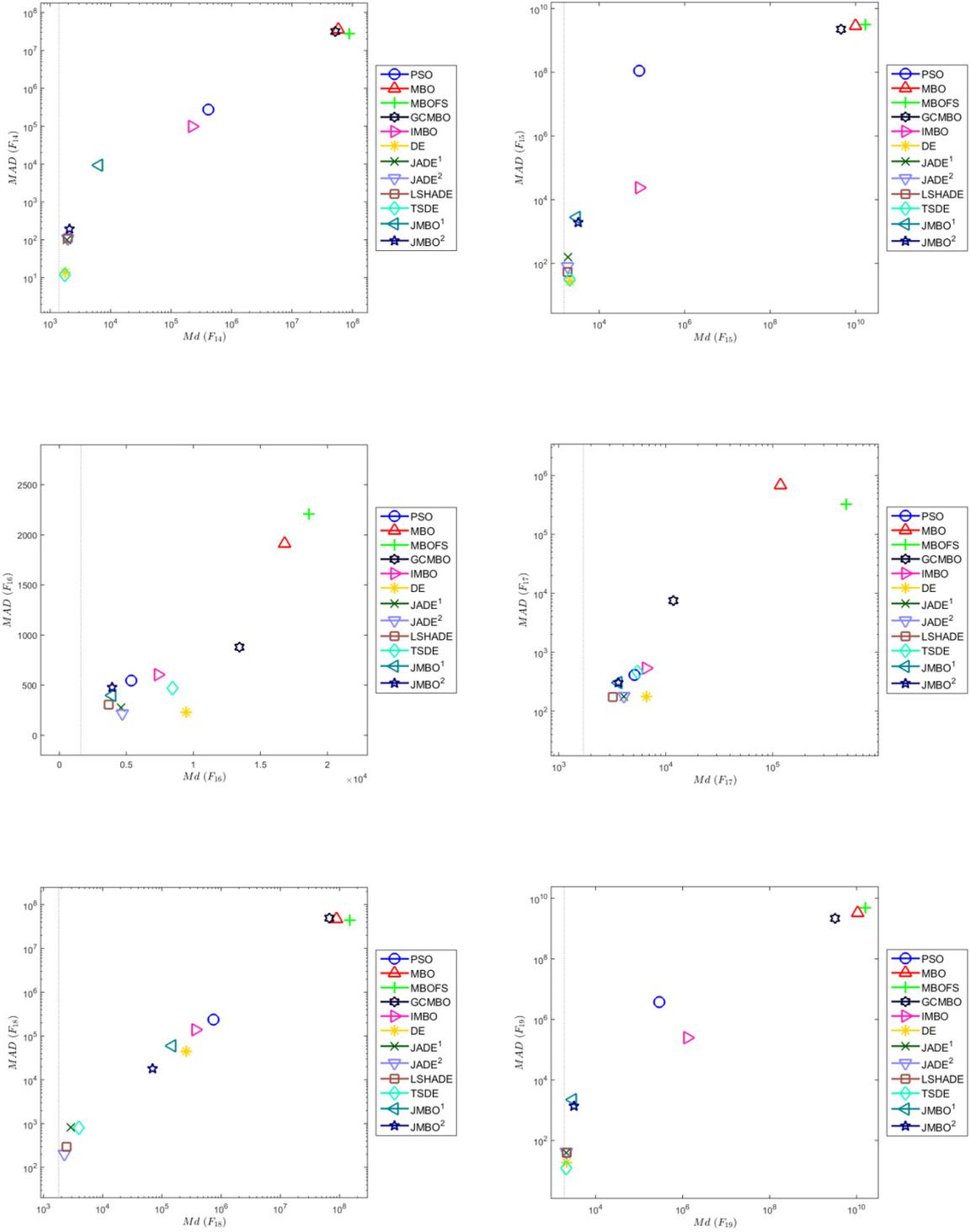


Figura 149 – (Md, MAD) para as funções  $F_{20}$  a  $F_{25}$  com  $D = 100$

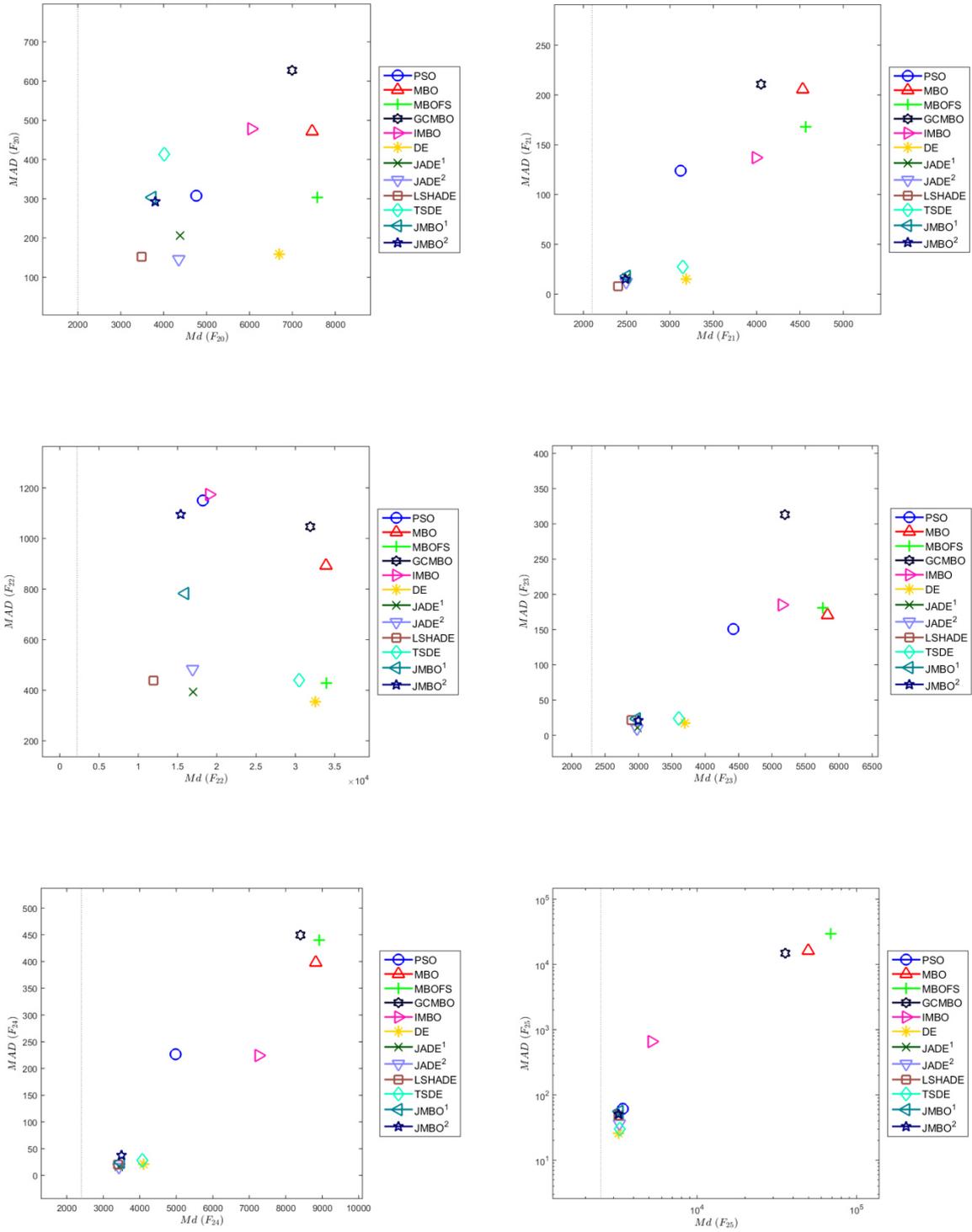


Figura 150 – (Md, MAD) para as funções  $F_{26}$  a  $F_{30}$  com  $D = 100$

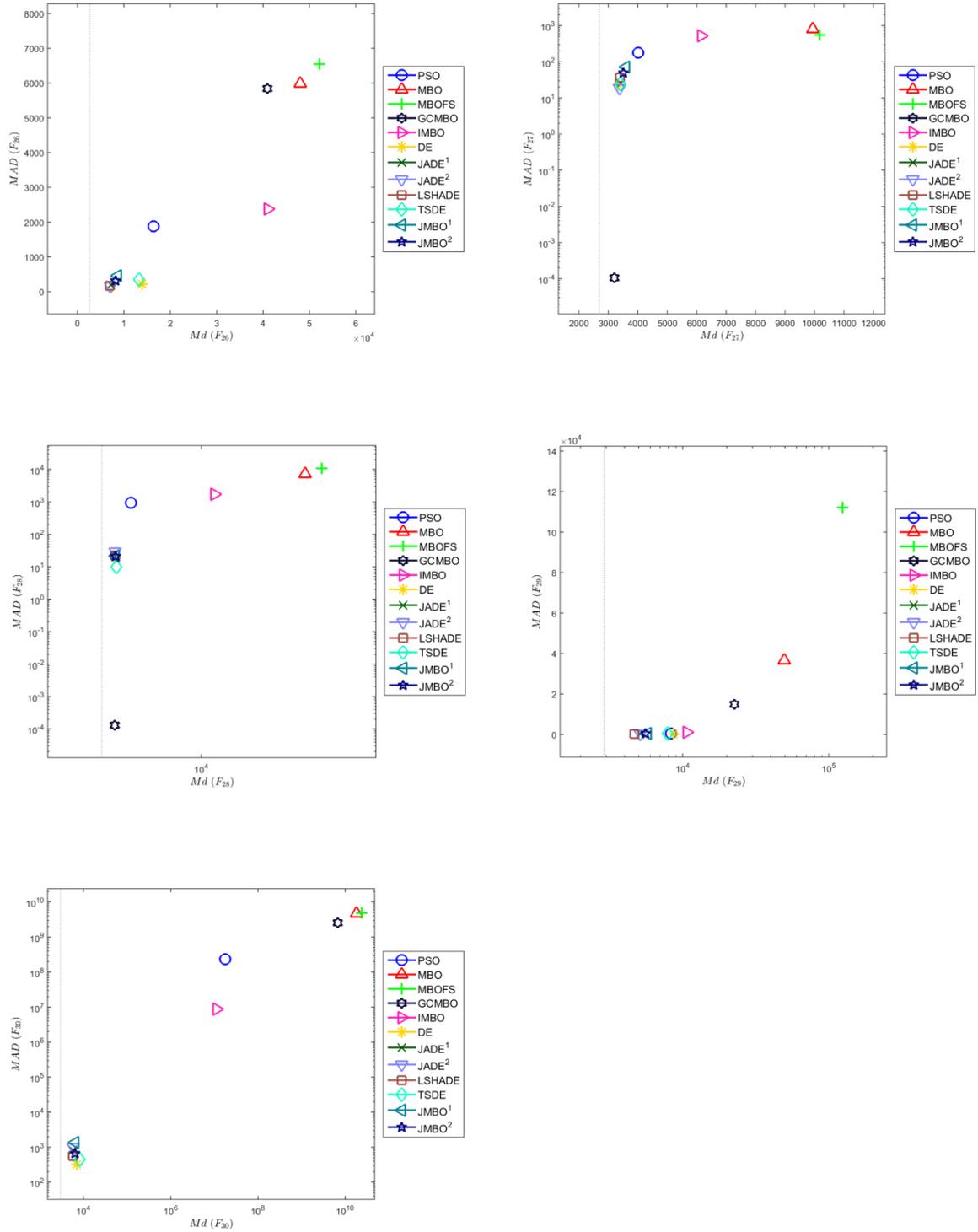


Figura 151 – RMSE por grupos de funções de teste com  $D = 30$

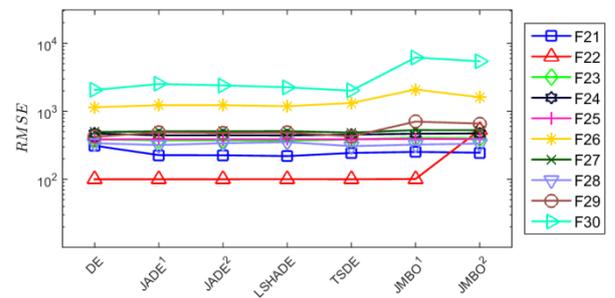
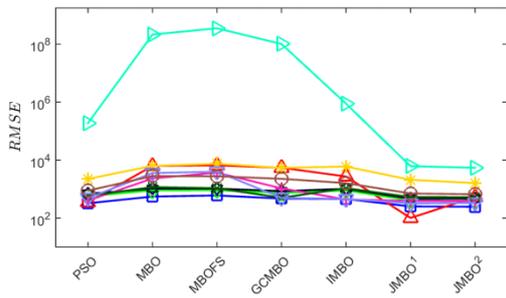
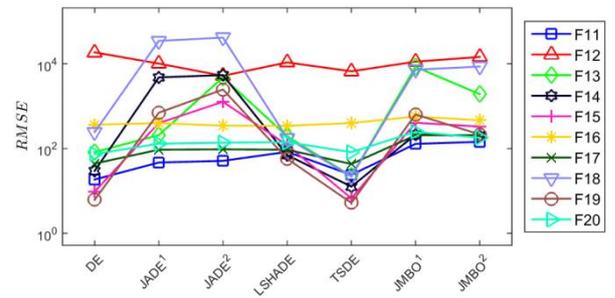
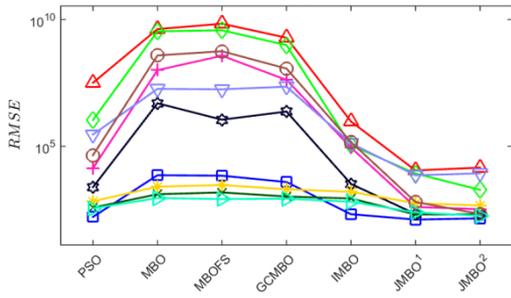
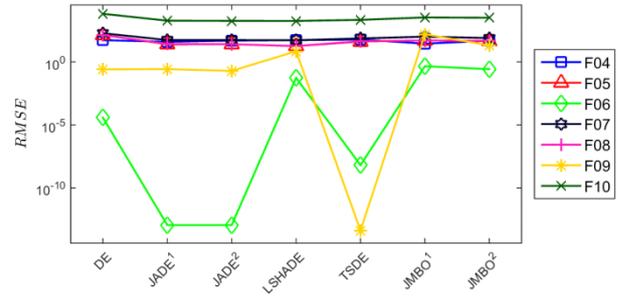
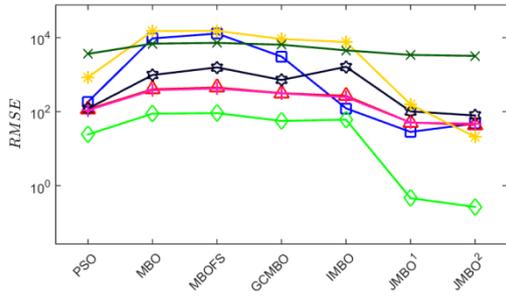
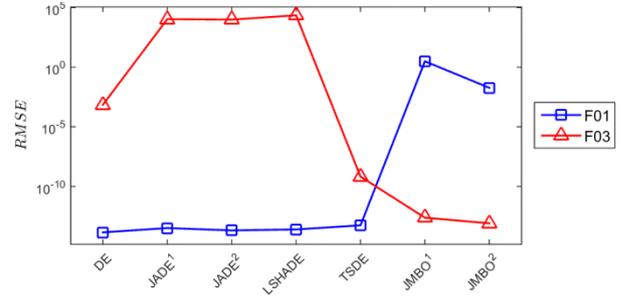
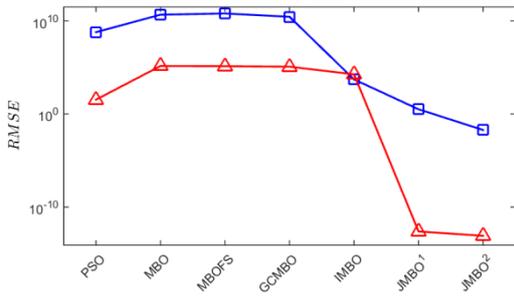


Figura 152 – RMSE por grupos de funções de teste com  $D = 100$

