

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ**  
**ESCOLA POLITÉCNICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E**  
**SISTEMAS**

**THIAGO HAUER RUPPEL**

**OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO DE INVESTIMENTOS UTILIZANDO ALGORITMOS**  
**EVOLUTIVOS E INTELIGÊNCIA DE ENXAME**

**CURITIBA**  
**2017**

**THIAGO HAUER RUPPEL**

**OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO DE INVESTIMENTOS UTILIZANDO ALGORITMOS  
EVOLUTIVOS E INTELIGÊNCIA DE ENXAME**

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas (PPGEPS) da Pontifícia Universidade Católica do Paraná como parte do requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção. Sob orientação do Prof. Dr. Leandro dos Santos Coelho.

**CURITIBA**

**2017**

**THIAGO HAUER RUPPEL**

**OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO DE INVESTIMENTOS UTILIZANDO ALGORITMOS  
EVOLUTIVOS E INTELIGENCIA DE ENXAME**

Dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas (PPGEPS) da Pontifícia Universidade Católica do Paraná como parte do requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

**COMISSÃO EXAMINADORA**

Prof. Leandro dos Santos Coelho, Dr.  
Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Prof. Wesley Vieira da Silva, Dr.  
Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Prof. Anderson Roges Teixeira Góes, Dr.  
Universidade Federal do Paraná

Cidade, 16 de fevereiro de 2017.

Dados da Catalogação na Publicação  
Pontifícia Universidade Católica do Paraná  
Sistema Integrado de Bibliotecas - SIBI/PUCPR  
Biblioteca Central

R946o  
2017 Ruppel, Thiago Hauer  
Otimização de portfólio de investimentos utilizando algoritmos evolutivos e  
Inteligência de enxame / Thiago Hauer Ruppel; orientador, Leandro dos Santos  
Coelho. -- 2017  
96f.: il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Paraná,  
Curitiba, 2017.

Bibliografia: f. 91-96

1. Engenharia de produção. 2. Mercado financeiro. 3. Investimentos. 4.  
Computação evolutiva. 5. Inteligência coletiva. I. Coelho, Leandro dos Santos.  
II. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Programa de Pós-Graduação  
em Engenharia de Produção e Sistemas. III. Título.

CDD 20. ed. - 670

Dedico esse trabalho a meus pais que  
sempre estiveram ao meu lado, e me  
deram apoio nos momentos em que  
precisei.

## **AGRADECIMENTOS**

Ao meu orientador Leandro dos Santos Coelho, pelo suporte no tempo que lhe coube, pelas suas correções e incentivos.

Aos meus pais, irmãos, família e namorada pelo amor, incentivo e apoio incondicional.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

"A drunk walking through a field can create a random walk, despite the fact that no one would call his choice of direction rational. Still, if asset prices depended on the path the drunk adopted, it would be a good idea to study how drunks navigate"

*RICHARD H. THALER*

## RESUMO

Um portfólio de investimentos é um conjunto de ativos financeiros no qual uma pessoa ou instituição investe. Cada um dos investimentos compõe uma porcentagem total do dinheiro investido, tem um determinado risco e uma determinada chance de retorno (lucro). Uma abordagem de otimização para solucionar esse problema é da utilização de metaheurísticas. As metaheurísticas de otimização são abordagens estocásticas que se baseiam em parâmetros e regras para resolver um problema de otimização. Primeiramente foi realizado um apanhado do estado da arte da literatura de aplicações de metaheurísticas para problemas de otimização de portfólio, tendo isso como base são selecionados algoritmos de duas áreas: inteligência de enxames (algoritmos *Grey Wolf Optimizer*, *Bat Algorithm* e *Particle Swarm Optimization*) e computação evolutiva (*Multi-Objective Differential Evolution Algorithm with Spherical Prunning*). Após isto, são então propostas versões multi-objetivo dos algoritmos *Grey Wolf Optimizer* (GWO) e *Bat Algorithm* (BA), essas versões tem como objetivo resolver o problema de otimização de portfólios. São também adaptados os algoritmos *Multi-Objective Differential Evolution ALgorithm with Spherical Prunning* (spMODE) e *Particle Swarm Optimization* (PSO). Por último são realizadas comparações entre os quatro algoritmos mencionados a partir de análise estatística dos resultados obtidos por simulações computacionais. Como medida de comparação principal utilizou-se o hipervolume, buscando maximizar esse valor tendo como base o retorno e o risco e com o objetivo de validar os algoritmos propostos na área de otimização de portfólio.

O desempenho apresentado pelo algoritmo proposto spGWO foi promissor nos testes realizados, a fronteira de Pareto apresentada obteve a melhor distribuição entre os algoritmos testados, essa distribuição proporciona ao investidor uma série de opções de portfólios. O algoritmo proposto spBAT teve resultados inferiores aos outros algoritmos em quase todos os testes, apresentando uma fronteira de Pareto disforme, mas conseguindo o melhor resultado para o hipervolume em um dos testes, isso aponta para possibilidade do algoritmo estar buscando suas soluções de forma aleatória.

**Palavras-chave:** Metaheurísticas. Portfólios de investimentos. Hipervolume.



## ABSTRACT

A portfolio of investments is a group of financial assets in which a person or an institution invests. Each asset has a weight of the total invested and has a determined risk and chance of return (profit). One of the main solutions for this problem is the use of metaheuristics. Metaheuristics are stochastic procedures that solve problems based on parameters and rules. These algorithms are not required to achieve the best result for the problem, they only have to approximate this result. First, an overview is made of the state of the art of metaheuristics applications to problems of portfolio optimization. Based on that overview algorithms of two areas are chosen: Swarm Intelligence (algorithms Grey Wolf Optimizer, Bat Algorithm and Particle Swarm Optimization) and Evolutionary Computation (Multi-Objective Differential Evolution Algorithm with Spherical Pruning). Then are proposed two multi-objective versions of the algorithms Grey Wolf Optimizer (GWO) and Bat Algorithm (BA), these versions have the objective of solve the problem of portfolio optimization. Two other algorithms are also adapted to solve optimization problems, "Multi-Objective Differential Evolution Algorithm with Spherical Pruning" (spMODE) and "Particle Swarm Optimizer" (PSO). Then is analyzed the performance of these four algorithms, through statistical analysis of the results obtained by computational simulations. The hypervolume is used as the main comparative measure, aiming to maximize its value based on the return and the risk of the portfolios and with the objective of validate the proposed algorithms in the area of portfolio optimization.

The performance presented by the proposed algorithm spGWO in the tests was promising. The Pareto frontier presented achieved the best distribution over all the algorithms tested, this distribution gives the investor a series of possible portfolios. The proposed algorithm spBAT when compared with the other algorithms, it presented the worst results for almost every test, presenting a Pareto frontier with spread solutions. It achieved the best result for the hypervolume in one of the tests, that points to the possibility of the algorithm searching for the solutions randomly.

**Key-words:** Metaheuristics. Portfolios of investments. Hypervolume.

## Lista de Ilustrações

|                                                                                 |    |
|---------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 - Valor de fechamento Facebook (01/01/2014 até 01/02/2014).....        | 17 |
| Figura 2 - Portfólio T.....                                                     | 19 |
| Figura 4 - Funcionamento Básico.....                                            | 36 |
| Figura 5 - População P.....                                                     | 37 |
| Figura 6 - Vetor mutante.....                                                   | 40 |
| Figura 7- Pseudocódigo DE.....                                                  | 43 |
| Figura 8 - Hierarquia dos lobos cinzentos.....                                  | 47 |
| Figura 9 - Posição dos lobos cinzentos em relação a presa.....                  | 49 |
| Figura 10 - Pseudocódigo do algoritmo GWO.....                                  | 50 |
| Figura 11 - Pseudocódigo de BA.....                                             | 52 |
| Figura 13 - Fluxograma de otimização.....                                       | 60 |
| Figura 14 - Fluxograma para spGWO.....                                          | 62 |
| Figura 15 - Fluxograma para spGWO.....                                          | 64 |
| Figura 16- Representação do retorno para 2 ativos.....                          | 68 |
| Figura 17 - Representação do risco para 2 ativos.....                           | 68 |
| Figura 18 - Fronteira de Pareto do algoritmo spGWO.....                         | 71 |
| Figura 19 - Fronteira de Pareto do algoritmo PSOMO.....                         | 71 |
| Figura 20 - Fronteira de Pareto do algoritmo spBAT.....                         | 72 |
| Figura 21 - Fronteira de Pareto do algoritmo spMODE.....                        | 72 |
| Figura 22 - Comparativo das fronteiras de Pareto.....                           | 74 |
| Figura 23 - Comparativo do peso para 2 ativos.....                              | 75 |
| Figura 24 - Representação do portfólio com maior retorno.....                   | 76 |
| Figura 25 - Representação do portfólio com menor risco.....                     | 76 |
| Figura 26 - Divisão em tipo de investidor para 2 ativos.....                    | 77 |
| Figura 27- Retorno 10 ativos.....                                               | 79 |
| Figura 28- Risco 10 ativos.....                                                 | 79 |
| Figura 29 - Fronteira de Pareto do algoritmo spGWO para 10 ativos.....          | 80 |
| Figura 30 - Fronteira de Pareto do algoritmo PSOMO para 10 ativos.....          | 81 |
| Figura 31 - Fronteira de Pareto do algoritmo spBAT para 10 ativos.....          | 82 |
| Figura 32 - Fronteira de Pareto do algoritmo spMODE para 10 ativos.....         | 82 |
| Figura 33 - Comparativo das Fronteiras de Pareto para 10 ativos.....            | 83 |
| Figura 34 - Representação do portfólio com menor risco para 10 ativos.....      | 85 |
| Figura 31 -Representação dos portfólios divididos entre tipo de investidor..... | 86 |

## Lista de Tabelas

|                                                          |    |
|----------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1- Estrutura dos Mercados Financeiros .....       | 12 |
| Tabela 2 - Portfólio T .....                             | 18 |
| Tabela 3 - Portfólio T* .....                            | 24 |
| Tabela 4 - Ativos ordenados pelo Risco .....             | 66 |
| Tabela 5 - Ativos ordenados pelo retorno .....           | 66 |
| Tabela 6 - Retorno e risco dos ativos .....              | 69 |
| Tabela 7 - Hipervolume .....                             | 70 |
| Tabela 8 - Pesos 2 ativos para maior retorno .....       | 73 |
| Tabela 9 - Pesos 2 ativos para menor risco .....         | 73 |
| Tabela 10 - Índice de Sharpe considerando 2 ativos ..... | 77 |
| Tabela 11 - Retorno e risco dos ativos .....             | 79 |
| Tabela 12 - Hipervolume 10 ativos .....                  | 80 |
| Tabela 13 - Pesos 10 ativos para maior retorno .....     | 83 |
| Tabela 14 - Pesos 10 ativos para menor risco .....       | 84 |
| Tabela 15 - Comparação Fronteira de Pareto .....         | 84 |
| Tabela 16 - Sharpe 10 ativos .....                       | 86 |

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

|               |                                                                                 |
|---------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| <b>BA</b>     | <i>Bat Algorithm</i>                                                            |
| <b>CR</b>     | Constante de Probabilidade                                                      |
| <b>DE</b>     | Evolução Diferencial                                                            |
| <b>DEA</b>    | Algoritmo de Evolução Diferencial                                               |
| <b>EP</b>     | Programação Evolutiva                                                           |
| <b>ES</b>     | Estratégias Evolutivas                                                          |
| <b>ETAK</b>   | <i>Elephant Talk Communications Corp</i>                                        |
| <b>GA</b>     | Algoritmo Genético                                                              |
| <b>GP</b>     | Programação Genética                                                            |
| <b>GWO</b>    | <i>Grey Wolf Optmizer</i>                                                       |
| <b>IADE</b>   | Improved Adaptative Differential Evolution                                      |
| <b>LSGO</b>   | Otimização Global em Larga Escala                                               |
| <b>MA</b>     | <i>Moving Average</i>                                                           |
| <b>McDE</b>   | <i>Memetic compact Differential Evolution</i>                                   |
| <b>MOPSO</b>  | <i>Multiobjective Particle Swarm Optmization</i>                                |
| <b>ON</b>     | Ordinária Nominativa                                                            |
| <b>P</b>      | População Base                                                                  |
| <b>PBR</b>    | Petróleo Brasileiro                                                             |
| <b>PM</b>     | População Mutante                                                               |
| <b>PMPT</b>   | <i>Post Modern Portfólio Theory</i>                                             |
| <b>PN</b>     | Preferencial Nominativa                                                         |
| <b>PRS</b>    | <i>Performance based reward strategy</i>                                        |
| <b>PSO</b>    | <i>Particle Swarm Optmization</i>                                               |
| <b>spBA</b>   | <i>Bat algorithm with Spherical Prunning</i>                                    |
| <b>spGWO</b>  | <i>Grey Wolf Optmizer with Spherical Prunning</i>                               |
| <b>spMODE</b> | <i>Multi-Objective Differential Evolution Algorithm with Spherical Prunning</i> |
| <b>TRB</b>    | <i>Range break-out</i>                                                          |
| <b>TSBDEA</b> | <i>Taguchi-sliding-based diferencial evolution algorithm</i>                    |
| <b>TSLM</b>   | <i>Taguchi sliding level method</i>                                             |
| <b>TVPSO</b>  | <i>Time variant particle swarm optimization</i>                                 |

## SUMÁRIO

|           |                                                                    |           |
|-----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b>  | <b>INTRODUÇÃO .....</b>                                            | <b>8</b>  |
| 1.1       | CONTEXTUALIZAÇÃO DO TRABALHO .....                                 | 8         |
| 1.2       | TEMA E QUESTÃO DE PESQUISA .....                                   | 10        |
| 1.3       | OBJETIVO GERAL .....                                               | 11        |
| 1.3.1     | Objetivos específicos .....                                        | 11        |
| 1.4       | JUSTIFICATIVA .....                                                | 11        |
| <b>2.</b> | <b>REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>                                    | <b>12</b> |
| 2.1       | MERCADO FINANCEIRO .....                                           | 12        |
| 2.1.1     | Mercado de capitais.....                                           | 13        |
| 2.1.2     | Renda fixa.....                                                    | 14        |
| 2.1.3     | Renda variável.....                                                | 15        |
| 2.1.3.1   | Derivativos .....                                                  | 15        |
| 2.1.3.2   | Câmbio .....                                                       | 16        |
| 2.1.3.3   | Fundos de índices comercializados como ações (ETF) .....           | 16        |
| 2.1.3.4   | Fundo imobiliários.....                                            | 17        |
| 2.1.3.5   | Ações .....                                                        | 17        |
| 2.2       | PORTFÓLIO DE INVESTIMENTO .....                                    | 18        |
| 2.2.1     | Teoria moderna de portfólios.....                                  | 19        |
| 2.3       | ANÁLISE DOS DADOS .....                                            | 22        |
| 2.3.1     | Retorno do portfólio .....                                         | 23        |
| 2.3.2     | Risco do portfólio .....                                           | 25        |
| 2.3.3     | Fronteira eficiente e o conjunto Pareto-ótimo.....                 | 25        |
| 2.3.4     | Adaptações do modelo da Media-Variância de Markowitz .....         | 28        |
| 2.3.5     | Índice de Sharpe .....                                             | 30        |
| 2.4       | COMPUTAÇÃO EVOLUTIVA.....                                          | 30        |
| 2.4.1     | Computação evolutiva e o problema de otimização de portfólio ..... | 33        |
| 2.4.2     | Contribuições dentro da área de otimização de portfólio .....      | 34        |
| 2.5       | EVOLUÇÃO DIFERENCIAL (DE) .....                                    | 35        |
| 2.5.1     | Funcionamento .....                                                | 35        |
| 2.5.2     | Inicialização.....                                                 | 36        |
| 2.5.2     | Mutação .....                                                      | 38        |
| 2.5.3     | Crossover .....                                                    | 40        |

|                                                               |           |
|---------------------------------------------------------------|-----------|
| 2.5.4 Seleção .....                                           | 42        |
| 2.5.5 Pseudocódigo básico .....                               | 43        |
| 2.5.6 Aplicações na prática .....                             | 44        |
| 2.5.7 Função multi-objetivo .....                             | 46        |
| 2.6 GREY WOLF OPTIMIZER .....                                 | 47        |
| 2.6.1 Hierarquia dos lobos cinzentos .....                    | 47        |
| 2.6.2 Mecanismo de caça .....                                 | 48        |
| 2.7 BAT ALGORITHM .....                                       | 50        |
| 2.7.1 Movimento dos morcegos .....                            | 53        |
| 2.7.2 Amplitude e taxa de emissão de pulsos .....             | 54        |
| 2.8 <i>PARTICLE SWARM OPTIMIZATION</i> .....                  | 54        |
| 2.8.1 <i>Multiobjective Particle Swarm Optimization</i> ..... | 55        |
| 2.9 TÉCNICAS ESCOLHIDAS .....                                 | 57        |
| <b>3 METODOLOGIA .....</b>                                    | <b>58</b> |
| 3.1 RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS .....                             | 58        |
| 3.2 ESPECIFICAÇÕES DO PROBLEMA MULTIOBJETIVO .....            | 59        |
| 3.3 MODIFICAÇÕES NO ALGORITMO GWO .....                       | 61        |
| 3.4 MODIFICAÇÕES NO ALGORITMO BA .....                        | 63        |
| 3.5 ATIVOS UTILIZADOS .....                                   | 64        |
| 3.6 MEDIDAS DE AVALIAÇÃO E TIPOS DE INVESTIDOR .....          | 67        |
| <b>4 RESULTADOS .....</b>                                     | <b>68</b> |
| 4.1 TESTES COM 2 ATIVOS .....                                 | 68        |
| 4.1.1 Divisão em tipo de investidor para dois ativos .....    | 76        |
| 4.2 TESTES COM 10 ATIVOS .....                                | 78        |
| 4.2.1 Divisão em tipo de investidor para 10 ativos .....      | 85        |
| <b>5 CONCLUSÕES .....</b>                                     | <b>89</b> |
| <b>REFERÊNCIAS .....</b>                                      | <b>91</b> |

## 1 INTRODUÇÃO

O mercado financeiro é um mecanismo pelo qual são realizadas as transferências de recursos entre os agentes econômicos. Essas transferências são fiscalizadas e controladas por entidades, por exemplo, o Banco Central ou a bolsa de valores Bovespa. É dentro da bolsa que ocorrem diversas negociações, tais como: títulos de renda fixa, ações, mercadorias, moedas, entre outras.

Um portfólio de investimentos é um conjunto de ativos financeiros no qual uma pessoa ou instituição investe. Cada um dos investimentos compõe uma porcentagem total do dinheiro investido, cada um deles tem um determinado risco e uma determinada chance de retorno esperado.

Dependendo de como essa porcentagem é distribuída entre os investimentos o risco e a chance de retorno do portfólio em si vão variar, por exemplo, se toda porcentagem for colocada em um ativo com alto retorno e alto risco, o portfólio também terá um alto retorno e um alto risco. Essa distribuição não pode ser feita de maneira aleatória, pois o risco e o retorno seriam inconstantes, e sendo assim normalmente acabariam gerando prejuízo.

Por esse motivo existem teorias e estudos sobre a distribuição dos ativos, eles têm como objetivo prever como um portfólio vai se comportar e também estabelecer uma identidade para cada portfólio, considerando o risco e o retorno. Com isso pode-se indicar o portfólio para um investidor com o mesmo perfil, por exemplo, um portfólio com alto risco e alto retorno seria indicado para um investidor mais agressivo enquanto um portfólio com baixo risco e baixo retorno seria indicado a um investidor mais conservador. A maioria das empresas que trabalha nessa área não divulga sua estratégia para distribuição de ativos.

### 1.1 CONTEXTUALIZAÇÃO DO TRABALHO

O estudo mais aceito da seleção de investimentos com fim de conseguir a melhor relação entre o risco e o retorno, é chamado de Teoria Moderna de Portfólio e o primeiro trabalho importante nessa área foi desenvolvido por *Harry Max Markowitz* em 1952 e é denominado de modelo media-variância. Basicamente esse modelo permite com que o investidor baseie e distribua seu investimento baseado em dois

princípios:

- Maximizar seu retorno para um determinado risco;
- Minimizar seu risco para um retorno esperado.

Zopounidis *et al.* (2014) realizam um estudo sobre as contribuições de Markowitz para teoria de portfólios e afirmam que, apesar de terem surgido nos últimos tempos diversos métodos, algoritmos, teorias, entre outras, o modelo apresentado por Markowitz continua servindo como base para muitas dessas inovações e por isso tem extrema importância nessa área. Leung (2012), menciona que apesar do modelo de Markowitz ter sido proposto a mais de meio século, ele continua sendo um dos assuntos mais importantes a serem estudados por acadêmicos e atuantes na área de finanças.

Como as medidas de retorno e risco estão sempre variando junto com o valor das ações e o desempenho das empresas, é necessário buscar variáveis que consigam representar essas variações. E com essas variações então, desenvolver uma função que consiga representar o desempenho do portfólio, facilitando assim a comparação entre o desempenho de diferentes portfólios.

Outro problema é o de que diferentes investidores têm diferentes ideias sobre quando um portfólio é eficiente, então é preciso adaptar a escolha do peso para cada ativo de acordo com o perfil do investidor. Para isso é necessária a escolha de mais de uma função para análise do desempenho, ou uma função que consiga se adaptar de acordo com a escolha de preferência de retorno, e de quanto de risco está disposto a aceitar por esse retorno.

Uma meta-heurística de otimização é um método estocástico que resolve de forma genérica problemas (abordagem mais flexível que uma heurística) de otimização, ou seja, com poucas modificações um mesmo método consegue resolver diferentes tipos de problemas de otimização. Esses métodos geralmente são aplicados em problemas aonde não se conhece um algoritmo que gere uma solução eficiente, como o problema em questão de otimização de portfólio.

Algumas meta-heurísticas que vem sendo muito utilizadas para otimização de portfólios, são os diversos algoritmos da área de computação evolutiva, na dissertação de mestrado de Felix Roudier (2007) ele utiliza um algoritmo genético para tentar buscar uma solução mais eficiente para o problema, com isso conclui que o algoritmo genético se baseia na convergência dos dados para obtenção do melhor resultado,



isso faz com que todos os possíveis portfólios acabem convergindo para uma só solução e com isso ele perde resultados que poderiam ser boas soluções para o objetivo do investidor. Chen (2015) propõe um algoritmo baseado em colônias de abelhas para solução do problema de portfólios, considerando restrições reais. Bacanin e Tuba (2015) propõem resolver o problema utilizando um algoritmo baseado na explosão de fogos de artifícios e compara o resultado com outros 6 algoritmos.

Um algoritmo promissor na área de computação evolutiva é o de evolução diferencial, que otimiza problemas com a utilização da minimização de uma função objetivo. Ele tem cada vez mais provado sua eficiência e também sua versatilidade, pois consegue resolver de forma rápida e com poucas adaptações problemas de diversas naturezas, necessitando apenas do ajuste de poucos parâmetros e de uma escolha adequada de função objetivo. Meza (2014) aborda de uma forma ampla um estudo sobre os procedimentos existentes para otimização de problemas multi-objetivo e depois propõe um algoritmo que utiliza a evolução diferencial para resolução desses problemas, chamado de *“Multi-Objective Differential Evolution Algorithm with Spherical Prunning” (spMODE)*.

Outros dois algoritmos promissores são o *Grey Wolf Optimizer (GWO)* algoritmo baseado no comportamento dos lobos cinzentos e proposto por Mirjalili et al. (2014) e *Bat algorithm (BA)* desenvolvido por Yang (2010) e é um algoritmo baseado no comportamento de ecolocalização dos morcegos.

Outro algoritmo muito utilizado é o *Particle Swarm Optimization (PSO)*, ele foi primeiramente apresentado por Kennedy e Eberhart (1995) e se baseia em um enxame de partículas que voam em um determinado domínio definido com o objetivo de buscar a melhor solução global para um problema.

## 1.2 TEMA E QUESTÃO DE PESQUISA

As principais áreas estudadas nessa pesquisa são:

- Otimização de portfólios;
- Computação evolutiva;
- Inteligência de enxames.

Tendo como questão principal:

Como resolver e validar os algoritmos GWO e BA a área de otimização de portfólios?

### 1.3 OBJETIVO GERAL

Desenvolver dois novos algoritmos para resolver o problema de otimização de portfólios de investimento, sendo eles versões multiobjectivo dos algoritmos GWO (spGWO) e BA (spBA) e compara-los com os algoritmos spMODE e PSO.

#### 1.3.1 Objetivos específicos

Os objetivos específicos da dissertação são:

- a) Realizar um apanhado dos diversos algoritmos multiobjectivo dentro das áreas da computação evolutiva e inteligência de enxames com capacidade de se adaptar a otimização de portfólios;
- b) Realizar as melhorias necessárias no algoritmo spMODE adaptado para otimização de portfólios.
- c) Criar versões multiobjectivo dos algoritmos GWO e BA e adapta-los para otimização de portfólios;
- d) Validar os algoritmos na área de otimização de portfólio;
- e) Analisar e comparar o desempenho dos algoritmos usando análise estatística dos resultados obtidos das simulações computacionais, com medida como o Hipervolume;
- f) Desenvolver método de classificação de portfólios de acordo com o perfil de investidor.

### 1.4 JUSTIFICATIVA

O comparativo realizado entre os dois algoritmos multiobjectivos propostos (spGWO e spBA) e os dois algoritmos adaptados a área de otimização de portfólios (PSO e spMODE) pode validar novos algoritmos a resolução do problema em questão, servindo assim como possível ferramenta na área pratica de finanças e incentivando a área acadêmica a utilizar algoritmos da área de inteligência de enxames e computação evolutiva para resolução de problemas nas áreas de finanças.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

Essa seção tem como objetivo analisar todos os aspectos principais do problema de otimização de portfólio, a seção a seguir explica o funcionamento do mercado financeiro em geral e os principais tipos de investimento, a seção posterior explica o conceito de portfólio de investimento, na seção subsequente são analisadas as principais variáveis do problema, a seção seguinte apresenta o conceito de computação evolutiva e as seções 2.5 até 2.9 explicam os algoritmos utilizados.

### 2.1 MERCADO FINANCEIRO

O mercado financeiro é um mecanismo pelo qual são feitas as transferências de recursos entre os agentes econômicos, essas transferências são fiscalizadas e controladas por entidades como, por exemplo, o Banco Central ou a BM&FBovespa (bolsa de valores de São Paulo).

Assaf (2012) divide o mercado financeiro em quatro partes:

- a) Mercado monetário;
- b) Mercado de crédito;
- c) Mercado de capitais;
- d) Mercado cambial.

Essa estrutura de mercado está melhor detalhada na tabela 1.

Tabela 1- Estrutura dos Mercados Financeiros

| Mercados  | Atuação                                                  | Maturidade            |
|-----------|----------------------------------------------------------|-----------------------|
| Monetário | Controle dos meios de pagamentos da economia             | Curto prazo           |
| Crédito   | Créditos para consumo e capital de giro das empresas     | Curto e médio prazo   |
| Capitais  | Ações, investimentos, financiamentos e outras operações. | Médio e longo prazo   |
| Cambial   | Conversão de moedas                                      | A vista e curto prazo |

Fonte: ASSAF (2012)

Vasconcellos e Garcia (2011) comentam que um dos indicadores de

desenvolvimento de um país é o mercado financeiro, levando em conta seu tamanho e diversificação. Um mercado forte e bem diversificado vai consequentemente atrair uma maior oferta de recursos, ou seja, mais empresas dispostas a transformar suas disponibilidades financeiras em ativos financeiros.

Para realização desse projeto o foco são as operações com ações de renda variável e esse tipo de operação está dentro do mercado de capitais, os dados utilizados foram obtidos do site *Yahoo Finance*.

### **2.1.1 Mercado de capitais**

Segundo Andrezo e Siqueira (2006) o Mercado de Capitais é constituído pelos agentes e instrumentos financeiros envolvidos em operações de prazo curto, médio ou indeterminado. O mesmo é subdividido em Mercado Primário e Mercado Secundário.

De acordo com Pinheiro (2005), Mercado Primário é onde estão localizadas as negociações de novas ações com o mercado, e é aonde a empresa consegue captar recursos para seus empreendimentos, após essa primeira negociação as ações passam então a ser negociadas no Mercado Secundário.

É dentro do Mercado Secundário que está a bolsa de valores, onde estão os ativos de renda variável. A bolsa de valores garante a segurança para que as empresas possam realizar suas negociações.

Boehme e Çolak (2012) analisaram a importância e a influência que a negociação de ações no mercado primário tem sobre o mercado secundário, concluindo que a forma que as ações são negociadas no mercado primário influenciam o tipo de investidor atraído pela ação no mercado secundário. Chang *et al.* (2008), analisam os retornos dos dois mercados e afirmam que o mercado primário é mais arriscado pois os investidores não tem os dados anteriores dos investimentos (como acontece no outro mercado), esse risco também resulta em uma maior chance de retorno.

Tudo isso torna as bolsas de valores importantes para um país, pois elas ajudam no crescimento econômico de uma nação, seja de forma direta facilitando as transições ou de forma indireta através da geração de empregos devido ao crescimento das companhias. Cooray (2010) afirma que as bolsas de valores têm um papel importante no crescimento dos países e esses devem incentivar e criar políticas

para aumentar o tamanho, a liquidez e a atividade das bolsas de valores. Bayraktar (2014) explica que as bolsas de valores são uma das fontes mais importantes de arrecadação de fundos para financiar as atividades das empresas.

As seções 2.1.2 e 2.1.3 tem como intuito mostrar as modalidades de investimento mais comuns, elas são divididas em duas categorias: renda fixa e renda variável. Segundo Martini (2013) cada investimento pode ser definido por um nível de risco, um percentual de rendimento e diferentes taxas e impostos. Sendo que os investimentos mais arriscados normalmente estão dentro da renda variável e os menos arriscados são agrupados na categoria renda fixa.

### **2.1.2 Renda fixa**

Os investimentos dentro da categoria renda fixa são os investimentos em que é possível calcular sua remuneração no momento da aplicação, ou pelo menos a forma que essa remuneração é calculada é conhecida.

Segundo Galti (2015) a maioria das pessoas entende que investimentos de renda fixa vão sempre ter um retorno positivo, mas isso não é verdade, muitas vezes a aplicação de renda fixa é baseada em algum índice ou taxa, o qual pode se tornar negativo em algum momento, possibilitando assim que o seu resultado acabe sendo negativo.

Alguns dos investimentos de renda fixa mais comuns são a caderneta de poupança, as debentures e o investimento no tesouro direto:

Caderneta de poupança – Segundo Halfeld (2008) a caderneta de poupança é o investimento mais tradicional de renda fixa. Prometendo pagar juros de 0,5 % ao mês, é considerado o ativo financeiro de menor risco na economia brasileira.

Debentures – São títulos de dívida emitidos por empresas e que conferem aos seus titulares direitos de crédito contra a companhia emissora. Segundo a Lei 6.385/76 são valores mobiliários. Utilizados como instrumentos de captação de recurso no mercado de capitais pelas empresas, com o intuito de financiar projetos ou gerenciar dívidas. Diferente das ações, ao adquirir debentures, o investidor não se torna um sócio da companhia. É como se ele estivesse emprestando dinheiro para a companhia em troca do recebimento do valor emprestado e de juros, conforme condições e prazos previamente combinados. (Comissão de Valores Mobiliários, 2014)

Tesouro direto – Halfeld (2008) explica que o tesouro nacional oferece aos brasileiros a possibilidade de comprar títulos públicos federais. Semanalmente, o Tesouro recompra os títulos, possibilitando assim que o investidor resgate seu investimento.

Nesse trabalho os investimentos de renda fixa serão utilizados apenas como medida de comparação com outros investimentos, por isso é apresentada apenas uma breve descrição das suas principais modalidades de investimento.

### **2.1.3 Renda variável**

Galti (2015) define aplicações de renda variável como investimentos onde o rendimento é desconhecido, podendo ser positivo, negativo ou neutro. Ou seja, ao contrário da renda fixa não é possível calcular sua remuneração no momento da aplicação, e a forma que essa remuneração é calculado também não é conhecida.

Existem diversas modalidades de aplicações dentro da renda variável, entre elas estão as ações, derivativos, câmbio, ETF e fundo imobiliários.

As aplicações utilizadas nessa tese são em sua grande maioria aplicações de renda variável, sendo principalmente ações, essa seção tem como objetivo explicar cada uma de suas modalidades.

#### **2.1.3.1 Derivativos**

Derivativos são contratos nos quais a maior parte de seu valor deriva do valor de um ativo subjacente, taxa ou índice. Esse ativo pode ser café, ouro, ação, entre outros. No geral eles podem ser divididos em mercado a termo, mercado futuro, opções e *swap*, cada um deles é explicado a seguir segundo as definições apresentadas na apostila de mercado de derivativos no Brasil pela Comissão de Valores Imobiliários (2015):

- Mercado a termo – O comprador ou vendedor se compromete a comprar ou vender certa quantidade de um bem por um preço fixado na hora da compra ou venda para liquidação em data futura, os contratos são liquidados integralmente no vencimento.
- Mercado futuro - Parecido com o mercado a termo, tem como principal diferença a que os compromissos são ajustados financeiramente de

acordo com as expectativas do preço futuro daquele bem, por meio de ajuste diário, podendo esse ajuste representar uma perda ou um ganho.

- Mercado de opções – É negociado o direito de compra ou venda de um bem por um preço fixo em uma data futura, quem adquirir o contrato deve pagar um prêmio ao vendedor, mais ou menos como um acordo de seguro.
- Mercado de *swap* – O contrato de *swap* é definido como um acordo entre duas partes, onde é realizada a troca do fluxo de caixa tendo como base a comparação da rentabilidade entre dois bens.

### 2.1.3.2 Câmbio

O mercado de câmbio é onde são realizadas as trocas de moeda nacional por moeda estrangeira. A comissão de valores mobiliários (2014) explica que participam desse mercado todos os agentes econômicos que realizam transações com o exterior e sendo assim tem pagamentos ou recebimentos a serem realizados utilizando moeda estrangeira. O Banco Central do Brasil é responsável por regulamentar e fiscalizar esse mercado e também participa da execução de sua política cambial.

### 2.1.3.3 Fundos de índices comercializados como ações (ETF)

O guia de investimentos da BM&F Bovespa (2013) explica que os ETF (*“Exchange Traded Funds”*) são fundos de investimentos que tem cotas negociáveis na BM&F Bovespa e são muito parecidos com ações. Eles sempre estão ligados a algum índice da bolsa, por isso, seu retorno e risco estão diretamente ligados ao índice que eles acompanham. Esses índices são compostos pelas ações mais importantes dentro da área de análise do índice.

Os fundos ETF tem como vantagem um baixo custo (normalmente devido à baixa taxa de administração), diversificação (o fundo é composto por diversos ativos), regras de aplicação e regate flexíveis, transparência e praticidade (a qualquer hora é possível saber a composição dos índices diferente da maioria dos fundos que normalmente publica informações sobre o fundo mensalmente).

Por ser composto por diversas ações de renda variável os fundos ETF são indicados para quem está disposto a ter um maior risco com o objetivo de atingir uma maior rentabilidade.

#### 2.1.3.4 Fundo imobiliários

Segundo o guia de investimentos da BM&F Bovespa (2013) um fundo imobiliário faz aplicações em empreendimentos imobiliários, como por exemplo imóveis comerciais, residenciais, rurais ou urbanos, estando eles construídos ou em construção. Essas aplicações têm como objetivo futuro o de alienação, locação ou arrendamento. Os rendimentos desses fundos são distribuídos entre os investidores.

Diferente da renda fixa não é possível aplicação ou resgate a qualquer hora e o prazo de duração do fundo pode ser indeterminado.

Os fundos imobiliários são indicados para quem deseja entrar no mercado imobiliários, mas não tem ou não quer desembolsar o valor total de um imóvel. Duas grandes vantagens desse tipo de investimento são a renda regular obtida pelas receitas geradas pelos imóveis e o retorno obtido pela valorização dos imóveis. Os riscos que o investidor nessa modalidade de investimento está exposto são os mesmos riscos de um proprietário de imóvel, como por exemplo rendimentos com alugueis abaixo do previsto.

#### 2.1.3.5 Ações

Segundo Silva (2008) as empresas utilizam do mercado de ações para gerar capital e com isso fazer novos investimentos, ao vender suas ações elas reduzem o risco de suas atividades, que é dividido com os compradores, os compradores além dos riscos assumidos, também adquirem direitos sobre o patrimônio da empresa.

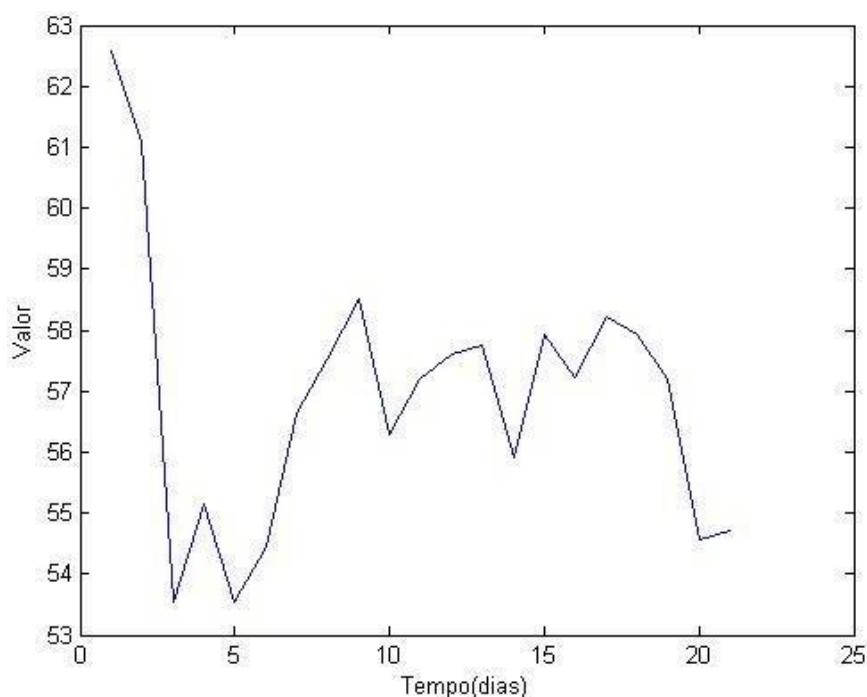
Uma ação pode ser dividida em dois tipos:

- 1) Ordinária Nominativa (ON) - dá direito a voto em assembleia sobre definições da empresa.
- 2) Preferencial Nominativa (PN) - não dá direito a voto, mas preferência no recebimento de dividendos.

Para análise dos valores das ações foi utilizado nesse trabalho o valor de fechamento de cada ação, e esses dados foram retirados do site Yahoo finance utilizando o software *Matlab*. A Figura 1 mostra os valores de fechamento das ações do *Facebook* no período de 01 janeiro de 2014 a 01 de fevereiro de 2014.

Figura 1 - Valor de fechamento Facebook (01/01/2014 até 01/02/2014)





Fonte: Yahoo Finance(2014)

O valor de fechamento de uma ação é o valor da ação ao encerramento de um pregão. Quando se fala que uma determinada ação fechou “em alta”, isso quer dizer que seu valor de fechamento foi maior que o do dia anterior. Se a ação fechou “em baixa” isso quer dizer que seu valor de fechamento foi menor que o do dia anterior e quando a ação fecha “estável” isso quer dizer que seu valor se manteve constante.

Na figura 1 pode-se observar que a ação do *facebook* fechou em alta para o período de tempo amostrado, pois seu valor de fechamento foi maior do que o do dia anterior.

## 2.2 PORTFÓLIO DE INVESTIMENTO

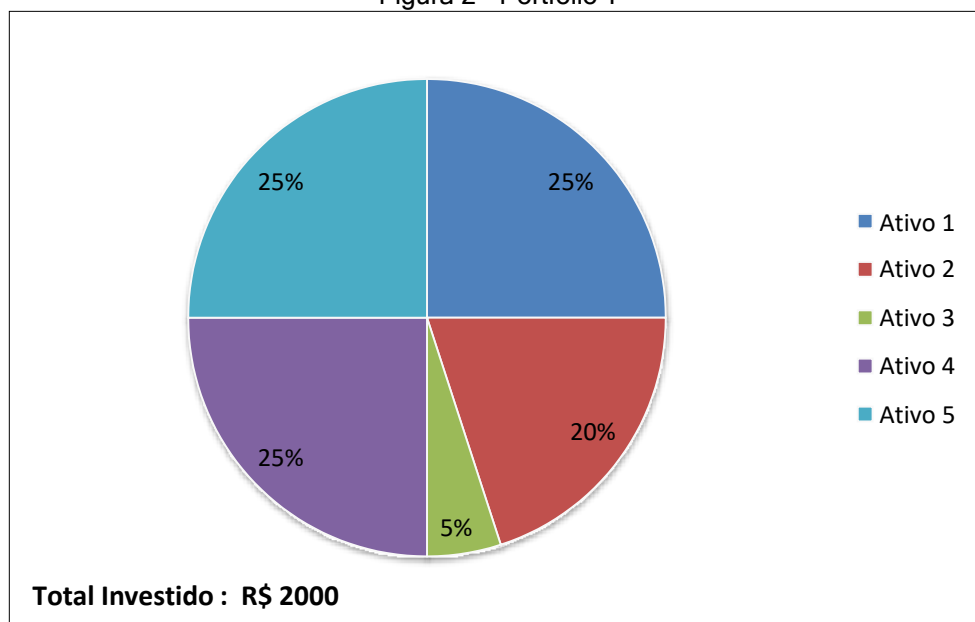
Um portfólio de investimento consiste no agrupamento dos ativos financeiros de uma pessoa ou empresa, cada ativo desse tem um peso, que representa um montante do total de dinheiro investido. O Figura 2 e a Tabela 2 mostram como exemplo um Portfólio T de investimento, aonde o investidor tem um total investido de R\$ 2000,00 e esse valor está dividido em diversas ações.

Tabela 2 - Portfólio T

|  | Peso | Total |
|--|------|-------|
|--|------|-------|

|         |             |            |                 |
|---------|-------------|------------|-----------------|
| Ativo 1 | 25%         | R\$        | 500,00          |
| Ativo 2 | 20%         | R\$        | 400,00          |
| Ativo 3 | 5%          | R\$        | 100,00          |
| Ativo 4 | 25%         | R\$        | 500,00          |
| Ativo 5 | 25%         | R\$        | 500,00          |
|         | <b>100%</b> | <b>R\$</b> | <b>2.000,00</b> |

Figura 2 - Portfólio T



O investidor tem como objetivo obter a melhor distribuição de seu dinheiro entre esses ativos de acordo com seus interesses. Para melhorar essa distribuição primeiramente deve se achar um meio de analisar os dados de cada investimento e depois achar um meio para relacionar esses investimentos, após isso realizando mudanças nos pesos dos ativos tenta se adequar o portfólio ao investidor. A área que estuda essa adequação é chamada de otimização de portfólio e tem como base a teoria moderna de portfólios, que utiliza os conceitos de risco e retorno do portfólio.

### 2.2.1 Teoria moderna de portfólios

Rubinstein (2002) comenta que muitos contribuíram para o desenvolvimento da teoria moderna de portfólios, mas o primeiro a ter uma publicação realmente reconhecida sobre seleção de portfólios foi Harry Markowitz em 1952, outro trabalho que contribuiu muito para a teoria, mas que poucos lembram foi Roy (1952) o próprio

Markowitz reconhece isso quando escreve em *“The Early History of Portfolio Theory: 1600-1960”*:

*“On the basis of Markowitz (1952), I am often called the father of modern portfolio theory (MPT), but Roy (1952) can claim an equal share of this honor.”*

Nessa frase Markowitz conta que devido a sua publicação em 1952 ele normalmente era chamado de pai da moderna teoria de portfólios, mas que Roy (1952) deu uma contribuição de igual tamanho para essa teoria.

Ao propor a Teoria dos Portfólios, Markowitz (1952) foi estimulado a partir da tese de doutorado de John Burr Williams (1938), que determinou o valor intrínseco de ações ordinárias a partir de dividendos futuros, ao invés de ganhos (Bernstein, 1997). De acordo com Teoria dos Portfólios de Markowitz (1952), o investidor financeiro pode diversificar sua carteira de investimentos de tal modo que seu retorno pode ser maximizado por esta diversificação (Markowitz, 1952). É compreendido como portfólios, um conjunto de ativos como ações, títulos, joias, entre outros (Zeleny, 1982). O retorno consiste no desempenho esperado no futuro a partir de um conjunto de ativos e o risco é a possibilidade de desvios de previsão do retorno (Heinze, 2016).

A escolha de determinado tipo de portfólio é realizada quando existe uma expectativa sobre um desempenho futuro superior, que fundamenta a escolha do investidor. Por causa disso, a escolha de um portfólio significa que existe relação entre a crença e o investimento escolhido, com base no retorno esperado e na variação dos retornos (Markowitz, 1952). Markowitz (1952) propõe um processo de escolha do portfólio de dois estágios. O primeiro estágio consiste na observação e experiência do investidor acerca do comportamento do portfólio, e termina com a crença de seu desempenho futuro. No segundo estágio, o investidor é imbuído de crença sobre o desempenho futuro do portfólio, por causa disso, ele realiza a escolha do portfólio ideal em concordância com suas expectativas, tendo como parâmetro de escolha o risco e retorno.

Embora existam estágios no processo de escolha do portfólio, as expectativas dos investidores sobre os retornos esperados são incertas e, no entanto sempre haverá uma esperança de resultados maiores e riscos menores (Zeleny, 1982). A diversificação de portfólios não atua com segurança para obter o retorno esperado, mas consiste em medida para mitigar o risco e a perda financeira (Markowitz, 1952;

Finne, 1997). Por causa disso, é recomendado que investidores invistam em portfólios de ações de diferentes setores e níveis de risco (Brealey, Myers e Allen, 2011). Ademais, quando o investidor tem conhecimento e possui informações sobre os comportamentos dos títulos, e adicionalmente acredita, uma carteira ótima de investimentos pode ser projetada por ele (Elton e Gruber, 1970).

Outro trabalho de grande importância foi o “*Capital asset pricing model*”, feito em sua grande maioria por William Sharpe (1964), esse trabalho resultou em um Nobel para Sharpe em 1990. Ele foi baseado nos estudos de Markowitz (1952) e mostra como medir o risco de um investimento e também a relação entre retorno e risco. (Fama, 2004)

Zopounidis, Doumpos e Fabozzi (2014) realizam um estudo sobre as contribuições de Markowitz para teoria de portfólios e afirmam que apesar de terem surgido nos últimos tempos diversos novos métodos, algoritmos, teorias, etc., o modelo apresentado por Markowitz continua servindo como base para muitas dessas inovações e por isso tem extrema importância nessa área. Leung, Ng e Wong (2012), fala que apesar do modelo de Markowitz ter sido proposto a mais de meio século, ele continua sendo um dos assuntos mais importantes a serem estudados por acadêmicos e atuantes na área de finanças. Castellano (2014), reforça essas afirmações mas aponta para o problema de que esse modelo não considera os custos de transação dos investimentos.

Wilford (2012) realiza um estudo focado nos erros que podem ocorrer quando alguns princípios básicos da teoria de Markowitz são quebrados. Segundo ele isso é importante pois muitos acadêmicos desenvolvem métodos de otimização de portfólios baseados nas ideias de Markowitz ignorando os princípios básicos, e quando os portfólios gerados não são como esperado eles culpam a teoria de Markowitz.

O problema na diversificação de portfólios é que os retornos futuros não poderão ser previstos no momento da decisão de investir, assim decisões tomadas no presente poderão ser avaliadas em um momento futuro (Roman e Mitra, 2009). O desafio que suplanta a decisão do investidor é decidir sobre um volume  $n$  de ativos, que podem ser distribuídos no investimento em uma quantidade  $x$  de ativos que, após um período de tempo, obtenha o maior retorno possível (Roman e Mitra, 2009). Sobre isso, uma dualidade é apresentada por Roman e Mitra (2009) ao argumentarem que muitos modelos são questionáveis teoricamente, no entanto são utilizados na prática pelos financistas. Outros modelos são solidificados na literatura e pouco utilizados na

prática e o modelo mais utilizado na prática é o da média-variância.

Com base nos preços de ações dos Estados Unidos (entre 1995 e 2011), Pfiffelmann, Roger e Bourachnikova (2016) otimizaram portfólios por meio da Teoria Comportamental dos Portfólios (TCP) desenvolvida por Shefrin e Statman (2000) e pela Teoria da Média-Variância (TMV) de Markowitz. Os autores verificaram que em mais de 70% dos casos a otimização de portfólios pelo modelo de Shefrin e Statman (2000) foi o mais eficiente. O indicador de aversão ao risco deste portfólio foi 10 vezes mais baixo do que o grau de aversão ao risco de investidores do modelo da média-variância de Markowitz. Os investidores não tendem a escolher a otimização ótima dos portfólios dos dois modelos concomitaneamente. Em razão desta discrepância o emprego dos dois modelos em conjunto não poderia ser realizado, mesmo a teoria tendo sido desenvolvida há quase 50 anos após a proposição de Markowitz (Pfiffelmann, Roger e Bourachnikova, 2016).

Neumann, Ebendt e Kuhns (2016) utilizaram o modelo de Markowitz para analisar a combinação ideal no fluxo de tráfego de dados numéricos de sistemas de transporte inteligente, Intelligent Transportation Systems (ITS). Os resultados sugerem que o modelo de Markowitz contribui para solução das tarefas relacionadas à redução do erro em dados com entradas tendenciosas.

## 2.3 ANÁLISE DOS DADOS

O preço das ações varia muito, enquanto alguns estão valorizando outros estão desvalorizando, Roudier (2007) demonstra essa relação com o seguinte exemplo, imagine que alguém investe seu dinheiro em duas fábricas, uma fábrica de sorvetes e a outra fábrica de guarda chuvas. Se ele investir tudo na fábrica de sorvetes, vai ter lucro durante o verão, mas prejuízo durante o inverno. Investindo na fábrica de guarda-chuvas o lucro vai variar opostamente ao primeiro caso. No entanto se investir metade do dinheiro em cada fábrica, o lucro vai ser constante, nunca vai perder muito, mas também não vai ganhar muito.

Para estimar a diversificação de portfólios, Markowitz (1952) criou o modelo da média-variância ou Teoria da Média Variância. Neste modelo, o investidor pode diversificar sua carteira de investimentos e maximizar o retorno esperado a partir da diversificação de portfólios, realizado ao encontrar um trade-off que representa a melhor relação risco-retorno, seja pela redução do risco a partir de um determinado

retorno esperado ou, maior retorno possível a partir de um determinado risco (Markowitz, 1952). A variância, que tem sido a primeira estimativa de risco utilizada na diversificação de portfólios, é uma medida utilizada para caracterizar os riscos em relação à média, com base em seu desvio padrão e raiz quadrada (Markowitz, 1952; Zeleny, 1982; Roman e Mitra, 2009). No modelo da média-variância, o retorno esperado de um portfólio se refere ao retorno do investimento e a variância é a estimativa de risco. Situações em que a variação em torno da média é grande, caracterizam-se como de elevada incerteza (Zeleny, 1982).

Para Assaf (2012) a avaliação de um portfólio de investimentos envolve 3 principais partes:

- 1) Análise dos ativos - Cada ativo é analisado separadamente, de acordo com seu risco e seu retorno, é feita então a escolha de quais ativos farão parte do portfólio;
- 2) Análise dos portfólios - São analisados os riscos e retornos dos conjuntos de ativos selecionados durante a primeira fase do estudo;
- 3) Seleção das carteiras - É aonde identifica-se a melhor combinação dos ativos, de acordo com sua eficiência e de acordo com o perfil do investidor. A técnica utilizada para auxiliar essa escolha é a da fronteira eficiente.

### 2.3.1 Retorno do portfólio

Assaf (2012) explica que o retorno de um ativo é um ganho (positivo ou negativo) de um investimento para certo período de tempo. A fórmula para o cálculo do retorno de um ativo é realizada utilizando a equação 2.1:

$$R = \left( \frac{r_t - r_{t-1}}{P_{t-1}} \right) * 100 \quad (2.1)$$

Onde : R é o retorno no período  $t$  ;

$P_t$  e  $P_{t-1}$  são os valores da ação nos período  $t$  e  $t-1$ .

Utilizando os dados da figura 1 podemos calcular o retorno da ação do Facebook (equação 2.2) para o período de 01 janeiro de 2014 a 01 de fevereiro de 2014, aonde são utilizados os dados do início da análise e de seu término:

$$R_t = \left( \frac{34,11 - 62,57}{62,57} \right) * 100 = -12,56 \% \quad (2.2)$$

O retorno é igual a -12,56 %, ou seja, se um investidor aplicar 1000 reais nessa ação, no fim desse período ele vai ter um prejuízo de aproximadamente 125 reais.

De acordo com Marling e Emanuelsson (2012) para calcular o retorno do portfólio é calculada a média dos retornos de cada ativo que compõe o portfólio, utilizando a equação:

$$\mu = \sum_{i=1}^n R_i * x_i \quad (2.3)$$

Onde  $R_i$  é o retorno do ativo  $i$  e  $x_i$  é o peso do ativo  $i$  para o portfólio.

Utilizando esse conceito e acrescentando ao Portfólio T da seção 2.2 um retorno aleatório para cada ativo, como mostra a tabela 2, pode-se calcular o retorno desse portfólio (equação 2.4):

$$\mu_{Pt} = 0,25 * 0,02 + 0,2 * 0,01 + 0,05 * 0,03 + 0,25 * 0,05 + 0,25 * 0,07 \quad (2.4)$$

$$\mu_{Pt} = 0,038$$

Sendo assim cada ativo tem uma contribuição para o retorno do portfólio de acordo com seu peso e de seu retorno, ou seja, quanto maior seu peso, mais o seu retorno influenciara o retorno do portfólio.

Tabela 3 - Portfólio T\*

| Ativo   | Peso        | Total               | Retorno (mensal) |
|---------|-------------|---------------------|------------------|
| Ativo 1 | 25%         | R\$ 500,00          | 0,02             |
| Ativo 2 | 20%         | R\$ 400,00          | 0,01             |
| Ativo 3 | 5%          | R\$ 100,00          | 0,03             |
| Ativo 4 | 25%         | R\$ 500,00          | 0,05             |
| Ativo 5 | 25%         | R\$ 500,00          | 0,07             |
|         | <b>100%</b> | <b>R\$ 2.000,00</b> |                  |

Sendo assim se o investidor aplicar 2000 reais nesse portfólio ele terá um retorno de 77 reais ou 3,8%.

### 2.3.2 Risco do portfólio

Para o cálculo do risco serão utilizados os conceitos de variância, para o cálculo do risco de um ativo e o de covariância para o cálculo do risco de um portfólio. As fórmulas e cálculos a seguir foram baseados em Roudier (2007) e Assaf (2012).

Para um ativo a variância de seus retornos pode ser calculada a partir da equação 2.5:

$$Variância(R_i) = \sigma_i^2 = \sum_{t=1}^t [(R_t - R_m)^2] \quad (2.5)$$

Onde :  $R_m$  é a média dos retornos do ativo;

$R_t$  = Retorno no tempo  $t$  do ativo.

A covariância entre dois ativos pode ser calculada a partir da equação:

$$\sigma_{ij} = Covariância(R_i, R_j) = \sum_{t=1}^n [(R_{it} - R_{im}) * (R_{jt} - R_m)] \quad (2.6)$$

A partir do cálculo dessas duas medidas, pode-se calcular então variância para um portfólio (equação 2.7), tal que:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n (\sigma_i * x_i)^2 + 2 * \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n x_i * x_j * \sigma_{ij} \quad (2.7)$$

### 2.3.3 Fronteira eficiente e o conjunto Pareto-ótimo

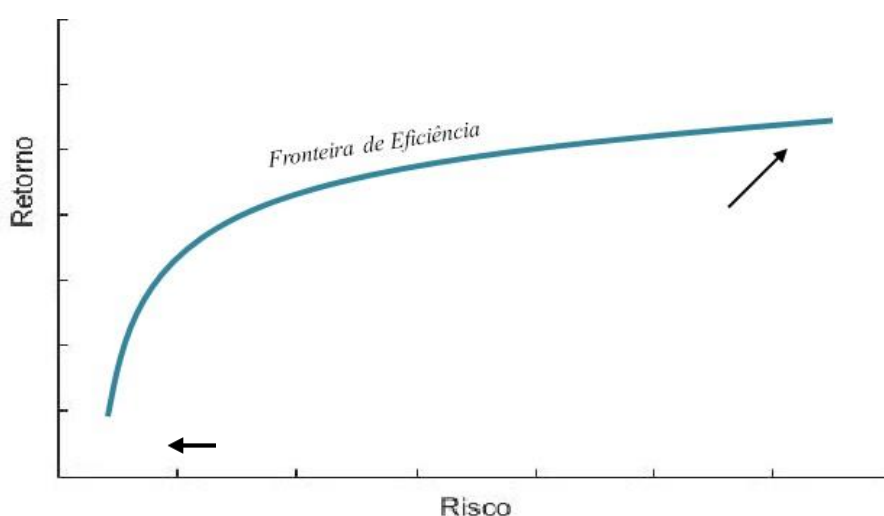
Marnix Engels (2004) propõe que Fronteira eficiente é a que para um conjunto de ativos mostra todos os portfólios eficientes de acordo com seu risco e retorno. É definido como eficiente o portfólio que consegue maximizar o retorno para um determinado risco ou minimizar o risco para um retorno esperado. Deng *et al.* (2011) apontam que não importa o retorno escolhido, essa fronteira sempre representara a melhor estratégia de investimento.



Segundo Huang e Wang (2013) para estimar a fronteira eficiente é necessário assumir que todos os investidores compartilham o mesmo objetivo em relação ao retorno esperado, ou seja, o melhor retorno para um determinado risco, sendo assim um investidor (racional) sempre vai escolher um portfólio que esteja dentro da fronteira eficiente.

Os portfólios que representam um maior retorno para um determinado risco, bem como o menor risco para um determinado retorno são representados pela fronteira de eficiência, visualizada na Figura 3.

Figura 3 - Fronteira Eficiente



Fonte: Chang, Meade, Beasley e Sharaiha (2000)

Os portfólios que encontram-se na fronteira de eficiência são os que apresentam o maior desempenho, considerando o maior retorno possível dentro das estimativas de risco e o mínimo de risco para determinado retorno esperado. Chang *et al.* (2000) orientam que um investidor que apresenta um perfil de aversão ao risco, pode investir seu capital em portfólios com mais ativos de menor risco; em contrapartida se o investidor for tolerante ao risco pode investir em um portfólio composto por mais e que apresentam maior retorno. O desempenho de um portfólio otimizado depende da quantidade de ativos que o compõe. Sobre isso, Brealey, Myers e Allen (2011) salientam que a medida que a quantidade de ações que formam um portfólio for entre 15 e 20 unidades seu risco é reduzido, no entanto, qualquer número adicional a ser incluído no portfólio conduz à redução nos benefícios. No entanto, asseveram Elton, Gruber, Brown e Groetzman (2007) que a existência de um número exato de inclusão de uma ação no portfólio, facilitaria o trabalho dos analistas

financeiros. Investidores tendem a realizar investimentos em portfólios como medida para redução dos riscos, principalmente como medida de segurança porque, se determinado ativo tiver uma redução de seu preço ou se a empresa vinculada à ele falir e o investidor tiver investido neste único ativo, ele perde seu investimento (Brealey, Myers e Allen, 2011). Tal comportamento do mercado conduz aos investimentos em empresas de diferentes setores (Brealey, Myers e Allen, 2011).

Segundo Henrique Carvalho (2009) os portfólios mais eficientes vão estar situados quanto mais ao norte-oeste possível, pois é a região que apresentar maior retorno e menor risco.

Huang *et al.* (2013), explicam que existem diversos métodos para aproximar a fronteira eficiente, e após comparar alguns métodos existentes apontam a importância de estimar corretamente a fronteira eficiente para se obter bons portfólios.

Outro ponto importante quando se fala em portfólio de investimentos e a fronteira eficiente, é que o método utilizado para estimar a fronteira não deve ser pesado computacionalmente, pois segundo Steuer (2010) é preciso retornar essa fronteira rapidamente e quando se trata de um banco de dados com 1000 investimentos ou mais isso pode ser um problema.

A diversificação de carteiras de vinhos finos franceses foi realizada por Aytaç, Hoang e Mandou (2016), considerando o índice iDealwine mensal de 2007 a 2014. Cada portfólio, que foi diversificado a partir do modelo da média-variância e fronteira eficiente de Markowitz (1952), considerou diferentes perfis de tolerância ao risco do investidor em relação às ações de vinhos e também, sendo incluídos também ouro como forma de diversificar o portfólio de vinhos. Para realizar o cálculo do desempenho da carteira, Aytaç, Hoang e Mandou (2016) utilizaram o índice de Sharpe (1964) visando complementar a estimação do modelo. Os autores verificaram o aumento de ouro nas carteiras de vinho não contribuiu para melhorar o desempenho dos portfólios e que o outro é menos eficiente do que o vinho. Também foi observado que em períodos de crise o desempenho das carteiras aumenta, indicando que os vinhos franceses foram considerados ativos seguros. Assim, investidores com aversão ao risco poderiam realizar investimentos nestes ativos em períodos de crise Aytaç, Hoang e Mandou (2016).

Nesse trabalho são utilizadas as definições do conjunto de Pareto para estimar a fronteira eficiente, essas definições serão melhor explicadas na seção 2.5.7.

### 2.3.4 Adaptações do modelo da Media-Variância de Markowitz

A representatividade da Teoria dos Portfólios de Markowitz para a área de finanças tem sido amplamente analisada na literatura há mais de 60 anos (Jin, Qu e Atkin, 2016). Ao longo do tempo, o modelo tem sido aperfeiçoado na literatura como uma tentativa de aproximar mais a realidade dos problemas relacionados à otimização de portfólios. Embora, a otimização de portfólios de Markowitz (1952) apresenta estimativas de risco e de retornos atraentes, muitas vezes seu efeito tem sido negligenciado por investidores, e seus motivos se referem a haver problemas de sobreposição de portfólios e exclusão de investimentos (Heinze, 2016).

Tal problema de sobreposição de portfólios contraria a realização de previsão sobre o desempenho futuro de um portfólio equilibrado, logo, o investidor tende a restringi-lo (Heinze, 2016). A dualidade presente em portfólios desta natureza, sobrepostos, impulsionaram a criação de um portfólio de risco ponderado por Black e Littermann (1992). Os retornos esperados tornam-se o elemento fundamental para se selecionar um portfólio com base na média-variância (Guerard Jr., Markowitz e Xu, 2015).

O modelo da média-variância proposto por Markowitz apresenta um problema de programação quadrática padronizada, que se torna mais complexo quando mais ativos e restrições são incorporados (Jin, Qu e Atkin, 2016). Assim, o modelo não avalia, por exemplo, quando investidores comprem contratos de seguro para eventos improváveis de previsão, também realizam investimentos em ativos com pequena probabilidade de ganho (Pfiffelmann, Roger e Bourachnikova, 2016). Karandikar e Sinha (2012) indicam que o modelo da média-variância não apresenta resultados que sustentem a tomada de decisão do investidor.

É sugerido por Jin, Qu e Atkin (2016) que o modelo média-móvel de Markowitz (1952) pode ser solucionado ao ser incorporado o método Simplex e Branch e o método Bound. Karandikar e Sinha (2012) propuseram um modelo usando o risco, representado pelo VaR, e a mediana como variável *proxy* do retorno do investimento, para o critério de tomada de decisão. É argumentado pelos autores que quando a distribuição do conjunto de ativos não segue uma distribuição normal, é mais robusto utilizar como estimativa a média e a VaR (*Value at Risk*), ao invés da média e variância, porque uma variância menor não significa que o VaR também será menor. Além disso, o modelo da média-variância foi desenvolvido para ativos de natureza simétrica

(Roman e Mitra, 2009). O VaR corresponde a um valor médio de perda ao longo do tempo a partir de um determinado nível de confiança (Karandikar e Sinha, 2012).

Araújo e Montini (2015) argumentam que modelos com LPM (*Lower Partial Model*), VaR (*Value at Risk*) e CVaR (*Conditional Value at Risk*) os ativos são selecionados com base nas distribuições das probabilidades assimétricas, avaliando os condicionantes das perdas como uma medida de avaliação do risco. A evolução do paradigma de risco e retorno, principalmente decorrentes do avanço na informática culminou na a Pós Moderna Teoria dos Portfólios ou *Post Modern Portfolio Theory* (PMPT). Na teoria de finanças, modelos como LPM (*Lower Partial Model*), VaR (*Value at Risk*) e CVaR (*Conditional Value at Risk*) caracterizam-se como PMPT em decorrência de eventos que podem reduzir o valor dos portfólios (Roman e Mitra, 2009; Rom e Ferguson, 1994). Estas estimativas têm sido relevantes considerando eventos alheios ou indesejáveis, como períodos de queda da economia, catástrofes financeiras e os acordos para exigência mínima de capital conforme Basileia I e II (Araújo e Montini, 2015). A diferença entre a Teoria dos Portfólios e *Post Modern Portfolio Theory* consiste na primeira, a média-variância o risco calculado é associado a um retorno sobre a média e na segunda (PMPT) os riscos devem ser calculados sobre metas específicas (Rom e Ferguson, 1994).

Araújo e Montini (2015) avaliaram a diversificação de portfólios utilizando os modelos da média-variância, LPM e CVaR, em ações da bolsa de valores brasileira. No mercado de ações do Brasil, os autores não localizaram diferenças na diversificação dos portfólios aliado à um maior ou menor retorno, no entanto, variações ao longo do tempo foram visíveis nos três modelos analisados. Guerard Jr., Markowitz e Xu (2015) compuseram um modelo com ações de bolsas de valores do mundo, no período de 1997 a 2011. Os autores utilizaram os modelos SunGard APT e Axioma de multifator para diversificar um portfólio de menor risco, utilizando um modelo com expectativas de ganhos, expectativa de valor e fatores de impulso nas bolsas de valores.

Com base na teoria da média-variância de Markowitz, Heaton, Polson e Witte (2016) criaram um algoritmo formado por quatro etapas compostas pela codificação, ajustamento, validação e verificação de um portfólio automatizado. Os portfólios ajustados consistem em hierarquias do mercado construídas com base na codificação. O ajustamento simula uma série de investimentos nos portfólios hierarquizados com base nos objetivos do investidor. A validação regulariza as etapas

da codificação e ajustamento. A verificação realiza um cruzamento entre os portfólios para localizar a fronteira eficiente (Heaton, Polson e Witte, 2016).

### 2.3.5 Índice de Sharpe

O índice de Sharpe foi criado em 1966 por William Sharpe, e é uma relação entre risco e retorno muito utilizada nos dias de hoje, principalmente devido a sua simplicidade.

Esse índice mostra quanto de retorno a mais está recebendo devido ao excesso de risco que está aplicando em seu portfólio. Isso é feito utilizando o ativo livre de risco como uma das variáveis para o cálculo do índice, sendo esse teoricamente o ativo disponível mais seguro para se investir. A equação 2.8 mostra o cálculo do índice de Sharpe.

$$IS = \frac{R_i - R_f}{\sigma_i} \quad (2.8)$$

Onde, IS é o índice de Sharpe;

$R_i$  é o retorno do ativo;

$R_f$  é o retorno do ativo livre de risco;

$\sigma_i$  é o risco do ativo.

Quanto maior o valor de IS mais eficiente será o portfólio, pois indica que o retorno está melhor compensando pelo risco assumido. Por exemplo, um índice de Sharpe com um valor 1,00, indica que para cada 1 % de retorno em excesso o portfólio apresentou apenas 1% de acréscimo no risco.

Umas das estratégias utilizadas para aumentar o IS é a diversificação do portfólio, pois isso vai fazer com que a relação entre risco e retorno melhore e consequentemente aumentara o IS.

## 2.4 COMPUTAÇÃO EVOLUTIVA

As informações a seguir foram extraídas de Das e Suganthan (2010), que

afirmam resolver problemas computacionais complexos, muitos pesquisadores utilizam a natureza como fonte de inspiração, essa área de estudo é chamada de computação evolutiva. A otimização está dentro de muitos processos da natureza, como por exemplo, a seleção natural de Darwin, onde ele propõe que toda forma de vida existente na terra é resultante de um processo seletivo, no qual apenas os mais aptos sobrevivem, garantindo assim a continuidade de sua espécie. Nos anos 1960, três diferentes interpretações dessa teoria surgiram em paralelo:

- 1) Programação Evolutiva (EP) – Formalizada por Fogel et al. (1966) nos Estados Unidos.
- 2) Estratégias Evolutivas (ES) – Desenvolvido por Rechenberg (1973) e Schwefel(1975 ) na Alemanha.
- 3) Algoritmo Genético (GA) - Método criado por Holland (1975) surgiu aproximadamente 10 anos depois dos dois primeiros.

Essas técnicas se desenvolveram separadamente por aproximadamente 15 anos, e então no começo dos anos 90 foram unificadas como representações diferentes para uma mesma tecnologia, chamadas então de computação evolutiva. A partir daí começaram a surgir diversas novas áreas de estudo, onde algoritmos de uma área as vezes podem se basear em parte de algoritmos de outras áreas. Por isso a classificação de qual área cada algoritmo pertence acaba se tornando difícil.

Outra área de grande importância, é a programação genética, segundo Simon (2013) os algoritmos baseados nessa área não tentam apenas achar a melhor solução para uma determinada estrutura de problemas, tenta ao mesmo tempo aprender a melhor estrutura para resolver o problema.

De acordo com Simon (2013) a terminologia nessa área de pesquisa é imprecisa e varia muito, dependendo do ponto de vista do autor.

Assim, nesse trabalho entende-se por computação evolutiva a área que estuda os algoritmos que se baseiam em uma população de soluções (sendo que essa população pode ser composta por apenas 1 indivíduo) e evolui essas soluções ao longo de várias iterações até encontrar um resultado satisfatório.

Um termo utilizado para classificar os algoritmos da computação evolutiva é o termo metaheurísticas, Simon (2013) classifica metaheurísticas como uma família de algoritmos heurísticos, ou seja, algoritmos que se baseiam em parâmetros e regras para resolver um problema. Esses algoritmos não precisam necessariamente

encontrar o melhor resultado para um problema, mas sim se aproximar desse resultado.

Boussaid *et al.* (2013) consideram que uma metaheurística pode ser considerada como bem-sucedida se conseguir atingir para um determinado problema um equilíbrio entre a exploração do domínio de busca global (diversificação) e a exploração intensificada de partes do domínio onde se encontrem resultados de melhor qualidade.

Segundo Mahdavi (2014) atualmente os algoritmos da computação evolutiva estão sendo muito utilizados para resolver um novo tipo de problema, chamado de Otimização Global em Larga Escala (LSGO), que são problema que tratam de um número muito grande de parâmetros e regras como por exemplo o reconhecimento de genes na bioinformática.

Os algoritmos da computação evolutiva normalmente seguem as seguintes etapas:

- Criação de uma população de soluções;
- Escolha da função objetivo (é quem faz a análise de cada indivíduo da população);
- Seleção das melhores soluções;
- Geração de uma nova população.

A maioria dos algoritmos utilizados atualmente são derivados das EP, ESs, GA, GP, evolução diferencial (DE) e Inteligência de enxames.

Castro e Zuben (2002) comentam que o objetivo principal dos algoritmos evolutivos é a solução de problemas complexos através de procedimentos de otimização inspirados nos processos naturais de evolução. E diferenciam os diversos algoritmos de acordo com sua estrutura de dados, formas de mutação e crossover e operadores de seleção.

Na seção 2.4.1 são apresentados os principais problemas dos algoritmos evolutivos na área de otimização de portfólios. Na seção 2.4.2 são citados artigos e trabalhos desenvolvidos utilizando metaheurísticas inspiradas na natureza e a computação evolutiva para resolver problemas de otimização.

### 2.4.1 Computação evolutiva e o problema de otimização de portfólio

O problema de otimização de portfólio atrai cada vez mais a atenção dos pesquisadores, segundo Zopounidis *et al.* (2015) essa popularidade pode ser atribuída a diversas razões como, por exemplo, o grande número de desafios em sua modelagem e uma grande diversidade de possíveis aplicações.

Metaxiotis e Liagkouras (2012) fazem um apanhado das instituições com contribuições ao estudo da computação evolutiva com aplicação na área de otimização de portfólios. Essa pesquisa aponta os EUA como país com maior número de instituições com contribuições, totalizando 12,6% das instituições. O Brasil aparece em último lugar com apenas uma instituição com contribuições (0,39%). Segundo eles essa ainda é uma área que está em suas primeiras fases e apontam alguns problemas constatados nos trabalhos submetidos até então:

- Muitos autores focam apenas nos aspectos computacionais do problema e esquecem de prestar atenção nos aspectos financeiros, não basta apenas um algoritmo eficiente;
- A formulação das variáveis que analisam o risco precisa ter melhores propriedades matemáticas;
- A maioria dos trabalhos considera apenas duas restrições, mas problemas reais precisam lidar com muito mais do que isso, isso faz com que a maioria dos trabalhos sejam apenas valorizados no meio acadêmico;
- A fronteira de Pareto não apresenta bons resultados quando precisa lidar com mais de 3 objetivos;
- Não existe um grande número de trabalhos que incorpora preferências em seu algoritmo, a incorporação de preferências nos algoritmos pode ajudar na tomada de decisões para esse tipo de problema.

Outro problema é citado por Ponsich *et al.* (2013), o artigo aponta que a maioria dos problemas financeiros que são resolvidos através de algoritmos da área de computação evolutiva apenas lidam com funções mono-objetivo, devido ao fato de que muitos objetivos dentro da área financeira são conflitantes.

De acordo com Hu *et al.* (2015) um dos grandes problemas dos algoritmos de otimização de portfólio é que esses algoritmos assumem que o portfólio gerado vai ser utilizado por um longo tempo sem modificações. No entanto, quem utiliza esse



portfólio pode querer mudar o peso de um ativo ou outro em um determinado período ou até retirar um ativo do portfólio e adicionar outro. Isso acaba sendo difícil devido a inúmeras razões, como por exemplo o custo de transação dos ativos.

#### 2.4.2 Contribuições dentro da área de otimização de portfólio

Roudier (2007) primeiramente desenvolve um estudo e crítica sobre a Teoria Moderna de Portfólios, que tem como base o trabalho desenvolvido por Harry Markowitz (1952) em portfólios de media-variância. Para desenvolver um algoritmo robusto de otimização de portfólios e superar alguns defeitos da teoria de Markowitz, Felix Roudier utiliza então um algoritmo genético para desenvolver uma função multiobjectivo, que respeitando as preferências do investidor, resolva o problema de otimização.

Wang, Yu e Cheung (2013) analisam as regras utilizadas para fazer e remanejar investimentos. É proposta uma complexa estratégia para investimento, que é nomeada como *performance based reward strategy* (PRS). Ela combina duas classes de regras para investimentos, a *moving average* (MA) e a *trading range break-out* (TRB). Para calcular os melhores parâmetros para PRS é utilizado método denominado *Time variant particle swarm optimization* (TVPSO) que utiliza a teoria de enxames.

Corazza, Fasano e Gusso (2013) utilizam a meta-heurística *Particle Swarm Optimization* (PSO) para resolver o problema de otimização de portfólios, tentando personalizar a função utilizada para medir o risco de acordo com cada investidor. Para isso eles propõem e estudam diversas alternativas para medida do risco, tentando não utilizar a medida clássica, que é a variância sobre os retornos de um ativo.

Lwin, Qu e Kendall (2014) propõem um algoritmo evolucionário híbrido e multiobjetivo para solução das limitações presentes no modelo de otimização de portfólio de media-variância. O algoritmo melhora a eficiência da convergência das soluções, guiando a busca evolucionária para regiões promissoras do espaço de busca. Esse algoritmo é então comparado com outros já propostos para solução do problema de otimização de portfólios e através de resultados experimentais conclui que o algoritmo tem um desempenho melhor que os demais.

## 2.5 EVOLUÇÃO DIFERENCIAL (DE)

A evolução diferencial surgiu pela primeira vez no relatório de Storn e Price (1995), e após obter ótimos resultados em edições do “*International Contest on Evolutionary Optimization*” (competição que avalia os algoritmos em: melhor solução, número de iterações, velocidade, etc.) ele foi aprimorado e vem sendo cada vez mais estudado e aplicado em problemas de otimização de diversas áreas. O motivo do sucesso desse algoritmo é ele ser simples, eficiente, versátil e de fácil aplicação.

Segundos Guimarães (2009) a evolução diferencial já foi utilizada para resolver problemas em diversas áreas como, por exemplo, o projeto de “localização do foco sísmico de terremotos” de Ruzek and Kvasnickaem (2001) ou o projeto de “dispositivos de engenharia elétrica” de Pahner and Hameyer (2000). Entre as pesquisas mais recentes estão a de Montes (2006) sobre variações do algoritmo de evolução diferencial, o de Gong e Cai (2012) que trata de técnicas para o tratamento de restrições e o de Batista(2009) que trata de versões para a solução de problemas de otimização multiobjectivo.

Das *et al.* (2016) realiza um estudo sobre os recentes avanços da evolução diferencial, ele analisa desde a fundação dos primeiros algoritmos propostos de evolução diferencial até os algoritmos propostos recentemente. Ele aponta a técnica de evolução diferencial como uma das mais poderosas e versáteis dentro da aérea de computação evolutiva.

Os princípios básicos utilizados durante as próximas partes da seção 2.5 foram em sua grande maioria extraídos de Storn, Price e Lampinen (2005) e dos artigos de Das e Suganthan (2010 e 2011), o software utilizado para rodar o algoritmo foi o *Matlab*.

### 2.5.1 Funcionamento

Existem diversos algoritmos que modificam e até mesmo aprimoram o algoritmo de evolução diferencial. Nessa seção será explicado o funcionamento do algoritmo diferencial básico, sem levar em consideração estudos mais complexos sobre as escolhas de parâmetros iniciais ou de parâmetros das etapas da DE.

A figura 4 mostra o ciclo básico do algoritmo. Na etapa de inicialização é aonde é criada a população inicial do algoritmo. Durante a mutação os membros da

população sofrem alterações em suas características. No Crossover os indivíduos são misturados entre si de acordo com uma constante chamada de *CR*. Durante a seleção é que cada indivíduo é analisado de acordo com o problema, se algum deles oferecer uma solução satisfatória para o problema, o algoritmo é finalizado, caso contrário ele volta para a etapa de mutação.

As etapas serão explicadas mais detalhadamente nas seções 2.5.2; 2.5.3; 2.5.4 e 2.5.5.

Figura 4 - Funcionamento Básico



### 2.5.2 Inicialização

É na etapa de inicialização que é criada a população base para o problema, isso de acordo com alguns parâmetros, o primeiro a ser escolhido é o número máximo de indivíduos na população, após isso deve se estabelecer o número de parâmetros por indivíduo e também os limites inferior e superior para cada parâmetro do indivíduo. Com esses parâmetros definidos é então gerada uma população de forma aleatória, obedecendo os limites.

Bocatto *et al.* (2009) explica que a população inicial gerada aleatoriamente deve

cobrir todo o espaço de busca, consequentemente realizando um estudo completo sobre o problema.

Como exemplo, temos uma população  $P$  que obedece aos seguintes parâmetros:

$$TP=3;$$

$$NP=2;$$

$$Lim_{inf}=[0 \ 0];$$

$$Lim_{sup}=[5 \ 5].$$

Para,

$TP$  é o tamanho da população;

$NP$  é o número de parâmetros por indivíduo;

$Lim_{inf}$  e  $Lim_{sup}$  são os limites superior e inferior para os indivíduos.

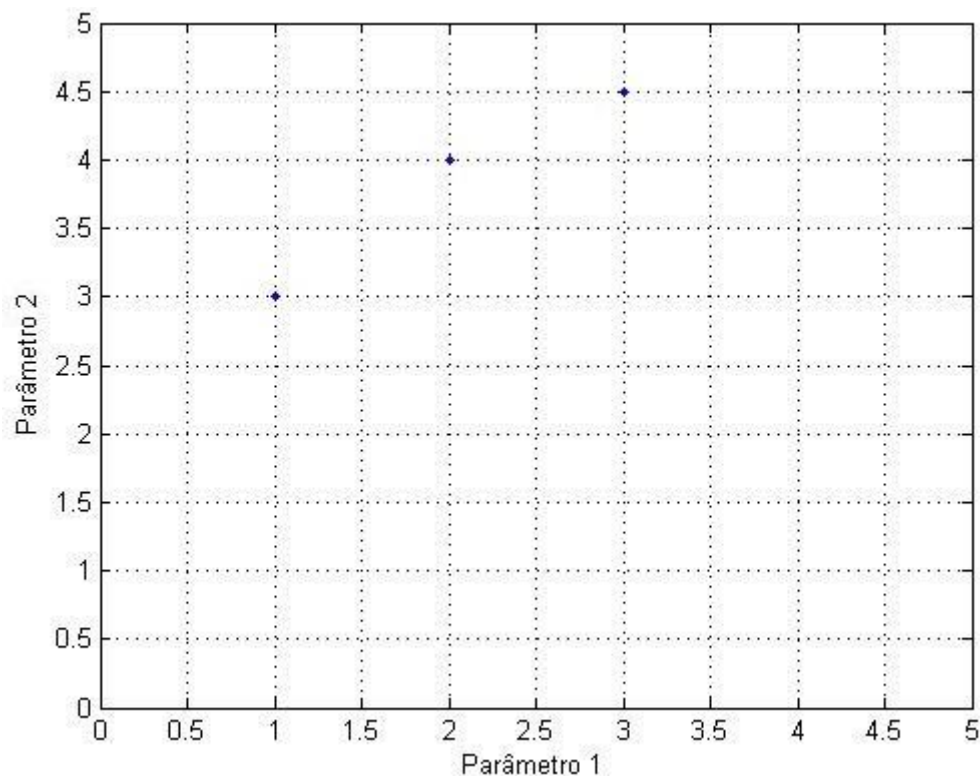
Sendo assim cada indivíduo pode ter o valor de seus dois parâmetros variando de 0 até 5 e podemos criar uma população  $P$  aleatória com 3 indivíduos (Figura 5), como estabelecido por  $TP$  (tamanho da população):

$$P_1=[1 \ 3];$$

$$P_2=[2 \ 4];$$

$$P_3=[3 \ 4,5],$$

Figura 5 - População  $P$



### 2.5.2 Mutação

No campo da biologia, mutação significa uma mudança nos genes de um cromossomo. Das e Suganthan (2010 e 2011) consideram mutação como uma mudança ou perturbação em um indivíduo da população, causado por um elemento aleatório.

Foi utilizado nessa tese o seguinte tipo de mutação:

- DE/rand/1/exp;

De acordo com Nobakhti e Wang (2007) essa opção é padrão para o algoritmo e obedece a seguinte fórmula 2.8:

$$V_m = P_{best} + F(P_i - P_j) \quad (2.8)$$

Onde :  $V_m$  é o vetor Mutante;

$P_{best}$  é o melhor indivíduo;

$P_i$  e  $P_j$  são os indivíduos gerados de forma aleatória com distribuição uniforme no intervalo  $[liminf, limsup]$ ;

$F$  é o fator de mutação e deve ter um valor positivo.

Ou seja, a DE utiliza de indivíduos da própria população para gerar a mutação, o indivíduo  $P_{best}$  é o que nessa iteração chegou mais perto do resultado esperado. Ele é somado então com a diferença dos outros dois vetores, que foram selecionados randomicamente, formando assim um Vetor mutante. O fator  $F$  é quem vai determinar o quanto essa mutação vai afetar o melhor indivíduo. À medida que a população for convergindo para um resultado mais otimizado, os indivíduos da população vão começar a ser mais parecidos e sendo assim a diferença entre os vetores aleatórios vai começar a ter menos influência sobre o vetor mutante, pois vai se aproximar a zero. O conjunto de todos os vetores mutantes vai formar então uma população mutante, que será futuramente utilizada na etapa de crossover com a sigla  $Pm$ .

A Figura 6 mostra um exemplo de vetor (indivíduo) mutante para a população criada na seção 2.5.2:

$$P_1=[1 \ 3];$$

$$P_2=[2 \ 4];$$

$$P_3=[3 \ 4,5].$$

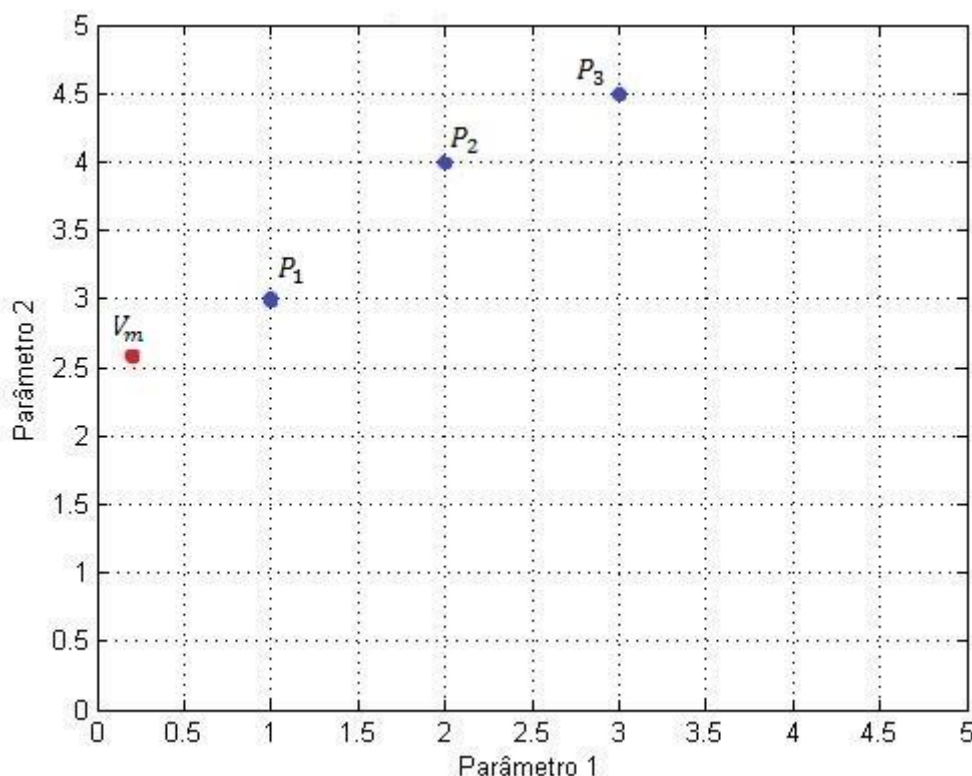
Supondo que o indivíduo  $P_1$  seja a melhor solução para o problema até agora e que utilizaremos como fator modificador  $F$  o valor 0,8, então tem-se as equações 2.9, 2.10 e 2.11:

$$V_m = P_1 + F (P_2 - P_3) \quad (2.9)$$

$$V_m = [1 \ 3] + 0,8 ([2 \ 4] - [3 \ 4,5]) \quad (2.10)$$

$$V_m = [0,22 \ 0,6] \quad (2.11)$$

Figura 6 - Vetor mutante



Se tivesse sido selecionada uma opção com a sigla *rand* ao invés de *best*, então o primeiro indivíduo seria também aleatório e não o melhor atual. No campo onde se pode escolher 1 ou 2, significa o número de elementos que participaram da mutação para opção 1 foram 3 elementos já para opção 2 foram utilizados 5 elementos. A opção *bin* ou *exp* vai alterar a forma do *crossover* entre binomial ou exponencial.

### 2.5.3 Crossover

Após as duas primeiras etapas, temos então uma população base ( $P$ ) e também uma população mutante ( $P_m$ ), essas duas populações serão agora usadas na fase de *crossover*.

Primeiramente é selecionada a constante de probabilidade  $CR$ . Como o DE já utiliza uma combinação de vetores para gerar o vetor mutante, o *crossover* é realizado de uma maneira diferente do utilizado em biologia. É criado agora uma nova população de vetores que vai ser chamada de  $P_c$ , onde cada vetor dessa população será dividido e para cada parte dele será gerado um número aleatório com distribuição uniforme entre 0 e 1. Se esse número for menor que a constante  $CR$ , então para essa

parte do vetor  $P_c$  será utilizada a parte correspondente do vetor da população  $P_m$ , caso contrário é utilizada a parte do vetor da população  $P_c$ . Esse procedimento é realizado para toda população, gerando assim uma população de tamanho igual a primeira população.

No exemplo a seguir foram utilizados os mesmos indivíduos da população  $P$  da seção 2.4.2 e a mesma constante  $F$ . Os cálculos a seguir apresentam a população mutante obtida:

$$Vm_1 = P_{best} + F(P_2 - P_3) \quad (2.12)$$

$$Vm_2 = P_{best} + F(P_3 - P_2) \quad (2.13)$$

$$Vm_3 = P_{best} + F(P_1 - P_2) \quad (2.14)$$

$$\begin{array}{ll} P_1 = [1 \ 3] & V_1 = [0,2 \ 2,6] \\ P_2 = [2 \ 4] & V_2 = [1,8 \ 3,4] \\ P_3 = [3 \ 4,5] & V_3 = [0,2 \ 2,2] \end{array}$$

A seguir foi selecionado o valor de  $CR$  como 0,8, foram gerados valores aleatórios para cada indivíduo e realizados os cálculos para obtenção da população  $P_c$ :

Indivíduo 1:

Valor aleatório do primeiro parâmetro = 0,9

Valor aleatório do segundo parâmetro = 0,7

$0,9 > CR$  e  $0,7 < CR$

Então para o primeiro parâmetro é utilizado o parâmetro da população  $P_m$  e para o segundo é utilizado o de  $P$ , com isso obtemos  $V_{C1}$ :

$$V_{C1} = [0,2 \ 3]$$

Indivíduo 2 :

Valor aleatório do primeiro parâmetro = 0,6



Valor aleatório do segundo parâmetro = 0,1

$0,6 < CR$  e  $0,1 < CR$

Então para o primeiro e segundo parâmetros são utilizados os parâmetros da população  $P_m$ , com isso obtemos  $VC_2$ :

$VC_2 = [1,8 \ 3,4]$

Indivíduo 3:

Valor aleatório do primeiro parâmetro = 0,9

Valor aleatório do segundo parâmetro = 0,9

$0,9 > CR$  e  $0,9 > CR$

Então para o primeiro e segundo parâmetros são utilizados os parâmetros da população  $P$ , com isso obtemos  $VC_3$ :

$VC_3 = [3 \ 4,5]$

Zaharie (2009) faz um estudo sobre a etapa de crossover e conclui que durante essa etapa são selecionados quais e quantos membros da população sofreram mutação. Essa probabilidade de mutação é influenciada pela constante  $CR$  e também pela escolha de tipo de *crossover*, para um mesmo valor de  $CR$  a probabilidade de mutação será superior no *crossover* binomial.

#### 2.5.4 Seleção

Essa última etapa do algoritmo DE é relativamente simples, ele compara cada indivíduo da população inicial  $P$  com os indivíduos da população  $P_c$  criada na etapa de *crossover*, e só substituirá o indivíduo da população original pelo da  $P_c$  se ele mostrar uma resposta melhor. Sendo assim, o indivíduo com a melhor solução para o problema até aquela iteração nunca será substituído por um indivíduo pior que aquela, apenas terá a chance de se aprimorar cada vez mais.

Storn, Price e Lampinen (2005) explicam que após a etapa de seleção, caso o problema ainda não tenha sido otimizado o suficiente, o algoritmo retorna então para etapa de mutação, mas agora com a população alterada de acordo com os passos da iteração anterior. Existe também a possibilidade de se definir um número máximo de iterações, impedindo assim que o algoritmo rode infinitamente.

### 2.5.5 Pseudocódigo básico

Para melhor explicar o funcionamento da DE é utilizado um pseudocódigo apresentado por Guimarães (2009) com base no algoritmo de evolução diferencial básico. A figura 7 mostra esse pseudocódigo.

Figura 7- Pseudocódigo DE

```

t = 1
Inicia população  $X_t = \{X_{t,i} ; i = 1, \dots, N\}$ 
enquanto algum critério de parada não for satisfeito
    para i = 1 até N
        Seleciona aleatoriamente  $r1, r2, r2$ 
        Seleciona aleatoriamente  $\partial_i$ 
        para j=1 até n
            se  $U_{0,1} \leq C$  e  $j = \partial_i$ 
                 $u_{t,i,j} = x_{t,r1,j} + F(x_{t,r2,j} - x_{t,r3,j})$ 
            se não
                 $u_{t,i,j} = x_{t,i,j}$ 
            fim se
        fim para
    fim para
    para i = 1 até N
        se  $f(u_{t,i}) \leq f(x_{t,i})$ 
             $x_{t+1,i} = u_{t,i}$ 
        se não
             $x_{t+1,i} = x_{t,i}$ 
        fim se
    fim para
    t = t+1
fim enquanto

```

A linha 2 do pseudocódigo representa a fase de inicialização, a etapa de *crossover* se encontra da linha 7 até a linha 12, a linha 9 cria o vetor mutante e já o utiliza na etapa de *crossover* e da linha 15 até a 21 é realizado o processo de seleção. O *loop while* do pseudocódigo é quem controla o número de iterações de acordo com os critérios de parada, como por exemplo, quando a melhor solução tiver sido obtida.

### 2.5.6 Aplicações na prática

Lee *et al.* (2011) propõe em seu trabalho um algoritmo de evolução diferencial aprimorado, denominado *Taguchi-sliding-based differential evolution algorithm* (TSBDEA) e que tem como objetivo resolver o problema de otimização para o processo

de retificação de superfície, otimizando as variáveis de retificação, como por exemplo a velocidade de rotação do rebolo (Peça da retifica). O TSBDEA combina um algoritmo de evolução diferencial (DEA) com o método “*Taguchi sliding level method*”(TSLM), esse método substitui a fase de crossover do DEA. A partir dos resultados computacionais conclui-se que o TSBDEA consegue resultados mais eficientes dos presentes nas literaturas.

Neri e Mínimo (2010) tratam da resolução de problemas de otimização quando não se tem disponível um computador de alto rendimento. O objetivo é resolver um problema complexo de otimização utilizando um *chip* de controle, parecido com os usados em dispositivos portáteis. Eles nomeiam o algoritmo como *Memetic compact Differential Evolution* (McDE), o algoritmo combina técnicas utilizadas pelo campo chamado de *Memetic Computing* e também o algoritmo de evolução diferencial (DE). Para provar a eficiência desse algoritmo ele o aplica em um problema real e após isso compara seus resultados com o de outros algoritmos que pertencem à mesma categoria. O problema real escolhido foi o de otimizar o funcionamento de um braço robótico articulado. O estudo conclui que o McDE mostra alto desempenho comparado com o estado da arte nesse campo de estudo.

Segundo Jiang *et al.* (2013) existe atualmente um grande número de métodos analíticos e numéricos que propõe estimar os parâmetros de um modulo solar, um exemplo de parâmetro é a corrente de saturação. É proposto um algoritmo baseado em DE, mas com algumas alterações em suas etapas, como por exemplo, um diferente método para o *crossover*. Esse algoritmo proposto recebe o nome de “*Improved Adaptive Differential Evolution*” (IADE). Segundo o artigo ele apresenta melhores resultados para esse problema do que outros que utilizam técnicas como as de algoritmos genéticos, teoria de enxame, DE convencional, entre outros.

Ursem e Vadstrup (2003) ressaltam a importância da identificação de modelos para sistemas, sendo essa uma etapa fundamental no processo de desenvolvimento de um controle para um sistema. Na engenharia de controle existe uma branda seleção de técnicas para identificação de sistemas lineares, mas não para sistemas lineares. Para esses os parâmetros do modelo podem ser determinados por algoritmos de otimização, minimizando o erro entre a saída do modelo e a grandeza medida. É então aplicada a técnica de DE para identificação do modelo de dois motores por indução, que são utilizados na tubulação de casas.

Gong e Cai (2014) desenvolveu um algoritmo baseado em evolução diferencial

com intuito de aperfeiçoar os parâmetros de uma célula combustível a membrana trocadora de prótons, a abreviação em inglês é PEMFC. Esse trabalho é de grande importância, pois existe cada vez mais uma demanda por soluções de energia limpa, e as células combustíveis não são agressivas ao meio ambiente, não geram muito barulho e são eficientes.

### 2.5.7 Função multi-objetivo

Zhou *et al.* (2011) caracterizam problemas multi-objetivos como problemas que envolvem diversos objetivos conflitantes e para resolução deles gera um conjunto de soluções, chamado de Pareto-ótimo. Eles também comentam sobre a evolução diferencial, que foi primeiramente desenvolvida para resolução de problemas mono-objetivo, mas chamou muita atenção para resolução de problemas multi-objetivo, principalmente por sua simplicidade e eficiência.

Meza (2014) faz um estudo sobre os procedimentos existentes para otimização de problemas multi-objetivo e depois propõe um algoritmo que utiliza da evolução diferencial para resolução desses problemas denominado *Multi-Objective Differential Evolution Algorithm with Spherical Prunning (spMODE)*.

Esse algoritmo utiliza etapas parecidas com as da função diferencial mono-objetivo, mas a etapa de seleção é realizada de uma forma diferente, pois não é só levado em conta o resultado de uma função objetivo, mas sim várias funções objetivo.

Segundo Ticona e Delbém (2008) quando se consideram duas funções, muitas vezes os resultados vão acabar sendo conflitantes e vai ser impossível melhorar uma das duas funções sem piorar a outra.

É utilizado então o conceito de dominância de Pareto para comparar essas funções, Ticona e Delbém (2008) mostram que basicamente dadas duas soluções  $x$  e  $y$ ,  $x$  vai dominar  $y$  se obedecer às seguintes condições:

- Solução  $x$  é no mínimo igual a  $y$  para todas as funções objetivo;
- Solução  $x$  é superior a  $y$  em pelo menos uma função objetivo.

Com isso é possível obter o conjunto de soluções Pareto-ótimo, que contém um conjunto de soluções que não são dominadas entre si considerando os objetivos. Esse conjunto de soluções forma a fronteira de Pareto, e com ela é possível que o

usuário escolha a melhor solução de acordo com suas preferências.

Meza (2014) explica que esse tipo de abordagem para resolução de problemas faz com que o usuário tenha flexibilidade na hora de escolher uma determinada solução, facilitando a tomada de decisões.

## 2.6 GREY WOLF OPTIMIZER

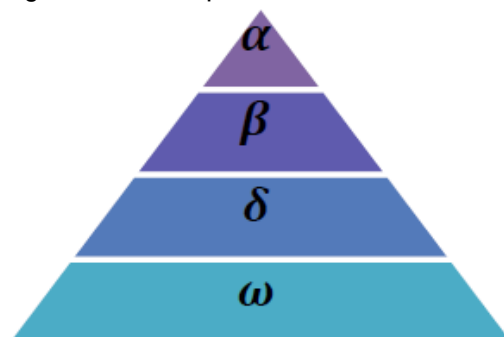
De acordo com Mirjalili *et al.* (2014) o algoritmo Grey Wolf Optimizer foi inspirado no comportamento dos lobos cinzentos, ele tenta imitar o comportamento dos lobos na natureza, como por exemplo a hierarquia de liderança que eles obedecem e o mecanismo de caça. Todas as definições do algoritmo GWO e do comportamento dos lobos cinzentos foram baseadas em Mirjalili (2014).

### 2.6.1 Hierarquia dos lobos cinzentos

Lobos cinzentos são predadores que vivem em grupos de 5 a 12 membros. Eles tem uma hierarquia social dominante, os líderes são chamados de alfas (normalmente um macho e uma fêmea), os alfas normalmente tomam todas as decisões importantes para o grupo.

O segundo e terceiro nível da hierarquia são o Beta e o Delta. O nível mais baixo é chamado de ômega, ele deve obedecer aos lobos dos níveis superiores da hierarquia. A figura 8 mostra a hierarquia dos lobos cinzentos:

Figura 8 - Hierarquia dos lobos cinzentos



Fonte: Mirjalili et al. (2014).

No algoritmo mono-objetivo os lobos alpha, beta e delta representam a melhor solução, a segunda melhor e a terceira melhor, respectivamente.

### 2.6.2 Mecanismo de caça

O mecanismo de caça dos lobos pode ser descrito em três partes:

1. Rastrear, acompanhar e se aproximar da presa;
2. Perseguir, cercar e provocar a presa;
3. Atacar.

O comportamento dos lobos ao cercar a presa pode ser definido pelas seguintes equações:

$$\vec{D} = |\vec{C} \cdot \vec{X}_p(t) - \vec{X}(t)| \quad (2.14)$$

$$\vec{X}(t+1) = \vec{X}_p(t) - \vec{A} \cdot \vec{D} \quad (2.15)$$

Onde, t= iteração atual;

A e C = vetores de coeficiente;

$X_p$  = Vetor de posição da presa;

X= Vetor posição de um lobo.

Os vetores A e C podem ser definidos pelas equações:

$$\vec{A} = 2\vec{a} \cdot \vec{r}_1 - \vec{a} \quad (2.16)$$

$$\vec{C} = 2 \cdot \vec{r}_2 \quad (2.17)$$

Os componentes de  $a$  são linearmente decrescidos de 2 até 0 ao longo das iterações,  $r$  é um vetor aleatório que pode assumir valores entre 0 e 1. O vetor  $a$  modela a terceira parte do mecanismo de caça dos lobos, fazendo com que cada lobo se aproxime cada vez mais da presa. É importante mencionar que quando um valor de A é maior que 1 ou menor que -1 isso vai obrigar com que o lobo se afaste da





A Figura 10 mostra o pseudocódigo para o algoritmo GWO:

Figura 10 - Pseudocódigo do algoritmo GWO

```

Inicia a população de lobos cinzentos  $X_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )
Inicia  $a$ ,  $A$  e  $C$ 
Calcula o valor da função objetivo para cada lobo
 $X_\alpha$  = Lobo com melhor resultado
 $X_\beta$  = Lobo com o segundo melhor resultado
 $X_\delta$  = Lobo com o terceiro melhor resultado
enquanto ( $t < \text{Número máximo de iterações}$ )
    para cada lobo
        Atualiza a posição do lobo de acordo com a equação 2.20
    fim para
    Atualiza  $a$ ,  $A$  e  $C$ 
    Calcula o valor da função objetivo de todos os lobos
    Atualiza  $X_\alpha$ ,  $X_\beta$  e  $X_\delta$ 
     $t = t + 1$ 
fim enquanto
Retorna  $X_\alpha$ 

```

Fonte: Mirjalili et al. (2014).

## 2.7 BAT ALGORITHM

O algoritmo chamado de “*Bat Algorithm*” (BA) foi desenvolvido por Xin-She Yang em 2010 e é um algoritmo baseado no comportamento de ecolocalização dos morcegos, todos os conceitos apresentados nesse capítulo foram baseados nesse trabalho. O algoritmo proposto por Yang tem como objetivo combinar as principais vantagens de algoritmos como “*Firefly Algorithm*” e “*Harmony Search*” e com isso tentar desenvolver um algoritmo mais eficiente.

O comportamento dos morcegos é interessante, pois eles utilizam um tipo de sonar chamado de ecolocalização e com isso conseguem detectar e diferenciar sua presa, desviar de obstáculos e retornar a seu ninho, tudo isso em meio a escuridão total. Basicamente o sonar funciona da seguinte forma, os morcegos emitem um pulso de som que vai bater em todos os objetos ao seu redor, eles então escutam o eco que retorna desses objetos.

Baseado no comportamento dos morcegos Yang define as seguintes regras

para usar como base em seu algoritmo:

1. Os morcegos utilizam da ecolocalização para perceber a distância até objetos, e eles também de alguma forma conseguem diferenciar sua presa de obstáculos que estão no caminho;
2. Morcegos voam randomicamente com uma velocidade  $V_i$  a partir de uma posição  $X_i$  e com uma frequência fixa  $f_{min}$ , variando o comprimento de onda  $\lambda$  e a amplitude  $A_o$  para achar a presa. Eles podem ajustar o comprimento de onda e a taxa de emissão de pulsos ( $r \in [0,1]$ ) de acordo com a proximidade da presa.
3. A amplitude pode variar de diversas formas, mas assume-se que ela varia de um valor positivo  $A_o$  até um valor constante  $A_{min}$ .

O alcance do algoritmo deve ser ajustado para cada problema através do comprimento de onda, começando com um valor alto comparado ao tamanho do domínio de interesse, e depois abaixando esse valor. Como a frequência e o comprimento de onda estão diretamente ligados, é possível ajudar o algoritmo ao problema utilizando a frequência e consequentemente alterando o comprimento de onda. Frequências altas tem um curto comprimento de onda, ou seja, viajam uma curta distância e no caso dos morcegos podem ser utilizadas para achar presas mais que estão mais perto. A figura 11 mostra o pseudocódigo básico do algoritmo e as seções 2.7.1 e 2.7.2 detalham melhor como são tratadas algumas variáveis do problema.

Figura 11 - Pseudocódigo de BA

```

Função objetivo  $f(x)$ ,  $x=(x_1, \dots, x_d)$ 
Inicializa população de morcegos  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) e  $v_i$ 
Defini frequência de pulso  $f_i$  em  $x_i$ 
Inicializa taxa de emissão de pulsos  $r_i$  e amplitude  $A_i$ 
enquanto ( $t < \text{Número máximo de iterações}$ )
  Gera novas soluções através do ajuste da frequência e atualizar
  Velocidades e posição das soluções
    se ( $\text{rand} > r_i$ )
      Seleciona uma solução dentre as melhores soluções
      Gera uma solução local ao redor da melhor solução
    fim se
    Gera uma solução local voando aleatoriamente
    se ( $\text{rand} < A_i \ \& \ f(x_i) < f(x_*)$ )
      Aceita novas soluções
      Incrementa  $r_i$  e diminuir  $A_i$ 
    fim se
  Ranqueia os morcegos e achar a melhor solução atual  $x_*$ 
fim enquanto
Processa resultados e visualização

```

Fonte: Yang (2010).

Analisando o pseudocódigo é possível explicar o funcionamento básico do algoritmo, primeiramente é gerada a população inicial, são definidas as constantes básicas e é definido o morcego com a melhor solução de acordo com a função objetivo. No *loop* principal a posição de todos os demais morcegos é modificada utilizando a frequência, velocidade e posição do morcego com a melhor solução. Alguns morcegos são selecionados de acordo com a taxa de emissão de pulsos e tem suas posições alteradas de uma forma aleatória. Após isso são analisadas as posições de todos os morcegos de acordo com a função objetivo e é escolhido

novamente o melhor morcego.

### 2.7.1 Movimento dos morcegos

Considerando um tempo  $t$ , as equações que definem as posições das possíveis soluções e suas velocidades são:

$$f_i = f_{min} + (f_{max} - f_{min})\beta \quad (2.20)$$

$$v_i^t = v_i^{t-1} + (x_i^t - x_*)f_i \quad (2.21)$$

$$x_i^t = x_i^{t-1} + v_i^t \quad (2.22)$$

onde  $\beta \in [0,1]$  é um vetor aleatório com distribuição uniforme;

A variável  $x_*$  é a melhor solução até o momento. Ela é obtida comparando as soluções de todos os morcegos.

Para forçar a busca local após serem selecionadas as melhores soluções a posição de cada morcego é atualizada, simulando um deslocamento aleatório a partir a seguinte equação:

$$x_{new} = x_{old} + kA^t \quad (2.23)$$

onde  $k \in [-1,1]$  é um número aleatório,  $A^t$  é a media das amplitudes de todos os morcegos,  $x_{new}$  é a posição do novo morcego e  $x_{old}$  a posição do melhor morcego.

Segundo Yang essas equações fazem com que o algoritmo BA seja considerado uma combinação balanceada do PSO padrão e uma intensiva busca local controlada pela amplitude e taxa de emissão de pulsos.

### 2.7.2 Amplitude e taxa de emissão de pulsos

A amplitude e a taxa de emissão de pulsos são atualizadas de acordo com o avanço de iterações. Normalmente após encontrar uma presa, a amplitude do morcego vai diminuir enquanto sua taxa de emissão de pulsos vai aumentar. Pode ser escolhido qualquer valor para amplitude, dependendo do problema, para simplificar vamos assumir valores de  $A_0 = 1$  e  $A_{min} = 0$ , quando A assumir o valor 0 isso quer dizer que o morcego achou uma presa e vai parar de emitir som temporariamente. A amplitude pode ser definida pela seguinte equação:

$$A_i^{t+1} = \alpha A_i^t, \quad r_i^{t+1} = r_i^0 [1 - \exp(-\lambda t)] \quad (2.24)$$

onde  $\alpha$  e  $\lambda$  são constantes.

A escolha dos limites dos parâmetros deve ser feita de forma experimental. Inicialmente cada morcego deve ter valores diferentes de amplitude e taxa de emissão de pulsos, e esses valores vão ser atualizados somente quando sua solução melhorar, fazendo com que todos os morcegos se desloquem em direção a melhor solução.

A atualização da amplitude e taxa de emissão são apresentadas em Yang (2010) mas não são implementadas no algoritmo proposto por ele.

## 2.8 PARTICLE SWARM OPTIMIZATION

O Algoritmo PSO foi primeiramente apresentado em Kennedy e Eberhart (1995), desde então diversas variações do algoritmo foram criadas. Basicamente o algoritmo simula em enxame de partículas que voam em um determinado domínio definido buscando a melhor solução global para um problema, os resultados encontrados pelas partículas influenciam a movimentação das outras partículas. Cada partícula se move respeitando equações simples de velocidade e posição.

Primeiramente é iniciada a população, cada partícula recebe um valor aleatório para sua posição e também para sua velocidade, respeitando limites estabelecidos de acordo com o problema em questão e também a dimensão do problema. Ao longo das iterações é avaliada a solução fornecida pelos parâmetros de cada partícula e o melhor resultado alcançado por cada partícula é chamado de *Personal Best* enquanto o

melhor resultado geral é chamado de *Social Best*.

As partículas mantêm a inércia e se deslocam na direção do seu *Personal Best* e do *Social Best*, respeitando a seguinte equação para  $k$  iterações:

$$\vec{v}_i(k+1) = w\vec{v}_i(k) + c_1\vec{r}_{i1}(k) \cdot (\vec{p}_i(k) - \vec{x}_i(k)) + c_2\vec{r}_{i2}(k) \cdot (\vec{g}(k) - \vec{x}_i(k)) \quad (2.24)$$

onde  $x$  = vetor posição de cada partícula;

$v$  = vetor velocidade de cada partícula;

$p$  = *Personal Best* de cada partícula;

$s$  = *Social Best*;

$w$  = Peso de inércia;

$c$  = Constantes de aceleração;

$r$  = Vetores aleatórios.

A variável de inércia foi incluída na equação com o objetivo de reduzir a velocidade ao longo das iterações, fazendo com que as partículas obtenham bons resultados sem se deslocar excessivamente pelo domínio do problema.

Uma desvantagem do PSO é que quando o melhor resultado global não melhora durante algumas iterações, a velocidade faz com que todas as partículas convergem muito rápido para esse ponto, causando uma convergência prematura e consequentemente encontrando uma solução local e não global.

### 2.8.1 Multiobjective Particle Swarm Optimization

A versão multiobjetivo do algoritmo PSO é chamada de *Multiobjective Particle Swarm Optimization (MOPSO)* e foi apresentada por Coello *et al.* (2004). Ele afirma que o algoritmo PSO é particularmente adaptável a otimização multiobjetivo devido a sua velocidade de convergência quando tratando de problemas com apenas um objetivo.

O algoritmo MOPSO é explicado nos 8 passos a seguir :

1. Inicialização da população *POP*: Realizada de forma aleatória e respeitando os limites inferior, superior e o tamanho da população

definido pelo problema, cada membro da população é chamado de partícula;

2. Inicialização da velocidade de cada partícula: Essa velocidade define o quanto cada partícula se descola através do espaço de busca;
3. É avaliada cada partícula de acordo com a função objetivo definida e após isso são avaliadas as partículas e classificadas como dominadas ou não dominadas;
4. São armazenadas as posições das partículas não dominadas no vetor *REP* (Repositório);
5. São gerados hipercubos do espaço de busca explorado até o momento, utilizando esses hipercubos como um sistema de coordenadas para localizar cada partícula, onde as coordenadas das partículas são definidas de acordo com o valor da função objetivo;
6. Inicialização da memória de cada partícula: São armazenadas todas as partículas não dominadas em outro vetor (*PBESTS*) que serve como guia para o deslocamento através do espaço de busca.
7. Começo do loop principal- A velocidade (*VEL*) de cada partícula é atualizada de acordo com a formula:

$$VEL[i] = W * VEL[i] + R_1 * (PBESTS[i] - POP[i]) + R_2 * (REP[h] - POP[i])$$

Onde : *VEL*[i] é a velocidade da partícula na posição i;

*W* é uma constante chamada de peso de inercia;

*R*<sub>1</sub> e *R*<sub>2</sub> são números aleatórios entre 0 e 1;

*PBESTS*[i] é a melhor posição da partícula;

*REP*[h] é o valor guardado no repositório;

São então atualizadas as posições das partículas de acordo com a seguinte equação:

$$POP[i] = POP[i] + VEL[i]$$

Em seguidas são avaliadas todas as novas partículas de acordo com a função objetivo e são armazenadas as novas soluções não dominadas.

8. Fim do loop principal após atingido o número de iterações definido e em seguida é realizada a apresentação dos resultados.

## 2.9 TÉCNICAS ESCOLHIDAS

Durante a secção 2 foram analisados 4 algoritmos, sendo eles:

- *Grey Wolf Optimizer (GWO)*;
- *Bat Algorithm (BA)*;
- *Multiobjective Particle Swarm Optimization (MOPSO)* ;
- *Multi-Objective Differential Evolution Algorithm with Spherical Prunning (spMODE)*.

Os algoritmos MOPSO e spMODE foram escolhidos para comparação, são algoritmos multiobjectivos e utilizam técnicas que foram propostas em 1995, ambos já foram foco de diversos estudos. Os algoritmos BA e GWO conseguem otimizar apenas um objetivo de cada vez e são algoritmos propostos mais recentemente, por esses motivos foram escolhidos como foco dessa tese, onde são propostas versões multiobjectivo para os dois.



### 3 METODOLOGIA

De acordo com a seção 2.4.1 os problemas apresentados pelos algoritmos aplicados a otimização de portfólios podem ser resumidos como:

1. Não há foco suficiente nos aspectos financeiros do problema;
2. Problemas na análise de risco do portfólio;
3. Problemas nos resultados apresentados pela fronteira de Pareto;
4. Falta de incorporação de preferências ao algoritmo, gerando resultados muito generalizados;
5. Número insuficiente de objetivos;
6. Otimização de um portfólio quando considerados muitos investimentos e sem utilizar um algoritmo de otimização se torna demorada.

Com o intuito de resolver esses problemas os algoritmos *spMODE*, *PSO*, *Grey Wolf Optimizer* e *Bat Algorithm* serão adaptados para o problema de otimização de portfólios e no caso do GWO e BA serão desenvolvidas duas novas versões dos algoritmos com um foco multiobjetivo. Foram selecionados esses algoritmos por serem algoritmos recentes da área de otimização. A técnica *Spherical Prunning* foi utilizada para refinar os resultados, as definições da técnica podem ser encontradas em Meza (2014).

A seção 3.1 apresenta como esses problemas são resolvidos, na seção 3.2 são apresentadas as especificações, restrições e funções objetivo do problema em questão, na seção 3.3 são explicadas as modificações aplicadas para adaptar os algoritmos GWO e BA a problemas multiobjetivo, na seção 3.4 é feita a análise dos ativos utilizados para os testes e na seção 3.5 são apresentadas as medias de comparação utilizadas para definir o algoritmo com melhor performance.

#### 3.1 RESOLUÇÃO DOS PROBLEMAS

A primeira preocupação foi em relação aos aspectos financeiros do problema, para isso os portfólios gerados pelos algoritmos primeiramente serão refinados pela técnica *Spherical pruning* a cada iteração, o que também ajuda a melhorar os resultados apresentados pela fronteira de Pareto. Após finalizadas todas as iterações

são utilizados o risco e o retorno de cada portfólio para classificar os portfólios de acordo com 3 perfis de investidor, sendo eles, conservador, balanceado e agressivo.

Foram escolhidas três restrições para o problema, com o objetivo de limitar os pesos de cada ativo de acordo com o total investido, não apresentar ativos com pesos negativos e estabelecer um peso mínimo para cada ativo que compõe o portfólio.

O risco é analisado de acordo com a covariância entre os valores de fechamento dos ativos, com isso é possível obter um portfólio balanceado independente dos tipos de investimento que o compõe.

### 3.2 ESPECIFICAÇÕES DO PROBLEMA MULTIOBJETIVO

O problema analisado nesse trabalho é o de otimização de portfólio de investimentos e ele tem duas funções objetivo, o primeiro é o risco do portfólio e o segundo é o retorno do portfólio. Para alcançar esses objetivos cada possível solução vai ser composta por um número de parâmetros igual ao número de investimentos selecionados para análise, cada parâmetro representa a porcentagem do total investido que é alocada a cada investimento. O problema pode ser matematicamente descrito da seguinte forma:

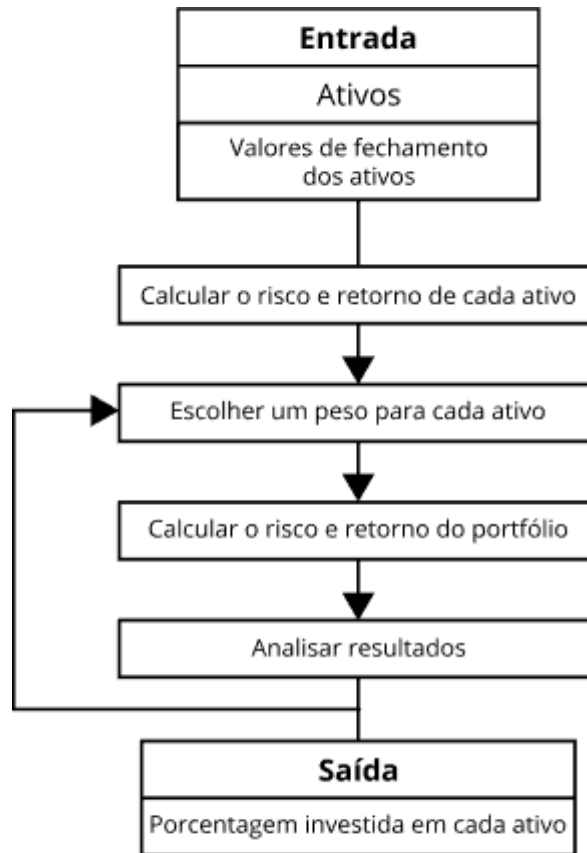
$$\text{Minimizar: } y(x) = [Y_1(x) = \textit{Retorno}, Y_2(x) = \textit{Risco}] \quad (3.1)$$

Onde :  $0 \leq x_i < 100, \forall i = \{1, 2, \dots, N\}$ ;

Dim(x) representa o número de investimentos.

Os cálculos do retorno e risco do portfólio foram explicados nas seções 2.3.1 e 2.3.2. A figura 13 mostra o processo de otimização de um portfólio sem a utilização de um algoritmo de otimização:

Figura 13 - Fluxograma de otimização



O problema de otimização contém três restrições. A primeira determina que o somatório dos ativos deve resultar em 100%, ou seja:

$$g_1: \sum_{i=1}^N x_i = 100 \quad (3.2)$$

Dessa forma, garante-se que o portfólio seja completamente preenchido.

A segunda restrição determina que o portfólio não pode ser composto por ativos com valores negativos, ou seja:

$$g_2: x_i > 0, \forall i = \{1, 2, \dots, N\}. \quad (3.3)$$

A última restrição faz com que se for investido alguma porcentagem em um

ativo, então o mínimo de investimento é de 0,01%, ela obtém isso transformando os valores inferiores a 0,01% em 0,01% e retirando o valor que faltou dos demais investimentos. Esse valor pode ser alterado de acordo com o investidor.

Um procedimento preliminar é realizado antes da utilização dos pesos dos ativos determinados pelo algoritmo de otimização. Primeiramente, a soma dos pesos dos ativos é verificada. Caso essa soma seja maior que 1, então o valor sobressalente é dividido pelo número de ativos do portfólio; caso todos os ativos tenham peso maior que essa parcela, ela então o valor é subtraído de todos os pesos; caso contrário, o valor sobressalente é dividido novamente, mas desta vez pelo número de ativos do portfólio que são maiores que o resultado da divisão e em seguida é realizada a subtração.

Após isso é verificado se a soma dos pesos é menor que 1: se for, então a diferença é dividida igualmente entre todos os ativos. Caso algum dos pesos acabe assumindo um valor negativo, o mesmo é, então, igualado a zero. Finalmente, são analisados os pesos com valores menores que 0,01 %. Os mesmos são igualados a zero e seu valor é somado ao ativo com maior peso.

Para garantir todas essas restrições foi implementada uma função chamada de SOMA1.

### 3.3 MODIFICAÇÕES NO ALGORITMO GWO

O algoritmo GWO foi criado para resolver problemas mono-objetivo, é proposto então um novo algoritmo baseado no GWO, ele foi nomeado como spGWO e diferente do seu antecessor ele resolve problemas com  $n$  objetivos. Para isso são necessárias algumas mudanças no algoritmo.

Primeiro a maneira como é analisado o melhor resultado de cada objetivo, pois em problemas multiobjective não é possível simplesmente analisar o melhor valor encontrado e dizer que essa é a melhor solução, é preciso analisar a combinação de vários objetivos. Para isso é utilizada a fronteira de Pareto.

Para implementar a fronteira de Pareto retiramos o conceito de alfa, beta e delta e passamos a chamar todos os resultados fornecidos pela fronteira de Pareto de alfas, ou seja, a posição estimada da presa e conseqüentemente a nova posição de cada solução não é determinada por uma combinação da posição de um alfa, um beta e um delta, mas por todas as soluções da fronteira de Pareto. A nova equação que

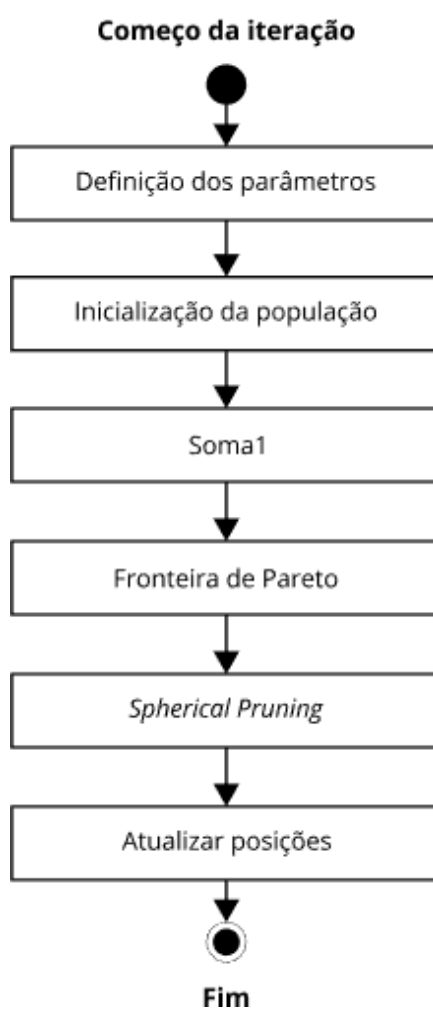
determina esse comportamento é descrita a seguir:

$$X = \frac{\sum_i^N X_i}{N} \quad (3.4)$$

Onde : N é o número de alfas.

A figura 14 mostra o fluxograma do algoritmo spGWO para uma iteração:

Figura 14 - Fluxograma para spGWO



Dois parâmetros precisam ser configurados antes da otimização, sendo eles:

1. Número de lobos;
2. Maximo número de iterações.

### 3.4 MODIFICAÇÕES NO ALGORITMO BA

O algoritmo BA foi proposto para resolver problemas com apenas um objetivo, nesse trabalho é proposta uma versão multi-objetivo do algoritmo BA, chamada de spBA.

Como no algoritmo spGWO é necessária a implementação da fronteira de Pareto, para isso são necessárias algumas alterações no comportamento dos morcegos. Na versão original a posição do morcego com a melhor solução até o momento tem influência sobre a posição de todos os morcegos, no algoritmo proposto não temos apenas um morcego com a melhor solução, todos os morcegos da fronteira de Pareto são considerados as melhores soluções.

Sendo assim é apresentada uma nova equação para o valor da melhor solução, que vai influenciar a posição de todos os morcegos, ela é um somatório da posição de todos os morcegos da fronteira de Pareto dividido pelo número de morcegos da mesma, como mostra a equação 3.5.

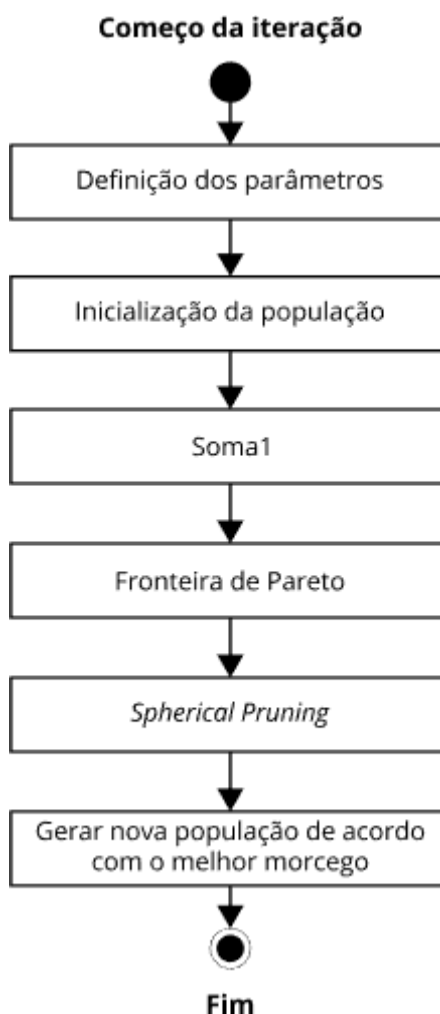
$$Melhor\ Morcego = \frac{\sum_i^N P_i}{N} \quad (3.4)$$

Onde: P é a população de Pareto;

N é o número de indivíduos em P;

A Figura 15 apresenta o fluxograma do algoritmo spGWO.

Figura 15 - Fluxograma para spGWO



### 3.5 ATIVOS UTILIZADOS

Os ativos foram retirados das ações com melhor desempenho da Fortune 500 e das sugestões de bons investimentos para 2013 segundo as análises dos sites Kiplinger e InvestorPlace. A Fortune 500 é uma lista que mostra a classificação das 500 maiores corporações ao redor do mundo, tendo a receita como medida para a comparação. Todos os ativos escolhidos se enquadram na dos investimentos de renda variável.

Ativos da Fortune 500:

*R.R. Donnelley* (RRD)

Fornece soluções integradas de comunicação para o setor público e privado ao

redor do mundo.

Retorno= 17,55 %

Risco= 1,64%

*Freddie Mac (FMCC)*

Empresa que atua oferecendo garantia de credito para hipotecas residenciais dentro dos Estados Unidos.

Retorno=39,81%

Risco= 5,38%

*Global X Funds Greece (GREK)*

É um ativo que tem seus investimentos aplicados no catalogo FTSE/Athex 20.

Retorno=69,63%%

Risco=2,49%

*Zynga (ZNGA)*

É uma desenvolvedora de jogos localizada na Califórnia, trabalho com o desenvolvimento de jogos online e também aplicativos de redes sociais.

Retorno=48,50%

Risco=3,17%

*Fortress Investment Group LLC (FIG)*

É uma firma de gestão de investimentos, que tem seu investimento altamente diversificado ao redor do mundo.

Retorno= 7,61%

Risco=1,96%

*Twitter (TWTR)*

Plataforma global de conversação em tempo real.

Retorno= 88,18%

Risco= 3,71%

*Express (EXPR)*



Empresa que vende roupas e acessórios masculinos e femininos para faixa etária de 20 a 30 anos.

Retorno=28,86%

Risco= 2,66%

#### *International Business Machines (IBM)*

Empresa dos estados unidos que opera na área de informática, mais especificamente na área de Tecnologia da Informação.

Retorno=15,64%

Risco= 1,08%

#### *Glu Mobile (GLU)*

Empresa que desenvolve, publica e comercializa jogos para celulares e *tablets*.

Retorno= 0,98%

Risco= 0,63%

As Tabelas 4 e 5 apresentam os ativos ordenados de acordo com seu risco e seu retorno respectivamente.

Tabela 4 - Ativos ordenados pelo Risco

| Ativo | Retorno | Risco |
|-------|---------|-------|
| GLU   | 0,98%   | 0,63% |
| IBM   | 15,64%  | 1,08% |
| RRD   | 17,55%  | 1,64% |
| FIG   | 7,61%   | 1,96% |
| GREK  | 69,63%  | 2,49% |
| EXPR  | 28,86%  | 2,66% |
| ZNGA  | 48,50%  | 3,17% |
| TWTR  | 88,18%  | 3,71% |
| FMCC  | 39,81%  | 5,38% |

Tabela 5 - Ativos ordenados pelo retorno

| Ativo | Retorno | Risco |
|-------|---------|-------|
| TWTR  | 88,18%  | 3,71% |
| GREK  | 69,63%  | 2,49% |
| ZNGA  | 48,50%  | 3,17% |
| FMCC  | 39,81%  | 5,38% |
| EXPR  | 28,86%  | 2,66% |

|            |        |       |
|------------|--------|-------|
| <b>RRD</b> | 17,55% | 1,64% |
| <b>IBM</b> | 15,64% | 1,08% |
| <b>FIG</b> | 7,61%  | 1,96% |
| <b>GLU</b> | 0,98%  | 0,63% |

### 3.6 MEDIDAS DE AVALIAÇÃO E PERFIS DO INVESTIDOR

Para realizar as comparações entre a performance dos algoritmos será utilizado o conceito de Hipervolume, quanto maior o Hipervolume melhor a performance do algoritmo. Essa medida calcula o espaço ocupado por dada Fronteira de Pareto em relação a um domínio definido, ou seja, o melhor algoritmo cobrira um espaço maior desse domínio, gerando assim mais soluções, no caso do problema de portfólio de investimentos isso é bom, pois a preferência do investidor varia muito então ele precisa ter um vasto número de portfólios para escolher. Isso faz com que uma execução do algoritmo de otimização com um grande e diversificado número de ativos possa gerar portfólios para vários perfis diferentes de investidor.

Após obtidos os resultados eles serão utilizados como entrada para um algoritmo chamado TInvestidor, que utiliza o retorno e o risco para dividir os portfólios gerados em 3 grupos de investidor, é utilizado o portfólio com maior retorno e o com menor risco, a partir disso são feitas as seguintes definições:

- **Agressivo** – O perfil agressivo deve priorizar o retorno, não levando tanto em consideração o risco do portfólio, sendo assim serão considerados agressivo os portfólios com retorno em até 40% menor que o portfólio com maior retorno.
- **Conservador** – O perfil conservador deve priorizar o risco do portfólio, por isso serão considerados portfólios conservadores os portfólios com risco em até 20% maiores que o portfólio com menor risco.
- **Balanceado** – Todos os demais portfólios serão considerados balanceados.

As porcentagens utilizadas podem ser modificadas pelo usuário de acordo com sua preferência e os resultados levam em consideração apenas os riscos e retornos de portfólios compostos pelos ativos utilizados nos algoritmos.

## 4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

Para os cálculos foi utilizado o valor de fechamento dos ativos, e as principais variáveis foram a variância e o retorno, o período de amostragem utilizado foi o de 01 de janeiro de 2014, até 01 de janeiro de 2015, totalizando assim 1 ano. Sendo assim todos os resultados apresentados de retorno e risco são resultados anualizados.

Foram realizados duas séries de testes, na primeira foram escolhidos 2 ativos, sendo eles, RRD e TWTR, essa primeira parte tem como objetivo facilitar a visualização dos resultados. A segunda série de testes tem como objetivo analisar o desempenho dos algoritmos, para isso foram escolhidos 10 ativos.

### 4.1 TESTES COM 2 ATIVOS

Os ativos escolhidos foram RRD e TWTR, o primeiro tem valores menores para o retorno e o risco enquanto o segundo tem valores superiores. As Figuras 16 e 17, respectivamente, apresentam os valores de risco e retorno dos dois ativos.

Figura 16- Representação do retorno para 2 ativos

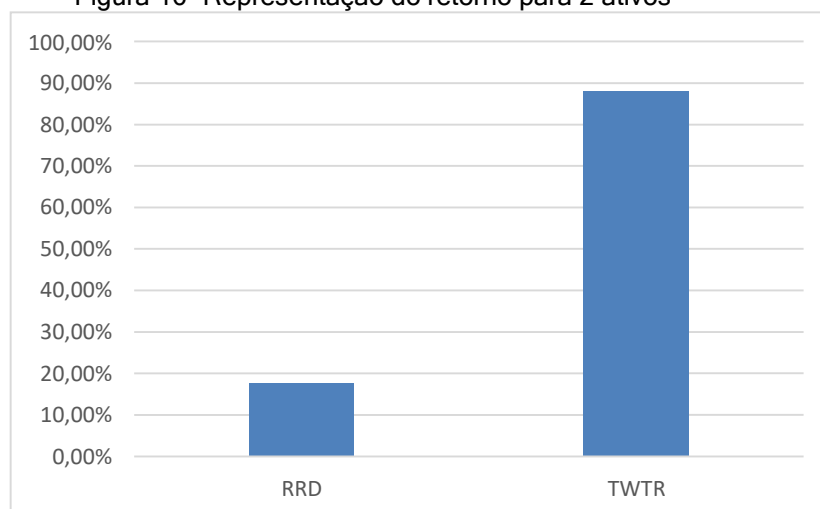
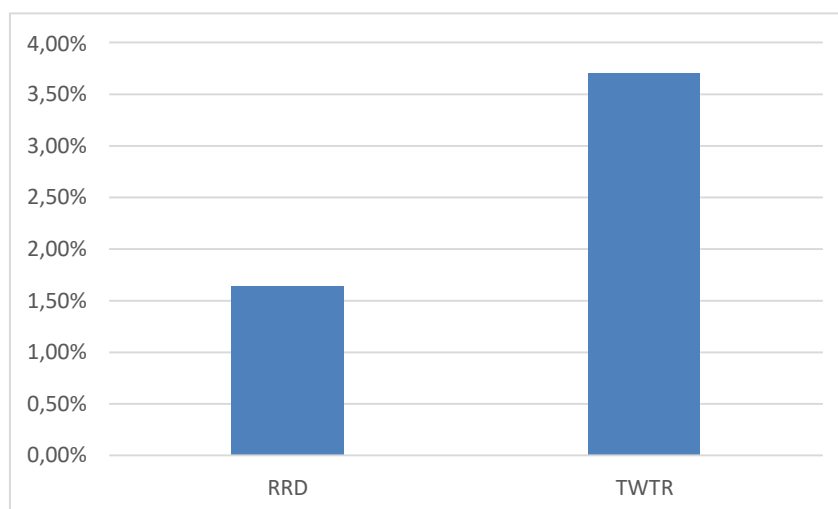


Figura 17 - Representação do risco para 2 ativos



A Tabela 6 apresenta os valores de risco e retorno de cada ativo.

Tabela 6 - Retorno e risco dos ativos

|         | RRD    | TWTR   |
|---------|--------|--------|
| Retorno | 0,1755 | 0,8818 |
| Risco   | 0,0164 | 0,0371 |

Em seguida foram executados os algoritmos spGWO ,spMODE ,spBAT e PSOMO utilizando esses ativos, cada algoritmo foi executado 50 vezes e as principais configurações relativas a cada algoritmo são apresentadas a seguir:

- spGWO - População de 120 lobos e máximo de 500 iterações;
- spMODE - Fator modificador de 0,7, taxa de crossover de 0,7 e máximo número de avaliações da função objetivo em 10000.
- spBAT - População de 40 morcegos, 1000 gerações, 0,5 de amplitude e 0,5 de taxa de emissão de pulsos.
- PSOMO - Máximo número de iterações igual a 10, população de 100 partículas e repositório de 50 partículas.

Os resultados foram então comparados através do seus hipervolume, a Tabela 7 mostra os resultados referentes aos valores de melhor resultado obtido, pior resultado, média dos resultados e desvio padrão, em verde estão representados os melhores resultados para cada uma das categorias. Nas categorias melhor, pior e média o objetivo é obter o maior valor enquanto na categoria desvio padrão o objetivo é obter o menor valor.

Tabela 7 - Hipervolume

|               | <b>Melhor</b> | <b>Pior</b> | <b>Média</b> | <b>Desvio Padrão</b> |
|---------------|---------------|-------------|--------------|----------------------|
| <b>spGWO</b>  | 0,7309        | 0,7300      | 0,7303       | 0,0002               |
| <b>PSOMO</b>  | 0,7473        | 0,7115      | 0,7343       | 0,0080               |
| <b>spBAT</b>  | 0,7881        | 0,5983      | 0,7057       | 0,0437               |
| <b>spMODE</b> | 0,7644        | 0,6838      | 0,7334       | 0,0168               |

O algoritmo spGWO conseguiu o melhor resultado quando analisado o pior resultado e o desvio padrão, com isso pode-se afirmar que ao rodar o algoritmo várias vezes os resultados sempre estarão próximos um do outro, sendo assim o algoritmo se torna mais confiável. Ele obteve uma média próxima a melhor média, o único resultado inferior foi na categoria melhor resultado.

O algoritmo spBAT teve os piores resultados em todas as categorias com exceção da categoria melhor resultado, onde ele obteve o maior valor. O desvio padrão ficou significativamente acima dos demais algoritmos, isso indica que o algoritmo spBAT está buscando os resultados de uma forma aleatória e é necessária uma análise mais a fundo de suas variáveis e de seu sistema de busca.

As Figuras 18,19,20 e 21, respectivamente mostram o gráfico com a fronteira de Pareto para cada algoritmo e a Figura 22 mostra todas as fronteiras de Pareto (em relação ao melhor resultado obtido).

Figura 18 - Fronteira de Pareto do algoritmo spGWO

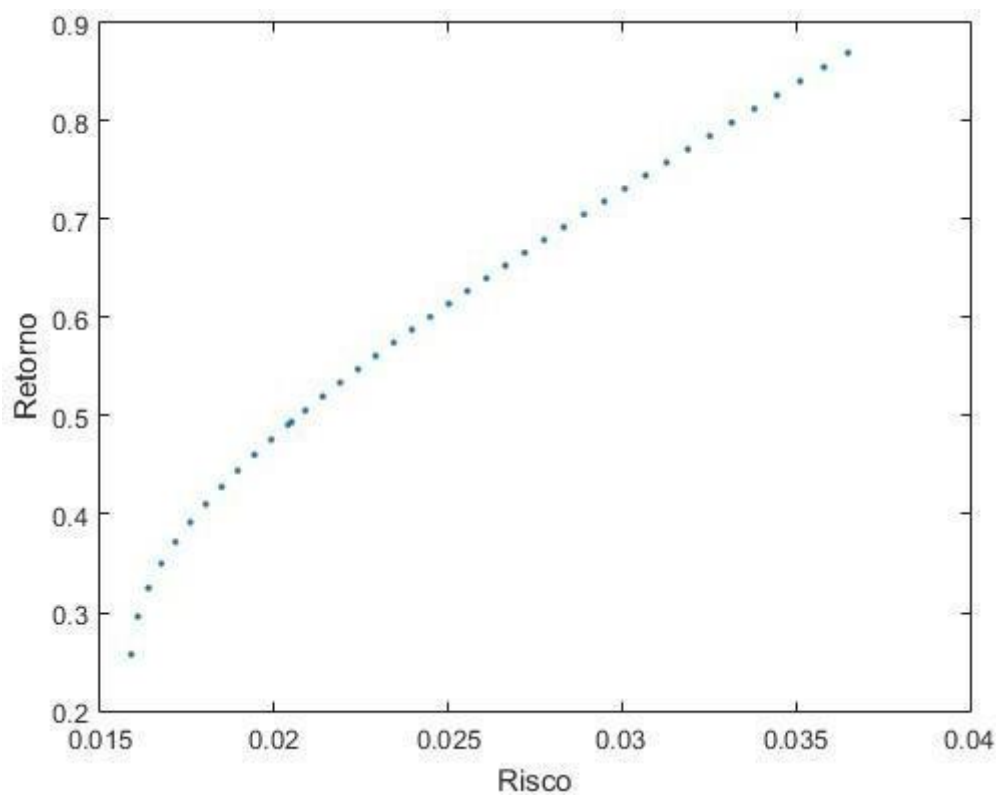


Figura 19 - Fronteira de Pareto do algoritmo PSOMO

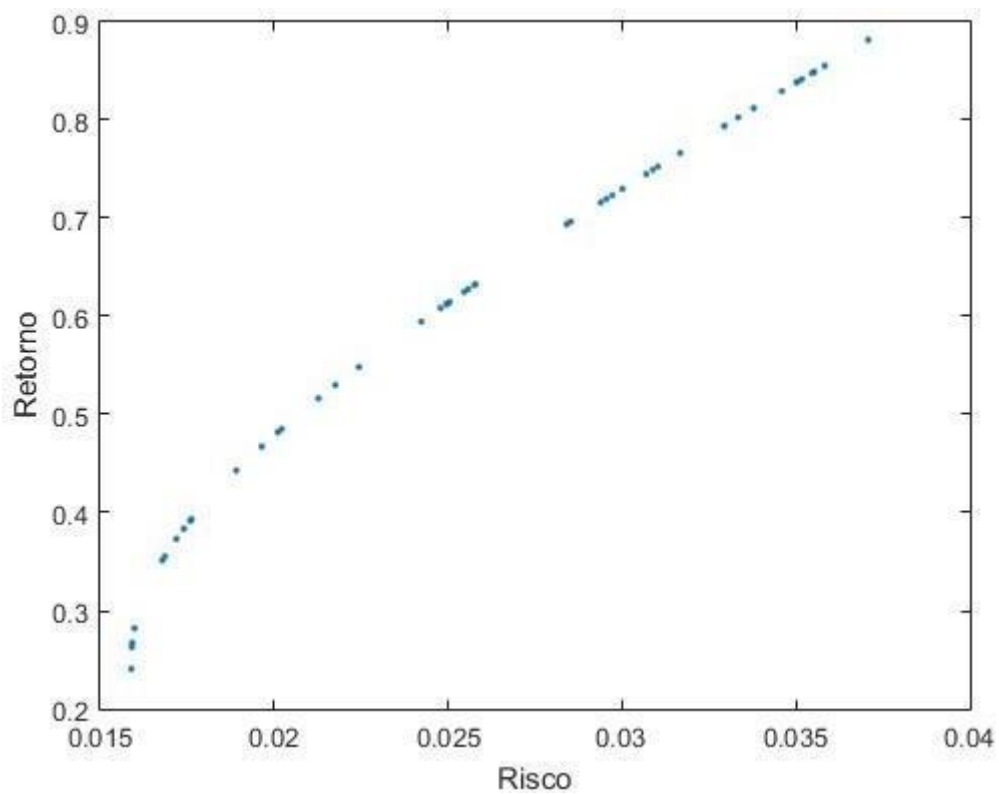


Figura 20 - Fronteira de Pareto do algoritmo spBAT

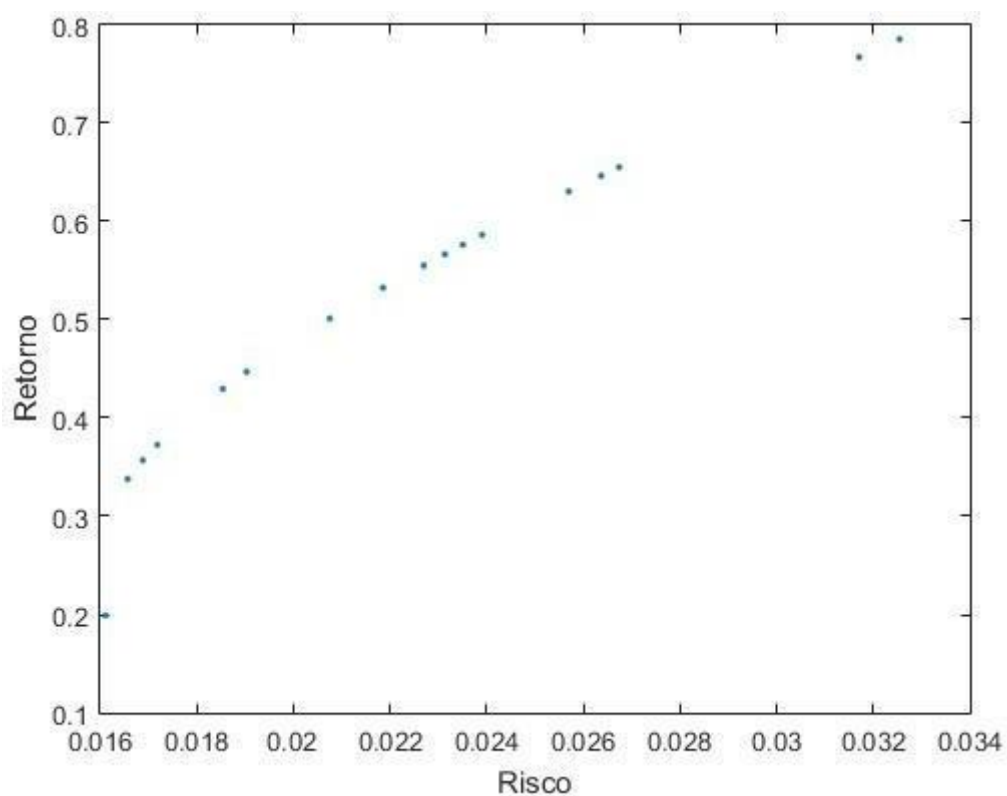
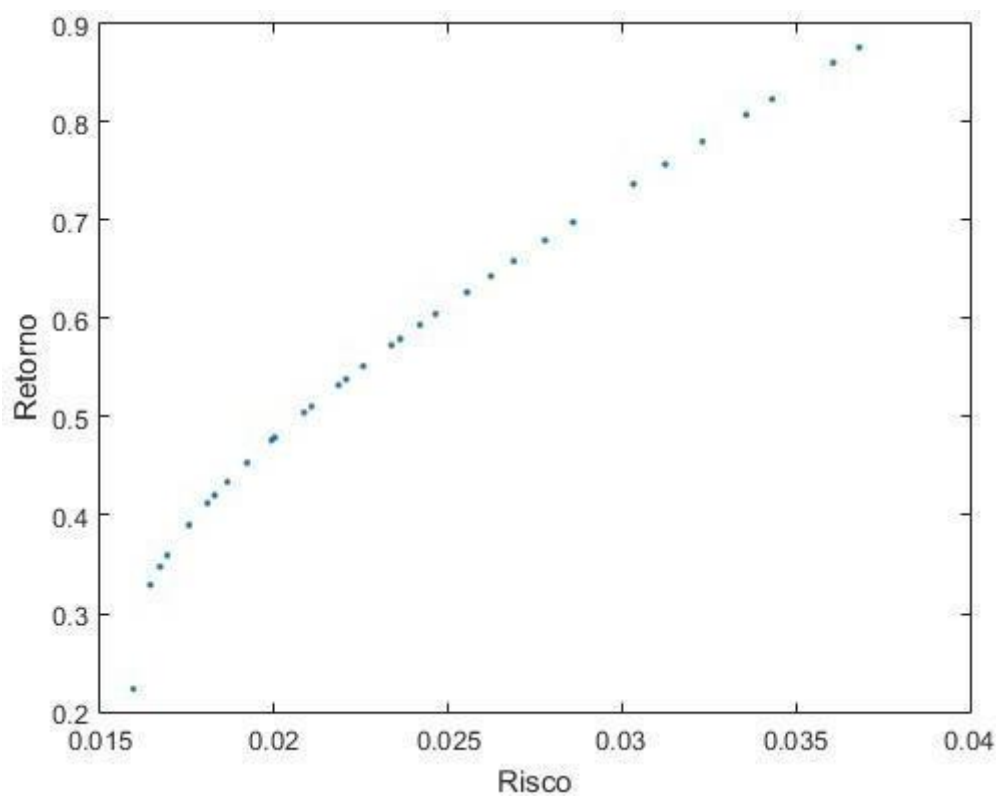


Figura 21 - Fronteira de Pareto do algoritmo spMODE



As tabela 8 e 9 apresentam os pesos atribuídos aos ativos para o portfólio com

maior retorno e menor risco, considerando a melhor execução do algoritmo em relação ao hipervolume:

Tabela 8 - Pesos 2 ativos para maior retorno

|        | RRD    | TWTR   | Retorno | Risco  |
|--------|--------|--------|---------|--------|
| spGWO  | 0,0173 | 0,9827 | 0,8696  | 0,0365 |
| spBA   | 0,1517 | 0,8483 | 0,7747  | 0,0320 |
| spMODE | 0      | 1      | 0,8818  | 0,0371 |
| MOPSO  | 0      | 1      | 0,8818  | 0,0371 |

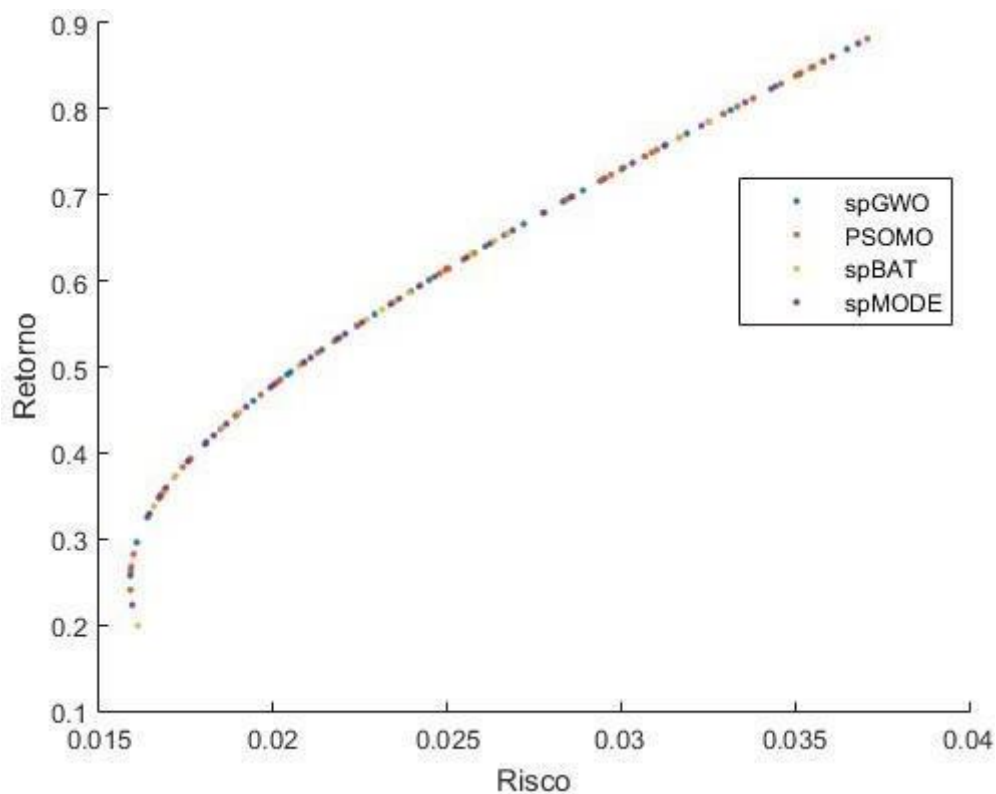
Tabela 9 - Pesos 2 ativos para menor risco

|        | RRD    | TWTR   | Retorno | Risco  |
|--------|--------|--------|---------|--------|
| spGWO  | 0,8842 | 0,1158 | 0,2573  | 0,0159 |
| spBA   | 0,7892 | 0,2108 | 0,3244  | 0,0164 |
| spMODE | 0,9176 | 0,0824 | 0,2337  | 0,0159 |
| MOPSO  | 0,8699 | 0,1301 | 0,2674  | 0,0159 |

Analisando as Tabelas 8 e 9 respectivamente, conclui-se que sempre que o portfólio gerado tem um retorno maior ele coloca mais peso no ativo TWTR (ativo com maior retorno) e sempre que o portfólio gerado tem um risco menor, ele coloca mais peso no ativo RRD (ativo com menor risco). Também observa-se que apesar de os algoritmos spGWO, spMODE e MOPSO terem atingido os menores valores para o risco, os pesos distribuídos entre os ativos é diferente, isso ocorre por causa do conceito de covariância. Existe mais de um jeito de atingir um determinado risco, vai depender da distribuição dos pesos, o que vai modificar seu retorno.



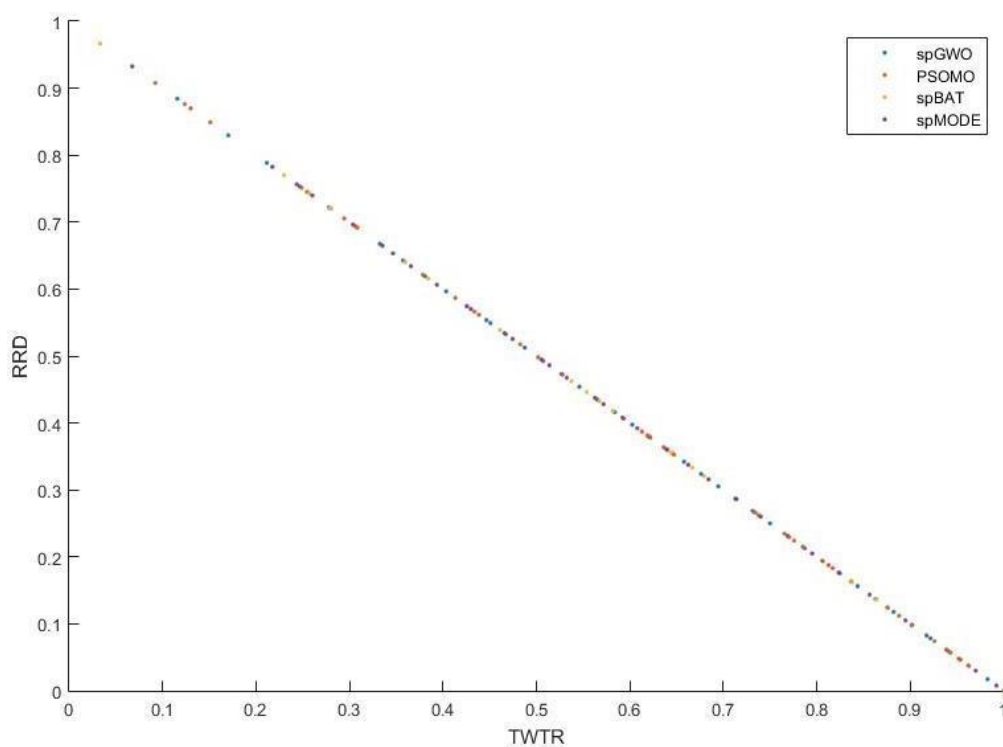
Figura 22 - Comparativo das fronteiras de Pareto



É possível observar que o algoritmo spGWO é o que apresenta a fronteira de Pareto mais bem distribuída, quando se tratando de investimentos isso é uma vantagem importante, pois é necessário fornecer ao investidor portfólios com diversas combinações de risco e retorno.

A Figura 23 mostra o peso atribuído a cada ativo para todos os algoritmos.

Figura 23 - Comparativo do peso para 2 ativos



O número de portfólios gerados (fronteira de Pareto) para cada algoritmo foi:

- spGWO = 41;
- spBA = 17;
- spMODE = 39;
- MOPSO = 50.

As Figuras 24 e 25 apresentam os portfólios com o menor valor para risco obtido e maior valor para retorno obtido. O maior retorno foi obtido por todos os algoritmos exceto o algoritmo spGWO e spBAT e o menor risco foi obtido por todos os algoritmos exceto pelo algoritmo PSOMO. O fato do algoritmo spGWO não ter atingido o portfólio com maior retorno não é tão grave, pois esse resultado é atingido colocando todo peso no ativo com maior retorno, o que é facilmente calculado sem precisar da ajuda de um algoritmo. O maior problema é quando o menor risco não é obtido, pois esse cálculo é obtido através da variância e covariância dos ativos e não apenas colocando todo peso no ativo com menor risco.

Figura 24 - Representação do portfólio com maior retorno

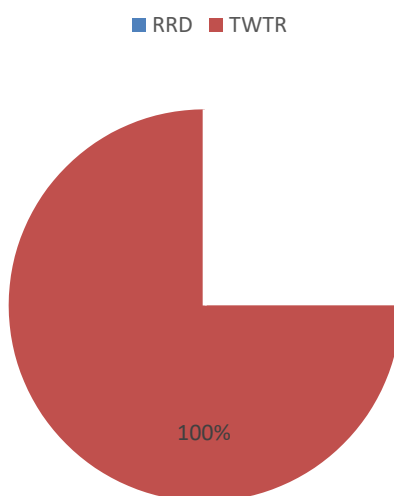
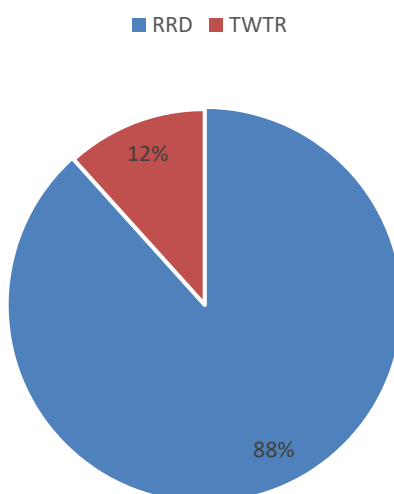


Figura 25 - Representação do portfólio com menor risco

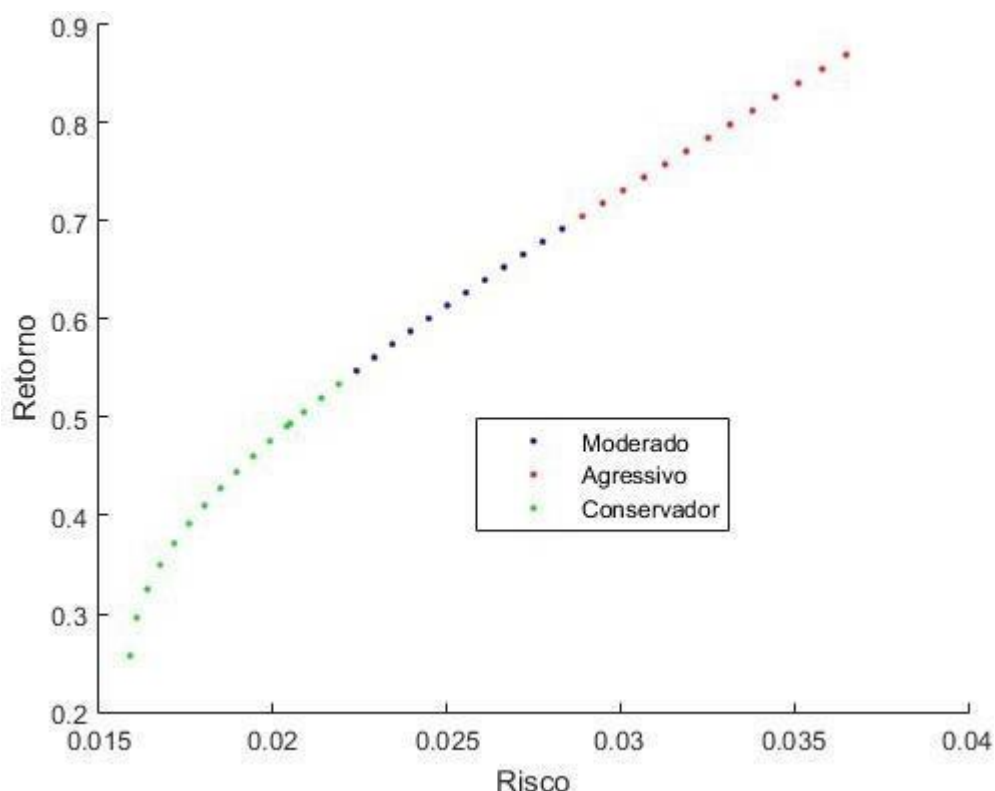


#### 4.1.1 Divisão em tipo de investidor para dois ativos

Para dividir os portfólios entre os três tipos possíveis (Agressivo, moderado e conservador) foi utilizado o melhor resultado do algoritmo spGWO . Foi utilizado esse resultado devido à boa distribuição de portfólios fornecida pelo algoritmo spGWO.

A Figura 26 apresenta a fronteira de Pareto com os resultados divididos em tipo de investidor:

Figura 26 - Divisão em tipo de investidor para 2 ativos



Tendo em mãos esse tipo de gráfico fica mais fácil para o investidor escolher a carteira ideal para ele. O índice de Sharpe é outra ferramenta que facilita a escolha do investidor, pois ela mostra quanto de retorno a mais está recebendo devido ao excesso de risco que está aplicando em seu portfólio. A Tabela 10 apresenta o índice de Sharpe dos portfólios gerados, eles foram numerados de 1 até 41 da esquerda para direita de acordo com a Figura 26, as cores da coluna id identificam o tipo de investidor de acordo com a Figura 26.

Tabela 10 - Índice de Sharpe considerando 2 ativos

| Id | RRD    | TWTR   | Retorno | Risco  | Sharpe  |
|----|--------|--------|---------|--------|---------|
| 1  | 0,8842 | 0,1158 | 0,2573  | 0,0159 | 9,8621  |
| 2  | 0,8296 | 0,1704 | 0,2958  | 0,0161 | 12,1453 |
| 3  | 0,7884 | 0,2116 | 0,3249  | 0,0164 | 13,6933 |
| 4  | 0,7532 | 0,2468 | 0,3498  | 0,0168 | 14,8745 |
| 5  | 0,7221 | 0,2779 | 0,3718  | 0,0172 | 15,8042 |
| 6  | 0,6938 | 0,3062 | 0,3918  | 0,0176 | 16,557  |
| 7  | 0,6675 | 0,3325 | 0,4103  | 0,018  | 17,1775 |
| 8  | 0,6427 | 0,3573 | 0,4279  | 0,0185 | 17,7014 |
| 9  | 0,6194 | 0,3806 | 0,4443  | 0,019  | 18,1398 |
| 10 | 0,5965 | 0,4035 | 0,4605  | 0,0194 | 18,5228 |
| 11 | 0,5746 | 0,4254 | 0,4759  | 0,0199 | 18,8508 |

|    |        |        |        |        |         |
|----|--------|--------|--------|--------|---------|
| 12 | 0,5535 | 0,4465 | 0,4909 | 0,0204 | 19,1327 |
| 13 | 0,5492 | 0,4508 | 0,4939 | 0,0205 | 19,1869 |
| 14 | 0,5328 | 0,4672 | 0,5055 | 0,0209 | 19,3802 |
| 15 | 0,5125 | 0,4875 | 0,5198 | 0,0214 | 19,5962 |
| 16 | 0,4927 | 0,5073 | 0,5338 | 0,0219 | 19,7848 |
| 17 | 0,4732 | 0,5268 | 0,5475 | 0,0224 | 19,9502 |
| 18 | 0,454  | 0,546  | 0,5611 | 0,0229 | 20,0962 |
| 19 | 0,435  | 0,565  | 0,5746 | 0,0234 | 20,2254 |
| 20 | 0,4162 | 0,5838 | 0,5878 | 0,024  | 20,3393 |
| 21 | 0,3975 | 0,6025 | 0,601  | 0,0245 | 20,4398 |
| 22 | 0,3789 | 0,6211 | 0,6142 | 0,025  | 20,5292 |
| 23 | 0,3605 | 0,6395 | 0,6272 | 0,0256 | 20,6075 |
| 24 | 0,3421 | 0,6579 | 0,6402 | 0,0261 | 20,677  |
| 25 | 0,3237 | 0,6763 | 0,6532 | 0,0266 | 20,7385 |
| 26 | 0,3053 | 0,6947 | 0,6662 | 0,0272 | 20,7925 |
| 27 | 0,287  | 0,713  | 0,6791 | 0,0278 | 20,8399 |
| 28 | 0,2686 | 0,7314 | 0,6921 | 0,0283 | 20,8814 |
| 29 | 0,2501 | 0,7499 | 0,7051 | 0,0289 | 20,9176 |
| 30 | 0,2314 | 0,7686 | 0,7184 | 0,0295 | 20,9491 |
| 31 | 0,2129 | 0,7871 | 0,7314 | 0,0301 | 20,9759 |
| 32 | 0,1941 | 0,8059 | 0,7447 | 0,0307 | 20,9989 |
| 33 | 0,1753 | 0,8247 | 0,758  | 0,0313 | 21,018  |
| 34 | 0,1563 | 0,8437 | 0,7714 | 0,0319 | 21,034  |
| 35 | 0,137  | 0,863  | 0,785  | 0,0325 | 21,0469 |
| 36 | 0,1178 | 0,8822 | 0,7986 | 0,0332 | 21,0569 |
| 37 | 0,098  | 0,902  | 0,8126 | 0,0338 | 21,0645 |
| 38 | 0,0784 | 0,9216 | 0,8265 | 0,0345 | 21,0696 |
| 39 | 0,0583 | 0,9417 | 0,8406 | 0,0351 | 21,0725 |
| 40 | 0,0379 | 0,9621 | 0,8551 | 0,0358 | 21,0734 |
| 41 | 0,0173 | 0,9827 | 0,8696 | 0,0365 | 21,0723 |

Observando a Tabela 10 e a Figura 26 pode-se perceber que quanto maior o retorno, maior o índice de Sharpe. Isso ocorre, pois, o ativo TWTR tem um retorno muito maior que o ativo RRD, enquanto seu risco não é tão superior. Analisando os índices de Sharpe é possível concluir que para esse caso o aumento no retorno compensa o risco a mais assumido.

#### 4.2 TESTES COM 10 ATIVOS

Para o teste com 10 ativos foram selecionados os ativos RRD, TWTR, EXPR, GLU, IBM, ZNGA, FMCC, GREK e FIG. O ativo RRD foi utilizado duas vezes para ver como os algoritmos reagem. As Figuras 27 e 28 apresentam os valores de retorno e

risco de cada um dos ativos.

Figura 27- Retorno 10 ativos

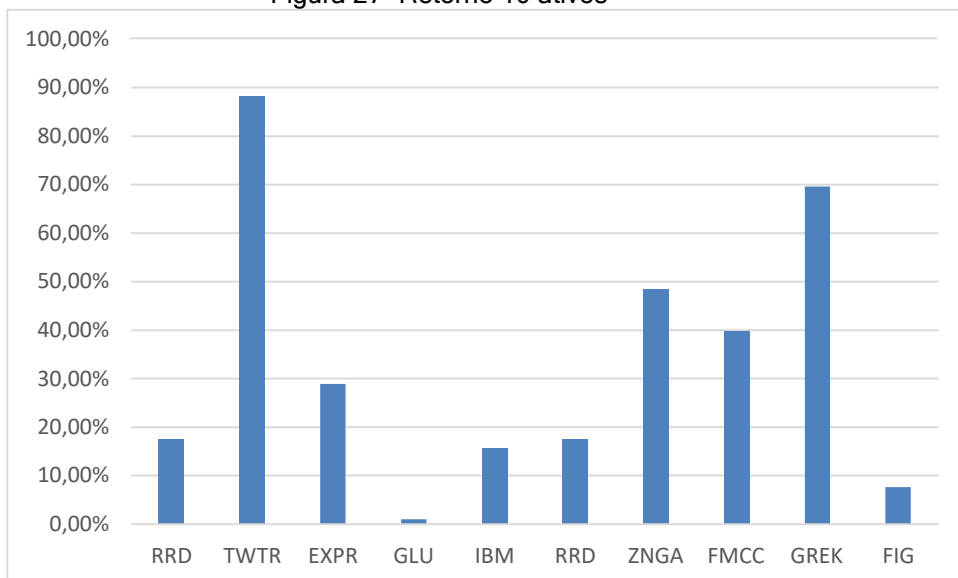
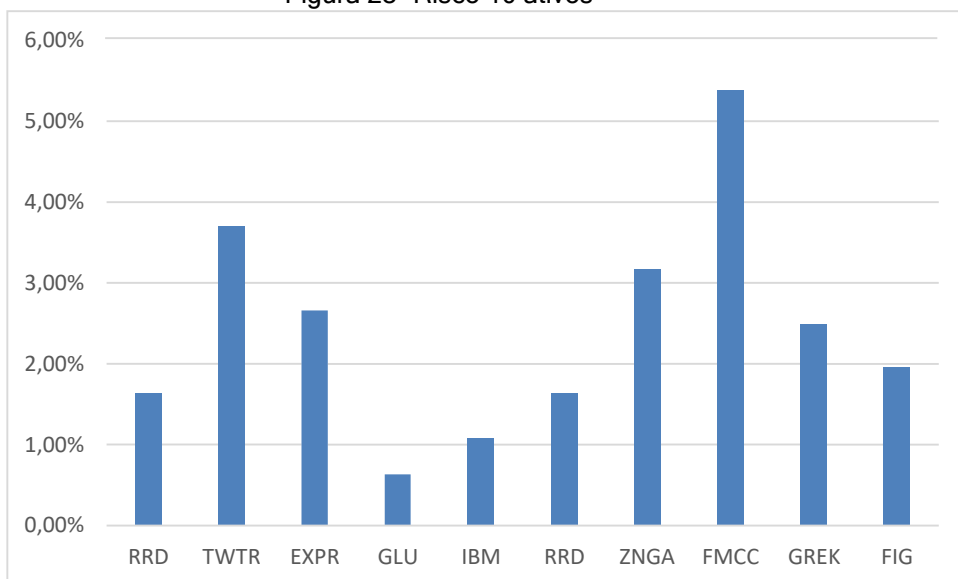


Figura 28- Risco 10 ativos



A Tabela 11 apresenta os valores de risco e retorno de cada ativo.

Tabela 11 - Retorno e risco dos ativos

| Ativo      | RRD    | TWTR   | EXPR   | GLU   | IBM    | RRD    | ZNGA   | FMCC   | GREK   | FIG   |
|------------|--------|--------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| <b>Ret</b> | 17,55% | 88,18% | 28,86% | 0,98% | 15,64% | 17,55% | 48,50% | 39,81% | 69,63% | 7,61% |
| <b>Ris</b> | 1,64%  | 3,71%  | 2,66%  | 0,63% | 1,08%  | 1,64%  | 3,17%  | 5,38%  | 2,49%  | 1,96% |

Em seguida foram executados os algoritmos spGWO,spMODE,spBAT e PSOMO utilizando esses ativos, cada algoritmo foi executado 50 vezes e as principais

configurações relativas a cada algoritmo são apresentadas a seguir:

spGWO - População de 120 lobos e máximo de 500 iterações;

spMODE – Fator modificador de 0.7, taxa de crossover de 0.7 e máximo número de avaliações da função objetivo em 10000.

spBAT - População de 40 morcegos, 1000 gerações, 0.5 de amplitude e 0.5 de taxa de emissão de pulsos.

PSOMO - Máximo número de iterações igual a 10, população de 100 partículas e repositório de 50 partículas.

Os resultados foram então comparados através do seus hipervolume, a tabela 12 mostra os resultados referentes aos valores de melhor resultado obtido, pior resultado, média dos resultados e desvio padrão, em verde estão representados os melhores resultados para cada uma das categorias.

Tabela 12 - Hipervolume 10 ativos

|        | Melhor | Pior   | Média  | Desvio Padrão |
|--------|--------|--------|--------|---------------|
| spGWO  | 0,9645 | 0,9335 | 0,9490 | 0,0069        |
| PSOMO  | 0,9754 | 0,7128 | 0,9297 | 0,0548        |
| spBAT  | 0,8590 | 0,5662 | 0,7598 | 0,0592        |
| spMODE | 0,9640 | 0,8848 | 0,9320 | 0,0152        |

O algoritmo spGWO obteve os melhores resultados nas categorias média, pior resultado e desvio padrão e obteve o segundo maior valor na categoria melhor resultado. O algoritmo apresentou desempenho melhor do que quando utilizado com apenas 2 variáveis.

O algoritmo spBAT obteve o pior resultado em todas as categorias, ele ganhou o melhor resultado quando utilizado para otimizar 2 variáveis, mas seu desempenho não se repetiu ao tratar de um número maior de variáveis.

As Figuras 29,30,31 e 32 respectivamente, mostram o gráfico com a fronteira de Pareto para cada algoritmo e a Figura 33 mostra todas as fronteiras de Pareto (em relação ao melhor resultado obtido).

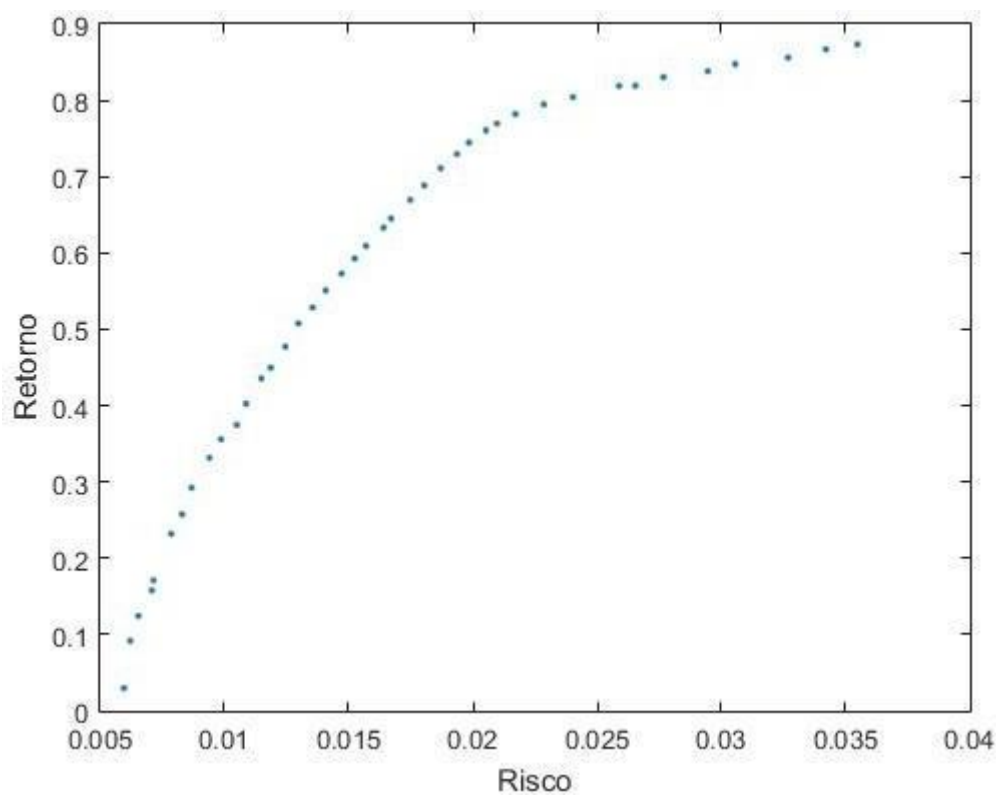


Figura 30 - Fronteira de Pareto do algoritmo PSOMO para 10 ativos

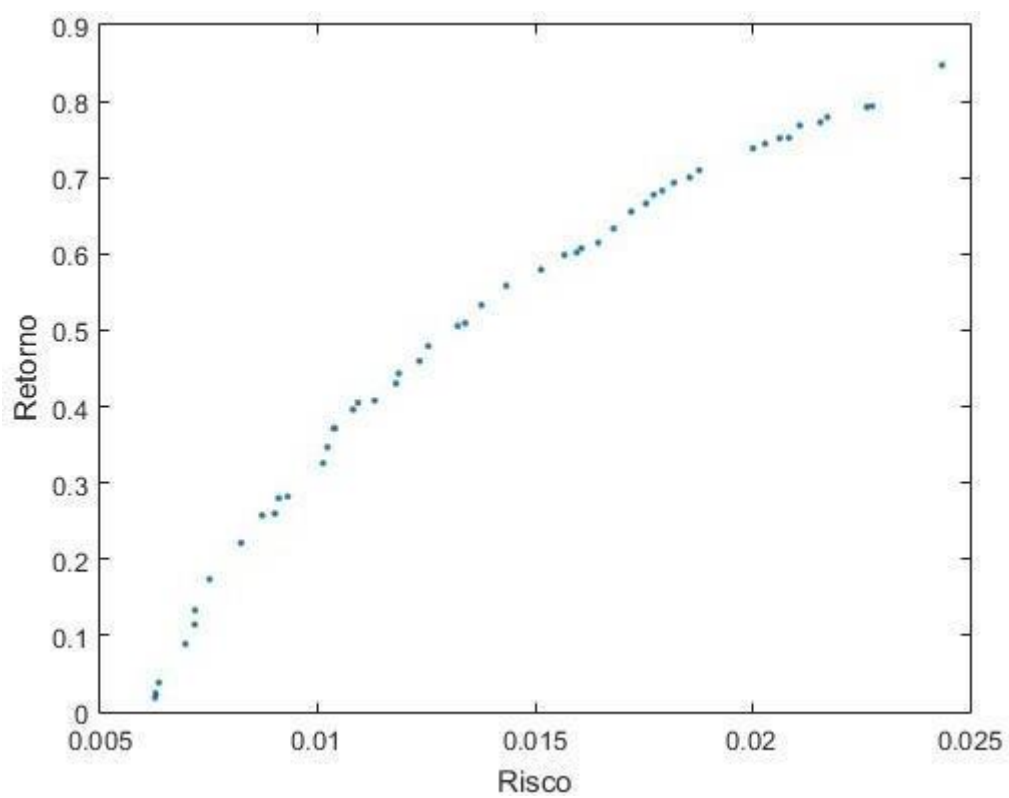




Figura 31 - Fronteira de Pareto do algoritmo spBAT para 10 ativos

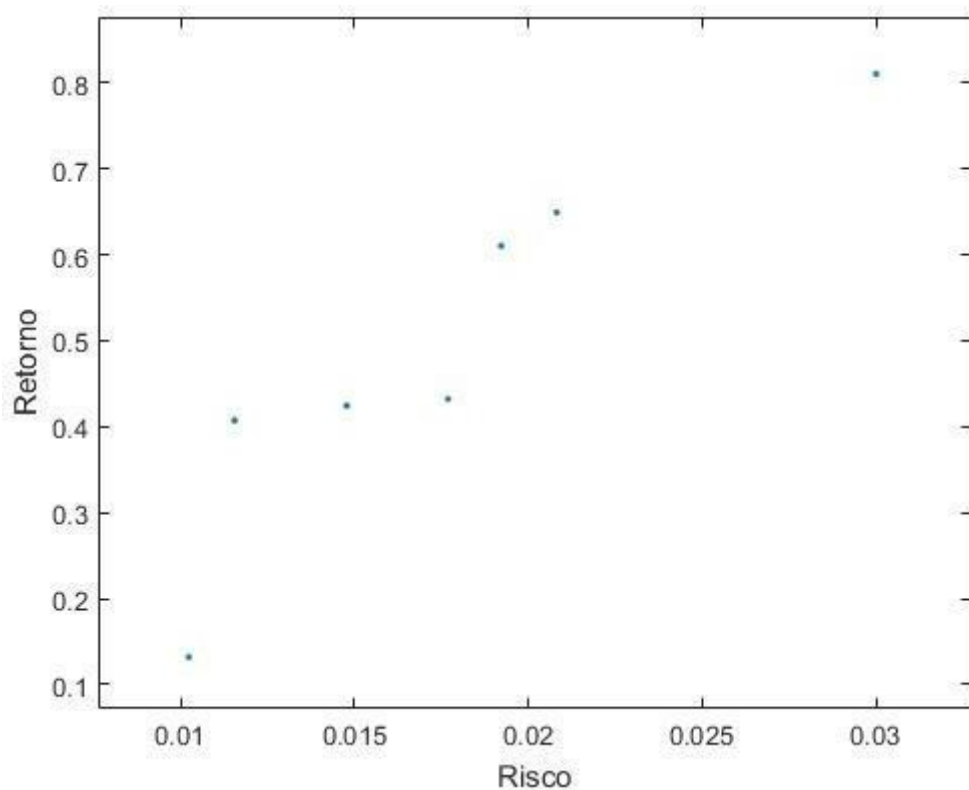


Figura 32 - Fronteira de Pareto do algoritmo spMODE para 10 ativos

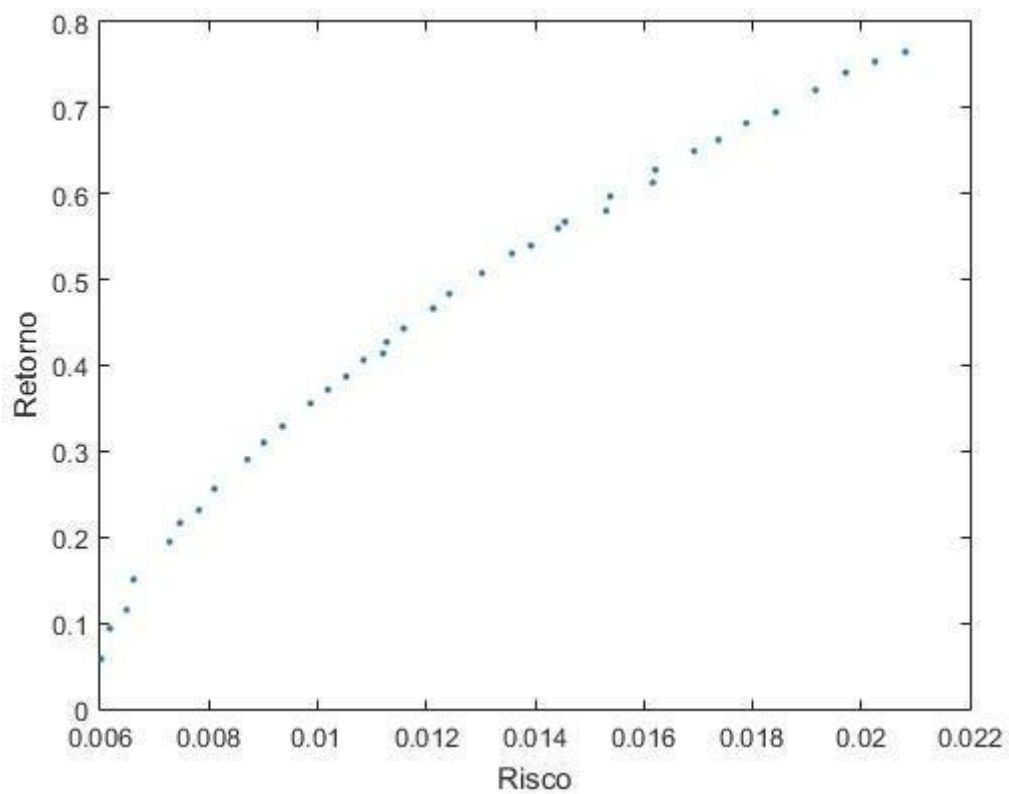
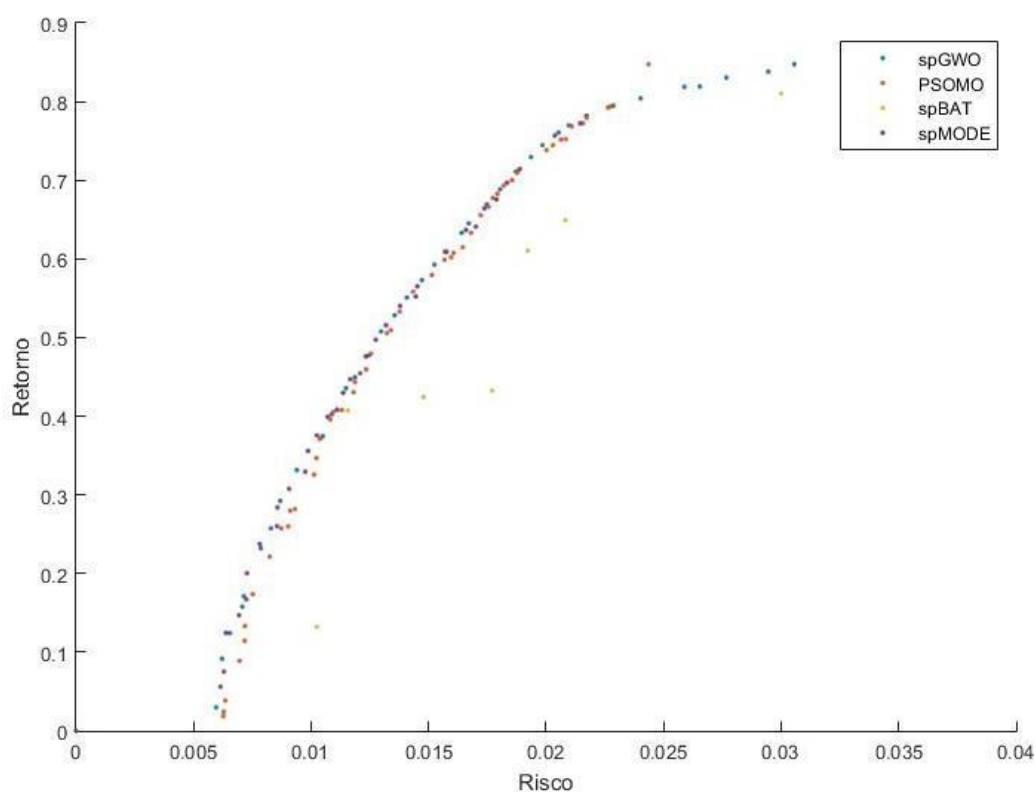


Figura 33 - Comparativo das Fronteiras de Pareto para 10 ativos



O único algoritmo que não apresenta uma boa distribuição dos portfólios é o algoritmo spBAT, a causa pode ser devido a pequena população recomendada para otimização.

O número de portfólios gerados (fronteira de Pareto) para cada algoritmo foi:

- spGWO = 41;
- spBA = 11;
- spMODE = 36;
- MOPSO = 50.

As tabela 13 e 14 apresentam os pesos atribuídos aos ativos para o portfólio com maior retorno e menor risco, considerando a melhor execução do algoritmo em relação ao hipervolume:

Tabela 13 - Pesos 10 ativos para maior retorno

|        | RRD    | TWTR   | EXPR   | GLU    | IBM    | RRD    | ZNGA   | FMCC   | GREK   | FIG    | Retorno       | Risco         |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------------|---------------|
| spGWO  | 0,0000 | 0,9562 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0005 | 0,0430 | 0,0003 | <b>0,8734</b> | <b>0,0355</b> |
| spBA   | 0,0000 | 0,8874 | 0,0000 | 0,0109 | 0,0196 | 0,0490 | 0,0331 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | <b>0,8103</b> | <b>0,3330</b> |
| spMODE | 0,0000 | 0,4003 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0012 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,5976 | <b>0,7694</b> | <b>0,0210</b> |
| MOPSO  | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | <b>0,8818</b> | <b>0,0371</b> |

Tabela 14 - Pesos 10 ativos para menor risco

|               | RRD    | TWTR   | EXPR   | GLU    | IBM    | RRD    | ZNGA   | FMCC   | GREK   | FIG    | Retorno       | Risco         |
|---------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---------------|---------------|
| <b>spGWO</b>  | 0,0033 | 0,0000 | 0,0000 | 0,8104 | 0,1749 | 0,0095 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | <b>0,0377</b> | <b>0,0059</b> |
| <b>spBA</b>   | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | <b>0,1564</b> | <b>0,0108</b> |
| <b>spMODE</b> | 0,0061 | 0,0000 | 0,0013 | 0,7853 | 0,1945 | 0,0000 | 0,0049 | 0,0028 | 0,0000 | 0,0051 | <b>0,0434</b> | <b>0,0059</b> |
| <b>MOPSO</b>  | 0,0014 | 0,0046 | 0,0009 | 0,8016 | 0,1824 | 0,0000 | 0,0091 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | <b>0,0453</b> | <b>0,0059</b> |

O ativo TWTR continua sendo o ativo com o maior retorno, sendo assim sempre que os portfólios gerados têm o maior retorno os algoritmos buscam colocar mais peso nesse ativo. O algoritmo spMODE consegue um menor resultado devido ao baixo peso colocado nesse ativo, apenas 40%, enquanto MOPSO obteve o melhor resultado colocando 100% do peso em TWTR. Ao buscar o ativo com menor risco o único que não consegue atingir é spBA, pois ele coloca todo peso do portfólio no ativo IBM, ativo que não é o com menor risco, além disso ele não diversifica o investimento, o que também influencia no aumento do risco.

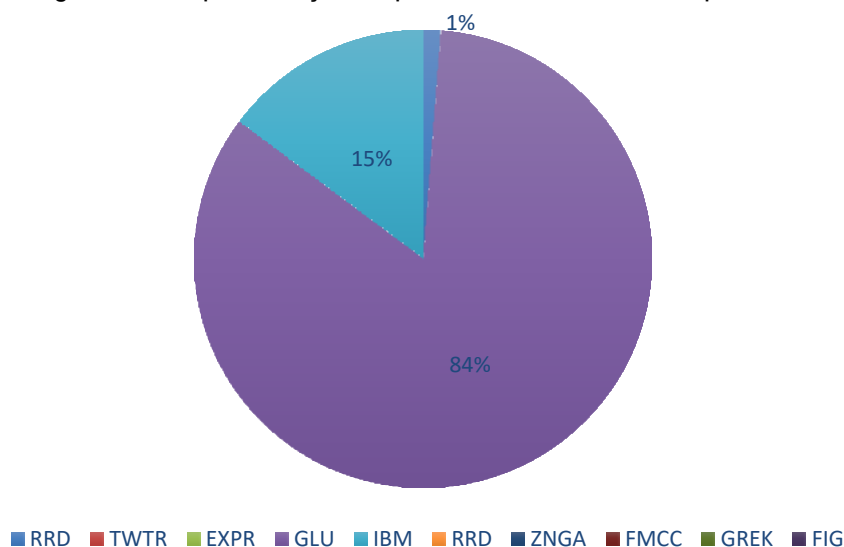
A tabela 15 mostra todas as soluções não dominadas quando comparadas as fronteiras de Pareto, ou seja, quantas soluções continuariam na nova fronteira de Pareto. O algoritmo spGWO obteve resultados bons em todas as comparações, quando comparado aos algoritmos spBA e spMODE continuou com todas as suas soluções na nova fronteira de Pareto. O algoritmo spBA teve resultados ruins, conseguindo apenas manter um de seus resultados quando comparado ao algoritmo MOPSO.

Tabela 15 - Comparação Fronteira de Pareto

|        | Pareto |      |        |       |
|--------|--------|------|--------|-------|
|        | spGWO  | spBA | spMODE | MOPSO |
| spGWO  | X      | 0    | 28     | 20    |
| spBA   | 41     | X    | 36     | 48    |
| spMODE | 41     | 0    | X      | 34    |
| MOPSO  | 29     | 1    | 31     | X     |

Apenas o algoritmo PSOMO conseguiu atingir o melhor resultado para o retorno. O único algoritmo que não atingiu o menor risco foi o algoritmo spBAT. A figura 34 mostra a distribuição do portfólio com menor risco obtido.

Figura 34 - Representação do portfólio com menor risco para 10 ativos



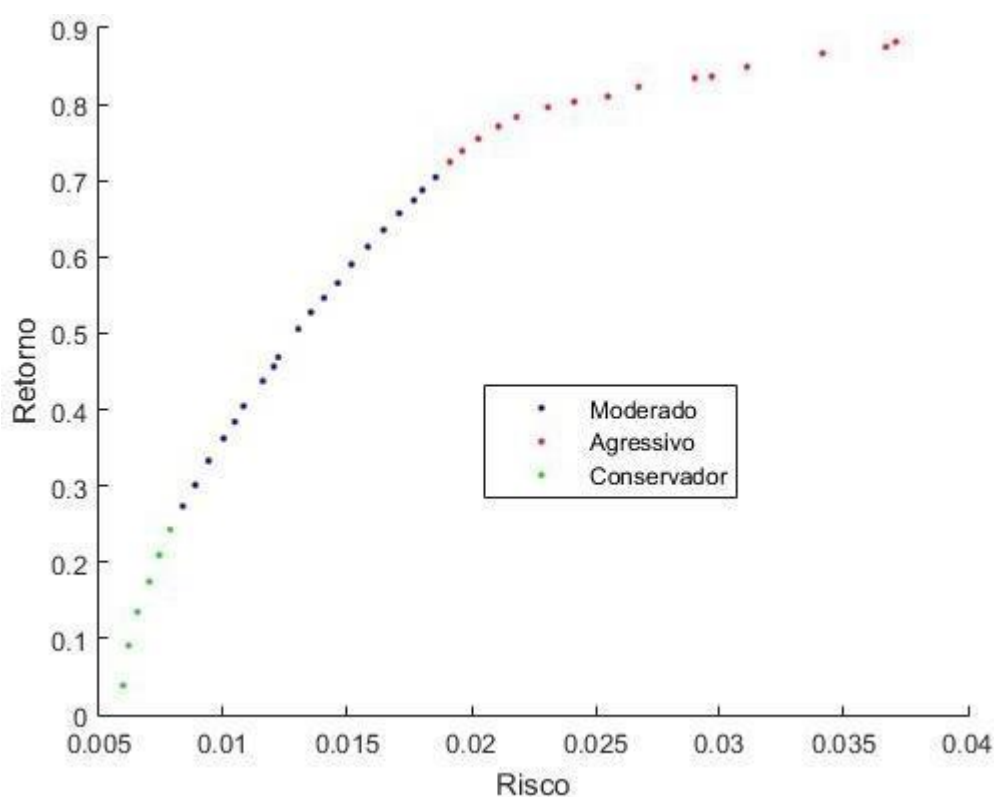
É possível observar que quando procurando minimizar o risco a maior parte do peso é colocado no ativo com menor risco, no caso o GLU, mas também é colocado um pouco do peso em 2 outros ativos de baixo risco, IBM e RRD, com objetivo de diversificar o investimento e consequentemente abaixar o risco.

#### 4.2.1 Divisão em tipo de investidor para 10 ativos

Para dividir os portfólios entre os três tipos possíveis (Agressivo, moderado e conservador) foi utilizado o melhor resultado do algoritmo spGWO. Foi utilizado o resultado desse algoritmo devido a boa distribuição de portfólios e ao melhor desempenho em relação ao hipervolume.

A figura 31 apresenta a fronteira de Pareto com os resultados divididos em tipo de investidor:

Figura 31 -Representação dos portfólios divididos entre tipo de investidor



A Tabela 16 apresenta o índice de Sharpe dos portfólios gerados, eles foram numerados de 1 até 41 da esquerda para direita de acordo com a Figura 31, as cores da coluna id identificam o tipo de investidor de acordo com a Figura 31.

Tabela 16 - Sharpe 10 ativos

| Id | RRD  | TWTR | EXPR | GLU  | IBM  | RRD  | ZNGA | FMCC | GREK | FIG  | Retorno | Risco  | Sharpe |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---------|--------|--------|
| 1  | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,83 | 0,14 | 0,00 | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,0386  | 0,0060 | -10,38 |
| 2  | 0,00 | 0,05 | 0,00 | 0,68 | 0,26 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,01 | 0,0907  | 0,0062 | -1,58  |
| 3  | 0,01 | 0,02 | 0,00 | 0,59 | 0,28 | 0,00 | 0,03 | 0,01 | 0,07 | 0,00 | 0,1348  | 0,0066 | 5,23   |
| 4  | 0,02 | 0,04 | 0,01 | 0,50 | 0,31 | 0,00 | 0,00 | 0,02 | 0,10 | 0,00 | 0,1745  | 0,0070 | 10,54  |
| 5  | 0,00 | 0,09 | 0,03 | 0,53 | 0,21 | 0,01 | 0,02 | 0,01 | 0,10 | 0,01 | 0,2093  | 0,0074 | 14,65  |
| 6  | 0,02 | 0,09 | 0,00 | 0,41 | 0,32 | 0,00 | 0,02 | 0,00 | 0,14 | 0,00 | 0,2427  | 0,0079 | 18,08  |
| 7  | 0,00 | 0,10 | 0,00 | 0,40 | 0,29 | 0,00 | 0,04 | 0,00 | 0,17 | 0,00 | 0,2734  | 0,0084 | 20,65  |
| 40 | 0,00 | 0,99 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,8753  | 0,0367 | 21,12  |
| 39 | 0,00 | 0,92 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,08 | 0,00 | 0,8668  | 0,0341 | 22,44  |
| 8  | 0,02 | 0,12 | 0,00 | 0,33 | 0,30 | 0,01 | 0,05 | 0,01 | 0,16 | 0,00 | 0,3011  | 0,0089 | 22,59  |
| 38 | 0,00 | 0,83 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,17 | 0,00 | 0,8490  | 0,0311 | 24,07  |
| 9  | 0,01 | 0,10 | 0,04 | 0,19 | 0,40 | 0,01 | 0,04 | 0,01 | 0,20 | 0,00 | 0,3330  | 0,0094 | 24,71  |

|    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |        |        |       |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|--------|--------|-------|
| 37 | 0,00 | 0,79 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,02 | 0,19 | 0,00 | 0,8367 | 0,0297 | 24,80 |
| 36 | 0,00 | 0,77 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,01 | 0,22 | 0,00 | 0,8341 | 0,0290 | 25,31 |
| 10 | 0,02 | 0,14 | 0,02 | 0,25 | 0,29 | 0,00 | 0,04 | 0,00 | 0,24 | 0,00 | 0,3621 | 0,0100 | 26,12 |
| 35 | 0,00 | 0,69 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,01 | 0,30 | 0,00 | 0,8228 | 0,0267 | 27,02 |
| 11 | 0,00 | 0,11 | 0,04 | 0,12 | 0,38 | 0,00 | 0,11 | 0,01 | 0,22 | 0,00 | 0,3841 | 0,0105 | 27,09 |
| 34 | 0,01 | 0,65 | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,34 | 0,00 | 0,8103 | 0,0255 | 27,84 |
| 12 | 0,00 | 0,14 | 0,02 | 0,10 | 0,42 | 0,00 | 0,05 | 0,01 | 0,26 | 0,00 | 0,4045 | 0,0108 | 28,10 |
| 13 | 0,01 | 0,17 | 0,00 | 0,13 | 0,32 | 0,00 | 0,07 | 0,00 | 0,29 | 0,00 | 0,4374 | 0,0116 | 29,04 |
| 33 | 0,00 | 0,59 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,40 | 0,00 | 0,8033 | 0,0241 | 29,11 |
| 14 | 0,01 | 0,12 | 0,05 | 0,00 | 0,42 | 0,00 | 0,04 | 0,01 | 0,35 | 0,00 | 0,4563 | 0,0120 | 29,55 |
| 15 | 0,02 | 0,18 | 0,00 | 0,00 | 0,44 | 0,00 | 0,05 | 0,00 | 0,31 | 0,00 | 0,4687 | 0,0122 | 30,13 |
| 32 | 0,00 | 0,54 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,45 | 0,00 | 0,7961 | 0,0231 | 30,13 |
| 16 | 0,01 | 0,16 | 0,03 | 0,00 | 0,34 | 0,00 | 0,09 | 0,00 | 0,37 | 0,00 | 0,5056 | 0,0130 | 31,10 |
| 31 | 0,00 | 0,47 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,53 | 0,00 | 0,7833 | 0,0218 | 31,30 |
| 17 | 0,00 | 0,22 | 0,03 | 0,00 | 0,33 | 0,00 | 0,06 | 0,01 | 0,34 | 0,00 | 0,5275 | 0,0135 | 31,55 |
| 18 | 0,01 | 0,22 | 0,00 | 0,00 | 0,32 | 0,00 | 0,06 | 0,00 | 0,39 | 0,00 | 0,5463 | 0,0141 | 31,70 |
| 30 | 0,00 | 0,42 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,01 | 0,00 | 0,57 | 0,00 | 0,7712 | 0,0211 | 31,81 |
| 19 | 0,01 | 0,20 | 0,02 | 0,00 | 0,26 | 0,00 | 0,06 | 0,00 | 0,45 | 0,00 | 0,5658 | 0,0146 | 31,84 |
| 29 | 0,00 | 0,36 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,04 | 0,00 | 0,59 | 0,00 | 0,7548 | 0,0203 | 32,27 |
| 20 | 0,00 | 0,23 | 0,02 | 0,00 | 0,23 | 0,00 | 0,10 | 0,00 | 0,42 | 0,00 | 0,5903 | 0,0152 | 32,29 |
| 21 | 0,00 | 0,25 | 0,10 | 0,00 | 0,13 | 0,00 | 0,08 | 0,01 | 0,43 | 0,00 | 0,6134 | 0,0158 | 32,41 |
| 24 | 0,01 | 0,30 | 0,00 | 0,00 | 0,11 | 0,00 | 0,08 | 0,00 | 0,50 | 0,00 | 0,6743 | 0,0177 | 32,45 |
| 22 | 0,00 | 0,28 | 0,03 | 0,00 | 0,14 | 0,00 | 0,08 | 0,02 | 0,45 | 0,00 | 0,6353 | 0,0165 | 32,49 |
| 28 | 0,00 | 0,34 | 0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,08 | 0,00 | 0,57 | 0,00 | 0,7387 | 0,0196 | 32,52 |
| 26 | 0,02 | 0,31 | 0,06 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,08 | 0,00 | 0,54 | 0,00 | 0,7044 | 0,0186 | 32,53 |
| 23 | 0,00 | 0,27 | 0,03 | 0,00 | 0,09 | 0,00 | 0,10 | 0,03 | 0,48 | 0,00 | 0,6571 | 0,0171 | 32,57 |
| 25 | 0,01 | 0,28 | 0,05 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,14 | 0,01 | 0,50 | 0,00 | 0,6877 | 0,0180 | 32,58 |
| 27 | 0,00 | 0,33 | 0,02 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,11 | 0,00 | 0,54 | 0,00 | 0,7244 | 0,0191 | 32,60 |

Diferente dos resultados com 2 ativos, pode-se observar que não necessariamente o maior índice de Sharpe está localizado no portfólio com maior retorno, nesse caso o maior retorno é o portfólio de índice 40, mas ele resultou em um dos piores índices de Sharpe.

No resultado com dois ativos o perfil agressivo obtinha todos os melhores resultados, nesse caso ele continua com o melhor resultado, mas a maioria dos valores altos de Sharpe se localiza no perfil moderado. Isso ocorre pois aqui são analisados mais ativos e alguns deles compensam o retorno um pouco menor com um risco muito menor, gerando opções mais equilibradas.

Também é possível perceber que os ativos FIG, RRD e FMCC são pouco utilizados, recebendo no máximo peso de 3%, isso ocorre pois eles têm uma relação

entre risco e retorno inferior à dos demais ativos. O ativo FMCC por exemplo tem retorno inferior ao ativo TWTR e risco superior. Analisando os portfólios com menor risco e os com maior risco percebe-se que o ativo GLU só é utilizado nos portfólios com menor risco, pois ele tem um risco muito baixo, mas um retorno também muito baixo.

## 5 CONCLUSÕES

Foram propostas versões multiobjectivo dos algoritmos GWO e BAT e realizadas as adaptações desses dois algoritmos e também dos algoritmos spMODE e PSOMO ao problema de otimização de portfólios de investimento. Os algoritmos spMODE e PSOMO são algoritmos atuais e que já obtiveram bons resultados em diversos problemas de otimização, por isso foram utilizados nas comparações com os algoritmos propostos.

Após selecionados 10 ativos de empresas reais, seus dados foram coletados e então foram realizadas duas comparações. Primeiramente foram feitos testes utilizando 2 ativos, onde o hipervolume foi utilizado como medida de comparação e dividido em 4 categorias, melhor resultado, pior resultado, média e desvio padrão. O algoritmo spGWO proposto ganhou em duas categorias, pior resultado e desvio padrão, isso indica que ao rodar diversas vezes o algoritmo, os resultados sempre estarão próximos um do outro, o que torna o algoritmo confiável. Apesar do algoritmo proposto spBAT ter ganhado na categoria melhor resultado, ele apresentou resultados muito inferiores nas demais categorias, o que indica que o algoritmo está buscando de forma aleatória suas soluções. Em seguida foram realizados testes com 10 ativos, utilizando a mesma medida de comparação. O algoritmo proposto spGWO obteve os melhores resultados em 3 categorias, pior resultado, média e desvio padrão, na categoria melhor resultado ele ficou em segundo lugar, isso mostra que mesmo com o aumento do número de variáveis do problema, o algoritmo continuou apresentando resultados satisfatórios. O algoritmo proposto spBAT teve os piores resultados em todas as categorias, novamente apontando a possibilidade do algoritmo estar buscando suas soluções de forma aleatória. O algoritmo spGWO apresentou boa distribuição em sua fronteira de Pareto enquanto o algoritmo proposto spBAT apresentou resultados espalhados em sua fronteira.

O desempenho apresentado pelo algoritmo proposto spGWO foi satisfatório nas duas series de testes realizados, a fronteira de Pareto apresentada proporciona ao investidor uma série de opções de portfólios. Ao comparar sua fronteira de Pareto com a dos outros algoritmos ele foi o que teve o melhor resultado. O algoritmo consegue atingir o menor valor para o risco nas duas series de testes, mas em nenhuma delas ele atinge o maior retorno possível, que acontece quando se coloca todo peso no ativo com maior retorno, isso não é um problema pois devido a facilidade



do cálculo é possível adicionar esse portfólio a fronteira de Pareto após a otimização.

O algoritmo spBAT precisa de mais estudos, seu desempenho não foi satisfatório em nenhuma das series de testes, seu desvio padrão ficou significativamente acima dos demais algoritmos, o que significa que o algoritmo spBAT está buscando resultados de uma forma aleatória. Algumas possíveis razões para isso são a pequena população recomendada para otimização e o valor definido para suas constantes.

As soluções do algoritmo spGWO foram as que apresentaram distribuição mais uniforme em sua fronteira de Pareto, por isso foram utilizadas na etapa de divisão entre tipo de investidor, que utilizou como medida principal o índice de Sharpe. Os gráficos gerados combinando o tipo de investidor com a fronteira de Pareto se mostraram de fácil entendimento, e podem ajudar o investidor leigo a entender e escolher o portfólio em que deseja investir. No caso de 2 ativos é facilmente observado que quanto maior o retorno, maior o índice de Sharpe, o que mostra que o aumento no retorno compensa o risco a mais assumido. Os resultados com 10 ativos mostram que nem sempre esse aumento em paralelo do índice de Sharp e do retorno acontece, nesse caso a maioria dos portfólios com maior índice de Sharpe ficou localizado no perfil moderado, sendo que alguns ficaram no perfil agressivo, o portfólio com maior retorno obteve um dos piores índices de Sharpe.

Com base nos resultados é possível validar o algoritmo spGWO na área de otimização de portfólios de investimento, enquanto o algoritmo spBAT precisa de mais estudos antes que possa ser validado nessa área.

## REFERÊNCIAS

- ANDREZO, A. F. , LIMA, I. S. (2006). Mercado Financeiro: aspectos históricos e conceituais. 2a. ed. São Paulo, SP.
- ARAÚJO, A. e MONTINI, A. (2015). Análise de métricas de risco na otimização de portfólios de ações. *Revista de Administração da USP*, 50(2): 208-228.
- AYTAC, B., HOANG, T. e MANDOU, C. (2016). Wine: to drink or invest in? A study of wine as an investment asset in French portfolios. *Research in International Business and Finance*, 36:591-614, doi 10.1016/j.ribaf.2015.03.001
- BACANIN, N. e TUBA, M. (2015) Fireworks algorithm applied to constrained portfolio optimization problem. *Computer Science*, Megatrend University Belgrade, Serbia.
- BATISTA, L., GUIMARAES, F. e RAMIREZ, J. (2009). A differential mutation operator for the archive population of multi-objective evolutionary algorithms. *IEEE Congress on Evolutionary Computation*. Trondheim, Norway, p. 1108-1115.
- BAYRAKTAR, N. (2014). Measuring relative development level of stock markets: Capacity and effort of countries. *Borsa Istanbul Review*. Istanbul, p. 74-95.
- BOCATTO, L., ATTUX, R. e ZUBEN, F. (2009). Evolução diferencial: introdução e conceitos básicos. Relatório técnico, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP.
- BOEHME, R. e ÇOLAK, G. (2011). Primary market characteristics and secondary market frictions of stocks. *Journal of Financial Markets*. Wichita, p. 286-327.
- BOUSSAÏD, L., SIARRY, P. e LEPAGNOT, J. (2013) A survey on optimization metaheuristics. *Information Sciences*, Vol. 237, p. 82-117.
- BREALEY, R., MYERS, S. e ALLEN, F. (2011). Principles of corporate finance. 10th ed. New York: McGraw-Hill.
- CARVALHO, H. (2009). Harry Markowitz e a Fronteira Eficiente. Retirado de: <http://investimentosefinancas.blogspot.com/> Investimentos e Finanças.
- CASTELLANO, R. e CERQUETI, R. Mean-Variance portfolio selection in presence of infrequently traded stocks. *European Journal Of Operational Research*. Macerata, p. 442-449. abr. 2014.
- CASTRO, L. e ZUBEN, F. (2002). Introdução a computação evolutiva. Universidade Estadual de Campinas.
- CHANG, Eddy et al. (2007) IPO underpricing in China: New evidence from the primary and secondary markets. *Emerging Markets Review*. Hong Kong, p. 1-16.
- CHANG, T., MEADE, N., BEASLEY, J. e SHARAIHA, Y. (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation. *Computers e Operations Research*, 27:1.271-1.302.

- CHEN, W. Artificial bee colony algorithm for constrained possibilistic portfolio optimization problem. *Physica A. Beijing*, p. 125-139. 20 fev. 2015.
- COORAY, A. (2010). Do stock markets lead to economic growth? *Journal Of Policy Modeling*. Wollongong, p. 448-460.
- CORAZZA, M., FASANO, G. e GUSSO, R. (2013). Particle Swarm Optimization with non-smooth penalty reformulation, for a complex portfolio selection problem. *Applied Mathematics And Computation*. Venezia, p. 611-624.
- DAS, S., e SUGANTHAN, P. (2011). Differential evolution: A survey of the state-of-the-art. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, Vol.15, pp. 4-31.
- DAS, S., e SUGANTHAN, P. (2010). Real-parameter evolutionary multimodal optimization – A survey of the state-of-the-art
- DENG, G., LIN, W. e LO, C. (2012) Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*. Taipei, p. 4558-4566.
- ELTON, E. e GRUBER, M. (1970). Marginal stockholders' tax rates and the clientele effect. *Review of Economics and Statistics*, 52(1):68-74.
- ELTON, E., GRUBER, M., BROWN, S. e GOETZMANN, W.(2007). *Modern portfolio theory and investment analysis*. 7th ed. New York: John Wiley e Sons.
- ENGELS, M. (2004). *Portfolio Optimization: Beyond Markowitz*. Master's Thesis.
- FAMA, E. e FRENCH, K. (2004). The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence. *Journal of Economic Perspectives*, pp. 25-46.
- FINE, T. (1997). Information security: a teoretical basis. *Computers and Security*, 16(6): 469-479.
- FOGEL, L., OWENS, A. e WALSH, M. (1966). *Artificial Intelligence through Simulated Evolution*.
- GONG, W. e CAI, Z. (2014). Parameter optimization of PEMFC model with improved multi-strategy adaptive differential evolution. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Vol. 27, pp. 28-40.
- GUERARD, J., MARKOWITZ, H. e XU, G. (2015). Earnings forecasting in a global stock selection model and efficient portfolio construction and management. *International Journal of Forecasting*, 31: 550-560, doi 10.1016/j.ijforecast.2014.10.003
- GUIMARÃES (2009). *Manual de computação evolutiva e heurística: Algoritmos de evolução diferencial*, capítulo 5.
- HALFELD, M. (2008). *Investimentos: Como administrar melhor seu dinheiro*. 3. ed. São Paulo: Fundamento. 163 p.

HEATON, J., POLSON, N. e WITTE, J. (2016). Deep learning for finance: deep portfolios. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, doi 10.1002/asmb.2209

HEINZE, T. (2016). Markowitz 3.0: including diversification targets in portfolio optimization via diversification functions (Março 31, 2016). Disponível em SSRN: <https://ssrn.com/abstract=2805368>.

HOLLAND, J. (1975). *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. Ann Arbor MI University of Michigan Press, Vol. Ann Arbor, pp. 183.

HU, Y. et al. (2015). Application of evolutionary computation for rule discovery in stock algorithmic trading: A literature review. *Applied Soft Computing*. Guangzhou, p. 534-551.

HUANG, H. et al. (2014). Adjusting MV-efficient portfolio frontier bias for skewed and non-mesokurtic returns. *North American Journal Of Economics And Finance*. Chiayi City, p. 59-83.

HUANG, H. e WANG, C. (2013). Portfolio selection and portfolio frontier with background risk. *North American Journal Of Economics And Finance*. Chiayi, p. 177-196.

JIANG, L., MASKELL, D. e PATRA, J. (2013). Parameter estimation of solar cells and modules using an improved adaptive differential evolution algorithm. *Applied Energy*, Vol. 112, pp. 185-193.

JIN, Y., QU, R. e ATKIN, J. (2016). Constrained portfolio optimisation: the state-of-the-art Markowitz models. In: *Proceedings of the International Conference on Operations Research and Enterprise Systems*, Rome, Italy.

KARANDIKAR, R. e SINHA, T. (2012). Modelling in the spirit of Markowitz portfolio theory in a non-gaussian world. *Current Science*, 103(6):666-672.

KENNEDY, J. e EBERHART, R. (1995). Particle swarm optimization. *Proceedings Of The Ieee International Conference On Neural Networks*. [s. L.], p. 1942-1948.

LEE, K., HSU, M., CHOU, J. e GUO, C. (2011). Improved differential evolution approach for optimization of surface grinding process. *Expert Systems with Applications*.

LEUNG, P., NG, H. e WONG, W. (2012). An improved estimation to make Markowitz's portfolio optimization theory users friendly and estimation accurate with application on the US stock market investment. *European Journal Of Operational Research*. Hong Kong, p. 85-95.

LWIN, K., QU, R. e KENDALL, G. (2014). A learning-guided multi-objective evolutionary algorithm for constrained portfolio optimization. *Applied Soft Computing*. Nottingham, p. 757-772.

MAHDAVI, S., SHIRI, M. e RAHNAMAYAN, S. (2014). Metaheuristics in large-scale global continues optimization: A survey. *Information Sciences*. Tehran, p. 407-428.

MARKOWITZ, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance*, Vol. 7, 77-91.

MARKOWITZ, H. (1999). The Early History of Portfolio Theory: 1600-1960. *Financial Analysts Journal*, pp. 5680-5686.

MARLING, H. e EMANUELSSON, S. (2012) . *The Markowitz Portfolio Theory*.

MARTINI, M. (2012). Renda fixa versus renda variável: uma análise descritiva entre as rentabilidades dos investimentos. 2012. 10 f. Tese (Doutorado) - Curso de Mercado de Capitais, Ipog, Goiânia.

METAXIOTIS, K. e LIAGKOURAS, K. (2012). Multiobjective Evolutionary Algorithms for Portfolio Management: A comprehensive literature review. *Expert Systems With Applications*. Piraeus, p. 11685-11698.

MEZA, G. (2014). Controller tuning by means of evolutionary multiobjective optimization: a holistic multiobjective optimization design procedure. 2014. Tese (Pós-Doutorado) - Curso de Engenharia de Sistemas, Universidade Politécnica de Valencia, Valencia.

MIRJALILI, S., MIRJALILI, M. e LEWIS, A. (2014). Grey Wolf Optimizer. Brisbane.

MONTES, M., REYES, V. e COELLO, C. (2006). A Comparative Study of Differential Evolution Variants for Global Optimization. Mexico.

NERI, F., e MÍNIMO, E. (2010). Memetic compact differential evolution for cartesian robot control. *IEEE Computational Intelligence Magazine*, Vol. 5, pp. 54-65.

NEUMANN, T., EBENDT, R. e KUHNS, G. (2016). From finance to ITS: traffic data fusion based on Markowitz' Portfolio Theory. *Journal of Advanced Transportation*, 50:145-164, doi 10.1002/atr.1351

NOBAKHTI, A. e WANG, H. (2007). A simple self-adaptive Differential Evolution algorithm with application on the ALSTOM gasifier.

PAHNER, U., e HAMEYER, K. (2000). Adaptive coupling of differential evolution and multiquadrics approximation for the tuning of the optimization process. *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 36, pp. 1043-1046.

PIFFELMAN, M., ROGER, T. e BOURACHNIKOVA, O. (2016). When behavioral portfolio theory meets Markowitz theory. *Economic Modelling*, 53: 419-435 doi 10.1016/j.econmod.2015.10.041

PINHEIRO, L. (2005). Mercado de Capitais: fundamentos e técnicos. 3. ed. São Paulo: Atlas.

PONSICH, A., JAIMES, A. e COELLO, C. (2013). A Survey on Multiobjective Evolutionary Algorithms for the Solution of the Portfolio Optimization Problem and Other Finance and Economics Applications. *Ieee Transactions On Evolutionary Computation*. [s. L.], p. 321-344.

PRICE, K., STORN, R. M., e LAMPINEM, J. A. (2005). Differential Evolution: A Practical Approach to Global Optimization (Natural Computing Series). *The Journal of Heredity*, Vol. 104, p. 542.

ROMAN, D. e MILTRA, G. (2009). Portfolio selection models: a review and new directions. *Wilmott Journal*, 1(2): 69-85.

ROUDIER, F. (2007). Portfolio Optimization and Genetic Algorithms. Master's Thesis, Department of Management, Technology and Economics. Zurich. Disponível em : <http://www.er.ethz.ch/publications/RoudierMScThesis.pdf>.

- ROY, A. D. (1952). Safety First and the Holding of Assets. *Econometrica Journal* , Vol.20 , pp. 431-449.
- RUBINSTEIN, Mark. (2002) Markowitz's "Portfolio Selection": A Fifty-Year Retrospective. *The Journal Of Finance*. Berkeley.
- RUZEK, B., e KVASNICKA, M. (2001). Differential Evolution Algorithm in the Earthquake Hypocenter Location. *Pure and Applied Geophysics*, pp.667-693.
- SHARPE, W. (1966) Mutual fund performance. **Journal of Business**, [s.n.], p. 119-138, Jan.
- SHARPE, W. (1964) Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal Of Finance*. [s. L.], p. 425-442.
- SHEFRIN, H. e STATMAN, M. (2000). Behavioral portfolio theory. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35(2): 127-151.
- SIMON, D. (2013) *Evolutionary Optimization Algorithms: Biologically Inspired and Population-Based Approaches to Computer Intelligence*. New Jersey: Wiley.
- SILVA, P. (2008) *Mercado de capitais: Sistema Protetivo dos Interesses Coletivos dos Investidores e Consumidores*. Ribeirão Preto, UNAERP.
- STEUER, R., QI, Y. e HIRSCHBERGER, M. (2010). Comparative issues in large-scale mean-variance efficient frontier computation. *Decision Support Systems*. Athens, p. 250-255. nov.
- STORN, R., e PRICE, K. (1995). Differential Evolution - A simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. *Science Journal*, Vol. 11, pp. 1-15.
- THALER, H. (1999). The End of Behavioral Finance. *Financial Analysts Journal*, Vol.55.
- TICONA ,W. e DELBEM ,A. (2008). *Algoritmos de Estimaco de Distribuico e Aplicaces*.
- URSEM, R. K. e VADSTRUP, P. (2003). Parameter identification of induction motors using differential evolution. *Journal of Evolutionary Computation*, Vol. 2, pp. 790-796.
- WANG, Y., e CAI, Z. (2012). Combining multiobjective optimization with differential evolution to solve constrained optimization problems. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, pp. 117-134.
- WILFORD, D. S. (2012). True Markowitz or assumptions we break and why it matters. *Review Of Financial Economics*. [s. L.], p. 93-101.
- WILLIAMS, J. B. (1938). *The theory of investment value*. Cambridge: Harvard University Press.
- YahooFinance (Acesso em: 5 de maio de 2015). Business Finance, Stock Market, Quotes, News. Disponvel em: <http://finance.yahoo.com>.
- YANG, X. (2010). *A New Metaheuristic Bat-Inspired Algorithm*. 2010. Engineering, University Of Cambridge, Cambridge.
- ZAHARIE , D. (2009). Influence of crossover on the behavior of Differential Evolution Algorithms. West University of Timisoara.

ZELENY, M. (1982). Multiple criteria decision making. McGraw-Hill Book Company. USA.

ZOPOUNIDIS, C., DOUMPOS, M. e FABOZZI, F. J. (2014). Preface to the Special Issue: 60 years following Harry Markowitz's contributions in portfolio theory and operations research. European Journal Of Operational Research. Chania, p. 343-345.

ZOPOUNIDISA, C. et al. (2015). Multiple criteria decision aiding for finance: An updated bibliographic survey. European Journal Of Operational Research. Chania, p. 339-348.

DAS, S. et al. (2016). Recent advances in differential evolution - An updated survey. Swarm and Evolutionary Computation, Vol. 27, pp. 1-30.