

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ
ESCOLA DE POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO E
SISTEMAS**

MARCELO CARNEIRO GONÇALVES

**UMA ABORDAGEM ROBUSTA PARA UM PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA
PRODUÇÃO QUE COMBINA PROGRAMAÇÃO LINEAR COM A *CLEARING*
*FUNCTION***

CURITIBA

2017

MARCELO CARNEIRO GONÇALVES

**UMA ABORDAGEM ROBUSTA PARA UM PROBLEMA DE
PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO QUE COMBINA PROGRAMAÇÃO
LINEAR COM A *CLEARING FUNCTION***

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção e Sistemas. Área de concentração: Concepção, Logística e gestão de sistemas produtivos, da Escola Politécnica, da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção e Sistemas.

Orientador: Prof. Dr. Raimundo José Borges de Sampaio.

CURITIBA

2017

Dados da Catalogação na Publicação

Gonçalves, Marcelo Carneiro

G636a 2017 Uma abordagem robusta para um problema de planejamento da produção que combina programação linear com a *clearing function* / Marcelo Carneiro Gonçalves; orientador, Raimundo José Borges de Sampaio. -- 2017
58 f.: il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná,
Curitiba, 2017.

Bibliografia: f. 57-58

1. Engenharia da produção. 2. Administração da produção. 3. Programação linear. 4. Programação (Matemática). 5. Planejamento empresarial. I. Sampaio, Raimundo José Borges de II. Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas. III. Título.

CDD 20. ed. – 620.0046

Dedico este trabalho especialmente aos
meus pais, minha irmã e amigos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à Deus por ter assumido frente de tudo que vem acontecendo na minha vida.

Ao professor Raimundo José Borges de Sampaio, pela confiança, pela oportunidade de trabalhar ao seu lado e pelo tempo dedicado para me ajudar na condução deste trabalho.

Ao professor Leony Luiz Lopes Negrão por ter me instigado a fazer mestrado na área da Engenharia de Produção.

À minha mãe Maria Paula e meu Pai Benedito Gonçalves pela credibilidade e confiança em mim.

Ao Leandro de Souza e Izamara Dias pelo apoio, parceria e sempre dispostos a me ajudar nos momentos de dedicação nesta grande fase.

À PUCPR e CAPES pela concessão de bolsa de estudos, permitindo-me desenvolver profissionalmente e pessoalmente.

RESUMO

O uso de modelos de programação matemática para o planejamento de produção têm sido propostos desde a década de 1950, sendo uma ferramenta amplamente aplicada, dado que pode fornecer soluções ótimas para os problemas de planejamento da produção.

Para empresas de manufatura, é um grande desafio planejar em ambientes de incertezas quando existem grandes variações nos parâmetros de planejamento, tais como: tempo de produção, demanda, recursos disponíveis, etc. Dessa forma, a maior dificuldade em lidar com modelos de Programação matemática em planejamento de produção é que, em geral, na intenção de simular a realidade por meio destes modelos, é preciso estimar valores aos parâmetros de planejamento, o que nem sempre, pode ser feito com precisão, e por consequência, a solução ótima do modelo pode não representar a melhor solução para o problema (e em casos extremos pode nem representar sequer soluções viáveis). Neste contexto, a abordagem clássica para lidar com um cenário econômico dinâmico é o uso de modelos de programação robusta, que propõe uma solução subótima em relação ao modelo determinístico.

O objetivo deste trabalho é modelar o problema de planejamento da produção que acopla um modelo de programação linear com os conceitos da *Clearing Function* como um problema de programação linear robusta de modo a aduzir ao planejador uma maior segurança nas tomadas de decisões em face da variabilidade dos parâmetros do modelo. A metodologia consiste em modelar um problema de Programação Linear considerando a otimização dos níveis de Produção, Estoque, Carregamento do sistema, e Liberações de produtos para o sistema produtivo, ao longo do horizonte de planejamento, e posteriormente, incorporar ao modelo de Programação Linear proposto, os conceitos de programação robusta combinado com a *Clearing Function*, de modo a lidar com as incertezas do modelo.

O modelo foi submetido a testes numéricos e os resultados sugerem que a programação linear robusta incorpora em certo sentido um ensaio sobre a sensibilidade do modelo, o que pode auxiliar sobremaneira ao planejador com importantes *insights* sobre o problema de planejamento da produção, além disso o custo computacional da abordagem robusta não é muito maior do que o custo computacional da abordagem determinística, o que torna esta abordagem bastante atraente para ser utilizada.

Palavras-chave: Programação Linear Robusta. *Clearing Function*. Programação Linear.

ABSTRACT

The use of mathematical programming models to plan production problems has been proposed since the decade of 1950s and is widely applied to provide optimal solutions to production planning problems. However, to plan in an environment of uncertainty is a big challenge to the manufacturing companies, since variations on the parameters of planning, such as production time, demand, and available resources are very difficult to foresee, mainly in large planning horizon.

One of the greatest difficulty in dealing with linear programming models is that, generally, to simulate reality through models, it is necessary to estimate values for the parameters, which cannot always be very accurate, and consequently, the model optimal solution may not represent a better solution of the problem. That is the trade-off to the simplicity of deterministic linear programming models.

In this context, a classic approach to deal with a dynamic economic scenario is the robust approach of linear programming, which proposes a suboptimal solution related to the deterministic model. The new trade-off here is to give up optimal deterministic solutions for the benefit of more robust solutions.

This work present a robust linear programming model for production planning that combines robust linear programming with the concept Clearing Function to provide the planner with a greater security in decision making due to the variability of the parameters of the model.

The model was submitted to numerical experiments and the results suggests that the robust linear programming incorporates in a certain sense an assay about the sensitivity of the deterministic model, which can greatly help the planner with important insights on the production planning problem. Besides, the computational cost of the robust approach is not much greater than the computational cost of the deterministic approach, which makes this approach quite attractive to be used.

Key-word: Robust Linear Programming. Clearing Function. Linear Programming Linear.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Esquema de Planejamento de necessidades de materiais (MRP).....	
....16	
Figura 2 – Ilustração gráfica de um modelo de Programação Linear – Problema Determinístico.....	25
Figura 3 - Ilustração gráfica de um modelo de Programação Linear Robusta.....	26
Figura 4 - Propriedade da distribuição normal.....	43

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Variáveis de decisão	29
Tabela 2 - Parâmetros.....	29
Tabela 3 - 30 Simulações para o produto 1	36
Tabela 4 - 30 Simulações para o produto 2	37
Tabela 5 - 30 Simulações para o produto 3	38
Tabela 6 - Demanda média para os três produtos	39
Tabela 7 - Desvio padrão da demanda para os três produtos.....	39
Tabela 8 - Parâmetros de entrada do modelo	39
Tabela 9 - Resultado da solução ótima para o produto 1 sem a introdução da programação robusta.	41
Tabela 10 - Resultado da solução ótima para o produto 2 sem a introdução da programação robusta.	41
Tabela 11 - Resultado da solução ótima para o produto 3 sem a introdução da programação robusta.	41
Tabela 12 - Propriedade da distribuição normal.....	42
Tabela 13 - Nova demanda variando um desvio padrão (considerando a abordagem de Soyster).....	44
Tabela 14 - Resultado da solução ótima para o produto 1 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 1 desvio padrão).....	44
Tabela 15 - Resultado da solução ótima para o produto 2 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 1 desvio padrão).....	44
Tabela 16 - Resultado da solução ótima para o produto 3 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 1 desvio padrão).....	45
Tabela 17 - Nova demanda variando dois desvios padrão (considerando a abordagem de Soyster).....	45
Tabela 18 - Resultado da solução ótima para o produto 1 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 2 desvios padrão).....	45
Tabela 19 - Resultado da solução ótima para o produto 2 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 2 desvios padrão).....	45
Tabela 20 - Resultado da solução ótima para o produto 3 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 2 desvios padrão).....	46

Tabela 21 - Nova demanda variando três desvios padrão (considerando a abordagem de Soyster).....	46
Tabela 22 - Resultado da solução ótima para o produto 1 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 3 desvios padrão).	46
Tabela 23 - Resultado da solução ótima para o produto 2 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 3 desvios padrão).	47
Tabela 24 - Resultado da solução ótima para o produto 3 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 3 desvios padrão).	47
Tabela 25 - Resultado para os 3 cenários.....	47
Tabela 26 - Resultado da solução ótima considerando a variação de 1 desvio padrão para diferentes valores de Γ	49
Tabela 27 - Valor da função objetivo (cenário 1) para os diferentes valores de Γ	50
Tabela 28 - Resultado da solução ótima considerando a variação de 2 desvios padrão para diferentes valores de Γ	51
Tabela 29 - Valor da função objetivo (cenário 2) para os diferentes valores de Γ	52
Tabela 30 - Resultado da solução ótima considerando a variação de 3 desvios padrão para diferentes valores de Γ	53
Tabela 31 - Valor da função objetivo (cenário 3) para os diferentes valores de Γ	54

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BOM	Estrutura do produto (<i>Bill of Material</i>)
CRP	Planejamento das necessidades de capacidade (<i>Capacity requirements planning</i>)
MRP I	Planejamento das Necessidades de Materiais (<i>Material requirement planning</i> – “MRP I”)
MRP II	Planejamento de Recursos de Manufatura (<i>Manufacturing Resource Planning</i> – “MRP II”)
PL	Programação linear
PMP	Programa Mestre de Produção (<i>Master production schedule</i> – MPS)
	(<i>Master Production Schedule</i> – MPS)
RCCP	Planejamento grosseiro da capacidade (<i>Rough-cut capacity planning</i>)
WIP	<i>Work-in-process</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
1.1	CONTEXTO.....	12
1.2	OBJETIVOS	14
1.2.1	Objetivo Geral.....	14
1.2.2	Objetivos Específicos	14
1.3	JUSTIFICATIVA.....	15
2	REFERENCIAL TEÓRICO	16
2.1	MODELOS DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO	16
2.1.1	Planejamento das necessidades de Materiais.....	16
2.1.2	Programação Linear	19
2.2	PROGRAMAÇÃO ROBUSTA.....	21
2.2.1	Preliminares em programação Robusta	21
2.2.2	Formulações matemáticas iniciais sobre programação robusta	23
2.2.3	Abordagem de Soyster (1973) e abordagem de Bertsimas (2004)	27
3	MODELO PROPOSTO.....	29
3.1	MODELO DE SOYSTER (1973) APLICADO AO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO	30
3.2	MODELO DE BERTSIMAS E SIM (2004) APLICADO AO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO	33
3.3	ILUSTRAÇÃO NUMÉRICA.....	35
3.3.1	Resultados do modelo considerando a abordagem de Soyster (1973)	43
3.3.2	Resultados do modelo considerando a abordagem de Bertismas e Sim (2004)	48
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES.....	55
5	REFERÊNCIAS.....	57

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONTEXTO

Realizar o planejamento da produção nas empresas de manufatura tem se tornado progressivamente uma tarefa complexa, e cara. Ademais, o aumento da concorrência e da competitividade do mercado tem obrigado as empresas a buscarem, cada vez mais, sistemas de produção que sejam simultaneamente eficazes e eficientes, de forma que possam atingir seus objetivos organizacionais utilizando os recursos disponíveis da melhor forma possível. Ou dito de outra forma, os objetivos organizacionais das empresas de manufatura incorporam pelos menos um novo desafio: A obtenção de um bom sistema de tomada de decisões de produção, que tenha a propriedade de ter custo mínimo.

Desde a década de 1970, tem sido implementados em um grande número de organizações de médio e grande porte sofisticados sistemas de suporte à tomada de decisão, tais como *Master Production Schedule* – MPS, *Material Requirements Planning* – MRP, e *Enterprise Resource Planning* - ERP's. Todavia, tais modelos fornecem apenas soluções viáveis para o problema de planejamento da produção, no sentido de não considerar o atendimento de alguns critérios de otimalidade, por consequência a qualidade da solução encontrada não fornece uma análise adequada tanto em relação aos custo quanto em relação a sensibilidade. Além disso, a utilização da técnica do MRP para problemas de grande porte torna-se inviável em relação a quantidade de esforço empregado para encontrar uma solução viável.

Diante desse cenário, modelos de Programação Linear (PL) têm sido propostos e amplamente utilizados para resolver problemas de planejamento da produção, que nas indústrias são comumente constituídos por decisões referentes ao volume de produção, política de estoque, e volume de liberações de produtos (*Releases*) para o sistema produtivo, ao longo do horizonte de planejamento.

Na maioria dos casos, a desvantagem dos modelos de PL são que eles assumem que a produção é instantânea, ao final de cada período, os releases são instantâneos, no início de cada período, e o planejamento sempre considera todo o horizonte de planejamento, ou seja, modelos de PL não são capazes de

atender a possíveis variações dentro do intervalo entre o início e o término dos períodos. Portanto, os modelos de PL consideram que os parâmetros de planejamento são completamente determinísticos (SLACK, 2009; HOPP & SPEARMAN, 2001).

Portanto, realizar o planejamento da produção de maneira eficiente, é um grande desafio principalmente quando, na vivência do dia-a-dia do chão de fábrica, existe grande variabilidade nos parâmetros usados nos modelos.

Para lidar com o fato de que os parâmetros do problema estão sujeitos a variações ao longo do horizonte de planejamento, propõe-se o uso de uma abordagem robusta, que é uma técnica de pior caso, que busca alcançar soluções viáveis para um problema, considerando o pior cenário de realização das incertezas. Em outras palavras, busca resolver o modelo matemático minimizando o desvio máximo das variáveis aleatórias escolhidas para serem analisadas no modelo (BERTSIMAS, 2004; THIELE, 2006).

Portanto, a modelagem do problema de planejamento de produção por meio de uma abordagem robusta surge da necessidade de considerar a ação das incertezas nos parâmetros do modelo, e com a sua utilização, uma solução subótima é considerada com relação ao valor estimado pelo problema determinístico, onde, em geral, os parâmetros são estimados por meio de médias, sem associação a um determinado desvio padrão, como na abordagem robusta (SOYSTER, 1973).

Este trabalho busca modelar o problema de planejamento da produção que acopla um modelo de programação linear com os conceitos da *Clearing Function* por meio de um modelo de programação linear robusta de modo a aduzir ao planejador uma maior segurança nas tomadas de decisões em face da variabilidade do cenário econômico no ambiente onde a empresa opera.

Neste estudo, utiliza-se o conceito da *Clearing Function* para estimar a capacidade real do sistema produtivo, o qual estabelece que a taxa de produção em um sistema produtivo, depende de seu carregamento médio e do tempo médio de atravessamento (período entre a liberação do produto até a incorporação do produto no estoque de produtos acabados) (KARMAKAR, 1989; de SAMPAIO *et al* 2017).

Este trabalho está organizado do seguinte modo: Na Seção 1 apresenta-se uma introdução, contendo a contextualização, a organização do trabalho, o

objetivo geral, os objetivos específicos e a justificativa da pesquisa. Na Seção 2, apresenta-se uma revisão teórica do trabalho, dividida em duas partes, a primeira abordando modelos sobre planejamento da produção, tais como o planejamento das necessidades de materiais, (contemplando o MRP I e MRP II) e programação linear, e na segunda parte, abordamos as questões sobre programação robusta, e suas formulações matemáticas. Na Seção 3, apresenta-se o modelo proposto de programação linear robusta utilizando a abordagem robusta de Soyster (1973) e a abordagem robusta de Betsimas e Sim (2004), e uma ilustração numérica para ambas abordagens. Na Seção 4, apresenta as considerações finais e por fim na Seção 5 apresentamos as referências utilizadas nesta pesquisa.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

Modelar o problema de planejamento da produção que acopla a programação linear com os conceitos da *Clearing Function* como um problema de programação linear robusta, de modo a aduzir ao planejador uma maior segurança nas tomadas de decisões em face da variabilidade dos parâmetros do modelo de planejamento da produção.

1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos do trabalho são:

- a) Propor um modelo de programação linear ,que acopla os conceitos da *Clearing Function*, para resolver o problema de planejamento da produção proposto que busca otimizar os níveis de produção, estoque, *releases* e *work-in-process*;
- b) Incorporar ao modelo de programação linear o conceito de programação robusta para lidar com a variabilidade dos parâmetros do modelo;

- c) Analisar e discutir os resultados obtidos, e ilustrar numericamente o modelo proposto.

1.3 JUSTIFICATIVA

A importância deste trabalho de modelagem do problema de planejamento de produção como um problema de programação linear robusta, advém da necessidade de considerar a ação das incertezas sobre os parâmetros do modelo, no ambiente econômico onde está inserida a empresa.

Desde a década de 1950, o problema de planejamento da produção tem sido intensivamente abordado como um problema de programação matemática, e a ideia por trás disso é que além de obter soluções viáveis para o problema, o planejador está interessado também em boas soluções, em algum sentido. Todavia, as dificuldades encontradas nesse caso, advém principalmente do fato de que os parâmetros do modelo, sendo mantidos como determinísticos, limita sobremaneira o alcance do modelo. Em vista disso, a solução ótima do modelo de planejamento de produção pode não representar a melhor solução, em virtude da variabilidade presente na vivência do dia-a-dia do chão de fábrica nas empresas de manufatura.

Técnicas de programação robusta são utilizadas em ambientes de incertezas onde o planejador precisa tomar decisões viáveis. Neste cenário, este estudo abordará sobre duas abordagens robustas, a saber: Abordagem de Soyster (1973) e abordagem de Bertismas e Sim (2004). Consideramos neste trabalho como parâmetro estocástico apenas a demanda, contudo, em modelos reais de chão-de-fábrica, é possível considerar que todos os parâmetros sejam estocásticos, ou parte deles, esta escolha vai depender diretamente da qualidade de informação sobre os parâmetros, por exemplo, para parâmetros onde a qualidade de informação seja pequena, a variabilidade assumida, ou o nível de incerteza deste parâmetro associado é maior. Já em casos, onde a qualidade de informação é alta, pode-se assumir um nível de incerteza menor, ou seja, baixa variabilidade. E em casos onde o parâmetro não sofre efeito de nenhuma variação, é possível considerar as restrições nominais (determinísticas) do problema.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

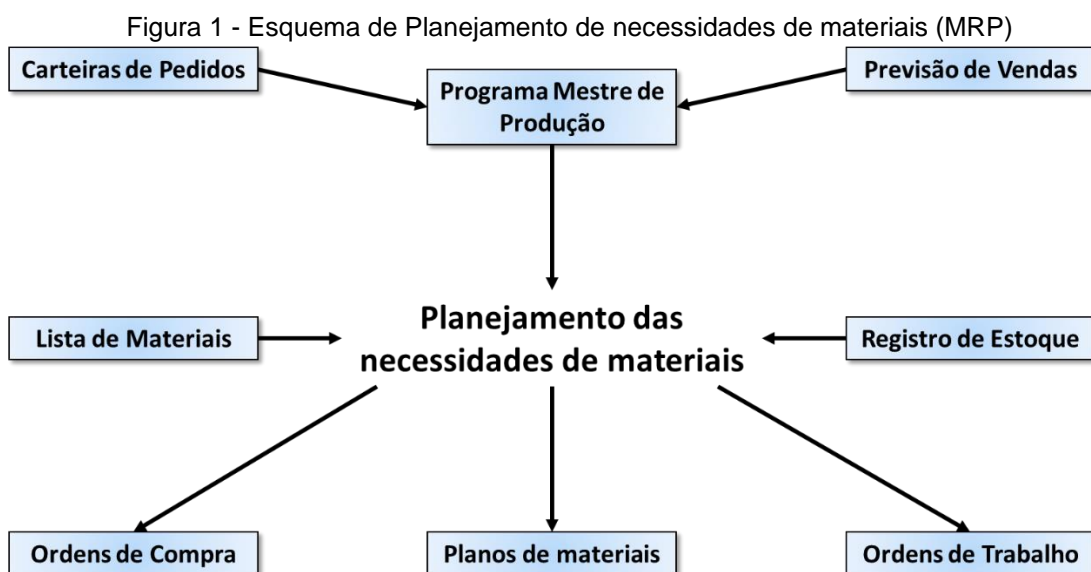
2.1 MODELOS DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

Nesta seção será apresentado os principais conceitos acerca dos modelos de Planejamento das necessidades de Materiais e de Programação Linear existentes, expondo seus pontos fortes e suas limitações.

2.1.1 Planejamento das necessidades de Materiais

Segundo Gaither (2002), o MRP é um sistema computadorizado que toma o MPS como um dado, explode o MPS na quantidade exigida de matérias-primas, peças, submontagens e montagens necessárias em cada semana do horizonte de planejamento, reduzindo pela comparação com os respectivos estoques ou recebimentos, desenvolvendo assim um programa de pedidos no horizonte de planejamento. É importante ressaltar que o MRP parte da visão do futuro da necessidade de produtos e depois vem “explodindo” para trás conforme *lead time*, nível a nível, as necessidades de componentes. Por isso, conhecido pela lógica “programação para trás” (*backward scheduling*) (CORRÊA, 2007; MARTINICH, 1997; BAKER, 1993; SLACK, 2009; HOPP & SPEARMAN, 2001).

A figura 1 apresenta as informações necessárias para que o MRP seja processado, bem como alguns de seus resultados.



Fonte: Adaptado de Slack, 2009.

Neste trabalho, a mecânica do processamento do MRP não será considerada em detalhes, dessa forma, a seguir, busca-se considerar certos aspectos técnicos que afetam seu desempenho, para justificar a sua não utilização deste sistema nesse trabalho.

O MRP possui algumas fraquezas que precisam ser salientadas para comparação das ferramentas estudadas, que embasam o modelo proposto. As três mais importantes são: (i) Inviabilidade da capacidade de programações do MRP, (ii) *Lead Times* planejados para um período de tempo longo, (iii) Instabilidade do Sistema (BACKER, 1993; HOPP & SPEARMAN, 2001; KAMARKAR, 1989).

i. Inviabilidade da capacidade de programações do MRP.

O modelo básico do MRP é uma linha de produção com prazos fixos. Como esse prazo leva em conta o volume de trabalho da indústria, existe uma suposição implícita de que a linha terá sempre capacidade suficiente, não importando a carga de trabalho. De outro modo, o MRP assume que todas as linhas de produção têm capacidade infinita. Portanto, isso pode criar problema quanto aos níveis de produção quando estão próximos de sua capacidade máxima (HOPP & SPEARMAN, 2001; BACKER, 1993).

ii. *Lead Times* planejados para um período de tempo longo.

Os problemas causados por prazos longos são agravados pelo fato de o MRP usar *lead times* constantes, quando na realidade eles variam constantemente. Para compensar, em geral, o planejador faz a opção pela estimativa pessimista (mais longa) dos *lead times*. Portanto, quanto mais longo um *lead time* planejado, mais tempo as peças ficaram esperando até serem utilizadas por uma próxima operação, de forma que estoques maiores serão formados no sistema. Esse comportamento degrada o sistema e impacta no aumento de níveis de estoque e de *Work-in-process* (WIP) (BAKER, 1993; HOPP & SPEARMAN, 2001; KAMARKAR, 1989).

iii. Instabilidade do Sistema.

A instabilidade em um sistema de MRP ocorre quando uma pequena alteração no MPS resulta em uma grande alteração na liberação de ordens

planejadas, podendo causar efeitos adversos no sistema (BAKER, 1993; HOPP & SPEARMAN, 2001).

Como essas três fraquezas apresentadas podem subverter a eficácia de um sistema de MRP, foram desenvolvidos, ao longo do tempo, novos procedimentos para solucionar alguns desses problemas, que foram incorporados em um sistema mais abrangente chamado de Planejamento dos recursos de manufatura (*Manufacturing resources planning* – MRP II). Além de resolver as deficiências do MRP original, o MRP II também trouxe outras funções para fazer um sistema realmente integrado de manufatura (HOPP & SPEARMAN, 2001).

Neste trabalho a apresentação do MRP II será resumida, em virtude de carregar muita informação que não será diretamente necessária para o desenvolvimento deste estudo.

As funções adicionadas ao MRP II incluem (HOPP & SPEARMAN, 2001): Gerenciamento da demanda; Previsões de vendas; Planejamento da capacidade; Plano Mestre de Produção; Planejamento Grosseiro da capacidade; Previsões de vendas; Planejamento da Capacidade e Despacho e controle de entradas e saídas. Dentre os módulos do MRP II destaca-se o planejamento grosseiro da capacidade (RCCP) e o Planejamento das necessidades de capacidade (CRP) que foram duas tentativas desse sistema de contornar o problema de capacidade. Contudo, tanto o RCCP e o CRP não são capazes de gerar uma análise de capacidade finita. Em vez disso, realizam a carga infinita futura. Mais especificamente o CRP, prevê os tempos do término das requisições para cada centro de processamento usando prazos de produção fixos e, então, calcula sua carga ao longo do tempo. A partir disso, essas cargas são comparadas com a capacidade instalada, mas não é feita nenhuma correção para as situações com sobrecarga (HOPP & SPEARMAN, 2001).

Em virtude disso, e do aparecimento da programação linear no final da década de 1940, desde 1950 os modelos de programação matemática têm sido amplamente utilizados para resolver problemas de planejamento de produção, o qual será abordado a seguir.

2.1.2 Programação Linear

Modelos de programação matemática podem ser criados para representar aspectos importantes de um sistema ou problemas de planejamento de produção. Ao manipulá-los, pode-se entender como o sistema se comportará em meio a variadas condições, fornecendo suporte às decisões. De um modo geral, usar esses modelos é mais barato, rápido e seguro do que construir e alterar sistemas reais (MARTINICH, 1997).

A programação matemática permite ao planejador ser mais preciso, minimizar custos e incluir vários produtos agregados, e os modelos podem utilizar diferentes tipos de restrições simultaneamente (THOMAS; MCCLAIN, 1993). Os modelos podem ser desenvolvidos em várias categorias: Programação linear, otimização de rede, programação inteira mista, programação não linear, programação dinâmica, múltiplos critérios de otimização e programação estocástica (SHAPIRO, 1993).

Neste trabalho o enfoque será em modelos de programação linear (PL), ao qual, Bazaraa (1977) define como sendo um problema de minimização ou maximização de uma função linear na presença de restrições lineares sendo estas do tipo de igualdade ou desigualdade.

O modelo de programação linear para o planejamento da produção que inspira esse trabalho foi introduzido por Karmarkar (1989), o qual considerou apenas um único produto e uma única máquina, como descrito a seguir:

Parâmetros:

c_t – Custo para produzir uma unidade do produto no período t ,

h_t – Custo unitário para manter estoque no período t ,

C_t – Capacidade nominal no início do período t ,

D_t – Demanda a ser satisfeita no final do período t ,

Varáveis de decisão:

X_t – Nível de produção ao final do período t ,

I_t – Nível de estoque no fim do período t .

Modelo matemático de programação linear (1) introduzido por Karmarkar (1989):

$$\begin{aligned}
& \text{Minimizar } \sum_{t=1}^T \{c_t X_t + h_t I_t\} \\
s. a \quad & I_t = I_0 + \sum_{i=1}^t X_t - \sum_{i=1}^t D_t, \quad \forall t \quad (1) \\
& X_t \leq C_t \quad \forall t \\
& X_t \geq 0, I_t \geq 0
\end{aligned}$$

A partir deste modelo, diversas abordagens de programação matemática surgiram com a finalidade de aproximar o modelo à realidade do chão de fábrica das indústrias.

O desenvolvimento deste trabalho está baseado no modelo acima juntamente com um esquema de planejamento da produção proposto por Chu (1991), e modificado por de Sampaio *et al* (2014) e Vieira (2016), o qual, considerou um problema de mix de produção, onde os índices são descritos por:

j – Indica o período $j = 1, 2, \dots, T$.

i – Indica o produto $i = 1, 2, \dots, N$.

k – Indica o componente $k = 1, 2, \dots, K$.

Os parâmetros do modelo são:

c_{ij} – Receita unitária de produção do produto i no período j ;

γ_{ij} – Capacidade nominal de produção do produto i período j ;

D_i – Demanda do produto i ;

b_{ki} – Número de componentes k utilizados para produção do produto de uma unidade de i ;

S_{kj} – Quantidade de componentes do tipo k , disponível para ser consumido no início de j ;

R_j – Mão-de-obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser utilizado em j ;

h_i – Tempo padrão requerido para produzir uma unidade do produto i .

E a variável de decisão associada ao problema é denominada por X_{ij} que representa o nível de produção do produto i no período j ;

Então, o modelo clássico de PL para o planejamento da produção pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 & \text{Maximizar} \quad \sum_{j=1}^T \sum_{i=1}^N c_{ij} x_{ij} \\
 \text{s. a} \quad & \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^N b_{ki} x_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj} \quad \forall k, \forall t \quad (2) \\
 & \sum_{j=1}^T x_{ij} \leq D_{ij} \quad \forall i \\
 & \sum_{i=1}^N h_i x_{ij} \leq R_j \quad \forall j \\
 & \sum_{i=1}^N x_{ij} - \gamma_{ij} \leq 0 \quad \forall j \\
 & x_{ij} \geq 0
 \end{aligned}$$

No entanto, como complementação para o modelo (2), este trabalho busca introduzir os níveis de estoque, *Work-in-process –WIP*, assim como às liberações do sistema no início de qualquer período, denominado como *Release*, para posterior acoplamento dos conceitos de programação robusta.

2.2 PROGRAMAÇÃO ROBUSTA

Nesta seção, são apresentados alguns conceitos básicos de programação robusta, a ideia básica de sua programação matemática, e algumas abordagens clássicas como as de Soyster (1973), e Bertsimas (2004).

2.2.1 Preliminares em programação Robusta

A solução ótima de modelos de planejamento de produção baseados em programação matemática permite a obtenção de variáveis de decisão que podem fornecer insights sobre a realidade por meio destes modelos, todavia é preciso estimar valores aos parâmetros que serão usados nos modelos, o que nem sempre pode ser determinados com precisão (SOYSTER, 1973).

Para o tratamento da variabilidade dos parâmetros, os planejadores, em geral, podem utilizar as abordagens de otimização estocástica que consiste em

modelar o problema de maneira estocástica, desde o seu início, ou seja, já considerando a variabilidade do modelo. Contudo, a dificuldade desta metodologia, consiste em saber a real distribuição probabilística dos parâmetros incertos de entrada no modelo e apesar de que se conheça essa distribuição, a grande dimensão do problema resultante poderá gerar dificuldades do ponto de vista computacional (ALEM *et al*, 2015). Uma outra vertente consiste em modelar o problema como sendo um problema determinístico, e introduzir a variabilidade apenas na solução. Dessa forma, contribuindo assim, para o conceito de programação robusta.

A programação robusta preocupa-se em desenvolver métodos para que as soluções sejam factíveis para quaisquer realizações das variáveis aleatórias dentro de um conjunto convexo dado a *priori*, e violações das restrições não são toleradas (ALEM *et al*, 2015).

Winston (2004), representou um simples exemplo sobre a incerteza nos parâmetros de chão de fábrica, o que justifica o uso da programação robusta em problemas de planejamento da produção. Uma determinada empresa de manufatura possui i produtos ($i=1, 2, \dots, n$) pertencente ao seu processo produtivo e deseja saber a quantidade de produtos i que devem ser produzidos com a finalidade de maximizar a receita. Entretanto, é preciso que algumas restrições precisem ser satisfeitas. Restrições essas, relacionadas ao recurso de tempo (número disponível de horas de trabalho), quantidade de produção de matéria prima e quantidade mínima dos produtos.

Em processos industrializados de manufatura, o tempo gasto na produção dos produtos são considerados como um parâmetro conhecido, devido ao tipo de processo padrão. Contudo, esse tempo de produção tem a possibilidade de variar demasiadamente, em processos manuais, pois depende da produtividade do trabalhador, e apesar de ser possível de realizar estudos de tempos e movimentos com cada funcionário, ainda sim, teria variação. Com isso, a solução ótima do problema pode possuir um desempenho péssimo devido ao não cumprimento de cada restrição (WINSTON, 2004).

Além desse exemplo, de incerteza nos parâmetros de tempos de produção, existe uma gama de casos que apresentam incertezas nos parâmetros do modelo, portanto, na medida que os parâmetros incertos são modificados, mudanças significativas na solução ótima do problema surgem.

A seguir apresentamos as formulações matemáticas básicas que originaram o conceito de programação robusta.

2.2.2 Formulações matemáticas iniciais sobre programação robusta

Um clássico problema de otimização, abrange a minimização ou a maximização de uma determinada função objetivo, sujeito a um conjunto de restrições. Contudo, em um caso real de chão de fábrica, como já visto, os parâmetros do modelo estão sujeitos a variabilidade. E estas incertezas podem estar presentes tanto nos parâmetros associados a função objetivo, quanto nas restrições. Portanto, para resolver um problema considerando a incerteza nos parâmetros torna-se uma tarefa extremamente complexa, comparado a uma simples resolução de um modelo determinístico de PL. Uma possibilidade para tratar este tipo de problema consiste em verificar o pior caso, em outras palavras, encontrar a solução que minimiza a maior função objetivo.

Para ilustrar este tipo de problema, Rustem e Howe (2002), definiram modelos robustos como problemas que se originam do conceito de *minimax*, ou seja, a minimização da perda máxima possível. Dessa forma, com a finalidade de minimizar de forma robusta um determinado problema de programação linear em sua forma padrão, dado abaixo (3):

$$\begin{array}{l} \text{s.a} \\ \min_x z(x) = c^t x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array} \quad (3)$$

Aplica-se o conceito de *minimax*, o qual pode ser representado da seguinte forma (4) que representa um modelo padrão de programação linear robusta:

$$Z(x, \alpha) = \max_{\alpha \in \delta} \{ \min_x z(x) \} \quad (4)$$

Onde α representa as incertezas, e que podem variar em um conjunto de incertezas relacionadas aos parâmetros incertos δ .

Considerando um conjunto δ contínuo, com intervalo do tipo $[\alpha' - \epsilon, \alpha' + \epsilon]$, onde α' corresponde ao valor esperado para o parâmetro incerto e ϵ a

amplitude do intervalo simétrico a resolução do modelo possui agora a seguinte característica (5):

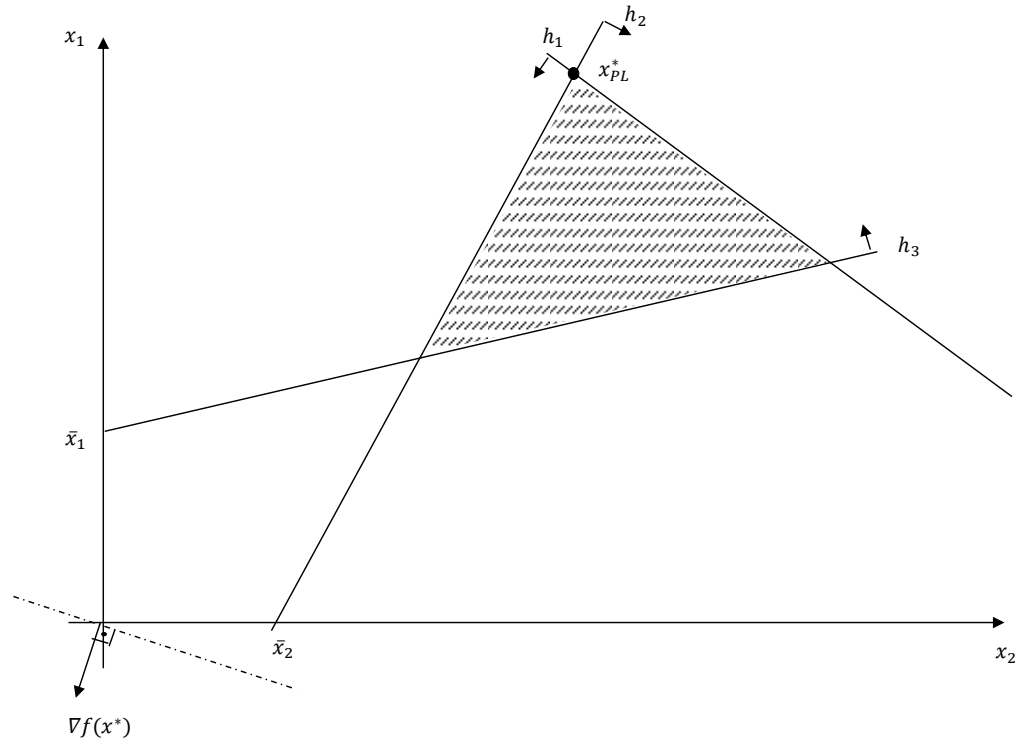
$$Z(x, \alpha) = \max_{\alpha} \{ \min_x z(x) \mid \alpha' - \epsilon \leq \alpha \leq \alpha' + \epsilon \} \quad (5)$$

Portanto, pode-se desenvolver um modelo robusto por meio da aplicação do conceito de *minimax* (5) ao problema original (3), (RUSTEM; HOWE, 2002).

Com a utilização da programação robusta, uma solução subótima é considerada com relação ao valor nominal para as variáveis (caso do problema determinístico), porém, caso os parâmetros sofram uma variação, a solução robusta garante a factibilidade. Outra vantagem, é que em qualquer cenário, contido no intervalo definido para a realização dos parâmetros incertos, a solução robusta, em relação ao pior cenário, terá desempenho superior. Em outras palavras, a robustez, permitida pelo problema *minimax*, surge da ideia de que, de forma simultânea, busca-se encontrar a melhor estratégia correspondente ao pior cenário possível (ALEM *et al*, 2015).

Para esclarecer o conceito da programação robusta, a seguir apresentamos uma ilustração gráfica de um modelo de programação linear, com duas variáveis de decisão e três restrições onde busca-se a minimização de custos.

Figura 2 – Ilustração gráfica de um modelo de Programação Linear – Problema Determinístico.

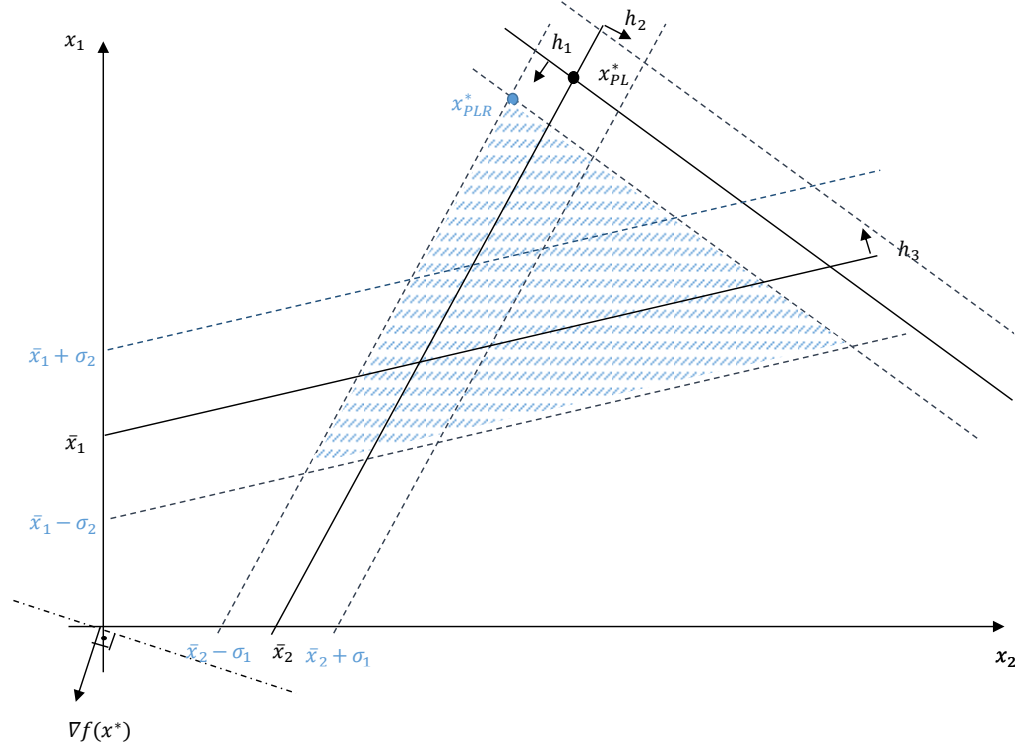


Fonte: Autor.

Este modelo (figura 2) trata os parâmetros como valores conhecidos, ou seja, é um modelo completamente determinístico, onde foram estimados valores aos parâmetros e por consequência, como solução ótima, apresentam-se valores médios para \bar{x}_1 e \bar{x}_2 . Contudo, este modelo não é capaz de atender a nenhuma variação nos parâmetros iniciais do modelo, dessa forma, comprometendo a factibilidade da solução para o caso de uma realização para os parâmetros do modelo serem diferentes dos inicialmente projetados.

Na figura 3, foi introduzido o conceito de programação robusta no modelo de PL.

Figura 3 - Ilustração gráfica de um modelo de Programação Linear Robusta



Neste ilustração, apresenta o novo conjunto de realização para a solução ótima, onde o politopo fechado e limitado sofre uma alteração em relação ao problema nominal. Nota-se que a solução ótima corresponde ao valor médio menos o desvio padrão para cada restrição, prejudicando o valor da solução ótima para o problema nominal, logo, há um acréscimo no valor dos custos totais do problema, e este se caracteriza como sendo o pior cenário, visto que se busca a minimização dos custos. Contudo, agora os parâmetros do modelo são capazes de incorporar uma determinada variabilidade garantindo a factibilidade do modelo no intervalo de realização das variáveis entre $\bar{x}_1 \mp \sigma_2$ e $\bar{x}_2 \mp \sigma_1$. É importante ressaltar, que os desvios relacionados aos valores médios podem ser diferentes, pois depende diretamente da qualidade da informação sobre cada parâmetro. Portanto, esta é a ideia do conceito de programação robusta, ao qual busca-se a minimização da máxima perda possível, em outras palavras, busca-se a melhor estratégia correspondente ao pior cenário.

A figura 3 apresenta claramente uma perturbação no vetor dos recursos associados às restrições funcionais do modelo de programação linear ilustrado no gráfico como exemplo. Na literatura há diversos trabalhos que exploram o impacto que ocorre no modelo diante de perturbações. Para melhor compreensão do leitor sobre este tipo de abordagem, o leitor poderá consultar

VOLPI (1997), o qual apresenta um modelo de programação linear utilizado para resolver um problema de planejamento florestal diante do impacto de perturbações estocásticas, com a finalidade de escolher o melhor regime de manejo para cada estrato florestal, de forma a maximizar o Valor Líquido Presente Geral, sujeito a restrições de ordens técnicas e econômicas.

2.2.3 Abordagem de Soyster (1973) e abordagem de Bertsimas (2004)

O conceito de programação robusta foi explicado no tópico anterior, principalmente em relação ao caso do problema *minimax*, contudo diferentes abordagens surgiram ao longo do tempo com a finalidade de aprimorar a abordagem robusta. Em geral, a maior diferença entre as abordagens existentes, consiste principalmente no intervalo adotado para os parâmetros incertos, o qual os autores denominam como contraparte robusta. Um dos pioneiros a tratar sobre a programação robusta foi Soyster em 1973.

Soyster (1973) define que os parâmetros de valor desconhecido são definidos como pertencentes a um intervalo fechado e simétrico, com centro no valor esperado para o parâmetro incerto.

Soyster (1973), usou o termo “caixa de incertezas” para referenciar os intervalos relacionados aos parâmetros incertos, expresso da seguinte forma:

$$[\delta' - \epsilon, \delta' + \epsilon],$$

Onde δ' corresponde ao valor esperado para o parâmetro incerto e ϵ a amplitude do intervalo simétrico. Portanto, à medida que se aumenta a amplitude da “caixa de incertezas”, maior é a variedade de cenários futuros, aos quais o modelo se manterá robusto, ou seja, a solução obtida será factível para um intervalo maior.

Com isso, o conceito de Soyster não define limites quanto ao conjunto dos parâmetros incertos (o que leva a possuir formulação matemática semelhante ao problema (4) apresentado como conceito inicial), ou seja, ele alega que o pior resultado irá se realizar, o que em geral, é uma visão demasiado pessimista sobre os eventos econômicos.

A vantagem da abordagem de Soyster (1973) consiste em sua simplicidade e fácil aplicação em diversos problemas reais, além de conservar o problema de forma linear. Contudo, prejudica demasiadamente o desempenho

no valor obtido pela função objetivo comparado ao problema de otimização nominal, logo, isso pode resultar em soluções extremamente conservadoras.

Para contornar esse problema de conservadorismo da abordagem de Soyster, os pesquisadores Bertsimas e Sim, em 2004, apresentaram uma abordagem nova para o tratamento das incertezas dos parâmetros, com a introdução do conceito de “preço da robustez”. Ou seja, as realizações dos parâmetros incertos podem ser controladas dentro do intervalo, de forma que não necessariamente tenham que assumir o pior cenário possível, o que degradaria demasiadamente o valor da função objetivo.

Bertsimas e Sim (2004) introduzem a restrição abaixo (5), que proporciona maior domínio sobre o conservadorismo.

$$\left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{|a_{ij} - a'_{ij}|}{S_{ij}} \right) \right) \leq \Gamma \quad \forall i \quad (5)$$

Onde $a_{ij} - a'_{ij}$ demonstra a diferença entre: os valores que podem ser assumidos pelos parâmetros incertos (a_{ij}) e o valor nominal (a'_{ij}), divididos pela amplitude do intervalo simétrico (S_{ij}). Dessa forma, quanto menor o valor declarado para o parâmetro Γ (preço da robustez), menor será a variação entre os parâmetros incertos e seus valores nominais. Por exemplo, o modelo de Soyster (1973), assume que as realizações dos parâmetros incertos acontecerão para o pior caso, logo o valor de Γ é igual a 1 (um), ou seja, o valor máximo a ser obtido, por isso denomina-se que este é um modelo conservador, e a medida que o valor de Γ se aproxima de zero, menor é o conservadorismo do modelo, e por consequência, menor é o intervalo de realizações das variáveis.

A vantagem desta abordagem é que o valor obtido da função objetivo não é prejudicado excessivamente, quando comparado ao modelo de otimização nominal. Em contrapartida, a probabilidade de uma variável se realizar fora do conjunto definido, ao qual a solução se manterá robusta, é maior, por isso, Bertsimas e Sim (2004) definiram este parâmetro como preço da robustez, pois é o preço que o tomador de decisão está disposto a pagar por ter uma função objetivo melhor, porém, o risco que o mesmo assume é maior (BERTSIMAS & SIM, 2004).

3 MODELO PROPOSTO

O modelo de programação linear que será utilizado para introdução dos conceitos de programação robusta possui 4 conjuntos de variáveis de decisão, a saber:

Tabela 1 - Variáveis de decisão

X_{ij}	Níveis de produção do produto i no período j .
I_{ij}	Níveis de estoque do produto i no período j .
R_{ij}	Níveis de Work-in-process do produto i no período j .
W_{ij}	Níveis de Release do produto i no período j .

Os Parâmetros utilizados no modelo são:

Tabela 2 - Parâmetros

c_{ij}	Custo unitário de Produção.
h_{ij}	Custo unitário de manipulação de Estoques.
w_{ij}	Custo unitário de <i>Work-in-process</i> .
r_{ij}	Custo unitário de Release.
γ_{ij}	Capacidade nominal.
D_{ij}	Demanda do produto i no período j .
b_{ki}	Número de componentes do tipo k usados para a produção do produto i .
S_{kj}	Quantidade de components do tipo k , disponível para ser consumido no início do período j .
Z_j	Mão-de-obra (em unidades padrão de tempo) disponível para ser usado no período j .
z_i	Tempo padrão requerido para produzir uma unidade do produto i .

Assim, o modelo de programação linear proposto é o seguinte (4):

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \{c_{ij}X_{ij} + h_{ij}I_{ij}\} \\
 \text{s. a} \quad & \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^I b_{ki}X_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj} && \forall k, \forall t \\
 & I_{ij} = I_{ij-1} + X_{ij} - D_{ij} && \forall i, \forall j \\
 & X_{ij} \leq \frac{N_{ij} \cdot W_{ij}}{K_{ij} + W_{ij}} && \forall i, \forall j \\
 & \sum_{j=1}^t X_{ij} \geq \sum_{j=1}^t D_{ij} && \forall i, \forall t \\
 & \sum_{i=1}^I z_i X_{ij} \leq Z_j && \forall i, \forall j \\
 & X_{ij} \geq 0, I_{ij} \geq 0
 \end{aligned}$$

Onde $\gamma_{ij} = \rho_{ij} \varphi_j(\bar{W}_j, \bar{T}C_j)$, $\forall i, \forall j$, $\rho_{ij} \geq 0$ e $\sum_{i=1}^N \rho_{ij} = 1$.

Onde os índices $i=1,2,\dots,I$; $j=1,2,\dots,J$; $k=1,2,\dots,K$.

O parâmetro de capacidade (γ_{ij}) do modelo de programação linear (4) é governado pelo conceito de *Clearing Function*, o qual estabelece que a taxa de produção em um sistema produtivo, depende de seu carregamento médio por período (\bar{W}_j) e do tempo médio de atravessamento por período ($\bar{T}C_j$), (período entre a liberação do produto até a incorporação do produtos no estoque de produtos acabados) .

A *Clearing Function* (CF) é uma função utilizada para estimar a capacidade do sistema produtivo, e é proveniente de uma interpretação da *lei de little*.

$$W = X \cdot CT$$

Do ponto de vista do sistema de manufatura, W representa o *work-in-process* médio do sistema, CT corresponde ao tempo médio de ciclo do sistema, X corresponde a taxa média de produção do sistema.

Contudo, no dia-a-dia do chão de fábrica, a taxa média de produção (X) depende do carregamento do sistema e também do tempo de ciclo do sistema, o qual pode ser explorado como a soma entre os tempos de produção (TP) e os todos os outros tempos no sistema (S), tais como: os tempos de fila, tempos de *setup*, tempos de espera em locais de trabalho, tempos de movimentação entre os centros de trabalhos, dentre outros, dessa forma, o tempo de ciclo do sistema pode ser expressado da seguinte forma:

$$CT = TP + S$$

Considerando podemos interpretar que o tempo de processamento do sistema é razão entre o *work-in-process* médio do sistema e a capacidade nominal, a saber:

$$TP = \frac{W}{N}$$

Temos a *Clearing Function* em função do carregamento do sistema e os todos outros tempos do sistema:

$$X(W, S) = \frac{N \cdot W}{N \cdot S + W}$$

Dessa forma, podemos estimar a capacidade real do sistema produtivo levando em consideração o carregamento e todos os tempos associados ao processo produtivo.

Existem pelo menos duas maneiras diferentes de explorar a CF, definidas em *de SAMPAIO, R, et al., (2014)* e *de SAMPAIO, R, et al., (2017)*, a saber: (i) a CF em função da proporcionalidade do carregamento e em (ii) função da proporcionalidade da capacidade nominal:

1) CF em função da proporcionalidade do carregamento do sistema:

$$X(W, S) = \frac{N}{NS + W} \cdot W = \alpha(W, S) \cdot W$$

Onde $\alpha(W, S)$ deve ser sempre maior do que zero e menor do que 1, pois a taxa de produção não pode ser maior que o carregamento.

Nesta abordagem para esta função $\alpha(W, S)$, trata-se de uma função convexa decrescente, devido as primeiras derivadas parciais em relação ao carregamento serem negativas e a hessiana da função ser definida positiva. Portanto, a função básica desta abordagem é de medir qual a proporção de carregamento que é transformado em produção.

2) CF em função da proporcionalidade da capacidade nominal do sistema:

$$X(W, S) = \frac{W}{NS + W} \cdot N = \beta(W, S) \cdot N$$

Como uma função de capacidade, nesta função podemos observar que o denominador da função é maior que o numerador, pois a capacidade nominal é sempre maior do que zero e os tempos são maiores ou iguais que zero, então esta relação é menor ou igual a 1. Quando os outros tempos (S) forem iguais à zero, então a função $\beta(W, S)$ é igual a 1, logo, a taxa de produção é igual a taxa nominal. Do ponto de vista da engenharia, havendo carga no sistema, e todos os tempos forem iguais a zero, então o sistema está trabalhando em sua taxa máxima de produção, que é exatamente a sua taxa nominal.

Nesta abordagem para esta função $\beta(W, S)$, trata-se de uma função quadrática indefinida, devido a hessiana ser indefinida. Portanto, a função básica desta abordagem é de medir qual a proporção da capacidade nominal que é transformado em produção.

Diante desse comportamento apresentado, a forma gráfica da função trata-se de uma sela.

Estas abordagens permitem definir a capacidade real disponível de produção do sistema, permitindo assim uma melhor gestão da capacidade.

3.1 MODELO DE SOYSTER (1973) APLICADO AO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

Nesse modelo (4), o parâmetro relacionado à demanda é tratado como um parâmetro conhecido o que pode gerar um risco considerável quanto à sua realização em diferentes níveis dos inicialmente projetados, e nesse caso a solução ótima obtida poderá violar uma ou mais das restrições do problema. Portanto, apresentando como solução ótima, uma solução infactível.

Técnicas de programação linear robusta podem ser aplicadas ao problema de planejamento da produção (modelo 4, apresentado anteriormente), e para este caso, apresentamos uma análise robusta definida a partir da abordagem desenvolvida em Soyster (1973).

O parâmetro incerto adotado neste trabalho é a demanda. Com isso, o vetor da demanda sofre uma perturbação orientada para o pior cenário, que neste caso, somamos à demanda média o desvio padrão correspondente, pois quanto maior o valor assumido pela demanda, maior serão os níveis de produção, e por consequência, haverá um acréscimo no valor dos custos totais, caracterizando-o como o pior cenário. Uma outra forma, de observar este fato, é por meio de uma análise gráfica, como apresentado na figura 2 e 3, contudo, é importante ressaltar que os vetores de custos do problema em análise, são todos positivos, logo o gradiente da função encontra-se orientado no sentido de máximo crescimento no primeiro quadrante com valores reais não negativos. Logo, tem-se a seguinte atribuição para o vetor de demanda (perturbação da demanda).

$$\tilde{D}_{ij} = \bar{D}_{ij} + \sigma_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (5)$$

Onde \bar{D}_{ij} é o parâmetro médio estimado para a demanda e σ_{ij} corresponde ao desvio padrão associado a média, e \tilde{D}_{ij} indica os parâmetros de valores desconhecidos (vetor da demanda perturbado), em que, de acordo com

a abordagem robusta de Soyster, este valor incerto (\bar{D}_{ij}) pode variar sobre um conjunto contínuo de incertezas δ com intervalo do tipo $[\bar{D}_{ij} - \sigma_{ij}, \bar{D}_{ij} + \sigma_{ij}]$.

Adicionando essa restrição (5) ao modelo de programação linear (4) podemos obter um modelo de programação linear robusta (6) que leva em conta as variações nos parâmetros de realização da demanda.

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} \quad \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \{c_{ij}X_{ij} + h_{ij}I_{ij} + w_{ij}W_{ij} + r_{ij}R_{ij}\} \\
 \text{s. a} \quad & \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^I b_{ki}X_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj} \quad \forall k, \forall t \\
 & I_{ij} = I_{ij-1} + X_{ij} - (\bar{D}_{ij} + \sigma_{ij}) \quad \forall i, \forall j \\
 & W_{ij} = W_{ij-1} + R_{ij} - X_{ij} \quad \forall i, \forall j \\
 & X_{ij} - \gamma_{ij} \leq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (6) \\
 & \sum_{j=1}^t X_{ij} \geq \sum_{j=1}^t (\bar{D}_{ij} + \sigma_{ij}) \quad \forall i, \forall t \\
 & \sum_{i=1}^I z_i X_{ij} \leq Z_j \quad \forall i, \forall j \\
 & X_{ij} \geq 0, I_{ij} \geq 0, W_{ij} \geq 0, R_{ij} \geq 0
 \end{aligned}$$

Dessa forma, o modelo (4) torna-se um modelo de programação linear robusta, e, portanto, mais capaz de absorver as variações nos parâmetros incertos para o horizonte de planejamento.

3.2 MODELO DE BERTSIMAS E SIM (2004) APLICADO AO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO DA PRODUÇÃO

O modelo de Soyster (1973) é considerado um modelo conservador, pois parte da premissa que o pior cenário para os parâmetros incertos irá se concretizar. Por esse motivo, Bertsimas e Sim (2004) apresentam uma nova definição para a realização dos parâmetros incertos, em que é possível controlar o conservadorismo do modelo por meio de parâmetro Γ , conhecido como “preço da robustez”.

O novo intervalo considerado por estes autores é o seguinte:

$$I = \left\{ A \in R^{m \times n}: a_{i,j} \in [\bar{a}_{i,j} - \alpha_{i,j}, \bar{a}_{i,j} + \alpha_{i,j}], \forall i, j; \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{\bar{a}_{i,j} - \alpha_{i,j}}{\sigma_{ij}} \right) \right) \leq \Gamma, \forall j \right\} \quad (7)$$

Onde $\tilde{a}_{i,j}$ representa o parâmetro incerto a ser realizado e $\bar{a}_{i,j}$ representa o valor médio para o parâmetro, e $\sigma_{i,j}$ indica o desvio padrão, relativos a linha i e coluna j de uma matriz de incertezas. E o parâmetro Γ representa o parâmetro de controle do conservadorismo do modelo, ou, como Bertsimas e Sim (2004) definiram, o “preço da robustez”. O termo $\frac{a_{i,j} - \bar{a}_{i,j}}{\sigma_{i,j}}$, representa um indicador que varia entre 0 e 1, onde $a_{i,j} - \bar{a}_{i,j}$, corresponde à diferença entre o valor aleatório de realização para o parâmetro incerto ($\tilde{a}_{i,j}$) e a média ($\bar{a}_{i,j}$). Portanto, é possível observar que essa diferença se trata de um desvio padrão a ser realizado, e dessa forma, quando dividido pelo desvio padrão ($\sigma_{i,j}$) associado com o valor médio, obtém-se uma relação entre desvios padrão. Com isso, é possível limitar o espaço de realização do parâmetro incerto ($\tilde{a}_{i,j}$) por meio do parâmetro Γ . Onde quanto mais próximo de 1, indica que a realização do parâmetro correspondeu ao pior caso (abordagem de Soyster) e quanto mais próximo de 0, menor é a amplitude de realização, e conseqüentemente, têm-se um modelo menos conservador. Logo, este é o preço que o tomador de decisão está disposto a pagar para obter uma solução ótima com custos mínimos (como o objetivo deste modelo proposto é a minimização de custos), porém, o risco que o mesmo assume é maior de que os parâmetros incertos possam acontecer fora do intervalo de incerteza e inviabilizar a solução.

Como dito anteriormente, as incertezas do modelo de planejamento da produção proposto encontram-se na demanda, e com o objetivo de implementar a restrição de Bertsimas e Sim (2004) ao modelo proposto (4), tem-se as seguintes modificações:

$$\frac{\tilde{D}_{ij} - \bar{D}_{ij}}{\sigma_{ij}} \leq \Gamma \quad \forall i, \forall j \quad (8)$$

Isolando $\tilde{D}_{i,j}$, tem-se que,

$$\tilde{D}_{ij} \leq \bar{D}_{ij} + \Gamma \times \sigma_{ij} \quad \forall i, \forall j \quad (9)$$

Portanto, observa-se que com a nova atribuição para a demanda é possível limitar a amplitude do problema inicial, dito de outra forma, é possível reduzir a variação aceita para o desvio padrão. Resultando em um novo domínio

(amplitude) para a realização do parâmetro de incertezas (demanda) para o modelo (4):

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} \sum_{j=1}^J \sum_{i=1}^I \{c_{ij}X_{ij} + h_{ij}I_{ij} + w_{ij}W_{ij} + r_{ij}R_{ij}\} \\
 \text{s. a} \quad & \sum_{j=1}^t \sum_{i=1}^I b_{ki}X_{ij} \leq \sum_{j=1}^t S_{kj} \quad \forall k, \forall t \\
 & I_{ij} = I_{ij-1} + X_{ij} - (\bar{D}_{ij} + \Gamma \times \sigma_{ij}) \quad \forall i, \forall j \\
 & W_{ij} = W_{ij-1} + R_{ij} - X_{ij} \quad \forall i, \forall j \\
 & X_{ij} - \gamma_{ij} \leq 0 \quad \forall i, \forall j \quad (10) \\
 & \sum_{j=1}^t X_{ij} \geq \sum_{j=1}^t (\bar{D}_{ij} + \Gamma \times \sigma_{ij}) \quad \forall i, \forall t \\
 & \sum_{i=1}^I z_i X_{ij} \leq Z_j \quad \forall i, \forall j \\
 & X_{ij} \geq 0, I_{ij} \geq 0, W_{ij} \geq 0, R_{ij} \geq 0
 \end{aligned}$$

3.3 ILUSTRAÇÃO NUMÉRICA

Para ilustração numérica do modelo proposto consideramos um sistema produtivo com três produtos, cada um com dois diferentes componentes e um horizonte de planejamento de 6 períodos.

O parâmetro estocástico do modelo foi obtido por meio de 30 simulações de dados de demanda para cada produto com a finalidade de obter-se a média e o desvio padrão associado. As simulações foram geradas usando o software *R statistical* e com base em uma distribuição normal. É importante ressaltar que o modelo proposto neste estudo não depende de nenhuma distribuição de probabilidade para sua realização, contudo para ilustração numérica foi utilizado a distribuição normal.

Considerando o produto 1 ao longo do horizonte de planejamento, tem-se:

Tabela 3 - 30 Simulações para o produto 1

	D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}
1ª simulação	17,69	18,73	18,16	24,16	25,29	15,40
2ª simulação	14,61	17,95	22,63	22,69	18,16	16,31
3ª simulação	15,62	16,93	19,65	20,06	21,37	16,98
4ª simulação	15,39	15,77	17,85	26,17	20,75	20,18
5ª simulação	12,90	15,34	18,89	20,71	23,92	20,81
6ª simulação	11,30	18,05	18,44	20,64	14,09	22,61
7ª simulação	10,82	24,64	16,86	13,01	24,61	17,06
8ª simulação	16,35	15,93	17,87	18,99	17,98	17,99
9ª simulação	10,42	16,98	19,66	13,30	19,61	16,41
10ª simulação	6,00	11,03	18,29	19,89	15,92	21,99
11ª simulação	20,50	17,71	19,03	18,77	14,11	17,18
12ª simulação	16,00	11,78	17,71	22,45	15,49	19,69
13ª simulação	16,93	14,35	18,01	15,87	18,03	17,70
14ª simulação	15,98	16,20	19,95	15,39	16,98	21,92
15ª simulação	13,72	24,29	17,81	21,42	20,06	19,72
16ª simulação	16,86	15,59	10,92	14,19	14,03	17,93
17ª simulação	8,90	14,64	13,87	17,36	13,05	15,33
18ª simulação	17,84	14,51	18,05	15,14	18,67	17,46
19ª simulação	17,27	14,44	18,01	15,18	16,25	10,78
20ª simulação	14,19	12,93	10,79	16,50	16,51	21,01
21ª simulação	17,35	12,29	10,47	14,82	16,29	17,00
22ª simulação	15,90	10,91	13,49	11,92	14,89	16,91
23ª simulação	18,98	9,57	8,06	18,73	12,83	13,47
24ª simulação	20,76	13,49	8,51	14,49	11,50	15,20
25ª simulação	9,79	19,48	12,02	17,67	14,84	11,18
26ª simulação	18,16	17,48	19,74	14,21	11,50	18,79
27ª simulação	15,74	14,87	10,90	20,18	16,014	12,36
28ª simulação	12,06	16,83	15,97	12,04	15,42	11,71
29ª simulação	8,46	13,88	15,54	11,69	17,16	15,88
30ª simulação	13,72	12,26	9,44	18,30	12,80	15,99

Considerando o produto 2 ao longo do horizonte de planejamento, tem-se:

Tabela 4 - 30 Simulações para o produto 2

	D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{24}	D_{25}	D_{26}
1ª simulação	22,86	15,64	18,99	19,55	19,82	24,90
2ª simulação	24,21	22,63	23,25	20,76	15,61	24,33
3ª simulação	20,17	17,87	18,02	18,10	19,25	20,75
4ª simulação	22,39	16,76	25,83	19,26	24,50	26,99
5ª simulação	19,07	17,54	20,84	18,56	20,89	22,93
6ª simulação	23,25	17,61	26,29	19,79	20,81	25,90
7ª simulação	25,13	23,21	16,05	22,22	17,05	28,75
8ª simulação	24,56	20,45	18,54	20,30	20,74	24,72
9ª simulação	25,34	17,82	19,33	20,86	22,05	25,32
10ª simulação	13,85	17,44	22,64	22,40	22,06	19,15
11ª simulação	16,37	14,66	17,95	22,02	26,43	20,07
12ª simulação	16,59	11,98	20,45	20,05	20,83	20,91
13ª simulação	13,82	15,14	26,47	18,07	20,00	23,75
14ª simulação	20,50	19,93	22,35	19,69	17,62	16,65
15ª simulação	14,74	19,46	20,28	20,61	17,06	18,54
16ª simulação	16,52	16,88	18,27	19,10	17,74	13,64
17ª simulação	14,62	16,85	12,11	10,23	16,38	17,01
18ª simulação	10,83	10,15	15,82	14,05	16,89	16,56
19ª simulação	14,35	15,52	15,36	14,54	17,76	15,18
20ª simulação	7,40	15,89	13,61	16,33	12,14	18,56
21ª simulação	19,56	13,19	12,57	7,72	14,88	13,35
22ª simulação	17,11	13,13	15,01	18,02	12,61	17,02
23ª simulação	17,28	14,21	15,33	14,57	13,19	13,29
24ª simulação	12,86	17,63	15,03	17,25	14,84	17,17
25ª simulação	14,63	22,91	13,41	16,22	10,98	14,69
26ª simulação	12,14	14,58	15,01	18,10	12,91	18,38
27ª simulação	18,20	16,86	14,81	14,22	14,33	15,79
28ª simulação	11,97	16,95	18,80	13,08	8,71	12,63
29ª simulação	16,83	15,21	12,96	14,15	10,39	14,22
30ª simulação	13,27	17,95	10,98	18,85	15,34	13,67

Considerando o produto 3 ao longo do horizonte de planejamento, tem-se:

Tabela 5 - 30 Simulações para o produto 3

	D_{31}	D_{32}	D_{33}	D_{34}	D_{35}	D_{36}
1ª simulação	20,36	15,22	17,75	19,75	23,27	20,15
2ª simulação	17,51	17,31	19,35	21,75	23,59	22,28
3ª simulação	13,02	18,91	23,92	20,12	23,02	18,04
4ª simulação	20,97	17,73	20,93	21,85	16,17	19,79
5ª simulação	21,13	16,27	23,27	19,82	20,19	25,91
6ª simulação	14,80	13,46	20,80	21,00	20,10	18,63
7ª simulação	20,37	19,04	24,22	21,69	13,43	28,21
8ª simulação	13,48	16,83	22,79	23,53	26,49	26,95
9ª simulação	19,79	18,70	18,50	18,98	23,48	22,72
10ª simulação	16,25	18,21	25,87	22,19	19,80	21,56
11ª simulação	23,61	15,25	23,48	19,18	23,36	21,40
12ª simulação	11,81	20,02	19,01	20,58	15,69	13,20
13ª simulação	19,67	18,97	21,70	21,09	19,14	22,00
14ª simulação	17,22	16,28	23,01	20,02	22,20	31,42
15ª simulação	17,88	17,72	19,59	18,02	22,34	15,62
16ª simulação	11,98	9,77	13,25	19,33	19,18	11,18
17ª simulação	17,79	12,99	15,14	15,04	19,25	12,98
18ª simulação	12,46	13,12	14,51	13,04	19,54	14,56
19ª simulação	14,35	13,48	13,81	12,91	16,34	17,69
20ª simulação	18,13	17,74	13,72	13,74	16,68	13,73
21ª simulação	15,91	12,52	14,93	13,58	14,87	16,55
22ª simulação	14,29	16,73	8,14	13,97	16,08	19,96
23ª simulação	17,22	17,25	14,60	12,90	16,84	21,12
24ª simulação	15,97	15,28	19,13	15,54	13,71	10,91
25ª simulação	17,78	14,60	15,15	10,74	14,78	17,14
26ª simulação	12,74	15,18	10,97	13,89	13,50	11,41
27ª simulação	14,95	14,66	14,57	16,05	14,15	16,55
28ª simulação	18,43	13,78	15,66	17,72	10,30	12,44
29ª simulação	13,49	11,48	16,31	13,32	14,18	19,65
30ª simulação	13,72	14,80	15,22	15,17	9,65	11,85

Na tabela 6 e 7, apresenta-se o resultado referente as médias e desvio padrão para cada produto ao longo do horizonte de planejamento de 6 períodos simulados na tabela 3, 4 e 5.

Tabela 6 - Demanda média para os três produtos

Demanda média						Total
D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}	107,51
14,28	17,05	18,72	19,57	19,09	18,8	
D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{24}	D_{25}	D_{26}	
20,21	17,21	21,15	20,15	20,31	22,91	
D_{31}	D_{32}	D_{33}	D_{34}	D_{35}	D_{36}	120,12
17,86	17,33	21,61	20,64	20,82	21,86	

Tabela 7 - Desvio padrão da demanda para os três produtos

σ_{11}	σ_{12}	σ_{13}	σ_{14}	σ_{15}	σ_{16}
3,55	3,71	1,37	3,81	3,6	2,33
σ_{21}	σ_{22}	σ_{23}	σ_{24}	σ_{25}	σ_{26}
4,22	3,54	3,23	1,37	2,84	3,42
σ_{31}	σ_{32}	σ_{33}	σ_{34}	σ_{35}	σ_{36}
3,42	1,79	2,41	1,43	3,54	4,79

Na tabela 8 apresenta-se os dados de entrada de modelo, abrangendo a demanda média por período, os custos associados com a produção, estoque, *work-in-process* e releases.

Tabela 8 - Parâmetros de entrada do modelo

Período	1º	2º	3º	4º	5º	6º	Total
Demanda por período (D_{ij})	14,28	17,05	18,72	19,57	19,09	18,8	107,51
	20,21	17,21	21,15	20,15	20,31	22,91	121,94
	17,86	17,33	21,61	20,64	20,82	21,86	120,12
Custos de Produção (C_{ij})	3	2	4	2	3	2	
	4	2	2	4	5	4	
	5	4	2	5	6	5	
Custos de Estoque (h_{ij})	7	5	3	7	3	5	
	1	1	2	1	2	1	
	1	2	4	7	8	7	
Custos de WIP (C_{ij})	3	2	3	4	5	4	
	2	3	3	2	4	4	
	5	4	5	6	6	1	
Custos de Releases (r_{ij})	3	4	6	2	5	3	
	2	4	3	6	2	2	
	7	4	4	7	2	4	
Capacidade (γ_{ij})	100	100	100	100	100	100	600
	150	150	150	200	200	200	1050
	150	150	150	180	180	180	990
Disponibilidade de recursos (S_{kj})	400	400	400	500	500	500	2700
	400	400	400	500	500	500	2700
BOM (b_{ki})	3	2	2				
	3	2	2				
Tempo padrão (Z_i)	2	3	2				
Disponibilidade de tempo (Z_j)	250	250	250	200	200	200	1350

A demanda média (D_{ij}) foi considerada com base nas 30 simulações realizadas utilizando a distribuição normal, e a demanda é dada em unidades; Os custos de produção (c_{ij}), custos de estoque (h_{ij}), custos de WIP (c_{ij}) e custos de Releases (r_{ij}), são dados em unidades monetárias; A capacidade (γ_{ij}) é dada em unidades, e considerando estes parâmetros, cada linha e cada coluna da tabela 8 representam os produtos e períodos, respectivamente;

A disponibilidade de recursos (S_{kj}) é dada em quantidade de componentes k disponível para ser utilizado em cada período j , onde cada linha representa um tipo de componente e cada coluna representam os períodos. A BOM (b_{ki}), é dada em quantidade componentes do tipo k necessários para produzir uma unidade do produto i , e para este caso, cada linha da tabela 6 representa um tipo de componente e cada coluna representa um produto.

A mão de obra (z_i) (medida em tempo padrão) é dada em minutos, onde cada coluna representa um produto. E a disponibilidade mão de obra (medida em tempo padrão) (Z_j) é dada também em minutos, onde cada coluna representa um período.

As tabelas 9, 10 e 11 apresentam os resultados da solução ótima do problema de programação da produção considerando a demanda média, ou seja, os valores determinísticos, estimados inicialmente no modelo de programação linear (4).

Tabela 9 - Resultado da solução ótima para o produto 1 sem a introdução da programação robusta.

Resultado para o Produto 1 nos 6 períodos						Total
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	
14,28	17,05	18,72	19,57	19,09	18,80	107,51
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}	
14,28	17,05	18,72	19,57	19,09	18,80	107,51
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 10 - Resultado da solução ótima para o produto 2 sem a introdução da programação robusta.

Resultado para o Produto 2 nos 6 períodos						Total
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	
20,21	17,21	21,15	20,15	20,31	22,91	121,94
R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}	
20,21	17,21	41,30	0	20,31	22,91	121,94
W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}	
0,00	0,00	20,15	0,00	0,00	0,00	0,00
I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 11 - Resultado da solução ótima para o produto 3 sem a introdução da programação robusta.

Resultado para o Produto 3 nos 6 períodos						Total
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	
17,86	17,33	21,61	20,64	20,82	21,86	120,12
R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}	
17,86	17,33	21,61	20,64	42,68	0,00	120,12
W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}	
0,00	0,00	0,00	0,00	21,86	0,00	0,00
I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

O valor da solução ótima para o modelo determinístico foi de $Z^* = 2.465,91$ unidades monetárias.

Contudo, o modelo determinístico não incorpora a ação da variabilidade nos parâmetros do modelo, dessa forma, este trabalho realiza experimentos numéricos utilizando abordagens robustas. A primeira abordagem a ser utilizada é a abordagem de Soyster (1973), e em seguida, utiliza-se a abordagem de Bertsimas e Sim (2004).

Neste trabalho, o conjunto de variação de incertezas, para efeito de ilustração numérica, adota-se que todos os parâmetros estão normalmente distribuídos. Sendo assim, é necessário destacar uma importante propriedades

da distribuição normal, para melhor compreensão da ilustração numérica, a saber:

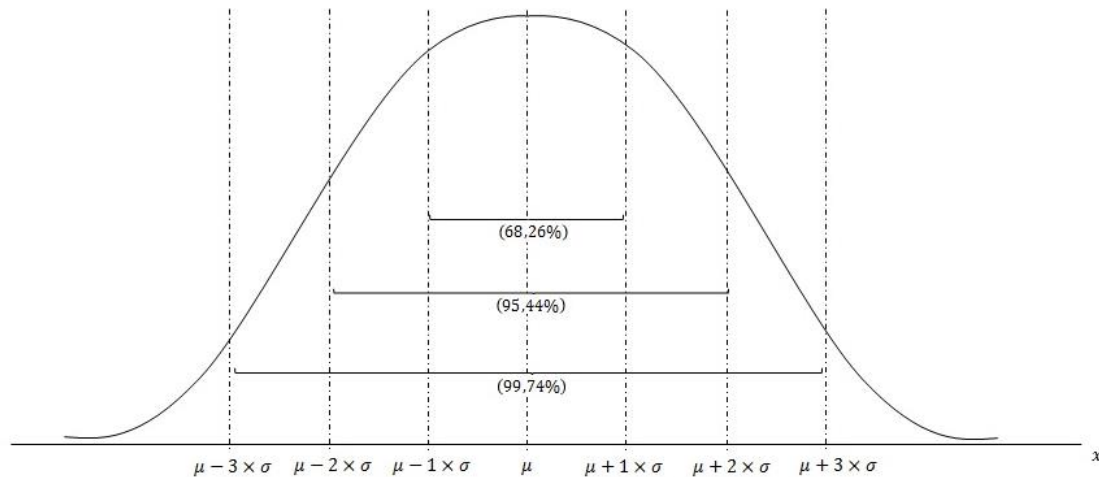
- A área sob a curva pode ser entendida como uma medida de sua probabilidade, sendo a frequência total sobre a curva normal é igual a 100%. Dessa forma, a curva normal caracteriza-se por ser uma distribuição que permite determinar probabilidades relacionadas à todos os pontos da linha da base (FREUND, 2009). Logo, a área total sob a curva é igual a 1, ou 100%, com 50% distribuídos à esquerda da média e 50% distribuídos à direita.

Sendo assim, a área sob a curva normal contida entre $\mu \pm 1 \times \sigma$, $\mu \pm 2 \times \sigma$ e $\mu \pm 3 \times \sigma$ é apresentada na tabela 12 e na figura 4 (para comprovação dos resultados de probabilidade apresentados na tabela 12, basta consultar a tabela da distribuição normal padronizada):

Tabela 12 - Propriedade da distribuição normal

Intervalo	Valor da Probabilidade
$\mu \pm 1 \times \sigma$	68,26%
$\mu \pm 2 \times \sigma$	95,44%
$\mu \pm 3 \times \sigma$	99,74%

Figura 4 - Propriedade da distribuição normal



Fonte: Autor.

Dessa forma, este estudo irá realizar um experimento numérico compreendendo a realização de três cenários para a abordagem de Soyster (1973) e Bertsimas e Sim (2004):

- i. Cenário 1: Variação de um desvio padrão;
- ii. Cenário 2: Variação de dois desvios padrão;
- iii. Cenário 3: Variação de três desvios padrão;

Esta escolha de divisão de cenários tem como finalidade comparar a sensibilidade do modelo em relação ao impacto causado nos custos totais do problema de planejamento da produção bem como em relação ao grau de confiabilidade, considerando que o conjunto de dados estudado se comporta de acordo com uma distribuição normal.

3.3.1 Resultados do modelo considerando a abordagem de Soyster (1973)

Utilizando o modelo de programação linear robusta (6), e adotando a abordagem pessimista de Soyster, para cenário 1 (variação de 1 (um) desvio padrão da demanda média), tem-se a nova demanda a ser atendida:

Tabela 13 - Nova demanda variando um desvio padrão (considerando a abordagem de Soyster).

Nova Demanda para os 3 produtos nos 6 períodos						Demanda Total/Produto
D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}	125,88
17,83	20,76	20,09	23,38	22,69	21,13	
D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{24}	D_{25}	D_{26}	140,53
24,43	20,75	24,38	21,52	23,15	26,3	
D_{31}	D_{32}	D_{33}	D_{34}	D_{35}	D_{36}	137,50
21,28	19,12	24,02	22,07	24,36	26,65	

As tabelas 14, 15 e 16, apresentam o resultado ótimo considerando o pior cenário para a realização da demanda, ou seja, utilizando o modelo de programação linear robusta (6).

Tabela 14 - Resultado da solução ótima para o produto 1 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 1 desvio padrão).

Resultado para o Produto 1 nos 6 períodos						Total
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	125,88
17,83	20,76	20,09	23,38	22,69	21,13	
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}	125,88
17,83	20,76	20,09	23,38	22,69	21,13	
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	

Tabela 15 - Resultado da solução ótima para o produto 2 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 1 desvio padrão).

Resultado para o Produto 2 nos 6 períodos						Total
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	140,53
24,43	20,75	24,38	21,52	23,15	26,3	
R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}	140,53
24,43	20,75	45,9	0,00	23,15	26,3	
W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}	0,00
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	

Tabela 16 - Resultado da solução ótima para o produto 3 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 1 desvio padrão).

Resultado para o Produto 3 nos 6 períodos						Total
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	
21,28	19,12	24,02	22,07	24,36	26,65	137,50
R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}	
21,28	19,12	24,02	22,07	51,01	0,00	137,50
W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Portanto, o valor da função objetivo inicialmente de 2.465,91 unidades monetárias aumenta para 2.849,77 unidades monetárias. Equivalente a uma variação de 15,57%. Contudo, considerando que todos os casos estão distribuídos normalmente, a variação de um desvio padrão, corresponde ao atendimento de 68,26% de todos os casos.

Considerando cenário 2, variando 2 (dois) desvios padrão da demanda média no mesmo modelo (6), tem-se a nova demanda a ser atendida:

Tabela 17 - Nova demanda variando dois desvios padrão (considerando a abordagem de Soyster).

Nova Demanda para os 3 produtos nos 6 períodos						Demanda Total/Produto
D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}	
21,38	24,47	21,46	27,19	26,29	23,46	144,25
D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{24}	D_{25}	D_{26}	
28,65	24,29	27,61	22,89	25,99	29,75	159,18
D_{31}	D_{32}	D_{33}	D_{34}	D_{35}	D_{36}	
24,70	20,91	26,43	23,50	27,90	31,44	154,88

As tabelas 18, 19 e 20, apresentam o resultado ótimo considerando o pior cenário para a realização da demanda, ou seja, utilizando o modelo de programação linear robusta (6).

Tabela 18 - Resultado da solução ótima para o produto 1 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 2 desvios padrão).

Resultado para o Produto 1 nos 6 períodos						Total
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	
21,38	24,47	21,46	27,19	26,29	23,46	144,25
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}	
21,38	24,47	21,46	27,19	26,29	23,46	144,25
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 19 - Resultado da solução ótima para o produto 2 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 2 desvios padrão).

Resultado para o Produto 2 nos 6 períodos						Total
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	
28,65	24,29	27,61	22,89	25,99	29,75	159,18
R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}	

28,65	24,29	50,5	0,00	25,99	29,75	159,18
W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 20 - Resultado da solução ótima para o produto 3 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 2 desvios padrão).

Resultado para o Produto 3 nos 6 períodos						Total
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	
24,70	20,91	26,43	23,50	27,90	31,44	154,88
R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}	
24,70	20,91	26,43	23,50	59,34	0,00	154,88
W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Portanto, o valor da função objetivo inicialmente de 2.465,91 aumenta para 3.222,63 unidades monetárias. Equivalente a uma variação de 30,69%. Contudo, considerando que todos os casos estão distribuídos normalmente, a variação de dois desvios padrões, corresponde ao atendimento de 95,44% de todos os casos.

Considerando o cenário 3 (variação de 3 (três) desvios padrão da demanda média) no mesmo modelo (6), tem-se a nova demanda a ser atendida:

Tabela 21 - Nova demanda variando três desvios padrão (considerando a abordagem de Soyster).

Nova Demanda para os 3 produtos nos 6 períodos						Demanda Total/Produto
D_{11}	D_{12}	D_{13}	D_{14}	D_{15}	D_{16}	
24,93	28,18	22,83	31,00	29,89	25,79	162,62
D_{21}	D_{22}	D_{23}	D_{24}	D_{25}	D_{26}	
32,87	27,83	30,84	24,26	28,83	33,17	177,80
D_{31}	D_{32}	D_{33}	D_{34}	D_{35}	D_{36}	
28,12	22,70	28,84	24,93	31,44	36,23	172,26

As tabelas 22, 23 e 24, apresentam o resultado ótimo considerando o pior cenário para a realização da demanda, ou seja, utilizando o modelo de programação linear robusta (6).

Tabela 22 - Resultado da solução ótima para o produto 1 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 3 desvios padrão).

Resultado para o Produto 1 nos 6 períodos						Total
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}	
24,93	28,18	22,83	31	29,89	25,79	162,62
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}	
24,93	28,18	22,83	31	29,89	25,79	162,62
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 23 - Resultado da solução ótima para o produto 2 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 3 desvios padrão).

Resultado para o Produto 2 nos 6 períodos						Total
x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}	
32,87	27,83	30,84	24,26	28,83	33,17	177,8
R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}	
32,87	27,83	55,10	0	28,83	33,17	177,8
W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}	
0,00	0,00	24,26	0,00	0,00	0,00	24,26
I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Tabela 24 - Resultado da solução ótima para o produto 3 com a introdução da programação robusta (abordagem de Soyster variando 3 desvios padrão).

Resultado para o Produto 3 nos 6 períodos						Total
x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}	
28,12	22,70	28,84	24,93	31,44	36,23	172,26
R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}	
28,12	22,70	28,84	24,93	67,67	0,0000	172,26
W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}	
0,00	0,00	0,00	0,00	36,23	0,00	36,23
I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}	
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

Portanto, o valor da função objetivo inicialmente de 2.465,91 unidades monetárias aumenta para 3.980,07 unidades monetárias. Equivalente a uma variação de 61,40%. Contudo, considerando que todos os casos estão distribuídos normalmente, a variação de dois desvios padrão, corresponde ao atendimento de 99,74% de todos os casos.

Reunindo os resultados na tabela 25, tem-se:

Tabela 25 - Resultado para os 3 cenários.

Cenários de variação para a demanda	Custo total	Variação em relação ao modelo determinístico	Probabilidade (Distribuição Normal)
Sem variação (Modelo Determinístico)	2.465,91	0,00%	
$\bar{D} \pm 1 \times \sigma$	2.849,77	15,57%	68,26%
$\bar{D} \pm 2 \times \sigma$	3.222,63	30,69%	95,44%
$\bar{D} \pm 3 \times \sigma$	3.980,07	61,40%	99,74%

Dessa forma, aceita-se uma solução subótima em relação ao problema determinístico, e apesar do valor da função objetivo ser prejudicado, a solução robusta garante a factibilidade do modelo, em qualquer realização dentro do

intervalo de incertezas considerado. Além disso, em se tratando de dados normalmente distribuídos, é possível mensurar a probabilidade de ocorrência.

3.3.2 Resultados do modelo considerando a abordagem de Bertismas e Sim (2004)

Nesta seção utiliza-se a abordagem de Bertismas e Sim (2004) no modelo de planejamento da produção (4), com a finalidade de tornar o modelo menos conservador, ou seja, controlar o conservadorismo introduzido por Soyster (1973), por meio do parâmetro Γ .

O modelo com base na abordagem de Bertsimas e Sim (2004) será testado lidando com os 3 cenários previamente apresentados. Contudo, por meio do acoplamento do parâmetro Γ , impõe que o espaço de realização dos parâmetros incertos reduz-se de acordo com o valor atribuído a este parâmetro.

Considerando o cenário 1 (variação de 1 desvios padrão da demanda) e testando para diferentes valores de Γ no modelo robusto (10) considerando a abordagem de Bertsimas e Sim(2004), tem-se:

Tabela 26 - Resultado da solução ótima considerando a variação de 1 desvio padrão para diferentes valores de Γ .

Resultado para o Produto 1							Total	Resultado para o Produto 2							Total	Resultado para o Produto 3							Total
[$\Gamma=0$]																							
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}		
14,28	17,05	18,72	19,57	19,09	18,88	107,51		20,21	17,21	21,15	20,15	20,31	22,91	121,94		17,86	17,33	21,61	20,64	20,82	21,86	120,12	
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}		
14,28	17,05	18,72	19,57	19,09	18,8	107,51		20,21	17,21	41,30	0	20,31	22,91	121,94		17,86	17,33	21,61	20,64	42,68	0,0000	120,12	
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	20,15	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	21,86	0,00	0,00	
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
[$\Gamma=0,2$]																							
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}		
14,99	17,79	18,99	20,33	19,81	19,26	111,18		21,05	17,92	21,8	20,42	20,88	23,59	125,66		18,54	17,69	22,09	20,93	21,53	22,82	123,6	
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}		
14,99	17,79	18,99	20,33	19,81	19,26	111,18		21,05	17,92	42,22	0,00	20,88	23,59	125,66		18,54	17,69	22,09	20,93	44,35	0,00	123,6	
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	20,42	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	22,8	0,00	0,00	
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
[$\Gamma=0,4$]																							
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}		
15,7	18,53	19,57	21,09	20,53	19,73	114,86		21,9	18,62	22,44	20,7	21,45	24,28	129,39		19,23	18,05	22,57	21,21	22,24	23,78	127,07	
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}		
15,7	18,53	19,57	21,09	20,53	19,73	114,86		21,9	18,62	43,14	0,00	21,45	24,28	129,39		19,23	18,05	22,57	21,21	46,02	0,00	127,07	
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	20,7	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	23,78	0,00	0,00	
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
[$\Gamma=0,6$]																							
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}		
16,41	19,28	19,54	21,86	21,25	20,20	118,53		22,74	19,33	23,08	20,97	22,01	24,73	133,11		19,91	18,4	23,05	21,5	22,94	24,73	130,55	
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}		
16,41	19,28	19,54	21,86	21,25	20,20	118,53		22,74	19,33	44,05	0,00	22,01	24,73	133,11		19,91	18,4	23,05	21,5	47,67	0,00	130,55	
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	20,97	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	24,73	0,00	0,00	
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
[$\Gamma=0,8$]																							
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}		
17,12	20,02	19,82	22,62	21,97	20,66	122,21		23,59	20,04	23,73	21,25	22,58	25,64	136,84		20,6	18,76	23,54	21,78	23,65	36,69	134,02	
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}		
17,12	20,02	19,82	22,62	21,97	20,66	122,21		23,59	20,04	44,98	0,00	22,58	25,64	136,84		20,6	18,76	23,54	21,78	60,34	0,00	134,02	
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	21,25	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	36,39	0,00	0,00	
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
[$\Gamma=1$]																							
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}		
17,83	20,76	20,09	23,38	22,69	21,13	125,88		24,43	20,75	24,38	21,52	23,15	26,3	140,53		21,28	19,12	24,02	22,07	24,36	26,65	137,50	
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}		
17,83	20,76	20,09	23,38	22,69	21,13	125,88		24,43	20,75	45,9	0,00	23,15	26,3	140,53		21,28	19,12	24,02	22,07	51,01	0,00	137,50	
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	

A seguir apresenta-se o valor da função objetivo (custos totais) para cada valor de Γ :

Tabela 27 - Valor da função objetivo (cenário 1) para os diferentes valores de Γ

Valores de Γ	Novo desvio ($\Gamma*\sigma$)	Valor da função objetivo (Custo total)	Varição em relação ao modelo determinístico	Probabilidade (Distribuição Normal)
0	0	2.465,91	0%	-
0,2	0,2	2.543,63	3,11%	15,85%
0,4	0,4	2.620,79	6,28%	31,08%
0,6	0,6	2.695,03	9,29%	45,15%
0,8	0,8	2.915,99	18,25%	57,63%
1	1	2.849,77	15,57%	68,26%

Considerando o cenário 2 (variação de 2 desvios padrão da demanda) e testando para diferentes valores de Γ no modelo robusto (10) considerando a abordagem de Bertsimas e Sim (2004), tem-se:

Tabela 28 - Resultado da solução ótima considerando a variação de 2 desvios padrão para diferentes valores de Γ

Resultado para o Produto 1							Total	Resultado para o Produto 2							Total	Resultado para o Produto 3							Total	
[$\Gamma=0$]																								
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}			
14,28	17,05	18,72	19,57	19,09	18,88	107,51		20,21	17,21	21,15	20,15	20,31	22,91	121,94			17,86	17,33	21,61	20,64	20,82	21,86	120,12	
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}			
14,28	17,05	18,72	19,57	19,09	18,8	107,51		20,21	17,21	41,30	0	20,31	22,91	121,94			17,86	17,33	21,61	20,64	42,68	0,0000	120,12	
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}			
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	20,15	0,00	0,00	0,00	0,00			0,00	0,00	0,00	0,00	21,86	0,00	0,00	
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}			
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
[$\Gamma=0,2$]																								
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}			
15,70	18,53	19,27	21,10	20,53	19,73	114,86		21,90	18,63	22,44	20,7	21,45	24,8	129,39			19,23	18,41	22,57	21,21	22,24	23,78	127,07	
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}			
15,70	18,53	19,27	21,10	20,53	19,73	114,86		21,90	18,63	43,14	0,00	21,45	24,8	129,39			19,23	18,41	22,57	21,21	46,02	0,00	127,07	
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}			
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	20,70	0,00	0,00	0,00	0,00			0,00	0,00	0,00	0,00	23,78	0,00	0,00	
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}			
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
[$\Gamma=0,4$]																								
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}			
17,02	20,09	19,82	22,62	21,97	20,66	122,21		23,57	20,04	23,73	21,25	22,58	25,65	136,84			20,6	18,76	23,54	21,78	23,54	25,69	134,02	
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}			
17,02	20,09	19,82	22,62	21,97	20,66	122,21		23,57	20,04	44,98	0,00	22,58	25,65	136,84			20,6	18,76	23,54	21,78	49,34	0,00	134,02	
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}			
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	21,25	0,00	0,00	0,00	0,00			0,00	0,00	0,00	0,00	25,69	0,00	0,00	
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}			
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
[$\Gamma=0,6$]																								
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}			
18,54	21,50	20,36	24,14	23,41	21,6	129,55		25,27	21,46	25,03	21,79	23,72	27,01	144,28			21,96	19,48	24,50	22,36	25,07	27,61	140,98	
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}			
18,54	21,50	20,36	24,14	23,41	21,6	129,55		25,27	21,46	46,82	0,00	23,72	27,01	144,28			21,96	19,48	24,50	22,36	52,68	0,00	140,98	
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}			
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	21,79	0,00	0,00	0,00	0,00			0,00	0,00	0,00	0,00	27,61	0,00	0,00	
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}			
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
[$\Gamma=0,8$]																								
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}			
19,96	22,97	20,91	25,66	24,85	22,53	136,9		26,96	22,87	26,32	22,34	24,85	28,38	151,73			23,33	20,19	25,46	22,93	26,48	29,52	147,93	
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}			
19,96	22,97	20,91	25,66	24,85	22,53	136,9		26,96	22,87	48,66	0,00	24,85	28,38	151,73			23,33	20,19	25,46	22,93	56	0,00	147,93	
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}			
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	22,34	0,00	0,00	0,00	0,00			0,00	0,00	0,00	0,00	29,52	0,00	0,00	
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}			
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
[$\Gamma=1$]																								
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}			
21,38	24,47	21,46	27,19	26,29	23,46	144,25		28,65	24,29	27,61	22,89	25,99	29,75	159,18			24,70	20,91	26,43	23,50	27,90	31,44	154,88	
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}			
21,38	24,47	21,46	27,19	26,29	23,46	144,25		28,65	24,29	50,5	0,00	25,99	29,75	159,18			24,70	20,91	26,43	23,50	59,34	0,00	154,88	
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}			
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}			
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00			0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

A seguir apresenta-se o valor da função objetivo (custos totais) para cada valor de Γ :

Tabela 29 - Valor da função objetivo (cenário 2) para os diferentes valores de Γ .

Valores de Γ	Novo desvio ($\Gamma*\sigma$)	Valor da função objetivo (Custo total)	Varição em relação ao modelo determinístico	Probabilidade (Distribuição Normal)
0	0	2.465,91	0%	-
0,2	0,4	2.624,01	6,41%	31,08%
0,4	0,8	2.773,03	12,45%	57,63%
0,6	1,2	2.926,51	18,68%	76,99%
0,8	1,6	3.079,75	24,89%	89,04%
1	2	3.233,63	31,13%	95,44%

Considerando o cenário 3 (variação de 3 desvios padrão da demanda) e testando para diferentes valores de Γ no modelo robusto (10) considerando a abordagem de Bertsimas e Sim (2004), tem-se:

Tabela 30 - Resultado da solução ótima considerando a variação de 3 desvios padrão para diferentes valores de Γ .

Resultado para o Produto 1							Total	Resultado para o Produto 2						Total	Resultado para o Produto 3						Total		
[$\Gamma=0$]																							
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}		
14,28	17,05	18,72	19,57	19,09	18,88	107,51		20,21	17,21	21,15	20,15	20,31	22,91	121,94		17,86	17,33	21,61	20,64	20,82	21,86		120,12
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}		
14,28	17,05	18,72	19,57	19,09	18,8	107,51		20,21	17,21	41,30	0	20,31	22,91	121,94		17,86	17,33	21,61	20,64	42,68	0,0000		120,12
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	20,15	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	21,86	0,00		0,00
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00
[$\Gamma=0,2$]																							
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}		
16,41	19,28	19,54	21,86	21,25	20,20	118,53		22,74	19,33	23,09	20,97	22,01	24,96	133,11		19,91	18,40	23,06	21,15	22,94	24,73		130,55
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}		
16,41	19,27	19,54	21,85	21,25	20,20	118,53		22,74	19,33	44,06	0	22,01	24,96	133,11		19,91	18,40	23,06	21,50	47,67	0,0000		130,55
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	20,97	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	24,73	0,00		0,00
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00
[$\Gamma=0,4$]																							
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}		
18,54	21,50	20,36	24,14	23,41	21,60	129,55		25,27	21,46	25,03	21,79	23,72	27,01	144,28		21,96	19,48	24,50	22,36	25,07	27,61		140,98
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}		
18,54	21,50	20,36	24,14	23,41	21,60	129,55		25,27	21,46	46,82	0,00	23,72	27,01	144,28		21,96	19,48	24,50	22,36	52,68	0,00		140,98
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	21,79	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	27,61	0,00		0,00
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00
[$\Gamma=0,6$]																							
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}		
20,76	23,73	21,19	26,43	25,57	22,99	140,58		27,81	23,58	26,96	22,62	25,42	29,07	155,46		24,02	20,55	25,95	23,21	27,19	30,48		151,40
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}		
20,76	23,73	21,19	26,43	25,57	22,99	140,58		27,81	23,58	49,58	0,00	25,42	29,07	155,46		24,02	20,55	25,95	23,21	57,67	0,00		151,40
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	22,62	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	30,48	0,00		0,00
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00
[$\Gamma=0,8$]																							
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}		
22,80	25,95	22,01	28,71	27,73	24,39	151,60		30,34	25,71	28,90	23,44	27,13	31,12	166,63		26,07	25,63	27,39	24,07	29,32	33,36		161,83
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}		
22,80	25,95	22,01	28,71	27,73	24,39	151,60		30,34	25,71	61,16	0,00	27,13	31,12	166,63		26,07	21,63	27,39	24,07	62,68	0,00		161,83
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	23,40	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	33,36	0,00		0,00
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	8,86	0,00		0,00	0,00	8,86	8,86	8,86	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00
[$\Gamma=1$]																							
x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}			x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	x_{26}			x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	x_{35}	x_{36}		
24,93	28,18	22,83	31	39,04	49,34	195,32		32,87	37,36	48,88	29,38	19,68	9,62	177,79		28,12	22,70	28,84	24,93	31,44	36,23		172,26
R_{11}	R_{12}	R_{13}	R_{14}	R_{15}	R_{16}			R_{21}	R_{22}	R_{23}	R_{24}	R_{25}	R_{26}			R_{31}	R_{32}	R_{33}	R_{34}	R_{35}	R_{36}		
24,93	28,18	22,83	31	39,04	49,34	195,32		32,87	37,36	78,26	0	19,68	9,62	177,79		28,12	22,70	28,84	24,93	67,67	0,00		172,26
W_{11}	W_{12}	W_{13}	W_{14}	W_{15}	W_{16}			W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}	W_{25}	W_{26}			W_{31}	W_{32}	W_{33}	W_{34}	W_{35}	W_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	29,38	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	36,23	0,00		0,00
I_{11}	I_{12}	I_{13}	I_{14}	I_{15}	I_{16}			I_{21}	I_{22}	I_{23}	I_{24}	I_{25}	I_{26}			I_{31}	I_{32}	I_{33}	I_{34}	I_{35}	I_{36}		
0,00	0,00	0,00	0,00	9,15	32,70	0,00		0,00	9,53	27,58	32,70	23,55	0,00	0,00		0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00		0,00

A seguir apresenta-se o valor da função objetivo (custos totais) para cada valor de Γ :

Tabela 31 - Valor da função objetivo (cenário 3) para os diferentes valores de Γ

Valores de Γ	Novo desvio ($\Gamma*\sigma$)	Valor da função objetivo (Custo total)	Varição em relação ao modelo determinístico	Probabilidade (Distribuição Normal)
0	0	2.465,91	0%	-
0,2	0,6	2.659,91	9,33%	45,15%
0,4	1,2	2.926,51	18,68%	76,99%
0,6	1,8	3.156,89	28,02%	92,81%
0,8	2,4	3.475,69	40,95%	98,36%
1	3	3.980,07	61,40%	99,74%

Portanto, por meio da abordagem de Bertsimas e Sim (2004) o tomador de decisão não precisará considerar a realização do pior cenário possível. Dependendo da confiança e qualidade sobre os parâmetros, o planejador poderá decidir o nível de atendimento desejado da demanda. Por exemplo, para um atendimento de aproximadamente 77% da demanda (tabela 31), implica em um aumento de aproximadamente 18,6%, o que pode ser aceitável para empresa, dependendo da sua realidade. Dessa forma, modelar o problema por meio de uma abordagem robusta garante a factibilidade da solução diante de um determinado intervalo de incertezas.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÕES

A utilização da programação linear robusta para modelar problemas de planejamento de produção tem quase todas as deficiências associadas aos modelos de programação linear (determinístico) salvo que leva em conta a variabilidade dos parâmetros. No caso que abordamos aqui, por questões de simplicidade, admitimos que apenas a demanda é estocástica, mas a abordagem não muda mesmo quando considera-se que todos os parâmetros do modelo podem sofrer variações.

O preço que pagamos por uma abordagem robusta é a obtenção de soluções subótimas com relação às soluções fornecidas pelo problema determinístico, e certamente, um maior custo computacional.

A robustez introduzida no modelo por meio do problema *minimax*, retira a linearidade do modelo, mas isso pode ser facilmente restabelecido e o modelo resolvido como um problema de programação linear. Portanto, o uso da programação robusta, para resolver problemas de planejamento da produção, é uma poderosa ferramenta de apoio à tomada de decisões diante da variabilidade dos parâmetros de planejamento.

Por meio da programação robusta é possível definir o nível de atendimento adequado que a empresa deseja oferecer aos seus clientes e quanto isso impacta nos custos.

Neste estudo, admitimos apenas a demanda como parâmetro estocásticos, porém, é possível em um modelo mais realístico, incorporar outros parâmetros como sendo estocásticos, logo, dependendo da confiança e qualidade da informação sobre estes parâmetros, o planejador poderá decidir a amplitude de incertezas e, por consequência, qual o nível de atendimento desejado dos parâmetros.

Os resultados que obtivemos por meio da programação robusta mostraram-se bastante úteis para o tomador de decisão, pois é possível determinar qual o nível de serviço que a empresa deseja ofertar para seus clientes sob uma ótica de custos. Por exemplo, nos resultados da tabela 31, se a empresa deseja atender aproximadamente 92% de todos os casos (para dados normalmente distribuídos), isso implicará em um aumento de aproximadamente 28% dos custos totais da organização. Para a realidade de muitas empresas atualmente,

atender mais de 90% dos consumidores, pode ser considerado como um alto nível de atendimento, satisfazendo uma grande parcela da demanda.

Portanto, é possível realizar o planejamento com maior segurança nas tomadas de decisão em ambientes de incertezas, por meio de modelos robustos.

Algumas outras vantagens que podem ser destacadas são que considerando diferentes graus de confiança na realização da demanda, tem-se diferentes variações nos custos de produção, e como esperado, essas variações podem ser medidas. Além disso a programação robusta incorpora em certo sentido um ensaio sobre a sensibilidade do modelo, o que pode ajudar sobremaneira ao planejador com importantes *insights* sobre o problema de planejamento de produção de sua empresa.

Nota-se que a programação robusta se diferencia da análise de sensibilidade e da análise paramétrica. A análise de sensibilidade busca analisar se a solução ótima varia ou não com pequenas variações nos parâmetros. A análise paramétrica busca intervalos dos parâmetros onde a solução permanece viável. Já a programação robusta estima intervalos de variabilidades dos parâmetros baseados na distribuição de probabilidade que é assumida para os parâmetros e incorpora a variabilidade na solução do problema.

Finalmente, o custo computacional dessa abordagem não é muito maior do que o custo computacional da abordagem determinística, o que torna essa abordagem bastante atraente para ser utilizada.

5 REFERÊNCIAS

ALEM, D; MORABITO, R. **Programação estocástica e otimização robusta no planejamento da produção de empresas moveleiras**. Production Journal, vol. 25, n.3, p.657-677, 2015.

BAKER, K.R. **Requirements Planning**. In: GRAVES, S. C.; RINNOOY KAN, A. H. G.; ZIPKIN, Paul Herbert. Logistics of production and inventory. North-Holland, 1993. cap 11, 760 p.

BAZARAA, M.S.; JARVIS, J.J. **Linear programming and network flows**. Ed. John Wiley and sons New York, 1977.

BERTSIMAS, D.; SIM, M. **The Price of Robustness, Operations Research**. 2004, v.52, p.35-53.

BERTSIMAS, D.; THIELE, A. **A robust optimization approach to inventory theory. Operations Research**, v. 54(1), p. 150-168, 2006.

CORRÊA, Henrique L.; GIANESI, Irineu G. N.; CAON, Mauro. **Planejamento, programação e controle da produção: MRP II/ERP: conceitos, uso e implantação, base para SAP, Oracle Applications e outros softwares integrados de gestão**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2007. 434 p.

de SAMPAIO, R., WOLLMANN, R. CONTE, V., MAESTRI, G., 2014, **How to Use Mathematical Decomposition to Solve Capacity Production Planning Models**, Proceedings of 2014 ISERC, Montreal – Canadá.

de SAMPAIO, R., WOLLMANN, R. VIEIRA, P. **A Flexible production planning for rolling-horizons**, International Journal of Production Economics - IJPE, 2017.

GAITHER, N; FRAZIER, G. **Administração da produção e operações**. São Paulo: Thomson, 2002. 598 p.

HOPP, W.J.; SPEARMAN, M.L. **Factory Physics**, Foundations of Manufacturing Management, Boston: Irwin/McGraw–Hill, 2001.

KARMAKAR, U.S. **Capacity loading and release planning with work-in-process and lead times**. Journal of Manufacturing and Operations Management, n.2, p.105–123, 1989.

MARTINICH, Joseph Stanislaus. **Production and operations management: an applied modern approach**. New York: J. Wiley & Sons, c1997. 875, [36] p.

RUSTEM, B.; HOWE, M. **Algorithms for worst-case design and applications to risk management**. New Jersey: Princeton University Press, 2002.

SHAPIRO, J.F. **Mathematical Programming Models and Methods for Production Planning and Scheduling**. In: GRAVES, S. C.; RINNOOY KAN, A. H. G.; ZIPKIN, Paul Herbert. Logistics of production and inventory. North-Holland, 1993. cap 8, 760 p.

SIM, M. **Robust Optimization**. 2004. Tese de doutorado. Massachusetts Institute of Technology, 2004. Massachusetts.

SLACK, Nigel; CHAMBERS, Stuart; JOHNSTON, Robert. **Administração da produção**. 3. ed. São Paulo: Atlas, 2009. 703 p.

SOYSTER, A.L. **Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming**. Operations Research, v.14, p.1154-1151, 1973.

THOMAS, L.J.; MCCLAIN, J.O. **An Overview of Production Planning**. In: GRAVES, S. C.; RINNOOY KAN, A. H. G.; ZIPKIN, Paul Herbert. Logistics of production and inventory. North-Holland, 1993. cap 7, 760 p.

VIEIRA, P. F. G. **Esquema de decomposição matemática para resolver o problema de planejamento da produção baseado em programação linear que implementa um esquema de Rolling planning.** Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção e Sistemas) - Departamento de Engenharia de Produção, Pontifícia Universidade Católica do Paraná PUCPR, Curitiba, 2016.

VOIPI, N. M. P. **O Impacto de perturbações estocásticas em um modelo de planejamento florestal.** Tese (Doutorado em Ciências Florestais) – Departamento de Ciências agrárias, Universidade Federal do Paraná, 1997.

WINSTON, W. **Operations research.** Belmont, CA: Thomson, 2004.