

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ
Escola Politécnica

ARLEY VINICIUS PIARDI NESELLO

**UMA ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO ELEMENTO Q4 EM
PROBLEMAS DA ELASTOSTÁTICA**

CURITIBA
Fevereiro – 2021

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ
Escola Politécnica

ARLEY VINICIUS PIARDI NESELLO

**UMA ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DO ELEMENTO Q4 EM
PROBLEMAS DA ELASTOSTÁTICA**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Escola Politécnica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Orientador: Prof. João Elias Abdalla Filho, Ph. D

CURITIBA
Fevereiro - 2021

Dados da Catalogação na Publicação
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/PUCPR
Biblioteca Central
Edilene de Oliveira dos Santos CRB-9/1636

N459a 2021	Nesello, Arley Vinicius Piardi Uma análise do comportamento do elemento Q4 em problemas da elastostática / Arley Vinicius Piardi Nesello; orientador, João Elias Abdalla Filho. -- 2021 94 f. : il. ; 30 cm Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2021 Bibliografia: f. 92-94 1. Engenharia mecânica. 2. Método dos elementos finitos. 3. Dinâmica dos corpos rígidos. 4. Elasticidade. 5. Cisalhamento. I. Abdalla Filho, João Elias. II. Pontifícia Universidade Católica do Paraná Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título CDD. 20. ed. – 620.1
---------------	--



Pontifícia Universidade Católica do Paraná–PUCPR
Escola Politécnica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica-PPGEM

TERMO DE APROVAÇÃO

Arley Vinicius Piardi Nesello

Uma Análise do Comportamento do Elemento Q4 em Problemas da Elastostática

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de mestre no Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, da Escola Politécnica da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Marcos Arndt
Universidade Federal do Paraná, UFPR, Relator

Prof. Dr. Hsu Yang Sang
Universidade Federal do Paraná, UFPR

Prof. Dr. João Elias Abdalla Filho
Pontifícia Universidade Católica do Paraná, PUCPR, Orientador

Curitiba, 02 de dezembro de 2020

*À minha mãe, com todo meu amor,
carinho e consideração.*

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço ao Professor João Elias Abdalla Filho, por todo apoio e comunicação, sendo em sala de aula nas matérias cursadas, bem como na elaboração e acompanhamento deste trabalho.

Agradecimentos também vão ao PPGEM e a PUCPR por toda a estrutura disponibilizada para que esse trabalho fosse possível.

Ao meu pai, Ademir Nesello, pelo companheirismo e apoio em todos os momentos, bons e ruins.

Por fim, agradeço minha querida mãe, Maria Bernardete Pellizzer Piardi Nesello, que não está mais presente, mas que sonhou até mais que eu com a conclusão deste trabalho.

Mãe, onde estiver, sei que olha por mim e me dará forças para seguir em frente.

*“Engineering is indeed a noble sport, and
the legacy of good Engineers is a better
physical world for those who follow them”*

(PECK, Ralph. 1977)

RESUMO

A influência do cisalhamento parasítico em modelagem por elementos finitos tem recebido atenção desde os primórdios do método dos elementos finitos. Sua influência deletéria altera de maneira muitas vezes drástica o comportamento de convergência dos elementos ao enrijecê-los artificialmente. A literatura apresenta diversas maneiras de eliminar os termos de cisalhamento parasítico ou de reduzir seus efeitos, algumas através de técnicas de integração numérica, e outras, empregando outros artifícios. Em alguns elementos finitos isoparamétricos, modos espúrios de energia nula são introduzidos ao se aplicar técnicas de integração numérica reduzida para eliminar o cisalhamento parasítico. A Notação *Strain Gradient* é uma notação fisicamente interpretável utilizada para formular elementos finitos. Ao contrário das formulações convencionais, a notação *Strain Gradient* apresenta explicitamente os conteúdos físicos dos coeficientes das funções aproximadoras do campo de deslocamentos. Deste modo, as capacidades de modelagem do elemento sendo formulado tornam-se aparentes, permitindo que os termos de cisalhamento parasítico sejam precisamente identificados. Consequentemente, esses termos espúrios podem ser eliminados a priori, e a matriz de rigidez construída livre de erros de modelagem.

O presente trabalho realiza um estudo do comportamento do elemento plano de quatro nós em problemas da elasticidade. O elemento é formulado na formulação isoparamétrica e na notação *Strain Gradient*, visando comparar resultados. Exemplos numéricos revelam a influência dos termos espúrios presentes na expressão de distorção angular do elemento ao modelarem vigas esbeltas e curtas, e também uma chapa com orifício retangular centrado. Comparativos dos resultados com e sem cisalhamento parasítico são apresentados. De modo geral, observa-se que o cisalhamento parasítico causa erros numéricos que podem ser bastante elevados, e que sua mitigação é essencial para que resultados convergentes sejam atingidos com menor esforço computacional.

Palavras-chave: Elemento finito plano de quatro nós, formulação isoparamétrica, Notação *Strain Gradient*, cisalhamento parasítico, enrijecimento artificial, modos espúrios de energia nula.

ABSTRACT

The influence of parasitic shear in finite element modeling has received attention since the early years of the finite element method. Parasitic shear deleterious influence alters, often drastically, the convergence behavior of elements as it artificially stiffens them. Literature presents several ways to remove parasitic shear or to reduce its effects, either by numerical integration techniques or other procedures. In some isoparametric elements, reduced-order integration techniques introduce spurious zero-energy modes when attempting to eliminate parasitic shear. Strain Gradient notation is a physically interpretable notation employed to formulate finite elements. Contrary to conventional formulations, strain gradient notation derives the physical contents of the displacement approximation function coefficients. Hence, the modeling capacities of the element being formulated become apparent, which allows for the parasitic shear terms to be precisely identified. Consequently, these spurious terms can be eliminated a priori, and the stiffness matrix can be built free of modeling errors.

This work performs a study of the behavior of the four-node plane element for elasticity. The element is formulated in the isoparametric formulation and in Strain Gradient notation aiming at comparing results. Numerical examples reveal the influence of the spurious terms which are present in the shear strain expression when modeling slender and short beam problems as well as a plate with a centered rectangular hole. Comparisons of results with and without parasitic shear are presented. In general, it is observed that parasitic shear causes errors which can be very high, and that its mitigation is essential for attaining convergent results with less computational efforts.

Keywords: Four-node plane finite element, isoparametric formulation, strain gradient notation, parasitic shear, artificial stiffening, spurious zero-energy modes.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	11
LISTA DE TABELAS	13
LISTA DE SÍMBOLOS.....	14
1 INTRODUÇÃO	17
1.1 OBJETIVOS	18
1.1.1 Objetivo Geral	18
1.1.2 Objetivos Específicos	18
1.2 JUSTIFICATIVA.....	18
1.3 LIMITAÇÃO DO TRABALHO.....	19
1.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	19
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	21
2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE FORMULAÇÃO ISOPARAMÉTRICA.....	21
2.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE A NOTAÇÃO <i>STRAIN GRADIENT</i>	30
3 CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	35
3.1 FORMULAÇÃO ISOPARAMÉTRICA	35
3.1.1 Elemento quadrilateral isoparamétrico de quatro nós.....	35
3.1.2 Elemento Isoparamétrico de quatro nós	42
3.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA – QUADRATURA DE GAUSS	44
3.3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA EM ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS	46
3.4 NOTAÇÃO <i>STRAIN GRADIENT</i>	48
3.5 OS ELEMENTOS E A PRESENÇA DOS TERMOS ESPÚRIOS.....	52
3.5.1 Elemento triangular de três nós.....	52
3.5.2 Elemento quadrilateral de quatro nós	53
3.5.3 Elemento triangular de seis nós.....	56

3.5.4	Elemento quadrilateral de oito nós	57
3.5.5	Matriz de Rigidez	60
3.5.6	Matriz de rigidez Isoparamétrica x matriz de rigidez <i>Strain Gradient</i>	61
4	ANÁLISES	64
4.1	PROBLEMA DE VIGA ESBELTA	64
4.2	PROBLEMA DE VIGA CURTA.....	71
4.3	PROBLEMA DE PLACA QUADRADA COM FURO CENTRAL.....	82
5	CONCLUSÕES	90
	REFERÊNCIAS.....	92

LISTA DE FIGURAS

Figura 01 – (a) Elemento Plano de quatro nós no espaço físico. (b) O mesmo elemento, mapeado no espaço $\xi\eta$

Figura 02 – Apresentação dos elementos isoparamétricos, subparamétricos e superparamétricos

Figura 03 – Método da Quadratura de Gauss

Figura 04 – Localização dos pontos de Gauss no plano

Figura 05 – Viga Cantilever esbelta utilizada como exemplo

Figura 06 – Refino das quatro malhas utilizadas no exemplo um

Figura 07 – Deslocamento em linha central de viga ao longo do comprimento. Elemento quadrilateral de quatro nós, com cisalhamento parasítico

Figura 08 – Deslocamento em linha central de viga ao longo do comprimento. Elemento quadrilateral de quatro nós, sem cisalhamento parasítico

Figura 09 – Tensão normal no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, com e sem cisalhamento parasítico

Figura 10 – Tensão de cisalhamento no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, com e sem termos espúrios

Figura 11 – Viga Cantilever curta usada como exemplo

Figura 12 – Refino das malhas para o exemplo dois, elementos quadrados à direita e elementos retangulares à esquerda

Figura 13 – Deslocamento em linha central de viga ao longo do comprimento. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos quadrados com cisalhamento parasítico

Figura 14 – Deslocamento em linha central de viga ao longo do comprimento. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos quadrados sem cisalhamento parasítico

Figura 15 - Deslocamento em linha central de viga ao longo do comprimento. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos retangulares com cisalhamento parasítico

Figura 16 – Deslocamento em linha central de viga ao longo do comprimento. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos retangulares sem cisalhamento parasítico

Figura 17 – Tensão normal no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos quadrados com e sem cisalhamento parasítico

Figura 18 – Tensão de cisalhamento no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos quadrados com e sem cisalhamento parasítico

Figura 19 – Tensão normal no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos retangulares com e sem cisalhamento parasítico

Figura 20 – Tensão de cisalhamento no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos retangulares com e sem cisalhamento parasítico

Figura 21 – Quadrante superior

Figura 22 – Refino das malhas para o exemplo três, elementos quadrados à direita e elementos de refino gradual à esquerda

Figura 23 – Tensão normal, malha com refino gradual. Elemento quadrilateral de quatro nós com e sem cisalhamento parasítico

Figura 24 – Figura 23 – Tensão normal, malha com refino gradual. Elemento quadrilateral de quatro nós com e sem cisalhamento parasítico

Figura 25 – Tensão de cisalhamento, malha de refino quadrado. Elemento quadrilateral de quatro nós com e sem cisalhamento parasítico

Figura 26 – Tensão de cisalhamento, malha de refino gradual. Elemento quadrilateral de quatro nós com e sem cisalhamento parasítico

LISTA DE TABELAS

Tabela 01 – Tabela de valores para pontos de Gauss

Tabela 02 – Deslocamentos no último nó da linha central na borda livre. Quadrilátero de 4 nós, com e sem cisalhamento parasítico.

Tabela 03 – Tensão normal em quatro malhas subsequentes. Quadrilátero de 4 nós, com e sem cisalhamento parasítico

Tabela 04 – Tensão de cisalhamento em quatro malhas subsequentes. Quadrilátero de quatro nós, com e sem cisalhamento parasítico.

Tabela 05 – Deslocamentos no último nó da linha central na borda livre. Quadrilátero de quatro nós, elementos quadrados com e sem termos de cisalhamento parasítico.

Tabela 06 – Deslocamentos no último nó da linha central na borda livre. Quadrilátero de quatro nós, elementos retangulares com e sem termos de cisalhamento parasítico.

Tabela 07 – Tensão de normal em quatro malhas quadradas subsequentes. Quadrilátero de 4 nós, elementos quadrados com e sem cisalhamento parasítico.

Tabela 08 – Tensão de cisalhamento em quatro malhas quadradas subsequentes. Quadrilátero de quatro nós, elementos quadrados com e sem cisalhamento parasítico

Tabela 09 – Tensão de normal em quatro malhas retangulares subsequentes. Quadrilátero de quatro nós, elementos retangulares com e sem cisalhamento parasítico

Tabela 10 – Tensão de cisalhamento em quatro malhas retangulares subsequentes. Quadrilátero de quatro nós, elementos retangulares com e sem cisalhamento parasítico.

Tabela 11 – Tensão normal no ponto A. Quadrilátero de quatro nós, elemento quadrado com e sem cisalhamento parasítico

Tabela 12– Tensão normal no ponto A. Quadrilátero de quatro nós, malha de refino gradual com e sem cisalhamento parasítico

Tabela 13 – Tensão de cisalhamento no ponto A. Quadrilátero de quatro nós, elemento quadrado com e sem cisalhamento parasítico

Tabela 14 – Tensão de cisalhamento no ponto A. Quadrilátero de quatro nós, malha de refino gradual com e sem cisalhamento parasítico

LISTA DE SÍMBOLOS

SG: notação *Strain Gradient*

MEF: método dos elementos finitos

[B]: matriz que relaciona deformações com deslocamentos nodais

[C]: matriz constitutiva com as propriedades do material utilizado

[C₁]: matriz constitutiva do elemento para deformações normais

[C₂]: matriz constitutiva do elemento para distorção angular

[ϕ]: matriz composta de vetores de deslocamentos linearmente independentes contendo as coordenadas nodais do elemento e que relaciona os deslocamentos aos modos de deformação Strain Gradient

[J]: matriz Jacobiana

J: determinante da matriz Jacobiana

[N]: matriz das funções de forma

[V]₀: movimento de corpo rígido vertical

[S]: matriz do operador diferencial

[T_{sg}]: matriz de transformação que relaciona as deformações elásticas aos modos de deformação SG

[u]₀: movimento de corpo rígido horizontal

{d_i}: vetor de deslocamento do nó i

{ ϵ }: vetor de deformações elásticas

{ ϵ_{sg} }: vetor dos modos de deformação Strain Gradient

a_i, b_j : pontos de Gauss nas coordenadas x_i e y_i

A_i : coeficientes arbitrários na formulação convencional de elementos finitos para um caso bidimensional de deslocamento no ponto x_i

B_i : coeficientes arbitrários na formulação convencional de elementos finitos para um caso bidimensional de deslocamento no ponto y_i

W_{ij} : fatores de peso para o plano

E: módulo de elasticidade longitudinal do elemento

G: módulo de elasticidade transversal do elemento

ϵ_x : deformação linear normal no eixo x

ε_y : deformação linear no eixo y

γ_{xy} : distorção angular no plano xy

$\varepsilon_{i,j}$: gradientes de primeira ordem das componentes de deformação normal; $i = x,y$; $j = x,y$

$\varepsilon_{i,j,k}$: gradientes de segunda ordem das componentes de deformação normal; $i = x,y$; $j = x,y$; $k = x,y$

$\gamma_{ij,i}$: gradientes de primeira ordem da componente de distorção angular; $i = x,y$; $j = x,y$

$\gamma_{ij,j,k}$: gradientes de segunda ordem da componente de distorção angular; $i = x,y$; $j = x,y$; $k = x,y$

η : coordenada local que representa o eixo y

n,m : número de pontos de Gauss nas coordenadas x e y

ν : coeficiente de Poisson do elemento

N : o grau que o polinômio deverá ter para ser integrado de forma exata

NG : o número de pontos de Gauss escolhidos para realizar a integração

N_i : função de forma no ponto i

Q : carga distribuída

$[r]_0$: movimentos de corpo rígido de rotação

t : espessura do elemento

u_i : deslocamento na direção x no nó i

v_i : deslocamento na direção y no nó i

U : energia de deformação

K : matriz de rigidez do elemento

$[U_M]$: matriz de energia de deformações

ξ : coordenada local que representa o eixo x

x_i : Coordenada no plano cartesiano, representada no eixo horizontal (abscissa)

y_i : Coordenada no plano cartesiano, representada no eixo vertical (ordenada)

Ω : o volume do elemento

1 INTRODUÇÃO

A formulação isoparamétrica marca um grande avanço no Método dos Elementos Finitos. A barreira da limitação da modelagem usando apenas elementos retangulares é vencida, e a distorção geométrica de elementos torna-se possível de modo a permitir a modelagem de problemas com geometrias irregulares. Essa nova capacidade de modelagem fez com que os elementos isoparamétricos obtivessem grande aceitação no meio acadêmico e na prática da engenharia.

O uso de polinômios incompletos na formulação de elementos finitos para problemas da elasticidade plana introduz termos de deformação normal na expressão de distorção angular. Esses termos espúrios são denominados cisalhamento parasítico e são responsáveis pelo fenômeno de travamento por cisalhamento (*shear locking*). O travamento por cisalhamento é um enrijecimento artificial do elemento, que tem como consequência o retardo da convergência da solução numérica. Termos de cisalhamento parasítico surgem em elementos cujas funções aproximadoras são polinômios incompletos de uma determinada ordem.

No contexto da formulação isoparamétrica, a integração numérica de ordem exata integra corretamente a matriz de rigidez de elementos baseados em polinômios de ordem completa, pois esses elementos não possuem termos de cisalhamento parasítico. Elementos triangulares de três e seis nós são exemplos típicos. Contudo, como forma de eliminar termos espúrios de modelos com base em polinômios de ordem incompleta, métodos de integração numérica reduzida são utilizados.

Quadriláteros são elementos baseados em polinômios incompletos; portanto possuem cisalhamento parasítico em sua formulação. O elemento de quatro nós é corrigido pela aplicação de uma técnica de integração reduzida. Porém, técnicas de integração reduzida não corrigem adequadamente quadriláteros de alta ordem (oito e nove nós). Juntamente com os termos espúrios, termos legítimos que compõem a equação de compatibilidade são eliminados, causando modos espúrios de energia nula (*Spurious Zero Energy Modes*).

Uma forma alternativa para formular elementos finitos é oferecida pela Notação *Strain Gradient*, que é uma notação fisicamente interpretável. A notação relaciona explicitamente deslocamentos e deformações com grandezas cinemáticas do meio contínuo. Essa identificação de relação é possível devido a procedimento que

identifica o conteúdo físico dos coeficientes presentes nos polinômios de deslocamento e deformação. Desta forma, a notação *Strain Gradient* permite ao analista compreender *a priori* as capacidades de modelagem do elemento finito sendo formulado, assim como identificar precisamente os termos de cisalhamento parasítico. Consequentemente, os termos espúrios podem ser removidos *a priori*, ou seja, antes do desenvolvimento da matriz de rigidez do elemento. A correta eliminação do cisalhamento parasítico, isto é, sem introduzir modos espúrios de energia nula gera um elemento livre de deficiências de modelagem.

O presente trabalho apresenta uma análise dos efeitos do cisalhamento parasítico no comportamento do quadrilátero de quatro nós para elasticidade plana em problemas da estática. Como parte da validação deste estudo, faz-se uma comparação entre soluções fornecidas por modelos empregando o quadrilátero de quatro nós isoparamétrico e *Strain Gradient*.

1.1 OBJETIVOS

1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral deste trabalho é investigar o comportamento do quadrilátero de quatro nós (Q4) na solução de problemas elastostáticos.

1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos do trabalho são:

- a) Comparar os desempenhos do Q4 formulado na notação *Strain Gradient* em suas duas versões, com e sem cisalhamento parasítico, para mostrar precisamente os efeitos deletérios do cisalhamento parasítico nas soluções;
- b) Comparar os desempenhos do Q4 *Strain Gradient* e isoparamétrico;
- c) Avaliar a convergência das soluções.

1.2 JUSTIFICATIVA

Erros de modelagem aumentam o tempo de processamento computacional dos elementos finitos. Métodos de integração reduzida mostram-se muitas vezes

ineficazes como técnicas de remoção de erros. A notação *Strain Gradient* oferece uma alternativa de formular elementos livres de cisalhamento parasítico e modos espúrios de energia nula. A eficiência computacional do método dos elementos finitos está intrinsecamente associada à presença de termos de cisalhamento parasítico, e não apenas ao grau de refino de malha, ordem polinomial adotada ou arquitetura do programa e computador empregados. A escolha do tema nesta dissertação advém da importância de se revisar o tema da qualidade de elementos finitos à luz dos erros de modelagem inerentes ao processo de formulação, uma vez que esse aspecto da mecânica computacional é muitas vezes desconsiderado por analistas. Por simplicidade e didatismo, o elemento Q4 é utilizado neste estudo. A notação *Strain Gradient* é empregada para que o significado físico dos termos de cisalhamento parasítico possa ser compreendido. Além disso, o uso da notação *Strain Gradient* oferece um meio eficiente de remoção desses termos, sem que técnicas numérico-computacionais precisem ser empregadas. Por fim, intenciona-se ressaltar alguns outros aspectos computacionais vantajosos da notação *Strain Gradient*.

1.3 LIMITAÇÃO DO TRABALHO

Uma importante limitação deste trabalho é a modelagem dos problemas escolhidos usando apenas malhas com elementos retangulares. A matriz de rigidez do elemento finito na notação *Strain Gradient* foi integrada considerando limites de integração do elemento na forma retangular. Deste modo, os elementos não podem ser distorcidos. Para que seja possível a distorção, o teorema de Green pode ser empregado para integrar os termos da matriz de rigidez.

1.4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para a realização do trabalho, os procedimentos serão os seguintes:

- I. Realização de uma revisão bibliográfica das teorias necessárias através da leitura de livros e artigos científicos;
- II. Descrição dos conceitos fundamentais;
- III. Seleção de problemas da elastostática a serem modelados;
- IV. Comparação de resultados entre os modelos com e sem a presença dos erros de modelagem;

- V. Comparação das soluções fornecidas pelos modelos com elementos *Strain Gradient* e isoparamétricos;
- VI. Concluir sobre os efeitos dos termos de cisalhamento parasítico na convergência dos modelos e sobre a eficiência dos elementos *Strain Gradient*.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo apresenta um resumo de artigos que abrangem o tema geral do trabalho, apresentando os erros conhecidos como cisalhamento parasítico (*parasitic shear*), causador do fenômeno de travamento por cisalhamento (*shear locking*) e modos espúrios de energia nula (*spurious zero energy modes*). Abaixo é dada uma introdução do que são os erros citados acima.

O cisalhamento parasítico ocorre quando termos de deformações normais aparecem de maneira indevida na expressão de distorção angular. Essa aparição indevida ocorre de maneira natural quando se utilizam elementos formulados através de polinômios de ordem incompleta, como o quadrilátero de quatro nós e quadriláteros de oito e nove nós. O cisalhamento parasítico leva ao fenômeno de travamento por cisalhamento, quando se tem um aumento indevido na rigidez devido aos termos espúrios, fazendo com que o elemento tenha um enrijecimento artificial.

Conforme será visto abaixo, os chamados termos espúrios, ou termos de cisalhamento parasítico podem ser eliminados de diversas formas sendo a mais comum a utilização de métodos de integração reduzida. No entanto, a utilização de técnicas indevidas de remoção dos termos espúrios em placas com elementos de quatro nós e elementos planos de oito e nove nós pode levar a remoção de termos legítimos de cisalhamento na expressão de distorção angular, ocasionando um terceiro tipo de erro conhecido como modos espúrios de energia nula (*spurious zero energy modes*).

É importante destacar que maiores detalhes sobre os erros tratados nesta seção serão apresentados no capítulo 3.

2.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE FORMULAÇÃO ISOPARAMÉTRICA

Ahmad, Irons e Zienkiewicz [1] trataram da análise de placas finas e espessas utilizando elementos finitos curvos. Os autores apontavam a necessidade de que uma nova teoria abrangendo a utilização de elementos curvos fosse introduzida, uma vez que até então, placas curvas eram idealizadas através da composição de elementos planos. Segundo os autores, a literatura já expressava tentativas de desenvolver formulações de placas curvas. No entanto, essas teorias se limitavam a placas rasas, ou seja, teorias em que a deformação por cisalhamento era negligenciada. Utilizando

exemplos como cúpulas esféricas submetidas a pressões uniformes, tanques de retenção de água, torres de refrigeração sob ação do vento, entre outros; um novo conceito utilizando a formulação isoparamétrica em conjunto com a utilização de integração numérica é introduzido.

Zienkiewicz, Taylor e Too [2] apresentam seu estudo sobre a utilização de técnicas de integração reduzida aplicadas diretamente na matriz de rigidez em análises gerais de placas e cascas. O estudo se deu após os autores perceberem que as placas apresentavam um grande aumento em sua rigidez conforme sua espessura era diminuída em situações de flexão pura. A utilização de métodos de integração reduzida seletiva, utilizando malhas de pontos de Gauss de 3x3 ou 4x4 para as deformações normais e 2x2 para deformações de cisalhamento poderia então ser uma alternativa para eliminar possíveis termos parasitas que causavam um aumento indevido de rigidez nas placas. No entanto, segundo os autores, a convergência só poderia ser provada para elementos de forma retangular.

Os autores, ao levarem a análise da integração reduzida seletiva para análise de cascas estudaram a possibilidade de utilizar a integração reduzida em sua totalidade, reduzindo os pontos de Gauss de todas as tensões, primeiro para a análise utilizando polinômios de segundo grau e posteriormente para a análise com polinômios de terceiro grau. Os resultados obtidos superaram as expectativas, uma vez que ao realizar esse processo, os resultados obtidos eram indistinguíveis dos resultados exatos. No entanto, o problema não foi testado para a análise de flexão pura das cascas.

Pawsey e Clough [3] também estudavam métodos de integração reduzida aplicados a problemas de placas e cascas finas e espessas. Os autores revisaram as teorias de [1] e apresentaram uma nova formulação considerando que as placas deveriam ser analisadas através da sua face média e que cinco graus de liberdade deveriam ser impostos ao invés de seis. Os cinco graus eram divididos em três translações, e duas rotações ao longo de dois eixos. O outro grau de liberdade que deveria ser imposto, associado à variação da espessura da placa, é substituído após os autores assumirem que a tensão normal na direção da espessura não deveria existir. As conclusões dos autores foram que o modelo empregado pode ter uma melhor convergência utilizando diferentes integrações reduzidas em cada energia de deformação do modelo, resultando em uma análise de placas e cascas mais apurada com pouco ou nenhum incremento de tempo de processamento computacional.

Hughes, Taylor e Kanoknukulchai [4] apresentam o que eles chamam de o mais simples e efetivo elemento de placas submetido a flexão já proposto. A solução encontrada é um elemento quadrilateral de quatro nós que segue os parâmetros clássicos das teorias já existentes, contendo três graus de liberdade por nó. Os elementos então são integrados normalmente utilizando a integração numérica de 2x2 pontos de Gauss para as deformações normais e um ponto de Gauss para as deformações de cisalhamento. Os autores então aplicam as condições de contorno descritas acima e realizam os procedimentos de integração numérica para exemplos de vigas lineares, placas finas submetidas à flexão e placas relativamente espessas também submetidas à flexão. No entanto, ao analisarem os resultados perceberam que quando se utiliza apenas um ponto de Gauss nos termos de cisalhamento, cinco termos são zerados, dois a mais do que os três movimentos de corpo livre anteriormente conhecidos. Os termos foram então nomeados de modos de energia nula.

MacNeal [5] apresentou um elemento de placa de quatro nós denominado por ele de QUAD4. Sua formulação apontava que era possível, para uma viga de dois nós, com campos de deslocamentos laterais de terceira ordem, reduzir o número de pontos de Gauss para um ponto central no elemento no cálculo das deformações por cisalhamento juntamente com a inclusão de um termo de parcela residual de flexão no módulo de elasticidade transversal. O procedimento não afetava a matriz de rigidez do elemento, uma vez que os coeficientes elásticos tinham apenas suas localizações alteradas onde as deformações eram computadas. O mesmo estudo foi feito para placas de quatro nós; porém, aplicando o estudo às propriedades de membrana das placas, na intenção de se ter um elemento quadrilátero plano.

Hughes e Tezduyar [6] apresentam um elemento de placa de quatro nós bilinear isoparamétrico, onde seu deslocamento transversal é interpolado através das funções de forma de um quadrilátero de nove nós e as rotações interpoladas através das funções de forma de um quadrilátero de quatro nós. A idéia dos autores era de calcular as deformações de cisalhamento transversal de uma forma independente dos graus de liberdade dos pontos médios dos lados e do ponto central. Sendo assim, a matriz de rigidez do elemento seria composta apenas pelas funções de forma bilineares.

As deformações de cisalhamento transversal, ao serem calculadas nos pontos médios dos lados do elemento (interpolando valores nodais de vértice), tornam-se

independentes dos graus de liberdade das posições dos pontos médios dos lados e do centro do elemento. A formulação é bastante complexa e tem por objetivo evitar a introdução de modos espúrios de energia nula no elemento. O mesmo resultado é obtido via notação *Strain Gradient* de forma muito mais simples.

Hughes e Cohen [7] apresentam através de um estudo de placas quadradas e circulares de baixa espessura o desenvolvimento do elemento Heterosis. Segundo estudos dos autores, elementos quadriláteros Lagrangeanos são os que apresentam melhor convergência de resultados entre os elementos de placas de Mindlin. Todavia, ao utilizar técnicas de integração reduzida, ao menos um modo espúrio de energia nula é introduzido no elemento. Elementos de oito nós também apresentam alto nível de convergência de resultados. No entanto, quando submetidos a estudos de placas finas a convergência de resultados se distancia muito do esperado. O elemento Heterosis é um elemento híbrido que combina a melhor parte da capacidade de modelagem dos dois elementos, utilizando as funções de forma Lagrangeanas para as rotações, e as funções de forma Serendipity para a distorção angular. O resultado é um elemento que não apresenta nenhum modo espúrio de energia nula e corrigido quanto a convergência de resultados para placas de Mindlin de baixa espessura.

Prathap e Viswanath [8] citam em sua apresentação, que apesar dos esforços previamente realizados por outros autores em utilizar métodos de integração reduzida seletiva, não se tinha nenhuma explicação adequada e completa que fornecesse o método mais otimizado para a integração dos elementos estudados. Ademais, na visão dos autores, a integração reduzida seletiva apresentava um sério problema. Dependendo do elemento, ou os termos espúrios seriam removidos de forma parcial, ou eram removidos de forma completa ao custo da remoção de termos legítimos em conjunto nas expressões de distorção angular dos elementos. A solução seria um elemento de quatro nós onde a integração completa de 2×2 fosse aplicada aos termos de deformações normais e duas integrações reduzidas seletivas sendo 1×2 e 2×1 aplicadas à dois termos distintos na expressão de distorção angular. O resultado apresentado foi um elemento de placa capaz de performar bem em elementos de placa fina e placas relativamente espessas.

Belytschko e Ong [9] apresentam uma nova maneira de controlar/estabilizar os termos espúrios adicionando novas tensões e deformações ao quadrilátero Lagrangeano de nove nós. Utilizando exemplos de placas retangulares e circulares, os autores mostram que o seu método de estabilização dos modos de energia nula

para o elemento estudado não afeta as convergências dos resultados. Ademais, para malhas retangulares, o elemento de nove nós consegue manter a sua ordem cúbica na convergência. Entretanto, para malhas irregulares os resultados ficam abaixo da métrica cúbica.

Belytschko *et al.* [10] citam que dois problemas principais são a causa da má performance dos elementos de casca: o travamento por cisalhamento e o travamento de membrana. Segundo os autores, os métodos previamente estudados como formulações mistas, métodos de integração reduzida, entre outros, tem em comum o fato de que todos podem ser vistos como projeções de tensões. Sendo assim, se as projeções de tensões fossem modeladas para reduzir as tensões causadas pelo cisalhamento parasítico, logo, o travamento por cisalhamento poderia ser mitigado. De forma similar ao processo feito para o travamento por cisalhamento, o processo de redução das tensões parasíticas nas membranas também pode reduzir o seu respectivo travamento.

Um elemento finito que é usado para modelar uma placa submetida a flexão pura deve ser capaz de representar suas deformações de maneira que apenas a energia relacionada à flexão seja diferente de zero. Qualquer tensão de cisalhamento ou na membrana, absorveriam uma grande quantidade de energia, fazendo o elemento performar de maneira muito mais rígida, causando o chamado travamento.

Posto isto, a remoção desses termos parasíticos, consequentemente inibe o possível travamento. Essa remoção foi feita por Belytschko, *et al.* [10] no que foi chamado de método de projeção de decomposição de modos. A técnica consistia em definir os componentes de flexão de quaisquer deformações e ignorar as energias de deformações por cisalhamento e membrana associadas com os modos de flexão. Foram feitos experimentos com base no triângulo de três nós de Kirchhoff e elementos de casca de quatro e nove nós de Mindlin através das formulações apresentadas por outros autores presentes na literatura.

Belytschko, *et al.* [11] apresentam a criação de uma matriz de estabilização para o elemento quadrilateral de nove nós que permitia que uma integração reduzida completa fosse feita na matriz de rigidez do elemento sem causar nenhum modo de energia nula. Primeiramente os autores trazem novamente a informação de que elementos de placas curvas necessitam procedimentos de integração muito precisos, uma vez que, muitos pontos de integração causam o fenômeno de travamento nos elementos, ao mesmo tempo, o uso de pontos insuficientes na integração causa uma

deficiência na modelagem, bem como o aparecimento de modos de energia nula, ver [7]. Um ponto de difícil análise também se deve ao fato de que elementos de cascas modelados através do quadrilátero de nove nós, ao serem submetidos a integrações completas, apresentam tensões ao longo da sua espessura (membrana). O aumento da energia de deformação causado pelas tensões na membrana, em conjunto com o aumento da energia de deformação por cisalhamento, causa um problema ainda maior na análise de cascas submetidas à flexão pura.

A nova matriz idealizada pelos autores foi aplicada a exemplos de cascas cilíndricas submetidas a cargas uniformes, cascas hemisféricas submetidas a cargas axi-simétricas, vigas torcidas e outros exemplos apresentados na literatura. Segundo os autores, o novo elemento teve bom desempenho em todos os exemplos testados, removendo os termos espúrios de forma eficiente, e apresentando melhor convergência de resultados em relação a outras formulações existentes. O procedimento de estabilização remove todos os modos singulares comunicáveis. Contudo, o procedimento não remove os modos espúrios não comunicáveis.

Belytschko e Bindeman [12] trazem de volta o assunto já citado diversas vezes nesse trabalho: o elemento de placa quadrilateral de quatro nós submetido a integração reduzida com um ponto de Gauss. Ao citar trabalhos anteriores, os autores apresentam um novo problema. A aplicação das teorias existentes para remoção do cisalhamento parasítico funcionava muito bem quando aplicadas a exemplos de estados planos de tensão, ou problemas de deformação que permitiam a compressão do material. No entanto, quando aplicadas à problemas de materiais incompressíveis, um novo travamento era identificado: o travamento volumétrico. Utilizando-se de parâmetros físicos dos elementos como sua geometria e as propriedades do seu material, é possível construir um método estabilizador para a integração reduzida de um ponto de Gauss gerando elementos mais precisos, particularmente para malhas menos refinadas.

Os autores então analisam uma série de problemas utilizando o quadrilátero de quatro nós submetido a integrações completas e integrações reduzidas seletivas para mostrar que a performance do elemento não é de fato afetada pela integração reduzida, mas sim, pelas características do problema analisado.

As modificações então foram testadas para problemas de vigas torcidas cascas hemisféricas e painéis cilíndricos. Segundo os autores, houve uma melhoria significativa no problema de viga torcida (*twisted beam*) e em uma malha particular do

exemplo da casca hemisférica. Em outros problemas as diferenças de resultados foram insignificantes. Ademais, foi notado cerca de 10% de acréscimo de custo computacional no novo elemento.

Lee e Bathe [13] buscam analisar o comportamento de elementos isoparamétricos planos quando submetidos a distorção geométrica. Os autores apresentam um estudo para elementos planos Lagrangeanos de nove e dezesseis nós e comparam com estudos para elementos Serendipity de oito e doze nós utilizando exemplos de vigas com diferentes condições de contorno para os apoios e diferentes aplicações de cargas. Os resultados dos estudos mostram uma melhor performance dos elementos Lagrangeanos quando submetidos à distorção, pois apresentam grau polinomial de ordem mais elevada, sendo assim capazes de se aproximar mais da solução exata do problema.

Prathap [14] explica que a origem do *locking* em vigas de Timoshenko deve-se ao emprego de polinômios de mesma ordem para os campos de deslocamento transversal e de rotação, ou seja, polinômios inconsistentes com a teoria de viga de Timoshenko. O emprego de polinômios de ordens diferentes implicaria em um elemento livre de *locking*, porém com formulação e implementação computacional mais complexas.

Long *et al.* [15] desenvolveram o método das coordenadas de área para o elemento quadrilateral de quatro nós. Segundo [13] elementos da família *Serendipity* apresentam baixa convergência de resultados quando submetidos às distorções geométricas. Dois motivos são apresentados. O primeiro motivo é que apenas termos de primeira ordem dos polinômios de deslocamento são representados quando o elemento é submetido a severas distorções geométricas. O segundo motivo se deve ao fato de que quando submetidos a distorções, a matriz de rigidez do elemento isoparamétrico deve ser resolvida através de técnicas de integração numérica, logo não apresenta um resultado exato. Já o elemento formulado por Long *et al.* [15] (método das coordenadas de área), além de apresentar em seu campo de deslocamentos grau polinomial mais elevado, pode ser formulado utilizando integração exata, proporcionando melhor convergência de resultados.

Zhang, Wang e He [16] apresentam um elemento isoparamétrico de cascas de oito nós livre do fenômeno de travamento. O conceito de elemento isoparamétrico degenerado apresentado por Ahmad, *et al.* [1] é trazido de volta, onde o elemento tridimensional é reduzido através da imposição de condições geométricas e estáticas

a fim de ser capaz de modelar problemas de placas e cascas. Segundo os autores, dois métodos podem ser utilizados na eliminação de problemas de travamento: o método implícito, que abrange a integração reduzida ou reduzida-seletiva; ou o método explícito, onde é feita uma revisão das formas de interpolação de tensões e deformações.

A revisão então foi feita através da interpolação dos termos de cisalhamento em coordenadas naturais, preservando todos os modos necessários, como translação, rotação e curvatura constante. A interpolação dos termos de deformação na membrana foi feita em coordenadas locais cartesianas. Após a correta revisão dos termos de deformação de cisalhamento e membrana, uma integração completa é então aplicada para avaliação da matriz de rigidez do elemento. A metodologia então foi aplicada a um problema de placa quadrada simplesmente apoiada visando avaliar o comportamento do cisalhamento parasítico; e para o comportamento de membrana do novo elemento, uma casca em forma de cilindro submetido a compressão foi analisada. Os resultados apontaram resultados satisfatórios tanto para cascas e placas finas ou espessas, sem que fossem notados problemas de travamento por cisalhamento ou travamento na membrana.

Garusi, Tralli e Cazzani [17] apresentam uma formulação não simétrica de tensões para a teoria de placas de Reissner-Mindlin. Segundos os autores, os modelos padrões desenvolvidos de elementos finitos não eram capazes de capturar o comportamento no limite da teoria das placas finas. Um elemento misto-híbrido é desenvolvido então, onde as tensões modeladas são as tensões locais e não as tensões resultantes. Assumia-se também, que as tensões de cisalhamento no plano não eram, *a priori*, simétricas. A imposição dessas condições juntamente com a inclusão de um campo de rotação infinitesimal, permitia que tensões de cisalhamento fora do plano fossem obtidas de maneira que nenhuma equação de compatibilidade fosse rompida. O modelo é testado então, para diversos exemplos de placa, como placas simplesmente apoiadas, placas totalmente engastadas e placas com cargas uniformes, distorcidas com ângulos de 60 e 30 graus.

Os autores concluem que seu modelo em termos de qualidade é comparável aos modelos existentes na literatura. No entanto, quando consideradas as deformações por cisalhamento, o modelo apresenta sempre o correto decréscimo da energia de deformação por cisalhamento, até mesmo no limite de placas finas. Ademais, o modelo aparenta ser livre de problemas de travamento.

Zhang e Kim [18] apresentam dois elementos quadrilaterais de quatro nós: um com vinte e outro com 24 graus de liberdade, ambos baseados na teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem, também conhecida por teoria de placas de Mindlin para compósitos laminados moderadamente espessos.

Os autores descrevem as teorias existentes afim de mostrar suas virtudes e defeitos. Para a teoria clássica de placas existe a restrição de espessura, sendo válidas apenas para placas muito finas, pois para placas espessas a teoria não é capaz de representar as deformações por cisalhamento. Passa-se então para a teoria de deformações de cisalhamento de primeira ordem. No entanto, a teoria assume que as tensões/deformações ao longo da espessura da placa são constantes, o que se sabe que não é verídico, uma vez que existem condições de contorno que impõem tensões de cisalhamento nulas. Sendo assim, fatores de correção necessitam ser introduzidos. Outra solução conhecida vem a ser a teoria de deformações de alta ordem. Utilizando polinômios de alta ordem para representar os componentes de deslocamento ao longo da espessura das placas, a teoria é capaz de representar as tensões e deformações de maneira correta ao longo da espessura da placa, respeitando suas condições limitantes sem a necessidade de fatores de correção. Contudo, formulações muito complexas envolvem um alto grau de tempo computacional necessário, fazem com que a teoria não seja economicamente atrativa. O modelo dos autores era baseado na teoria de deformações de cisalhamento de primeira ordem e na teoria de vigas de Timoshenko. Para o elemento com vinte graus de liberdade, foi utilizada a interpolação linear dos deslocamentos do elemento isoparamétrico para representar os deslocamentos no plano de análise. Para o elemento de 24 nós, foi utilizada a interpolação das funções de deslocamento do elemento com graus de liberdade de rotação plana, para análise dos deslocamentos no plano. Sendo esse grau de liberdade de rotação plana, uma maneira de aumentar a performance da parte referente à membrana de um elemento de placa e evitar o aparecimento do travamento na membrana na análise de cascas. Para os testes, foram utilizados exemplos de vigas laminadas quadradas e circulares com apoios engastados-articulados, diversos formatos de elementos distorcidos linearmente e desde cargas uniformemente distribuídas transversalmente, até cargas senoidais. Os resultados apontaram que os elementos estudados eram livres de travamentos por cisalhamento para vigas extremamente finas, inclusive quando submetidos a integração completa.

Braess, Ming e Shi [19] estudam o fenômeno do travamento por cisalhamento em elementos da elastostática, através do método chamado EAS (*enhanced assumed strain method*), onde juntamente com os campos de deformações convencionais, um outro campo de deformações é introduzido de forma independente e sem nenhuma relação de continuidade entre elementos. Os elementos estudados, com uma grande relação entre seu comprimento e altura, podem ser tratados como vigas. Segundo os autores, a ordem de convergência dos resultados com o método EAS é no mínimo tão boa quanto a ordem de convergência dos resultados de uma viga modelada através de termos quadráticos em seu deslocamento transversal.

Bui, Nguyen e Zhang [20] apresentam uma análise de flambagem nas placas de Reissner-Mindlin submetidas a cargas nas bordas. O trabalho dos autores era baseado na teoria de deformação por cisalhamento de primeira ordem para formulação da placa e utilizava método sem malha (*meshfree*) para a análise. Diferentemente dos estudos convencionais, onde malhas ou elementos são utilizados, o método *meshfree* consiste em utilizar um conjunto de nós dispostos sobre o domínio de interesse no problema. Para eliminação do travamento por cisalhamento, derivadas de primeira ordem das funções de forma para as rotações foram utilizadas.

A metodologia estudada foi então aplicada a problemas de placas retangulares com cargas de compressão uniaxiais, biaxiais, cargas puras de cisalhamento e cargas combinadas. Uma placa retangular com um furo circular em seu centro também foi analisada. Os resultados demonstraram que o método não só eliminava o efeito do travamento por cisalhamento, como também respeitava todas as condições de equilíbrio. Segundo os autores, o método poderia ser considerado robusto, efetivo e de alta precisão; e com estudos futuros, poderia ser capaz de resolver problemas não lineares, entre outros.

2.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA SOBRE A NOTAÇÃO *STRAIN GRADIENT*

Em paralelo aos diversos estudos citados acima, em meados da década de 80, John Dow desenvolvia uma nova notação chamada Notação *Strain Gradient*.

A notação apresenta coeficientes fisicamente interpretáveis, e seus coeficientes são escritos em termos de grandezas cinemáticas, através de relações deformação/deslocamento.

Na notação *Strain Gradient*, os modos de deformação são claramente apresentados; são eles: movimento de corpo rígido, deformações constantes e derivadas das deformações. Desta forma, além de se ter um entendimento físico mais claro do problema, o conceito de cisalhamento parasítico se torna completamente visível na expressão de distorção angular.

Uma vez identificados, os termos espúrios podem ser removidos das expressões antes da realização da análise numérica, gerando um elemento livre de erros de modelagem.

O estudo completo de Dow pode ser visto em seu livro [21].

Dow, Cabiness e Ho [22] analisam o comportamento de um elemento triangular de seis nós submetido a distorções, movendo uma das arestas do elemento triangular para uma posição diferente da original. Foi também adicionada curvatura a uma ou mais das bordas do elemento triangular. Duas abordagens são feitas inicialmente. A primeira abordagem compara a energia de deformação obtida no elemento à formulação apresentada por Rayleigh-Ritz. A segunda abordagem compara a energia de deformação obtida no elemento a solução analítica do problema. Ambas apresentam duas limitações básicas. A comparação de resultados é feita entre modelos de elementos finitos e as respostas não apresentam nenhum significado claro quanto a identificação dos estados de deformação. A solução do problema na notação *Strain Gradient* elimina as duas restrições anteriores, além de evidenciar a capacidade de modelagem dos elementos e permitir uma comparação mais exata do problema modelado com o problema contínuo.

Dow, Su e Feng [23] apresentam um estudo para vigas esbeltas e estruturas de placas modeladas por elementos de treliça tridimensionais (*lattice structures*), repetidos ao longo da estrutura. A utilização da notação *Strain Gradient* na formulação desses elementos de treliça permite a avaliação de sua capacidade de modelagem e permite a eliminação de termos espúrios que atrapalham a convergência dos resultados.

Dow, Cabiness e Ho [24], apresentam novamente um estudo para o elemento triangular de seis nós na notação *Strain Gradient*. Esse novo estudo mostra a deficiência de modelagem de elementos com as bordas curvas. Enquanto elementos de geometria reta conseguem representar todos os estados de deformação, elementos com bordas curvas são capazes apenas de representar deformações constantes.

Dow e Byrd [25] estudaram os efeitos do cisalhamento parasítico para uma viga de Timoshenko com dois nós e para um elemento de membrana com quatro nós. É evidenciado mais uma vez que o fenômeno do travamento por cisalhamento ocorre devido a termos espúrios presentes na expressão de distorção angular.

Porém, os estudos também mostram que o cisalhamento parasítico não se limita somente aos termos espúrios mas seu efeito também é visível com o aumento do comprimento ou da espessura dos elementos analisados.

Dow e Huyer [26] desenvolvem modelos para representação no meio contínuo de estruturas para estações espaciais usando elementos de treliça espacial (lattice structures) usando a notação *Strain Gradient*. Estes modelos foram desenvolvidos com a estrutura completa, em escala menor. Para simular defeitos na estrutura, duas barras do elemento de treliça espacial, uma longitudinal e outra diagonal, tem suas rigidezes reduzidas.

Dow e Byrd [27] mostram os efeitos do cisalhamento parasítico na formulação para um elemento de placa de Mindlin composto por quatro nós, com três graus de liberdade por nó. A formulação é aplicada com e sem os termos espúrios e uma comparação de resultados é realizada entre os modelos.

Abdalla e Dow [28] apresentam um estudo para elementos de placas laminadas de quatro nós. O objetivo é mostrar a presença de erros quantitativos, causados pela presença dos termos espúrios no elemento e erros qualitativos também causados pela presença do cisalhamento parasítico, bem como pela representação do meio contínuo por números finitos de graus de liberdade.

Dow e Abdalla [29] mostram em um estudo para placas laminadas que o fenômeno do cisalhamento parasítico pode ser eliminado sem grande dificuldade sem que nenhum outro erro seja introduzido. Porém, isso não é validado para o elemento de oito nós. O refino da malha junto com a utilização de técnicas de integração reduzida para eliminar os termos espúrios acaba eliminando termos legítimos das expressões de distorção angular causando o fenômeno dos modos espúrios de energia nula. A utilização de técnicas de integração reduzida na expressão de distorção angular elimina indevidamente equações de compatibilidade da elasticidade. Ao analisar o modelo na notação *Strain Gradient*, essas equações são identificadas antes da formação da matriz de rigidez, evitando sua eliminação.

Mohamed, Byrd e Dow [30] mostram para elementos de placas de Mindlin de quatro e nove nós os efeitos da escolha certa e errada do número de pontos para a

integração reduzida. O processo utilizado para validar os estudos é o mesmo apresentado nos artigos de [22] a [29].

Abdalla, Fagundes e Machado [31] mostram o processo de eliminação do cisalhamento parasítico para uma viga laminada composta por dois diferentes materiais. A eliminação do termo espúrio na equação de cisalhamento acontece antes da formulação da matriz de rigidez do elemento, evitando o enrijecimento artificial do elemento.

Abdalla, Belo e Pereira [32] apresentam três problemas de placas laminadas livres de termos espúrios, removidos pela notação *Strain Gradient*. As placas apresentavam as seguintes características: a primeira era simétrica, simplesmente apoiada e submetida a carga linear; a segunda não era simétrica e contava com suas lâminas dispostas em 45°, também simplesmente apoiada, mas submetida a uma carga senoidal. Finalmente, a terceira placa não era simétrica e era composta por duas bordas opostas simplesmente apoiadas e as outras duas bordas livres; esta placa foi submetida a mesma carga senoidal da segunda placa. A comparação dos elementos com e sem os termos espúrios mostra a superioridade do elemento formulado na notação *Strain Gradient* para elementos de placa de Mindlin de quatro nós.

Abdalla, Belo e Dow [33] apresentam a formulação de um elemento de oito nós para placas de Mindlin. Observa-se que a formulação do elemento quadrilateral de oito nós é dada por uma equação de terceiro grau incompleta, o que ocasiona o aparecimento dos termos espúrios nas expressões de distorção angular. Após a análise das expansões de deformação, o elemento é formulado com sua matriz de rigidez livre de erros de modelagem.

Abdalla, Belo e Dow [34] apresentam um estudo para elementos de placa de Mindlin de quatro nós. São apresentados exemplos de placa isotrópica, placa laminada simétrica e placa laminada assimétrica. Os modelos são comparados entre si e com a solução analítica do problema, mostrando a diferença da modelagem com e sem os termos espúrios nas expressões de distorção angular. Os autores apresentam em sua conclusão que a utilização da notação *Strain Gradient* permite que apenas os termos ilegítimos das expressões de distorção angular sejam removidos, ou seja, não se tem a introdução dos já citados anteriormente, modos espúrios de energia nula. Ademais, a notação *Strain Gradient* permite a integração

simbólica da matriz de rigidez dos elementos, sem que haja a necessidade da utilização de integração numérica.

Nota-se que muita atenção é dada para a remoção do *locking* e modos espúrios de energia nula para placas, cascas e vigas, mas pouca atenção é dada para o mau comportamento de elementos planos.

Nos artigos citados acima, foram vistas diversas tentativas de resolver o problema do *locking* e modos espúrios de energia nula, muitas vezes bastante complexos e não necessariamente eficazes. Em contrapartida, a notação *Strain Gradient* é capaz de identificar e eliminar precisamente os termos espúrios responsáveis por erros de modelagem em elementos finitos. Neste trabalho, será feita uma análise do comportamento do elemento plano de quatro nós utilizando a notação *Strain Gradient*.

3 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

3.1 FORMULAÇÃO ISOPARAMÉTRICA

A formulação isoparamétrica permite que elementos quadrilaterais e hexaédricos tenham diferentes formatos com arestas não necessariamente não retangulares, podendo até ter formas curvas. No caso do elemento quadrilateral, introduzindo coordenadas de referência $\xi\eta$ no plano que variam de -1 a +1 em ambos os eixos, faz-se um mapeamento do elemento disforme em um elemento de referência retangular. Com a utilização de um sistema diferente do sistema cartesiano, faz-se necessária uma transformação de coordenadas, além disso, as equações geradas pela formulação isoparamétrica dificilmente podem ser integradas de maneira exata, com isso métodos de integração numérica são utilizados.

3.1.1 Elemento quadrilateral isoparamétrico de quatro nós

A formulação do elemento quadrilateral isoparamétrico de quatro nós parte da interpolação da geometria e do campo através das funções de forma do elemento. As equações podem ser vistas abaixo:

Interpolação da geometria:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad (1)$$

$$y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \quad (2)$$

Interpolação de campo:

$$u = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) u_i \quad (3)$$

$$v = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) v_i \quad (4)$$

Abaixo na Figura 1, pode ser observado um estudo do elemento de quatro nós isoparamétrico segundo Cook, Malkus, Plesha e Witt [35].

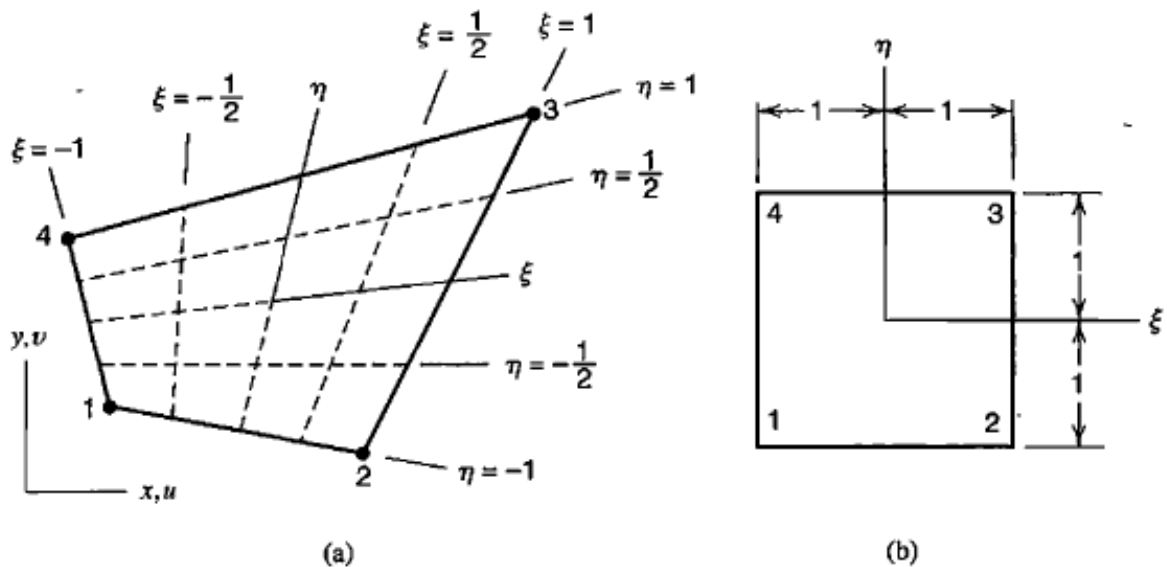


Figura 01. (a) Elemento Plano de quatro nós no espaço físico. (b) O mesmo elemento, mapeado no espaço $\xi\eta$

Fonte: Cook, Malkus, Plesha e Witt, 2002

Para $N'_i = N_i$: elemento isoparamétrico;

Para $N'_i < N_i$: elemento subparamétrico;

Para $N'_i > N_i$: elemento superparamétrico.

A imagem abaixo retirada de Zienkiewicz e Taylor [36] representa de forma clara o funcionamento dos elementos isoparamétricos, subparamétricos e superparamétricos respectivamente, onde: (a) as funções de forma tem grau polinomial igual ao grau polinomial da geometria do elemento; (b) as funções de forma tem grau polinomial inferior ao grau polinomial da geometria do elemento; (c) as funções de forma tem grau polinomial superior ao grau polinomial da geometria do elemento.

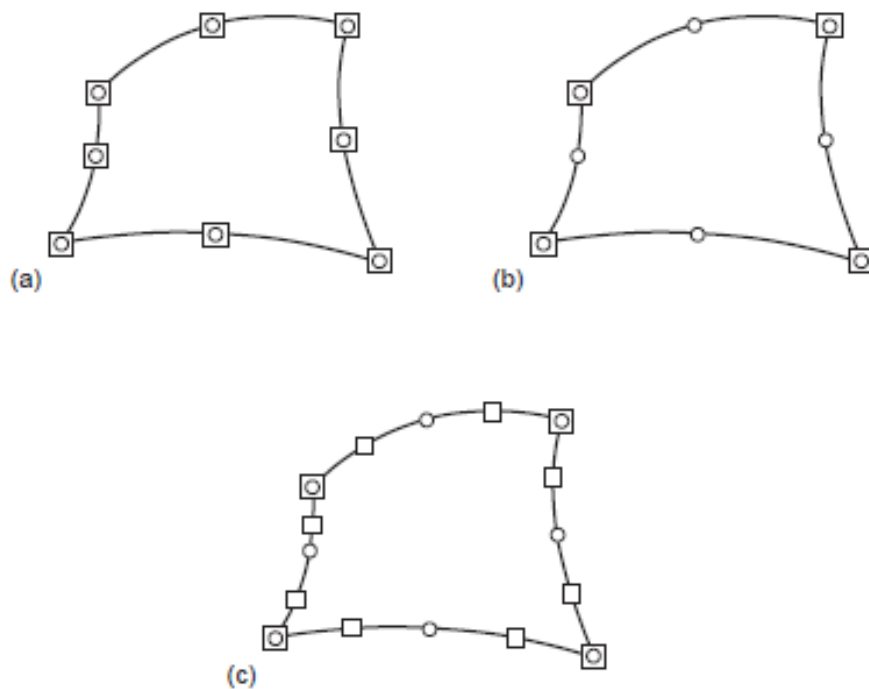


Fig. 9.8 Various element specifications: ○ point at which coordinate is specified; □ points at which the function parameter is specified. (a) Isoparametric, (b) superparametric, (c) subparametric.

Figura 02. Apresentação dos elementos isoparamétricos, subparamétricos e superparamétricos

Fonte: Zienkiewicz e Taylor, 2000

Tratando-se de um elemento isoparamétrico, as mesmas funções de forma devem ser usadas tanto para as coordenadas como para os deslocamentos.

Segundo Cook, Malkus, Plesha e Witt [35], as funções de forma para o elemento quadrilateral de quatro nós, podem ser obtidas através das expressões abaixo:

$$N_1 = \frac{(a-x)(b-y)}{4ab} \quad (5)$$

$$N_2 = \frac{(a+x)(b-y)}{4ab} \quad (6)$$

$$N_3 = \frac{(a+x)(b+y)}{4ab} \quad (7)$$

$$N_4 = \frac{(a-x)(b+y)}{4ab} \quad (8)$$

Sendo:

- x e y: coordenadas nodais;
- a e b: dimensões do elemento em coordenadas cartesianas.

Para o elemento quadrilateral isoparamétrico, utilizam-se coordenadas locais ξ e η que variam de -1 a +1 (coordenadas naturais). Com isso, as funções de forma para o elemento quadrilateral de quatro nós isoparamétrico são escritas conforme as expressões abaixo:

$$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 - \eta) \quad (9)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 - \eta) \quad (10)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} (1 + \xi)(1 + \eta) \quad (11)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} (1 - \xi)(1 + \eta) \quad (12)$$

As derivadas parciais das funções de forma são expressas por:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \quad (13)$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

$$[J] = \begin{Bmatrix} \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{Bmatrix} \quad (17)$$

A matriz $[J]$ é a matriz Jacobiana, responsável por fazer o mapeamento geométrico do elemento. A matriz Jacobiana pode ser descrita como um fator de escala que multiplica $\partial \xi \partial \eta$ para produzir o incremento de área $\partial x \partial y$.

Como os campos de deslocamento do elemento são em coordenadas cartesianas, suas derivadas de primeira ordem (deformações) também deverão ser expressas em coordenadas cartesianas.

As deformações elásticas são obtidas através das equações abaixo:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (18)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (19)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (20)$$

Para que as coordenadas isoparamétricas sejam transformadas em coordenadas cartesianas, faz-se uma reformulação da equação (16):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (21)$$

As equações de deformação então são resolvidas a partir das equações (18), (19) e (20), têm-se:

$$\varepsilon_x = J_{11}^{-1} \left(\sum_{i=4}^N N_{i,\xi} u_i \right) + J_{12}^{-1} \left(\sum_{i=4}^N N_{i,\eta} u_i \right) \quad (22)$$

$$\varepsilon_y = J_{21}^{-1} \left(\sum_{i=4}^N N_{i,\xi} v_i \right) + J_{22}^{-1} \left(\sum_{i=4}^N N_{i,\eta} v_i \right) \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} = & J_{11}^{-1} \left(\sum_{i=4}^N N_{i,\xi} v_i \right) + J_{12}^{-1} \left(\sum_{i=4}^N N_{i,\eta} v_i \right) + \\ & J_{21}^{-1} \left(\sum_{i=4}^N N_{i,\xi} u_i \right) + J_{22}^{-1} \left(\sum_{i=4}^N N_{i,\eta} u_i \right) \end{aligned} \quad (24)$$

Para o cálculo da matriz de rigidez, as deformações são expressas na forma matricial:

$$\{\varepsilon\} = [S]\{d\} \quad (25)$$

$$\{d\} = [N]\{d_i\} \quad (26)$$

$$[B] = [S][N] \quad (27)$$

$$\{\varepsilon\} = [B]\{d_i\} \quad (28)$$

Sendo:

$\{\varepsilon\}$: vetor de deformações elásticas;

$\{d\}$: vetor de deslocamentos;

$[N]$: matriz das funções de forma;

$[S]$: matriz do operador diferencial;

$\{d_i\}$: vetor de deslocamentos nos nós.

Expandindo a equação (28), têm-se:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (J_{11}^{-1}N_{1,\xi} + J_{12}^{-1}N_{1,\eta}) & 0 & (J_{11}^{-1}N_{2,\xi} + J_{12}^{-1}N_{2,\eta}) & 0 & (J_{11}^{-1}N_{3,\xi} + J_{12}^{-1}N_{3,\eta}) & 0 & (J_{11}^{-1}N_{4,\xi} + J_{12}^{-1}N_{4,\eta}) & 0 \\ 0 & (J_{21}^{-1}N_{1,\xi} + J_{22}^{-1}N_{1,\eta}) & 0 & (J_{21}^{-1}N_{2,\xi} + J_{22}^{-1}N_{2,\eta}) & 0 & (J_{21}^{-1}N_{3,\xi} + J_{22}^{-1}N_{3,\eta}) & 0 & (J_{21}^{-1}N_{4,\xi} + J_{22}^{-1}N_{4,\eta}) \\ (J_{21}^{-1}N_{1,\xi} + J_{22}^{-1}N_{1,\eta}) & (J_{11}^{-1}N_{1,\xi} + J_{12}^{-1}N_{1,\eta}) & (J_{21}^{-1}N_{2,\xi} + J_{22}^{-1}N_{2,\eta}) & (J_{11}^{-1}N_{2,\xi} + J_{12}^{-1}N_{2,\eta}) & (J_{21}^{-1}N_{3,\xi} + J_{22}^{-1}N_{3,\eta}) & (J_{11}^{-1}N_{3,\xi} + J_{12}^{-1}N_{3,\eta}) & (J_{21}^{-1}N_{4,\xi} + J_{22}^{-1}N_{4,\eta}) & (J_{11}^{-1}N_{4,\xi} + J_{12}^{-1}N_{4,\eta}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

A matriz de rigidez do elemento pode ser obtida através da integral de volume:

$$K = \int_A [B]^T [C] [B] t dx dy \quad (30)$$

Sendo a matriz $[C]$ a matriz constitutiva com as propriedades do material utilizado, descritas abaixo:

A matriz constitutiva $[C]$ do elemento para o estado plano de tensões é definida por:

$$C = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (31)$$

Para o estado plano de deformações a matriz constitutiva $[C]$ é definida por:

$$C = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

Sendo:

E: Módulo de elasticidade longitudinal do elemento;

ν : Coeficiente de Poisson do elemento.

Transformando a integral de volume em uma integral de área com espessura constante e alterando para o sistema de coordenadas local:

$$K = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B(\xi, \eta)]^T [C][B(\xi, \eta)] t J d\xi d\eta \quad (33)$$

Sendo:

$$J = \det[J] \quad (34)$$

$$dx dy = J d\xi d\eta \quad (35)$$

3.1.2 Elemento Isoparamétrico de quatro nós

Com o elemento de quatro nós definido, as derivadas das funções de forma para o elemento em função de $\xi\eta$ podem ser vistas abaixo:

$$N_{1,\xi} = \frac{1}{4}[\eta - 1] \quad (36)$$

$$N_{1,\eta} = \frac{1}{4}[\xi - 1] \quad (37)$$

$$N_2, \xi = \frac{1}{4}[-\eta + 1] \quad (38)$$

$$N_2, \eta = \frac{1}{4}[-\xi - 1] \quad (39)$$

$$N_3, \xi = \frac{1}{4}[\eta + 1] \quad (40)$$

$$N_3, \eta = \frac{1}{4}[\xi + 1] \quad (41)$$

$$N_4, \xi = \frac{1}{4}[-\eta - 1] \quad (42)$$

$$N_4, \eta = \frac{1}{4}[-\xi + 1] \quad (42)$$

Substituindo as funções de forma na equação (17) o Jacobiano pode ser expresso pela equação:

$$[J] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} N_1, \xi + N_2, \xi + N_3, \xi + N_4, \xi \\ N_1, \eta + N_2, \eta + N_3, \eta + N_4, \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Com as funções de forma e o Jacobiano definidos, as deformações podem ser obtidas através das equações (22), (23) e (24).

$$\varepsilon_x = J_{11}^{-1} \left(\frac{1}{4}[\eta - 1]u_1 + \frac{1}{4}[-\eta + 1]u_2 + [\eta + 1]u_3 + \frac{1}{4}[-\eta - 1]u_4 \right) \quad (44)$$

$$\varepsilon_y = J_{21}^{-1} \left(\frac{1}{4}[\xi - 1]v_1 + \frac{1}{4}[-\xi - 1]v_2 + [\xi + 1]v_3 + \frac{1}{4}[-\xi + 1]v_4 \right) \quad (45)$$

$$\begin{aligned}
\gamma_{xy} = & J_{11}^{-1} \left(\frac{1}{4} [\eta - 1] v_1 + \frac{1}{4} [-\eta + 1] v_2 + [\eta + 1] v_3 + \frac{1}{4} [-\eta - 1] v_4 \right) + \\
& + J_{12}^{-1} \left(\frac{1}{4} [\xi - 1] v_1 + \frac{1}{4} [-\xi - 1] v_2 + [\xi + 1] v_3 + \frac{1}{4} [-\xi + 1] v_4 \right) + \\
& + J_{21}^{-1} \left(\frac{1}{4} [\eta - 1] u_1 + \frac{1}{4} [-\eta + 1] u_2 + [\eta + 1] u_3 + \frac{1}{4} [-\eta - 1] u_4 \right) + \\
& + J_{22}^{-1} \left(\frac{1}{4} [\xi - 1] u_1 + \frac{1}{4} [-\xi - 1] u_2 + [\xi + 1] u_3 + \frac{1}{4} [-\xi + 1] u_4 \right)
\end{aligned} \tag{46}$$

3.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA – QUADRATURA DE GAUSS

Segundo Burden e Faires [37] o método da Quadratura de Gauss consiste em escolher pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$ dentro de uma função, entre um intervalo $[a, b]$ e com a utilização de coeficientes $c_1, c_2, \dots, c_n$, que sejam capazes de minimizar os erros devidos a aproximação de resultados, através da equação:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i) \tag{47}$$

A aplicação do método pode ser vista na figura 03 abaixo:

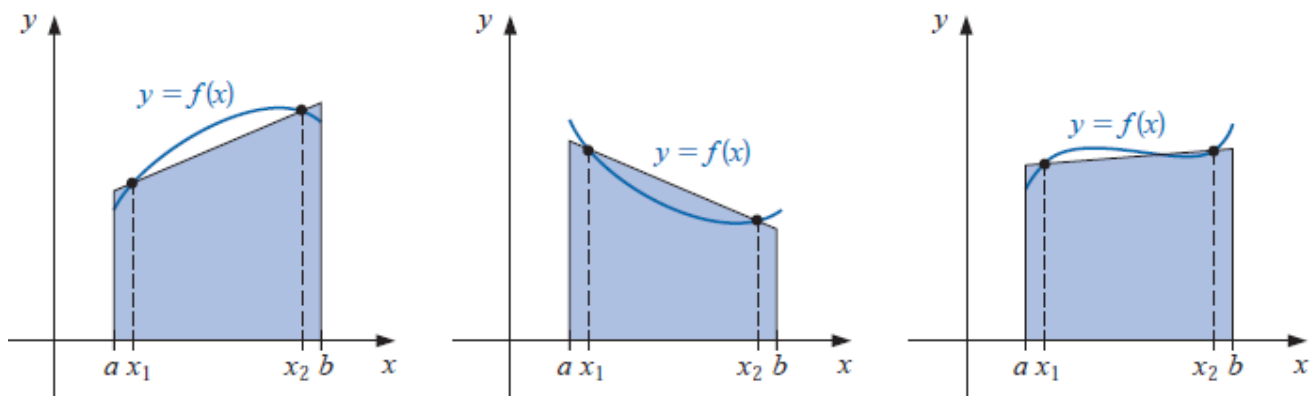


Figura 03. Método da Quadratura de Gauss

Fonte: Burden e Faires, 2010

Os coeficientes $c_1, c_2, \dots, c_n$, são coeficientes arbitrários e os pontos $x_1, x_2, \dots, x_n$ e tem como única restrição: o fato de que devem estar dentro do intervalo de integração $[a, b]$.

O parâmetro mínimo que deve ser respeitado para que a integração seja considerada exata é:

$$N = 2 \text{ NG} - 1 \quad (48)$$

sendo:

N : o grau que o polinômio deverá ter para ser integrado de forma exata;

NG : o número de pontos de Gauss escolhidos para realizar a integração.

Para situações no plano, a Quadratura de Gauss é tratada de forma similar a formulação unidimensional. Dow [21] diz que a forma bi-dimensional da Quadratura de Gauss aproxima o valor de uma integral em uma região quadrada compreendida entre os limites $-1 < x < +1$ e $-1 < y < +1$, através da equação:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y) dx dy \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m W_i W_j f(a_i, b_j) \quad (49)$$

Sendo:

W_i e W_j : fatores de peso para o plano;

n, m : número de pontos de Gauss nas coordenadas x e y ;

a_i, b_j : pontos de Gauss nas coordenadas x e y .

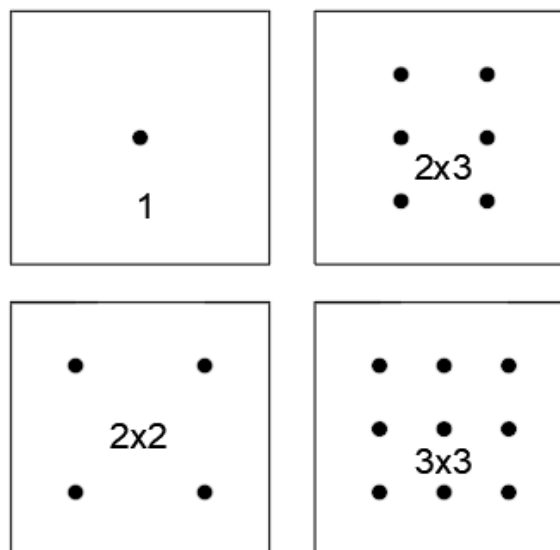


Figura 04– Localização dos pontos de Gauss no plano

Fonte: O Autor, 2019

A tabela de fatores de peso e pontos de Gauss pode ser vista na Tabela 2:

Tabela 2 – Tabela de valores para pontos de Gauss

Nº de pontos de Gauss	a,b	Fatores de Peso $W_{i,j}$
1	0	2
2	0.5773502692	1.0000000000
	-0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	-0.7745966692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	-0.3399810436	0.6521451549
	-0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	0.0000000000	0.5688888889
	-0.5384693101	0.4786286705
	-0.9061798459	0.2369268850

Fonte: Burden e Faires, 2010

3.3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA EM ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

A integração numérica em elementos isoparamétricos é utilizada para resolver o problema do *Shear Locking*. Sabendo que o erro citado ocorre nos termos referentes ao cisalhamento presentes na matriz de rigidez, pode-se utilizar a integração reduzida seletiva. Os termos provenientes das deformações normais podem ser integrados de forma exata, já a equação do cisalhamento tem seu número de pontos de Gauss reduzido para que os termos espúrios sejam removidos da matriz de rigidez.

Sabe-se que a matriz de rigidez de um elemento isoparamétrico é obtida através da equação:

$$[K] = [B]^T [C] [B] \quad (50)$$

Separando a matriz $[C]$, em $[C_1]$ para deformações normais e $[C_2]$ para cisalhamento, em um caso de estado plano de tensões, tem-se:

$$[C_1] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$[C_2] = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (52)$$

Para o estado plano de deformações, tem-se:

$$[C_1] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$[C_2] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Sendo:

ν : coeficiente de Poisson;

E : módulo de elasticidade longitudinal.

Após a separação das deformações normais da deformação de cisalhamento, o método da integração numérica seletiva pode ser aplicado. Como as deformações normais não possuem termos espúrios, a integração pode ser realizada com $NG = \frac{n+1}{2}$ pontos de Gauss, já para o cisalhamento a integração deverá ter no

mínimo um grau a menos. Com isso, os termos referentes a deformações normais presentes na equação de cisalhamento serão removidos.

Reduzir um grau para integração numérica é um método que apresenta eficácia para remoção dos termos espúrios, até certo grau polinomial. A utilização dessa técnica a partir de certo momento introduz os chamados modos de energia nula, pois quando essa integração é feita, acaba-se por eliminar todos os termos de um certo grau polinomial sem distinção. Hughes e Cohen [7] apresentam em seu artigo sobre o elemento *Heterosis* que elementos de oito e nove nós apresentam no mínimo um modo de energia nula. Nesses casos, além de remover os termos espúrios presentes na formulação do cisalhamento, a integração reduzida acaba removendo termos legítimos da expressão e com isso a representação do cisalhamento deixa de representar todo o seu potencial de modelagem.

3.4 NOTAÇÃO *STRAIN GRADIENT*

Os coeficientes arbitrários empregados na formulação convencional de elementos finitos para um caso bidimensional de deslocamento são:

$$u(x, y) = A_1 + A_2x + A_3y + A_4x^2 + A_5xy + A_6y^2 + A_7x^3 + A_8x^2y + A_9xy^2 + A_{10}y^3 \quad (55)$$

$$v(x, y) = B_1 + B_2x + B_3y + B_4x^2 + B_5xy + B_6y^2 + B_7x^3 + B_8x^2y + B_9xy^2 + B_{10}y^3 \quad (56)$$

Para definir os coeficientes na notação *Strain Gradient*, as expansões polinomiais dos deslocamentos são avaliadas na origem do elemento. Avaliando as equações (55) e (56) na origem tem-se:

$$u(0,0) = A_1 = [u]_0 \quad (57)$$

$$v(0,0) = B_1 = [v]_0 \quad (58)$$

sendo $[u]_0$ e $[v]_0$ movimentos de corpo rígido horizontal e vertical, respectivamente.

Para obtenção das deformações normais do elemento, avalia-se a primeira derivada dos deslocamentos u, v na origem, tendo-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = A_2 + A_4x + A_5y + 3A_7x^2 + 2A_8xy + A_9y^2 \quad (59)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = B_3 + B_5x + 2B_6y + B_8x^2 + 2B_9xy + 3B_{10}y^2 \quad (60)$$

$$\varepsilon_x(0,0) = A_2 = [\varepsilon_x]_0 \quad (61)$$

$$\varepsilon_y(0,0) = B_3 = [\varepsilon_y]_0 \quad (62)$$

Através da definição de rotação no plano e distorção angular avaliadas na origem, tendo-se:

$$r(x,y) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left[(B_2 - A_3) + (2B_4 - A_5)x + (B_5 - 2A_6)y + (3B_7 - A_8)x^2 + \right. \quad (63)$$

$$\left. (2B_8 - 2A_9)xy + (B_9 - 3A_{10})y^2 \right]$$

$$\gamma(x,y) = \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \left[(B_2 + A_3) + (2B_4 + A_5)x + (B_5 + 2A_6)y + (3B_7 + A_8)x^2 + \right. \quad (64)$$

$$\left. (2B_8 + 2A_9)xy + (B_9 + 3A_{10})y^2 \right]$$

$$r(0,0) = \frac{1}{2} (B_2 - A_3) = [r]_0 \quad (65)$$

$$\gamma(0,0) = (B_2 + A_3) = [\gamma_{xy}]_0 \quad (66)$$

Resolvendo as equações (65) e (66) tem-se:

$$A_3 = \left[\frac{\gamma_{xy}}{2} - r \right]_0 \quad (67)$$

$$B_2 = \left[\frac{\gamma_{xy}}{2} + r \right]_0 \quad (68)$$

A continuação da obtenção dos coeficientes polinomiais é feita através da derivada das deformações normais na origem. As equações são descritas abaixo:

$$\varepsilon_{x,x}(0,0) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} = 2A_4 \quad (69)$$

$$\varepsilon_{y,y}(0,0) = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} = 2B_6 \quad (70)$$

$$\varepsilon_{x,y}(0,0) = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} = A_5 \quad (71)$$

$$\varepsilon_{y,x}(0,0) = \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} = B_5 \quad (72)$$

$$\gamma_{xy,x}(0,0) = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = A_5 + 2B_4 \quad (73)$$

$$\gamma_{xy,y}(0,0) = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} = B_5 + 2A_6 \quad (74)$$

Resolvendo as equações (69) a (74), tem-se:

$$A_4 = \left[\frac{\varepsilon_{x,x}}{2} \right]_0 \quad (75)$$

$$A_5 = \left[\varepsilon_{x,y} \right]_0 \quad (76)$$

$$A_6 = \left[\frac{(\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x})}{2} \right]_0 \quad (77)$$

$$B_4 = \left[\frac{(\gamma_{xy,x} - \varepsilon_{x,y})}{2} \right]_0 \quad (78)$$

$$B_5 = \left[\varepsilon_{y,x} \right]_0 \quad (79)$$

$$B_6 = \left[\frac{\varepsilon_{y,y}}{2} \right]_0 \quad (80)$$

Os coeficientes *Strain Gradient* de terceira ordem podem ser definidos através das segundas derivadas das deformações. As equações são descritas abaixo:

$$\varepsilon_{x,xx}(0,0) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x^2} = 6A_7 \quad (81)$$

$$\varepsilon_{y,yy}(0,0) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial y^2} = 6B_{10} \quad (82)$$

$$\varepsilon_{x,yy}(0,0) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = 2A_9 \quad (83)$$

$$\varepsilon_{y,xx}(0,0) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2B_8 \quad (84)$$

$$\varepsilon_{x,xy}(0,0) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x \partial y} = 2A_8 \quad (85)$$

$$\varepsilon_{y,xy}(0,0) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial y} = 2A_8 \quad (86)$$

$$\gamma_{xy,xx}(0,0) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x^2} = 2A_8 + 6B_7 \quad (87)$$

$$\gamma_{xy,yy}(0,0) = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y^2} = 6A_{10} + 2B_9 \quad (88)$$

$$\gamma_{xy,xy}(0,0) = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 6A_{10} + 2B_9 \quad (89)$$

Resolvendo as equações (81) a (89), tem-se:

$$A_7 = \left[\frac{\varepsilon_{x,xx}}{6} \right]_0 \quad (90)$$

$$A_8 = \left[\frac{\varepsilon_{x,xy}}{2} \right]_0 \quad (91)$$

$$A_9 = \left[\frac{\varepsilon_{x,yy}}{2} \right]_0 \quad (92)$$

$$A_{10} = \left[\frac{(\gamma_{xy,yy} - \varepsilon_{y,xy})}{6} \right]_0 \quad (93)$$

$$B_7 = \left[\frac{(\gamma_{xy,xx} - \varepsilon_{x,xy})}{6} \right]_0 \quad (94)$$

$$B_8 = \left[\frac{\varepsilon_{y,xx}}{2} \right]_0 \quad (95)$$

$$B_9 = \left[\frac{\varepsilon_{y,xy}}{2} \right]_0 \quad (96)$$

$$B_{10} = \left[\frac{\varepsilon_{y,yy}}{6} \right]_0 \quad (97)$$

Foram definidos os coeficientes *Strain Gradient* até os coeficientes arbitrários A_{10} e B_{10} . Esse procedimento de determinação de coeficientes foi descrito para um polinômio tridimensional de quarta ordem e pode ser consultado em Dow [22] (ver tabela A.1. Pág. 103-104).

3.5 OS ELEMENTOS E A PRESENÇA DOS TERMOS ESPÚRIOS

Esta seção tem a finalidade de apresentar os polinômios de deformações para os elementos de três, quatro, seis e oito nós, visando evidenciar a presença dos termos espúrios nos elementos formados por polinômios incompletos. Será dada ênfase no elemento de quatro nós, tema principal deste trabalho.

3.5.1 Elemento triangular de três nós

A presente seção apresenta os polinômios de deslocamento e de deformação para o triângulo de três nós, os polinômios são apresentados abaixo:

$$u(x, y) = [u]_0 + [\varepsilon_x]_0 x + [\gamma_{xy}/2 - r]_0 y \quad (98)$$

$$v(x, y) = [v]_0 + [\gamma_{xy} / 2 + r]_0 x + [\varepsilon_y]_0 y \quad (99)$$

As deformações normais e distorção angular são dadas pelas primeiras derivadas dos deslocamentos, sendo elas:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = [\varepsilon_x]_0 \quad (100)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = [\varepsilon_y]_0 \quad (101)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = [\gamma_{xy}]_0 \quad (102)$$

Após a apresentação dos polinômios de deformação, nota-se que nas três expressões descritas existem apenas termos legítimos de cada equação. Isso acontece pois a formulação do triângulo de três nós parte de polinômios de primeira ordem completos. Com isso, os termos de deformação normal que poderiam causar o erro de cisalhamento parasítico são eliminados naturalmente na formulação da expressão de distorção angular.

3.5.2 Elemento quadrilateral de quatro nós

Esta seção apresenta a formulação completa de um quadrilátero de quatro nós na notação *Strain Gradient*. Os polinômios de deslocamento são apresentados abaixo:

$$u(x, y) = [u]_0 + [\varepsilon_x]_0 x + [\gamma_{xy} / 2 - r]_0 y + [\varepsilon_{x,y}]_0 xy \quad (103)$$

$$v(x, y) = [v]_0 + [\gamma_{xy} / 2 + r]_0 x + [\varepsilon_y]_0 y + [\varepsilon_{y,x}]_0 xy \quad (104)$$

As deformações normais e distorção angular são dadas pelas primeiras derivadas dos deslocamentos, sendo elas:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = [\varepsilon_x]_0 + [\varepsilon_{x,y}]_0 y \quad (105)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = [\varepsilon_y]_0 + [\varepsilon_{y,x}]_0 x \quad (106)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = [\gamma_{xy}]_0 + [\varepsilon_{x,y}]_0 x + [\varepsilon_{y,x}]_0 y \quad (107)$$

Após a definição das expressões de deformações normais e distorção angular, o conceito de *Parasitic Shear* é evidenciado pela primeira vez neste trabalho. Os termos em x e y presentes na expressão de distorção angular acompanham termos de deformações normais. Esses termos são os já fartamente citados termos espúrios, que como já mencionado anteriormente causam um aumento indevido na energia de deformação do elemento.

Com a eliminação dos termos espúrios, a nova equação de distorção angular fica na seguinte forma:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = [\gamma_{xy}]_0 \quad (108)$$

Os deslocamentos no MEF são calculados nos nós do elemento, a representação dos deslocamentos em cada nó do elemento na notação *Strain Gradient* é dada por:

$$\{d\} = [\phi] \{\varepsilon_{sg}\} \quad (109)$$

Sendo:

$\{d\}$ é vetor de deslocamentos nodais e é definido por:

$$\{d\} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4\} \quad (110)$$

$\{\varepsilon_{sg}\}$ é o vetor dos modos de deformação *Strain Gradient* definido por:

$$\{\varepsilon_{sg}\}^T = \{u \ v \ r \ \varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy} \ \varepsilon_{x,y} \ \varepsilon_{y,x}\}_0 \quad (111)$$

$[\phi]$ é a matriz composta de vetores de deslocamentos linearmente independentes que contêm as coordenadas nodais do elemento e que relaciona os deslocamentos aos modos de deformação *Strain Gradient* definida por:

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1 & x_1 & 0 & \frac{y_1}{2} & x_1 y_1 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & y_1 & \frac{x_1}{2} & 0 & x_1 y_1 \\ 1 & 0 & -y_2 & x_2 & 0 & \frac{y_2}{2} & x_2 y_2 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & y_2 & \frac{x_2}{2} & 0 & x_2 y_2 \\ 1 & 0 & -y_3 & x_3 & 0 & \frac{y_3}{2} & x_3 y_3 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & 0 & y_3 & \frac{x_3}{2} & 0 & x_3 y_3 \\ 1 & 0 & -y_4 & x_4 & 0 & \frac{y_4}{2} & x_4 y_4 & 0 \\ 0 & 1 & x_4 & 0 & y_4 & \frac{x_4}{2} & 0 & x_4 y_4 \end{bmatrix} \quad (112)$$

As deformações elásticas também são relacionadas aos modos de deformação *Strain Gradient*, através de:

$$\{\mathcal{E}\} = \{T_{sg}\} \{\mathcal{E}_{sg}\} \quad (113)$$

Sendo:

$\{\mathcal{E}\}$: vetor de deformações normais e distorções angulares definido por:

$$\{\mathcal{E}\} = \{\mathcal{E}_x \quad \mathcal{E}_y \quad \gamma_{xy}\} \quad (114)$$

$[T_{sg}]$: matriz de transformação que relaciona as deformações elásticas aos modos de deformação SG, definida por:

$$[T_{sg}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \quad (115)$$

A matriz $[T_{sg}]$ acima, conta com a presença dos termos espúrios. Após a remoção dos termos x e y a nova matriz passa a ser:

$$[T_{sg}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (116)$$

3.5.3 Elemento triangular de seis nós

Nesta seção são apresentados os polinômios de deslocamento e de deformação para o triângulo de seis nós. Os polinômios são apresentados abaixo:

$$u(x, y) = [u]_0 + [\varepsilon_x]_0 x + [\gamma_{xy}/2 - r]_0 y + [\varepsilon_{x,x}/2]_0 x^2 + [\varepsilon_{x,y}]_0 xy + [(\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x})/2]_0 y^2 \quad (117)$$

$$v(x, y) = [v]_0 + [\gamma_{xy}/2 + r]_0 x + [\varepsilon_y]_0 y + [(\gamma_{xy,x} - \varepsilon_{x,y})/2]_0 x^2 + [\varepsilon_{y,x}]_0 xy + [(\varepsilon_{y,y})/2]_0 y^2 \quad (118)$$

As deformações normais e distorção angular são dadas pelas primeiras derivadas dos deslocamentos, sendo elas:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = [\varepsilon_x]_0 + [\varepsilon_{x,x}]_0 x + [\varepsilon_{x,y}]_0 y \quad (119)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = [\varepsilon_y]_0 + [\varepsilon_{y,x}]_0 x + [\varepsilon_{y,y}]_0 y \quad (120)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = [\gamma_{xy}]_0 + [\gamma_{xy,x}]_0 x + [\gamma_{xy,y}]_0 y \quad (121)$$

Observando as expressões de deformações normais e de distorção angular, nota-se que conforme mostrado no elemento triangular de três nós, não há termos de cisalhamento parasítico na expressão de distorção angular. Como comentado anteriormente, isto é, devido aos polinômios de deslocamento do elemento serem de ordem completa. Com isso, os termos de deformação normal que poderiam aparecer

na expressão de distorção angular se anulam durante o processo de derivação dos polinômios de deslocamento.

3.5.4 Elemento quadrilateral de oito nós

Nesta seção é apresentada a formulação completa de um elemento quadrilateral de oito nós na notação *Strain Gradient*. Os polinômios de deslocamento são apresentados abaixo:

$$u(x, y) = [u]_0 + [\varepsilon_x]_0 x + [\gamma_{xy}/2 - r]_0 y + [\varepsilon_{x,x}/2]_0 x^2 + [\varepsilon_{x,y}]_0 xy + [(\gamma_{xy,y} - \varepsilon_{y,x})/2]_0 y^2 + [\varepsilon_{x,xy}/2]_0 x^2 y + [\varepsilon_{x,yy}/2]_0 y^2 x \quad (122)$$

$$v(x, y) = [v]_0 + [\gamma_{xy}/2 + r]_0 x + [\varepsilon_y]_0 y + [(\gamma_{xy,x} - \varepsilon_{x,y})/2]_0 x^2 + [\varepsilon_{y,x}]_0 xy + [\varepsilon_{y,y}/2]_0 y^2 + [\varepsilon_{y,xx}/2]_0 x^2 y + [\varepsilon_{y,xy}/2]_0 y^2 x \quad (123)$$

As deformações normais e distorção angular são dadas pelas primeiras derivadas dos deslocamentos, sendo elas:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = [\varepsilon_x]_0 + [\varepsilon_{x,x}]_0 x + [\varepsilon_{x,y}]_0 y + [\varepsilon_{x,xy}]_0 xy + [\varepsilon_{x,yy}/2]_0 y^2 \quad (124)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = [\varepsilon_y]_0 + [\varepsilon_{y,x}]_0 x + [\varepsilon_{y,y}]_0 y + \left[\frac{\varepsilon_{y,xx}}{2} \right]_0 x^2 + [\varepsilon_{y,xy}]_0 xy \quad (125)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = [\gamma_{xy}]_0 + [\gamma_{xy,x}]_0 x + [\gamma_{xy,y}]_0 y + \frac{1}{2} ([\varepsilon_{x,xy}]_0 x^2 + [\varepsilon_{y,xy}]_0 y^2) + [\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx}]_0 xy \quad (126)$$

Com as deformações elásticas definidas, o conceito de *Shear Locking* se torna visível. Os termos em x^2 e y^2 acompanham termos de deformações normais espúrios na expressão de cisalhamento. Os termos de deformações normais acompanhados por xy na expressão de cisalhamento que *a priori* são vistos como espúrios, na verdade são equações de compatibilidade da elástica:

$$\gamma_{xy,xy} = \varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx} \quad (127)$$

Portanto, são termos legítimos da expressão de cisalhamento e deverão continuar na equação.

A nova equação do cisalhamento sem a presença dos termos espúrios é descrita abaixo:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = [\gamma_{xy}]_0 + [\gamma_{xy,x}]_0 x + [\gamma_{xy,y}]_0 y + [\varepsilon_{x,yy} + \varepsilon_{y,xx}]_0 xy \quad (128)$$

Os deslocamentos no MEF são calculados nos nós do elemento. A representação dos deslocamentos em cada nó do elemento na notação *Strain Gradient* é dada por:

$$\{d\} = [\phi] \{\varepsilon_{sg}\} \quad (129)$$

Sendo:

$\{d\}$: vetor de deslocamentos nodais e é definido por:

$$\{d\} = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ u_5 \ u_6 \ u_7 \ u_8 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ v_5 \ v_6 \ v_7 \ v_8\} \quad (130)$$

$\{\varepsilon_{sg}\}$: vetor dos modos de deformação *Strain Gradient* definido por:

$$\{\varepsilon_{sg}\}^T = \{u \ v \ r \ \varepsilon_x \ \varepsilon_u \ \gamma_{xy} \ \varepsilon_{x,x} \ \varepsilon_{y,y} \ \varepsilon_{x,y} \ \varepsilon_{y,x} \ \gamma_{xy,x} \ \gamma_{xy,y} \ \varepsilon_{x,yy} \ \varepsilon_{y,xx} \ \varepsilon_{x,xy} \ \varepsilon_{y,xy}\}_0 \quad (131)$$

$[\phi]$: matriz composta de vetores de deslocamentos linearmente independentes contendo as coordenadas nodais do elemento e que relaciona os deslocamentos aos modos de deformação *Strain Gradient* definida por:

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y_1 & x_1 & 0 & \frac{y_1}{2} & \frac{x_1^2}{2} & \frac{-(y_1^2)}{2} & 0 & x_1 y_1 & 0 & \frac{y_1^2}{2} & \frac{x_1^2 y_1}{2} & \frac{x_1 y_1^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_1 & 0 & y_1 & \frac{x_1}{2} & 0 & x_1 y_1 & \frac{x_1^2}{2} & \frac{-(x_1^2)}{2} & \frac{y_1^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_1 y_1^2}{2} & \frac{x_1^2 y_1}{2} \\ 1 & 0 & -y_2 & x_2 & 0 & \frac{y_2}{2} & \frac{x_2^2}{2} & \frac{-(y_2^2)}{2} & 0 & x_2 y_2 & 0 & \frac{y_2^2}{2} & \frac{x_2^2 y_2}{2} & \frac{x_2 y_2^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2 & 0 & y_2 & \frac{x_2}{2} & 0 & x_2 y_2 & \frac{x_2^2}{2} & \frac{-(x_2^2)}{2} & \frac{y_2^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_2 y_2^2}{2} & \frac{x_2^2 y_2}{2} \\ 1 & 0 & -y_3 & x_3 & 0 & \frac{y_3}{2} & \frac{x_3^2}{2} & \frac{-(y_3^2)}{2} & 0 & x_3 y_3 & 0 & \frac{y_3^2}{2} & \frac{x_3^2 y_3}{2} & \frac{x_3 y_3^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_3 & 0 & y_3 & \frac{x_3}{2} & 0 & x_3 y_3 & \frac{x_3^2}{2} & \frac{-(x_3^2)}{2} & \frac{y_3^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_3 y_3^2}{2} & \frac{x_3^2 y_3}{2} \\ 1 & 0 & -y_4 & x_4 & 0 & \frac{y_4}{2} & \frac{x_4^2}{2} & \frac{-(y_4^2)}{2} & 0 & x_4 y_4 & 0 & \frac{y_4^2}{2} & \frac{x_4^2 y_4}{2} & \frac{x_4 y_4^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_4 & 0 & y_4 & \frac{x_4}{2} & 0 & x_4 y_4 & \frac{x_4^2}{2} & \frac{-(x_4^2)}{2} & \frac{y_4^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_4 y_4^2}{2} & \frac{x_4^2 y_4}{2} \\ 1 & 0 & -y_5 & x_5 & 0 & \frac{y_5}{2} & \frac{x_5^2}{2} & \frac{-(y_5^2)}{2} & 0 & x_5 y_5 & 0 & \frac{y_5^2}{2} & \frac{x_5^2 y_5}{2} & \frac{x_5 y_5^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_5 & 0 & y_5 & \frac{x_5}{2} & 0 & x_5 y_5 & \frac{x_5^2}{2} & \frac{-(x_5^2)}{2} & \frac{y_5^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_5 y_5^2}{2} & \frac{x_5^2 y_5}{2} \\ 1 & 0 & -y_6 & x_6 & 0 & \frac{y_6}{2} & \frac{x_6^2}{2} & \frac{-(y_6^2)}{2} & 0 & x_6 y_6 & 0 & \frac{y_6^2}{2} & \frac{x_6^2 y_6}{2} & \frac{x_6 y_6^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_6 & 0 & y_6 & \frac{x_6}{2} & 0 & x_6 y_6 & \frac{x_6^2}{2} & \frac{-(x_6^2)}{2} & \frac{y_6^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_6 y_6^2}{2} & \frac{x_6^2 y_6}{2} \\ 1 & 0 & -y_7 & x_7 & 0 & \frac{y_7}{2} & \frac{x_7^2}{2} & \frac{-(y_7^2)}{2} & 0 & x_7 y_7 & 0 & \frac{y_7^2}{2} & \frac{x_7^2 y_7}{2} & \frac{x_7 y_7^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_7 & 0 & y_7 & \frac{x_7}{2} & 0 & x_7 y_7 & \frac{x_7^2}{2} & \frac{-(x_7^2)}{2} & \frac{y_7^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_7 y_7^2}{2} & \frac{x_7^2 y_7}{2} \\ 1 & 0 & -y_8 & x_8 & 0 & \frac{y_8}{2} & \frac{x_8^2}{2} & \frac{-(y_8^2)}{2} & 0 & x_8 y_8 & 0 & \frac{y_8^2}{2} & \frac{x_8^2 y_8}{2} & \frac{x_8 y_8^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_8 & 0 & y_8 & \frac{x_8}{2} & 0 & x_8 y_8 & \frac{x_8^2}{2} & \frac{-(x_8^2)}{2} & \frac{y_8^2}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{x_8 y_8^2}{2} & \frac{x_8^2 y_8}{2} \end{bmatrix} \quad (132)$$

As deformações elásticas também são relacionadas aos modos de deformação *Strain Gradient*, através de:

$$\{\mathcal{E}\} = \{T_{sg}\} \cup \{\mathcal{E}_{sg}\} \quad (133)$$

Sendo:

$\{\mathcal{E}\}$: vetor de deformações normais e distorções angulares definido por:

$$\{\mathcal{E}\} = \{\mathcal{E}_x \quad \mathcal{E}_y \quad \gamma_{xy}\} \quad (134)$$

$[T_{sg}]$ matriz de transformação que relaciona as deformações elásticas aos modos de deformação *Strain Gradient*, definida por:

$$[T_{SG}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & 0 & 0 & y^2 & 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & y & 0 & x & 0 & 0 & 0 & x^2 & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & xy & xy & x^2 & y^2 \end{bmatrix} \quad (135)$$

A matriz $[T_{sg}]$, mostrada na equação (135), conta com a presença dos termos espúrios. Após a remoção dos termos x^2 e y^2 a nova matriz passa a ser:

$$[T_{SG}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & x & 0 & y & 0 & 0 & 0 & y^2 & 0 & xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & y & 0 & x & 0 & 0 & 0 & x^2 & 0 & xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & y & xy & xy & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (136)$$

3.5.5 Matriz de Rigidez

Os deslocamentos e deformações estão definidos em termos de grandezas *Strain Gradient*. Através da energia de deformação podemos definir a matriz de rigidez do elemento através da expressão:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\varepsilon]^T [C] [\varepsilon] d\Omega \quad (137)$$

Sendo Ω o volume do elemento.

A matriz constitutiva $[C]$ do elemento para os estados planos de tensões e deformações já foram definidas anteriormente nas equações (31) e (32).

Substituindo (129) e (133) em (137), a energia de deformação do elemento é definida por:

$$U = \frac{1}{2} \{d\}^T [\phi]^{-T} \int_{\Omega} [Tsg]^T [C] [Tsg] d\Omega [\phi]^{-1} \{d\} \quad (138)$$

A partir da equação (138) obtém-se a matriz de rigidez K :

$$K = [\phi]^{-T} \int_{\Omega} [Tsg]^T [C] [Tsg] d\Omega [\phi]^{-1} \quad (139)$$

Escrevendo a equação da matriz de rigidez em uma forma compacta, tem-se:

$$K = [\phi]^{-T} [U_M] [\phi]^{-1} \quad (140)$$

Abdalla, Fagundes e Machado [31] definem a integral de volume contida na matriz representada por $[U_M]$ como uma matriz de energia de deformações, onde sua diagonal principal contém as energias de deformação associadas a cada modo de

deformação. Os termos restantes representam as energias de deformação associadas aos acoplamentos dos modos de deformação.

3.5.6 Matriz de rigidez Isoparamétrica x matriz de rigidez *Strain Gradient*

A seguir são comparadas as matrizes de rigidez do elemento de quatro nós formulado utilizando a formulação Isoparamétrica e a notação *Strain Gradient*, respectivamente. O objetivo é apresentar as dificuldades e o número de operações necessárias para formular a matriz de rigidez através das duas formulações.

Podem ter sido observadas as inúmeras operações matemáticas necessárias para a formulação da notação isoparamétrica: primeiramente é necessário a interpolação da geometria do problema e dos campos de deslocamento por meio da utilização das funções de forma, sendo esta, a primeira operação necessária (equações 1 a 4). O primeiro problema aparece ao se introduzir o sistema de coordenadas local, pois de algum modo, essas coordenadas devem se comunicar com o sistema global de coordenadas do eixo cartesiano. A utilização do Jacobiano é utilizada então para fazer o mapeamento geométrico dos dois diferentes sistemas de coordenadas (equação 15); o segundo problema aparece na forma apresentada do Jacobiano. Uma vez que as funções de forma necessitam estar no sistema de coordenadas global do elemento, a matriz do jacobiano deve ser remodelada (equação 21).

Com o Jacobiano em sua forma adequada, a matriz de rigidez pode ser calculada (equação 30). A formulação da matriz de rigidez parte do cálculo de uma integral de volume, envolvendo quatro operações matriciais, que envolvem as diversas operações já citadas no parágrafo anterior, tornando a equação extremamente difícil de ser resolvida.

A integração numérica passa a ser então, de fato, utilizada, sendo necessários dois pontos de Gauss para a integração completa do elemento isoparamétrico de quatro nós.

Foram efetuadas, ao longo deste trabalho, diversas citações sobre a presença dos termos espúrios na expressão de distorção angular devido a formulação dos elementos partindo de polinômios incompletos, bem como a utilização da integração reduzida, utilizando um ponto de Gauss para eliminá-los. No entanto, para executar esse procedimento de maneira correta é necessário que as expressões de

deformações normais que não apresentam erros sejam integradas em sua forma completa, enquanto apenas a expressão de distorção angular tenha sua integração reduzida.

Essa necessidade faz com que toda a operação necessária para formular a matriz de rigidez tenha que ser feita duas vezes, separando a parte referente da matriz constitutiva do elemento em duas, conforme mostrado nas equações 51 e 52 para o estado plano de tensões, ou 53 e 54 para o estado plano de deformações. Após todo esse esforço, as duas matrizes obtidas devem ser somadas para se ter a matriz de rigidez em sua forma completa.

Ao mesmo tempo, todo esse procedimento descrito pode ser deveras simplificado com a utilização da Notação *Strain Gradient*. O leitor pode ter percebido, que diferentemente da formulação isoparamétrica, na notação *Strain Gradient* não são necessárias trocas de sistemas de coordenadas nem operações complexas envolvendo derivadas de funções de forma e inversas da matriz Jacobiana.

Após todo o procedimento necessário para chegar na equação da matriz de rigidez, é necessário resolvê-la. Para a notação *Strain Gradient*, deve-se resolver a integral de volume na matriz $[U_M]$ presente na equação 140. A matriz é apresentada abaixo:

$$[U_M] = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & c\nu & 0 & cy & c\nu y \\ 0 & 0 & 0 & c\nu & c & 0 & c\nu y & cx \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ce & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cy & c\nu y & 0 & cy^2 & c\nu xy \\ 0 & 0 & 0 & c\nu x & cx & 0 & c\nu xy & cx^2 \end{bmatrix} d\Omega \quad (141)$$

Devendo c e também e , assumirem os valores das equações (142) e (143) para o estado plano de tensões, ou (144) e (145) para o estado plano de deformações:

Para o estado plano de tensões:

$$c = \frac{E}{(1-\nu^2)} \quad (142)$$

$$e = \frac{1-\nu}{2} \quad (143)$$

Para o estado plano de deformações:

$$c = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (144)$$

$$e = \frac{1-2\nu}{2} \quad (145)$$

A matriz deve ser resolvida através da integração tripla de todos os seus elementos. As integrais podem ser vistas abaixo:

$$[U_M] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \int_{\Omega} cd\Omega & \int_{\Omega} cvd\Omega & 0 & \int_{\Omega} cyd\Omega & \int_{\Omega} cvxd\Omega \\ 0 & 0 & 0 & \int_{\Omega} cvd\Omega & \int_{\Omega} cd\Omega & 0 & \int_{\Omega} cvyd\Omega & \int_{\Omega} cxd\Omega \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \int_{\Omega} ced\Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \int_{\Omega} cyd\Omega & \int_{\Omega} cvyd\Omega & 0 & \int_{\Omega} cy^2d\Omega & \int_{\Omega} cvxyd\Omega \\ 0 & 0 & 0 & \int_{\Omega} cvxd\Omega & \int_{\Omega} cxd\Omega & 0 & \int_{\Omega} cvxyd\Omega & \int_{\Omega} cx^2d\Omega \end{bmatrix} \quad (146)$$

O fato da matriz ser simétrica, permite que apenas metade da matriz precise ser calculada, podendo ser da diagonal principal para baixo, ou para cima. Sendo assim, devem ser resolvidas dez integrais de volume. Ao mesmo tempo, para a matriz de rigidez isoparamétrica não existem itens zerados, logo, se utilizando da simetria da matriz, devem ser resolvidas 36 integrais triplas.

4 ANÁLISES

A presente seção apresentará três diferentes exemplos, analisados com a presença dos termos espúrios nas expressões de distorção angular e sem a sua presença no modelo. Os exemplos foram modelados em dois programas distintos: SAP 2000 e LAMFEM.

O SAP 2000 é um dos programas comerciais mais difundidos para análise de elementos finitos no mundo. Baseado na formulação isoparamétrica, o software resolve desde problemas dos mais simples até os mais complexos da elástica em análises lineares e não lineares.

No entanto, o SAP 2000 resolve os problemas apenas com a integração numérica exata com dois pontos de Gauss. Conforme já mencionado neste trabalho, a remoção dos termos espúrios na formulação isoparamétrica convencional é condicionada à utilização de métodos de integração numérica reduzida. Ou seja, o SAP 2000 não remove os termos espúrios na sua análise.

O LAMFEM é um programa criado pelo professor orientador deste trabalho [38]. Formulado na linguagem de programação FORTRAN, resolve problemas da elasticidade com a possibilidade de escolha entre elementos triangulares e elementos quadriláteros.

4.1 PROBLEMA DE VIGA ESBELTA

O primeiro problema analisado é mostrado na figura 05. Trata-se de uma viga Cantilever esbelta de comprimento $L=1000$ mm, altura $h=250$ mm e espessura de 1 mm, submetida a uma carga distribuída $Q = 10.000$ N/m, distribuídos ao longo da altura na sua extremidade livre. As propriedades de um aço estrutural foram empregadas, sendo o módulo de elasticidade longitudinal $E=200.000$ N/mm², o coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e o módulo de elasticidade transversal $G=76.923,08$ N/mm². Os deslocamentos serão calculados na l_c (linha central) e as tensões normais e de cisalhamento serão computadas no ponto A.

Serão apresentadas três diferentes comparações, CCP SAP2000 (resultados obtidos pela análise utilizando o SAP2000), CCP (com cisalhamento parasítico na notação *Strain Gradient*) e SCP (sem cisalhamento parasítico na notação *Strain Gradient*).

A diferença dos resultados CCP para SCP será calculada pela expressão abaixo, a mesma expressão será usada para os demais exemplos apresentados:

$$Diferença = \left| \frac{SCP - CCP}{SCP} \right| \times 100$$

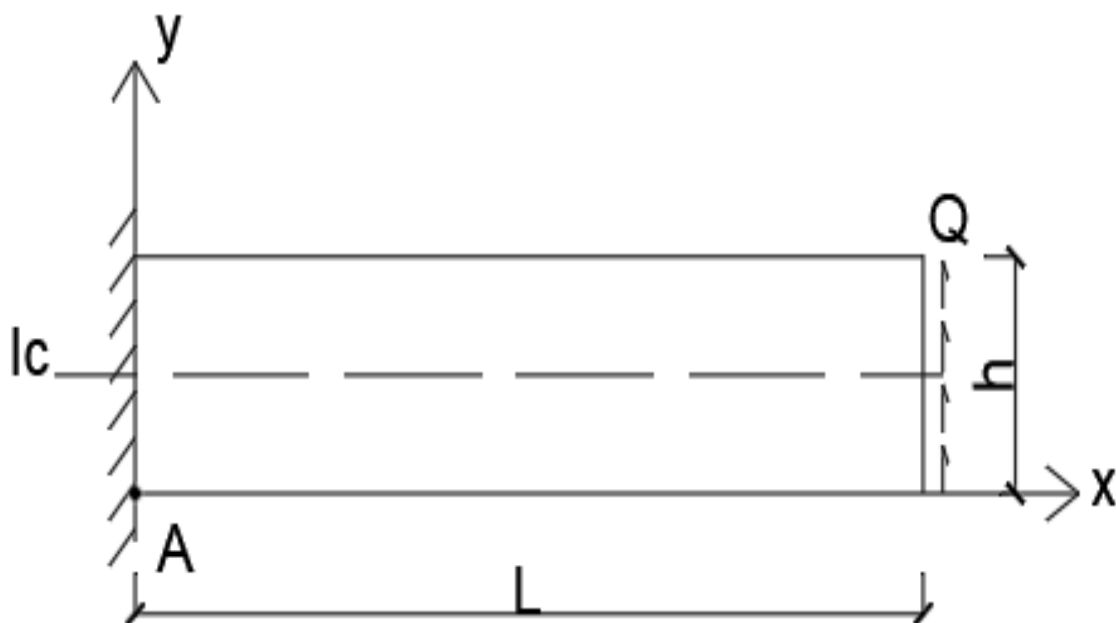


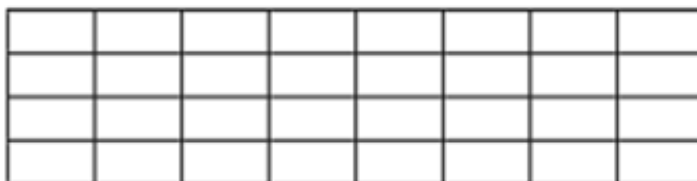
Figura 05 – Viga Cantilever esbelta utilizada como exemplo

Fonte: O Autor, 2020

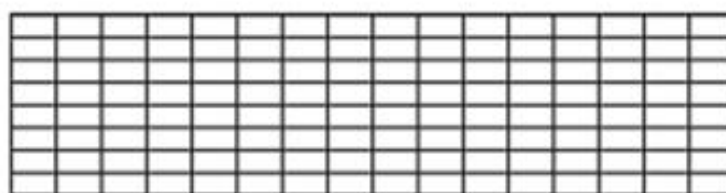
A figura 06 mostra como é feita a subdivisão das malhas para este exemplo.



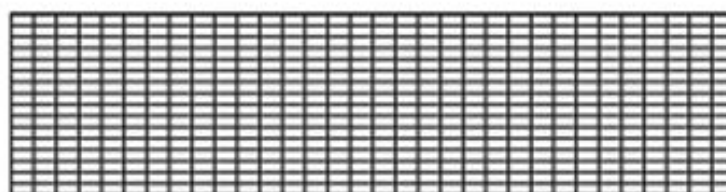
MALHA 4X2 - 8 ELEMENTOS



MALHA 8X4 - 32 ELEMENTOS



MALHA 16X8 - 128 ELEMENTOS



MALHA 32X16 - 512 ELEMENTOS

Figura 06 – Refino das quatro malhas utilizadas no exemplo um

Fonte: O Autor, 2020

A análise do problema foi feita com o elemento de quatro nós, utilizando quatro malhas retangulares, nomeadas 4x2 (oito elementos), 8x4 (32 elementos), 16x8 (128 elementos) e 32x16 (512 elementos).

As tabelas abaixo mostram os resultados de deslocamento no último nó da linha central, na borda livre da viga. As figuras 07 e 08 mostram o deslocamento vertical na linha central em relação a altura ao longo do comprimento da viga quando os modelos CCP (com cisalhamento parasítico) e SCP (sem cisalhamento parasítico) são utilizados, respectivamente.

Devido a proximidade dos resultados obtidos pelas análises CCP SAP2000 e CCP, serão apresentados os gráficos comparativos apenas entre CCP e SCP, ficando neste primeiro exemplo os resultados CCP SAP2000 presentes na tabela.

Tabela 02 – Deslocamentos no último nó da linha central na borda livre. Quadrilátero de quatro nós, com e sem cisalhamento parasítico.

MALHA	DESLOCAMENTO (mm)			
	CCP SAP2000	CCP	SCP	DIFERENÇA
8 ELEMENTOS	9,366	9,359	12,638	25,95%
32 ELEMENTOS	12,035	12,024	13,126	8,40%
128 ELEMENTOS	12,995	12,979	13,282	2,28%
512 ELEMENTOS	13,273	13,252	13,330	0,59%

Fonte: O Autor, 2020

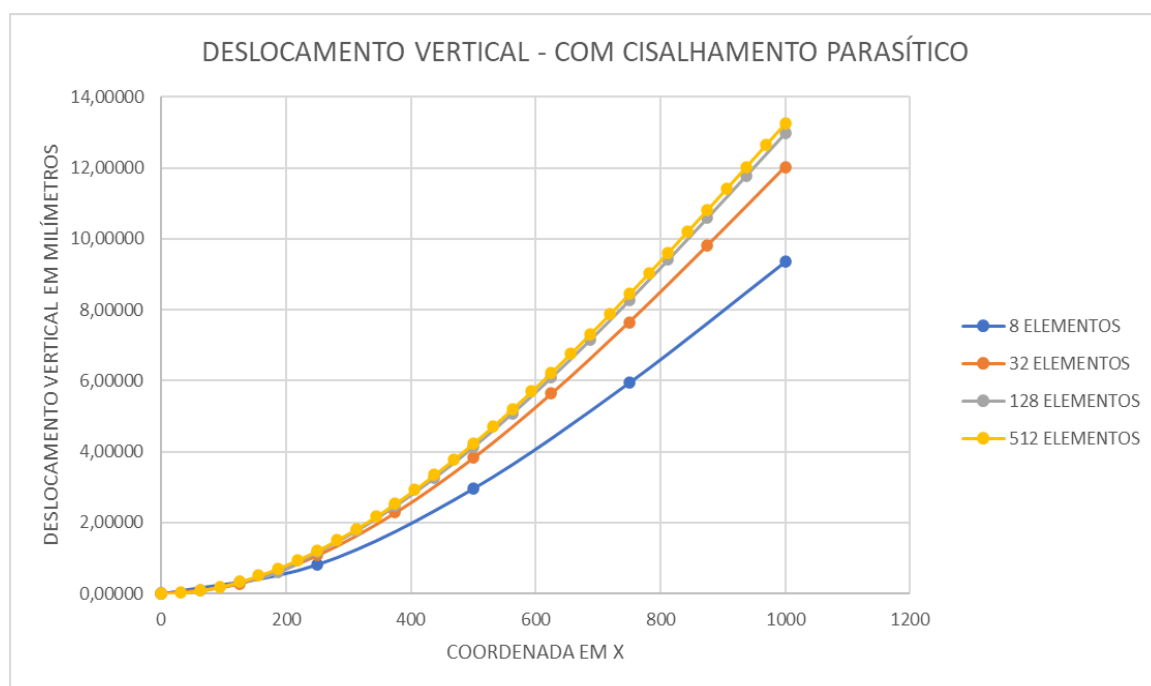


Figura 07– Deslocamento em linha central de viga ao longo do comprimento.

Elemento quadrilateral de quatro nós, com cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

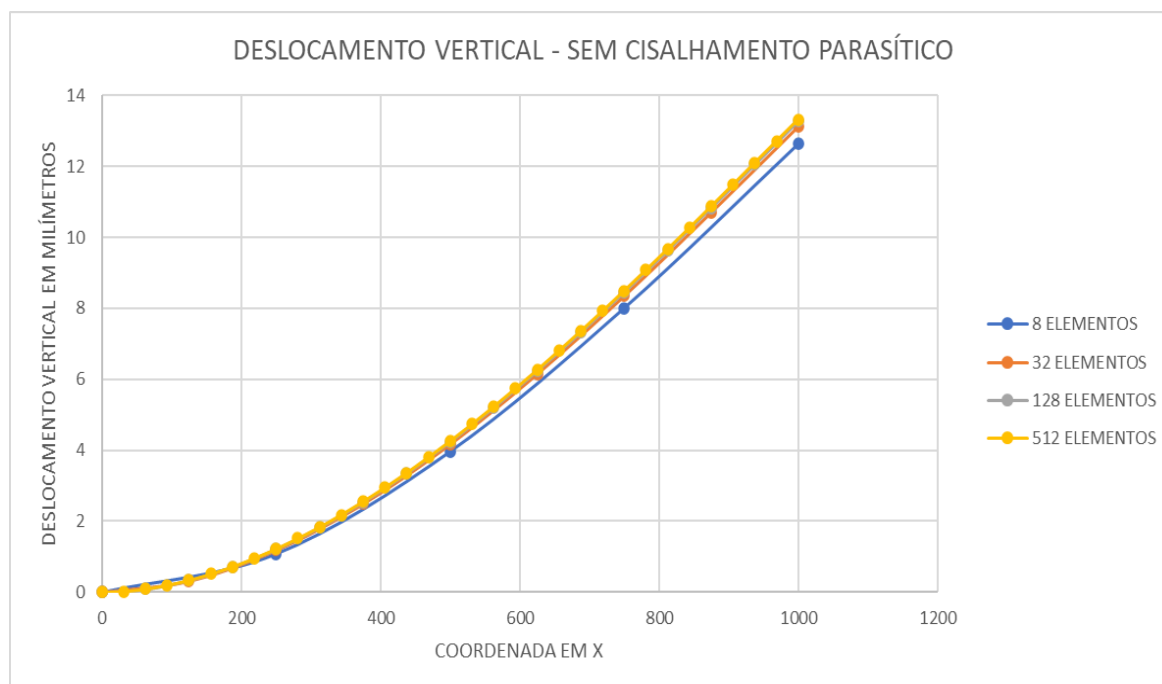


Figura 08– Deslocamento em linha central de viga ao longo do comprimento.

Elemento quadrilateral de quatro nós, sem cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

A análise dos gráficos acima mostra que os termos espúrios presentes na expressão de distorção angular já mostram seus efeitos no deslocamento. A viga com a presença dos termos espúrios começa a apresentar uma tendência de aproximação das curvas apenas após a malha de 128 elementos. Já a viga sem os termos espúrios apresenta uma convergência semelhante já na primeira malha. A partir da malha de 32 elementos, a diferença dos deslocamentos é quase imperceptível. No último nó da linha central na extremidade livre podemos quantificar o erro apresentado nas malhas contendo os termos de cisalhamento parasítico, é visto que na primeira malha, a presença dos termos espúrios causa um aumento nos deslocamentos em mais de 25%, enquanto na malha mais refinada o erro apontado é de 0,59%, uma redução considerável. No entanto, o leitor pode notar ao analisar os números que a malha de 128 elementos sem os termos de cisalhamento parasítico já apresenta resultados superiores à malha de 512 elementos com os termos de cisalhamento parasítico.

Este fato deve-se aos deslocamentos que são diretamente influenciados pelos termos espúrios, uma vez que os mesmos estão presentes na formação da matriz de rigidez calculada através da expressão [140].

A análise seguinte trata das tensões normais e tensões de cisalhamento. Os valores das tensões podem ser vistos nas tabelas 3 e 4. Os gráficos de comparação dos resultados com e sem termos de cisalhamento parasítico, CCP e SCP, respectivamente, são vistos nas figuras 09 e 10.

Tabela 03 – Tensão normal em quatro malhas subsequentes. Elemento quadrilateral de 4 nós, com e sem cisalhamento parasítico

TENSÃO NORMAL (Pa)				
	CCP SAP2000	CCP	SCP	DIFERENÇA
8 ELEM	640,662	640,491	874,766	27%
32 ELEM	886,837	886,748	976,213	9%
128 ELEM	1.018,431	1.018,000	1.055,000	4%
512 ELEM	1.021,903	1.122,000	1.148,000	2%

Fonte: O Autor, 2020

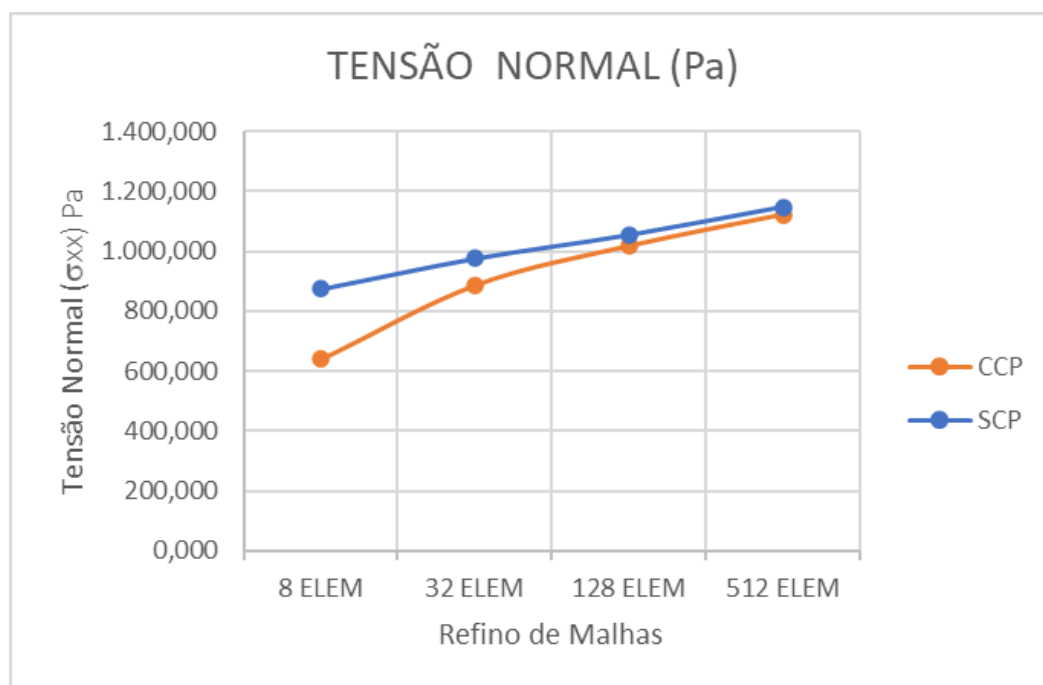


Figura 09– Tensão normal no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, com e sem cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

Tabela 4 – Tensão de cisalhamento em quatro malhas subsequentes. Elemento quadrilateral de quatro nós, com e sem cisalhamento parasítico.

TENSÃO DE CISALHAMENTO (Pa)				
	CCP SAP2000	CCP	SCP	DIFERENÇA
8 ELEM	273,913	274,084	40,000	-585%
32 ELEM	228,142	228,310	40,922	-458%
128 ELEM	199,194	199,340	58,046	-243%
512 ELEM	209,044	209,585	86,281	-143%

Fonte: O Autor, 2020

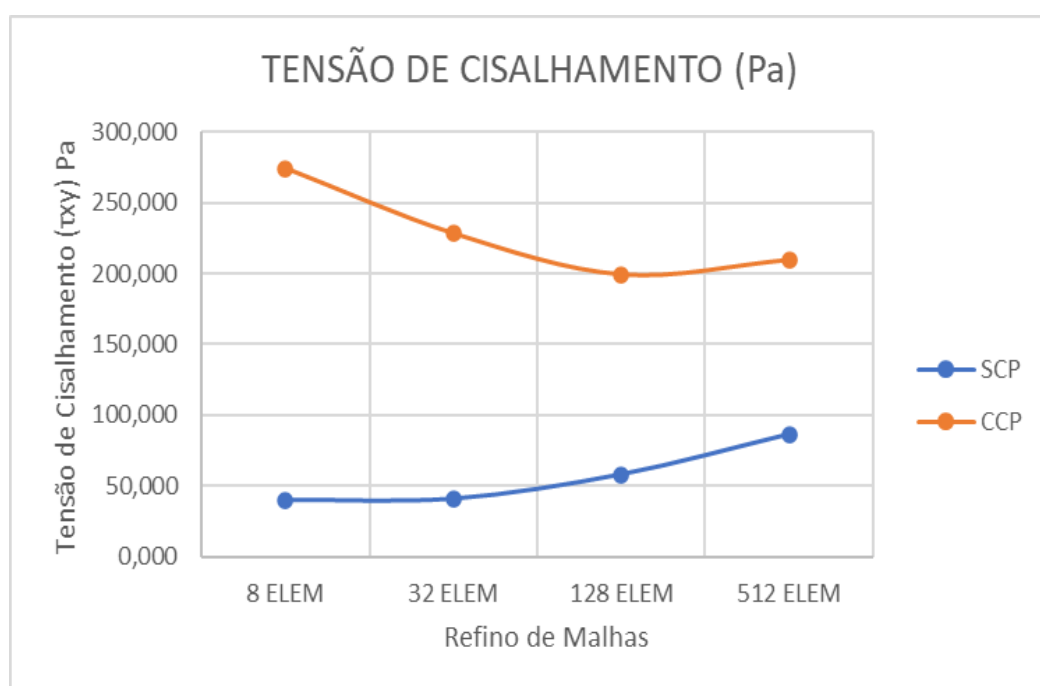


Figura 10– Tensão de cisalhamento no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, com e sem termos espúrios

Fonte: O Autor, 2020

Sabe-se de estudos anteriores presentes na literatura, que vigas esbeltas tem como característica a predominância da flexão e uma baixa influência das tensões de cisalhamento. A diferença percentual encontrada para a tensão normal tem seu valor maior em 27%, o que já se pode considerar inaceitável. Para o maior grau de refino apresentado (512 elementos), a diferença cai para aproximadamente 2%, uma redução consideravelmente alta.

É visto na linha do gráfico que corresponde à presença dos termos espúrios que apenas o refino das malhas já causa uma redução na tensão de cisalhamento, o que causa uma falsa impressão da correção do problema. No entanto, ao analisar os valores da tensão de cisalhamento sem termos espúrios, o verdadeiro resultado da influência do cisalhamento na viga esbelta se mostra muito menor do que se tinha anteriormente como verdadeiro na análise comum de elementos finitos. Com uma diferença de aproximadamente 585% na malha de 2x4 e aproximadamente 143% no refino de 16x32, é prudente afirmar que essa diferença é inadmissível. Ademais, a figura 10 mostra que as linhas do gráfico de tensão de cisalhamento apresentam tendências diferentes de convergência, não havendo indicação de que as duas soluções convergirão mesmo com um alto grau de refino das malhas. Isso também significa que o cisalhamento parasítico não causa apenas erros quantitativos, mas também causa erros qualitativos na modelagem do problema.

Conforme mencionado acima, os resultados para as malhas CCP SAP2000 e CCP (Notação *Strain Gradient* com cisalhamento parasítico) foram praticamente idênticos. Sendo assim, os próximos exemplos apresentarão apenas a solução CCP para representar a malha com os termos espúrios.

4.2 PROBLEMA DE VIGA CURTA

O segundo problema analisado é mostrado na figura 11. Trata-se de uma viga Cantilever curta de comprimento $L=1000$ mm, altura $h=1000$ mm e espessura de 1mm, submetida a uma carga distribuída $Q = 16.000$ N/m, distribuídos ao longo da altura na sua extremidade livre. As propriedades de um aço estrutural foram empregadas, sendo, Módulo de Elasticidade $E=200.000$ N/mm², Coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, Módulo de Elasticidade Transversal $G=76.923,08$ N/mm². Os deslocamentos serão calculados ao longo da linha central. As tensões serão computadas no ponto A.

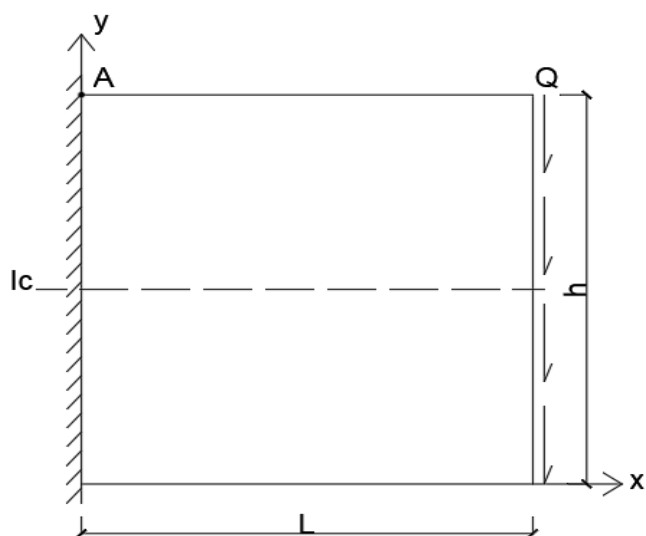
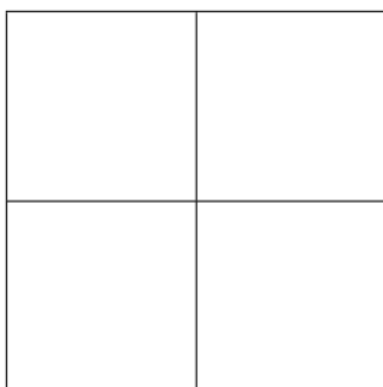


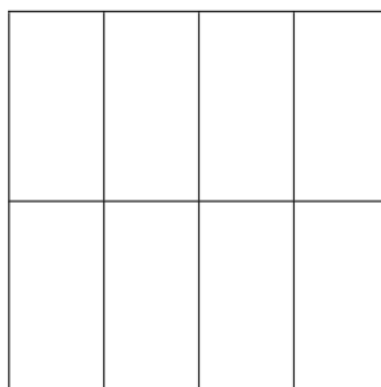
Figura 11– Viga Cantilever curta usada como exemplo

Fonte: O Autor, 2020

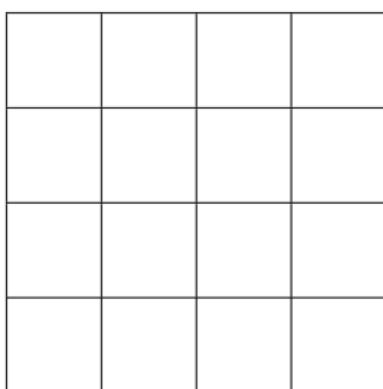
A figura 12 mostra como é feita a subdivisão das malhas para o exemplo 2:



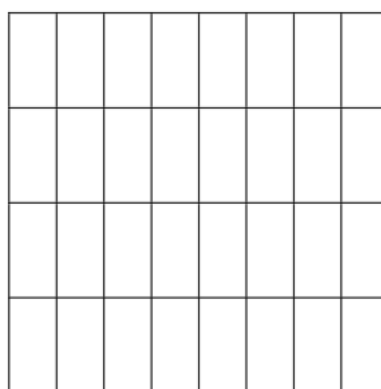
MALHA 2x2 - 4 ELEMENTOS



MALHA 4x2 - 8 ELEMENTOS



MALHA 4x4 - 16 ELEMENTOS



MALHA 8x4 - 32 ELEMENTOS

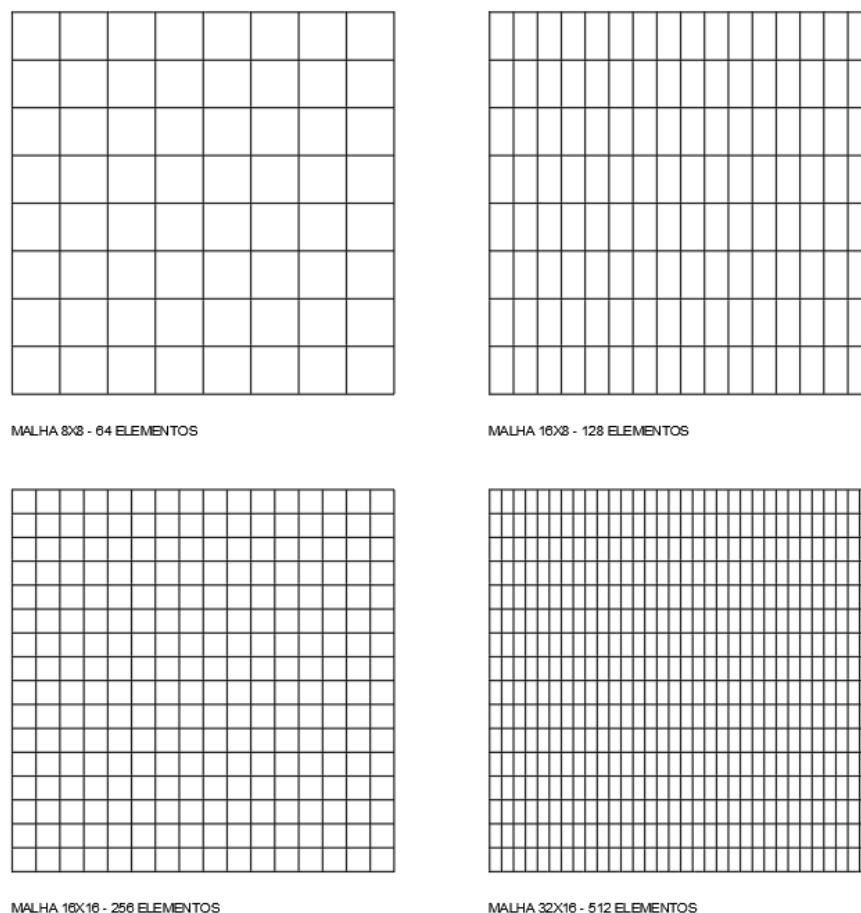


Figura 12– Refino das malhas para o exemplo dois, elementos quadrados à esquerda e elementos retangulares à direita

Fonte: O Autor, 2020

O problema é analisado com o elemento quadrilateral de quatro nós com e sem a presença dos termos de cisalhamento parasítico. Oito malhas foram usadas, divididas em malhas quadradas, nomeadas, 2x2 (quatro elementos), 4x4 (dezesseis elementos), 8x8 (64 elementos), 16x16 (256 elementos), e malhas retangulares 4x2 (oito elementos), 8x4 (32 elementos), 16x8 (128 elementos) e 32x16 (512 elementos). As tabelas dos deslocamentos mostram os valores no último nó da linha central, na extremidade livre. As figuras 13 a 16 mostram o deslocamento vertical em uma linha central em relação a altura ao longo do comprimento da viga quando os modelos CCP e SCP são utilizados para as malhas de elementos quadrados e retangulares, respectivamente.

Tabela 5 – Deslocamentos no último nó da linha central na borda livre. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos quadrados com e sem termos de cisalhamento parasítico.

DESLOCAMENTOS (mm)			
	CCP	SCP	DIFERENÇA
4 ELEM	-0,3642	-0,3844	5,26%
16 ELEM	-0,4055	-0,4118	1,53%
64 ELEM	-0,4202	-0,4221	0,44%
256 ELEM	-0,4248	-0,4254	0,13%

Fonte: O Autor, 2020

Tabela 6 – Deslocamentos no último nó da linha central na borda livre. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos retangulares com e sem termos de cisalhamento parasítico.

DESLOCAMENTOS (mm)			
	CCP	SCP	DIFERENÇA
8 ELEM	-0,3907	-0,3982	1,89%
32 ELEM	-0,4127	-0,4138	0,25%
128 ELEM	-0,4223	-0,4228	0,12%
512 ELEM	-0,4254	-0,4256	0,04%

Fonte: O Autor, 2020

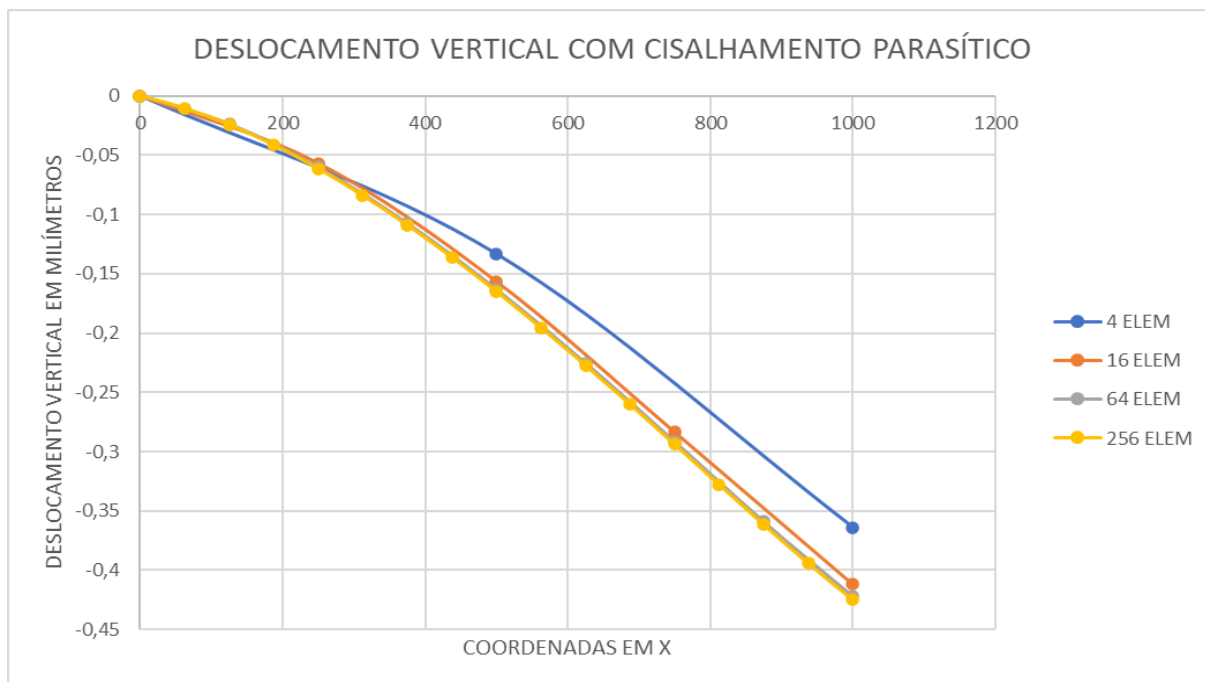


Figura 13– Deslocamento em linha central de viga ao longo do comprimento.
Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos quadrados com cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

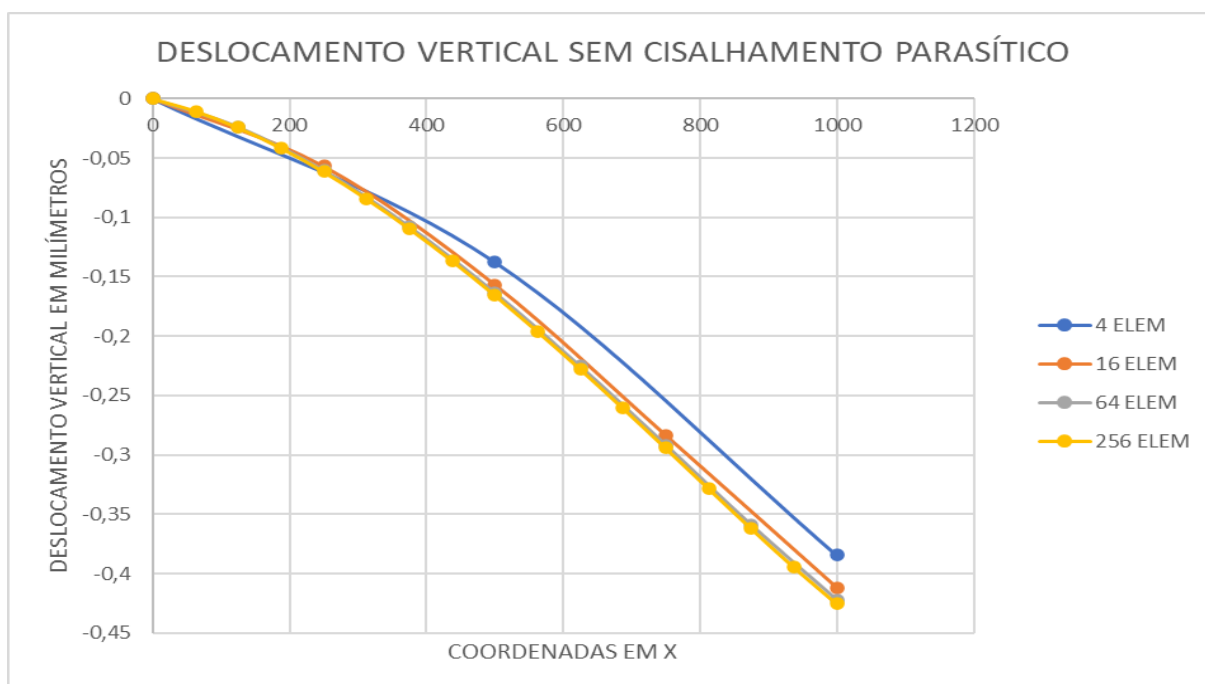


Figura 14– Deslocamento em linha central de viga ao longo do comprimento.
Elemento quadrilateral de 4 nós, elementos quadrados sem cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

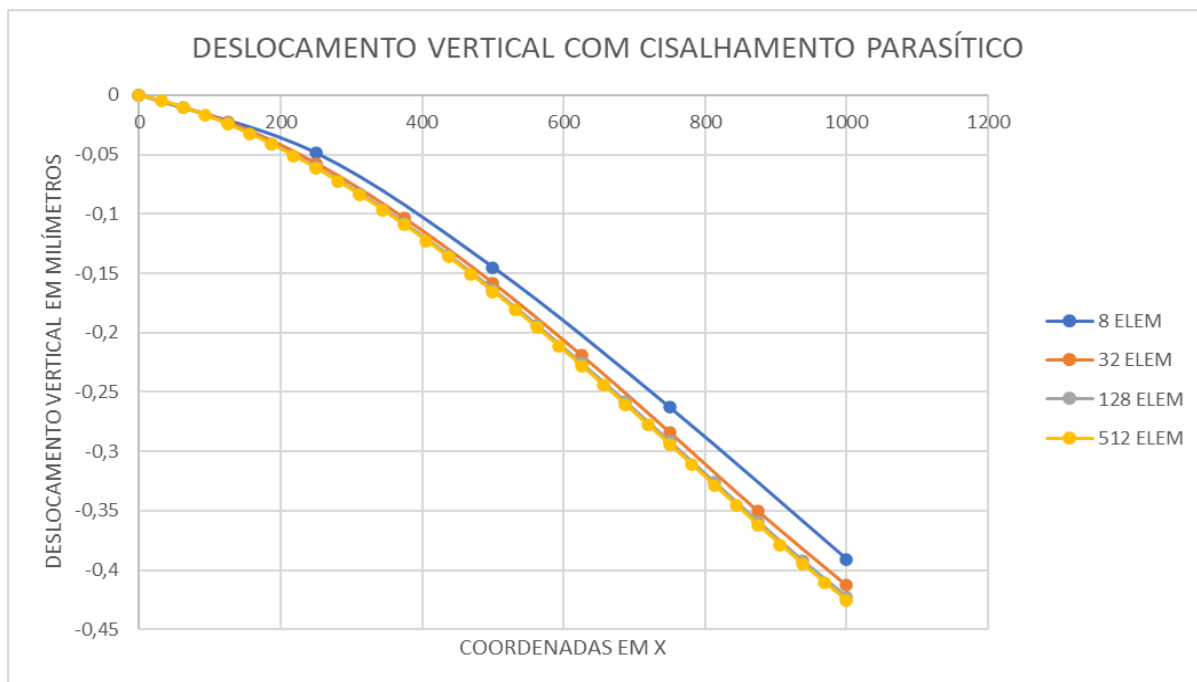


Figura 15– Deslocamento em linha central de viga ao longo do comprimento.
Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos retangulares com cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

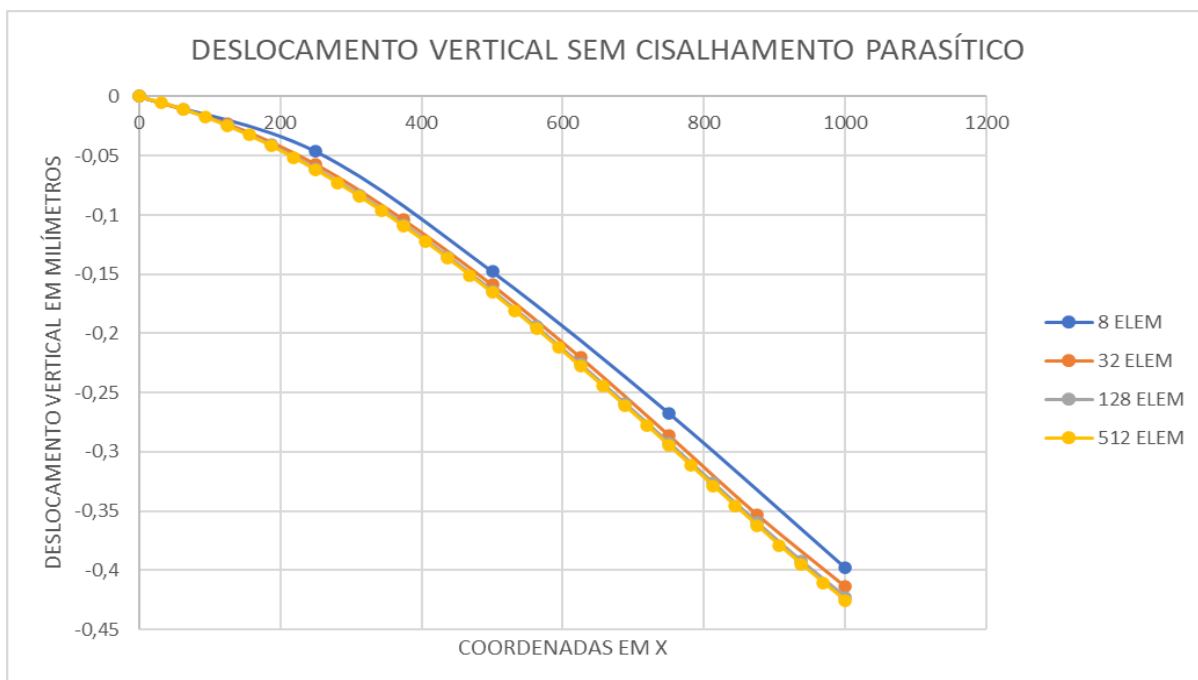


Figura 16– Deslocamento em linha central de viga ao longo do comprimento.
Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos retangulares sem cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

É possível verificar, que diferentemente do exemplo um, a viga curta apresenta resultados de deslocamentos menos relevantes do que a viga esbelta. Para a viga curta, a diferença apresentada na malha de menor refino é de aproximadamente a 5%, enquanto a malha mais refinada apresenta uma diferença de aproximadamente 0,04%. Essa diferença nos resultados é devida a diferença de rigidez das duas vigas, sendo o deslocamento atrelado majoritariamente a flexão. Uma viga curta apresenta uma rigidez muito superior a uma viga esbelta devido ao seu momento de inércia. Há de se considerar também que para vigas curtas, o efeito do cisalhamento passa a ser mais relevante.

Os valores das tensões normais e de cisalhamento podem ser vistos nas tabelas 7 a 10. As figuras 17 a 20 mostram as linhas de tendência dos resultados CCP e CPS no ponto A.

Tabela 7 – Tensão de normal em quatro malhas quadradas subsequentes. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos quadrados com e sem cisalhamento parasítico.

	TENSÃO NORMAL (Pa)		
	CCP	SCP	DIFERENÇA
4 ELEM	53,219	58,236	8,61%
16 ELEM	75,214	77,891	3,44%
64 ELEM	92,166	94,000	1,95%
256 ELEM	108,536	110,283	1,58%

Fonte: O Autor, 2020

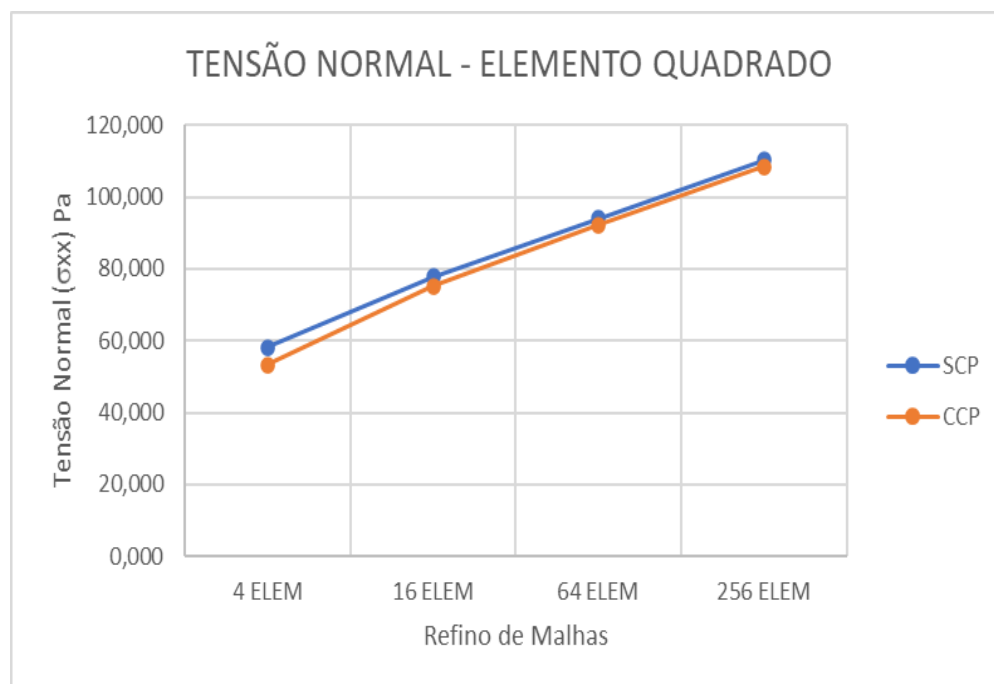


Figura 17– Tensão normal no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos quadrados com e sem cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

Tabela 8 – Tensão de cisalhamento em quatro malhas quadradas subsequentes. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos quadrados com e sem cisalhamento parasítico

TENSÃO DE CISALHAMENTO (Pa)			
	CCP	SCP	DIFERENÇA
4 ELEM	23,092	12,500	-84,74%
16 ELEM	22,914	11,750	-95,01%
64 ELEM	23,805	12,639	-88,35%
256 ELEM	26,450	14,744	-79,40%

Fonte: O Autor, 2020

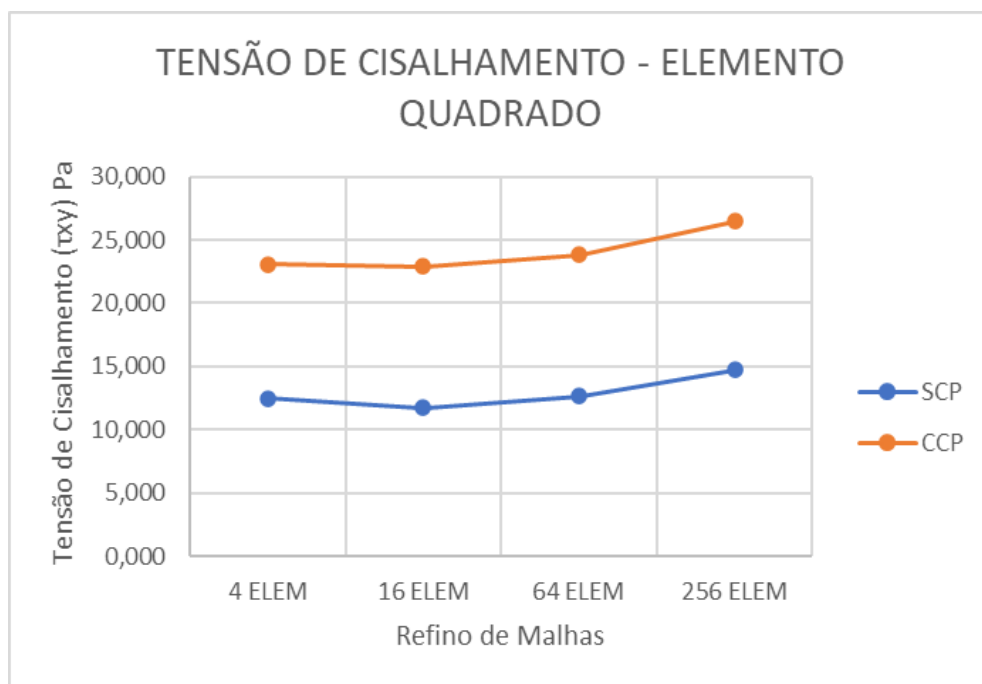


Figura 18– Tensão de cisalhamento no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos quadrados com e sem cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

Tabela 9 – Tensão de normal em quatro malhas retangulares subsequentes. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos retangulares com e sem cisalhamento parasítico

TENSÃO NORMAL (Pa)			
	CCP	SCP	DIFERENÇA
8 ELEM	66,265	68,341	3,04%
32 ELEM	84,703	85,930	1,43%
128 ELEM	101,006	102,040	1,01%
512 ELEM	118,358	119,452	0,92%

Fonte: O Autor, 2020

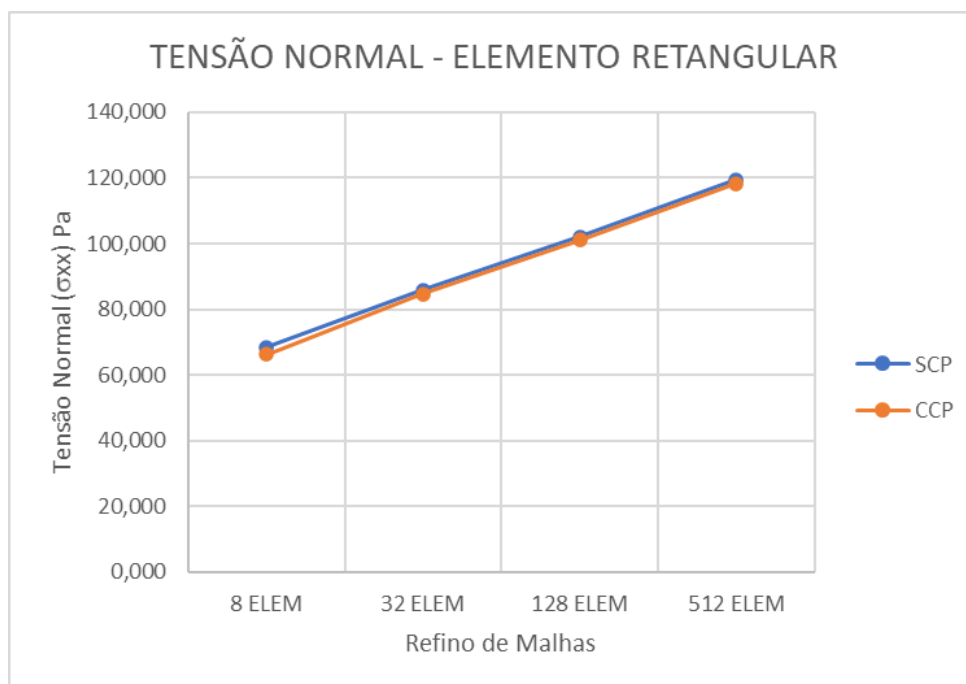


Figura 19– Tensão normal no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos retangulares com e sem cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

Tabela 10 – Tensão de cisalhamento em quatro malhas retangulares subsequentes. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos retangulares com e sem cisalhamento parasítico

TENSÃO DE CISALHAMENTO (Pa)			
	CCP	SCP	DIFERENÇA
8 ELEM	21,561	12,500	-72,49%
32 ELEM	22,838	13,382	-70,66%
128 ELEM	25,545	15,288	-67,09%
512 ELEM	29,658	18,220	-62,78%

Fonte: O Autor, 2020

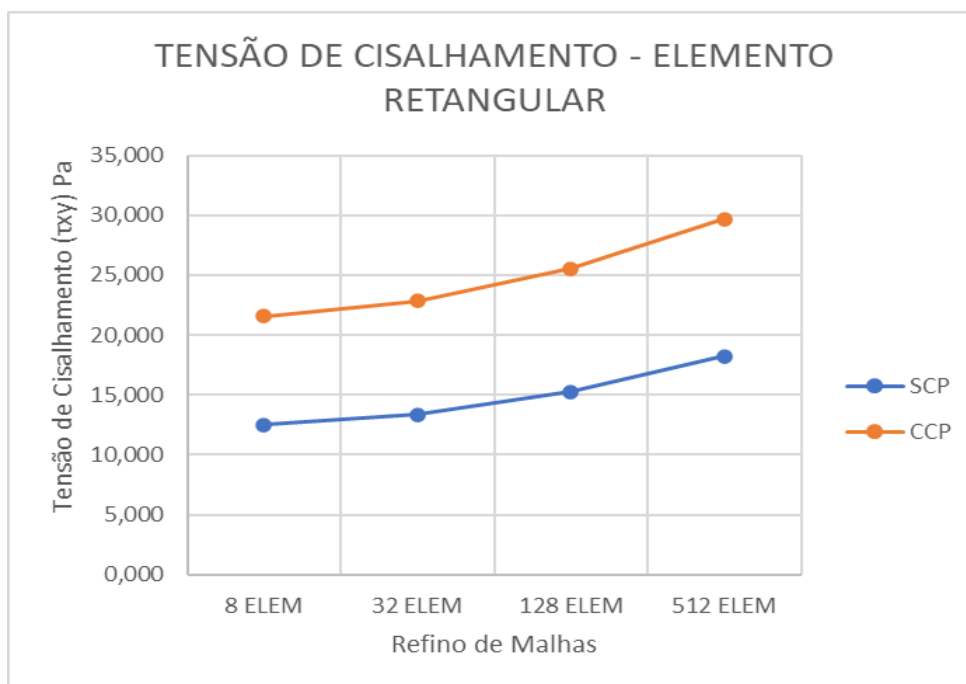


Figura 20– Tensão de cisalhamento no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, elementos retangulares com e sem cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

Os resultados mostram que as tensões normais sofrem grande influência do refino das malhas, enquanto a influência do termo espúrio é mínima. Como já muito citado neste trabalho, as expressões de deformação normal não apresentam termos espúrios em sua formulação. No entanto, a remoção dos termos espúrios da expressão de distorção angular afeta a matriz de rigidez como um todo, fazendo com que a tensão normal tenha uma leve variação, conforme apresentado nos gráficos acima. O problema maior é revelado na análise do gráfico da tensão de cisalhamento, onde a real capacidade de modelagem do elemento de quatro nós é revelada após a remoção dos termos espúrios.

Para a viga curta do segundo exemplo, o efeito do cisalhamento passa a ser mais relevante com relação à flexão, diferentemente do que ocorre no primeiro exemplo. Neste segundo exemplo a diferença entre as malhas com cisalhamento parasítico e sem cisalhamento parasítico apresentada diminui enormemente, passando de aproximadamente 500% para, em média, 80% no caso de elementos quadrados. Já no caso de elementos retangulares, este erro baixa para cerca de 70%, uma vez que os termos de deformação normal passam a ter menos influência na formação da matriz de rigidez da viga em relação aos termos da distorção angular

devido à diminuição dos efeitos de flexão e o aumento expressivo da presença do cisalhamento.

Ademais, é visto que da mesma maneira que no primeiro exemplo, as duas linhas representadas pelas tensões de cisalhamento com e sem termos espúrios também não apresentam uma tendência de convergir, mesmo com o aumento do refino das malhas.

4.3 PROBLEMA DE PLACA QUADRADA COM FURO CENTRAL

O terceiro problema analisado é mostrado na figura 21. Trata-se de uma placa retangular de comprimento $L=2000$ mm, altura $h=2000$ mm e espessura de 1mm, com um furo central de $L=1000$ mm e altura $h=1000$ mm, submetida a uma carga distribuída $P = 16.000$ N/m ao longo da altura na sua extremidade livre. As propriedades de um aço estrutural foram empregadas, sendo, Módulo de Elasticidade $E=200.000$ N/mm², Coef. de Poisson $\nu = 0,3$, Módulo de Elasticidade Transversal $G=76.923,08$ N/mm². Por se tratar de uma placa simétrica, a análise será feita considerando apenas um quarto da placa, localizado no primeiro quadrante superior. Para que as condições aplicadas no quadrante único representem de maneira adequada o problema como um todo, foram aplicadas vinculações rotuladas móveis nos pontos referentes às arestas de ligação com os outros quadrantes. As tensões serão computadas no ponto A e as deformações serão computadas em uma linha central ao longo do comprimento da viga.

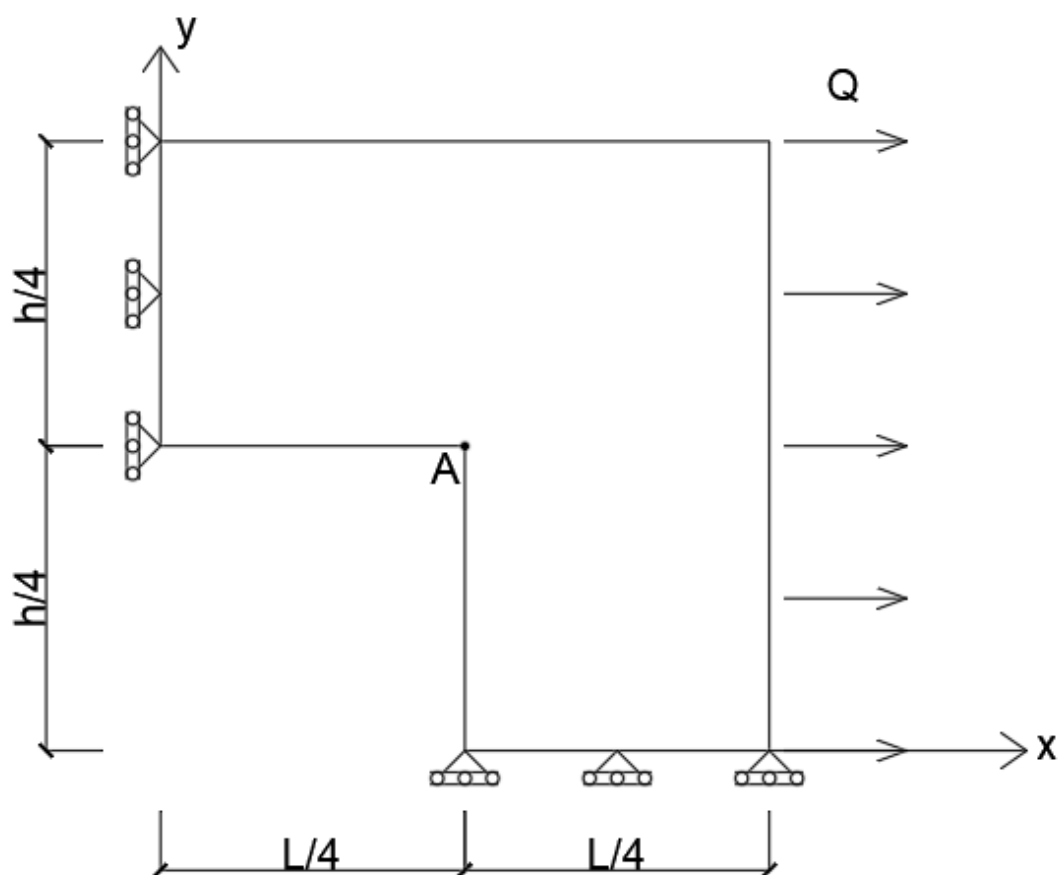
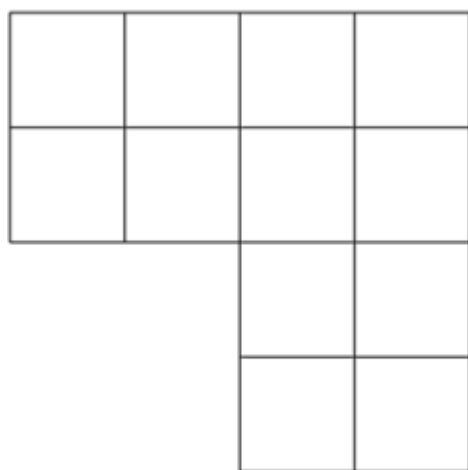


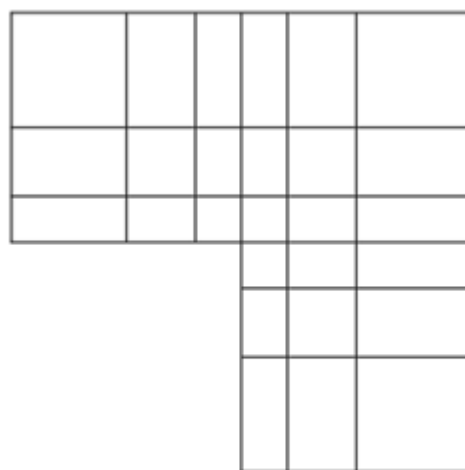
Figura 21– Quadrante superior

Fonte: O Autor, 2020

A figura 22 mostra como é feita a subdivisão das malhas para o exemplo 3.



MALHA QUADRADA - 12 ELEMENTOS



MALHA GRADUAL - 27 ELEMENTOS

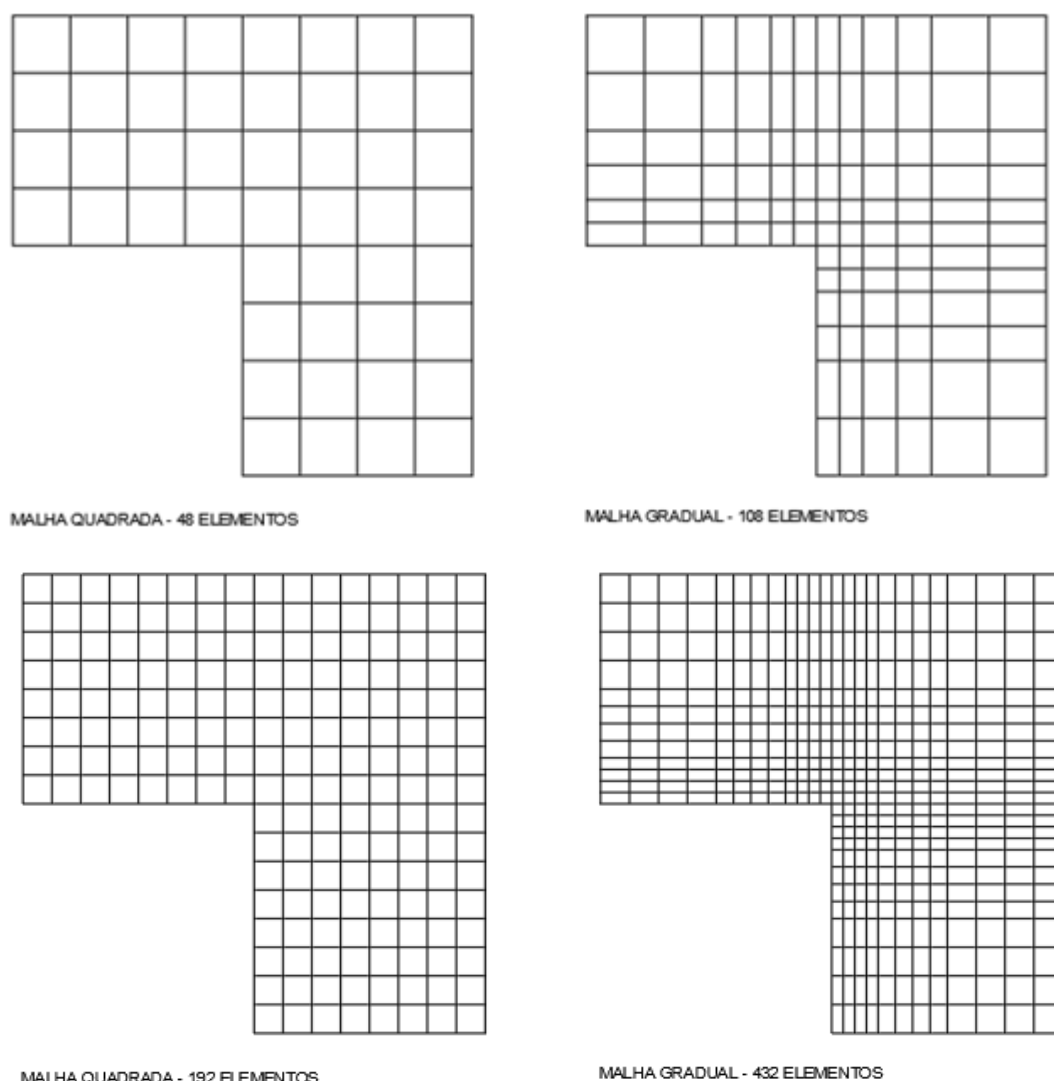


Figura 22– Refino das malhas para o exemplo três, elementos quadrados à esquerda e elementos de refino gradual à direita

Fonte: O Autor, 2020

O problema será analisado com seis malhas diferentes, sendo três malhas quadradas, nomeadas doze elementos, 48 elementos, 192 elementos e três malhas com refino gradual, nomeadas 27 grad. elementos, 108 grad. elementos, 432 grad. elementos. Para o terceiro exemplo, serão levadas em consideração apenas as tensões normais e de cisalhamento no ponto A, sendo este o ponto mais crítico para o problema em questão, onde ocorrem concentrações de tensões. Os valores podem ser vistos nas tabelas 11 a 14 e suas linhas de tendência de convergência podem ser vistas nas figuras 23 a 26.

Tabela 11 – Tensão normal no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, elemento quadrado com e sem cisalhamento parasítico

TENSÃO NORMAL (Pa)			
	CCP	SCP	DIFERENÇA
12 ELEM	-43,778	-46,079	4,99%
48 ELEM	-53,016	-54,867	3,37%
192 ELEM	-72,049	-74,206	2,91%

Fonte: O Autor, 2020

Tabela 12– Tensão normal no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, malha de refino gradual com e sem cisalhamento parasítico

TENSÃO NORMAL (Pa)			
	CCP	SCP	DIFERENÇA
27 GRAD ELEM	-60,422	-62,317	3,04%
108 GRAD ELEM	-77,178	-79,540	2,97%
432 GRAD ELEM	-92,722	-95,257	2,66%

Fonte: O Autor, 2020

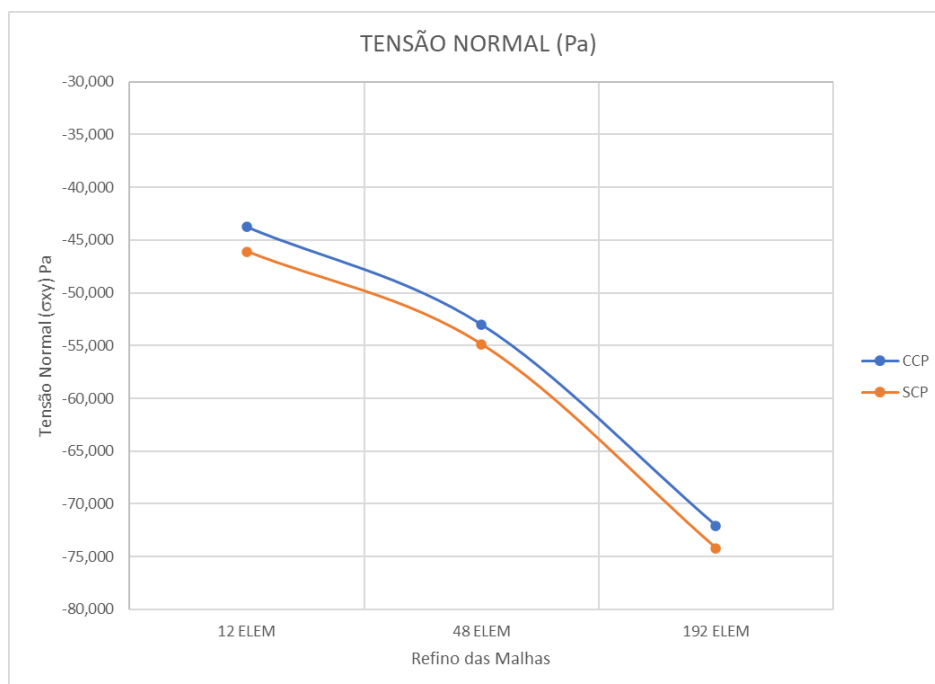


Figura 23– Tensão normal, malha de elementos quadrados. Elemento quadrilateral de quatro nós com e sem cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

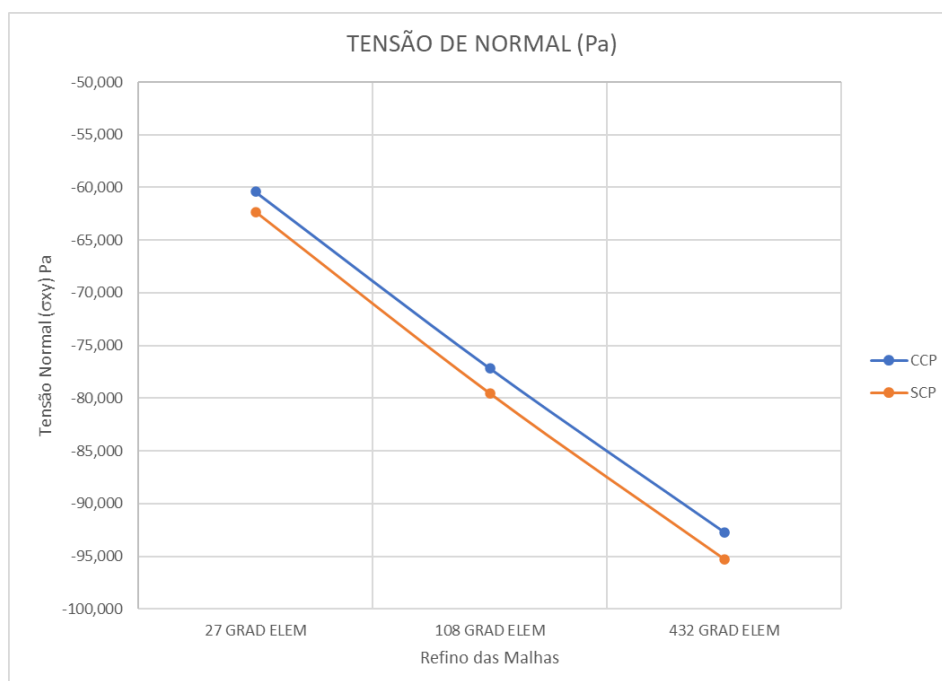


Figura 24– Tensão normal, malha com refino gradual. Elemento quadrilateral de quatro nós com e sem cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

Tabela 13 – Tensão de cisalhamento no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, elemento quadrado com e sem cisalhamento parasítico

TENSÃO DE CISALHAMENTO (Pa)			
	CCP	SCP	DIFERENÇA
12 ELEM	9,596	6,831	-40,47%
48 ELEM	14,303	9,807	-45,85%
192 ELEM	19,956	13,378	-49,18%

Fonte: O Autor, 2020

Tabela 14 – Tensão de cisalhamento no ponto A. Elemento quadrilateral de quatro nós, malha de refino gradual com e sem cisalhamento parasítico

TENSÃO DE CISALHAMENTO (Pa)			
	CCP	SCP	DIFERENÇA
27 GRAD ELEM	15,676	10,800	-45,16%
108 GRAD ELEM	21,993	14,719	-49,42%
432 GRAD ELEM	25,290	17,265	-46,48%

Fonte: O Autor, 2020

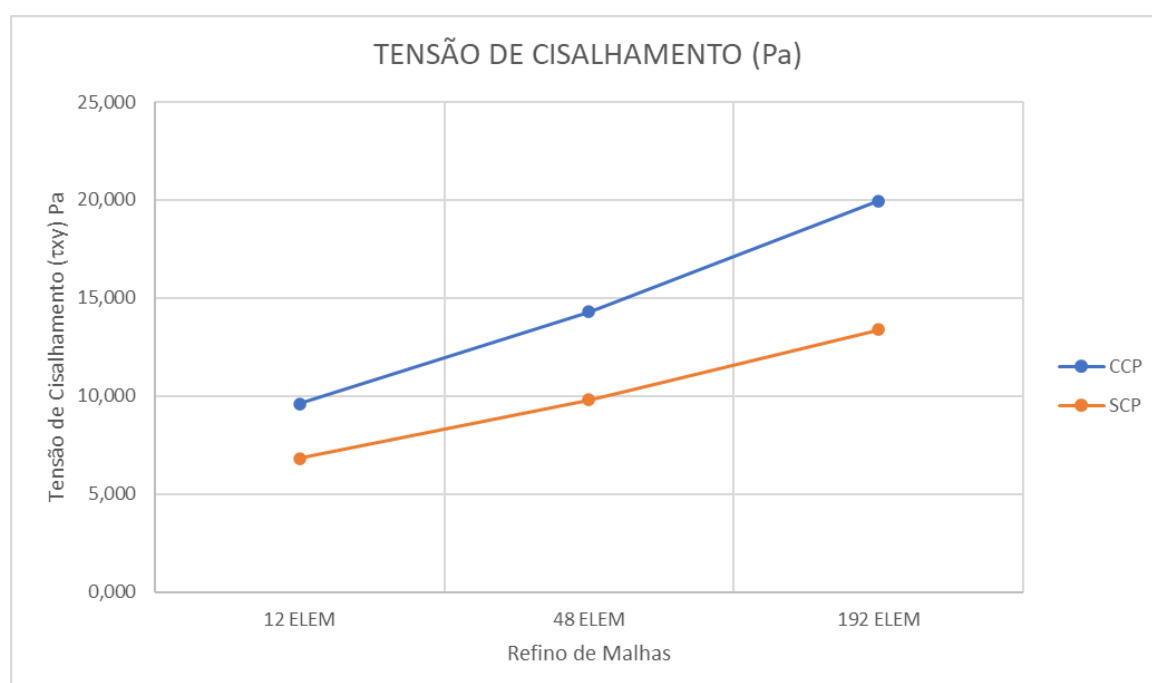


Figura 25– Tensão de cisalhamento, malha de elementos quadrados. Elemento quadrilateral de quatro nós com e sem cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

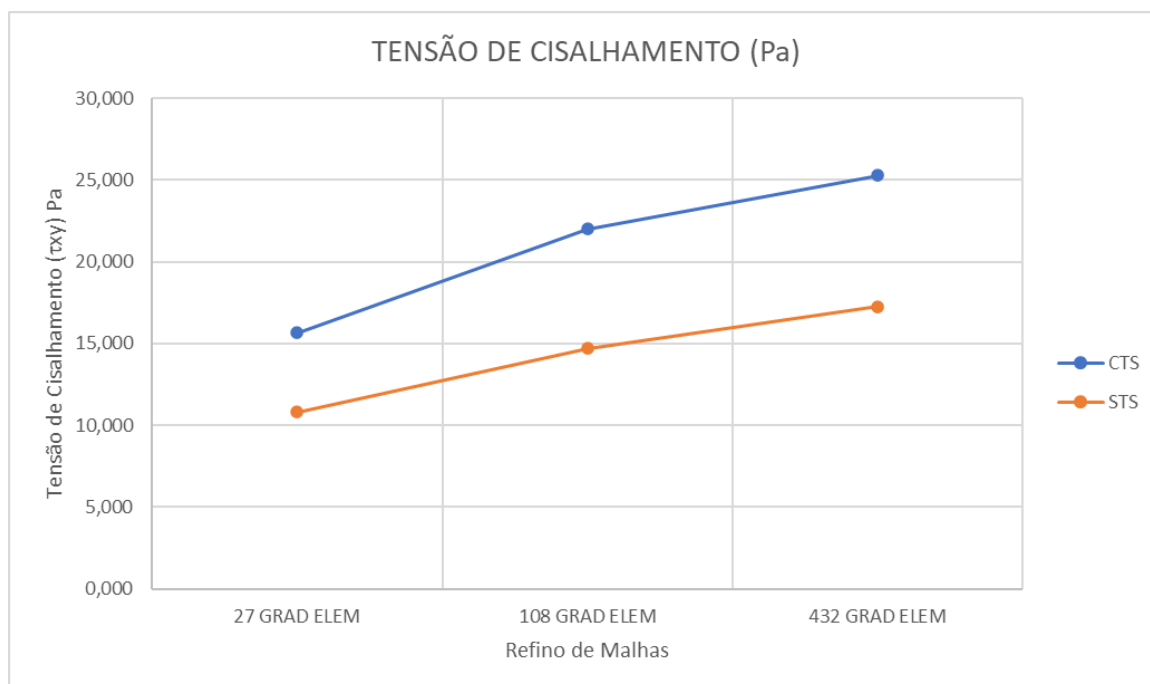


Figura 26– Tensão de cisalhamento, malha de refino gradual, elemento quadrilateral de quatro nós com e sem cisalhamento parasítico

Fonte: O Autor, 2020

Similar aos exemplos um e dois, o terceiro exemplo reforça o fato de que a tensão de normal não é afetada de forma expressiva pelos termos espúrios, sendo apenas o refino das malhas a causa do aumento de tensões, vista de forma igual nas duas linhas dos gráficos da malha quadrada e de da malha de refino gradual. Ressalta-se que os valores de tensão mostrados, são referentes as tensões no eixo x, sendo a tensão normal máxima perpendicular a linha de falha no ponto crítico da placa.

Para as tensões de cisalhamento, novamente o padrão se repete onde a diferença se torna clara na análise dos valores com e sem termos espúrios. É natural que para a malha gradual o erro tenha uma oscilação devido aos diferentes tamanhos dos elementos utilizados; porém, a superioridade da malha de refino gradual é vista na primeira malha, onde o erro do refino gradual de 27 elementos é de 45,16% enquanto o erro do refino quadrado de 48 elementos é de 45,85%. Isso se deve ao fato de se ter uma malha mais refinada no ponto de concentração de tensões.

5 CONCLUSÕES

Elementos finitos planos baseados em polinômios incompletos incorporam termos de cisalhamento parasítico, que são termos espúrios causadores do travamento por cisalhamento. Na formulação isoparamétrica, o tratamento dos efeitos do travamento consiste na aplicação de técnicas de integração reduzida dos termos de cisalhamento da matriz de rigidez. Sendo técnicas numéricas projetadas para não integrar termos de determinadas ordens, eventualmente poderão eliminar termos legítimos, causando modos espúrios de energia nula. Em contrapartida, a Notação *Strain Gradient* permite a análise *a priori* do comportamento dos elementos através do emprego de polinômios aproximadores fisicamente interpretáveis. A partir desta característica, a notação permite que termos espúrios que causam o enrijecimento artificial dos elementos sejam precisamente identificados e facilmente eliminados antes da formulação da matriz de rigidez. Modos espúrios de energia nula são, portanto, evitados.

Neste trabalho, investiga-se as capacidades de modelagem do elemento de quatro nós para elasticidade plana. Os resultados apresentados mostram os efeitos deletérios dos termos de cisalhamento parasítico identificados através de exemplos numéricos para problemas da elasticidade plana. Os resultados apresentados foram validados através da utilização do programa de elementos finitos LAMFEM, onde elementos *Strain Gradient* estão implementados, e o programa de elementos finitos já deveras difundido no meio científico, o SAP 2000.

Foi observado que os elementos de quatro nós Isoparametrico e *Strain Gradient* contendo cisalhamento parasítico apresentam resultados muito similares. O manual do programa SAP 2000 informa que nenhum tipo de tratamento é feito no programa para a correção do erro, sendo as deformações normais e distorções angulares integradas igualmente de forma exata com 2 pontos de Gauss. Desta forma, o cisalhamento parasítico não é eliminado do elemento. Os resultados obtidos com o elemento *Strain Gradient* sem cisalhamento parasítico são mais acurados, uma vez que o cisalhamento parasítico causa erros quantitativos e qualitativos no modelo, enrijecendo de forma indevida o modelo, bem como retardando a convergência dos resultados. Os erros causados pelo cisalhamento parasítico encontrados neste trabalho são bastante significantes. Na viga esbelta em balanço, ao se comparar os

resultados com cisalhamento parasítico e sem cisalhamento parasítico, há uma diferença de mais de 500% com relação as tensões de cisalhamento. Na viga curta, comparando os resultados com cisalhamento parasítico e sem cisalhamento parasítico, há uma diferença de cerca de 70% com relação as tensões de cisalhamento. O alto índice de erro também se repete no terceiro exemplo, onde a placa quadrada com furo central apresenta uma diferença de cerca de 40% com relação as tensões de cisalhamento com e sem a presença do cisalhamento parasítico.

Estudos revisados neste trabalho mostram que quando a parcela da matriz de rigidez associada ao cisalhamento é integrada com um ponto de Gauss no centróide do elemento de quatro nós (integração reduzida), os termos espúrios são removidos corretamente do elemento Isoparamétrico.

Posto isso, pode-se concluir que matematicamente, tanto a formulação isoparamétrica quanto a Notação *Strain Gradient* são equivalentes quando se trata do elemento de quatro nós. A superioridade da Notação *Strain Gradient* se mostra na capacidade das expressões revelarem explicitamente as capacidades de modelagem do elemento, e permitir a identificação e eliminação correta dos termos espúrios causadores do travamento.

Os elementos isoparamétricos possuem uma característica importante, inerente ao procedimento de formulação, que é a de assumirem geometrias irregulares na malha. O procedimento de formulação da notação *Strain Gradient* não envolve recurso matemático para realizar mapeamento geométrico. Para que elementos *Strain Gradient* possam assumir geometrias irregulares, pode-se empregar o Teorema de Green para integrar a matriz de rigidez. Neste trabalho, a matriz de rigidez do elemento de quatro nós foi integrada considerando geometrias retangulares apenas. Entendendo ser fundamental para a validação de um elemento finito que ele possa assumir geometrias irregulares na malha, sugere-se para trabalho futuro a implementação desta capacidade no elemento de quatro nós e também nos demais elementos planos e de placa desenvolvidos na Notação *Strain Gradient*. Sugere-se ainda estudos das capacidades de modelagem dos elementos planos de oito (Serendipity) e de nove nós (Lagrangeano) particularmente, avaliando efeitos de travamento e de modos espúrios de energia nula. Para concluir, um estudo bastante interessante seria o de avaliar os comportamentos de elementos planos ao impor-se curvatura em uma ou mais arestas.

REFERÊNCIAS

- [1] AHMAD, S., IRONS, M.B, and ZIENKIEWICZ, C.O. *Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements*. International journal for numerical methods in engineering, 2. (1970), 419-451.
- [2] ZIENKIEWICZ, C.O., TAYLOR, L.R. and TOO, M.J., *Reduced integration technique in general analysis of plates and shells*. International journal for numerical methods in engineering 3 (1971) 275-290.
- [3] PAWSEY, F.S., and CLOUGH, W.R. *Improved numerical integration of thick shell finite elements*. International journal for numerical methods in engineering 3 (1971), 575-586.
- [4] HUGHES, R.J., TAYLOR, L.R., and KANOKNUKULCHAI, W. *A simple and efficient finite element for plate bending*. International journal for numerical methods in engineering 11 (1977), 1529-1543.
- [5] MACNEAL, H.R. *A simple quadrilateral shell element*. Computers and structures 8 (1978), 175-193.
- [6] HUGHES, R.J.T, and TEZDUYAR, E.T. *Finite elements based upon Midlin Plate Theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element*. Journal of applied mechanics 48 (1981), 587-596.
- [7] HUGHES, T.J.R, and COHEN, M., *The "Heterosys" finite element for plate bending*. Computers and Structures 9 (1978), 445-450.
- [8] PRATHAP, G., and VISWANATH, S. *An optimally integrated four-node quadrilateral plate bending element*. International journal for numerical methods in engineering 19 (1983), 831-840.
- [9] BELYTSCHKO, T., ONG, S.-J. *A consistent control of spurious singular modes in the 9-node Lagrange element for the Laplace and Mindlin Plate Equations*. Computer methods in applied mechanics and engineering 44 (1984), 269-295.
- [10] BELYTSCHKO, T., STOLARSKI, H., LIU, K.W., CARPENTER, N. and ONG, S.-J. *Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements*. Computer methods in applied mechanics and engineering 51 (1985), 221-258.
- [11] BELYTSCHKO, T., WONG, L.B., and STOLARSKI, H. *Assumed strain stabilization procedure for the 9-node lagrange shell element*. International journal for numerical methods in engineering 28 (1989), 385-414.
- [12] BELYTSCHKO, T., and BINDEMAN, P.L. *Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear problems*. Computer Methods in Applied Mechanic and Engineering 88 (1991), 311-340.
- [13] LEE, S.N., and BATHE, J.K., *Effects of element distortions on the performance of isoparametric elements*. International journal for numerical methods in engineering 36 (1993), 3553-3576

- [14] PRATHAP, G. *Locking, rank and singularity of penalty-linked stiffness matrix and consistency of strain-field*. Computers and Structures 52 (1994), 35-39.
- [15] LONG, Z., LI, J. CEN, S., and LONG, Y., *Some basic formulae for area coordinates in quadrilateral elements*. Communications in numerical methods in engineering 15 (1999), 841-852
- [16] ZHANG, X.-M., WANG, A.-W., and HE, H.L. *Locking-free degenerated isoparametric shell element*. Applied Mathematics and Mechanics 22 (2001), 609-617.
- [17] GARUSI, E., TRALLI, A., and CAZZANI, A. *An unsymetric stress formulation for Reissner-Mindlin plates: a simple and locking-free rectangular element*. International journal of computational engineering science 5 (2004), 589-618.
- [18] ZHANG, Y.X., and KIM, K.S. *Two simple and efficient displacement-based quadrilateral elements for the analysis of composite laminated plates*. International journal for numerical methods in engineering 61 (2004), 1771-1796.
- [19] BRAESS, D., MING, P., and SHI, Z.-C. *Shear locking in a plane elasticity problem and the enhanced assumed strain method*. SIAM journal on numerical analysis 47 (2010), 4473-4491.
- [20] BUI, T.Q., NGUYEN, M.N., and ZHANG, C. *Buckling analysis of Reissner-Mindlin plates subjected to in-plane edge loads using a shear-locking-free and meshfree method*. Engineering analysis with boundary elements 35 (2011), 1038-1053.
- [21] DOW, O.J., *A unified approach to the finite element method and error analysis procedures*. Book News Inc., Portland, USA (1999)
- [22] DOW, O.J., CABINESS.D.H., and HO.H.T., *Generalized finite element evaluation procedure*. Journal of structural engineering 111(2) (1985), 435-452
- [23] DOW, O.J., SU.W.Z., AND FENG.C.C., *Equivalent continuum representation of structures composed of repeated elements*. AIAA Journal 23 (1985), 1564-1569
- [24] DOW, O.J., CABINESS.D.H., and HO.H.T., *Linear Strain element with curved edges*. Journal of structural engineering 112(4) (1986), 692-708
- [25] DOW, O.J., and BYRD, D.E., *The Identification and elimination of artificial stiffening errors in finite elements*. International journal for numerical methods in engineering 26 (1988), 743-762
- [26] DOW, O.J., and HUYER. A.S., *Continuum models of space station structures*. Journal of aerospace engineering 2(4) (1989), 220-238
- [27] DOW, O.J., and BYRD, D.E., *Error estimation procedure for plate bending elements*. AIAA Journal 28, (1990), 685-693
- [28] ABDALLA, J.E., and DOW, O.J., *An error analysis approach for laminated composite plate finite element models*. Computers and structures 52 (1994), 611-616
- [29] DOW, O.J., and ABDALLA, J.E., *Qualitative errors in laminated composite plate models*. International journal for numerical methods in engineering 37 (1994), 1215-1230

- [30] MOHAMED, A.O., BYRD, E.D., and DOW, O.J., *Improved modeling capabilities with reduced-order integration*. Journal of engineering mechanics 131 (2005), 2-11
- [31] ABDALLA, J.E., FAGUNDES, A.F., and MACHADO, D.R., *Identification and elimination of parasitic shear in a laminated composite beam finite element*. Advances in engineering software 37 (2006), 522-532
- [32] ABDALLA, J.E., BELO, M.I, and PEREIRA, S.M., *A Laminated Composite Plate Finite Element a-priori Corrected for Locking*. Structural engineering and mechanics 28 (2008), 000-000
- [33] ABDALLA, J.E., BELO, M.I., and DOW. O.J., *A Serendipity Plate Element Free of Modeling Deficiencies for the Analisis of Laminated Composites*. Composite structures 154 (2016), 150-171
- [34] ABDALLA, J.E., BELO, M.I, and DOW, O.J., *On a four-node quadrilateral plate for laminatet composites*. Latin American journal of solids and structures 14 (2017). 1-21
- [35] R.D. Cook, D.S. Malkus e M.E. Plesha, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, New York USA (1989)
- [36] ZIENKIEWICZ, O.C., e TAYLOR, R.L., *The Finite Element Method, Fourth Edition, Vol. 1*, McGraw-Hill Book Company, London, 1989
- [37] BURDEN, L.R., and FAIRES, D.J. *Numerical Analysis*. BROOKS/COLE CENGAGE Learning., Boston, USA (2010)
- [38] ABDALLA, J.E., *Qualitative and Discretization Error Analysis of Laminated Composite Plate Models*, Tese de Doutorado, Department of Civil, Environmental and Architectural Engineering, University of Colorado, Boulder, 1992.