

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO
PARANÁ
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA

CARLOS FREIRE DOS SANTOS

MODELAMENTO DO ESCOAMENTO
BIFÁSICO DE ÓLEO/ÁGUA EM
RESERVATÓRIOS.

Curitiba
2017

CARLOS FREIRE DOS SANTOS

**MODELAMENTO DO ESCOAMENTO BIFÁSICO DE
ÓLEO/ÁGUA EM RESERVATÓRIOS**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Orientador: Prof.º Dr. Luís Mauro Moura.

Curitiba
2017

RESUMO

O cenário energético mundial possui como base o combustível fóssil. Desta forma, entender o comportamento desses fluidos em reservatórios de petróleo é de fundamental interesse e para isso é necessário utilizar ferramentas matemáticas e computacionais confiáveis. Assim, modelar, simular e compreender como o fluido se comporta no reservatório é de extrema importância para o melhor aproveitamento e obter a efetiva produção do reservatório. Para tanto, é necessário fazer a modelagem matemática, a modelagem numérica e sua implementação computacional da equação governante do fluxo em meios porosos. Este trabalho modelou o reservatório de petróleo utilizando abordagens dimensionais e de fases. Desta forma, a simulação foi feita para escoamento monofásico e bifásico tratando o reservatório de forma bidimensional. O método das Diferenças Finitas foi utilizado para discretizar as equações governantes para o escoamento monofásico e bifásico em reservatórios bidimensionais. O método IMPES é usado para simular o fluxo bifásico. Para a realização da simulação é necessário conhecer os dados de entrada como porosidade, permeabilidade, compressibilidade e pressão inicial. O código desenvolvido neste trabalho possui como entrada as variáveis citadas anteriormente e fornece como dados de saída gráfico com as curvas de pressão no espaço e curvas de saturação de água no tempo. É possível ainda verificar a influência da permeabilidade e da viscosidade nos escoamentos para os mesmos dados de entrada.

Palavras chave: Petróleo, Simulação numérica, Escoamento bifásico, IMPES.

Lista de Figuras

1	Armadilha Geológica	4
2	Transformação termoquímica da matéria orgânica e a geração de petróleo	5
3	Evolução da produção de petróleo	7
4	Representação de um corte transversal de uma amostra de rocha	8
5	Curva de permeabilidade efetiva versus saturação de água. . .	10
6	Esquema de injeção periférica.	16
7	Esquema de injeção de fluido no topo do reservatório.	16
8	Esquema de injeção na base do reservatório.	16
9	Malha <i>five – spot</i> . e Malha <i>seven – spot</i>	17
10	Malha <i>nine – spot</i>	17
11	Malha <i>five – spot</i> invertida.	18
12	Representação malha básica 1/4 de <i>five – spot</i> do tipo invertido.	19
13	Diferenças entre os principais métodos numéricos.	22
14	Malha unidimensional mostrando os pontos centrais, ou nós, de cada um dos blocos onde as pressões são calculadas, e as faces.	23
15	Representação esquemática da contribuição dos blocos da malha e seus níveis de tempo utilizando a formulação explícita para o bloco <i>i</i>	24
16	Representação esquemática da contribuição dos blocos da malha e seus níveis de tempo utilizando a formulação implícita para o bloco <i>i</i>	25
17	Aplicações em simulação de reservatórios.	26
18	Configuração simplificada de um sistema <i>onshore</i> de produção de petróleo.	29
19	(a) malha cartesiana, (b) malha curvilínea.	30
20	Representação de um reservatório e suas estruturas geológicas através de uma malha cartesiana tridimensional.	30
21	(a) malha estruturada, (b) malha não estruturada.	31
22	Modelo unidimensional, bidimensional e tridimensional, ambos cartesianos.	32
23	Modelos 3D cartesianos, cilíndricos e esféricos.	32
24	Modelo físico do reservatório.	34
25	Volume de controle em coordenadas cartesianas.	36
26	Esquema mostrando o modelo de fluxo bidimensional.	43
27	Nó central e adjacentes ao elemento principal bidimensional. .	43
28	Nó central e adjacentes ao elemento principal bidimensional e suas faces.	44

29	Visualização 1D, 2D e 3D do elemento principal e seus seis vizinhos.	44
30	Sistema matricial gerado pelo modelo 2D utilizando a formulação implícita	51
31	Representação dos elementos a serem considerados no tratamento das bordas.	53
32	Tratamento dos elementos internos da face oeste.	53
33	Tratamento do elemento extremo das faces oeste e sul.	54
34	Ordem de implementação do método implícito.	58
35	Esquema de funcionamento do IMPES (<i>Implicit Pressure, Explicit Saturation</i>).	62
36	Forma matricial do sistema linear para o cálculo da pressão no fluxo bifásico	68
37	Fluxograma do funcionamento geral do código.	75
38	Fluxograma do cálculo das pressões no tempo $n+1$ pelo método explícito.	76
39	Fluxograma do cálculo das pressões no tempo $n+1$ pelo método implícito.	76
40	Fluxograma do cálculo das pressões e saturações no tempo $n + 1$ pelo método IMPES para o fluxo bifásico.	77
41	Esquema do modelo poço-reservatório.	78
42	Análise do tempo de simulação em função do número de blocos da malha.	80
43	Malha usada no problema de fluxo monofásico	81
44	Comparação do perfil de pressão no fluxo monofásico	82
45	Comparação do perfil de saturação no fluxo monofásico	83
46	Comparação do perfil de pressão no fluxo bifásico.	83
47	Comparação do perfil de saturação no fluxo bifásico.	84
48	Pressão no reservatório após 240 dias de produção.	85
49	Pressão no reservatório após 480 dias de produção.	86
50	Pressão no reservatório após 720 dias de produção.	86
51	Variação das pressões no reservatório com o aumento da permeabilidade. (a) $k = 50mD$, (b) $k = 100mD$, (c) $k = 150mD$	87
52	Variação das pressões no reservatório com a diminuição da viscosidade.(a) $\mu = 10cP$, (b) $\mu = 30cP$, (c) $\mu = 50cP$	88
53	Pressão no reservatório após 240 dias de produção utilizando a formulação (a) explícita e (b) implícita.	88
54	Pressão no reservatório após 480 dias de produção utilizando a formulação (a) explícita e (b) implícita.	88
55	Pressão no reservatório após 720 dias de produção utilizando a formulação (a) explícita e (b) implícita.	89

56	Influência da viscosidade no escoamento.	89
57	Influência da Permeabilidade no escoamento.	90
58	Esquema do modelo poço-reservatório para o modelo bifásico.	91
59	Curvas de permeabilidade relativa ao óleo e à água em função da saturação.	93
60	Pressão no reservatório após 240 dias de produção para o problema bifásico.	93
61	Saturação de água no reservatório após 240 dias de produção para o problema bifásico.	94
62	Saturação de água no reservatório após 480 dias de produção para o problema bifásico.	94
63	Saturação de água no reservatório após 720 dias de produção para o problema bifásico.	95

Lista de Tabelas

1	Classificação do óleo pelo °API	6
2	Softwares comerciais disponíveis no mercado	28
3	Softwares acadêmicos, ou <i>in house</i> , mais conhecidos	28
4	Parâmetros para a simulação	79
5	Configuração da malha de acordo com o número de blocos. . .	80
6	Propriedades do reservatório, da rocha e do fluido consideradas no modelo físico do problema bifásico.	92

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Objetivos	3
1.1.1	Objetivo Geral	3
1.1.2	Objetivo Específico	3
1.2	Estrutura do Trabalho	3
2	Revisão Bibliografica	4
2.1	Petróleo	4
2.2	Propriedades de rochas e fluidos	8
2.3	Porosidade	9
2.4	Permeabilidade	9
2.5	Fator Volume Formação	10
2.6	Viscosidade	11
2.7	Compressibilidade	11
2.8	Saturação de fluidos	12
2.9	Transmissibilidade	12
2.10	Recuperação de petróleo	13
2.10.1	Injeção de água	14
2.10.2	Esquemas de injeção	15
2.10.3	Injeção em malhas	17
2.10.4	Injeção em uma malha <i>five-spot</i>	18
3	Simulação de reservatórios	26
3.1	Abordagem monofásica	34
3.1.1	Modelo físico	34
3.1.2	Formulação Matemática: Equação da difusividade	35
3.1.3	Formulação Explícita	46
3.1.4	Formulação Implícita	49
3.1.5	Obtenção da solução	51
3.1.6	Fronteiras do domínio	52
3.1.7	Obtenção da solução pelo método Implícito	55
3.1.8	Pontos internos do domínio	56
3.1.9	Fronteiras do domínio	56
3.2	Abordagem bifásica	59
3.2.1	Modelo físico	59
3.2.2	Formulação matemática	59
3.2.3	Condições iniciais de contorno	61
3.2.4	Método IMPES para fluxo água-óleo	61
3.2.5	Discretização da equação para o escoamento óleo-água	63

3.2.6	Obtenção da solução	70
4	Metodologia	75
4.0.7	Aplicação do código	78
5	Resultados e discussões	81
5.1	Validação do código desenvolvido	81
5.2	Escoamento monofásico de óleo no reservatório 2D	85
5.3	Escoamento bifásico de óleo no reservatório 2D	91
6	Considerações finais	96
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	97

1 Introdução

As fontes de energia são de extrema importância para o desenvolvimento econômico e social da população mundial [42]. Destas destaca-se o petróleo, que assumiu papel fundamental em todo o século XX. Isto se deve às suas vantagens como combustível e matéria-prima em face de outros produtos. O petróleo, depois de refinado, dá origem a numerosos subprodutos como diesel, gasolina, benzina, lubrificante, vários tipos de plásticos sendo mesmo usado em fibras têxteis, detergentes ou medicamentos [29]. As reservas mundiais de petróleo em 2015 foram estimadas em 1,7 trilhão de barris e o consumo mundial totalizou 95 milhões de barris/dia, após aumento de 2 % (1,9 milhão de barris/dia) em comparação com 2014 [4].

É evidente a necessidade e a importância dos hidrocarbonetos no atual cenário energético global. Muitas vezes, porém, a produção de petróleo pode não ser viável economicamente, pelos mais diversos motivos, o que impacta fortemente na tomada de decisão de desenvolvimento de um campo.

Nesse contexto, alguns parâmetros devem ser avaliados para uma tomada de decisão, e alguns métodos já existentes na indústria são utilizados para auxiliar nesta escolha, o que tem chamado a atenção das empresas do setor, já que as mesmas precisam ter boas estimativas de produção, para que possam avaliar e fornecer expectativas positivas sobre o potencial da produção futura diante de seus investidores [10].

Um dos métodos bastante utilizados para prever o comportamento dos fluidos no reservatório são as ferramentas numéricas, que vêm complementar a experimentação em laboratório, que pode ser custosa e muitas vezes não é capaz de traduzir com fidelidade as características do reservatório ao propor uma representação do mesmo em escala reduzida.

A importância da simulação numérica de reservatórios é evidente e tem sido utilizada desde a década de 1950 até os dias atuais no planejamento a médio e longo prazo da produção. A simulação numérica de escoamento de fluidos em meios porosos, que ao longo deste trabalho é abreviada para simulação de reservatórios, atua de forma decisiva nas empresas na predição do comportamento de um reservatório de petróleo [26].

Os dados obtidos da simulação são utilizados na avaliação do reservatório a fim de propor estratégias que otimizem a produção, estendendo assim a vida útil do mesmo. Entre essas estratégias estão a escolha da localização

dos poços em um campo, a vazão de produção dos poços, os métodos de produção, e outros fatores. Assim, a simulação de reservatórios é, atualmente, fundamental antes e durante a produção de fluidos do reservatório, à medida que permite o planejamento e acompanhamento da produção de maneira eficiente.

A previsão do comportamento de um reservatório é de extrema importância, principalmente para provar a economicidade de um projeto. O potencial de produção de um reservatório é um dos principais fatores a ser analisado na tomada de decisão de seu desenvolvimento ou não. Algumas ferramentas podem ser utilizadas para a avaliação do comportamento de reservatórios, entre elas está a simulação de reservatórios.

Alguns *softwares* de simulação desenvolvidos por empresas do setor petrolífero são largamente utilizados. Estes, porém, possuem custo muito elevado para a aquisição de sua licença. Algumas versões desses *softwares* estão disponíveis para teste, mas as mesmas são bastante limitadas em suas funcionalidades e no período de utilização, inviabilizando sua aplicação em pesquisas que requerem maior grau de complexidade, confiabilidade e tempo.

Ainda, existem licenças acadêmicas dos *softwares* próprias para estudos em Universidades, porém, além de bastante burocrático o processo para adquiri-las, muitas vezes não atendem a demanda devido ao número limitado e reduzido de licenças fornecidas. Alguns simuladores de código aberto já foram desenvolvidos, como o BOAST (*Black Oil Applied Simulation Tool*), um simulador trifásico tridimensional desenvolvido em Fortran e publicado em 1982 pelo Departamento de Energia dos Estados Unidos [17] e o MPSFFA (*Multi-Purpose Simulator For Field Applications*), desenvolvido em Fortran 95 [20], dentre outros.

Porém, muitas vezes os códigos são de difícil manipulação, ou não estão adequadamente documentados, dificultando o entendimento e prejudicando assim as tentativas de modificação do código. Existem, ainda, simuladores de código fechado, que, por sua natureza, não permitem modificações e adequações do código para melhor atender às necessidades de um problema específico a ser tratado ou novas aplicações, inviabilizando assim sua utilização em alguns casos.

O código desenvolvido neste trabalho simula reservatórios de petróleo com escoamento monofásico e bifásico no modelo carteziano. Faz a simulação unidimensional e bidimensional. Para isso, discretiza as equações governan-

tes que modelam o processo. Usando duas abordagens possíveis. O método implícito e o método explícito.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Desenvolver um código para simulação do escoamento bidimensional monofásico e bifásico em reservatórios de petróleo usando o método implícito e explícito.

1.1.2 Objetivo Específico

- Discretizar as equações do modelo matemático que foram implementadas;
- Contribuir com futuros trabalhos acadêmicos.

1.2 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

- O Capítulo 1 aborda uma introdução do tema de estudo, bem como os objetivos a serem alcançados.
- No Capítulo 2 há uma descrição sobre petróleo, as características de um reservatório, os tipos de recuperação e propriedades dos fluidos.
- O Capítulo 3 trata do modelo físico adotado e da abordagem matemática.
- O Capítulo 4 discorre sobre a metodologia.
- O Capítulo 5 apresenta os resultados obtidos pela simulações numéricas, assim como as discussões a respeito dos mesmos e a validação do código.
- O Capítulo 6 traz as principais conclusões do trabalho e as sugestões para estudos futuros.

2 Revisão Bibliografica

2.1 Petróleo

O petróleo sempre esteve presente na história da humanidade. É possível encontrar relatos da sua utilização em textos bíblicos, na Babilônia, pelos povos egípcios, fenícios, gregos, romanos e por índios pré-colombianos. Mesmo não empregando técnicas sofisticadas para a extração e refinamento eles utilizavam o óleo cru em pavimentações e para embalsamar os mortos, no caso dos egípcios. Já os índios utilizavam no processo de impermeabilização em potes de cerâmica [22]. Para que ocorra a formação de petróleo em bacias sedimentares é necessário a associação dos seguintes fatores [7]:

- A presença de rochas geradoras, ricas em matéria orgânica;
- A presença de uma rocha selante ou capeadora, rocha impermeável; e
- Arranjo geométrico das rochas reservatório e selante com o objetivo de manter a acumulação de petróleo.

Para que essa acumulação seja economicamente viável além dos fatores geológicos e das características das rochas envolvidas no processo é necessário ainda a combinação adequada do tempo e da temperatura. A ausência de apenas um desses fatores inviabiliza a formação de uma jazida petrolífera. A Fig. 1 esquematiza o processo de geração de petróleo [39].

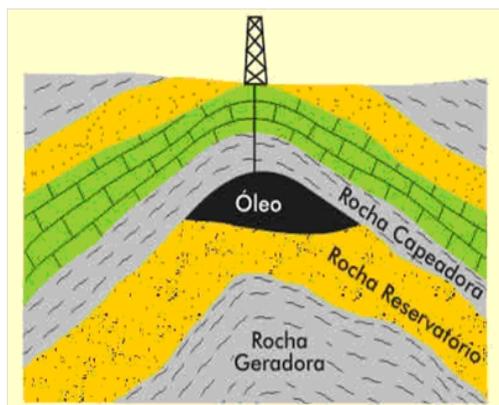


Figura 1: Armadilha Geológica
Fonte: [39].

Assumindo a presença dessas estruturas e da influência do tempo e da temperatura o processo de conversão da matéria orgânica em petróleo passa pelos seguintes estágios evolutivos que podem ser melhor visualizados na Fig. 2 [41]:

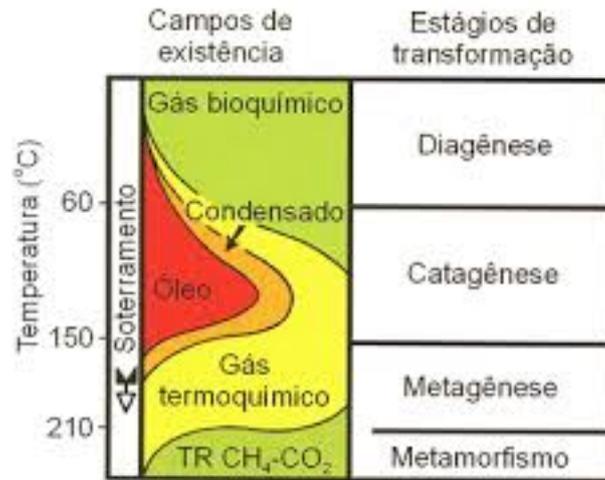


Figura 2: Transformação termoquímica da matéria orgânica e a geração de petróleo
Fonte: [41].

O petróleo é uma mistura complexa de compostos orgânicos e inorgânicos onde há predominância de hidrocarbonetos. Pode ocorrer na forma de óleo cru quando é encontrado no estado líquido em reservatórios em subsuperfície ou em superfície. Caso seja encontrado no estado gasoso em subsuperfície e torna-se líquido na superfície recebe o nome de condensado. Ou ainda a ocorrência de gás natural em que a fração de petróleo ocorre no estado gasoso ou em solução no óleo em reservatórios de subsuperfície [35].

Após levantamento feito pela *American Petroleum Institute* (API) com petróleos de diferentes regiões do mundo chegou-se as seguintes conclusões [19]:

- Basicamente os petróleos possuem os mesmos hidrocarbonetos;
- Os diferentes hidrocarbonetos encontrados no mundo ocorre por variações das frações das cadeias das substâncias; e

- A quantidade relativa dos compostos individuais dentro de cada grupo de hidrocarboneto é aproximadamente da mesma ordem de grandeza para diferentes petróleos.

Pode ainda ser dividido em parafínicos, parafínico naftênicos, naftênicos, aromáticos intermediários, aromático asfálticos e aromático naftênicos. A composição de cada tipo reflete a origem, o grau de evolução térmica e os processos de alteração a que o petróleo foi submetido [7]. Os óleos também são comumente chamados de leves ou pesados quando suas densidades são, respectivamente, menores ou maiores do que a da água. A *American Petroleum Institute* instituiu o grau °API que é um sistema de unidades utilizado pela indústria petrolífera para representar a densidade do óleo, que é representada segundo a Eq. 1 [19]:

$$^{\circ}API = \frac{141,5}{densidade} - 131,5 \quad (1)$$

Segundo a Agencia Nacional de Petróleo e Gas Natural (ANP) os óleos possuem a seguinte classificação quanto ao seu grau °API [4]:

Tabela 1: Classificação do óleo pelo °API

Tipo de Óleo	Densidade (20° C)	°API
Leve	≤ 0.87	$\geq 31^{\circ}$
Mediano	$0.87 < \rho < 0.92$	$22^{\circ} \leq API < 31^{\circ}$
Pesado	$0.92 < \rho \leq 1.00$	$10^{\circ} \leq API < 22^{\circ}$
Extra pesado	> 1.00	10°

O marco mundial na exploração comercial de petróleo ocorreu em 1859 nos EUA com o Coronel Drake, em Tittusville, Pensilvânia. Utilizando um processo de perfuração arcaico que consistia num equipamento de percussão alcançou um poço de 21 metros de profundidade. Além disso, nessa mesma época descobriu-se que a destilação do petróleo resultava em produtos que poderiam ser largamente utilizados como combustíveis [43].

O primeiro registro de petróleo no Brasil data de 1941 no bairro de Lobato em Salvador, Bahia. Em 1954, o governo Vargas instituiu o monopólio estatal do petróleo com a criação da Petrobras. Com este fato, iniciaram-se de forma definitiva os processos de pesquisa para a exploração, produção e

refino do petróleo. Na década de 1960, a Petrobras teve a sua primeira descoberta *offshore*, em Sergipe, no campo de Guaricema. E na década de 1970 o fato marcante foi a descoberta dos campos gigantes de petróleo da Bacia de Campos, litoral do Rio de Janeiro [15]. A Fig. 3 mostra a evolução da produção de petróleo no Brasil.

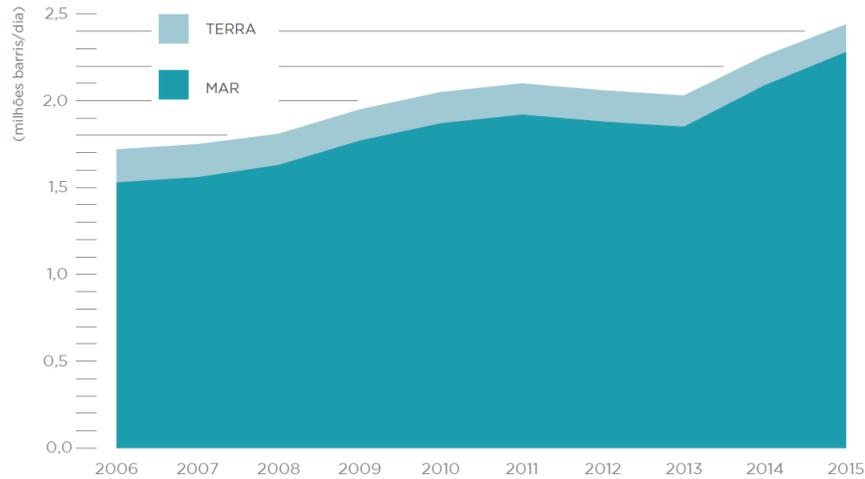


Figura 3: Evolução da produção de petróleo
Fonte: [4].

Do reservatório até a refinaria o petróleo passa por três áreas de atuação. Começando com o *upstream*, que caracteriza-se pela busca, identificação e localização dos reservatórios e o seu transporte até a refinaria. O *midstream* fase em que a matéria-prima é transformada em produtos específicos e a fase *downstream* que é a fase da logística, ou seja, o transporte dos produtos da refinaria até os locais de consumo [19].

2.2 Propriedades de rochas e fluidos

Reservatórios de petróleo são rochas com características particulares onde o hidrocarboneto é acumulado após ter sido gerado e migrado da rocha geradora. Podem ser rochas sedimentares areníticas, calcareníticas, carbonáticas, ou até folhelhos e carbonatos naturalmente fraturados, que apresentam espaços porosos que se interconectam, conferindo à rocha porosidade e permeabilidade [41].

A rocha reservatório é composta, de forma geral, por grãos unidos por um cimento e permeados pela matriz. Esses elementos estão representados, à fim de exemplificação, na Fig. 4. Os espaços vazios entre esses materiais sólidos são os poros do reservatório.

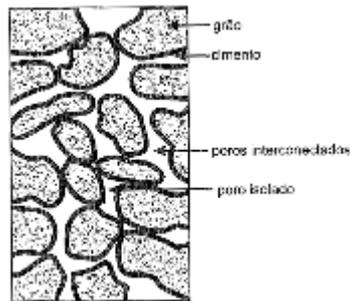


Figura 4: Representação de um corte transversal de uma amostra de rocha
Fonte: [31].

No estudo de reservatórios de petróleo entender a relação entre porosidade e permeabilidade da rocha reservatório é fundamental. A grosso modo, a porosidade e permeabilidade são diretamente proporcionais ao grau de seleção e tamanho dos grãos e inversamente proporcional à esfericidade. Tais características são controladas pelo ambiente deposicional. Um processo que pode alterar a permoporosidade original de uma rocha é a diagênese¹ com processos como a criação de cimentos, compactação ou a bioturbação, apenas para citar alguns [31].

¹Conjunto de processos químicos e físicos sofridos pelos sedimentos desde a sua deposição até a sua consolidação.

2.3 Porosidade

Porosidade é a primeira de duas propriedades essenciais de um reservatório. É uma propriedade física da rocha definida pela relação entre o volume de poros e o volume total da rocha. Ela ocorre por dois processos distintos, a porosidade primária e a porosidade secundária. A primeira é gerada antes do processo diagenético sendo caracterizada nas rochas sedimentares pelo espaço entre os grãos. Nestas rochas outros fatores influenciam na porosidade, como a forma das partículas, o grau de seleção e a presença de cimentação. Já a porosidade secundária ocorre por fraturamento, falha ou em função do crescimento dos cristais de cimentação [38]. Assim, a porosidade é matematicamente definida como a relação entre o volume dos poros e o volume total do reservatório, Eq. 2:

$$\phi = \frac{V_p}{V_t} \quad (2)$$

Geralmente a porosidade varia de 10% a 20% e pode ser classificada em porosidade absoluta e porosidade efetiva. A porosidade absoluta indica o volume total de vazios, enquanto a efetiva indica a conectividade desses poros [31].

2.4 Permeabilidade

A segunda propriedade essencial de um reservatório é a permeabilidade de fundamental importância para a produtividade do reservatório. É definida como a conectividade entre os poros. Em rochas reservatórios raramente é isotrópica. Em geral é maior na horizontal do que na vertical, fato explicado pela compactação das rochas. Além disso, a permeabilidade é inversamente proporcional à viscosidade do fluido [7].

Na presença de dois ou mais fluidos, é necessário introduzir o conceito de permeabilidade efetiva. A permeabilidade efetiva ao fluido considerado é a capacidade de escoamento de cada fluido no meio poroso e depende das saturações de cada um dos fluidos no meio poroso. A permeabilidade efetiva é normalizada pela permeabilidade relativa, com base na permeabilidade absoluta, ou permeabilidade da rocha. A relação entre as grandezas é dada segundo a Eq.3 [31]:

$$k_{rf} = \frac{k_f}{k} \quad (3)$$

k_f , é a permeabilidade efetiva ao fluido e k_{rf} , é a permeabilidade relativa a rocha. A Fig. 5 apresenta o comportamento das permeabilidades relativas ao óleo e à água em relação à saturação de água.

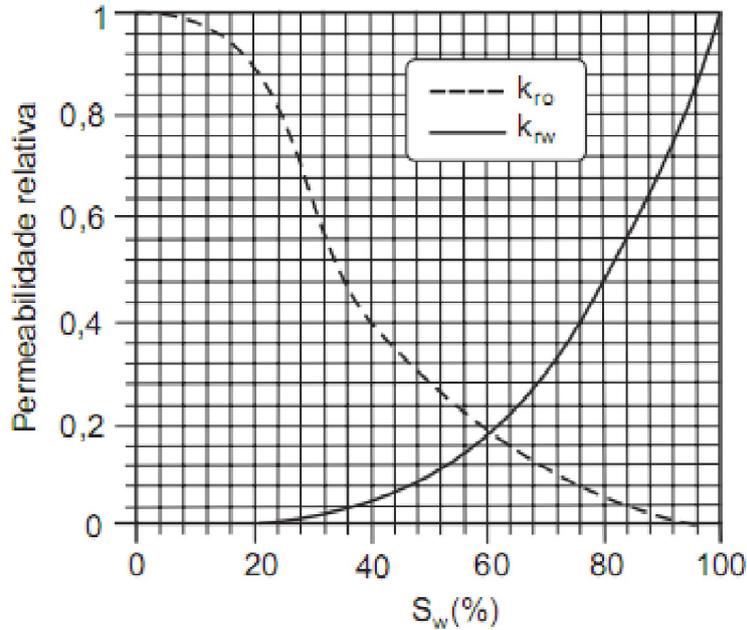


Figura 5: Curva de permeabilidade efetiva versus saturação de água.
Fonte: [31].

Uma rocha reservatório pode ser porosa, contudo se não for permeável não será economicamente viável. Outro aspecto importante é a continuidade do reservatório. As principais causas de descontinuidade em reservatórios são as barreiras diagenéticas, deposicionais e tectônicas [7].

2.5 Fator Volume Formação

Um fluido pode ocupar diferentes volumes dentro do reservatório, dependendo da pressão a qual ele está submetido. O Fator Volume Formação, B , é usado para converter volumes, nas pressões e temperaturas do reservatório, para volumes equivalentes, em condições padrão. É definido como a razão entre o volume da fase ocupado em condições de reservatório, V , pelo volume ocupado em condições padrão, V_{sc} , ou seja, [31].

$$B = \frac{V}{V_{sc}} \quad (4)$$

Para o escoamento monofásico (água, óleo ou gás), a Eq. 4 pode ser escrita em termos de massa específica, tal que:

$$B = \frac{\rho_{sc}}{\rho} \quad (5)$$

em que ρ e ρ_{sc} , são a massa específica em condições de reservatório e condições padrões, respectivamente. Para o óleo, o fator volume formação pode ser representado por B_o . Assim como para a água e o gás, B_w e B_g , respectivamente.

2.6 Viscosidade

A viscosidade de um fluido é a medida da sua resistência ao escoamento, e varia com a pressão e a temperatura, e com a composição do fluido. Nos líquidos, a viscosidade decresce com a temperatura e cresce com a pressão. Para gases a baixas pressões, a viscosidade aumenta com a temperatura. Em gases a altas pressões, o comportamento da viscosidade é idêntico ao dos líquidos [31].

2.7 Compressibilidade

Um reservatório a milhares de metros de profundidade é submetido a uma sobrecarga causada pelo peso das formações sobrepostas, chamada de pressão litostática. Essa pressão varia em função da profundidade, gênese da estrutura, consolidação da formação e, possivelmente, idade geológica e história das rochas. Destes aspectos a profundidade da formação é a mais importante, pois aplica o peso da coluna rochosa no reservatório causando uma força compressiva [38].

Assim, a compressibilidade é resultado da compactação resultante da pressão litostática e está relacionada com a profundidade [38]. A compressibilidade isotérmica de um fluido e a compressibilidade efetiva podem ser escritas pelas seguintes relações segundo [31], respectivamente:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \quad (6)$$

e

$$c_f = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \quad (7)$$

2.8 Saturação de fluidos

A saturação de um fluido no meio poroso é a fração do volume de poros ocupado pelo fluido e pode ser dada pela Eq. 8 [41]:

$$S_f = \frac{V_f}{V_p} \quad (8)$$

em que V_f é o volume do fluido e V_p é o volume poroso. Uma relação entre a saturação de todos os fluidos presentes em um reservatório é dada por:

$$S_o + S_w + S_g = 1 \quad (9)$$

em que S_o é a saturação do óleo, S_w é a saturação da água e S_g é a saturação do gás.

2.9 Transmissibilidade

Em engenharia de reservatórios a transmissibilidade é a relação que existe entre a permeabilidade relativa, viscosidade do fluido, fator volume de formação e o fluxo de massa de um componente entre dois volumes de controle adjacentes i e j . Desta forma, a transmissibilidade é a interação que ocorre entre dois blocos adjacentes durante o escoamento do fluido no reservatório.

2.10 Recuperação de petróleo

Para a extração do hidrocarboneto é necessário o deslocamento do fluido presente no reservatório. E este processo ocorre com a criação de uma diferença de pressão entre o poço produtor e o poço injetor. As operações que possuem como objetivo extrair o hidrocarboneto são chamadas de operações de recuperação e são classificadas em três categorias [12].

- **Recuperação Primária:** produção inicial de petróleo através da energia natural existente no reservatório;
- **Recuperação Secundária:** injeção de água ou gás depois da declinação da produção primária; e
- **Recuperação Terciária:** aplicada após o método de recuperação secundária para extrair o óleo residual.

Num passado recente essas etapas eram feitas em ordem cronológica, contudo com o avanço dos processos esta ordem não é mais seguida. Este fato se justifica pois não é mais necessário esperar a queda de pressão e consequente declínio da produção para implementar técnicas de recuperação avançada. Desta forma, a pressão do reservatório se mantém constante para acelerar a produção de óleo [30].

Num primeiro momento o termo recuperação primária pode levar a crer que existe uma interferência no processo de extração do hidrocarboneto. Entretanto, este termo refere-se aos casos em que é utilizada a energia contida naturalmente no reservatório. Um poço é chamado de surgente quando ele utiliza essa energia (pressão) para levar o hidrocarboneto até a superfície de maneira natural. Claro que nem todo poço possui essa energia e tal fato irá depender também do tipo de hidrocarboneto encontrado no reservatório [21].

Após o primeiro momento em que o reservatório utiliza a pressão existente é necessário manter a manutenção da vazão para que o poço continue produtivo. Passada essa energia primária é iniciada a intervenção através dos métodos convencionais de recuperação secundária. Existe duas formas de manter a energia do poço [31]:

- Injeção de fluidos no reservatório; e/ou
- Redução das resistências viscosas com o aquecimento da jazida.

É possível que as operações de recuperação secundária se iniciem antes de terminar a fase de produção primária neste caso elas são chamadas de operações

de manutenção de pressão. Na atualidade os processos de recuperação secundária são iniciados o mais breve possível com o objetivo de manter a vazão, respeitando é claro as características do reservatório [33].

Em reservatórios de óleo pesado fica claro como essa ordem pode ser invertida. Como óleo é bastante viscoso a energia primária não é suficiente para colocar o poço em produção. Assim, o ideal nesses casos é iniciar a recuperação terciária com a injeção de energia térmica para a recuperação do fluido. Desta forma, um método que cronologicamente seria adotado no final do processo acaba sendo utilizado como primeiro e possivelmente único meio de escoar o óleo no reservatório [32].

O deslocamento do óleo para fora dos poros da rocha deve-se a um comportamento puramente mecânico, sem qualquer interação de natureza química ou termodinâmica entre os fluidos ou entre os fluidos e a rocha. Mesmo na porção do reservatório invadida pelo fluido, nem todo óleo lá contido é deslocado [44].

É importante destacar que o estudo do arranjo de poços injetores e produtores deve ser minucioso antes da sua implementação. Isso porque o fluido injetado deve permanecer o maior tempo possível no reservatório, uma vez que o objetivo é a produção óleo.

2.10.1 Injeção de água

A injeção de água é o método de recuperação secundária mais utilizado no mundo, contribuindo com grande parcela do aumento da produção. Somente nos Estados Unidos ela é responsável por cerca de 50 % da produção de óleo [36].

Além disso, este processo possui menor custo quando comparado com outros métodos de recuperação [6]. Alguns fatores devem ser analisados ao considerar a injeção de água em um reservatório. Entre eles estão a massa específica e a viscosidade da água injetada e do óleo, a saturação remanescente de óleo ao final da produção primária, heterogeneidades do reservatório e compatibilidade da água de injeção com a rocha reservatório [34].

Na concepção de um projeto de injeção de fluidos é de fundamental importância a escolha da distribuição dos poços de injeção e produção mais apropriada para a exploração do reservatório. Como o objetivo primordial

da injeção é o aumento da recuperação, deve-se tentar produzir esse volume adicional utilizando-se um *layout* em que os volumes de fluido injetados sejam mínimos para um mesmo fator de recuperação [31]. A injeção de água é o método utilizado no modelo físico e formulação matemática desenvolvido neste trabalho.

2.10.2 Esquemas de injeção

A escolha do arranjo do esquema de injeção é um dos primeiros passos em um projeto de injeção de água. O objetivo da injeção é produzir o maior volume possível de óleo, injetando a menor quantidade de água e dentro de um tempo determinado economicamente viável. Alguns fatores influenciam a escolha do esquema de injeção e foram listados por [1]:

- Heterogeneidades do reservatório e permeabilidades direcionais.
- Direção das fraturas da formação.
- Disponibilidade de água a ser injetada
- Duração desejada da produção.
- Recuperação máxima de óleo.
- Espaçamento entre poços, produtividade e injetividade.
- Número de poços produtores e localização dos mesmos.

Além dos fatores listados estão também os fatores econômicos e operacionais do processo. Os *layouts* de esquemas de injeção utilizados são os mais variados possíveis e dependem da estrutura do reservatório, podendo ser classificados em três grandes grupos [31]:

- Injeção periférica
- Injeção no topo
- Injeção na base

Nesses esquemas de injeção os poços são localizados em determinadas áreas do reservatório, buscando facilitar o escoamento dos fluidos no reservatório. A opção por cada um desses esquemas de injeção é feita de acordo com a estrutura do reservatório e a presença de aquíferos ou capa de gás, dentre outros fatores. A Fig. 6 ilustra um esquema de injeção periférica, a Fig. 7 um esquema de injeção no topo e a Fig. 8 um esquema de injeção na base do reservatório.

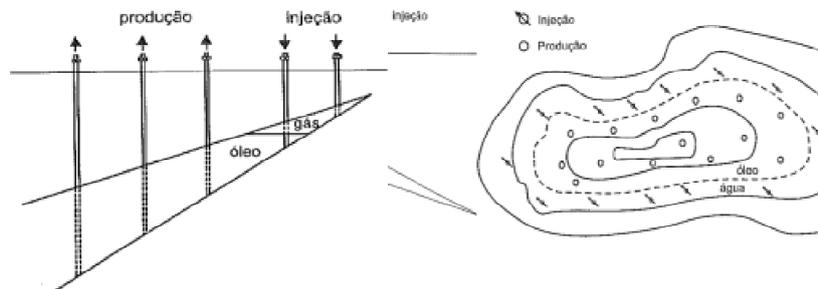


Figura 6: Esquema de injeção periférica.
 Fonte: [31].

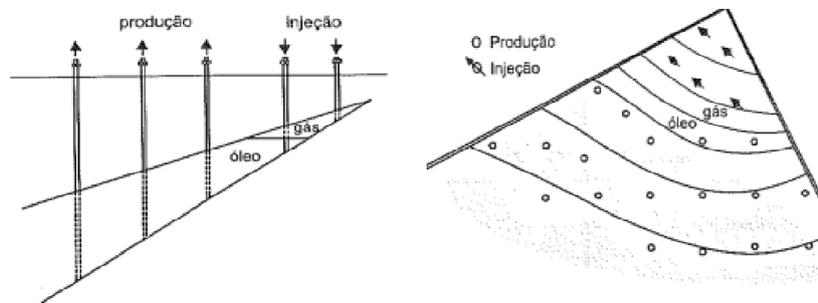


Figura 7: Esquema de injeção de fluido no topo do reservatório.
 Fonte: [31].

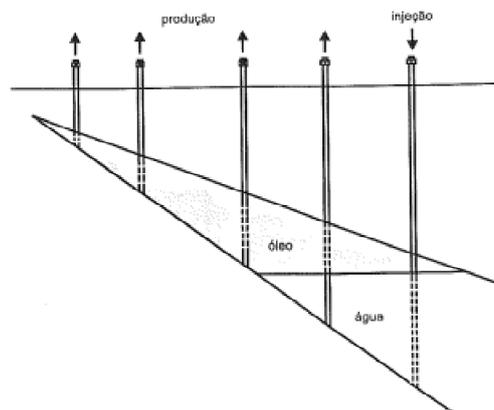


Figura 8: Esquema de injeção na base do reservatório.
 Fonte: [31].

2.10.3 Injeção em malhas

No esquema de injeção em malhas os poços injetores e produtores estão uniformemente distribuídos ao longo do reservatório em padrões repetidos. A injeção em malhas é normalmente utilizada em reservatórios com grandes áreas e pequenas inclinações e espessura [31]. Os padrões de injeção mais comumente utilizados são o modelo *five-spot*, *seven-spot* e *nine-spot*. Os padrões mencionados estão ilustrados na Fig. 9 e Fig. ??, respectivamente.

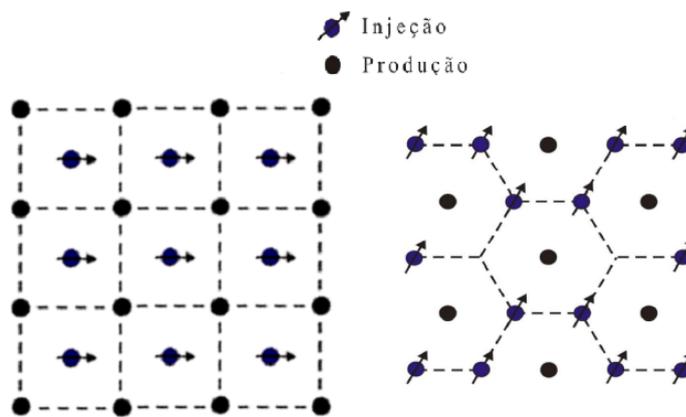


Figura 9: Malha *five-spot*. e Malha *seven-spot*.
Fonte: [25] Adaptado.

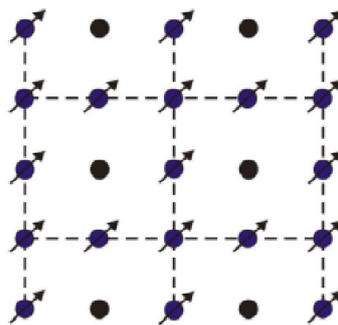


Figura 10: Malha *nine-spot*.
Fonte: [25] Adaptado.

Uma diferença a ser destacada em relação a esses diferentes tipos de esquemas de injeção é que, em sistemas de injeção periférica, de topo e base, os cálculos a respeito do processo de injeção são feitos utilizando-se toda a área do reservatório. Já para um esquema de injeção em malhas, os cálculos podem ser feitos utilizando-se apenas a área da malha básica e os resultados atribuídos às demais malhas básicas do projeto tendo assim a resposta para todo o reservatório [31].

2.10.4 Injeção em uma malha *five-spot*

O modelo físico desenvolvido neste trabalho considera o esquema de injeção em uma malha do tipo *five-spot*. As malhas mostradas anteriormente compõem um arranjo do tipo normal, com poços produtores circundados por poços injetores. Usualmente, na simulação de reservatórios, utiliza-se modelos invertidos, em que poços injetores são circundados por poços produtores. Um exemplo de uma malha *five-spot* invertida é mostrada na Fig. 11.

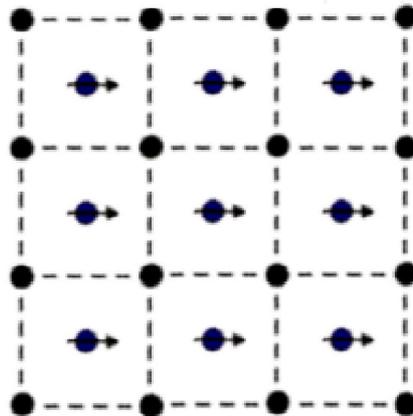


Figura 11: Malha *five-spot* invertida.
Fonte: [25] Adaptado.

Neste trabalho, utilizou-se a malha básica do modelo *five – spot* para a realização dos cálculos, resolvendo-os, portanto, para uma fração do reservatório como um todo. Para obter a resposta para todo o reservatório atribui-se os resultados às demais malhas básicas. A malha básica do modelo *five – spot* é comumente chamada de 1/4 de *five – spot* e é apresentada na Fig.12.

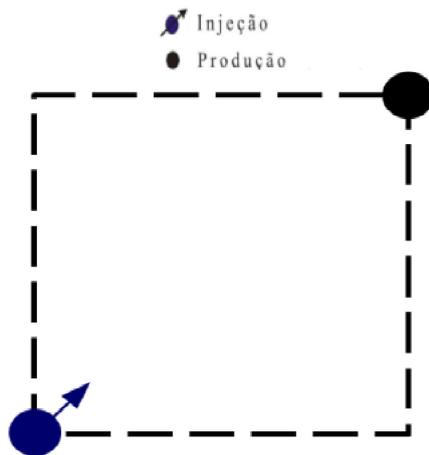


Figura 12: Representação malha básica 1/4 de *five – spot* do tipo invertido.

Existem alguns métodos utilizados para prever o comportamento de um reservatório de petróleo, são eles: o método análogo, o método experimental e o método matemático.

Método análogo

O método análogo tem como objetivo prever o comportamento de um reservatório utilizando propriedades de um reservatório maduro análogo ao mesmo em relação às suas características geológicas e petrofísicas. Este método é utilizado quando a quantidade de informações disponíveis sobre o reservatório é limitada ou mesmo inexistente, estimando fatores de recuperação, vazões iniciais de produção, declínio de produção, espaçamento entre os poços e mecanismos de recuperação [8], [20], [16].

Método experimental

Os métodos experimentais baseiam-se em medidas de propriedades físicas em modelos de laboratório para estimar as propriedades de um reservatório. Quando o reservatório é representado em escala, a geometria, espessura, porosidade e permeabilidade do modelo e as propriedades dos fluidos do reservatório são dimensionadas ao modelo. Porém, é impossível dimensionar todas as características físicas do reservatório, logo o uso de modelos realmente dimensionados é limitado [16].

Método matemático

O método matemático visa prever o comportamento de um reservatório utilizando equações matemáticas. Esse método inclui métodos de balanço de materiais, de curvas de declínio, métodos estatísticos, analíticos e numéricos [16]. Como será visto adiante, a solução da equação governante do fluxo de fluidos no reservatório através do método analítico é muito complexa. Assim, a utilização do método numérico é mais apropriada para o problema proposto. Os métodos numéricos baseiam-se em discretizações de equações matemáticas que governam o fluxo no reservatório. Essas discretizações possibilitam analisar o comportamento do escoamento em meios porosos.

Métodos numéricos

Em geral, a solução analítica de equações como a da difusividade hidráulica, é muito complexa, tornando obrigatória a utilização de métodos numéricos de solução [40]. Os métodos numéricos utilizam aproximações para representar equações diferenciais de difícil solução em sistemas de equações algébricas que podem ser resolvidos utilizando técnicas consagradas na literatura.

Nesse caso, o número de equações que comporá o sistema dependerá do refinamento da malha que representa o problema, a ser observado que quanto mais refinada a malha, ou seja, quanto maior for o número de blocos que a compõe, menor será o erro associado.

A solução analítica do problema, apesar de impraticável, pode ser utilizada na comparação entre as duas técnicas de solução para validar o método numérico. Para o problema proposto neste trabalho, os métodos numéricos se baseiam em aproximações das equações diferenciais que governam o escoamento dos fluidos no reservatório e são utilizados para a obtenção das soluções.

Os métodos numéricos de discretização de equações diferenciais mais utilizados são os Métodos de Elementos Finitos (MEF), de Diferenças Finitas (MDF) e de Volumes Finitos (MVF). Tanto o MDF quanto o MEF não trabalham com volumes de controle e sim apenas com os pontos da malha, sendo o MDF a simples substituição do operador diferencial pelo seu correspondente numérico. Já o MVF obtém as equações aproximadas através do balanço de conservação no volume elementar [23].

Inicialmente o MDF foi empregado para solução de problemas de mecânica dos fluidos, e o MEF para problemas de elasticidade. Esses dois métodos, porém, apresentavam instabilidades em problemas de advecção, o que motivou o aprimoramento do MVF, que passou a ser utilizado graças à possibilidade de associar a interpretação física à matemática [23].

Posteriormente o MEF passou a ser utilizado empregando-se funções de interpolação para permitir o tratamento adequado de termos advectivos, e permitindo ainda que o método fosse utilizado na área de escoamento de fluidos. Atualmente, o MVF é empregado na maioria dos pacotes comerciais, devido à preferência pela robustez do método [23]. A Fig. 13 faz uma comparação entre os métodos numéricos mais utilizados e suas particularidades.

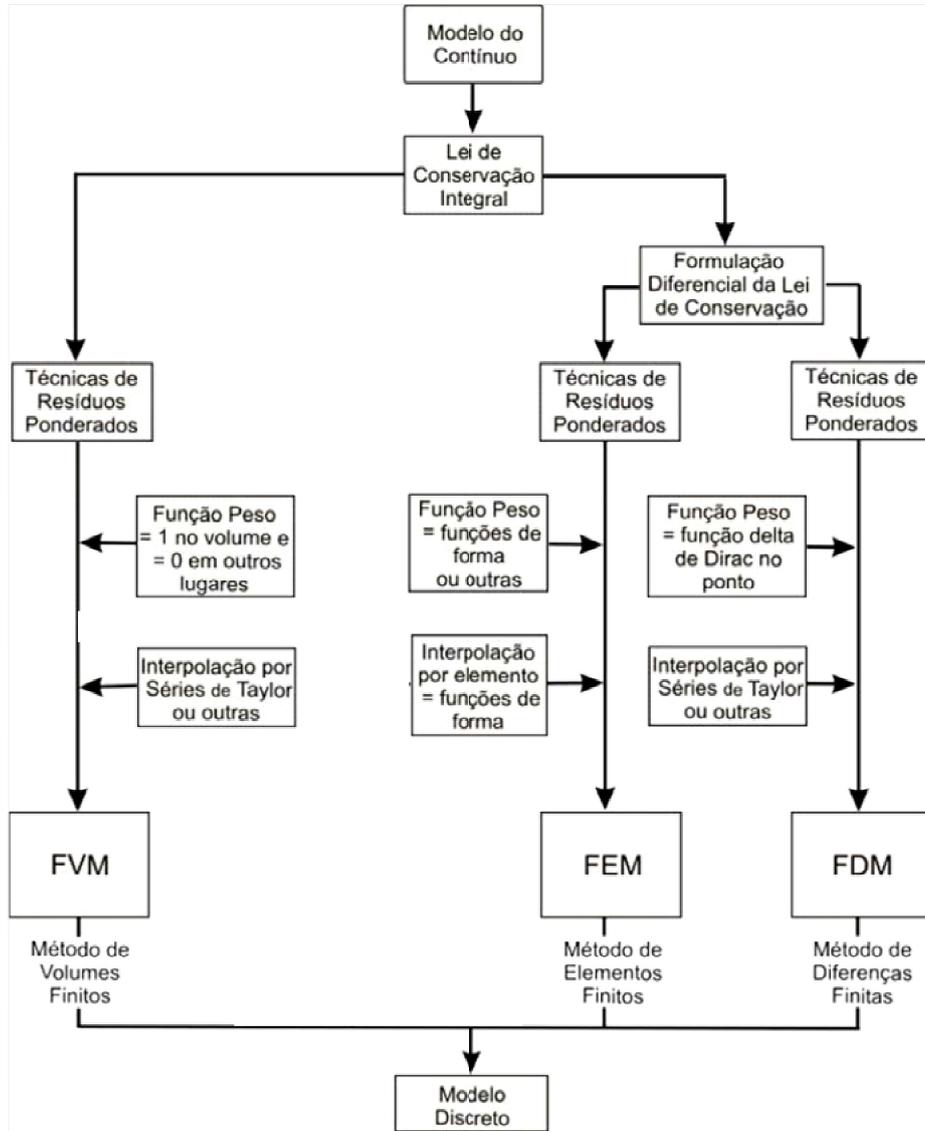


Figura 13: Diferenças entre os principais métodos numéricos.
 Fonte: [3] Adaptado.

É possível observar através da Fig. 13 que o parâmetro que diferencia os métodos entre si é a função peso, sendo todos os três apresentados oriundos de técnicas de resíduos ponderados.

Método das diferenças finitas (MDF)

O método de diferenças finitas é implementado sobrepondo uma malha de diferenças finitas sobre todo o reservatório a ser modelado. A escolha da malha é então usada para aproximar as derivadas espaciais de primeira e segunda ordem nas equações contínuas.

Essas aproximações são obtidas por truncamento das expansões da série de Taylor das variáveis desconhecidas (normalmente pressão para casos de fluxo monofásico e pressão e saturação para casos de fluxo bifásico) nas equações. Um processo semelhante é usado para o domínio do tempo [16].

A Fig. 14 apresenta uma malha unidimensional, onde estão representados os blocos centrais com pontos nodais que serão utilizados como exemplo para a apresentação das formulações implícita e explícita. Para o problema proposto, cada bloco contém valores de pressão e saturação associados a ele.

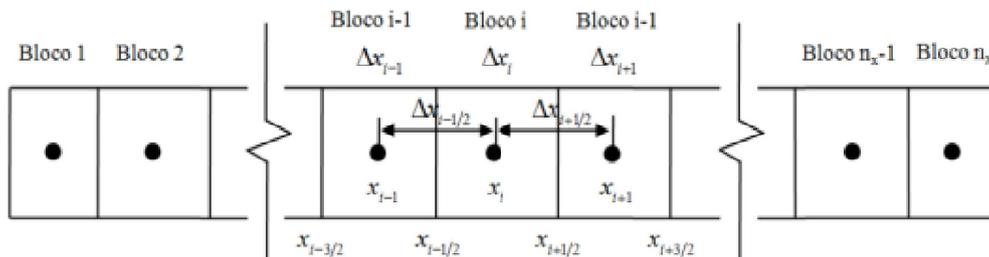


Figura 14: Malha unidimensional mostrando os pontos centrais, ou nós, de cada um dos blocos onde as pressões são calculadas, e as faces.

Fonte: [25].

A implementação da aproximação em diferenças finitas resultam em equações algébricas chamadas de equações de diferenças finitas. Deve ser enfatizado que a solução das equações de diferenças finitas pode ser obtida apenas em pontos discretos definidos pelo número de elementos em que o domínio foi dividido. Em outras palavras, as pressões calculadas no código são conhecidas apenas em alguns pontos do domínio, que é um contraste com a solução das equações analíticas que retorna a pressão em todos os pontos no reservatório [16].

Na simulação de reservatórios o objetivo é varrer toda a malha do reservatório simulando o parâmetro de interesse em cada ponto da malha a cada intervalo de tempo, partindo das condições e tempo inicial, ou conhecido, e avançando para tempos futuros, até o tempo limite de produção que se deseja inferir os parâmetros. Para avançar no tempo, o termo temporal da equação da difusividade hidráulica precisa ser discretizada. A discretização pode ser feita por duas abordagens: cálculo explícito para o novo nível de tempo da pressão, ou cálculo implícito para o novo nível de tempo de pressão. As diferenças entre as duas técnicas serão tratadas à seguir.

Método explícito

No método explícito, as derivadas são construídas em torno da posição central i e do tempo conhecido n . As pressões associadas ao tempo de referência $(n + 1)$ são utilizadas para calcular as pressões no tempo futuro $(n + 1)$. Como a solução envolve apenas uma incógnita, que tem referência no tempo $(n + 1)$, a solução pode ser explicitada através de uma equação envolvendo as derivadas centrais e ascendentes [31].

As pressões podem ser calculadas em cada célula partindo-se das condições iniciais do problema e incrementando o tempo em intervalos definidos. Para cada incremento de tempo será resolvido um número de equações lineares independentes igual ao número de blocos na malha de simulação. A Fig. 15 esquematiza a discretização utilizando o método explícito.

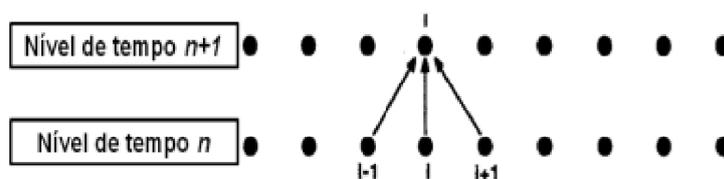


Figura 15: Representação esquemática da contribuição dos blocos da malha e seus níveis de tempo utilizando a formulação explícita para o bloco i .

Fonte: [16].

Método implícito

No método implícito, as derivadas são construídas em torno da posição central i e do tempo futuro $(n + 1)$. As pressões associadas ao tempo futuro de referência $(n + 1)$ nas posições vizinhas à posição central i (blocos $(i-1)$

e $(i + 1)$) são utilizadas para calcular as pressões nesse mesmo tempo na posição central. Assim, o cálculo da pressão no bloco i para o tempo $(n + 1)$ é dependente das pressões nas células $(i-1)$ e $(i + 1)$ para este mesmo tempo e, portanto, não pode ser feito explicitamente. Conseqüentemente, todos os blocos devem ser resolvidos simultaneamente, através de um sistema de equações lineares [25]. A Fig. 16 esquematiza a discretização utilizando o método implícito.

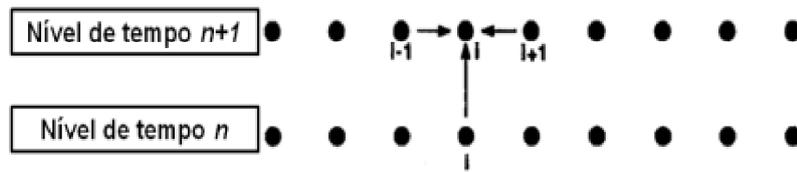


Figura 16: Representação esquemática da contribuição dos blocos da malha e seus níveis de tempo utilizando a formulação implícita para o bloco i .

Fonte: [16].

3 Simulação de reservatórios

A simulação de reservatórios utiliza um modelo numérico, que represente as características geológicas e petrofísicas de um reservatório de petróleo, é utilizado para prever o comportamento do fluido nesse reservatório ao longo do tempo. Os simuladores de reservatórios são a implementação computacional das equações que governam o problema do escoamento de fluidos em um reservatório, ou meio poroso, de forma que dados, ditos de entrada, sejam fornecidos, processados no código e tenha-se como resposta a solução do problema entregue na forma de gráficos e/ou tabelas que fornecem informações sobre o comportamento da pressão e da saturação de água no reservatório. A partir dessas informações, algumas aplicações podem ser consideradas. A Fig. 17 fornece uma ideia das aplicações da simulação de reservatórios.

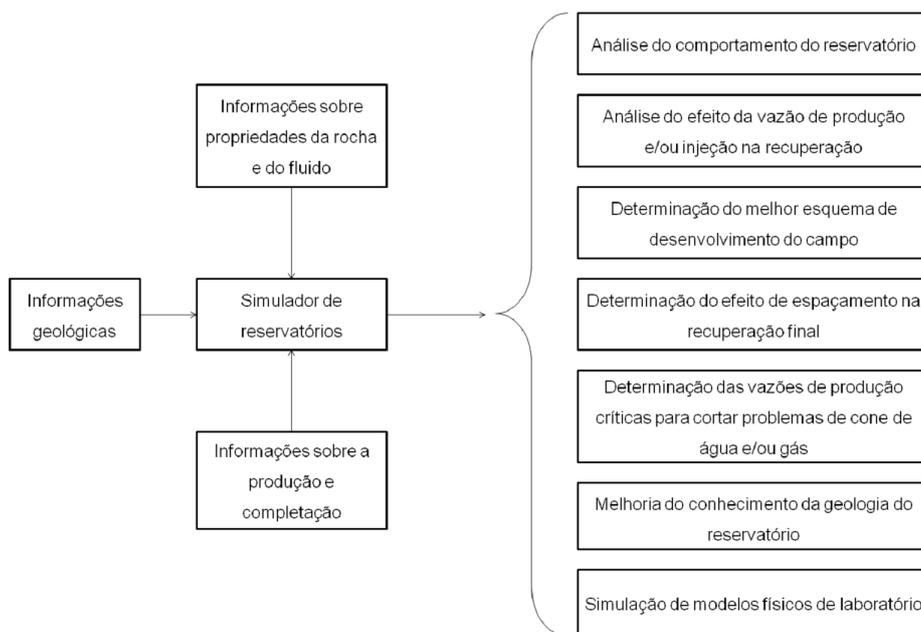


Figura 17: Aplicações em simulação de reservatórios.
Fonte: [31] Adaptado.

No início da produção de petróleo em 1859, não havia preocupação quanto ao comportamento do fluido no reservatório e aos seus aspectos técnicos. A simulação de reservatório teve seu início em 1930, com modelos que envolviam escoamento em caixas de areia e circuitos elétricos [27].

A simulação foi ganhando atenção das companhias petrolíferas, que a partir da década de 1950 iniciaram estudos na área, dando origem assim aos primeiros simuladores de reservatório propriamente ditos. Os estudos eram motivados pela possibilidade de planejar a produção de petróleo a médio e longo prazo, prática que até então não era utilizada. O investimento feito nos estudos eram compensados pelo retorno financeiro a longo prazo, assim como acontece atualmente [10].

Os primeiros simuladores geravam resultados grosseiros, mas que já permitiam análises que não eram possíveis até então. Estes utilizavam malhas cartesianas, as quais ainda são muito utilizadas em *softwares* comerciais atuais [2]. Com o avanço nos métodos de recuperação de petróleo, a simulação foi se desenvolvendo de maneira a atender desde os problemas mais gerais até os mais específicos envolvendo novos processos em recuperação avançada, como a combustão *in situ*, injeção de polímeros, os métodos miscíveis, água quente e vapor d'água [9].

Os avanços na simulação continuaram da década de 1970 em diante, englobando problemas cada vez mais específicos e complexos, como os reservatórios naturalmente fraturados, poços horizontais, e até simulações de fraturamento hidráulico [5]. Com o avanço da tecnologia e o surgimento de computadores mais poderosos em termos de capacidade de processamento e armazenamento, a simulação de reservatórios passou a ser cada vez mais utilizada, abrindo espaço para os *softwares* de simulação produzidos e utilizados pelas empresas atualmente. A Tab. 2 lista os *softwares* comerciais mais conhecidos atualmente e seus proprietários e a Tab. 3 lista os *softwares* acadêmicos, ou *in-house*, mais conhecidos e seus proprietários.

Tabela 2: Softwares comerciais disponíveis no mercado

Software	Proprietario	Descrição
IMEX	CMG	<i>Black-oil</i>
STARS	CMG	Composicional
CMOST	CMG	Ajuste de Histórico
VIP	Landmark	<i>Suite</i> de pacotes integrados
VIP.ENCORE	Landmark	<i>Black-oil</i>
THERM	Landmark	Térmico
STRATAMOD	Landmark	Caracterização de reservatórios
GRIDGENIR	Landmark	Gerador de malhas
2D3DVIEW	Landmark	Visualizador de resultados
ECLIPSE 100	Schlumberger	<i>Black-oil</i>
ECLIPSE 300	Schlumberger	Térmico
PETREL	Schlumberger	Pré e pós procesamento
MARLIM	PETROBRAS	Reservatórios

Tabela 3: Softwares acadêmicos, ou *in house*, mais conhecidos

Software	Proprietário	Descrição
UTCHEM	Universidade do Texas	<i>Black-oil</i>
UTCHEM	Universidade do Texas	Composicional
UTTHERM	Universidade do Texas	Térmico
BOAST	John & Fanchi	<i>Black-oil</i>

A modelagem do reservatório, incluindo seus aspectos geológicos, dados petrofísicos, características dos fluidos presentes, dimensionamento e geometria, precede a simulação do reservatório e é utilizada como embasamento para a construção dos modelos físico e matemático. Desta forma, quanto mais precisos forem os dados utilizados na modelagem do reservatório, maior confiabilidade oferecerá o simulador numérico, contribuindo assim para aumentar a segurança dos avaliadores na tomada de decisão [37].

A geometria de um reservatório é outra informação importante, esta se refere ao formato do reservatório e ao esquema de acoplamento com o poço, tal como representados, a fim de exemplificação, na Fig. 18. Nela o termo “Recuperação” tem sentido de produção dos fluidos presentes no reservatório, ou seja, fluxo dos fluidos do reservatório e não fazendo menção à injeção de fluidos e contendo, portanto, apenas um poço produtor.

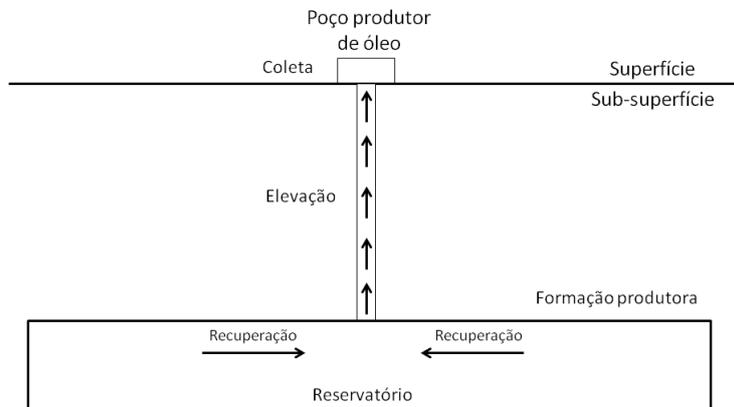


Figura 18: Configuração simplificada de um sistema *onshore* de produção de petróleo.

A escolha da malha será a base para a modelagem do reservatório. A partir daí é necessário, ainda, adotar o sistema de coordenadas mais adequado para a malha escolhida, que será utilizado na discretização das equações governantes do fluxo. Os sistemas de coordenadas usados em simuladores de reservatório podem ser cartesianos, cilíndricos ou esféricos. Sistemas cartesianos são utilizados para representar malhas retangulares. Sistemas cilíndricos e esféricos são utilizados para representar malhas curvilíneas.

A malha, ou *grid*, pode ser definida como um conjunto de blocos com dimensões bem definidas, os quais trazem consigo as propriedades da rocha e do fluido escoado, e que formam uma representação da geometria do reservatório. Muitas vezes um bom refinamento na malha permite uma boa representação do reservatório. Essa qualidade na representação, porém, deve ser observada de forma mais minuciosa nas regiões mais próximas ao poço, que geralmente requerem maior refinamento devido aos elevados gradientes de pressão presentes nesta região [37].

A malha utilizada na simulação deve ser escolhida de acordo com a geometria do reservatório e a precisão que se deseja obter na solução. Reservatórios retangulares podem ser melhor representados por malhas cartesianas, já os reservatórios de geometrias mais complexas geralmente são representados por malhas curvilíneas. Os dois casos são representados, respectivamente, pela Fig. 19.

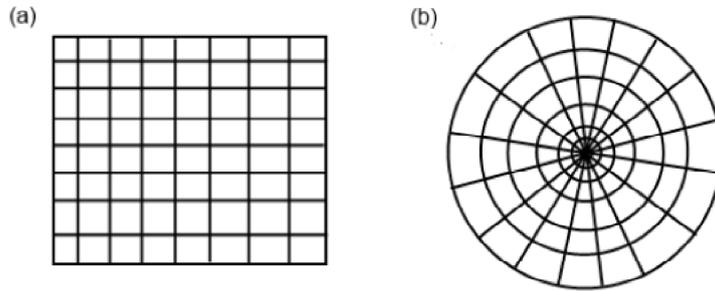


Figura 19: (a) malha cartesiana, (b) malha curvilínea.
Fonte: [37].

Quanto à precisão da solução obtida, é possível dizer que o erro diminui quanto maior for o número de elementos da malha, em outras palavras, quanto mais refinada for a malha utilizada. Entretanto, deve-se levar em conta a imprecisão computacional para processar malhas extremamente refinadas. Uma ilustração da representação de um reservatório através de malhas cartesianas pode ser vista na Fig. 20. Para cada um dos blocos da malha são atribuídas propriedades da rocha e do fluido, como permeabilidade relativa, porosidade e pressão [18].

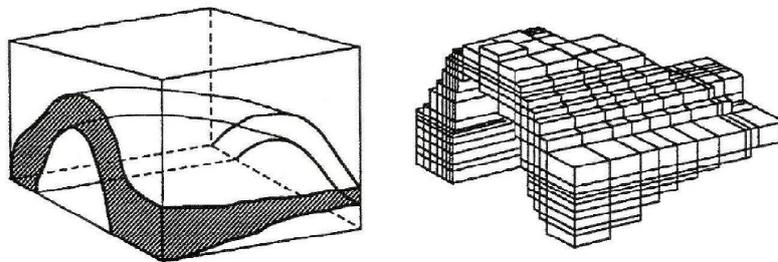


Figura 20: Representação de um reservatório e suas estruturas geológicas através de uma malha cartesiana tridimensional.
Fonte: [16].

As malhas podem ser classificadas, de forma geral, em estruturadas e não estruturadas. Quando os elementos da malha obedecem a uma lei de construção a malha é dita estruturada, na qual cada elemento interno tem sempre o mesmo número de vizinhos e a numeração dos mesmos obedece a uma sequência natural.

Na Fig. 21 (a) é possível observar um exemplo de malha estruturada. Já na malha não estruturada, o número de vizinhos varia de elemento para elemento, dificultando estabelecer uma regra de ordenação em uma sequência natural durante a implementação numérica [13]. Na Fig.21 (b) é possível observar um exemplo de malha não estruturada.

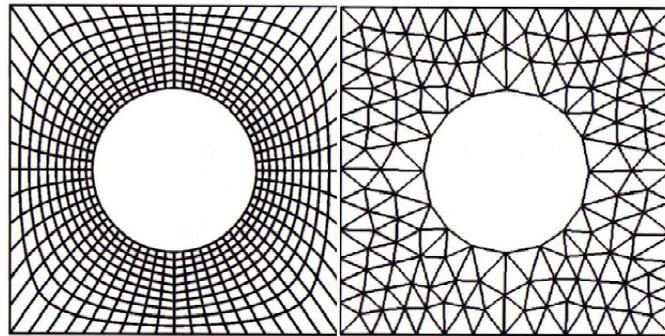


Figura 21: (a) malha estruturada, (b) malha não estruturada.
Fonte: [13].

Ambos os tipos de malha apresentam vantagens e desvantagens, a escolha dependerá da natureza do problema. As malhas estruturadas permitem fácil ordenação, facilitando a implementação computacional e maior facilidade no desenvolvimento de solvers, uma vez que, em geral, originam uma matriz de coeficientes diagonal. Porém, em função da complexidade dos problemas reais, nem sempre é possível utilizar malhas estruturadas, o que leva à utilização mais frequente de malhas não estruturadas [28].

Estas são mais versáteis e facilmente adaptáveis às geometrias irregulares dos reservatórios. Entretanto, sua utilização dificulta a ordenação dos elementos e, conseqüentemente, originará matrizes não diagonais, dificultando a resolução dos sistemas [23]. Os simuladores de reservatório podem ser classificados em função:

- **Do número de dimensões:** modelo tanque, unidimensional, bidimensional ou tridimensional. A Fig. 22 ilustra os modelos unidimensi-

onais, bidimensionais e tridimensionais, cartesianos, e suas diferenças.

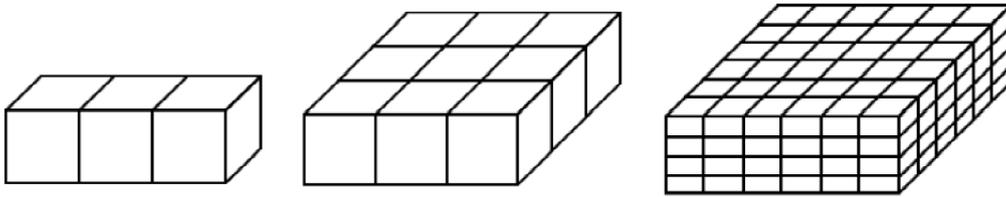


Figura 22: Modelo unidimensional, bidimensional e tridimensional, ambos cartesianos.

Fonte: [37] Adaptado.

- **Do sistema de coordenadas usado no modelo:** cartesianas, cilíndricas ou esféricas. A Fig. 23 ilustra os modelos tridimensionais cartesianos, cilíndricos e esféricos.

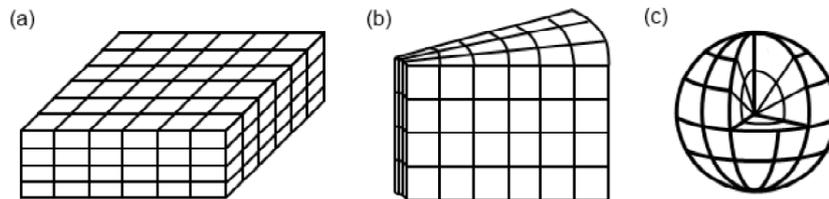


Figura 23: Modelos 3D cartesianos, cilíndricos e esféricos.

Fonte: [37].

- **Do número de fases do sistema:** monofásico (apenas a presença de óleo no sistema), bifásico (óleo e água, gás e água ou óleo e gás) e trifásico (óleo, gás e água).
- **Do tratamento matemático:** modelo *Black Oil*, composicional ou térmico.

O código desenvolvido neste trabalho utiliza um modelo bidimensional, em coordenadas cartesianas, e resolve problemas monofásicos (apenas óleo) e bifásicos (reservatório de óleo com injeção de água) através do modelo *Black Oil*.

3.1 Abordagem monofásica

3.1.1 Modelo físico

Para o fluxo monofásico, em que há apenas óleo escoando no reservatório, o modelo físico aproxima o reservatório como um paralelogramo e as propriedades como porosidade, permeabilidade e compressibilidade são constantes em todo o reservatório. Apenas a pressão varia ao longo do reservatório. A vazão de produção permanece constante durante todo o tempo de produção.

Há apenas um poço produtor no reservatório e o mesmo pode estar posicionado em qualquer ponto do plano $x - y$. O fluxo no reservatório é bidimensional, em x e y . A Fig. 24 representa o modelo para o escoamento monofásico tratado neste trabalho. Nesta Figura, h é altura que o topo do reservatório se encontra da superfície, Lx é o comprimento do reservatório, Ly a largura do reservatório e Lz a espessura do reservatório.

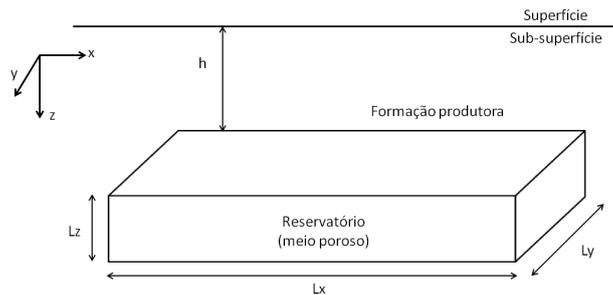


Figura 24: Modelo físico do reservatório.

3.1.2 Formulação Matemática: Equação da difusividade

Para simular o escoamento de fluidos em um reservatório deve ser possível modelar matematicamente o problema através de equações que considerem não somente as propriedades da rocha e do reservatório, mas também as características do fluido a ser escoado. O modelo matemático representa este comportamento através de relações matemáticas.

A equação que representa o problema é conhecida como equação da difusividade hidráulica e deve ser discretizada de acordo com o sistema de coordenadas que melhor represente a geometria do reservatório. Esta equação governa o modelo *Black oil*, e é obtida da Equação da continuidade, da Equação de Darcy e Equação de estado. No modelo matemático é feita a formulação da equação governante do fluxo em meios porosos considerando o escoamento de um único fluido, bidimensional em coordenadas cartesianas, moderadamente compressível, regime transiente e reservatório horizontal.

Algumas hipóteses simplificadoras são consideradas para a formulação da equação da difusividade hidráulica. O fluxo é horizontal, isotérmico e com pequenos gradientes de pressão. O meio poroso é homogêneo e isotrópico, ou seja, as propriedades físicas do meio em qualquer ponto dentro do bloco são as mesmas. Na rocha reservatório a permeabilidade absoluta é constante e a compressibilidade deve ser pequena, da ordem de 10^{-6} psi^{-1} , e constante. Outra consideração é que o fluido e a rocha não interagem entre si. Além disso, o poço produtor penetra totalmente a formação e as forças gravitacionais são desprezíveis.

Para a derivação da equação, o volume de controle é um elemento do volume poroso através do qual está ocorrendo o fluxo em duas direções, tal como representado pela Fig. 25.

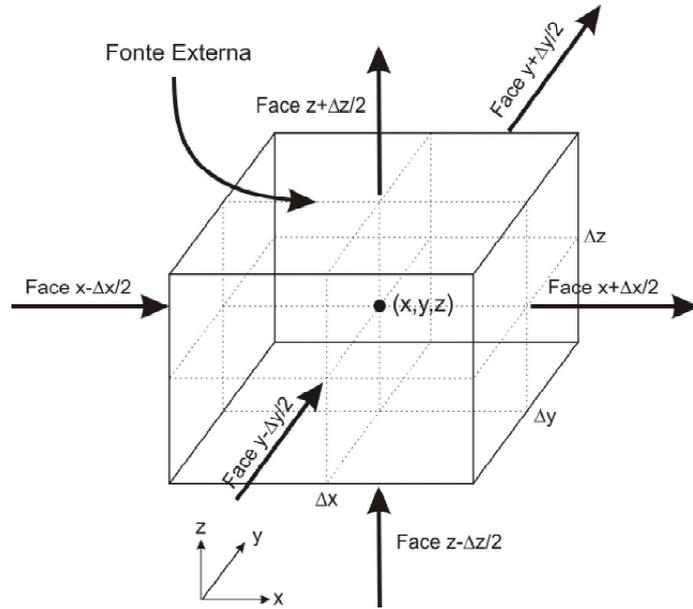


Figura 25: Volume de controle em coordenadas cartesianas.
Fonte: [25].

Primeiramente tratada-se a equação para o fluxo nas três direções para em seguida adequar as equações para o fluxo apenas nas direções x e y , de acordo com o volume de controle na Fig. 25. Para isso, como mencionado, são utilizados três princípios básicos: princípio da conservação de massa, equação de estado e equação constitutiva [25].

O princípio da conservação de massa expresso pela equação da continuidade pode ser desenvolvido aplicando a equação de balanço de massa sobre um volume de controle através do qual um fluido está escoando. De acordo com o volume de controle da Fig. 25, a equação de balanço de massa pode ser escrita para um fluido escoando nas direções x , y e z . Na face do volume de controle $(x - \Delta x/2)$, a taxa de fluxo e a densidade do fluido são $(q_{x-\Delta x/2})$ e $(\rho_{x-\Delta x/2})$ respectivamente. Da mesma forma, na face $(y - \Delta y/2)$ as taxas de fluxo e densidades são $(q_{y-\Delta y/2})$ e $(\rho_{y-\Delta y/2})$, e na face $(z - \Delta z/2)$ as taxas de fluxo e densidades são $(q_{z-\Delta z/2})$ e $(\rho_{z-\Delta z/2})$. O mesmo ocorre para as outras três faces opostas a estas. A equação de balanço de massa pode ser escrita, portanto, na forma:

$$(m_i - m_o) + m_s = m_a \quad (10)$$

em que m_s representa a massa que entra ou sai do volume através de uma fonte externa a uma vazão mássica w_s , m_i representa a entrada de massa pelas faces do volume de controle, m_o representa saída de massa pelas faces do volume de controle e m_a a massa acumulada no interior do volume de controle. Com essas definições é possível escrever a equação de balanço de massa em um período definido de tempo Δt , como:

$$\begin{aligned} & [w_{x-\Delta x/2}\Delta t + w_{y-\Delta y/2}\Delta t + w_{z-\Delta z/2}\Delta t] \\ & - [w_{x+\Delta x/2}\Delta t + w_{y+\Delta y/2}\Delta t + w_{z+\Delta z/2}\Delta t] \\ & + q_m\Delta t = \phi\Delta x\Delta y\Delta z\rho \end{aligned} \quad (11)$$

A vazão mássica para cada uma das direções de fluxo é representada pelo produto da massa específica do fluido e sua vazão volumétrica q . A vazão volumétrica por sua vez pode ser representada pelo produto da velocidade superficial u pela área A perpendicular ao fluxo nas direções dos eixos coordenados.

$$w_x = \alpha_c\rho u_x A_x \quad (12)$$

$$w_y = \alpha_c\rho u_y A_y \quad (13)$$

$$w_z = \alpha_c\rho u_z A_z \quad (14)$$

em que α é um fator de conversão de unidades. Com essa definição para w_x , w_y e w_z , substituindo na Eq. 10, dividindo por $(\Delta t\alpha_c)$ encontra-se

$$\begin{aligned} & -[(\rho u_x A_x)_{x+\Delta x/2} - (\rho u_x A_x)_{x-\Delta x/2} + (\rho u_y A_y)_{y+\Delta y/2} \\ & - (\rho u_y A_y)_{y-\Delta y/2} + (\rho u_z A_z)_{z+\Delta z/2} - (\rho u_z A_z)_{z-\Delta z/2}] \\ & + \frac{q_m}{\alpha_c} = \frac{(\phi\Delta x\Delta y\Delta z\rho)_{t+\Delta t} - (\phi\Delta x\Delta y\Delta z\rho)_t}{\Delta t\alpha_c} \end{aligned} \quad (15)$$

Dividindo a Eq. 15 por $\Delta x\Delta y\Delta z$ e definindo $V_b = \Delta x\Delta y\Delta z$ como o volume do elemento de controle:

$$\begin{aligned}
& -\left[\frac{(\rho u_x)_{x+\Delta x/2} - (\rho u_x)_{x-\Delta x/2}}{\Delta x}\right] - \left[\frac{(\rho u_y)_{x+\Delta y/2} - (\rho u_y)_{y-\Delta y/2}}{\Delta y}\right] \\
& -\left[\frac{(\rho u_z)_{z+\Delta z/2} - (\rho u_z)_{z-\Delta z/2}}{\Delta z}\right] + \frac{q_m}{\alpha_c V_b} = \frac{(\phi\rho)_{t+\Delta t} - (\phi\rho)_t}{\Delta t \alpha_c} \quad (16)
\end{aligned}$$

Para Δx , Δy , Δz e Δt muito pequenos tem-se o conceito de derivada parcial de primeira ordem no espaço e no tempo para a Eq. 16, resultando na denominada equação da continuidade:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x A_x)\Delta x - \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y A_y)\Delta y - \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z A_z)\Delta z + \frac{q_m}{\alpha_c} = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t}(\phi\rho) \quad (17)$$

A equação constitutiva é dada pela equação de Darcy que relaciona a velocidade de um fluido com o gradiente de fluxos de entrada e saída das faces do volume de controle [16]. Para o escoamento unidimensional, a lei de Darcy na forma diferencial para a direção x é representada por:

$$\frac{q}{A_x} = u_x = -\beta_c \frac{k_x}{\mu} \frac{d\Phi}{dx} \quad (18)$$

em que k_x é a permeabilidade na direção x , μ é a viscosidade do fluido e Φ é o potencial do fluido. Para as direções y e z tem-se:

$$\frac{q}{A_y} = u_y = -\beta_c \frac{k_y}{\mu} \frac{d\Phi}{dy} \quad (19)$$

e

$$\frac{q}{A_z} = u_z = -\beta_c \frac{k_z}{\mu} \frac{d\Phi}{dz} \quad (20)$$

O potencial do fluido Φ é definido como sendo a pressão deste fluido em um determinado ponto corrigida para um referencial arbitrário. Matematicamente, tem a seguinte forma:

$$\Phi = p - \phi g Z \quad (21)$$

em que Z é a distancia vertical em relação ao referencial arbitrário. O gradiente do potencial obtido pela diferenciação da equação anterior é:

$$\nabla \Phi = \nabla p - \phi g \nabla z \quad (22)$$

É conveniente associar as equações de Darcy à equação da continuidade, associando a expressão a valores efetivamente medidos no reservatório [25]. Da substituição das equações de Darcy e da definição de gradiente de potencial na Eq. 22 tem-se uma nova forma para a equação da continuidade em:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \beta_x \frac{k_x A_x}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} \frac{dZ}{dx} \right) \Delta x \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \beta_y \frac{k_y A_y}{\mu} \left(\frac{dp}{dy} \frac{dZ}{dy} \right) \Delta y \right) \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho \beta_z \frac{k_z A_z}{\mu} \left(\frac{dp}{dz} \frac{dZ}{dz} \right) \Delta z \right) + \frac{q_m}{\alpha_c} = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho) \end{aligned} \quad (23)$$

A equação de estado relaciona a massa específica de um fluido com a pressão e a temperatura. Uma simples forma de expressar essa relação é através do fator volume formação do fluido, B , expresso por:

$$B = \frac{\rho_{sc}}{\rho} \quad (24)$$

em que ρ_{sc} é a massa específica do fluido nas condições de superfície e ρ é a massa específica do fluido nas condições de reservatório. O Fator Volume Formação, B , é a relação entre o volume do fluido nas condições de reservatório e o volume do fluido em condições de superfície.

A Eq. 18 é utilizada para escrever o termo q_m da Eq. 15 em termos volumétricos, sendo:

$$q_m = \alpha_c q_{sc} \rho_{sc} \quad (25)$$

E substituindo na Eq. 15 tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu B} \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \frac{dZ}{dx} \right) \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu B} \left(\frac{dp}{dy} - \rho g \frac{dZ}{dy} \right) \right) \Delta y \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\beta_c \frac{k_z A_z}{\mu B} \left(\frac{dp}{dz} - \rho g \frac{dZ}{dz} \right) \right) \Delta z + q_{sc} = \frac{V_b}{\alpha_c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

que é a equação na forma geral para fluxo monofásico. Essa equação não faz menção ao tipo de fluido (incompressível, moderadamente compressível, compressível) ou dependência das propriedades do fluido ou da rocha com a pressão. Portanto ela é válida para fluxo monofásico de água, óleo ou gás. Neste trabalho, os fluidos que escoam no reservatório são o óleo, para fluxo monofásico, e óleo e água, para fluxo bifásico. A equação da difusividade hidráulica neste trabalho será obtida para o óleo e para a água, apenas.

Reorganizando a Eq. 26, incluindo o conceito de saturação, aplicando a condição de que as forças gravitacionais são desprezíveis e considerando o fluxo em x e y apenas, obtém-se a equação para o escoamento monofásico em coordenadas cartesianas para o óleo e para a água, que apresenta a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c A_x \frac{k_x}{\mu_o B_o} \left(\frac{dp_o}{dx} \right) \right] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left[\beta_c A_y \frac{k_y}{\mu_o B_o} \left(\frac{dp_o}{dy} \right) \right] \Delta y = \\ \frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_o}{B_o} \right) - q_{osc} \end{aligned} \quad (27)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c A_x \frac{k_x}{\mu_w B_w} \left(\frac{dp_w}{dx} \right) \right] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left[\beta_c A_y \frac{k_y}{\mu_w B_w} \left(\frac{dp_w}{dy} \right) \right] \Delta y = \\ \frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) - q_{wsc} \end{aligned} \quad (28)$$

Sabendo que a saturação do óleo e da água podem ser escritos como:

$$S_o + S_w = 1 \quad (29)$$

ou ainda:

$$S_o = 1 - S_w \quad (30)$$

Para a formulação da equação da difusividade hidráulica para o fluxo monofásico de óleo, especificamente, será utilizada a Eq. 27 e algumas considerações feitas a seguir. Utilizando a equação geral da compressibilidade e a definição de compressibilidade efetiva da formação definidas na Eq. 6 e na Eq. 7, respectivamente, por:

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p}$$

$$c_f = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p}$$

É possível obter as expressões

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{c\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (31)$$

e

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = c_f \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (32)$$

Como há apenas óleo escoando (fluxo monofásico), é possível dizer que $S_o = 1$. Considerando constantes o fator volume formação do óleo B_o , a viscosidade do óleo (μ_o), e a compressibilidade (c), obtemos a equação da difusividade hidráulica para o escoamento monofásico de óleo:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\beta A_x \frac{k_x}{\mu_o B_o} (\frac{dp_o}{dx})] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} [\beta A_y \frac{k_y}{\mu_o B_o} (\frac{dp_o}{dy})] \Delta y = \frac{V_b \phi c}{\alpha B} \frac{\partial p}{\partial t} - q_o \quad (33)$$

A Eq. 33 será vista a adiante na equação discretizada para o fluxo monofásico de óleo utilizada no código. O processo de resolução da equação governante consiste em uma sequência de cálculos no tempo a partir de um instante inicial. Portanto, as propriedades do reservatório devem ser conhecidas em todo o domínio nesse instante inicial. Inicialmente o reservatório encontra-se submetido a uma pressão estática média constante em toda sua extensão. Como não existe capa de gás nem influxo de água oriunda de aquíferos adjacentes, os contatos entre fluidos são definidos fora dos limites do reservatório para que não haja interferência das zonas de transição.

No problema abordado, é assumido que não há fluxo nas fronteiras externas do reservatório. Isto diz respeito à condição de contorno do tipo Neumann, que pode ser matematicamente representada por $\partial p / \partial n = 0$, em que n representa a direção normal à fronteira do reservatório. Esta condição implica que a variação da pressão nas fronteiras da malha é especificada e nula. Em termos das equações discretizadas, esta condição pode ser implementada especificando-se transmissibilidades nulas nas faces externas das células situadas nos limites externos do reservatório. Esse último passo será feito juntamente com a discretização das equações governantes.

Nos pontos internos do domínio, o fluxo ocorre normalmente em regime transiente. Ao contrário das fronteiras, as transmissibilidades nos pontos internos são positivas e determinadas de acordo com as propriedades da rocha e do fluido. O reservatório inicialmente está totalmente saturado com óleo.

Neste trabalho, as aproximações da equação da difusividade hidráulica para o fluxo monofásico foram feitas utilizando o Método de Diferenças Finitas para as formulações Explícita e Implícita. A sequência da discretização da equação do escoamento monofásico de óleo, Eq. 33, é apresentada a seguir. A Fig. 26 faz referência ao modelo de fluxo bidimensional que será utilizado na discretização das equações.

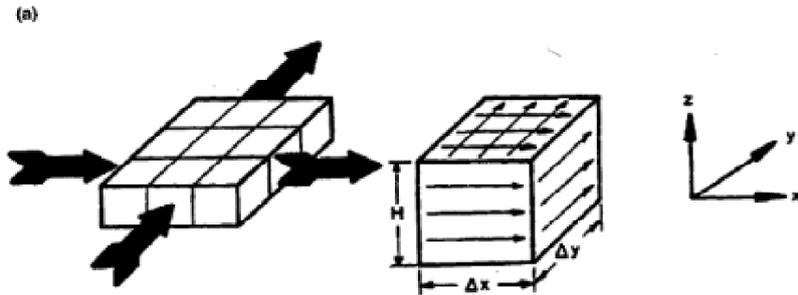


Figura 26: Esquema mostrando o modelo de fluxo bidimensional.
 Fonte: [16].

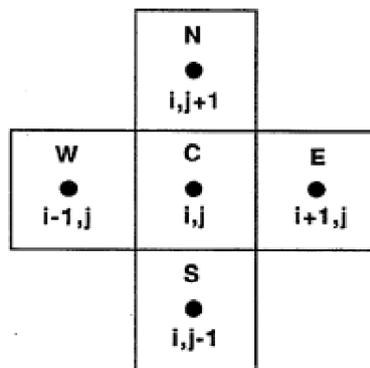


Figura 27: Nó central e adjacentes ao elemento principal bidimensional.
 Fonte: [16].

A Fig. 27 representa um elemento genérico 2D cujo nó central C é rodeado por quatro nós vizinhos, dois referentes à posição ao longo da coordenada horizontal x , que são o nó leste E e o nó oeste W , e dois referentes à posição ao longo da coordenada vertical y , que são o nó norte N e o nó sul S . A face leste é identificada por $(i + 1/2, j)$, a face oeste por $(i - 1/2, j)$. A face norte é identificada por $(i, j + 1/2)$, a face oeste por $(i, j - 1/2)$. Essa representação é mais facilmente compreendida com a Fig. 28.

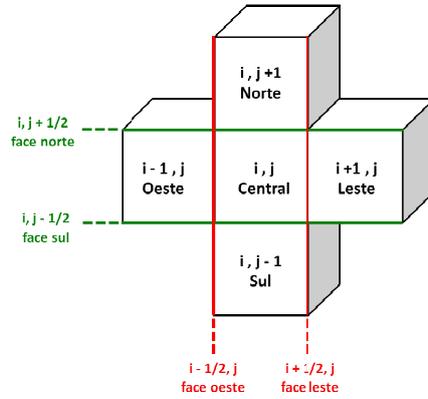


Figura 28: Nó central e adjacentes ao elemento principal bidimensional e suas faces.

A fim de comparar o modelo a ser resolvido neste trabalho com outros modelos mais e menos complexos, a partir da Fig. 29 é possível observar a evolução do grau de complexidade na notação dos nós e das faces à medida que o fluxo a ser analisado de unidimensional para bidimensional, como é o caso do problema estudado neste trabalho, e para tridimensional.

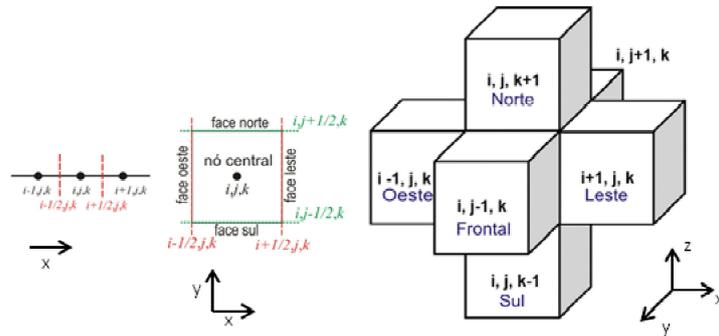


Figura 29: Visualização 1D, 2D e 3D do elemento principal e seus seis vizinhos.

As derivadas de segunda ordem do lado esquerdo da Eq. 33 são reescritas através do uso da aproximação central e utilizando a notação da Fig. 29. Desta forma, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x}] \Delta x \approx \frac{1}{\Delta x_i} [(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x})_{i+\frac{1}{2},j} - (\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial x})_{i-\frac{1}{2},j}] \Delta x \quad (34)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y} [\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial y}] \Delta y \approx \frac{1}{\Delta y_j} [(\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial y})_{i,j+\frac{1}{2}} - (\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu B} \frac{\partial p}{\partial y})_{i,j-\frac{1}{2}}] \Delta y \quad (35)$$

Substituindo as relações anteriores na Eq. 33 e reorganizando os termos, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x_i} [(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu B})_{i+\frac{1}{2},j} (\frac{\partial p}{\partial x})_{i+\frac{1}{2},j} - (\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu B})_{i-\frac{1}{2},j} (\frac{\partial p}{\partial x})_{i-\frac{1}{2},j}] \Delta x \\ & + \frac{1}{\Delta y_j} [(\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu B})_{i,j+\frac{1}{2}} (\frac{\partial p}{\partial x})_{i,j+\frac{1}{2}} - (\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu B})_{i,j-\frac{1}{2}} (\frac{\partial p}{\partial x})_{i,j-\frac{1}{2}}] \Delta y \\ & = \frac{V_b \text{ phic}}{\alpha B} \frac{\partial p}{\partial t} - q_{i,j} \end{aligned} \quad (36)$$

As derivadas espaciais de primeira ordem da Eq. 36, $\partial p/\partial x$ e $\partial p/\partial y$, definidas nas faces, são discretizadas pelas aproximações centrais seguintes:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{x_{i+1,j} - x_{i,j}} = \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} \quad (37)$$

e

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j} = \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{x_{i,j} - x_{i-1,j}} = \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} \quad (38)$$

e

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{y_{i,j+1} - y_{i,j}} = \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} \quad (39)$$

e

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} = \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{y_{i,j} - y_{i,j-1}} = \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}} \quad (40)$$

Reescrevendo a Eq. 36:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x_i} \left[\left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu B}\right)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} - \left(\beta_c \frac{k_x A_x}{\mu B}\right)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} \right] \Delta x \\ & + \frac{1}{\Delta y_j} \left[\left(\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu B}\right)_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} - \left(\beta_c \frac{k_y A_y}{\mu B}\right)_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] \Delta y \quad (41) \\ & = \frac{V_b \phi c}{\alpha B} \frac{\partial p}{\partial t} - q_{i,j} \end{aligned}$$

A derivada temporal do lado direito da Eq. 36 precisa também ser discretizada. A discretização temporal será feita pelas formulações explícita e implícita, apresentadas a seguir.

3.1.3 Formulação Explícita

Na formulação explícita, a variável a ser determinada no instante de tempo $(n + 1)$ é calculada de valores conhecidos associados com o tempo n . Portanto, pode-se dizer que:

$$\frac{V_b \phi c}{\alpha B} \frac{\partial p}{\partial t} \approx \frac{V_b \phi c}{\alpha B} \frac{1}{\Delta t} [p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n] \quad (42)$$

Aplicando a formulação explícita da discretização temporal, Eq. 42, à Eq. 41 tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x_i} \left[\left(\beta \frac{k_x A_x}{\mu B}\right)_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} \right] - \left(\beta \frac{k_x A_x}{\mu B}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^n \frac{p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} \Delta x \quad (43) \\ & + \frac{1}{\Delta y_j} \left[\left(\beta \frac{k_y A_y}{\mu B}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2},j}} \right] - \left(\beta \frac{k_y A_y}{\mu B}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2},j}} \Delta y \end{aligned}$$

$$= \frac{V_b \phi c}{\alpha B} \frac{1}{\Delta t} [p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n] - q_{i,j}$$

Considerando as permeabilidades em x e y constantes e iguais, é possível definir:

$$k_x = k_y = k \quad (44)$$

Assumindo a consideração da Eq. 44, simplificando os termos Δx_i e Δy_j , organizando os denominadores das derivadas da pressão $\Delta x_{i\pm\frac{1}{2}}$, $\Delta y_{i,j\pm\frac{1}{2}}$, define-se fisicamente as transmissibilidades T nas quatro faces (leste, oeste, norte e sul) da Fig. 28, segundo equações:

$$T_{i+\frac{1}{2},j}^n = \left(\beta \frac{k A_x}{\mu B \Delta x} \right)_{i+\frac{1}{2},j}^n \quad (45)$$

$$T_{i-\frac{1}{2},j}^n = \left(\beta \frac{k A_x}{\mu B \Delta x} \right)_{i-\frac{1}{2},j}^n \quad (46)$$

$$T_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \left(\beta \frac{k A_y}{\mu B \Delta y} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}^n \quad (47)$$

$$T_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \left(\beta \frac{k A_y}{\mu B \Delta y} \right)_{i,j-\frac{1}{2}}^n \quad (48)$$

Alguns componentes das transmissibilidades, Eq. 45 à Eq. 48, são dependentes da pressão e, portanto, das incógnitas da equação. Para facilitar o cálculo numérico assume-se que estas serão calculadas explicitamente no tempo de referência anterior conhecido n . Se as transmissibilidades fossem especificadas para $(n + 1)$, a equação resultante seria não linear e necessitaria de técnicas adicionais de conversão para que pudessem ser resolvidas por um procedimento de solução de equações lineares [25]. Desta forma, a Eq. 43 resulta em:

$$\begin{aligned}
& [T_{i+\frac{1}{2},j}^n(p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) - T_{i-\frac{1}{2},j}^n(p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n)] \\
& + [T_{i,j+\frac{1}{2}}^n(p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) - T_{i,j-\frac{1}{2}}^n(p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n)] \\
& = \frac{V_b\phi c}{\alpha B} \frac{1}{\Delta t} [p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n] - q_{i,j}
\end{aligned} \tag{49}$$

Baseada na Fig. 29, pode-se utilizar a notação:

$$E_{i,j} = T_{i+\frac{1}{2},j}^n \tag{50}$$

$$W_{i,j} = T_{i-\frac{1}{2},j}^n \tag{51}$$

$$N_{i,j} = T_{i,j+\frac{1}{2}}^n \tag{52}$$

$$S_{i,j} = T_{i,j-\frac{1}{2}}^n \tag{53}$$

Com a intenção de reescrever a Eq. 49 em função dos coeficientes leste, oeste, norte e sul, utilizando a notação das Eq. 50 à Eq. 53, e isolando ainda o termo de interesse substituindo $p_{i,j}^{n+1}$, tem-se a equação simplificada abaixo:

$$\begin{aligned}
p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + \frac{\alpha B \Delta t}{V_b \phi c} [E_{i,j}(p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) - W_{i,j}(p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n)] \\
+ [N_{i,j}(p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) - S_{i,j}(p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n)] - \frac{\alpha B \Delta t}{V_b \phi c} q_{i,j}
\end{aligned} \tag{54}$$

Nesta equação todas as pressões no tempo n são conhecidas, visto que foram estipuladas as pressões iniciais em cada bloco. Da mesma forma as transmissibilidades também podem ser calculadas utilizando as propriedades do reservatório, que são parâmetros de entrada e assumidos como sendo conhecidos. Assim, a Eq. 54 é facilmente resolvida já que a pressão de interesse é a única incógnita da equação. Este é o procedimento explícito para a solução das equações discretizadas.

3.1.4 Formulação Implícita

Na formulação implícita, para determinar a variável no instante de tempo $(n + 1)$, nem todos os valores associados ao tempo n são conhecidos. Nesta formulação, a solução da equação para o tempo $(n + 1)$ é obtida a partir de um sistema linear, como será visto a seguir. Usando a aproximação da Eq. 42 e aplicando a formulação implícita da discretização temporal à Eq. 41 tem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x_i} \left[\left(\beta \frac{k_x A_x}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2},j}^n \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} - \left(\beta \frac{k_x A_x}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2},j}^n \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} \right] \Delta x \\
& + \frac{1}{\Delta y_j} \left[\left(\beta \frac{k_y A_y}{\mu B} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} - \left(\beta \frac{k_y A_y}{\mu B} \right)_{i,j-\frac{1}{2}}^n \frac{p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}} \right] \Delta y \\
& = \frac{V_b \phi c}{\alpha B} \frac{1}{\Delta t} [p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n] - q_{i,j}
\end{aligned} \tag{55}$$

Fazendo a consideração da Eq. 44, simplificando os termos Δx_i e Δy_j , organizando os denominadores das derivadas da pressão $\Delta x_{i\pm\frac{1}{2},j}$, $\Delta y_{i,j\pm\frac{1}{2}}$, e utilizando a notação das transmissibilidades, Eq. 45 a Eq. 48 é possível escrever:

$$\begin{aligned}
& [T_{i+\frac{1}{2},j}^n (p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) - T_{i-\frac{1}{2},j}^n (p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1})] \\
& + [T_{i,j+\frac{1}{2}}^n (p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) - T_{i,j-\frac{1}{2}}^n (p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1})] \\
& = \frac{V_b \phi c}{\alpha B} \frac{1}{\Delta t} [p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n] - q_{i,j}
\end{aligned} \tag{56}$$

Assim como na formulação explícita, as transmissibilidades foram especificadas no tempo de referência n , devido ao fato de alguns componentes da transmissibilidade serem dependentes da pressão e, portanto, das incógnitas da equação. Utilizando a notação das Eq. 50 à Eq. 53 para reescrever a Eq. 55 em função dos coeficientes leste, oeste, norte e sul, tem-se a equação simplificada abaixo:

$$[E_{i,j}(p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) - W_{i,j}(p_{i,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1})] \quad (57)$$

$$+[N_{i,j}(p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j}^{n+1}) - S_{i,j}(p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1})]$$

$$= \frac{V_b \phi c}{\alpha B} \frac{1}{\Delta t} [p_{i,j}^{n+1} - p_{i,j}^n] - q_{i,j}$$

Aplicando a distributiva nos parênteses da Eq. 57 e reorganizando os termos encontra-se:

$$(S_{i,j})p_{i,j-1}^{n+1} + (W_{i,j})p_{i-1,j}^{n+1} + p_{i,j}^{n+1}[-(S_{i,j} + N_{i,j} + W_{i,j} + E_{i,j} + \frac{V_b \phi c}{\alpha B} \frac{1}{\Delta t})] \quad (58)$$

$$+(E_{i,j})p_{i+1,j}^{n+1} + (N_{i,j})p_{i,j+1}^{n+1} = \frac{V_b \phi c}{\alpha B} \frac{1}{\Delta t} [p_{i,j}^n - q_{i,j}]$$

Assumindo que $S_{i,j} + N_{i,j} + W_{i,j} + E_{i,j} = C_{i,j}$, substituimos na Eq. 58 e obtém-se:

$$(S_{i,j})p_{i,j-1}^{n+1} + (W_{i,j})p_{i-1,j}^{n+1} + p_{i,j}^{n+1}[-(C_{i,j} + \frac{V_b \phi c}{\alpha B} \frac{1}{\Delta t})] \quad (59)$$

$$+(E_{i,j})p_{i+1,j}^{n+1} + (N_{i,j})p_{i,j+1}^{n+1} = \frac{V_b \phi c}{\alpha B} \frac{1}{\Delta t} [p_{i,j}^n - q_{i,j}]$$

Na Eq. 59 apenas a pressão no tempo n é conhecida. As transmissibilidades podem ser calculadas utilizando as propriedades do reservatório, que são parâmetros de entrada e assumidos como sendo conhecidos. As pressões no tempo $(n + 1)$ não são conhecidas e a solução da Eq. 59 pode ser obtida por um sistema linear. A representação matricial do sistema de equações a ser resolvido é observada na Fig. 30.

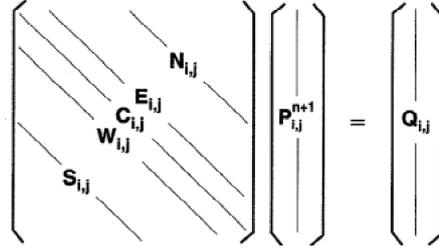


Figura 30: Sistema matricial gerado pelo modelo 2D utilizando a formulação implícita
 Fonte: [16].

Sendo que:

$$Q_{ij} = \frac{V_b \phi c}{\alpha B} \frac{1}{\Delta t} p_{i,j}^n - q_{i,j} \quad (60)$$

O sistema matricial pode ser representado também na forma:

$$M P_{ij}^{n+1} = Q_{ij} \quad (61)$$

ou

$$P_{ij}^{n+1} = M^{-1} Q_{ij} \quad (62)$$

A solução do sistema de equações representado na matriz da Fig. 30 e pela Eq. 62 é resolvido para cada tempo $(n + 1)$, utilizando as transmissibilidades do tempo n anterior e as pressões em cada bloco no tempo n , P_{ij} . Este é o procedimento implícito para a solução da equação discretizada.

3.1.5 Obtenção da solução

Para o fluxo monofásico serão descritos os procedimentos para o método explícito e implícito. O processo da solução foi subdividido em duas etapas: a obtenção de soluções para os pontos internos do domínio e a obtenção da solução para as fronteiras do domínio, ambas detalhadas à seguir.

Pontos internos do domínio

A solução nos pontos internos do domínio, na Fig. 28 representados pelo nó central, é obtida isolando o termo de interesse $p_{i,j}^{n+1}$, na Eq. 49 de forma que a equação possa ser escrita como:

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + \frac{\alpha B \Delta t}{V_b \phi c} [T_{i+\frac{1}{2},j}^n (p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) - T_{i-\frac{1}{2},j}^n (p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n) + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n (p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) - T_{i,j-\frac{1}{2}}^n (p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n)] - \frac{\alpha B \Delta t}{V_b \phi c} q_{i,j} \quad (63)$$

Na Eq. 63 todas as pressões no tempo n são conhecidas, visto que foram estipuladas as pressões iniciais em cada bloco. Da mesma forma, as transmissibilidades também podem ser calculadas utilizando as propriedades do reservatório mediante as Eq. 50 à Eq. 54, que são parâmetros de entrada e assumidos como conhecidos. Assim, a Eq. 63 é facilmente resolvida no algoritmo já que a pressão de interesse é a única incógnita da equação. Para facilitar a implementação define-se:

$$VOL = \frac{\alpha B \Delta t}{V_b \phi c} \quad (64)$$

3.1.6 Fronteiras do domínio

A dificuldade envolvida no processo de implementação de um modelo com fluxo bidimensional está no tratamento das condições de contorno do problema, que envolvem o comportamento do fluxo nas fronteiras da malha. Para o fluxo bidimensional, há quatro bordas a serem tratadas, as faces leste, oeste, norte e sul das extremidades da malha. Haverá, ainda, mais quatro blocos, das quatro extremidades do plano $x - y$, a serem tratados pelas condições de contorno. Uma melhor compreensão do exposto anteriormente pode ser feita através da Fig. 31.

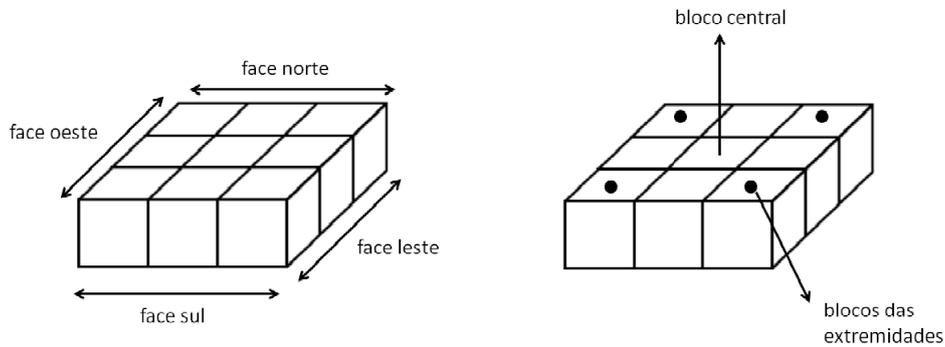


Figura 31: Representação dos elementos a serem considerados no tratamento das bordas.

Como descrito previamente, assume-se que não há fluxo das fronteiras externas do reservatório. A condição de contorno do tipo Neumann implica que a variação da pressão nas fronteiras da malha é especificada e nula, ou seja, $\partial p / \partial n = 0$. Para implementar essa condição de contorno nos pontos que estão nas fronteiras do domínio, ou seja, nos pontos mais extremos do domínio, para obter a solução através da Eq. 63, são especificadas as transmissibilidades nulas nas faces externas das células situadas nos limites externos do reservatório.

Assim, as faces e pontos das extremidades são tratados individualmente, atribuindo valor nulo nas equações à transmissibilidade correspondente a cada uma das fronteiras. Para os elementos da face oeste, que não estão nas pontas das extremidades do domínio, como representado na Fig. 32, a transmissibilidade correspondente à face oeste será nula.

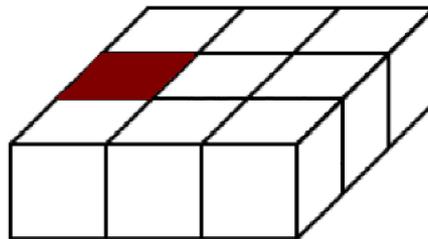


Figura 32: Tratamento dos elementos internos da face oeste.

Ou seja, na Eq. 63, o termo $T_{i-\frac{1}{2},j}^n$ é nulo. Desta forma é possível escrever:

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + VOL[T_{i+\frac{1}{2},j}^n(p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n)] \quad (65)$$

$$+T_{i,j+\frac{1}{2}}^n(p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) - T_{i,j-\frac{1}{2}}^n(p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n) - q_{i,j}]$$

Analogamente, o mesmo procedimento é feito para as faces leste, norte e sul, anulando a transmissibilidade correspondente a cada face. Para a face leste, norte e sul, a Eq. 65 pode ser reescrita, respectivamente, como:

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + VOL[-T_{i-\frac{1}{2},j}^n(p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n) + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n(p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) - T_{i,j-\frac{1}{2}}^n(p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n) - q_{i,j}] \quad (66)$$

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + VOL[T_{i+\frac{1}{2},j}^n(p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n) - T_{i-\frac{1}{2},j}^n(p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n) - T_{i,j-\frac{1}{2}}^n(p_{i,j}^n - p_{i,j-1}^n) - q_{i,j}] \quad (67)$$

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + VOL[T_{i+\frac{1}{2},j}^n(p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) - T_{i-\frac{1}{2},j}^n(p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n) + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n(p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) - q_{i,j}] \quad (68)$$

O mesmo procedimento é feito para os elementos das extremidades de cada face. Para o elemento da extremidade da face oeste e da face sul concomitantemente, representado na Fig. 33, as transmissibilidades correspondentes a cada uma das faces são nulas.

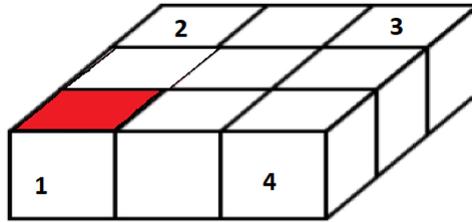


Figura 33: Tratamento do elemento extremo das faces oeste e sul.

Ou seja, na Eq. 63, os termos $T_{i-\frac{1}{2},j}$ e $T_{i,j-\frac{1}{2}}$ e são nulos. Desta forma, a Equação 64 para esse elemento pode ser escrita como:

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + VOL[T_{i+\frac{1}{2},j}^n(p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n(p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) - q_{i,j}] \quad (69)$$

Analogamente, o mesmo procedimento é feito para os elementos 2, 3 e 4 da Fig. 33, anulando as transmissibilidades correspondentes as face em que estão os elementos. Para os elementos 2, 3 e 4 da Fig. 33, a Eq. 63 pode ser reescrita, respectivamente, como

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + VOL[-T_{i-\frac{1}{2},j}^n(p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n) + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n(p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) - q_{i,j}] \quad (70)$$

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + VOL[T_{i+\frac{1}{2},j}^n(p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n(p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) - q_{i,j}] \quad (71)$$

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + VOL[T_{i+\frac{1}{2},j}^n(p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n(p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) - q_{i,j}] \quad (72)$$

3.1.7 Obtenção da solução pelo método Implícito

Para o método implícito, assim como para o método explícito, o processo da solução foi subdividido em duas etapas: a obtenção de soluções para os pontos internos do domínio e a obtenção da solução para as fronteiras do domínio, ambas detalhadas à seguir.

Para todos os pontos do domínio, será utilizada a Eq. 63. A partir desta equação, as fronteiras serão tratadas de acordo com as condições de contorno do problema de forma detalhada a seguir. Como as pressões da Eq. 63 no tempo de referência $(n + 1)$ são desconhecidas, para cada ponto da malha será obtida uma equação e o conjunto das equações para cada ponto comporá um sistema linear representado matricialmente pela Fig. 30. A solução para cada passo de tempo será obtida pela solução do sistema, dada pela Eq. 63.

3.1.8 Pontos internos do domínio

Para os pontos internos do domínio, a equação obtida será idêntica à Eq. 63, já que, como não há bordas a serem tratadas nos pontos internos, todas as transmissibilidades nas faces são não nulas. Assim, para os pontos internos do domínio, a solução pode ser obtida com:

$$p_{i,j}^{n+1} = p_{i,j}^n + VOL[T_{i+\frac{1}{2},j}^n(p_{i+1,j}^n - p_{i,j}^n) + T_{i,j+\frac{1}{2}}^n(p_{i,j+1}^n - p_{i,j}^n) - q_{i,j}] \quad (73)$$

Para facilitar a implementação define-se:

$$\frac{1}{VOL} = \frac{V_b \phi c}{\alpha B \Delta t} \quad (74)$$

3.1.9 Fronteiras do domínio

A mesma dificuldade encontrada no método explícito em relação ao tratamento das condições de contorno é também encontrada no método implícito. No método implícito, serão tratadas as mesmas bordas da Fig. 31 pela condição de contorno: quatro bordas, faces leste, oeste, norte e sul; e quatro blocos das quatro extremidades do plano $x - y$. Assume-se que não há fluxo das fronteiras externas do reservatório, pela condição de contorno do tipo Neumann, pois a variação da pressão nas fronteiras da malha é especificada e nula.

São especificadas as transmissibilidades nulas nas faces externas das células situadas nos limites externos do reservatório. Assim, as faces e pontos das extremidades são tratados individualmente, atribuindo valor nulo nas equações à transmissibilidade correspondente a cada uma das fronteiras. Para os elementos da face oeste, que não estão nas pontas das extremidades do domínio, como representado na Fig. 33, a transmissibilidade correspondente à face oeste será nula. Ou seja, na Eq. 59, o termo $W_{i,j}$ é nulo. Desta forma, ela pode ser escrita como:

$$(S_{i,j})p_{i,j-1}^{n+1} + p_{i,j}^{n+1}[-C_{i,j} - W_{i,j} + \frac{1}{VOL}] + (E_{i,j})p_{i+1,j}^{n+1} + (N_{i,j})p_{i,j+1}^{n+1} = \frac{1}{VOL}p_{i,j}^n - q_{i,j} \quad (75)$$

Analogamente, o mesmo procedimento é feito para as faces leste, norte e sul, anulando a transmissibilidade correspondente a cada face. Para a face leste, norte e sul, a Eq. 59 pode ser reescrita, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} (S_{i,j})p_{i,j-1}^{n+1} + (W_{i,j})p_{i-1,j}^{n+1} + p_{i,j}^{n+1}[-C_{i,j} - E_{i,j} + \frac{1}{VOL}] \\ + (N_{i,j})p_{i,j+1}^{n+1} = \frac{1}{VOL}p_{i,j}^n - q_{i,j} \end{aligned} \quad (76)$$

$$\begin{aligned} (S_{i,j})p_{i,j-1}^{n+1} + (W_{i,j})p_{i-1,j}^{n+1} + p_{i,j}^{n+1}[-C_{i,j} - N_{i,j} + \frac{1}{VOL}] \\ + (E_{i,j})p_{i,j+1}^{n+1} = \frac{1}{VOL}p_{i,j}^n - q_{i,j} \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} (W_{i,j})p_{i,j-1}^{n+1} + p_{i,j}^{n+1}[-C_{i,j} - S_{i,j} + \frac{1}{VOL}] + (E_{i,j})p_{i+1,j}^{n+1} \\ + (N_{i,j})p_{i,j+1}^{n+1} = \frac{1}{VOL}p_{i,j}^n - q_{i,j} \end{aligned} \quad (78)$$

O mesmo procedimento é feito para os elementos das extremidades de cada face. Para o elemento da extremidade da face oeste e da face sul concomitantemente, representado na Fig. 33, as transmissibilidades correspondentes a cada uma das faces são nulas. Ou seja, na Eq. 63, os termos $T_{i-\frac{1}{2},j}^n$ e $T_{i,j-\frac{1}{2}}^n$ são nulos. Desta forma, ela pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{n+1}[-C_{i,j} - W_{i,j} - S_{i,j} + \frac{1}{VOL}] + (E_{i,j})p_{i+1,j}^{n+1} + (N_{i,j})p_{i,j+1}^{n+1} \\ = \frac{1}{VOL}p_{i,j}^n - q_{i,j} \end{aligned} \quad (79)$$

Analogamente, o mesmo procedimento é feito para os elementos 2, 3 e 4 da Fig. 30, anulando as transmissibilidades correspondentes as face em que estão os elementos. Para os elementos 2, 3 e 4 da Fig. 33, a Eq. 59 pode ser reescrita, respectivamente, como:

$$(S_{i,j})p_{i,j-1}^{n+1} + p_{i,j}^{n+1}[-C_{i,j} - W_{i,j} - N_{i,j} + \frac{1}{VOL}] + (E_{i,j})p_{i+1,j}^{n+1} \quad (80)$$

$$= \frac{1}{VOL} p_{i,j}^n - q_{i,j}$$

e

$$(S_{i,j})p_{i,j-1}^{n+1} + (W_{i,j})p_{i-1,j}^{n+1} + p_{i,j}^{n+1}[-C_{i,j} - E_{i,j} - N_{i,j} + \frac{1}{VOL}] \quad (81)$$

$$= \frac{1}{VOL} p_{i,j}^n - q_{i,j}$$

e

$$(W_{i,j})p_{i-1,j}^{n+1} + p_{i,j}^{n+1}[-C_{i,j} - E_{i,j} - S_{i,j} + \frac{1}{VOL}] + (N_{i,j}p_{i,j+1}^{n+1}) = \quad (82)$$

$$\frac{1}{VOL} p_{i,j}^n - q_{i,j}$$

A solução é obtida do sistema de equações representado matricialmente pela Fig. 30. Para cada passo de tempo, o sistema será composto pelas equações para cada ponto do reservatório. Na implementação das equações obtidas anteriormente no simulador, foi utilizada a ordem representada na Fig. 34, em um esquema hipotético de um reservatório dividido em 9 blocos, 3 em x e 3 em y .

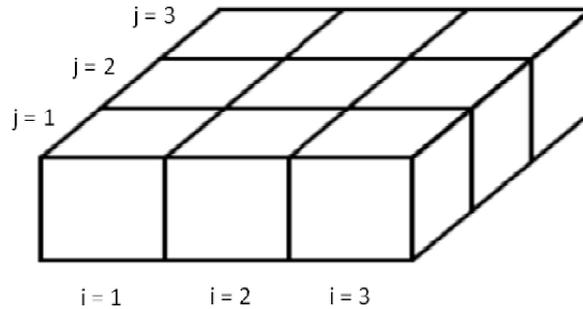


Figura 34: Ordem de implementação do método implícito.

3.2 Abordagem bifásica

3.2.1 Modelo físico

Para o fluxo bifásico, e de forma similar ao estudo monofásico, o modelo físico aproxima o reservatório como um paralelogramo. O fluxo no reservatório é bidimensional, nas coordenadas cartesianas x e y . O modelo para o escoamento bifásico é idêntico ao mostrado na Fig. 24, para escoamento monofásico. É importante destacar a presença de um poço injetor no modelo bifásico. O arranjo dos poços injetores e produtores apresenta a configuração $1/4$ *five – spot*, onde o óleo é deslocado por água. Neste arranjo de padrão repetido, os poços estão localizados na diagonal do reservatório conforme Fig. 12.

Algumas propriedades neste modelo, ao contrário do modelo monofásico, variam ao longo do reservatório, como a permeabilidade relativa ao óleo e à água, a saturação da água e a pressão no reservatório. As vazões de produção e injeção permanecem constantes durante todo o tempo de produção. Nesse caso, o modelo físico contempla um poço produtor e um poço injetor, tendo estes mais de uma forma possível de posicionamento, observando o arranjo da malha $1/4$ *five – spot*, utilizada neste trabalho.

3.2.2 Formulação matemática

Para a derivação das equações que governam o fluxo bifásico água-óleo são considerados os mesmos princípios físicos e as equações fundamentais, utilizadas na seção anteriormente. Para o fluxo bifásico, porém, o escoamento é considerado incompressível. Assim, as equações governantes para o fluxo bifásico óleo-água são as Eq.27 e Eq.28 repetidas na sequencia para facilitar sua manipulação algébrica.

$$\frac{\partial}{\partial x} [\beta_c A_x \frac{k_x}{\mu_o B_o} (\frac{dp_o}{dx})] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} [\beta_c A_y \frac{k_y}{\mu_o B_o} (\frac{dp_o}{dy})] \Delta y = \frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\phi S_o}{B_o}) - q_{osc}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} [\beta_c A_x \frac{k_x}{\mu_w B_w} (\frac{dp_w}{dx})] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} [\beta_c A_y \frac{k_y}{\mu_w B_w} (\frac{dp_w}{dy})] \Delta y = \frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\phi S_w}{B_w}) - q_{wsc}$$

Como há a presença de dois fluidos escoando no meio poroso, é necessário

considerar o conceito de permeabilidade relativa dos fluidos. Reescrevendo as Equações anteriores em função da definição de permeabilidade relativa, k_{ro} e k_{rw} , tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\beta_c A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} (\frac{dp_o}{dx})] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} [\beta_c A_y \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} (\frac{dp_o}{dy})] \Delta y = \frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\phi S_o}{B_o}) - q_o \quad (83)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x} [\beta_c A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} (\frac{dp_w}{dx})] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} [\beta_c A_y \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} (\frac{dp_w}{dy})] \Delta y = \frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\phi S_w}{B_w}) - q_w \quad (84)$$

O sistema de equações composto pelas Eq. 83 e Eq. 84 tem 2 equações e 4 incógnitas: p_o , p_w , S_o e S_w . Para solucioná-las, será necessário utilizar duas relações, sendo uma delas a relação da Eq. 29 e outra a de pressão capilar para os contatos óleo/água. A pressão capilar é conhecida e obtida de medições em laboratório:

$$p_{cow} = p_o - p_w = f(S_w) \quad (85)$$

Considerando que não há variação da pressão capilar com a posição no reservatório nas duas direções, isto é:

$$\frac{dP_{cow}}{dx} = 0 \quad (86)$$

$$\frac{dP_{cow}}{dy} = 0 \quad (87)$$

O sistema de equações para o fluxo bifásico água-óleo na formulação para a pressão do óleo P_o e a saturação da água S_w pode ser escrito como:

$$\frac{\partial}{\partial x} [\beta_c A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} (\frac{dp_o}{dx})] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} [\beta_c A_y \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} (\frac{dp_o}{dy})] \Delta y \quad (88)$$

$$= \frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\phi(1 - S_w)}{B_o}) - q_o$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\beta_c A_x \frac{k_r w}{\mu_w B_w} (\frac{dp_w}{dx})] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} [\beta_c A_y \frac{k_r w}{\mu_w B_w} (\frac{dp_w}{dy})] \Delta y \\ = \frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\phi S_w}{B_w}) - q_w \end{aligned} \quad (89)$$

A versão discreta destas equações foi apresentada anteriormente. Para a solução das equações para o fluxo bifásico água-óleo foi utilizado o método IMPES (*Implicit Pressure Explicit Saturation*) de solução, a fim de obter os campos de pressão, P_o , e saturação, S_w , com o avanço do tempo de produção.

3.2.3 Condições iniciais de contorno

São necessárias condições iniciais e de contorno para correta descrição do modelo matemático. Entretanto estas informações dependem do problema específico a ser abordado, para problemas que tratam o fluxo bifásico água-óleo, o reservatório inicialmente não está totalmente saturado com óleo, sendo assim a saturação inicial de água é diferente de zero. Como se trata de um processo de injeção de água, as saturações de água e óleo se modificam com o avanço do tempo de produção. Da mesma forma, as permeabilidades relativas, que são dependentes da saturação, também se modificam com o avanço do tempo, sendo atualizadas a cada incremento no tempo.

3.2.4 Método IMPES para fluxo água-óleo

O método IMPES é um dos mais utilizados em simulação de reservatórios. Nesse método, a pressão do óleo, (P_o), é calculada implicitamente e a saturação de água, (S_w), explicitamente, daí a referência ao nome IMPES (*Implicit in Pressure, Explicit in Saturation*) [24].

Para calcular a pressão implicitamente, o método objetiva encontrar uma única equação para a pressão em cada ponto nodal combinando as equações de fluxo para as fases óleo e água. Ao combinar as equações, a componente da saturação do óleo (S_o) das equações é eliminada e a distribuição de pressão do óleo (P_o) pode ser calculada implicitamente para cada passo de tempo.

O segundo passo do método é calcular a saturação da água, S_w , de forma explícita. Para isso, substitui-se a pressão já encontrada implicitamente para o tempo n na equação de fluxo da água ou do óleo e calcula-se a saturação para o tempo n . Esse procedimento é feito para todos os passos de tempo. O funcionamento do método IMPES pode ser melhor compreendido pelo esquema da Fig. 35.

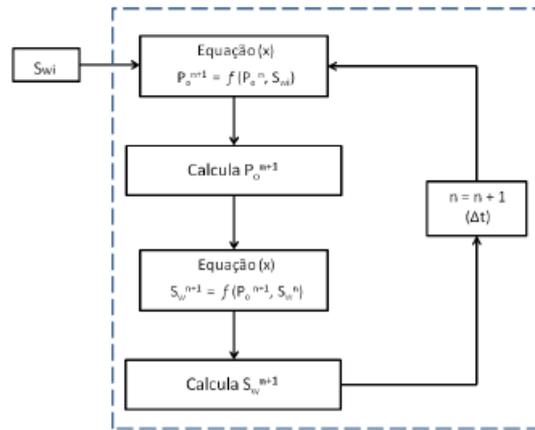


Figura 35: Esquema de funcionamento do IMPES (*Implicit Pressure, Explicit Saturation*).

Para resolver a pressão implicitamente é necessário eliminar a saturação da água, S_w , das Eq. 88 e Eq. 89, resultando em uma única equação. Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c A_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{dp_o}{dx} \right) \right] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left[\beta_c A_y \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} \left(\frac{dp_o}{dy} \right) \right] \Delta y \\
 & + \frac{\partial}{\partial x} \left[\beta_c A_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{dp_w}{dx} \right) \right] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left[\beta_c A_y \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{dp_w}{dy} \right) \right] \Delta y \\
 & = \frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi(1 - S_w)}{B_o} \right) - q_o + \frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) - q_w
 \end{aligned} \tag{90}$$

Reorganizando o lado direito da Eq. 90 e considerando $B_o = B_w = 1$, e a porosidade e os fatores volume formação da água e do óleo constantes em

todo o reservatório não variando com o tempo pode-se dizer que:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} [\beta A_x k_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} (\frac{dp_o}{dx})] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} [\beta A_y k_y \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o} (\frac{dp_o}{dy})] \Delta y \\
& + \frac{\partial}{\partial x} [\beta A_x k_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} (\frac{dp_w}{dx})] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} [\beta A_y k_y \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} (\frac{dp_w}{dy})] \Delta y = \\
& -q_o - q_w
\end{aligned} \tag{91}$$

A versão algébrica da equação da difusividade hidráulica para o fluxo bifásico, assim como para o fluxo monofásico, foram feitas utilizando o Método de Diferenças Finitas.

3.2.5 Discretização da equação para o escoamento óleo-água

Na Eq. 91, escrevendo as derivadas de segunda ordem de acordo com as Eq. 34 e Eq. 35 e as derivadas de primeira ordem de acordo com as Eq. 37 à Eq. 40, obtem-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta x_i} [(\beta A_x k_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o})_{i+\frac{1}{2},j} \frac{p_{oi+1,j} - p_{oi,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} \\
& - (\beta A_x k_x \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o})_{i-\frac{1}{2},j} \frac{p_{oi,j} - p_{oi-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}] \Delta x \\
& + \frac{1}{\Delta y_j} [(\beta A_y k_y \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o})_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{p_{oi,j+1} - p_{oi,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} - (\beta A_y k_y \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o})_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{p_{oi,j} - p_{oi-1,j}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}}] \Delta y \\
& + \frac{1}{\Delta x_i} [(\beta A_x k_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w})_{i+\frac{1}{2},j} \frac{p_{oi+1,j} - p_{oi,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} - (\beta A_x k_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w})_{i-\frac{1}{2},j} \frac{p_{oi,j} - p_{oi-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}}] \Delta x \\
& + \frac{1}{\Delta y_j} [(\beta A_y k_y \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w})_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{p_{oi,j+1} - p_{oi,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}}
\end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned}
& -(\beta A_y k_y \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w})_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{p_{oi,j} - p_{oi-1,j}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}} \Delta y \\
& = -q_{oi,j} - q_{wi,j}
\end{aligned}$$

Assumindo o reservatório homogêneo e isotrópico, simplificando os termos Δx_i e Δy_j , organizando os denominadores das derivadas da pressão $\Delta x_{i\pm 1/2,j}$, $\Delta y_{i,j\pm 1/2}$, define-se as transmissibilidades T do óleo e da água, nas quatro faces (leste, oeste, norte e sul) da Fig. 28, segundo:

$$T_{oi+\frac{1}{2},j} = (\beta A_x k \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o \Delta x})_{i+\frac{1}{2},j} \quad (93)$$

$$T_{oi-\frac{1}{2},j} = (\beta A_x k \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o \Delta x})_{i-\frac{1}{2},j} \quad (94)$$

$$T_{oi,j+\frac{1}{2}} = (\beta A_y k \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o \Delta y})_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (95)$$

$$T_{oi,j-\frac{1}{2}} = (\beta A_y k \frac{k_{ro}}{\mu_o B_o \Delta y})_{i,j-\frac{1}{2}} \quad (96)$$

$$T_{wi+\frac{1}{2}} = (\beta A_x k \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w \Delta x})_{i+\frac{1}{2},j} \quad (97)$$

$$T_{wi-\frac{1}{2},j} = (\beta A_x k \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w \Delta x})_{i-\frac{1}{2},j} \quad (98)$$

$$T_{wi,j+\frac{1}{2}} = (\beta A_y k \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w \Delta y})_{i,j+\frac{1}{2}} \quad (99)$$

$$T_{wi,j-\frac{1}{2}} = (\beta A_y k \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w \Delta y})_{i,j-\frac{1}{2}} \quad (100)$$

Com essa notação a Eq. 92 pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & [T_{oi+\frac{1}{2},j}^n (p_{oi+1,j}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) - T_{oi-\frac{1}{2},j}^n (p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi-1,j}^{n+1})] \quad (101) \\ & + [T_{oi,j+\frac{1}{2}}^n (p_{oi,j+1}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) - T_{oi,j-\frac{1}{2}}^n (p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi,j-1}^{n+1})] \\ & + [T_{wi+\frac{1}{2},j}^n (p_{oi+1,j}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) - T_{wi-\frac{1}{2},j}^n (p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi-1,j}^{n+1})] \\ & + [T_{wi,j+\frac{1}{2}}^n (p_{oi,j+1}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) - T_{wi,j-\frac{1}{2}}^n (p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi,j-1}^{n+1})] = \\ & -q_{oi,j} - q_{wi,j} \end{aligned}$$

Para facilitar a implementação, as seguintes simplificações serão utilizadas:

$$T_{oi+\frac{1}{2},j}^n = T_{oe} \quad (102)$$

$$T_{oi-\frac{1}{2},j}^n = T_{ow} \quad (103)$$

$$T_{oi,j+\frac{1}{2}}^n = T_{on} \quad (104)$$

$$T_{oi,j-\frac{1}{2}}^n = T_{os} \quad (105)$$

$$T_{wi+\frac{1}{2},j}^n = T_{we} \quad (106)$$

$$T_{wi-\frac{1}{2},j}^n = T_{ww} \quad (107)$$

$$T_{wi,j+\frac{1}{2}}^n = T_{wn} \quad (108)$$

$$T_{wi,j-\frac{1}{2}}^n = T_{ws} \quad (109)$$

Reorganizando a Eq. 101 e reescrevendo-a de acordo com a notação das Eq. 102 à Eq. 109, obtém-se:

$$\begin{aligned} & p_{oi-1,j}^{n+1}(T_{ww} + T_{ow}) + p_{oi+1,j}^{n+1}(T_{we} + T_{oe}) \quad (110) \\ & + p_{oi,j-1}^{n+1}(T_{ws} + T_{os}) + p_{oi,j+1}^{n+1}(T_{wn} + T_{on}) \\ & + p_{oi,j}^{n+1}(-T_{oe} - T_{we} - T_{ow} - T_{ww} - T_{on} - T_{wn} - T_{os} - T_{ws}) \\ & = q_{oi,j} - q_{wi,j} \end{aligned}$$

A Eq. 110 para cada ponto do reservatório compõe um sistema linear, que será resolvido para cada passo de tempo. Simplificando ainda mais a implementação, pode-se considerar a seguinte notação:

$$T_{ww} + T_{ow} = A_w \quad (111)$$

$$T_{we} + T_{oe} = A_e \quad (112)$$

$$T_{wn} + T_{on} = A_n \quad (113)$$

$$T_{ws} + T_{os} = A_s \quad (114)$$

$$(-T_{oe} - T_{we} - T_{ow} - T_{ww} - T_{on} - T_{wn} - T_{os} - T_{ws} = C) \quad (115)$$

Reescrevendo a Eq. 110 de acordo com a notação das Eq. 111 à Eq. 114, tem-se:

$$p_{oi-1,j}^{n+1}(A_w) + p_{oi+1,j}^{n+1}(A_e) + p_{oi,j-1}^{n+1}(A_s) + p_{oi,j+1}^{n+1}(A_n) + p_{oi,j}^{n+1}(C) = \quad (116)$$

$$-q_{oi,j} - q_{wi,j}$$

Assim como para o fluxo monofásico, o sistema linear para o fluxo bifásico é representado matricialmente na Fig. 36.

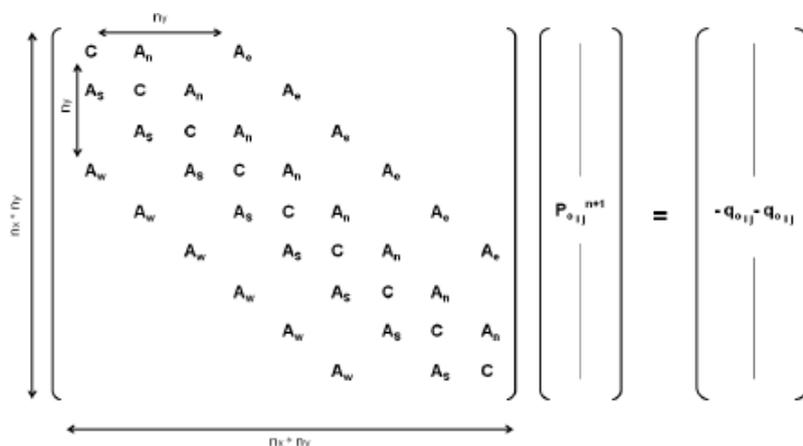


Figura 36: Forma matricial do sistema linear para o cálculo da pressão no fluxo bifásico

Na Fig. 36, n_y é o número de blocos em y e n_x é o número de blocos em x . O segundo passo do método IMPES consiste em encontrar a saturação da água em cada ponto do reservatório de forma explícita. Como o campo de pressão já foi calculado implicitamente basta substituir as pressões do óleo na equação de fluxo para a água (ou para o óleo), assim como o esquema da Fig. 36. Nesse caso, as equação da difusividade hidráulica para a água é reescrita na sequencia. Para facilitar a compreensão das manipulações algébricas, a equação para a fase água será repetida a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\beta A_x k_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{dP_o}{dx} \right) \right] \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left[\beta A_y k_y \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \left(\frac{dP_o}{dy} \right) \right] \Delta y = \quad (117)$$

$$\frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) - q_w$$

Utilizando o método de diferenças finitas, escrevendo as derivadas de segunda ordem de acordo com as Eq. 34 e Eq. 35 e as derivadas de primeira ordem de acordo com as Eq. 37 à Eq. 40, é possível obter a versão discreta da Eq. 89 como sendo:

$$\frac{1}{\Delta x_i} \left[\left(\beta A_x k_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \frac{P_{oi+1,j} - P_{oi,j}}{\Delta x_{i+\frac{1}{2},j}} \right] \quad (118)$$

$$\begin{aligned}
& -(\beta A_x k_x \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w})_{i-\frac{1}{2},j} \frac{p_{oi,j} - p_{oi-1,j}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2},j}} \Delta x \\
& + \frac{1}{\Delta y_j} [(\beta A_y k_y \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w})_{i,j+\frac{1}{2}} \frac{p_{oi,j+1} - p_{oi,j}}{\Delta y_{i,j+\frac{1}{2}}} \\
& - (\beta A_y k_y \frac{k_{rw}}{\mu_w B_w})_{i,j-\frac{1}{2}} \frac{p_{oi,j} - p_{oi-1,j}}{\Delta y_{i,j-\frac{1}{2}}} \Delta y \\
& = \frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) - q_{wi,j}
\end{aligned}$$

Para reservatório homogêneo e isotrópico, introduzindo as transmissibilidades, a Eq. 118 pode ser reescrita como:

$$[T_{w_{i+\frac{1}{2},j}}(p_{oi+1,j}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) - T_{w_{i-\frac{1}{2},j}}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi-1,j}^{n+1})] + \quad (119)$$

$$[T_{w_{i,j+\frac{1}{2}}}(p_{oi,j+1}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) - T_{w_{i,j-\frac{1}{2}}}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi,j-1}^{n+1})] = \frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right)$$

A derivada temporal do lado direito da Eq. 119 precisa também ser discretizada. Considerando constantes a porosidade ϕ e o fator volume formação da água (B_w), pode-se dizer que:

$$\frac{V_b}{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi S_w}{B_w} \right) \approx \frac{V_b \phi}{\alpha B_w} \frac{1}{\Delta t} (S_w^{n+1} - S_w^n) \quad (120)$$

Reescrevendo a Eq. 119, é possível obter a equação para a saturação da água no tempo $n + 1$ explicitamente:

$$\begin{aligned}
S_w^{n+1} = S_w^n + \frac{\alpha B_w \Delta t}{V_b \phi} [T_{we}(p_{oi+1,j}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) - T_{ww}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi-1,j}^{n+1}) \\
+ T_{wn}(p_{oi,j+1}^{n+1} - p_{oi,j-1}^{n+1}) - T_{ws}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi,j-1}^{n+1}) + q_{wi,j}]
\end{aligned} \quad (121)$$

3.2.6 Obtenção da solução

A definição do problema na versão discreta até esse ponto está incompleta, já que a condição de contorno não foi tratada. Da mesma forma que para o fluxo monofásico, o processo de obtenção da solução considerando a condição de contorno estipulada será feito para os pontos internos do domínio e para as fronteiras do domínio, ambos detalhados a seguir. Para os pontos internos do domínio, as equações de solução são as Eq. 109 e Eq. 110, já que, como não há bordas a serem tratadas nos pontos internos, todas as transmissibilidades, tanto da água quanto do óleo, nas faces são não nulas.

$$\begin{aligned}
 & p_{oi-1,j}^{n+1}(T_{ww} + T_{ow}) + p_{oi+1,j}^{n+1}(T_{we} + T_{oe}) + p_{oi,j-1}^{n+1}(T_{ws} + T_{os}) \\
 & + p_{oi,j+1}^{n+1}(T_{wn} + T_{on}) + p_{oi,j}^{n+1}(-T_{oe} - T_{we} - T_{ow} - T_{ww} - T_{on} \\
 & - T_{wn} - T_{os} - T_{ws}) = -q_{oi,j} - q_{wi,j}
 \end{aligned} \tag{122}$$

e

$$\begin{aligned}
 S_w^{n+1} = S_w^n + VOL [& T_{we}(p_{oi+1,j}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) - T_{ww}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi-1,j}^{n+1}) \\
 & + T_{wn}(p_{oi,j+1}^{n+1} - p_{oi,j-1}^{n+1}) - T_{ws}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi,j-1}^{n+1}) + q_{wi,j}]
 \end{aligned} \tag{123}$$

Para facilitar a implementação define-se $VOL = (\alpha B_w \Delta t) / (V_b \phi)$. Para o fluxo bifásico, serão tratadas as mesmas bordas da Fig. 31 pela condição de contorno de Neumann: quatro bordas das faces leste, oeste, norte e sul; e quatro blocos das quatro extremidades do plano $x - y$. Para implementar a condição de Neumann especifica-se as transmissibilidades da água e do óleo nulas nas faces externas das células situadas nos limites externos do reservatório, tratando cada ponto individualmente.

Para os elementos da face oeste, que não estão nas pontas das extremidades do domínio, como representado na Fig. 32, as transmissibilidades correspondentes à face oeste serão nulas. Assim, nas Eq. 110 e Eq. 122, os termos T_{ww} e T_{ow} são nulos. Desta forma, as equações para a pressão e para a saturação para esses elementos podem ser escritas, respectivamente, como:

$$p_{oi+1,j}^{n+1}(T_{we} + T_{oe}) + p_{oi,j-1}^{n+1}(T_{ws} + T_{os}) + p_{oi,j+1}^{n+1}(T_{wn} + T_{on}) \quad (124)$$

$$+ p_{oi,j}^{n+1}(T_{we} + T_{oe})(-T_{oe} - T_{we} - T_{on} - T_{wn} - T_{os} - T_{ws}) = -q_{oi,j} - q_{wi,j}$$

$$S_w^{n+1} = S_w^n + VOL[T_{we}(p_{oi+1,j}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) + T_{wn}(p_{oi,j+1}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) \quad (125)$$

$$+ T_{ws}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi,j-1}^{n+1}) + q_{wi,j}]$$

Analogamente, o mesmo procedimento é feito para as faces leste, norte e sul, anulando as transmissibilidades correspondente a cada face. Para a face leste, norte e sul, as Eq. 110 e Eq. 122, podem ser reescritas como:

Face leste:

$$p_{oi-1,j}^{n+1}(T_{ww} + T_{ow}) + p_{oi,j+1}^{n+1}(T_{ws} + T_{os}) + p_{oi,j+1}^{n+1}(T_{wn} + T_{on}) \quad (126)$$

$$+ p_{oi,j}^{n+1}(-T_{ow} - T_{ww} - T_{on} - T_{wn} - T_{os} - T_{ws}) = q_{oi,j} - q_{wi,j}$$

e

$$S_w^{n+1} = S_w^n + VOL[-T_{ww}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi-1,j}^{n+1}) + T_{wn}(p_{oi,j+1}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) \quad (127)$$

$$- T_{ws}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi,j-1}^{n+1}) + q_{wi,j}]$$

Face norte:

$$p_{oi-1,j}^{n+1}(T_{ww} + T_{ow}) + p_{oi+1,j}^{n+1}(T_{we} + T_{oe}) + p_{oi,j+1}^{n+1}(T_{ws} + T_{os}) \quad (128)$$

$$+p_{oi,j}^{n+1}(-T_{oe} - T_{we} - T_{ow} - T_{ww} - T_{os} - T_{ws}) = q_{oi,j} - q_{wi,j}$$

e

$$S_w^{n+1} = S_w^n + VOL[T_{we}(p_{oi+1,j}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) - T_{ww}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi-1,j}^{n+1}) - T_{ws}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi,j-1}^{n+1}) + q_{wi,j}] \quad (129)$$

Face sul:

$$p_{oi-1,j}^{n+1}(T_{ww} + T_{ow}) + p_{oi+1,j}^{n+1}(T_{we} + T_{oe}) + p_{oi,j+1}^{n+1}(T_{wn} + T_{on}) + p_{oi,j}^{n+1}(-T_{oe} - T_{we} - T_{ow} - T_{on} - T_{wn}) = q_{oi,j} - q_{wi,j} \quad (130)$$

e

$$S_w^{n+1} = S_w^n + VOL[T_{we}(p_{oi+1,j}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) - T_{ww}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi-1,j}^{n+1}) + T_{wn}(p_{oi,j+1}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) + q_{wi,j}] \quad (131)$$

O mesmo procedimento é feito para os elementos das extremidades de cada face. Para o elemento da extremidade da face oeste e da face sul concomitantemente, representado na Fig. 32, as transmissibilidades correspondentes a cada uma das faces, para cada fase, são nulas. Assim, nas Equações Eq. 110 e Eq. 121, os termos T_{ww} , T_{ws} , T_{ow} e T_{os} são nulos. Desta forma, as equações de pressão e saturação para esse elemento podem ser escritas como:

$$p_{oi+1,j}^{n+1}(T_{we} + T_{oe}) + p_{oi,j+1}^{n+1}(T_{wn} + T_{on}) + p_{oi,j}^{n+1}(-T_{oe} + T_{we} - T_{on} - T_{wn}) = q_{oi,j} - q_{wi,j} \quad (132)$$

e

$$S_w^{n+1} = S_w^n + VOL[T_{we}(p_{oi+1,j}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) + T_{wn}(p_{oi,j+1}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) + q_{wi,j}] \quad (133)$$

Analogamente, o mesmo procedimento é feito para os elementos 2, 3 e 4 da Fig. 32, anulando as transmissibilidades correspondentes as face em que estão os elementos. Para os elementos 2, 3 e 4 da Fig.33, as equações para a pressão e para a saturação podem ser escritas como:

Elemento 2 (face oeste e norte):

$$\begin{aligned} p_{oi+1,j}^{n+1}(T_{we} + T_{oe}) + p_{oi,j-1}^{n+1}(T_{ws} + T_{os}) + p_{oi,j}^{n+1}(-T_{oe} + T_{we} - T_{os} - T_{ws}) \quad (134) \\ = -q_{oi,j} - q_{wi,j} \end{aligned}$$

e

$$S_w^{n+1} = S_w^n + VOL[T_{we}(p_{oi+1,j}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) - T_{ws}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi,j-1}^{n+1}) + q_{wi,j}] \quad (135)$$

Elemento 3 (face leste e norte):

$$\begin{aligned} p_{oi-1,j}^{n+1}(T_{ww} + T_{ow}) + p_{oi,j-1}^{n+1}(T_{ws} + T_{os}) + \quad (136) \\ p_{oi,j}^{n+1}(-T_{ow} + T_{ww} - T_{os} - T_{ws}) = -q_{oi,j} - q_{wi,j} \end{aligned}$$

e

$$S_w^{n+1} = S_w^n + VOL[-T_{ww}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi-1,j}^{n+1}) - T_{ws}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi,j-1}^{n+1}) + q_{wi,j}] \quad (137)$$

Elemento 4 (face leste e sul):

$$\begin{aligned} p_{oi-1,j}^{n+1}(T_{ww} + T_{ow}) + p_{oi,j+1}^{n+1}(T_{wn} + T_{on}) + \quad (138) \\ p_{oi,j}^{n+1}(-T_{ow} + T_{ww} - T_{on} - T_{wn}) = -q_{oi,j} - q_{wi,j} \end{aligned}$$

e

$$S_w^{n+1} = S_w^n + VOL[-T_{ww}(p_{oi,j}^{n+1} - p_{oi-1,j}^{n+1}) + T_{wn}(p_{oi,j+1}^{n+1} - p_{oi,j}^{n+1}) + q_{wi,j}] \quad (139)$$

A solução completa é dada pela solução das Eq. 110 e Eq. 121 para cada ponto do reservatório, de acordo com o tratamento da condição de contorno feito anteriormente, em cada passo de tempo. Na implementação das equações obtidas anteriormente, foi utilizado esquema mostrado na Fig. 33.

4 Metodologia

O desenvolvimento do código engloba uma série de etapas. Entre elas estão: formulação, discretização, representação do poço, linearização, codificação, solução, validação e aplicação [20]. Para tanto, foi utilizada a plataforma de programação MATLAB[®]. O código utiliza as equações governantes do modelo bidimensional monofásico e bifásico já discretizadas em coordenadas cartesianas por diferenças finitas. A Fig. 37 ilustra um desenho esquemático do funcionamento geral do código onde os dados de entrada são fornecidos de acordo com as propriedades do reservatório a ser estudado.

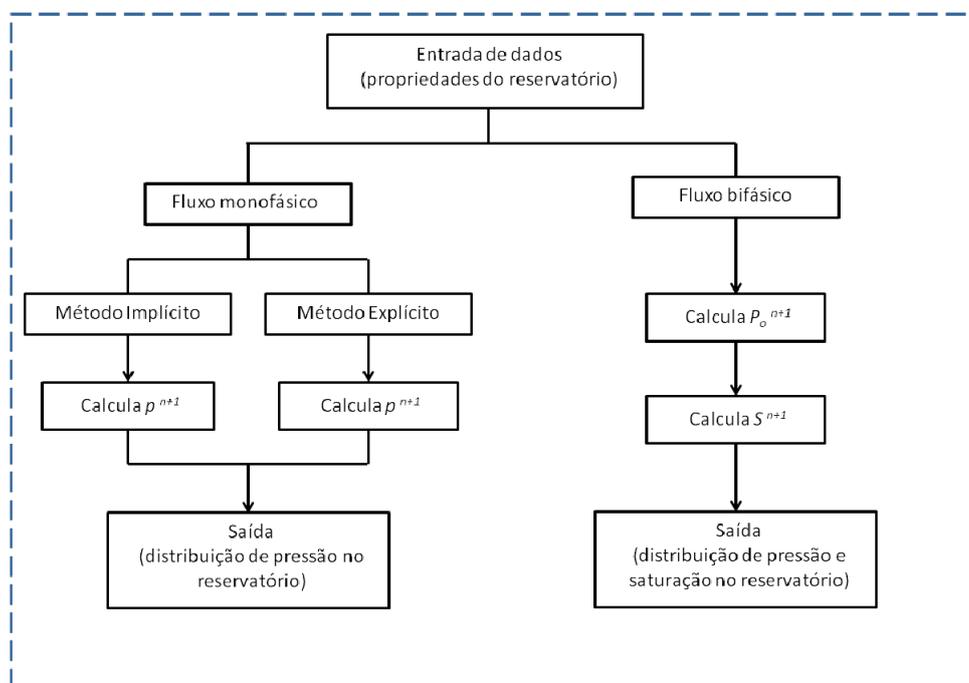


Figura 37: Fluxograma do funcionamento geral do código.

Assim, os dados de entrada utilizados dentro do código para calcular as pressões e saturações são as propriedades do reservatório utilizadas na formulação matemática da equação da difusividade hidráulica, já comentada anteriormente. As etapas de cálculo da pressão pelo método explícito e pelo método implícito no fluxo monofásico, representadas na Fig. 37, podem ser melhor compreendidas com a Fig. 38 e Fig. 39, respectivamente.

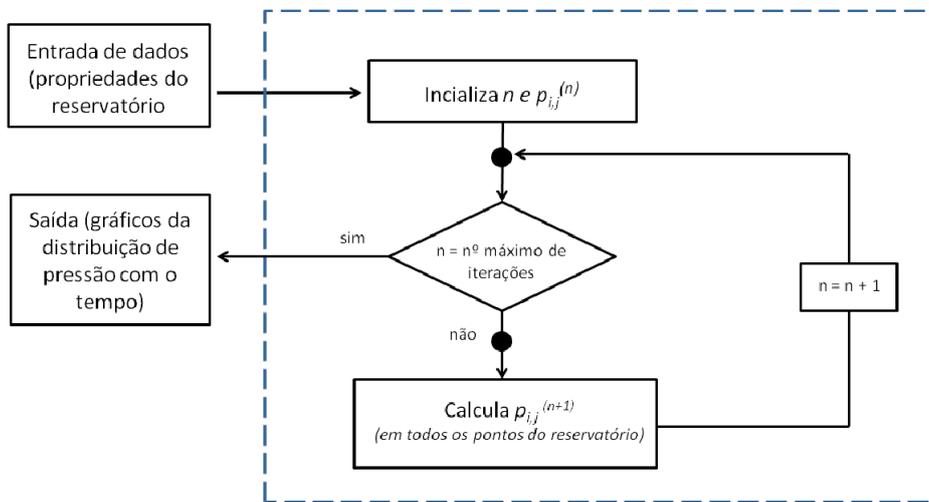


Figura 38: Fluxograma do cálculo das pressões no tempo $n + 1$ pelo método explícito.

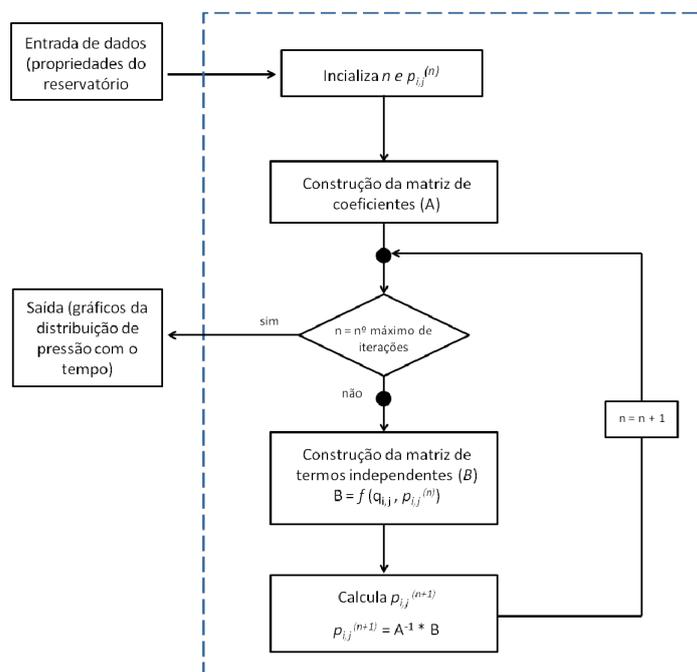


Figura 39: Fluxograma do cálculo das pressões no tempo $n + 1$ pelo método implícito.

As etapas de cálculo da pressão e da saturação pelo método IMPES no fluxo bifásico, representadas na Fig. 37, são melhor entendidas com a Fig. 38. Um esquema geral do funcionamento do IMPES foi apresentado na Fig. 35. A Fig. 40 apresenta um detalhamento no cálculo das pressões e saturações

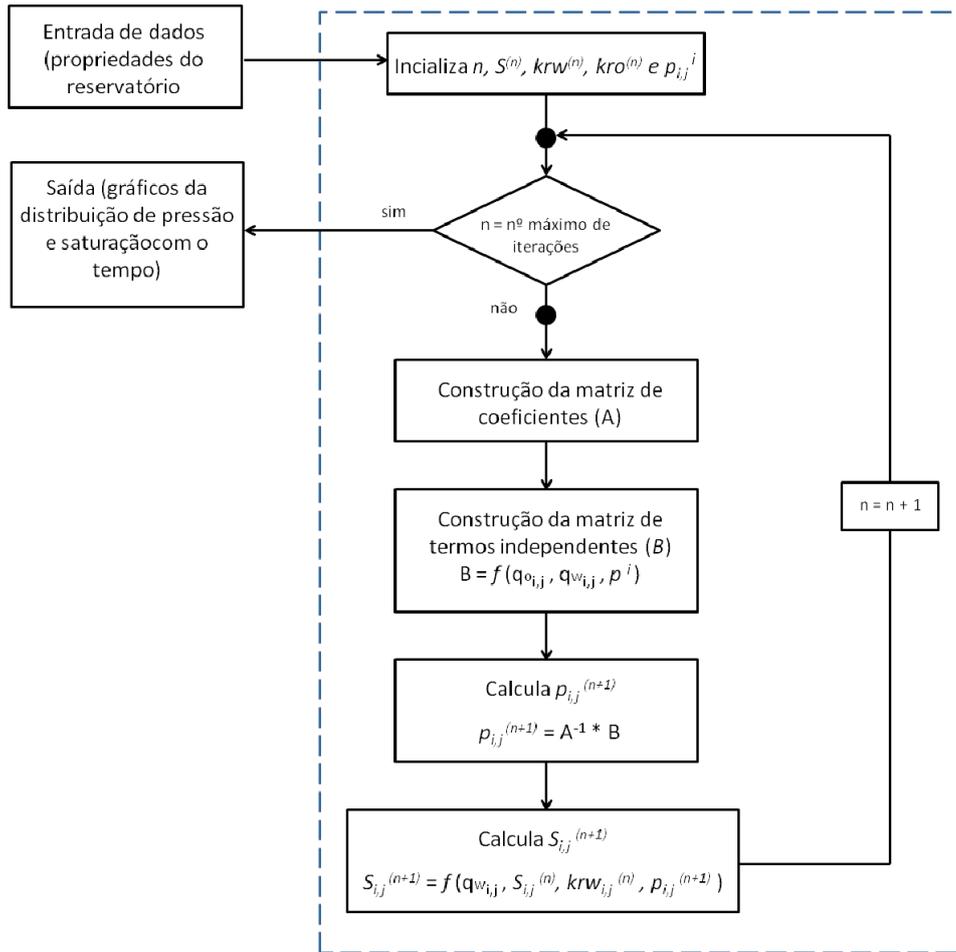


Figura 40: Fluxograma do cálculo das pressões e saturações no tempo $n + 1$ pelo método IMPES para o fluxo bifásico.

4.0.7 Aplicação do código

Escoamento monofásico de óleo no reservatório 2D

O modelo físico proposto neste trabalho descreve um reservatório homogêneo, com porosidade e permeabilidades constantes nas três direções para o fluxo monofásico. A geometria foi definida como sendo bidimensional, contendo um poço produtor vertical centrado no reservatório, totalmente completado e abrangendo toda a espessura do reservatório, como mostra a Fig. 41.

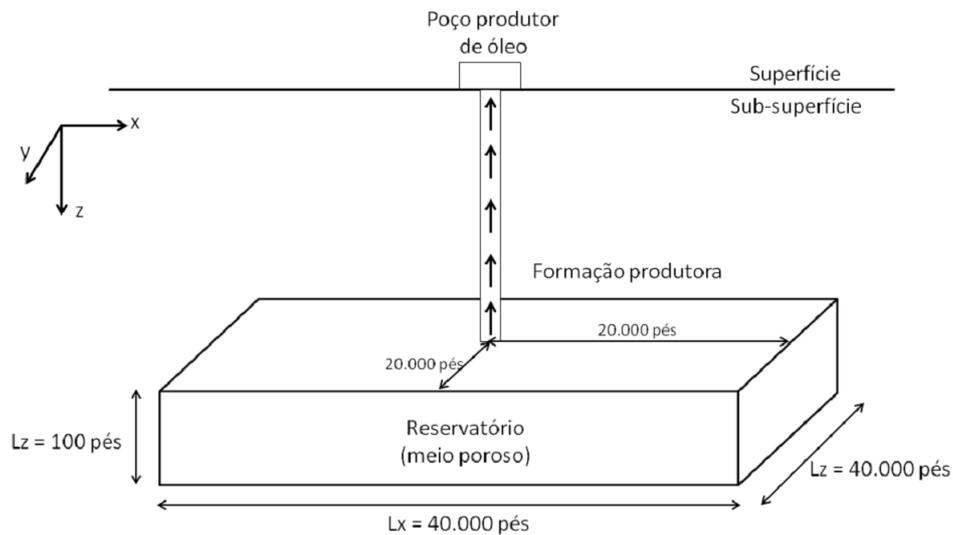


Figura 41: Esquema do modelo poço-reservatório.

O reservatório possui 40.000 *pés* de comprimento, 40.000 *pés* de largura e 100 *pés* de espessura. O reservatório está sob uma pressão inicial de 6.000 *psi*. O fluxo é bidimensional e monofásico, com o poço produzindo apenas óleo. O esquema do modelo reservatório/poço é mostrado na Fig. 41. As propriedades da rocha e do fluido são constantes e serão previamente definidas. E podem ser vistas na Tab. 4.

Tabela 4: Parâmetros para a simulação

Propriedades	Valor
Comprimento do reservatorio, pés	40.000
Largura do reservatório, pés	40.000
Espessura do reservatorio, pés	100
Pressão inicial, psi	6000
Compressibilidade da rocha, psi^{-1}	3.5×10^{-6}
Porosidade do reservatório, ϕ	18
Viscosidade do óleo, cP	20
Fator volume formação, rb/STB*	1

*onde rb significa barris em condições de reservatório, e STB é barris em condições de superfície.

A escolha do nível de discretização mais apropriado para o modelo do reservatório deve ser baseada no acompanhamento da variação de um parâmetro com o grau de refinamento, assim como o tempo computacional utilizado para obter a solução. Cinco malhas com 1.000 (100 x 100 x 1), 40.000 (200 x 200 x 1), 250.000 (500 x 500 x 1), 1.000.000 (1.000 x 1.000 x 1) e 4.000.000 (2.000 x 2.000 x 1) elementos foram testadas. Todas as simulações realizadas para os testes supracitados foram executadas utilizando um Processador Intel[®] Core i5, com memória RAM instalada de 4,00 GB.

O parâmetro monitorado foi a pressão de fundo de poço (p_{wf}) em função do tempo de produção. É possível observar que cada nível de refinamento retorna uma pressão diferente, sendo que existe uma tendência de convergência na medida em que o número de elementos aumenta. Em relação ao tempo de simulação necessário, a Fig. 42 mostra o aumento no tempo de execução da simulação em função do número de blocos que compõem a malha. A Tab. 5 mostra a configuração da malha utilizada de acordo com os números de blocos representados na Fig. 42.

Analisando a Fig. 42, observa-se que o tempo computacional aumenta à medida que a malha é refinada. Isso se deve ao fato de que quando se aumenta o número de blocos da malha, o tamanho do sistema de equações lineares aumenta e conseqüentemente, aumenta o número de cálculos a ser realizado pelo simulador.

De acordo com a Fig. 42, para uma malha com 1000 elementos (100 x 100 x 1) o tempo computacional gasto na simulação foi insignificante. Ao utilizar

uma malha mais refinada, com 4.000.000 elementos (2.000 x 2.000 x 1), o tempo computacional aumentou significativamente.

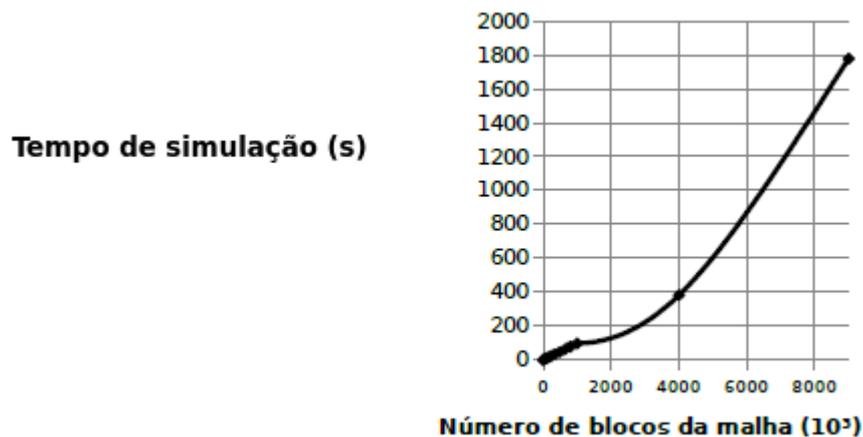


Figura 42: Análise do tempo de simulação em função do número de blocos da malha.

Tabela 5: Configuração da malha de acordo com o número de blocos.

Configuração da malha	Número de blocos
(10 x 10 x 1)	100
(50 x 50 x 1)	2.500
(100 x 100 x 1)	10.000
(200 x 200 x 1)	40.000
(400 x 400 x 1)	160.000
(500 x 500 x 1)	250.000
(800 x 800 x 1)	640.000
(1000 x 1000 x 1)	1.000.000
(2000 x 2000 x 1)	4.000.000
(3000 x 3000 x 1)	9.000.000
(4000 x 4000 x 1)	16.000.000

5 Resultados e discussões

5.1 Validação do código desenvolvido

Para a verificação do código implementado foram resolvidos os casos no simulador acadêmico UTCHEM-9.0 da Universidade do Texas. Para a comparação foi usado o modelo *Black-oil*, mesmo modelo implementado neste trabalho usando inclusive as mesmas condições de reservatório conforme a Tab.4.

Para comparar os resultados obtidos no caso de fluxo monofásico e bifásico foi utilizada a geometria mostrada na Fig. 43 na qual foram usados 40 elementos com comprimento total de 20.000 *m* com a presença de um poço produtor e outro injetor. Além disso, a pressão inicial se manteve a 6.000 *psi* e a vazão de entrada e saída foi mantida a 2.000 *bb/d*.

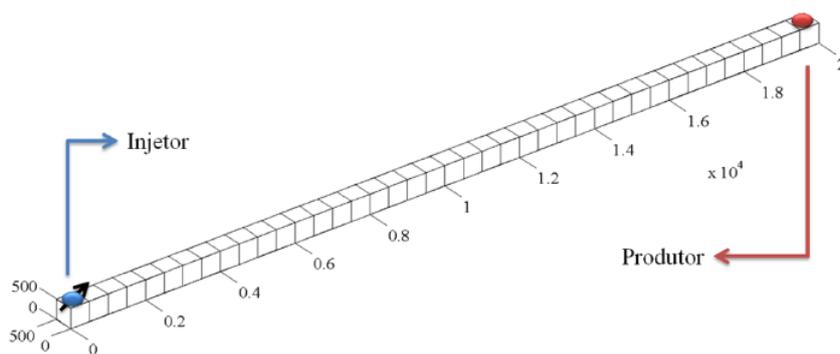


Figura 43: Malha usada no problema de fluxo monofásico

Pode-se observar na Fig. 44 que o perfil da curva de pressão obtida com o código é próxima a obtida via UTCHEM-9.0, contudo existe uma diferença de pressão no poço injetor menor que 0.99 %.

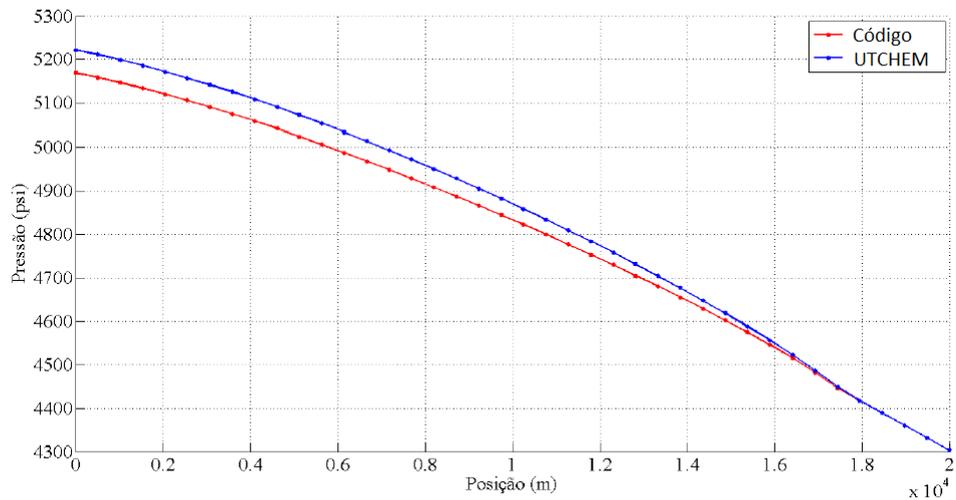


Figura 44: Comparação do perfil de pressão no fluxo monofásico

A Fig. 45 mostra o perfil do campo de saturação para as mesmas condições e geometria estabelecida. E a Fig. 46 mostra as curvas de pressão no reservatório para o escoamento bifásico. Novamente é possível observar que a solução com o código é similar a solução obtida UTCHEM-9.0.

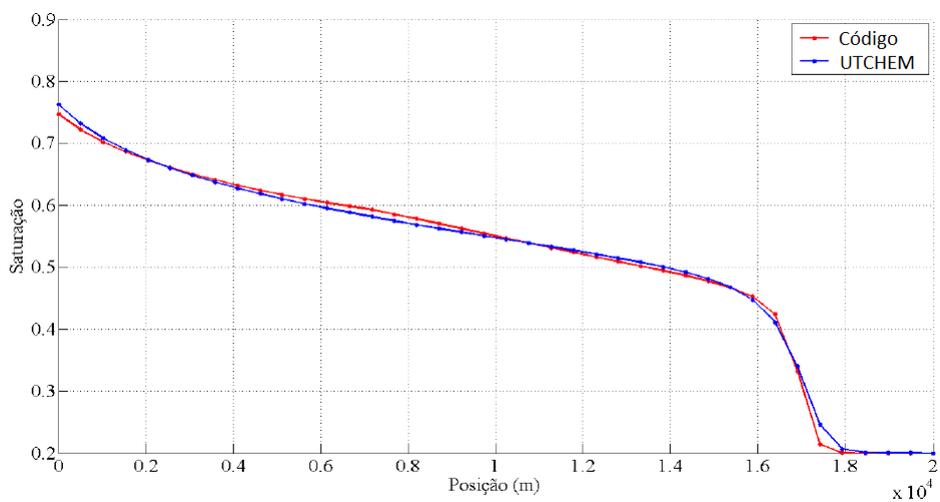


Figura 45: Comparação do perfil de saturação no fluxo monofásico

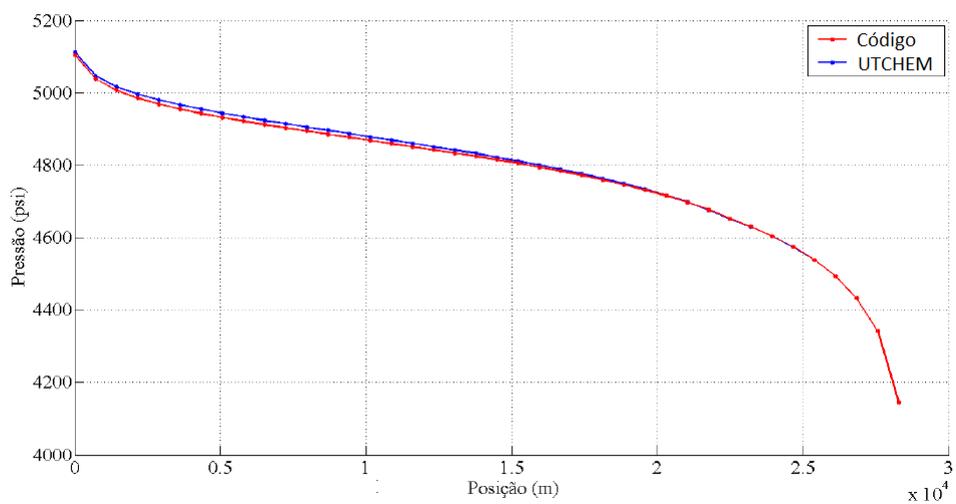


Figura 46: Comparação do perfil de pressão no fluxo bifásico.

A Fig. 47 mostra a comparação entre as soluções obtidas via código e via UTCHEM-9.0 para a saturação de água no reservatório.

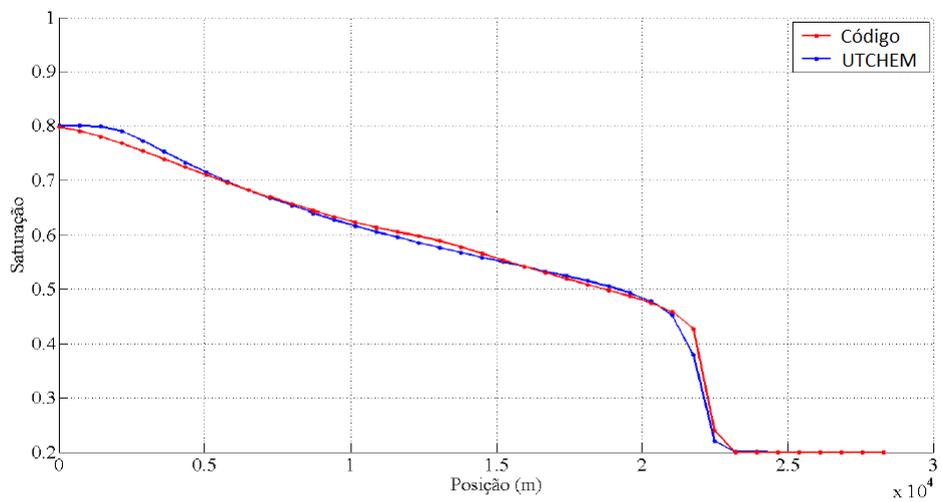


Figura 47: Comparação do perfil de saturação no fluxo bifásico.

5.2 Escoamento monofásico de óleo no reservatório 2D

Para a simulação do escoamento monofásico bidimensional no reservatório representado esquematicamente na Fig. 41, foi utilizado um código desenvolvido em MATLAB[®] neste trabalho. Foram utilizadas as propriedades do reservatório, da rocha e do fluido descritas na Tab. 4.

As propriedades e dados utilizados na entrada são hipotéticos, mas baseados na literatura. Do teste de independência da malha, foi possível observar que a malha mais apropriada para a simulação é a malha de 1.000.000 de elementos. Nesta aplicação, porém, para melhor visualização da queda de pressão no reservatório, foi utilizada uma malha de 400 elementos.

Foram simulados tempos de produção de 240, 480 e 720 dias. A queda de pressão pode ser observada gradualmente ao longo dos dias. As pressões no reservatório para os tempos de 240, 480 e 720 dias estão representadas na Fig. 48, Fig. 49 e Fig. 50, respectivamente.

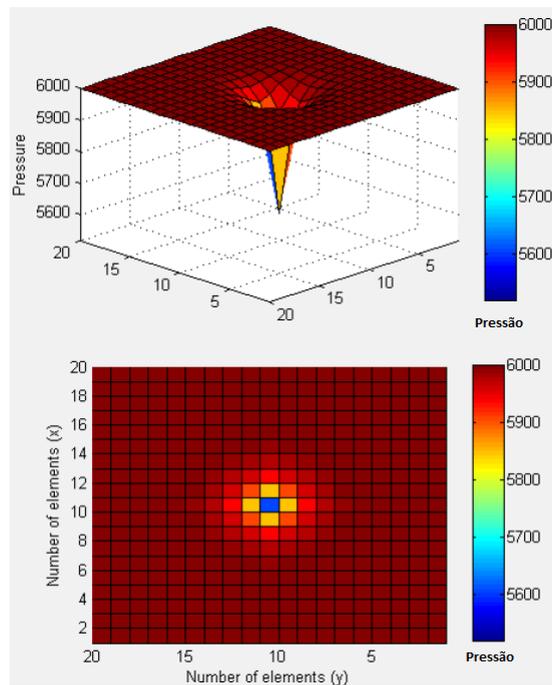


Figura 48: Pressão no reservatório após 240 dias de produção.

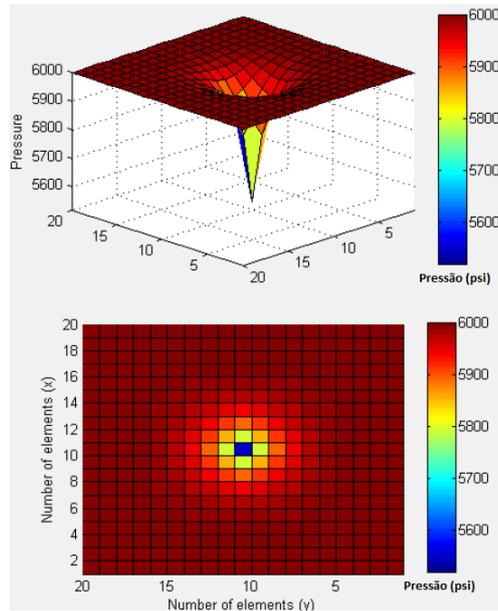


Figura 49: Pressão no reservatório após 480 dias de produção.

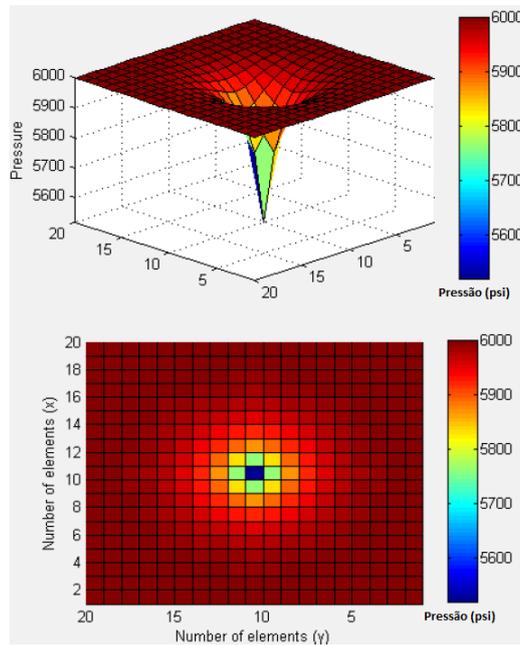


Figura 50: Pressão no reservatório após 720 dias de produção.

Na Fig. 48, Fig. 49 e Fig. 50 é possível perceber como a queda de pressão é mais evidente nas proximidades do poço no início da produção. Com o tempo de produção a queda de pressão vai sendo percebida nos blocos mais

distantes do poço, até que, dependendo das propriedades do reservatório e do fluido e da vazão de produção, é possível notar a queda de pressão nos limites do reservatório, característica típica de regimes transientes de fluxo.

Com o avanço do tempo de produção, em certo momento da simulação todos os pontos das bordas sentirão o efeito da queda de pressão, dando início ao fluxo pseudo-permanente no reservatório. Para os dados de entrada propostos da Tab. 4, esse fato ocorre a aproximadamente 1.200 dias do início da produção, de acordo com a simulação realizada.

A influência da queda de pressão nos limites do reservatório dependerá principalmente da permeabilidade, da viscosidade do óleo, da vazão e do tempo de produção. A Fig. 51 representa das pressões no reservatório em simulações com diferentes permeabilidades, mantidas as demais propriedades.

É possível observar que, quanto maior a permeabilidade, para um tempo de produção fixado, a queda de pressão no reservatório é maior e mais rápido as bordas sentirão o efeito da queda de pressão.

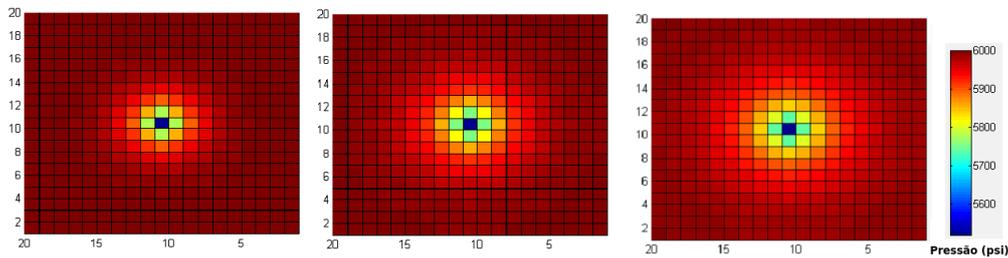


Figura 51: Variação das pressões no reservatório com o aumento da permeabilidade. (a) $k = 50mD$, (b) $k = 100mD$, (c) $k = 150mD$.

De maneira análoga ocorre para a variação da viscosidade. A Fig. 52 representa as pressões no reservatório em simulações com diferentes viscosidades, mantidas as demais propriedades. De forma inversa à permeabilidade, quanto menor a viscosidade, maior a queda de pressão no reservatório e mais rápido as bordas sentirão o efeito da queda de pressão.

A fim de comparar os métodos explícito e implícito, foram realizadas simulações com os mesmos parâmetros para os dois métodos. Os parâmetros utilizados são os observados na Tab. 4. A Fig. 53, Fig. 54 e Fig. 55, ilustram as simulações para 240, 480 e 720 dias, respectivamente, comparando os resultados para as formulações explícita (a) e implícita (b).

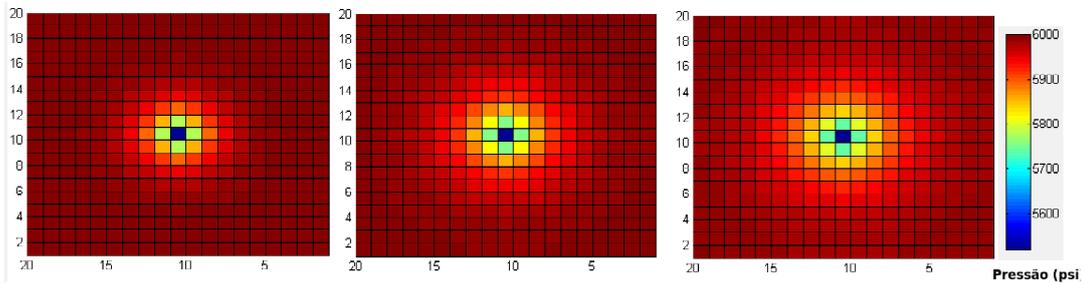


Figura 52: Variação das pressões no reservatório com a diminuição da viscosidade. (a) $\mu = 10\text{cP}$, (b) $\mu = 30\text{cP}$, (c) $\mu = 50\text{cP}$

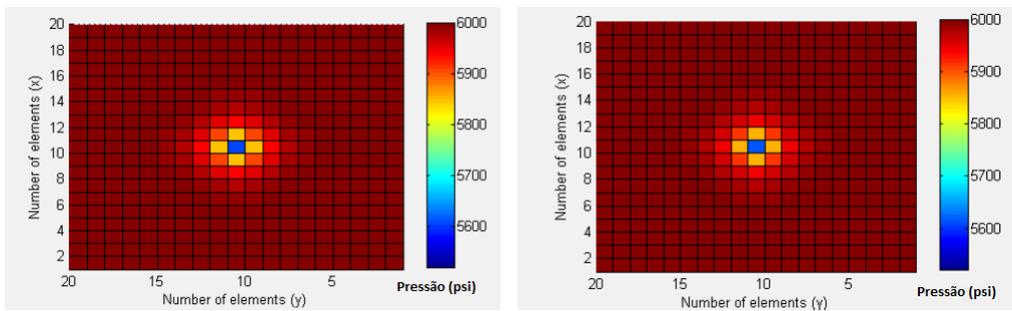


Figura 53: Pressão no reservatório após 240 dias de produção utilizando a formulação (a) explícita e (b) implícita.

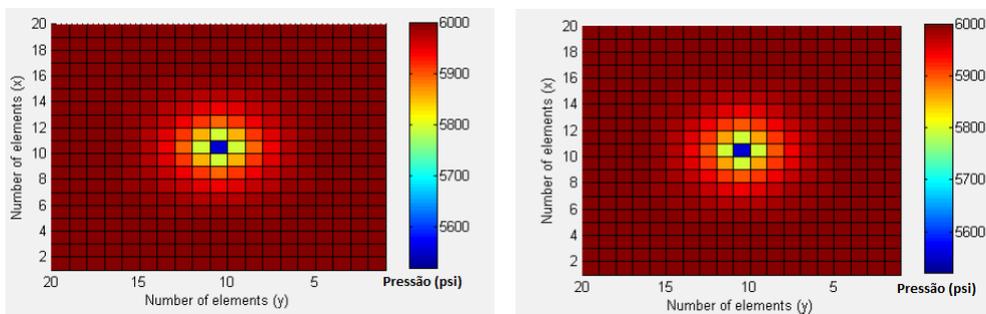


Figura 54: Pressão no reservatório após 480 dias de produção utilizando a formulação (a) explícita e (b) implícita.

É possível perceber pelas Figuras anteriores que há pouca diferença nos resultados quando comparados os dois métodos. A grande vantagem da utilização do método implícito está, porém, na liberdade de variação de alguns parâmetros da simulação.

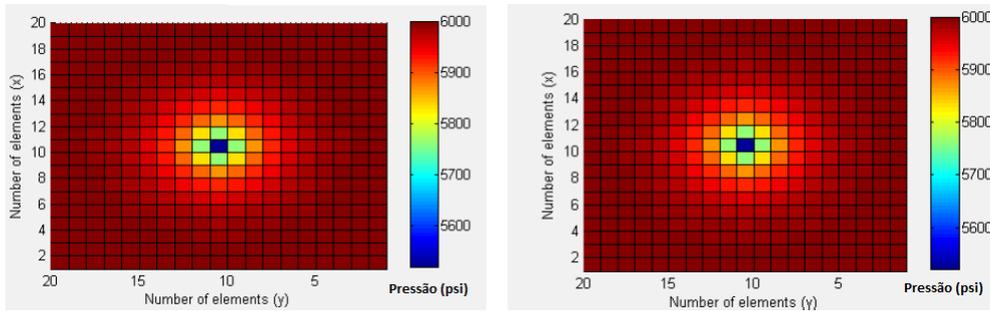


Figura 55: Pressão no reservatório após 720 dias de produção utilizando a formulação (a) explícita e (b) implícita.

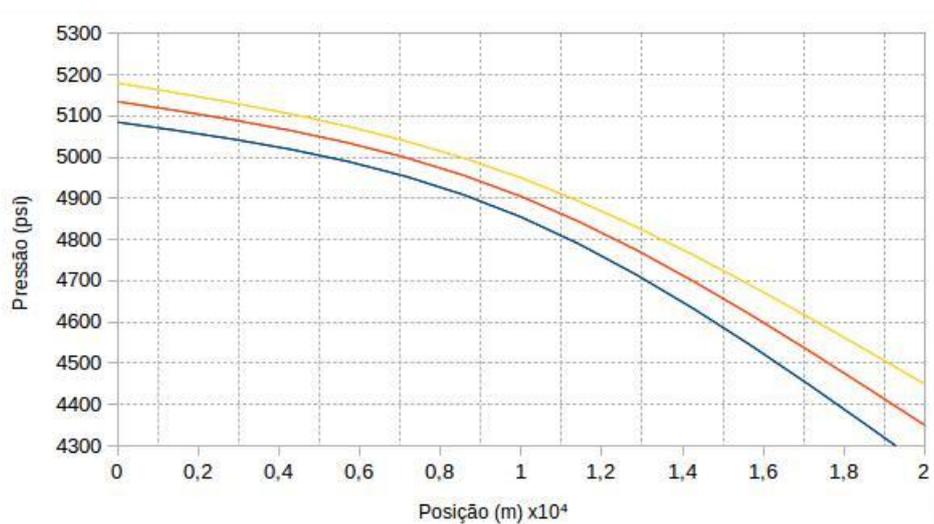


Figura 56: Influência da viscosidade no escoamento.

$$\mu = 10cP, \mu = 30cP, \mu = 50cP$$

No gráfico da Fig. 56 é possível observar o comportamento do fluido no reservatório monofásico usando os mesmos parâmetros e alterando apenas a viscosidade. Nota-se que quanto maior a viscosidade menor é a queda de pressão no reservatório. Comportamento esperado já que quanto maior é a viscosidade maior a resistência ao escoamento.

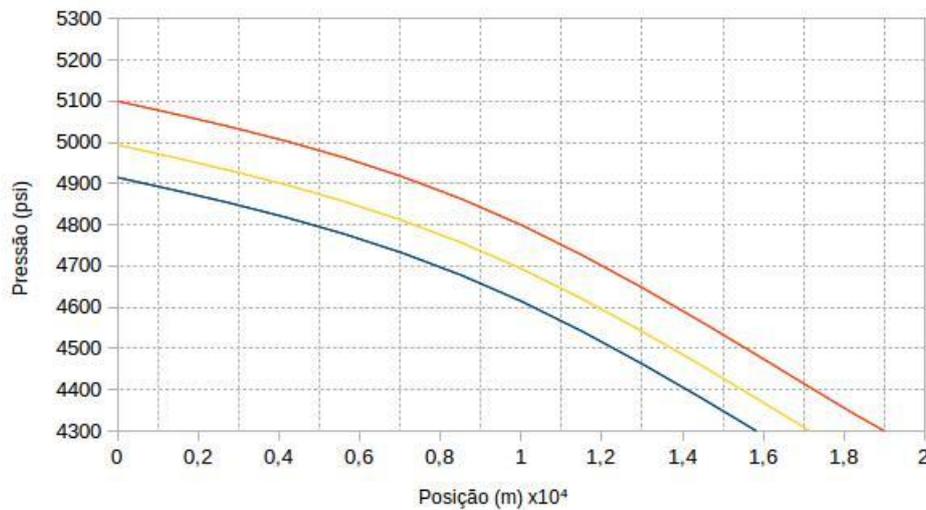


Figura 57: Influência da Permeabilidade no escoamento.

$$k = 150mD, k = 100mD, k = 50mD$$

De maneira análoga ao exposto anteriormente a Fig. 57 mostra a influência da permeabilidade em reservatórios de petróleo. Mantendo as variáveis constantes e variando apenas a permeabilidade é possível notar que quanto maior a permeabilidade maior a queda de pressão no reservatório. Do ponto de vista físico este comportamento é explicado já que a permeabilidade esta ligada a facilidade de escoamento do fluido no reservatório.

O método explícito possui uma restrição quanto ao passo de tempo e o refinamento da malha. Essa restrição é controlada pelo número de *Courant* (Co), definido por [14]:

$$Co = u_x \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (140)$$

Para a formulação explícita, o número de *Courant* deve ser menor que 1 ($Co < 1$) para que haja estabilidade numérica, fazendo com que apenas passos de tempo pequenos ou malhas pouco refinadas sejam utilizadas no método explícito. Normalmente trabalha-se com $Co = 0.2$.

5.3 Escoamento bifásico de óleo no reservatório 2D

O modelo físico utilizado para a aplicação em um escoamento bifásico será semelhante ao descrito para o fluxo monofásico, entretanto tem-se um poço injetor. A geometria do reservatório é bidimensional. Trata-se de um reservatório de óleo no qual água é injetada por um arranjo do tipo *1/4 five-spot*. Portanto, para o modelo, há um poço produtor e um poço injetor, ambos totalmente completados e abrangendo toda a espessura do reservatório. A Fig. 58 ilustra o modelo utilizado para as simulações.

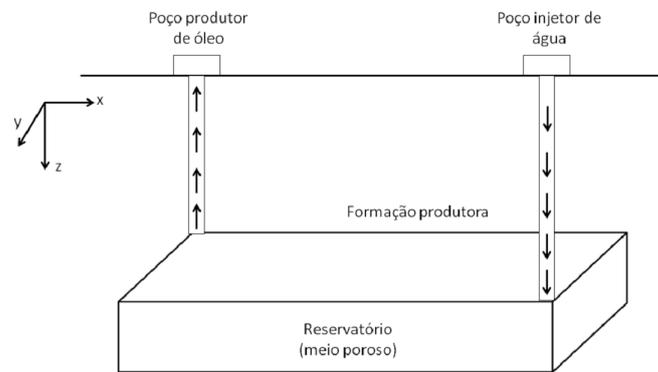


Figura 58: Esquema do modelo poço-reservatório para o modelo bifásico.

O reservatório possui 1.000 pés de comprimento, 1.000 pés de largura e 100 pés de espessura. O reservatório está sob uma pressão inicial de 1.000 *psi*. O fluxo é bidimensional e bifásico, com um poço produzindo óleo e um poço injetando água. Algumas propriedades da rocha e do fluido são constantes e serão previamente definidas. As propriedades do reservatório, da rocha e do fluido são mostradas na Tab. 6.

Tabela 6: Propriedades do reservatório, da rocha e do fluido consideradas no modelo físico do problema bifásico.

Propriedades	Valor
Comprimento do reservatório, pés	1.000
Largura do reservatório, pés	1.000
Espessura do reservatório, pés	100
Pressão inicial, <i>psi</i>	1.000
Saturação inicial, %	16
Saturação de óleo residual, %	20
Porosidade do reservatório, %	20
Permeabilidade do reservatório, <i>mD</i>	300
Viscosidade do óleo, <i>cP</i>	5

O código desenvolvido neste trabalho utiliza em sua implementação as relações de Corey [11].

$$k_{rw}^n = 0.4 \left\{ \frac{(S_w^n - S_{wi})}{(1 - S_w - S_{wi})} \right\}^2 \quad (141)$$

$$k_{ro}^n = 0.8 \left\{ \frac{(1 - S_w^n - S_{wi})}{(1 - S_w - S_{wi})} \right\}^2 \quad (142)$$

As relações de Corey são parâmetros utilizados para o cálculo da pressão do óleo e da saturação da água, e são atualizadas a cada passo de tempo. As curvas de permeabilidade relativa ao óleo e à água em função da saturação de água são geradas pelo código e representadas na Fig.59.

Para a simulação do escoamento bifásico bidimensional no reservatório foi utilizado o código desenvolvido neste trabalho utilizando a formulação IMPES. Foram utilizadas as propriedades do reservatório, da rocha e do fluido descritas na Tab.6. Foi simulado um tempo de produção de 240 dias. A queda de pressão se propaga gradualmente com o tempo, sendo a pressão no poço injetor mantida sempre constante e igual à pressão inicial.

A distribuição de pressão no reservatório está representada na Fig. 60. A queda de pressão pode ser observada do poço injetor em direção ao poço produtor, sentido do fluxo no reservatório. O poço injetor está localizado na quina inferior direita.

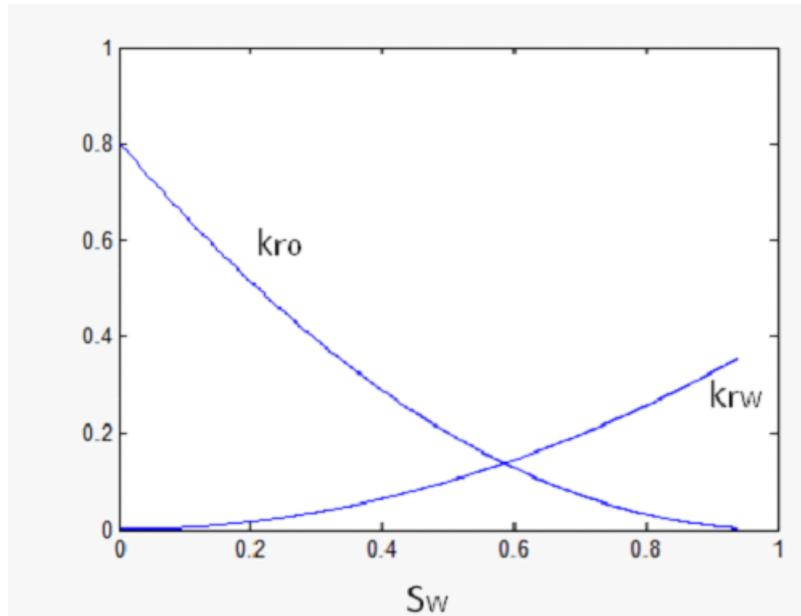


Figura 59: Curvas de permeabilidade relativa ao óleo e à água em função da saturação.

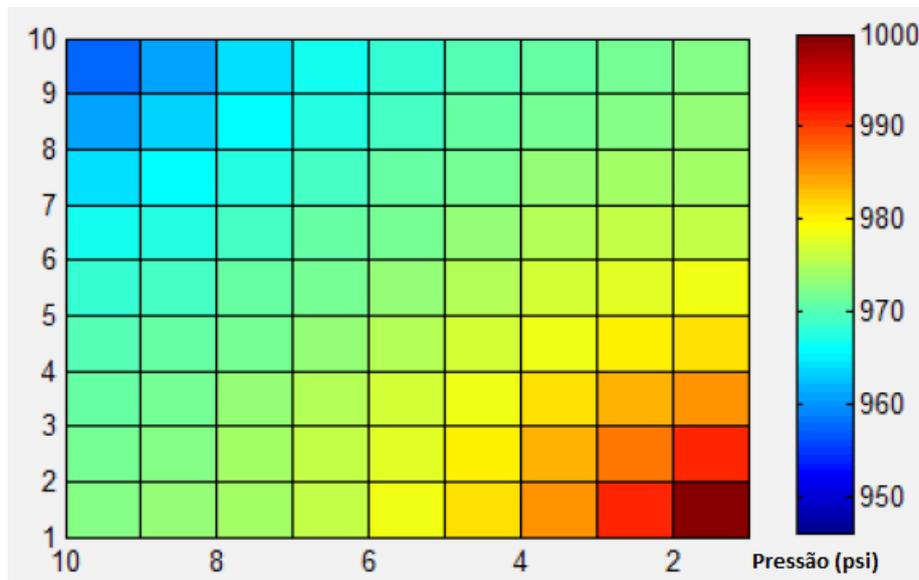


Figura 60: Pressão no reservatório após 240 dias de produção para o problema bifásico.

A influência da queda de pressão no reservatório dependerá principalmente da permeabilidade, da viscosidade do óleo, da vazão e do tempo de produção.

A saturação de água é outro fator monitorado durante a simulação. Foram simulados tempos de produção de 240, 480 e 720 dias, para os mesmos parâmetros da Tab.6. A Fig.61, Fig.62 e Fig.62 apresentam os resultados.

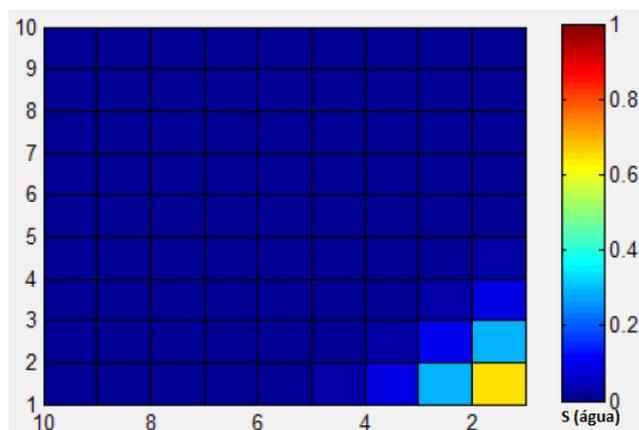


Figura 61: Saturação de água no reservatório após 240 dias de produção para o problema bifásico.

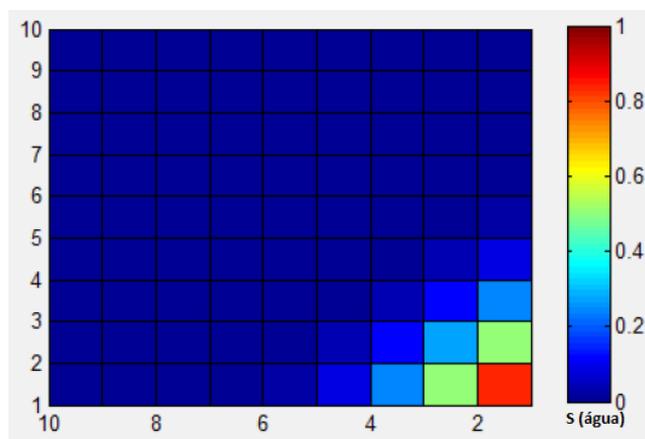


Figura 62: Saturação de água no reservatório após 480 dias de produção para o problema bifásico.

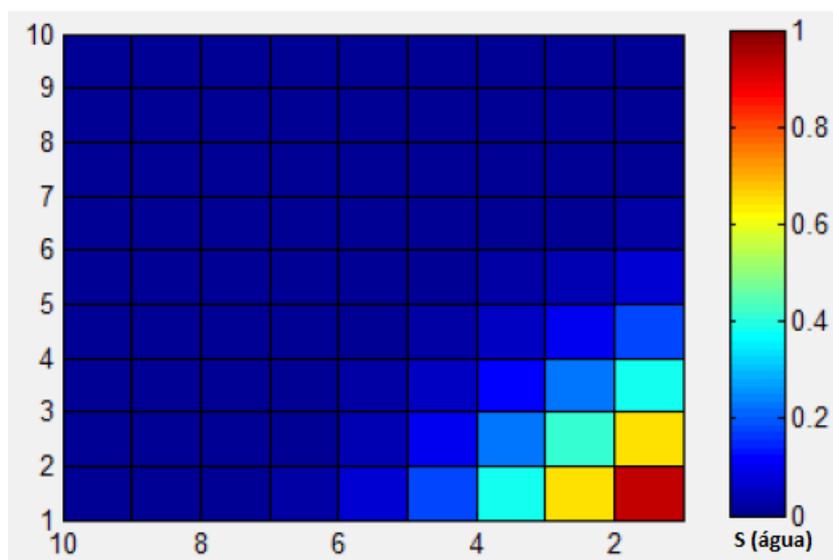


Figura 63: Saturação de água no reservatório após 720 dias de produção para o problema bifásico.

É possível observar nas Figuras anteriores como a saturação de água aumenta em direção ao poço produtor com o avanço do tempo de produção. Isso ocorre porque a água injetada tende a percorrer os canais no reservatório, produzindo o óleo que neles estava, diminuindo assim a saturação de óleo e aumentando, por consequência, a saturação de água na região.

6 Considerações finais

Foi apresentado o desenvolvimento de uma ferramenta numérica que simula o escoamento monofásico ou bifásico em um reservatório bidimensional. O escoamento é governado pela equação da difusividade hidráulica, que neste trabalho foi discretizada utilizando o método das diferenças finitas para a formulação explícita e implícita em coordenadas cartesianas para o fluxo monofásico; e para o método IMPES para o fluxo bifásico água-óleo.

Com o desenvolvimento deste trabalho foi possível perceber a dificuldade envolvida no desenvolvimento de uma ferramenta de simulação de reservatórios. Apesar da vasta bibliografia existente nessa área, nem sempre a literatura disponível traz de forma clara e detalhada a formulação matemática e numérica das equações.

Ainda, a implementação das equações discretizadas e processos iterativos no espaço e no tempo em um modelo computacional é extremamente complicada, exigindo cuidado extremo, de modo que cada detalhe na implementação se tratado de maneira incorreta pode comprometer o funcionamento do simulador e com isso a obtenção dos objetivos propostos.

De todas as dificuldades, a maior encontrada é a formulação da lógica envolvida na programação do código, a fim de tratar todas as condições impostas ao formular matematicamente o problema.

Entretanto, o tratamento com aumento gradual do nível de dificuldade é fundamental. Por exemplo, antes da formulação implícita deve ser implementada a formulação explícita. O tratamento 2D deve ser feito após o 1D, e o monofásico deve anteceder o bifásico, e assim por diante.

O desenvolvimento deste trabalho proporcionou uma grande aquisição de conhecimento em detalhes do processo de desenvolvimento de um código, de modo que a utilização de códigos acadêmicos ou mesmo comerciais possa ser facilitada na medida de conhecer os detalhes, simplificações e considerações feitas nos mesmos, evitando erros bastante corriqueiros durante a utilização dessas ferramentas computacionais.

O desenvolvimento desse tipo de ferramenta é um trabalho dispendioso, mas extremamente gratificante, de forma que a motivação para estudar os futuros desafios vem de cada degrau, ou nível de dificuldade, superado.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestão para trabalhos futuros inclui-se:

- Tratamento do acoplamento poço-reservatório;
- Utilização de coordenadas cilíndricas (considerar reservatório radial);
- Tratamento tridimensional;
- Refinamento local da malha;
- Comportamento não-Newtoniano do fluido;
- Malhas não uniformes;
- Comparação com a utilização de um software comercial.

Referências

- [1] Tarek Ahmed et al. *Reservoir engineering handbook*. Gulf Professional Publishing, 2006.
- [2] Khalid Aziz and Antonin Settari. *Petroleum reservoir simulation*. Chapman & Hall, 1979.
- [3] Jerzy Banaszek. Some theoretical and practical aspects of efficient modelling of heat transfer phenomena on a finite-element grid. *Journal of Power Technologies*, 79, 1995.
- [4] GÁS NATURAL E BIOCOMBUSTÍVEIS. Anuário estatístico brasileiro do petróleo, gás natural e biocombustíveis. *Rio de Janeiro: ANP*, 2016.
- [5] EA Breitenbach et al. Reservoir simulation: state of the art. *Journal of Petroleum Technology*, 43(09):1–033, 1991.
- [6] Paula Panaro Castiñeira. Estudo da viabilidade econômica de projetos de recuperação suplementar para campos com alto grau de exploração. *Monografia. Escola Politécnica, Rio de Janeiro*, 2008.
- [7] Richard E Chapman. *Petroleum geology*, volume 16. Elsevier, 2000.
- [8] Zhangxin Chen, Guanren Huan, and Yuanle Ma. *Computational methods for multiphase flows in porous media*. SIAM, 2006.
- [9] Keith Coats et al. Reservoir simulation: State of the art (includes associated papers 11927 and 12290). *Journal of Petroleum Technology*, 34(08):1–633, 1982.
- [10] Jonas Cordazzo et al. Simulação de reservatórios de petróleo utilizando o método ebfvm e multigrid algébrico. 2006.
- [11] Arthur T Corey et al. The interrelation between gas and oil relative permeabilities. *Producers monthly*, 19(1):38–41, 1954.
- [12] FD da S Curbelo. Recuperação avançada de petróleo utilizando tensoativos. *Doutorado, Departamento de Engenharia Química, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal-RN*, 2006.
- [13] Álvaro Luiz De Bortoli. *Introdução à dinâmica de fluidos computational*. Ed. Universidade/UFRGS, 2000.
- [14] Armando de Oliveira Fortuna. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. Edusp, 2000.

- [15] José Luciano de Mattos Dias and Maria Ana Quaglino. *A questão do petróleo no Brasil: uma história da Petrobrás*. 1993.
- [16] Turgay Ertekin, Jamal H Abou-Kassen, and Gregory R King. *Basic Applied Reservoir Simulations*. Society of Petroleum Engineers, 2001.
- [17] John R Fanchi, KJ Harpole, and SW Bujnowski. Boast: a three-dimensional, three-phase black oil applied simulation tool (version 1. 1). volume i. technical description and fortran code. Technical report, Keplinger and Associates, Inc., Tulsa, OK (USA); BDM Corp., Bartlesville, OK (USA), 1982.
- [18] Da-kuang Han, Qin-lei Chen, and Cun-zhang Yan. Fundamentals of numerical reservoir simulation, 1993.
- [19] American Petroleum Institute. *Recommended practice for planning, designing, and constructing fixed offshore platforms*, volume 2. American Petroleum Institute, 1989.
- [20] M Rafuqul Islam, M Enamul Hossain, S Hossien Mousavizadegan, Shabbir Mustafiz, and Jamal H Abou-Kassem. *Advanced Petroleum Reservoir Simulation: Towards Developing Reservoir Emulators*. John Wiley & Sons, 2016.
- [21] Tom Aage Jelmert, N Chang, L Høier, Sultan Pwaga, Collins Iluore, Øystein Hundseth, Federico Juárez Perales, and Muhammad Usman Idrees. Comparative study of different eor methods. *Norwegian University of Science & Technology, Trondheim, Norway*, 2010.
- [22] STEVE Levine. O petróleo e a glória—são paulo: Ed. *Landscape*, 2007.
- [23] Clovis R Maliska. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional: fundamentos e coordenadas generalizadas*. Livros Técnicos e Científicos, 1994.
- [24] Francisco Marcondes, Clovis R Maliska, and Mário C Zambaldi. A comparative study of implicit and explicit methods using unstructured voronoi meshes in petroleum reservoir simulation. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 31(4):353–361, 2009.
- [25] Marcelo Danenberg Marsili. Simulação numérica da injeção de água como método de recuperação suplementar para um campo com alto grau de exploração. *Monografia. Rio de Janeiro: UFRJ/Escola Politécnica*, 2008.

- [26] Calvin C Mattax, Robert L Dalton, et al. Reservoir simulation (includes associated papers 21606 and 21620). *Journal of Petroleum Technology*, 42(06):692–695, 1990.
- [27] Stephen G Nash. *A history of scientific computing*. ACM, 1990.
- [28] RL Nogueira, ICM Lima, BRB Fernandes, and F Marcondes. Simulação de reservatório de petróleo utilizando o modelo black-oil em conjunto com malhas não-estruturadas. *HOLOS*, 2, 2012.
- [29] J Caleia Rodrigues. *A geopolítica do petróleo: anatomia dos conflitos: diplomacias, seguranças soberanias*. 2000.
- [30] Adalberto José Rosa and Renato de Souza Carvalho. *Previsão de comportamento de reservatórios de petróleo: métodos analíticos*. Interciência, 2002.
- [31] Adalberto José Rosa, Renato de Souza Carvalho, and José Augusto Daniel Xavier. *Engenharia de reservatórios de petróleo*. Interciência, 2006.
- [32] Cindy Pamela Aguirre Ruiz. Estudo comparativo da injeção de água usando poços verticais e horizontais. Master’s thesis, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2012.
- [33] PES Santos, RB Araujo, AM de C Lima, and APSC Santana. Métodos de recuperação secundária convencionais. *Sergipe: Universidade Tiradentes*, pages 2010–2, 2010.
- [34] Abdus Satter, Ghulam M Iqbal, and James L Buchwalter. *Practical enhanced reservoir engineering: assisted with simulation software*. Pennwell Books, 2008.
- [35] Richard C Selley and Stephen A Sonnenberg. *Elements of petroleum geology*. Academic Press, 2014.
- [36] Ciro R SILVA. Estudo comparativo entre a injeção de água e de gás em um reservatório com óleo leve. 2012. *Trabalho de Conclusão de Curso de Engenharia de Petróleo—Universidade Federal do Rio Grande do Norte*.
- [37] JR SOUZA. Bg simulador numérico bidimensional para escoamento monofásico em meios porosos. *Macaé-RJ. Universidade Estadual do Norte Fluminense*, 2013.
- [38] Kenitiro Suguio. *Geologia sedimentar*. Edgard Blücher, 2007.

- [39] Wilson Teixeira, M Cristina Mutta de Toledo, Thomas Rich Fairchild, and F.(Org.) TAIOLI. *Decifrando a terra*. Oficina Textos, 2001.
- [40] Santos A Enriquez-Remigio Ellen Thais and A Cerciliar. Solução numérica da equação de difusão hidráulica linear do óleo 1d mediante o método das diferenças finitas.
- [41] José Eduardo Thomas. *Fundamentos de engenharia de petróleo*. Interciência, 2001.
- [42] Harald Winkler, Randall Spalding-Fecher, Stanford Mwakasonda, Ogunlade Davidson, et al. Sustainable development policies and measures: starting from development to tackle climate change. In *Building on the Kyoto Protocol: Options for protecting the climate*, pages 61–87. WRI, 2002.
- [43] Daniel Yergin. O petróleo: uma história mundial de conquistas, poder e dinheiro. *São Paulo: Paz e Terra*, 2010.
- [44] Marcelo Ferreira Zampieri et al. Injeção contínua e alternada de água e de polímeros para a recuperação de petróleo. 2012.