

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ  
ESCOLA POLITÉCNICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA MECÂNICA – PPGEM**

**TULIO PAIM HORTA**

**VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
UTILIZANDO A NOTAÇÃO STRAIN GRADIENT**

**CURITIBA**

**2019**

**TULIO PAIM HORTA**

**VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
UTILIZANDO A NOTAÇÃO STRAIN GRADIENT**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica, Curso de pós-graduação em Engenharia mecânica, departamento de ciências exatas e de tecnologia da Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Orientador: Prof. João Elias Abdalla Filho PhD

**CURITIBA**

**2019**

**PÁGINA RESERVADA PARA FICHA CATALOGRÁFICA QUE DEVE SER  
CONFECCIONADA APÓS APRESENTAÇÃO E ALTERAÇÕES SUGERIDAS  
PELA BANCA EXAMINADORA.**



**TÚLIO PAIM HORTA**

**VIBRAÇÃO LIVRE DE VIGAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS  
UTILIZANDO A NOTAÇÃO STRAIN GRADIENT**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Engenharia Mecânica, Curso de pós-graduação em Engenharia mecânica, departamento de ciências exatas e de tecnologia da Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

**COMISSÃO EXAMINADORA**

---

Professor 1 (Titulação e nome completo)  
Instituição 1

---

Professor 2 (Titulação e nome completo)  
Instituição 2

---

Professor 3 (Titulação e nome completo)  
Instituição 3

Curitiba, \_\_\_\_ de \_\_\_\_\_ de 2019.

A minha querida Família.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus pela saúde e orientação espiritual como base de força em todos os desafios impostos.

Agradeço aos professores que me auxiliaram por meio dos conhecimentos ensinados. Em especial, agradeço ao professor João Elias Abdalla Filho, pelo auxílio e paciência e dedicação em me orientar para o desenvolvimento deste trabalho, me sinto privilegiado e orgulhoso em trabalhar nessa pesquisa junto com o professor.

Agradeço a Jane, pelo auxílio e orientação ao longo do curso. À CAPES pelo incentivo e oportunidade, que apesar das situações diversas, luta bravamente pela pesquisa nacional.

Agradeço especialmente a minha família: meu pai Antônio Cezar Lemos Horta, a minha mãe Terezinha Paim Horta e aos meus irmãos: Aldo Paim Horta, Thales Paim Horta e Rayta Paim Horta com suas famílias que em todos os momentos estavam ao meu lado. A minha querida, amada e inspiradora esposa Jerusa Correa Piccolo Horta pelo incentivo, companheirismo e paciência ao longo desta grande jornada de estudos. E a minha joia de inspiração Yasmin Piccolo Horta.

"A simplicidade é o critério para encontrar novas leis físicas ... Se é elegante, é uma regra geral: você está no caminho certo."

(Kip Thorne)

"Não existem métodos fáceis para resolver problemas difíceis."

(René Descartes)

## RESUMO

Este trabalho apresenta um estudo sobre vibração livre de vigas usando elementos finitos formulados na notação *strain gradient*. Modelos de vigas de Euler-Bernoulli e de viga de Timoshenko são empregados. O modelo de viga de Euler-Bernoulli não contém termos espúrios em sua formulação. Considera-se os efeitos do termo de cisalhamento parasítico presente na formulação do elemento de viga de Timoshenko nas características de convergência das frequências naturais. Observa-se que esse termo espúrio retarda significativamente essa convergência. A notação *strain gradient* permite que o termo de cisalhamento parasítico seja precisamente identificado e eliminado. Assim, o estudo de seus efeitos pode ser realizado comparando as versões do modelo com e sem esse termo. Analisa-se vigas com diferentes condições de contorno, para materiais isotrópicos e compósitos laminados. Rotinas para a análise de vibração livre de vigas são implementadas no programa LAMFEM em linguagem FORTRAN®. A técnica de redução de Guyan para limitar o número de frequências e modos de vibração naturais é empregada.

**Palavras-chave:** Vibração Livre, Notação *strain gradient*, Vigas de Timoshenko, método de elementos finitos, redução de Guyan, compósitos laminados.



## ABSTRACT

This paper presents free vibration analysis using finite elements formulated in strain gradient notation. Euler-Bernoulli and Timoshenko beam models are implemented. Euler-Bernoulli beam model no contains spurious terms in its formulation. The effects of the parasitic shear term present in Timoshenko beam formulation element under convergence characteristics of frequencies are considered. It is observed that this term spurious significantly retard this convergence. The strain gradient notation allows the parasitic shear term to be precisely identified and eliminated. Thus, the study of its effects can be performed by comparing the model versions with and without this term. Beams with different boundary conditions are analyzed for isotropic materials and composite laminated. Routines for free vibration analysis of beam are implemented in LAMFEM using FORTRAN® programming language. Guyan's reduction technique to limit the number of frequencies and natural vibration modes is applicated.

**Keywords:** Free Vibration, strain gradient notation, Timoshenko beam, Finite element method, Guyan Reduction, Composite laminated.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Viga típica com a disposição de carregamentos .....	29
Figura 2 – Deformação da viga segundo a teoria de viga de Euler-Bernoulli. ..	32
Figura 3 – Deformação da viga segundo a teoria de viga de Timoshenko. ....	33
Figura 4 – Elemento com dois nós e dos deslocamentos respectivos .....	37
Figura 5 – Elementos e distribuição dos nós – sem redução de d.o.f. ....	45
Figura 6 – Elementos e distribuição dos nós – com redução de d.o.f. ....	45
Figura 7 – Configuração das vigas e condições de contorno .....	48
Figura 8 – Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-livre, sem termos espúrios com 64 elementos, para os 12 primeiros modos de vibração .....	48
Figura 9 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-livre, para a relação $h/L = 0,1$ .....	50
Figura 10 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-livre, para a relação $h/L = 0,05$ .....	51
Figura 11 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-livre, para a relação $h/L = 0,025$ .....	52
Figura 12 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-livre, para a relação $h/L = 0,0125$ .....	53
Figura 13 – Configuração das vigas e condições de contorno .....	54
Figura 14 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para viga de compósito laminado, com lâminas cruzada assimétrica Engastada-Livre, para a relação $h/L = 0,0625$ .....	55
Figura 15 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para viga de compósito laminado, com lâminas angular simétrica Engastada-Livre, para a relação $h/L = 0,0625$ .....	56
Figura 16 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para viga de compósito laminado, com lâminas angular antissimétrica Engastada-Livre, para a relação $h/L = 0,0625$ .....	57
Figura 17 – Primeiro modo de vibração para viga de compósito laminado, cruzada assimétrica engastada-livre. ....	58
Figura 18 – Segundo modo de vibração para viga de compósito laminado, cruzada assimétrica engastada-livre. ....	59

Figura 19 – Terceiro modo de vibração para viga de compósito laminado, cruzada assimétrica engastada-livre. ....	60
Figura 20 – Configuração das vigas e condições de contorno .....	61
Figura 21 – Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-livre, sem termos espúrios com 64 elementos, para os 12 primeiros modos de vibração .....	61
Figura 22 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-Engastada, para a relação $h/L = 0,1$ .....	62
Figura 23 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-Engastada, para a relação $h/L = 0,05$ .....	63
Figura 24 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-Engastada, para a relação $h/L = 0,025$ .....	64
Figura 25 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-Engastada, para a relação $h/L = 0,0125$ .....	65
Figura 26– Determinação de matriz global por matrizes de elementos .....	79
Figura 27 – Modelo de viga com material Isotrópico .....	80
Figura 28 – Modelo de viga com material ortotrópico (laminado) .....	82
Figura 29 – Sequência de laminação determinação por ângulo .....	83

## **LISTA DE TABELAS**

Tabela 1 – Constantes de engenharia para materiais ..... 46

Tabela 2 – Valores de Frequências naturais [rad/s] para vigas CF ( $h/L = 1$ ) .. 47

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

MEF	Método dos Elementos Finitos
EBT	Teoria de vigas de Euler-Bernoulli, do inglês <i>Euler-Bernoulli Beam theory</i>
TBT	Teoria de vigas de <i>Timoshenko</i> , do inglês <i>Timoshenko Beam theory</i>
FSTD	Teoria da Primeira Ordem de Mindlin, do inglês <i>First-order Shear Deformation Theory</i>
ESG	Elemento <i>Strain Gradient</i>

## LISTA DE SIMBOLOS

$L$	Comprimento da viga
$x$	Coordenadas cartesianas no eixo $x$
$y$	Coordenadas cartesianas no eixo $y$
$z$	Coordenadas cartesianas no eixo $z$
$u_i$	Deslocamento axial (direção $x$ , nó $i$ )
$v_i$	Deslocamento axial (direção $y$ , nó $i$ )
$w_i$	Deslocamento axial (direção $z$ , nó $i$ )
$q_{ij}$	Rotação axial (direção $j$ , nó $i$ )
$J$	Transformação Jacobiana ( $J = dx / ds$ )
$N_i$	Função interpoladora ou função de forma
$E$	Módulo de elasticidade Longitudinal
$E_f$	Módulo de elasticidade Longitudinal da Fibra
$E_m$	Módulo de elasticidade Longitudinal da matriz
$G$	Módulo de elasticidade Transversal
$G_f$	Módulo de elasticidade Transversal da Fibra
$G_m$	Módulo de elasticidade Transversal da matriz
$\nu_f$	Coefficiente de Poisson da fibra
$\nu_m$	Coefficiente de Poisson da matriz
$I$	Momento de inércia da seção transversal
$A$	Área da seção transversal
$k$	Fator cisalhamento
$\rho$	Densidade do material
$\rho_k$	Densidade do material para lâmina $k$
$[K]$	Matriz de rigidez
$[M]$	Matriz de massa
$C^0$	Grau de continuidade 0 da função
$C^1$	Grau de continuidade 1 da função
$b$	Dimensão da largura da base da viga
$h$	Espessura da viga
$h_k$	Espessura da viga para lâmina $k$

$[\Phi]$	Matriz de transformação que associa os deslocamentos nodais aos modos de deformação
$[T_{sg}]$	Matriz de transformação que associa as deformações aos modos de deformação
$\{\varepsilon_{sg}\}$	Vetor contendo os modos de deformação que o elemento representa

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>17</b>
1.1 OBJETIVOS .....	19
1.1.1 <b>Objetivo principal</b> .....	<b>19</b>
1.1.2 <b>Objetivos específicos</b> .....	<b>19</b>
1.2 METODOLOGIA DO TRABALHO.....	19
<b>2 REVISÃO LITERARIA</b> .....	<b>21</b>
2.1 VIGAS DE EULER BERNOULLI .....	21
2.2 VIGAS DE TIMOSHENKO .....	22
2.3 ESTADO DA ARTE .....	25
<b>3 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS</b> .....	<b>28</b>
3.1 INTRODUÇÃO.....	28
3.2 MODELOS MATEMÁTICOS PARA TEORIA DE VIGAS .....	29
<b>3.2.1 Modelo matemático para teoria de vigas de Euler-Bernoulli</b> .....	<b>30</b>
<b>3.2.2 Modelo matemático para teoria de vigas de Timoshenko</b> .....	<b>33</b>
3.3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS .....	37
3.4 TIMOSHENKO CONVENCIONAL .....	39
3.5 TIMOSHENKO ( <i>STRAIN GRADIENT</i> ) .....	40
<b>4 ALGORITIMOS E IMPLEMENTAÇÕES</b> .....	<b>42</b>
4.1 MÉTODO DE JACOBI GENERALIZADO;.....	43
4.2 CONDENSAÇÃO ESTÁTICA .....	44
<b>5 ANALISES NUMÉRICAS</b> .....	<b>46</b>
5.1 INTRODUÇÃO.....	46
5.1 ELEMENTOS DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI .....	47
<b>5.1.1 Viga Isotrópica Engastada-Livre (CF)</b> .....	<b>47</b>
5.2 ELEMENTOS DE VIGAS DE TIMOSHENKO .....	47
<b>5.2.1 Viga Isotrópica Engastada-Livre (CF)</b> .....	<b>48</b>
<b>5.2.2 Viga Compósito Laminado Engastada-Livre (CF)</b> .....	<b>54</b>
<b>5.2.3 Viga Isotrópica Engastada-Engastada (CC)</b> .....	<b>61</b>
<b>6 CONCLUSÃO</b> .....	<b>67</b>
<b>7 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS</b> .....	<b>69</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>70</b>
<b>APÊNDICES</b> .....	<b>73</b>



## 1 INTRODUÇÃO

Os estudos de análises estática e dinâmica vem se aprimorando nos últimos anos devido ao constante desafio de engenhar com o melhor custo benefício, mas também de uma forma precisa e segura.

Os modelos reais de engenharia apresentam uma complexidade devido a forma geométrica da seção e aos problemas em que são aplicados: cargas e Tensões, deslocamentos, cinemática, entre outros. Alguns problemas de engenharia, por sua simplicidade, podem ser resolvidos via soluções analíticas disponíveis na literatura. Outros, devido à complexidade discutida acima, não possuem soluções analíticas conhecidas e, portanto, exigem serem modelados numericamente. O método dos elementos finitos (MEF) é o método numérico para análise de problemas de valor de contorno mais largamente empregado na prática.

O (MEF) Inicialmente aplicado para análises estruturais em problemas estáticos e na sequência, reconhecido e aplicado em outros tipos de problemas: análises dinâmicas, mecânica dos fluidos, transferência de calor, eletromagnetismo, entre outros. (BATHE, 2006)

Em análises dinâmicas, as vibrações podem ser classificadas como vibrações livres e vibrações forçadas. Segundo Rao (2011) vibração livre ocorre quando um sistema, após uma perturbação inicial, continua a vibrar por conta própria, sem que nenhuma força externa atue no sistema. Em soluções de vibração livre, são calculados as frequências naturais e os modos de vibrações que por meios de modelos matemáticos são determinados pelos autovalores e autovetores respectivamente (RAO, 2011).

As frequências naturais e os modos de vibrações são determinados a partir do princípio de conservação de energia, em que as energias cinética e potencial são aplicadas afim de obter o equilíbrio. Podem ser determinadas de forma analítica ou por modelos numéricos que determinam os resultados

aproximados. Na formulação numérica os valores de massa e rigidez são apresentados de forma matricial e com a aplicação do (MEF), conforme o refino dos elementos, as matrizes são incrementadas afim de obter uma melhor aproximação por polinômios de interpolação.

O polinômio de interpolação pode ser classificado de acordo com sua ordem: primeira ordem representada por elementos lineares ou segunda ou maior para os elementos de ordem superior (quadráticos, cúbicos, entre outros), mantendo a ordem do polinômio de interpolação sendo fixa ou não, são três as aplicações: refino- $r$  determina as localizações dos nós e modifica-os sem alterar o elemento, refino- $h$ , onde se tem um aumento do número de elementos, mantendo fixo o grau do polinômio e o refino- $p$ , em que mantém-se fixo o tamanho do elemento e assim realiza um aumento da ordem dos elementos com a interpolação do polinômio (RAO, 2011).

Com a utilização do (MEF), o método pode apresentar erros que segundo Dow (1999), podem ser classificadas em dois tipos: erros de discretização, em que ocorrem devido as funções de aproximação nos elementos finitos não conterem uma solução exata ao modelo matemático. Outra forma de erro apresentada, são os erros em elementos, em que são formados por anomalias nas representações dos elementos individuais, podendo então em alguns casos serem distorcidos ou mesmo estarem ausentes. Essas falhas afetam negativamente o conteúdo de energia de deformação dos elementos individuais e introduzem diretamente na representação, contribuindo, dessa forma também para os erros de discretização (DOW, 1999).

Dow (1999) descreve que os erros podem ser identificados previamente, através de uma nova abordagem, a notação, em inglês, *strain gradient*, em que apresenta uma solução em interpolações polinomiais de deslocamento que serve como base no desenvolvimento dos elementos finitos com relação a uma interpretação física. Essa relação entre a notação e os processos físicos permite fornecer novos recursos computacionais implementados, formulando os elementos de um problema sem esses erros. (DOW, 1999).

Este é o primeiro trabalho em que é utilizado métodos dos elementos finitos *strain gradient* em análises de dinâmica estrutural.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo principal

O objetivo principal deste trabalho é analisar a vibração livre de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko utilizando elementos finitos *strain gradient*.

### 1.1.2 Objetivos específicos

Para cumprir o objetivo principal, pretende-se:

- Investigar os efeitos do termo de cisalhamento parasítico presente no modelo de viga de Timoshenko na convergência das frequências.
- Implementar a formulação no código LAMFEM desenvolvido em linguagem FORTRAN ®.

## 1.2 METODOLOGIA DO TRABALHO

Para o desenvolvimento do trabalho, serão adotados a seguinte ordem dos procedimentos metodológicos:

- i. Realização de uma revisão literária do conceito de viga de Euler-Bernoulli;
- ii. Realização de uma revisão literária do conceito de viga de Timoshenko;
- iii. Realização de uma revisão literária, do estado da arte, das vigas de Timoshenko com aplicações de vibrações livre;
- iv. Verificação das soluções analíticas para as vigas de Euler Bernoulli e de Timoshenko;

- v. Formulação dos Elementos Finitos para as soluções das vigas, em análises de vibração livre implementando formulação com a notação *strain gradient*.
- vi. Implementação de algoritmos para as análises de vibração livre em modelos de vigas;
- vii. Realização de simulações numéricas com elementos de vigas variando configurações geométricas e de materiais isotrópicos e ortotrópicos, verificando as frequências e os modos de vibração;
- viii. Análise dos resultados obtidos.

## 2 REVISÃO LITERARIA

Vigas são componentes estruturais fundamentais em estudos de engenharia, seja no campo da engenharia civil com aplicações em grandes estruturas metálicas, obras de construções civis e na área da engenharia mecânica, em estruturas de aeronaves, automotivas e em máquinas mecânicas industriais.

Neste capítulo será apresentado uma breve análise cronológica dos conceitos e das aplicações dos modelos de vigas, por meio dos mais importantes artigos relacionados ao assunto, introduzindo com detalhes as análises de vibração livre.

### 2.1 VIGAS DE EULER BERNOULLI

Segundo Timoshenko (1983), em um contexto descritivo histórico da evolução dos modelos de vigas, os primeiros estudos desenvolvido no século XVI pelo cientista Galileo, analisando o comportamento dos materiais através de modelos primários das vigas. Ainda segundo o autor, quase um século depois Robert Hooke, estabelece uma importante relação entre a magnitude de aplicação de força e a deformação. Essa relação linear entre força e deformação foi denominada como a lei de *Hooke*, utilizada até os dias de hoje em aplicações diversas.

Timoshenko (1983), também descreve os modelos de vigas analisados segundo as teorias respectivas:

***Euler Bernoulli (1654-1783)***: Jacobi Bernoulli verifica-se inicialmente que a curvatura de uma viga uniforme que em qualquer ponto é proporcional ao momento de flexão no mesmo ponto. Posterior a esse estudo inicial, Daniel Bernoulli, seu sobrinho, segue com as pesquisas e de forma pioneira formulou a equação diferencial do movimento de vibração. A partir destas teorias relatadas, *Leonhard Euler* analisa as formas das vigas elásticas apresentando-as sobre uma diversidade de condições de carregamento.

Dessa forma, a teoria de vigas de Euler-Bernoulli - *Euler-Bernoulli beam theory* (EBT), é descrita como uma simplificada teoria de elasticidade, na qual, verifica o cálculo de carregamento e deflexão e conceitos de análises cinemáticas para os modelos de vigas (REDDY , 2006; RIXEN; GÉRADIN, 2015).

## 2.2 VIGAS DE TIMOSHENKO

Timoshenko (1937) apresenta os estudos reescrevendo a teoria de viga de Euler-Bernoulli, em que as seções planas inicialmente perpendiculares ao eixo principal da viga, permanecem planas após a deformação estrutural da viga, porém, não obrigatoriamente perpendiculares ao eixo. O autor descreve também uma equação diferencial utilizada em análises de vibração livre comparando-a com a formulação da teoria (EBT). Na teoria de vigas de Timoshenko – *Timoshenko Beam Theory* (TBT), o autor inclui na teoria (EBT) os efeitos de cisalhamento e inércia rotativa. Essas análises apresentadas serão mais detalhadas nos capítulos seguintes.

Um dos primeiros artigos sobre o assunto dos modelos de vigas é descrito por Kruszewski et al. (1949) em que realiza, de forma pioneira, análises teóricas com resultados numéricos as frequências naturais para um modelo de viga uniforme sob o efeito de cisalhamento transversal e de inércia rotativa.

Guyan (1965) apresenta um procedimento para redução da matriz de massa não diagonal para análise modal, baseado no procedimento de redução da matriz de rigidez em análises estáticas (condensação estática). O autor indica que o resultado obtido é uma aproximação do resultado matematicamente exato dos autovalores e autovetores (frequências naturais e modos de vibração).

Em uma comparação entre os modelos de vigas (TBT) e (EBT), Kapur (1966), destaca o modelo de viga Timoshenko para análises de vibração utilizando o (MEF) e dessa forma apresenta resultados de frequências naturais e modos de vibração de vigas uniformes e não uniformes, para problemas de valor de contorno, apresentando os efeitos de cisalhamento e de inércia giratória.

Przemieniecki J.S. (1969) apresenta uma série de estudos importantes para a formulação dos modelos de vigas. Destacam-se as formulações de funções de formas, matrizes de rigidez e massa em análises unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais.

Sobre o tema de elementos finitos para modelos de vigas de Timoshenko, Thomas et al. (1973) apresenta um novo elemento de dois nós e com três graus de liberdade em cada nó. Em que, através de resultados gráficos demonstra a convergência de frequência de uma forma mais rápida, para a curva de seu elemento comparado a outros elementos de artigos anteriores e com os graus de liberdade e suas formulações diferentes para os elementos. Na sequência, Thomas; Abbas (1975) apontam um modelo capaz de verificar, com diferentes condições de contorno, os efeitos do elemento para vibração forçada e vibração livre.

Dawe (1978), em seu artigo, apresenta um elemento para o modelo de viga (TBT) em que as propriedades dos elementos são acopladas no campo de deslocamentos. O deslocamento vertical é interpolado em uma função polinomial de quinta ordem, enquanto que a rotação em um polinômio de quarta ordem e para ambos não há a presença de termos de inercia rotativa. Esse somente é implementado nos pontos extremos do elemento. Os resultados numéricos são apresentados por análises de frequências, em que se observa boas características de convergência do elemento apresentado, comparado a outras referências, entre elas

Em um estudo Tessler e Dong (1981), descrevem uma análise em ordem hierárquica estudos de elementos para os modelos de vigas de Timoshenko, de acordo com a ordem das funções de interpolação para os deslocamentos e as configurações dos nós nos elementos. Dessa forma, apresentando resultados comparativos de vibrações com carregamento para as referências de elementos apresentados.

Os autores Shastry; Rao (1985), reforçaram a tese de eficiência dos modelos de vigas (TBT) com variação de seções transversais, os efeitos da deformação de cisalhamento e da inércia rotatória são significativos ao aplicar em vigas com comprimentos curtos, apresentando resultados numéricos em várias condições de contorno, em análises modais, para os cinco primeiros modos de vibração.

Bakr; Shabana (1987), apresentaram resultados numéricos que indicavam que a inércia e o cisalhamento rotativos têm um efeito significativo na resposta dinâmica de sistemas com grandes estruturas de larga escala de rotações angulares e nos quais o movimento de referência e a deformação elástica são acoplados.

Uma publicação importante para os estudos é proposto pelos autores Friedman e Kosmatka (1993). Abordando uma análise das matrizes de rigidez, massa e força consistente para um simples elemento de viga Timoshenko de dois nós com base no princípio de Hamilton. Os resultados numéricos são apresentados afim de mostrar que o elemento corresponde exatamente com o deslocamento de uma viga curta sujeita a cargas distribuídas complexas usando apenas um elemento e resultados de satisfatórios para as frequências naturais comparados com as análises de viga Timoshenko verificados anteriormente.

Corn et al. (1997) demonstraram um método para a construção de um elemento finito de dois nós baseado na redução de *Guyan* afim de apresentar resultados de formulações clássicas, mas de maneira simples e sistemática. O método apresentado de forma generalizada para obter novos elementos finitos aprimorados de três nós.

Em uma proposta de estudo Han et al. (1999) apresentaram vários modelos de vigas, incluindo as de Timoshenko, seguindo a equação de movimento para cada modelo e as expressões para condições de contorno pelo princípio variacional de Hamilton. Os resultados para as equações de frequência



foram obtidos para quatro conjuntos de condições de contorno para as vigas: livre-livre, fixado-fixado, articulado-articulado e fixado- livre.

### 2.3 ESTADO DA ARTE

As mais recentes pesquisas sobre problemas de vibrações livres em vigas, apresentam soluções explorando fundamentos dos modelos (TBT). Destaca-se neste tópico do estado da arte os artigos publicados nos últimos vinte anos, sejam com enriquecimento de MEF, comportamento com variações das formas de refino, comportamento das vigas com variações de geometrias das seções transversais e abordagens para eliminações de erros com implementações de métodos.

A pesquisa de Mukherjee e Prathap (2001) utilizou uma abordagem de verificação dos elementos baseados exclusivamente em requisitos de integridade e continuidade. Conseqüentemente são executados erroneamente em uma determinada classe de problemas, devido aos efeitos de travamento, (travamento por cisalhamento, travamento por membrana, travamento volumétrico). Dessa forma propõem-se um método para identificar espaços em campos-inconsistentes para projeções que mostram o comportamento dos travamentos, utilizando como base os modelos de TBT.

O trabalho de analisar o comportamento de TBT e as placas de Mindlin axissimétricas em vibração livre é apresentado por Lee e Schultz (2004). A análise, tem como base o método pseudoespectral de *Chebyshev*, utilizados para mitigar erros de aproximação, diversificando as análises em condições de contorno fixadas, com suporte simples, livre e deslizante das vigas, para diferentes razões entre espessura / comprimento.

Abdalla Fo et al. (2006) apresentam uma análise de elementos finitos em vigas TBT para materiais compósitos laminados (ortótropos), formulado com a utilização da notação *strain gradient*. Nesta análise, termo de cisalhamento parasitário (espúrio) que é identificado nas expressões de tensão de

cisalhamento transversal do elemento, responsável pelo travamento. Os termos também causam erros qualitativo existente na representação da tensão de cisalhamento transversal ao longo do comprimento de uma viga. A eficácia do método é apresentada por análises numéricas dos elementos que contém o termo espúrio e, os elementos com as correções, comparando-as por soluções numéricas com modelos analíticos. O procedimento também pode apresentar para soluções de vigas isotrópicas com a matriz de rigidez apresentada.

Um estudo de vibração livre para vigas de TBT e placas de Mindlin foi apresentado por Ferreira e Fasshauer (2006). Com base em uma análise com um novo esquema numérico, em que se combinam funções de base radial e métodos pseudoespectrais afim de atingir resultados precisos.

Os autores Xu e Wang (2011) apresentaram soluções para os problemas de análises de vibrações livres em vigas de TBT, utilizando a convolução singular discreta. Variando as condições de contorno em proporções de espessura / comprimento ( $h / L$ ) comparando os resultados com as soluções existentes na literatura. Apresenta-se resultados gráficos de convergência das frequências.

Uma importante pesquisa sobre a análise de vibração livre de vigas de *Timoshenko* foi publicado pelos autores Lee e Park (2013), afim de determinar as frequências naturais das vigas espessas utilizando uma abordagem isométrica. Com a utilização do modelo de viga TBT incluíram-se a deformação transversal do cisalhamento e o efeito de inércia rotatória. O estudo apresenta três formas de refino  $h$ ,  $p$  e  $k$ , que são usados na análise e a identificação do travamento por cisalhamento. Os autores também apresentam ao utilizar os exemplos numéricos.

Shahadaf TH (2013) apresentou um trabalho de análise em vigas de compósitos laminados, explorando o MEF com base na teoria de FSDT e HSDT. Neste trabalho formulou as matrizes de rigidez e massa para os elementos.

O método de enriquecimento em elementos finitos foi apresentado em análise de vibrações livre em modelos de vigas de Timoshenko pelo autor Shang Hsu (2016) Utilizando as funções de Lobatto para aproximação hierárquica no contexto do Método de Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH), funções de forma de Lagrange para partição da unidade e a aproximação utilizando funções trigonométricas no contexto do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Apresenta também de forma breve o travamento de cisalhamento em análise estática.

Vasconcelos et al. (2016) apresentaram um desenvolvimento completo para análise de vigas uniformes de Timoshenko, apresentaram vibração transversal para a condição de contorno clássica. Desenvolveram também em termos de parâmetros sem os efeitos de rotação e cisalhamento. Neste trabalho a matriz de rigidez e massa para um elemento de viga de dois nós com dois graus de liberdade por nó é obtida com base no princípio de Hamilton. Os polinômios lagrangianos cúbicos e quadráticos são tornados interdependentes, dessa forma, solicitados para que eles satisfaçam as duas equações diferenciais homogêneas associadas ao TBT.

Karamanlı (2018) apresentou em um trabalho o comportamento de vibração livre de duas vigas com o método de material com gradação funcional (FGM). Neste trabalho foi analisada, uma estrutura constituída de pelo menos duas camadas, na qual a fração de volume da segunda aumenta através da espessura, em um gradiente que pode ser contínuo ou em camadas, aplicação sob várias condições de contorno e aplicando a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem *Reddy beam Theory* (RBT).

Foram citados alguns importantes artigos que realizaram análises dinâmicas de vigas de Timoshenko, alguns deles com aplicação do (MEF)

### 3 FORMULAÇÃO DE ELEMENTOS FINITOS

Este capítulo introduz, primeiramente o conceito de método dos elementos finitos (MEF). Na sequência, afim de descrever as formulações dos modelos de vigas de Euller-Bernoulli e de Timoshenko, através dos conceitos matemáticos e da formulação MEF para as mesmas.

#### 3.1 INTRODUÇÃO

O método MEF é um método de aproximação em que apresenta soluções para modelos matemáticas as quais descrevem os fenômenos físicos, de modo que, define um determinado domínio em um conjunto de subdomínios. Sendo assim, cada um deste representa uma equação aproximada de métodos quaisquer. Um fator importante a se destacar é o fato da facilidade que ao subdividir o domínio, uma função complexa pode ser representada por conjuntos de polinômios simples (BATHE, 2006; COOK; MALKUS, 2013; REDDY, 2006)

O método determina, a partir de formas complexas do domínio, em geometrias, subdomínios de elementos com formas e segmentos: (i) segmento lineares unidimensional, bidimensional e tridimensional; (ii) triangulares ou quadriláteros em duas dimensões e (iii) tetraedro ou hexaedro em três dimensões. Sendo assim, aplicam-se esses elementos em barras, vigas, membranas, placas, cascas e sólidos (COOK; MALKUS, 2013; RIXEN; GÉRADIN, 2015).

Contudo, para uma configuração dos elementos na aplicação do método, as funções de interpolação do campo de deslocamento são fundamentais na formulação matricial e devem seguir as seguintes etapas:

- Define-se a interpolação através de funções contínuas por partes, dessa forma, dentro de cada elemento, o campo de deslocamento é configurado por funções polinomiais que representam o comportamento estrutural do elemento na forma global.

- As funções são escolhidas de forma que os parâmetros (coordenadas generalizadas do método Rayleigh-Ritz) possam ser valores locais do campo de deslocamento na estrutura. Dessa maneira, a continuidade do campo de deslocamento global pode ser alcançada no nível estrutural através da simples identificação dos parâmetros.

No apêndice A, deste trabalho, descreve-se detalhadamente cada uma das funções de interpolação de acordo com os modelos dos elementos.

### 3.2 MODELOS MATEMÁTICOS PARA TEORIA DE VIGAS

Para uma compreensão do comportamento dos modelos de vigas para análises dinâmicas, apresenta-se as teorias principais dos modelos de vigas: Euler-Bernoulli, Rayleigh, *Shear* e *de* Timoshenko. Dentre essas, é discutido com mais detalhes duas teorias: Euler-Bernoulli (EBT) e Timoshenko (TBT), apresentando os modelos matemáticos com detalhes das equações de movimento para cada uma. A partir do diagrama de corpo livre, compreende-se a disposição da forma de uma viga com possíveis carregamentos para análises estáticas e dinâmicas.

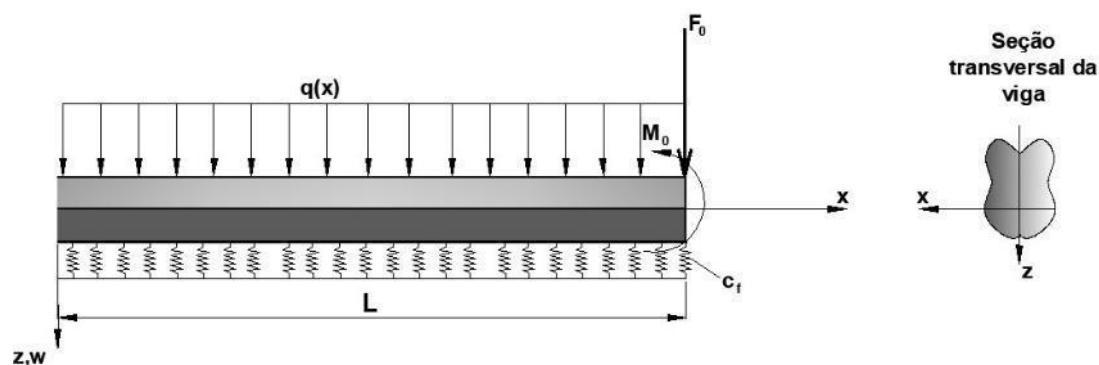


Figura 1 – Viga típica com a disposição de carregamentos

Fonte: Reddy J. N. (2006) - adaptado

Na literatura, os termos podem ser apresentados da seguinte forma:

$q(x)$	$\bar{p}(x)$	Carga distribuída
$M_0$	$\bar{M}(x)$ ou $\bar{\psi}(x)$	Momento fletor
$F_0$	$\bar{T}(x)$ ou $\bar{w}(x)$	Carga força aplicada

Neste trabalho, para o estudo de vibrações livres, tem-se a hipótese de cargas nulas e negligencia-se o termo  $c_f$ , que representa amortecimento da viga.

### 3.2.1 Modelo matemático para teoria de vigas de Euler-Bernoulli

Para o modelo de viga clássica ou modelo de viga de Euler-Bernoulli, pode ser obtida com a utilização do princípio estendido de Hamilton (HAN ET AL., 1999; REDDY, 2006; RAO, 2011).

A energia potencial de uma viga uniforme submetida a flexão é:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (1)$$

A energia cinética é expressa por:

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2)$$

Onde  $L$  é o comprimento da Viga,  $E$  representa o módulo de elasticidade,  $I(x) = \int_A z^2 dA \Rightarrow I$  o momento de inércia para a seção transversal sobre o eixo com a linha neutra,  $A$  área da seção transversal,  $\rho$  densidade do material da viga. Sendo que,  $EI$  representa a rigidez de flexão da seção transversal e  $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$  a curvatura da viga.

Para os modelos de vigas (EBT), considera-se as seguintes hipóteses: (DOW, 1999):

1. A seção transversal da viga não sofre deformação.
2. O deslocamento transversal é uniforme limitado para o deslocamento transversal no plano  $O_{xz}$ .

$$w = w(x) \quad v = 0 \quad (3)$$

3. O deslocamento axial é resultante a partir da rotação da seção.
4. A rotação é tal que as seções transversais permanecem ortogonais ao eixo neutro, mesmo após a deformação estrutural da viga.

$$u(x, z) = -z \frac{dw(x)}{dx} \quad (4)$$

Com a hipótese de linearidade geométrica, pode-se apresentar as expressões de deformações:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w(x)}{\partial x^2} \quad (5)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (6)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0 \quad (7)$$

A equação (6) apresenta que a hipótese da equação (3) representa a negligência da deformação cisalhante do material da viga.

Segundo o princípio de Hamilton, o Lagrangeano, é expresso por:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho A \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 - EI \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \quad (8)$$

E com isso, a partir da equação (7) para os modelos de vigas (EBT) a equação diferencial parcial de movimento é:

$$\rho A \frac{\partial^2 w(t, x)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(t, x)}{\partial x^4} = f(t, x) \quad (9)$$

Considerando para vibrações livres  $f(t, x) = 0$

Pode-se assim representar ilustradamente a viga, segundo a teoria (EBT).

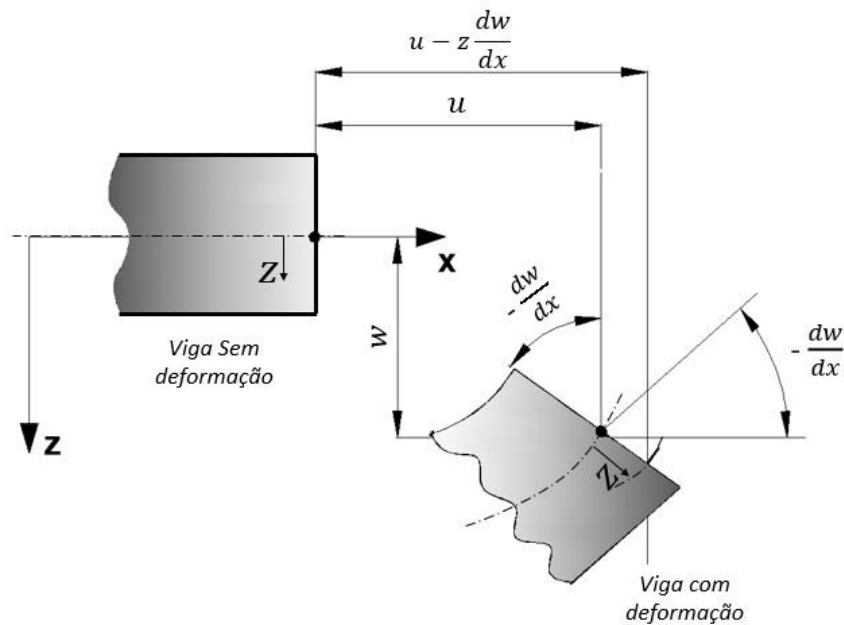


Figura 2 – Deformação da viga segundo a teoria de viga de Euler-Bernoulli.

Fonte: (REDDY, 2006) - adaptado



### 3.2.2 Modelo matemático para teoria de vigas de Timoshenko

Na teoria de vigas de Timoshenko – *Timoshenko beam theory* (TBT), assume-se que reescrevendo a teoria de viga de Euler-Bernoulli, as seções planas inicialmente perpendiculares ao eixo principal da viga, permanecem planas após a deformação estrutural da viga, entretanto, não obrigatoriamente perpendiculares ao eixo. Pode-se assim representar ilustradamente a viga, segundo a teoria (TBT) (DOW, 1999; HAN ET AL., 1999; REDDY, 2006;).

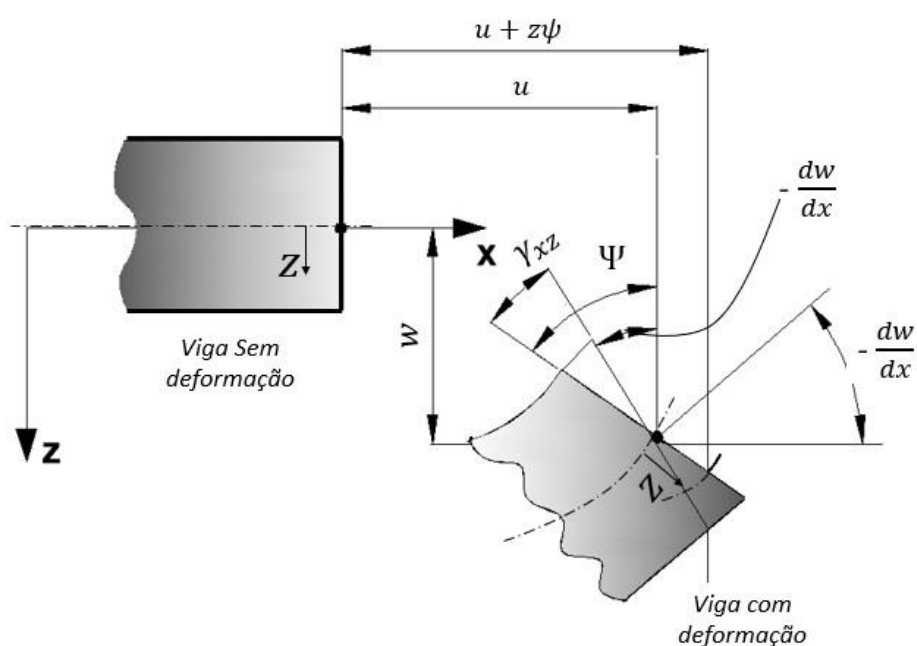


Figura 3 – Deformação da viga segundo a teoria de viga de Timoshenko.

Fonte: (REDDY, 2006) - adaptado

A equação diferencial governante para um elemento de viga de Timoshenko, pode ser reescrita a partir da equação (9), representada pela viga (EBT), desta forma a equação governante para vigas de Timoshenko é dada por

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left[ k'GA \left( \psi + \frac{dw}{dx} \right) \right] + c_f w &= q \\ -\frac{d}{dx} \left( EI \frac{d\psi}{dx} \right) + k'GA \left( \psi + \frac{dw}{dx} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

A equação é definida a partir da equação de equilíbrio:

$$M(x) - M(x + dx) + mr^2\ddot{\psi} dx + (\bar{p} - m\dot{w})dx \frac{dx}{2} - T(x)dx - \bar{q}dx = 0 \quad (11)$$

Com  $dx$  tendendo a zero:

$$-\frac{\partial M}{\partial x} - \tau(x) + mr^2\ddot{\psi} - \bar{q} = 0 \quad (12)$$

Nota-se então que o momento de flexão e a força de cisalhamento podem ser calculados através da integração nas tensões internas na seção transversal:

$$M = - \int_A z\sigma_x dA = - \int_A zE\varepsilon_x dA = EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (13)$$

$$\tau = \int_A \tau_{xy} dA = k'AG\gamma_{xz} = k'AG \left( -\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (14)$$

- A deflexão de cisalhamento da seção transversal é apresentada pela introdução de uma nova variável  $\psi$ . Dessa forma os deslocamentos podem ser expressos por:
- O termo  $\psi(x)$  é independente de  $w$ .

$$\begin{aligned} w(x, z) &= -z\psi(x) \\ v &= 0 \\ w &= w(x) \end{aligned} \quad (15)$$

Os termos de aproximação de primeira ordem para deformações são:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \quad (16)$$

$$\varepsilon_z = 0 \quad (17)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (18)$$

Para essa teoria de vigas de Timoshenko a energia de deformação é expressa pela equação:

$$u = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \int_A E z^2 \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 dA + \int_A \sigma_{xz} \left( -\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) dA \right\} dx \quad (20)$$

$$u = \frac{1}{2} \int_{-a}^a EI \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 dx + \int_{-a}^a k' AG \left( \theta_z + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (21)$$

Onde  $A$  é a área da seção transversal e  $G$  é o módulo de cisalhamento do material. O fator  $k'A$  é definido seção reduzida e é calculado de acordo com a teoria clássica de viga. O fator  $k'$  tem seu valor, de acordo com a forma da seção transversal:

Retangular	(5/6)
Circular plana	(1/ 1,175)

A energia cinética, para vigas de Timoshenko é definida pela equação:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{1}{2} \int_0^l \int_A \rho (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dA dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l m r^2 \dot{\psi}^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l m \dot{w}^2 dx \end{aligned} \quad (22)$$

Onde, em que  $m$  e  $r$ , respectivamente representam a massa por unidade de comprimento da viga e o raio de giro da seção transversal, conforme definido previamente nas equações (9) e (10).

Derivando a equação de movimento, segundo o princípio de Hamilton's, tem-se as expressões:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ k'AG \left( -\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \bar{p} = m\ddot{w} \quad (23)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + k'AG \left( -\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] + \bar{q} = mr^2\ddot{\psi} \quad (24)$$

Numa expressão Lagrangeana, tem-se:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int_0^L \left[ \rho A \left( \frac{\partial w(x)}{\partial t} \right)^2 + \rho I \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \right)^2 - k'AG \left( -\psi + \frac{\partial w(x)}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (25)$$

Condições de contorno podem ser aplicadas: Han et al. (1999)

$\psi = 0$	$w = 0$	<b>Extremidades fixas</b>
$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$	$w = 0$	<b>Extremidades apoiadas</b>
$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0$	$\left( -\psi + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$	<b>Extremidades livres</b>

### 3.3 MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

Em uma configuração dos elementos as funções de forma são aplicadas nos campos de deslocamentos nos nós dos elementos. Algumas literaturas separa a nomenclatura, de acordo com as configurações os deslocamentos nodais com relação ao modelo estrutural, como por exemplo: (REDDY, 2006)

- a) Deslocamentos axiais - *Elementos definidos em barras*
- b) Deslocamentos verticais e rotacionais - *Elementos definidos em vigas*
- c) Deslocamentos axiais + verticais e rotacionais - *Elementos em estruturas*

Importante citar esse fato para que durante uma análise literária consiga-se buscar as devidas informações. Neste trabalho, apresentaremos elementos definidos como vigas com os três deslocamentos para os nós, conforme os autores Abdalla Fo et al. (2006) e Dow (1999) descrevem em seus respectivos trabalhos, um elemento com dois nós nas extremidades.

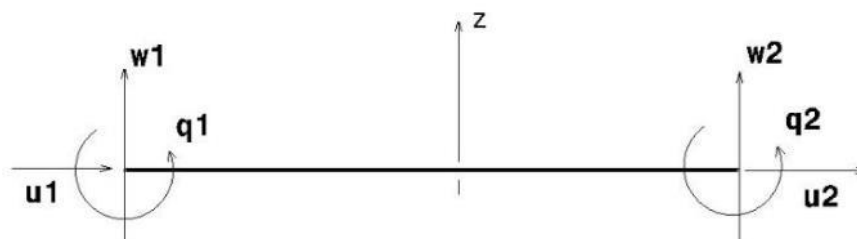


Figura 4– Elemento com dois nós e dos deslocamentos respectivos

Fonte: Abdalla Fo et al. (2006)

- Deslocamento axial ( $u$ )
- Deslocamento transversal ( $w$ )
- Deslocamento de rotação ( $q$ )

Como já descrevemos em capítulos anteriores, os problemas de engenharia são divididos em problemas com métodos discretos e contínuos. Os métodos de métodos contínuos, apresentam infinitos números de graus de liberdades, enquanto que métodos discretos finitas. Para ambos os métodos, os

problemas podem ser classificados como Equilíbrio (estática) e Autovalores e propagação (transiente). Para todos esses casos, as soluções em MEF podem ser aplicadas. Dessa forma, destacaremos neste trabalho, as equações governantes de elementos finitos em aplicações na área da cinemática, podendo ser expressas de forma matricial, conforme abaixo: (RAO, 2011)

$$[A]\vec{X} = \vec{b}$$

**1) Equilíbrio**                      Condições de contorno:  $[B]\vec{X} = \vec{g}$                       (26)

---

$$[A]\vec{X} = \lambda[B]\vec{X}$$

**2) Autovalores**                      Condições de contorno:  $[C]\vec{X} = \vec{g}$                       (27)

**(Vibração)**

---

**3) Propagação**                       $[A]\frac{d^2\vec{X}}{dt^2} = [B]\frac{d\vec{X}}{dt} + [C]\vec{X} = \vec{F}(\vec{X}, t), t > 0$                       (28)

Apresentaremos soluções para a equação governante de autovalores (vibrações) e neste caso vibração livre, ou seja:

$$[A]\vec{X} - \lambda[B]\vec{X} = 0$$

Condições de contorno:  $[C]\vec{X} = 0$                       (29)

As matrizes  $[A]$  e  $[B]$  são representadas respectivamente pelas matrizes de rigidez e massa. Sendo assim, a equação (30) pode ser expressada como:

$$[K]\vec{X} - \lambda[M]\vec{X} = 0$$

(30)

Ao aplicar MEF, em cada elemento configurado subdivide-se e conecta os elementos pelos nós respectivos, independentes e representados pelos graus de liberdade  $(u, w, q)$  na forma matricial, as linhas e colunas representam os

consequentes graus de liberdades, podendo assim configurar também as devidas condições de contorno. No apêndice B será apresentado a configuração matricial, de acordo com o número de elementos aplicados, seguidos dos números de nós e na sequência os graus de liberdades – *degree of freedom* (d.o.f).

### 3.4 TIMOSHENKO CONVENCIONAL

Na formulação do elemento de viga de Timoshenko (TBT) é considerado que as secções planas se mantêm planas, após a deformação, significando que os deslocamentos no plano ao longo do comprimento da viga são lineares ao longo da seção e assim é possível considerar deformações devido ao efeito de cisalhamento.

Pode-se definir a formulação de elementos finitos, a partir da equação fundamental de rigidez a partir da *Lei de Hooke*:

$$K\varepsilon = F \quad (31)$$

Com base na equação (21), equação de energia de deformação, e a equação de rigidez (31) pode ser representada a determinação da formulação da matriz de rigidez:

$$K = EI \underbrace{\int_{-l/2}^{l/2} B_b^T B_b dx_1}_{\text{Efeito de flexão}} + GA \underbrace{\int_{-l/2}^{l/2} B_s^T B_s dx_1}_{\text{Efeito de cisalhamento}} \quad (32)$$

Os termos  $B_b$  e  $B_s$  representam as matrizes de deformação relativa para os termos deformação de flexão e de cisalhamento respectivamente. No apêndice C, indica-se as matrizes respectivas, e da mesma forma a matriz de rigidez.

### 3.5 TIMOSHENKO (*STRAIN GRADIENT*)

A matriz de rigidez, é apresentada especificamente utilizando a notação de gradiente de tensão. Assim, definem a ordem das matrizes de acordo com os vetores aplicados no elemento de viga e seus respectivos graus de liberdade (ABDALLA Fo et al, 2006):

$$\{d\}^T = \{u_1 \quad w_1 \quad q_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad q_2\} \quad (33)$$

A matriz de rigidez, é definida, na notação de gradiente de deformação, é dada por:

$$[K] = [\Phi]^{-T} [U_M] [\Phi]^{-1} \quad (34)$$

$[\Phi]$ : representa a matriz de deslocamento nodais. O elemento de origem encontra-se no centro da viga, sendo assim, definimos:  $x_1 = -L/2$  e  $x_2 = L/2$ .

Na sequência, definimos a matriz de energia de deformação, que pode ser definida da seguinte forma  $[U_M]$ :

$$U_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_{11}(bL) & 0 & B_{11}(bL) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_{55}(bL) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_{11}(bL) & 0 & D_{11}(bL) + A_{55} \left( \frac{bL^3}{12} \right) \end{bmatrix} \quad (35)$$

Os elementos da matriz, são definidos, pelas equações:



$$A_{11} = \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{11})_k (z_k - z_{k-1}) \quad (36)$$

$$A_{55} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{55})_k \left( h_k - h_{k-1} - \frac{4}{3} h_k^3 - h_{k-1}^3 \frac{1}{h^2} \right) \quad (37)$$

$$D_{11} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{11})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (38)$$

$$B_{11} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (\bar{Q}_{11})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (39)$$

O termo:  $A_{55} \left( \frac{bL^3}{12} \right)$  é responsável por apresentar o termo parasítico cisalhante.

Com isso, a solução se divide em dois caminhos distintos, um com os termos espúrios, em que se mantém esse termo nas matrizes respectivas e outra solução em que retiramos esse termo, apresentando solução com a correção.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{U_{44}}{L^2} & 0 & -\frac{U_{46}}{L^2} & -\frac{U_{44}}{L^2} & 0 & \frac{U_{46}}{L^2} \\ 0 & \frac{U_{55}}{L^2} & \frac{U_{55}}{2L} & 0 & -\frac{U_{55}}{2L} & \frac{U_{55}}{2L} \\ -\frac{U_{46}}{L^2} & \frac{U_{55}}{2L} & \frac{U_{55}}{4} + \frac{U_{66}}{L^2} & \frac{U_{46}}{L^2} & -\frac{U_{55}}{2L} & \frac{U_{55}}{4} + \frac{U_{66}}{L^2} \\ -\frac{U_{44}}{L^2} & 0 & \frac{U_{46}}{L^2} & \frac{U_{44}}{L^2} & 0 & -\frac{U_{46}}{L^2} \\ 0 & -\frac{U_{55}}{L^2} & -\frac{U_{55}}{2L} & 0 & \frac{U_{55}}{L^2} & -\frac{U_{55}}{2L} \\ \frac{U_{46}}{L^2} & \frac{U_{55}}{2L} & \frac{U_{55}}{4} - \frac{U_{66}}{L^2} & -\frac{U_{46}}{L^2} & -\frac{U_{55}}{2L} & \frac{U_{55}}{4} + \frac{U_{66}}{L^2} \end{bmatrix} \quad (40)$$

## 4 ALGORITIMOS E IMPLEMENTAÇÕES

Neste capítulo, será apresentado os métodos e procedimentos para a implantação computacional. Com a determinação do algoritmo, os passos das análises, a escolha do método matemático para implementação computacional. Assim como a aplicação do método de redução do número de graus de liberdade implantado para as matrizes de rigidez e de massa, afim de obter resultados dos autovalores e autovetores, com a redução do número de graus de liberdade, porém mantendo a qualidade de refino.

Com a aplicação do refino dos elementos pelo MEF, obtemos uma sequência de subdivisões dos elementos e os graus de liberdade, aumentando consideravelmente as matrizes de massa e rigidez. A ilustração do apêndice C representa a montagem de matrizes através dos graus de liberdades (d.o.f.)

Dessa forma, aplicando em métodos computacionais, há uma necessidade de aplicar métodos matemáticos que auxiliam na determinação das soluções. Nesse capítulo, podemos citar alguns métodos auxiliares, tais como: (BATHE,1982; COOK, 1989; HUGHES,1987; RAO, 2004)

- 1) Método de formulação de *Dunkerleys*;
- 2) Método de *Rayleigh's*;
- 3) Método de *Holzer's*;
- 4) Método de *Givens-Householder*;
- 5) Método de Jacobi Generalizado;
- 6) Método de problemas de autovalor *Standard*;

Pela eficiência, capacidade de formulação de matrizes com elementos nulos e não nulos e a implementação da técnica de redução de *Guayn*, o método implementado nesse trabalho foi o método de Jacobi Generalizado.

#### 4.1 MÉTODO DE JACOBI GENERALIZADO;

Para uma solução computacional em MEF, neste caso, determinar as soluções de frequência natural e os modos de vibração a partir de soluções de autovalores e autovetores. Obtêm-se uma equação algébrica de problema de autovalor aplicado na equação (29), assumindo as condições de contorno pertinentes.

$[A]$	Matriz de rigidez $[K]$
$[B]$	Matriz de massa $[M]$
$\lambda$	Autovalor (frequência)
$\vec{X}$	Autovetor (modos de vibração)

Os termos matriciais assumem-se as matrizes (de ordem  $n$ ) de forma simétricas e não nulas, ou seja, os valores da diagonal principal não podem ser nulos ou negativos.

O Método computacional de Jacobi, é definido como um método iterativo para calcular os autovalores e os autovetores de um sistema. O método básico da solução de Jacobi foi desenvolvido para a solução de problemas próprios de padrão, isto é,  $[B]$  sendo a matriz de identidade. O método foi proposto a mais de um século e ainda é utilizado atualmente. É possível transformar o problema próprio de generalização na forma padrão e ainda manter a simetria necessária para o método Jacobi. No entanto, essa transformação pode ser dispensada usando um método generalizado de solução de Jacobi (BATHE, 2006) que opera diretamente em  $[K]$  e  $[M]$ . O método apresenta algumas vantagens em relação aos outros métodos descritos:

- 1) Para matrizes mal condicionadas, neste caso a solução direta de  $K\phi = \lambda M\phi$ , evita a solução de uma forma *Standard* de uma matriz com elementos muito grandes e muito pequenos;
- 2) Para elementos que estão fora da diagonal em  $[K]$  e  $[M]$  são muitos pequenos ou quando os elementos fora da diagonal são compostos por elementos nulos e não nulos. Desta forma, a vantagem desse

procedimento é que os termos nulos dos elementos fora da diagonal em [K] e [M] não resultará em uma grande alteração nos elementos diagonais das matrizes, cujas razões são os valores próprios;

- 3) Outro fator importante é uma convergência rápida pode ser esperada quando os elementos fora da diagonal são pequenos.

## 4.2 CONDENSAÇÃO ESTÁTICA

Um método prático de realizar a redução de matrizes, afim de determinar autovalores e autovetores, é a identificação dos graus de liberdade a serem condensados como grau de liberdade **primários** (*Master*) ou **secundário** (*Slave*). A relação entre os graus de liberdade secundário e primário é encontrada através de um procedimento da relação estática entre eles, por isso o nome método de condensação estática. O autor Guyan (1965), apresenta o método, para redução da matriz de massa não diagonal para análise modal, baseado no procedimento de redução da matriz de rigidez em análises estáticas (condensação estática). O autor indica que o resultado obtido é uma aproximação do resultado matematicamente exato dos autovalores e autovetores (frequências naturais e modos de vibração).

Paz (1985) segue com uma relação de estudos e aplicações desse procedimento da dinâmica, descreve o método de condensação a partir da formulação estática. Em um sistema de matriz os graus (secundários) de liberdade a serem reduzidos ou condensados são organizados como as primeiras coordenadas  $s$ , e os graus restantes (primários) dos graus de liberdades são as últimas coordenadas  $p$  (PAZ, 1985).

$$\begin{bmatrix} [K_{ss}] & [K_{sp}] \\ [K_{ps}] & [K_{pp}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{y_s\} \\ \{y_p\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_p\} \end{Bmatrix} \quad (41)$$

Neste caso, faz-se necessário realizar a condensação estática da matriz de rigidez e excluir da matriz de massa as linhas e colunas correspondentes ao

grau de liberdade sem massa. o método de condensação estática, neste caso, não altera o problema original e, portanto, em um problema de autovalor, não introduz erros indesejáveis. Dessa forma, na aplicação de resultados de vibração livre, os dados de autovalores (frequências) e autovetores (modos de vibração), podem ser determinados com uma redução de graus de liberdade, mas com a precisão do refinamento aplicado.

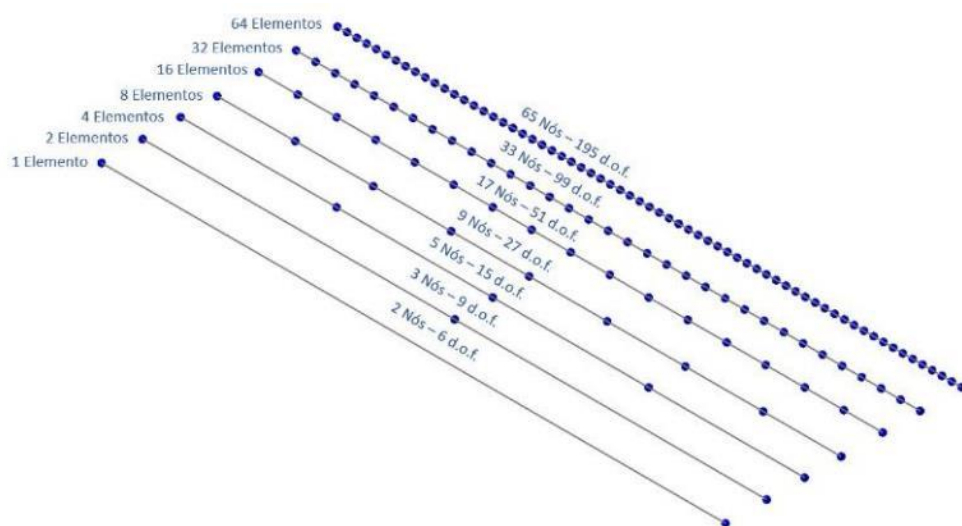


Figura 5 – Elementos e distribuição dos nós – sem redução de d.o.f.

Fonte: O Autor, 2019

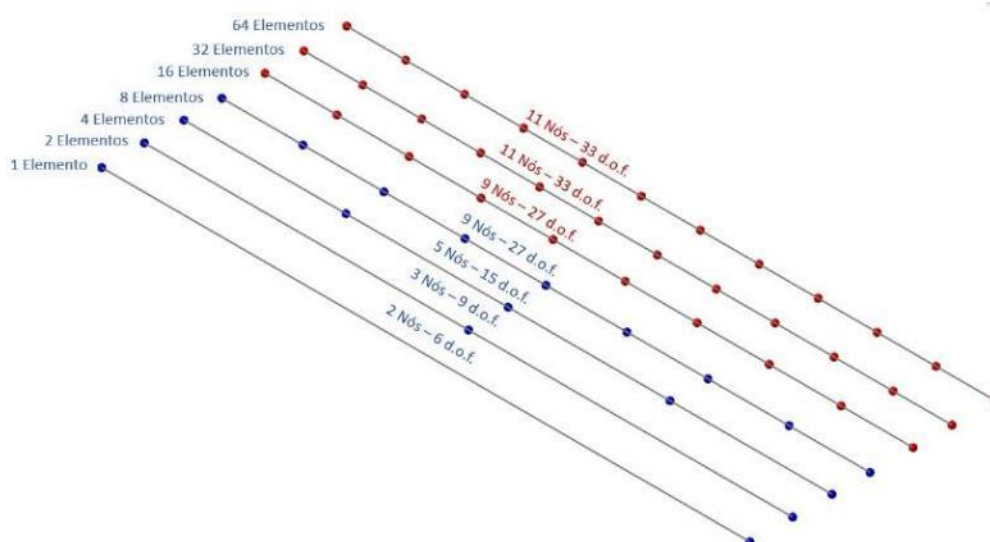


Figura 6 – Elementos e distribuição dos nós – com redução de d.o.f.

Fonte: O Autor, 2019

## 5 ANÁLISES NUMÉRICAS

### 5.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, os elementos cujas formulações e métodos foram especificados nos capítulos anteriores são aplicados nas soluções de vários problemas. Os resultados atestam as vantagens da notação *strain gradient*.

Para as análises dos resultados, foram calculadas as frequências naturais, a convergência da frequência e os modos de vibração para três condições de contorno das vigas: engastada-livre (CF), engastada-engastada. Para as vigas de Timoshenko, os problemas inicialmente foram resolvidos com os termos espúrios e depois com os termos eliminados.

A implementação computacional foi desenvolvida no programa LAMFEM, escrito na linguagem Fortran®. Logo, a solução numérica é para elemento de dois nós e executada com refino da malha de: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. Sendo aplicado a técnica de redução de *Guyan* para limitar o número de frequências e modos de vibrações, através da reestruturação das matrizes de massa e rigidez. Os materiais utilizados para os estudos são descritos na tabela 1.

Tabela 1 – Constantes de engenharia para materiais

<b>Material</b>	<b>E1</b> [GPa]	<b>E2</b> [GPa]	<b>E3</b> [GPa]	<b>G12</b> [GPa]	<b>G13</b> [GPa]	<b>G23</b> [GPa]	$\nu_{12}$	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]
Aço Estrutural	210.0	210.0	210.0	80.8	80.8	80.8	0.30	0.30	0.30	7860
Gr. - Ep (AS)	138	14.5	14.5	5.86	5.86	5.86	0.21	0.21	0.21	1590
Gr. - Ep (AS)	118	12.5	12.5	4.86	4.86	4.86	0.21	0.21	0.21	1590

Fonte: JONES, 1999 (Adaptado), ABDALLA FO ET AL. (2006)

Gr. - Ep (AS) = Grafite-epóxi (AS/3501) - (Fibras de grafite e matriz em epóxi);

## 5.1 ELEMENTOS DE VIGAS DE EULER-BERNOULLI

### 5.1.1 Viga Isotrópica Engastada-Livre (CF)

Primeiramente os resultados para uma viga na teoria de Euler-Bernoulli são apresentados, variando a quantidade de elementos e comparando-os com resultados de uma referência. Sem a notação *strain gradient*, apresenta-se os resultados para a validação do algoritmo empregado nesse trabalho e uma verificação do comportamento de frequências, conforme um refino.

Tabela 2 – Valores de Frequências naturais [rad/s] para vigas CF (h/L = 1)

Elementos											
Frequencias	1(FEM)	1 Ref.1	2(FEM)	2 Ref.1	3(FEM)	3 Ref.1	4(FEM)	4 Ref.1	5(FEM)	5 Ref.1	Sol. Analítica
1	3,53273	3,53273	3,51772	3,51772	3,51637	3,51613	3,51637	3,51613	3,51606	3,51606	3,51602
2	34,80689	34,9069	22,22147	22,2215	22,10686	22,1069	22,10686	22,1069	22,04551	22,04551	22,0345
3			75,15708	75,1571	62,46598	62,4659	62,46598	62,4659	61,91884	61,91884	61,6972
4			218,138	218,138	140,67105	140,671	140,67105	140,671	122,3197	122,3197	120,902
5					264,74331	264,743	264,74331	264,743	20,02245	20,02245	199,86
6					527,7916	527,796	527,7916	527,796	337,2727	337,2727	298,556
7									493,26369	493,264	416,991
8									715,3412	715,341	555,165

Ref.1: Craig (1981)

Fonte: O autor (2019)

## 5.2 ELEMENTOS DE VIGAS DE TIMOSHENKO

Para os três tipos de vigas: engastada-livre (CF), engastada-engastada (CC) e de simples apoio (SS) tem-se os resultados numéricos para a solução analítica baseada na equação abaixo (LEE; PARK, 2013):

$$\lambda_i^2 = \omega_i L^2 \sqrt{\frac{m}{EI}} \quad (42)$$

### 5.2.1 Viga Isotrópica Engastada-Livre (CF)

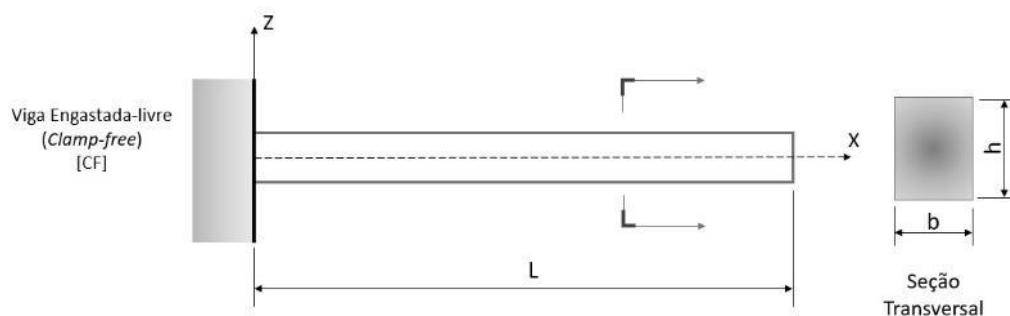


Figura 7 – Configuração das vigas e condições de contorno

Fonte: O autor, 2019

Os resultados serão apresentados em três imagens representando gráficos distintos: (i) frequências naturais [Hz] com relação ao número dos modos de vibração, (ii) Convergência da frequência natural [Hz] com relação ao número de elementos calculados, (iii) Curva dos três primeiros modos de vibração para **vigas engastada-livre**.

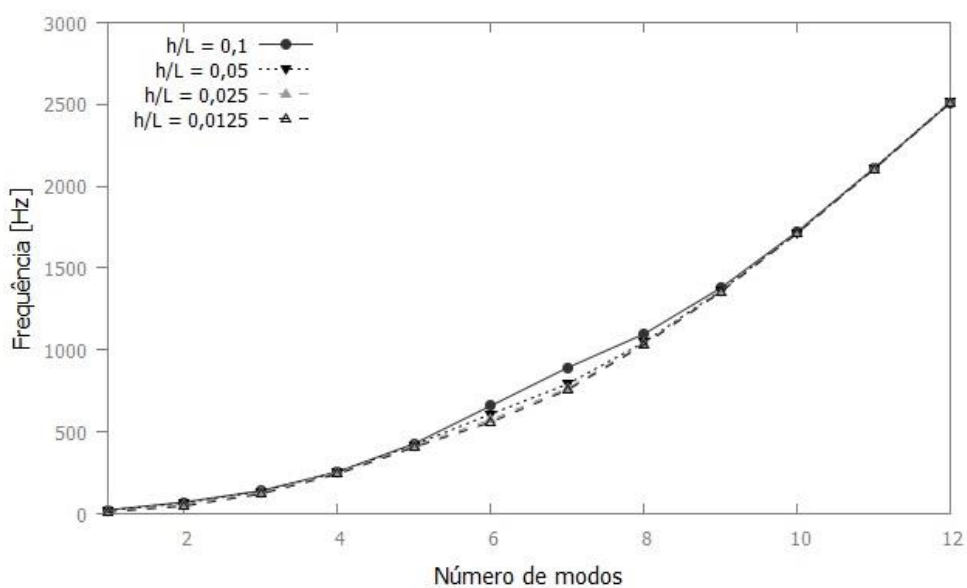


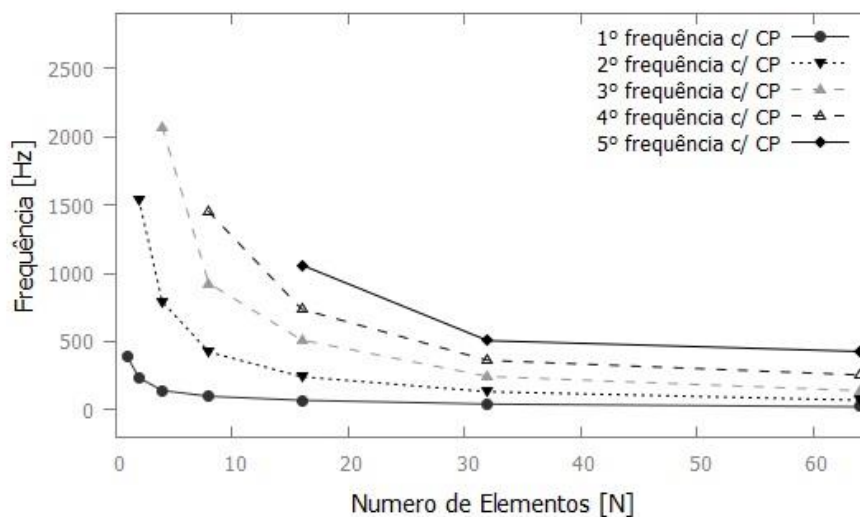
Figura 8 – Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-livre, sem termos espúrios com 64 elementos, para os 12 primeiros modos de vibração

Fonte: O autor, 2019

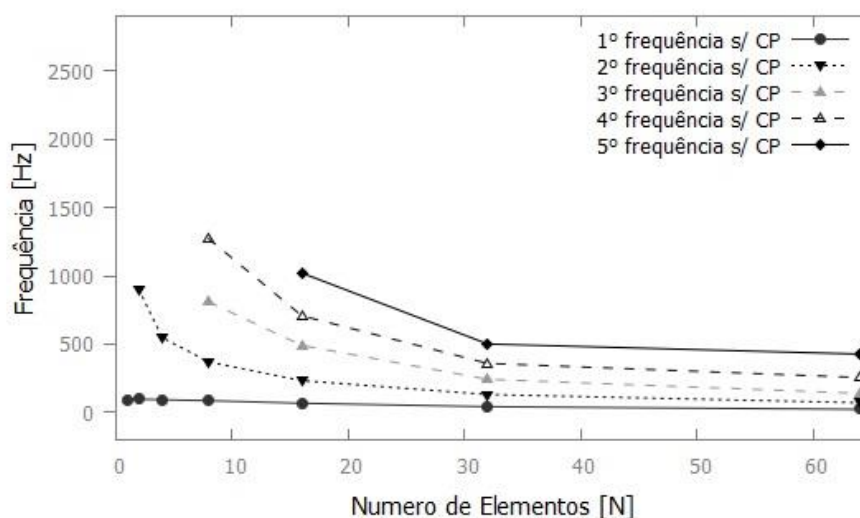


Os primeiros resultados são verificados, pela figura 8, as frequências de acordo com os números dos modos de vibração e cada uma das curvas representam uma viga em razão de  $h/l$  e verificando seus efeitos, para esse resultado foi calculado para uma viga de 64 elementos (195 d.o.f) que com a aplicação da redução de *Guyan*, passa a ter 33 d.o.f sem que perca a qualidade do refino, conforme apresentado nas figuras 5 e 6.

Para todas as curvas, nota-se um comportamento quase linear, e entre as curvas, variando a relação de  $h/l$ , não há diferença significativa.



(a) Com termos espúrios

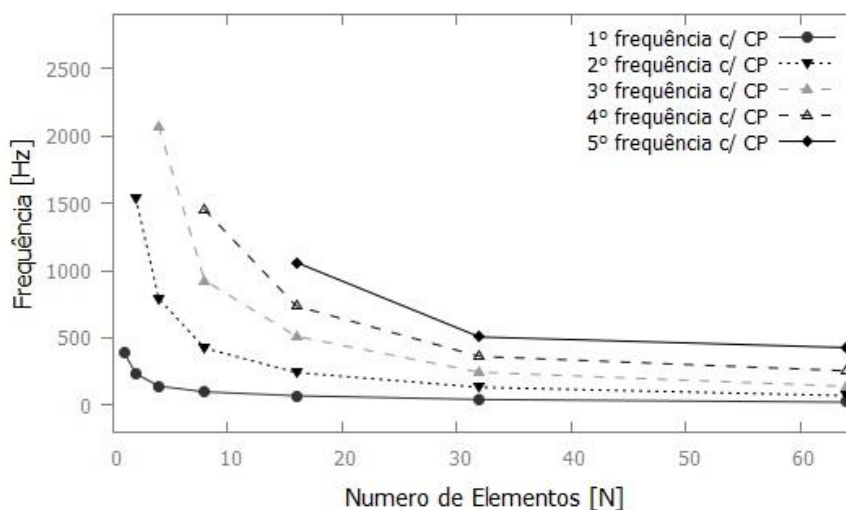


(b) Sem termos espúrios

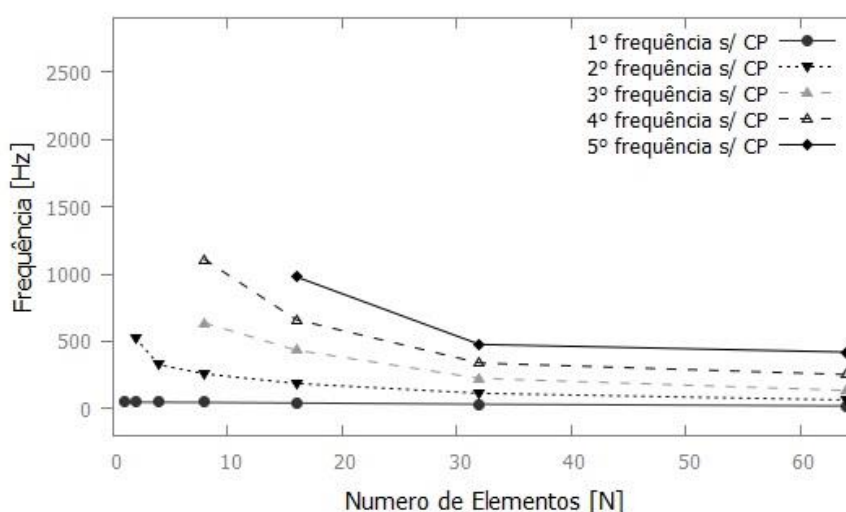
Figura 9 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-livre, para a relação  $h/L = 0,1$

Fonte: O autor, 2019

O resultado da imagem 9, apresenta, para uma relação  $h/l=0,1$ , os gráficos de convergência das frequências dos cinco primeiros valores, em ordem crescente. O resultado do primeiro gráfico: (a) com termos espúrios, demonstra uma convergência de frequência, apenas para um numero de elementos a partir de 32 elementos, e quanto maior a frequência, menor a velocidade para a convergência. O gráfico (b), apresenta os valores sem termos espúrios e demonstra uma maior rapidez para a convergência dos valores da frequência. Isso aparece muito claro para a curva da primeira frequência.



(a) Com termos espúrios



(b) Sem termos espúrios

Figura 10 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-livre, para a relação  $h/L = 0,05$

Fonte: O autor, 2019

Da mesma forma que o resultado do gráfico da imagem 9, o gráfico da imagem 10 agora com uma relação  $h/l=0,05$ , demonstra no primeiro gráfico (a) uma convergência de frequência, similar com a primeira relação, ou seja, a partir de 32 elementos nota-se uma convergência. Já para o gráfico (b) o resultado de convergência é notado com uma maior velocidade e para este caso as duas primeiras frequências são com maior rapidez a convergência.

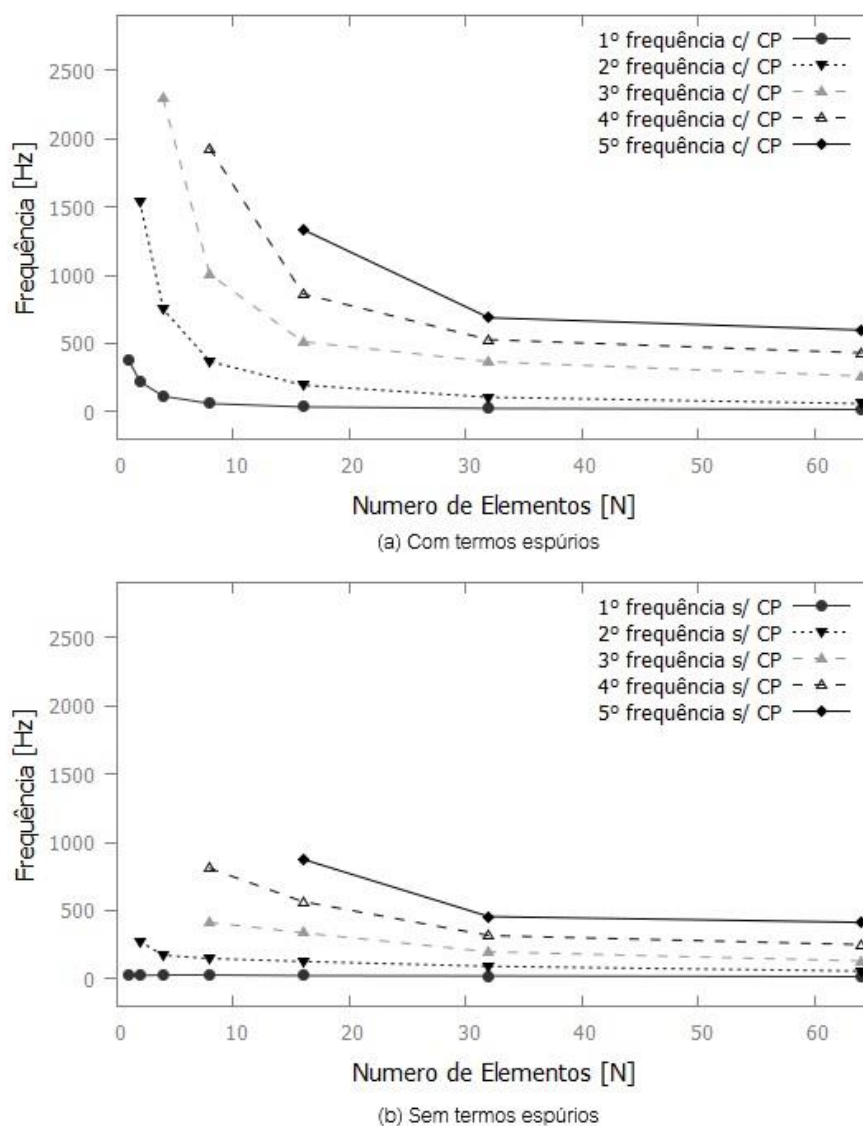


Figura 11 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-livre, para a relação  $h/L = 0,025$

Fonte: O autor, 2019

Da mesma forma que o resultado dos gráficos das imagens 9 e 10, o gráfico da imagem 11 apresenta os resultados para a relação, para uma relação  $h/l=0,025$ . O primeiro gráfico (a) com 32 elementos converge. Seguindo uma mesma expectativa pela relação anterior, o gráfico (b) apresenta uma maior rapidez para a convergência dos valores da frequência, agora a terceira frequência demonstra uma melhor rapidez.

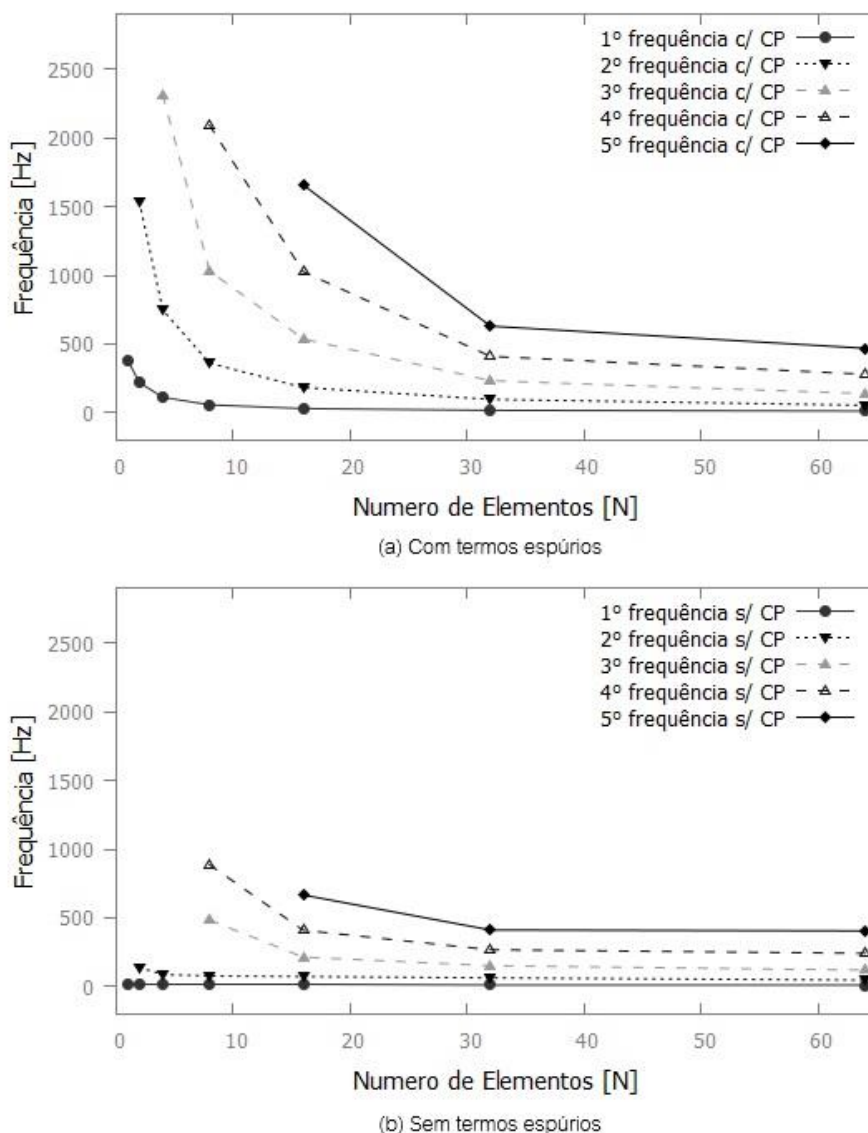


Figura 12 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-livre, para a relação  $h/L = 0,0125$

Fonte: O autor, 2019

Seguindo uma mesma tendência dos gráficos anteriores, agora para uma relação  $h/l=0,0125$ . Os dados do primeiro gráfico (a) da mesma forma e o gráfico (b) apresenta uma maior rapidez para a convergência dos valores da frequência, com um melhor resultado nas duas primeiras frequências e as posteriores, com uma melhor rapidez para convergir.

Dessa forma, após analisar as quatro imagens de convergência para uma viga engastada livre, nota-se que conforme relação  $h/l$  é dividida pela metade, a velocidade de convergência melhora. Verifica-se também que em todos os casos a notação *strain gradient* apresenta um resultado satisfatório.

## 5.2.2 Viga Compósito Laminado Engastada-Livre (CF)

Para as análises de compósitos laminados, os resultados são conforme a os tipos de laminados para a condição de viga Engastada-livre. A figura 13 ilustra as vigas conforme a disposição das lâminas.

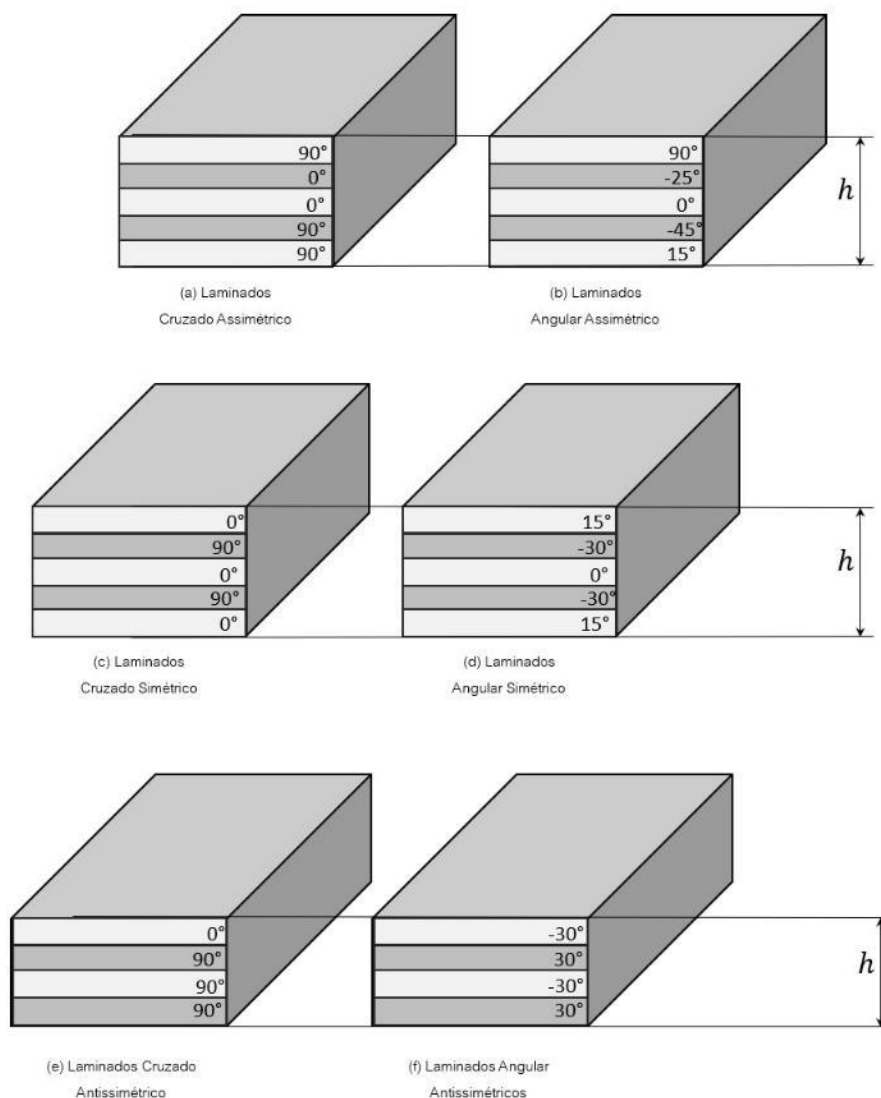


Figura 13 – Configuração das vigas e condições de contorno

Fonte: O autor, 2019

As primeiras análises foram de convergência para três tipos de laminados, conforme apresentados acima: (i) Laminados cruzado assimétrico, (ii) Laminados angular simétrico e (iii) laminado angular antissimétrico.

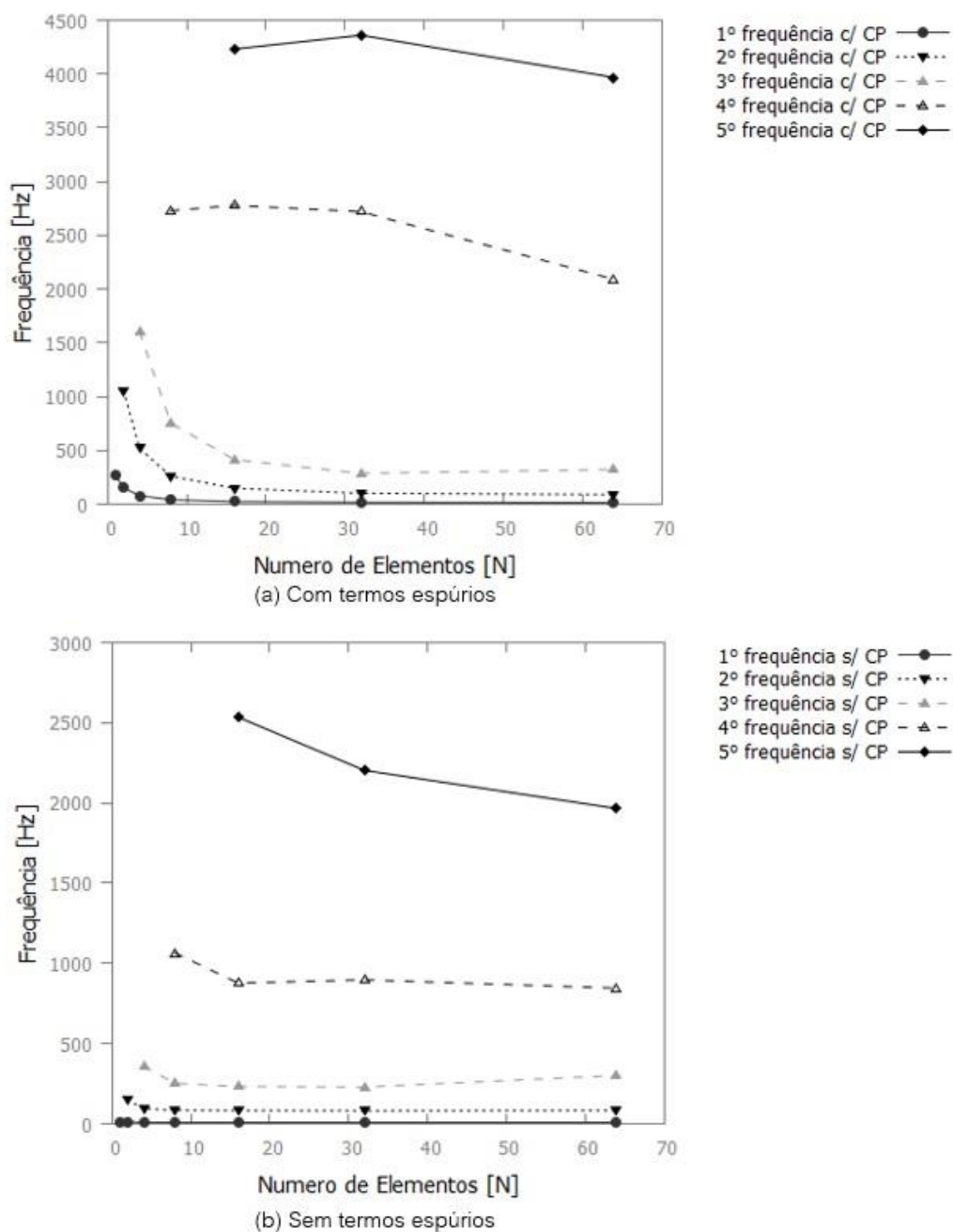


Figura 14 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para viga de compósito laminado, com lâminas cruzada assimétrica Engastada-Livre, para a relação  $h/L = 0,0625$

Fonte: O autor, 2019

O resultado da imagem 14, apresenta, para uma relação  $h/l=0,0625$ , os gráficos de convergência das frequências em ordem crescente, para os cinco primeiros valores. O resultado do primeiro gráfico: (a) com termos espúrios, demonstra que, diferente dos matérias isotrópicos, a convergência é mais rápida,

convergindo a partir de 16 elementos e segue o mesmo comportamento de que quanto maior a frequência, menor a velocidade para a convergência. O gráfico (b), apresenta os valores sem termos espúrios e demonstra uma maior rapidez para a convergência dos valores da frequência. Isso aparece com clareza para as cinco curvas.

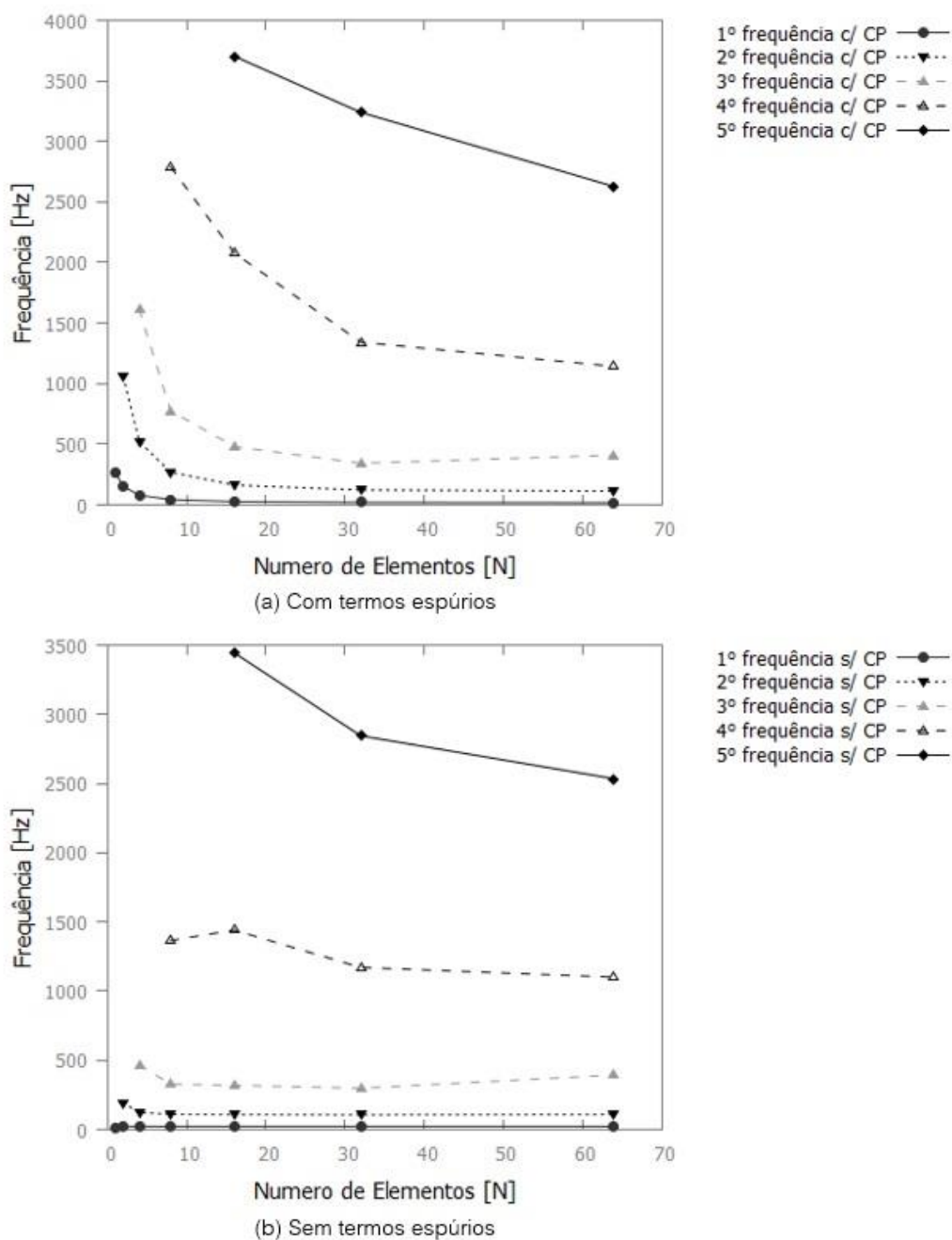


Figura 15 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para viga de compósito laminado, com lâminas angular simétrica Engastada-Livre, para a relação  $h/L = 0,0625$

Fonte: O autor, 2019



O mesmo comportamento aparece na figura 15 para uma configuração de lâmina diferente, neste caso lâminas angular simétrica. Os valores das frequências são reduzidos, de acordo com a modificação da configuração das lâminas.

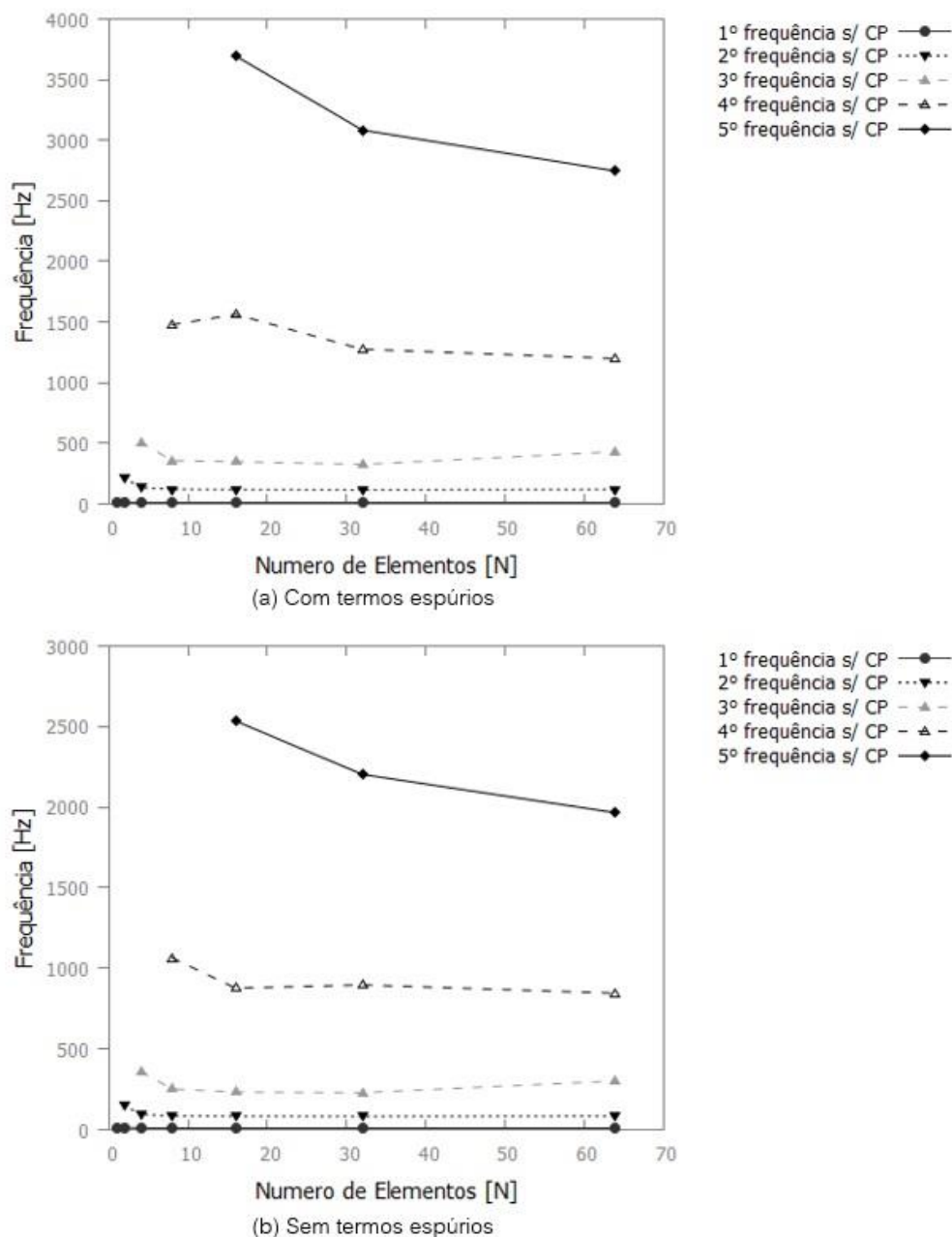


Figura 16 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para viga de compósito laminado, com lâminas angular antissimétrica Engastada-Livre, para a relação  $h/L = 0,0625$

Fonte: O autor, 2019

O melhor resultado entre as três configurações, é apresentado na figura 16, em que o gráfico representa a configuração para lâminas angulares antissimétricas. Para os compósitos laminados, verifica-se os três primeiros modos de vibração. Nota-se que a forma das curvas permanece o mesmo para com e sem termos espúrios, para todas as configurações de lâminas. Ou seja, não há uma aproximação entre as curvas para os resultados (a) com termos espúrios e (b) sem termos espúrios.

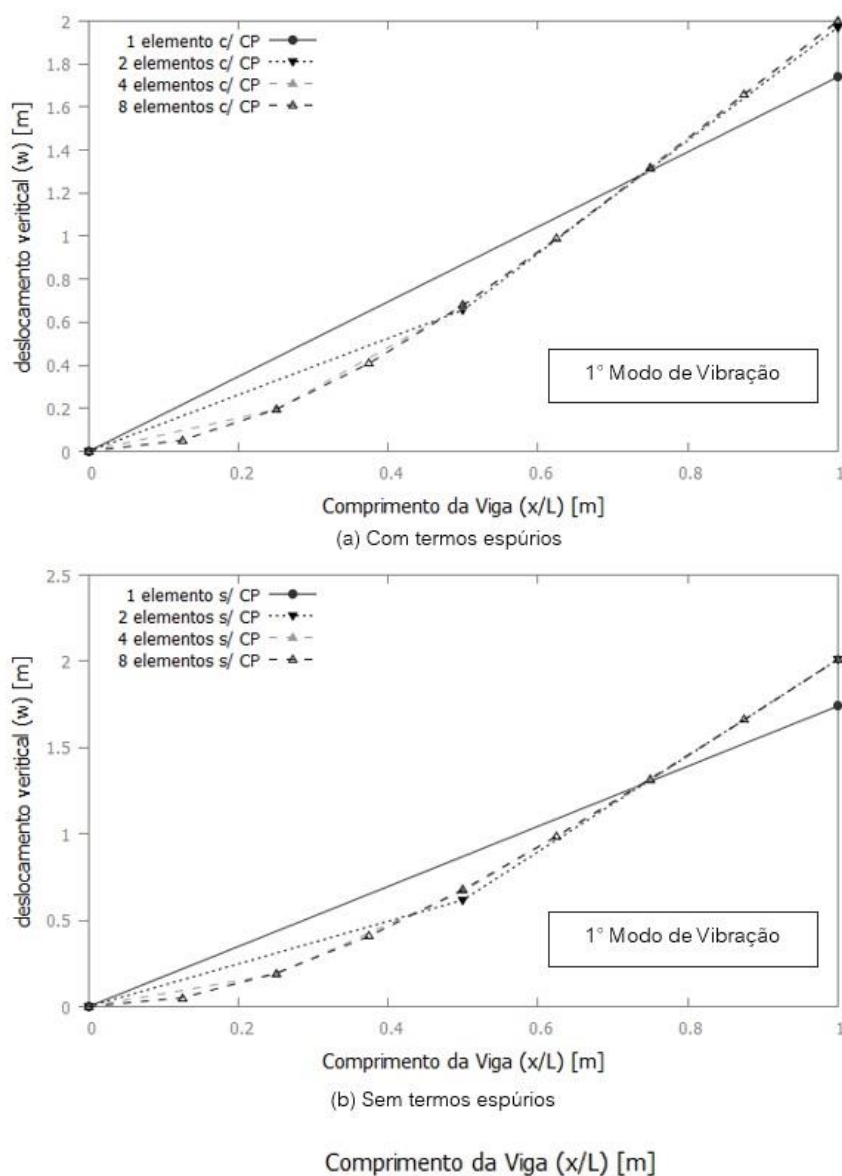


Figura 17 – Primeiro modo de vibração para viga de compósito laminado, cruzada assimétrica engastada-livre.

Fonte: O autor, 2019

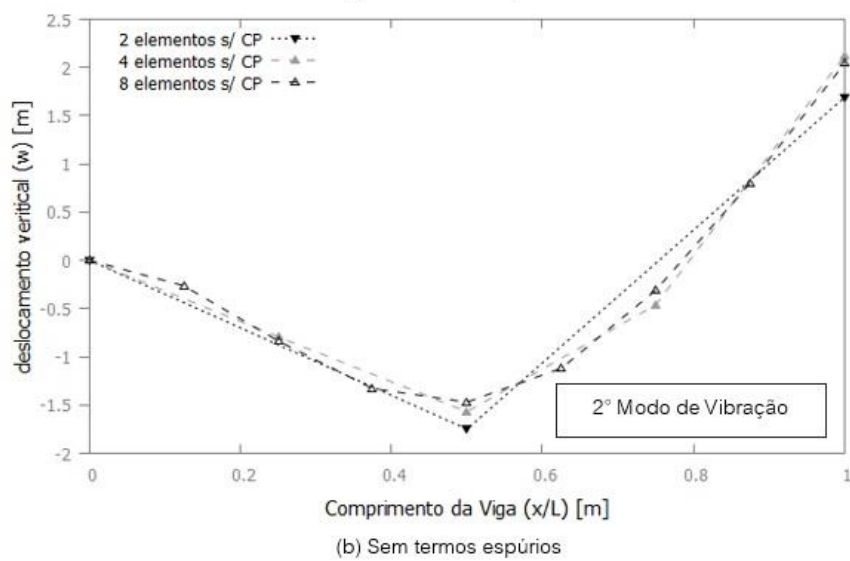
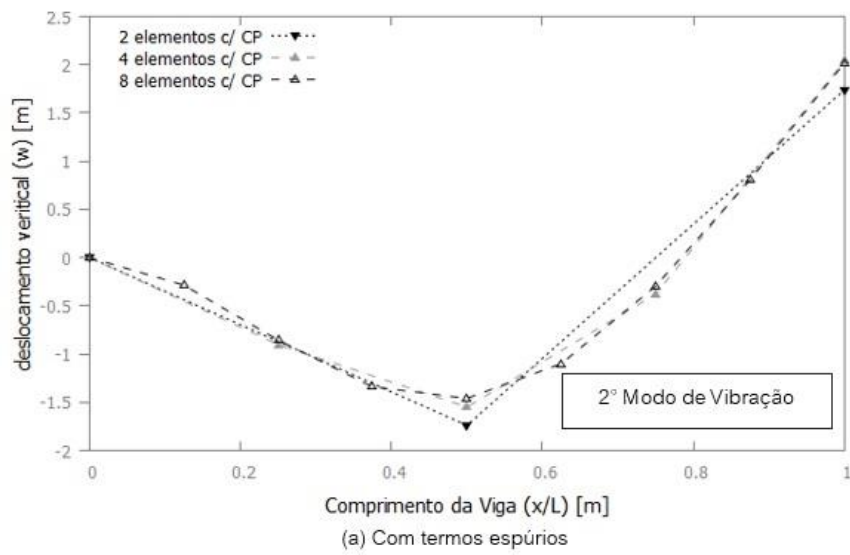
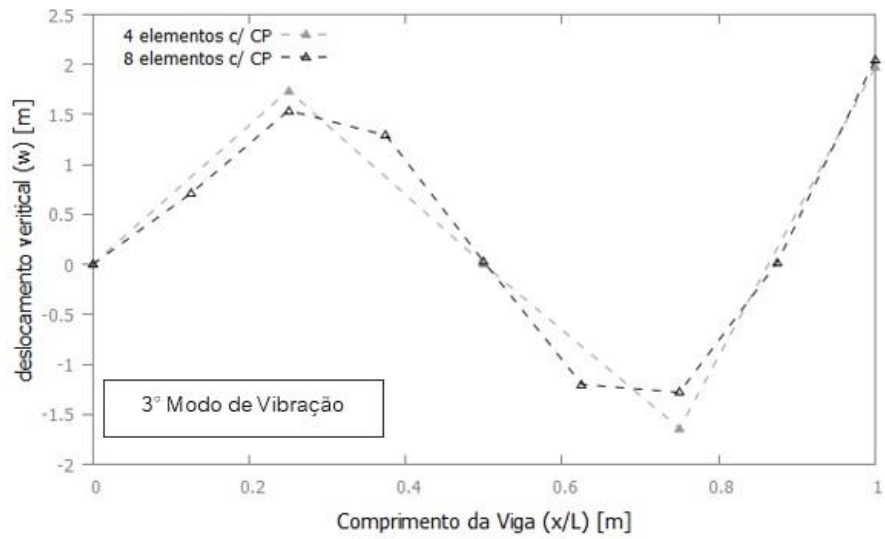
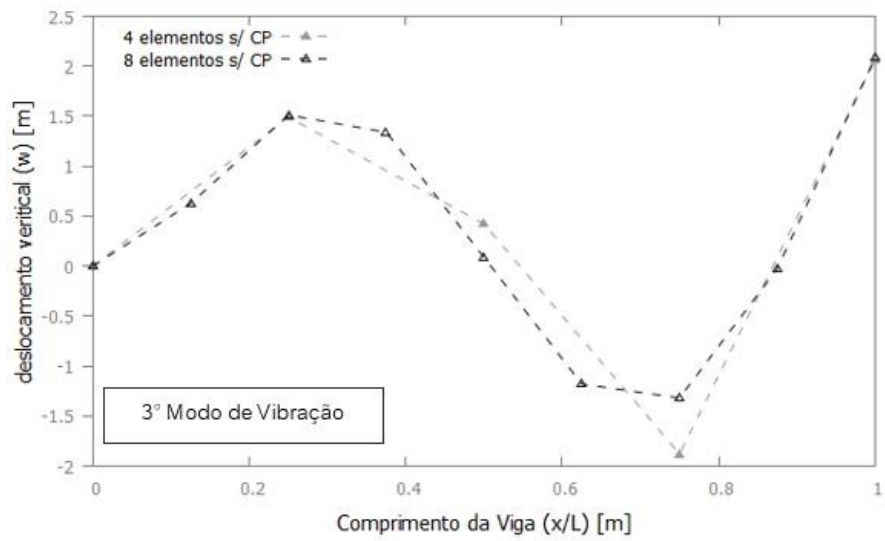


Figura 18 – Segundo modo de vibração para viga de compósito laminado, cruzada assimétrica engastada-livre.

Fonte: O autor, 2019



(a) Com termos espúrios



(b) Sem termos espúrios

Figura 19 – Terceiro modo de vibração para viga de compósito laminado, cruzada assimétrica engastada-livre.

Fonte: O autor, 2019

### 5.2.3 Viga Isotrópica Engastada-Engastada (CC)

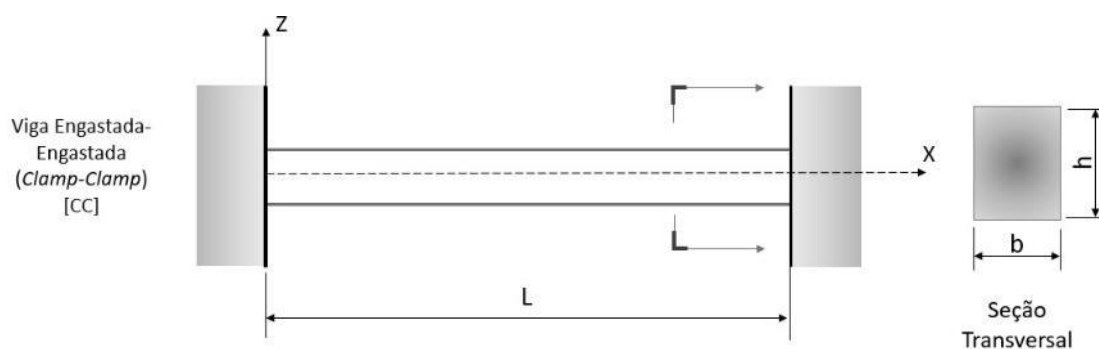


Figura 20 – Configuração das vigas e condições de contorno

Fonte: O autor, 2019

Os resultados a seguir, são para vigas engastadas em ambos os lados. Da mesma forma, serão apresentados em três imagens representando gráficos distintos: (i) frequências naturais [Hz] com relação ao número dos modos de vibração, (ii) Convergência da frequência natural [Hz] com relação ao número de elementos calculados, (iii) Curva dos três primeiros modos de vibração para **vigas engastada-engastada**.

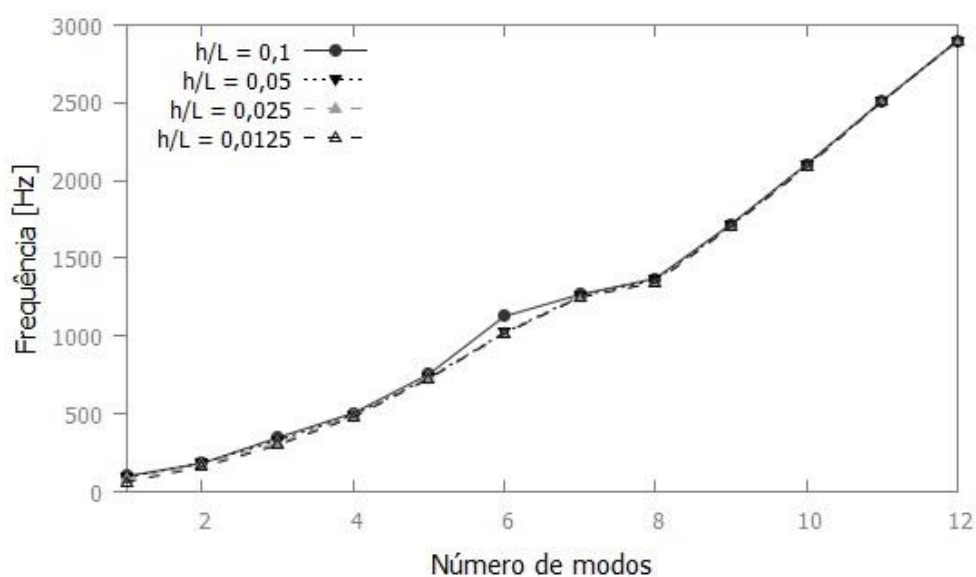


Figura 21 – Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-livre, sem termos espúrios com 64 elementos, para os 12 primeiros modos de vibração

Fonte: O autor, 2019

Assim como os gráficos do capítulo 5.2.1 os gráficos apresentam as frequências de acordo com os números dos modos de vibração.

O gráfico 14, agora para um modelo de viga engastada-engastada, para todas as curvas, nota-se um comportamento quase linear, e entre as curvas, variando a relação de  $h/l$ , não há diferença significativa.

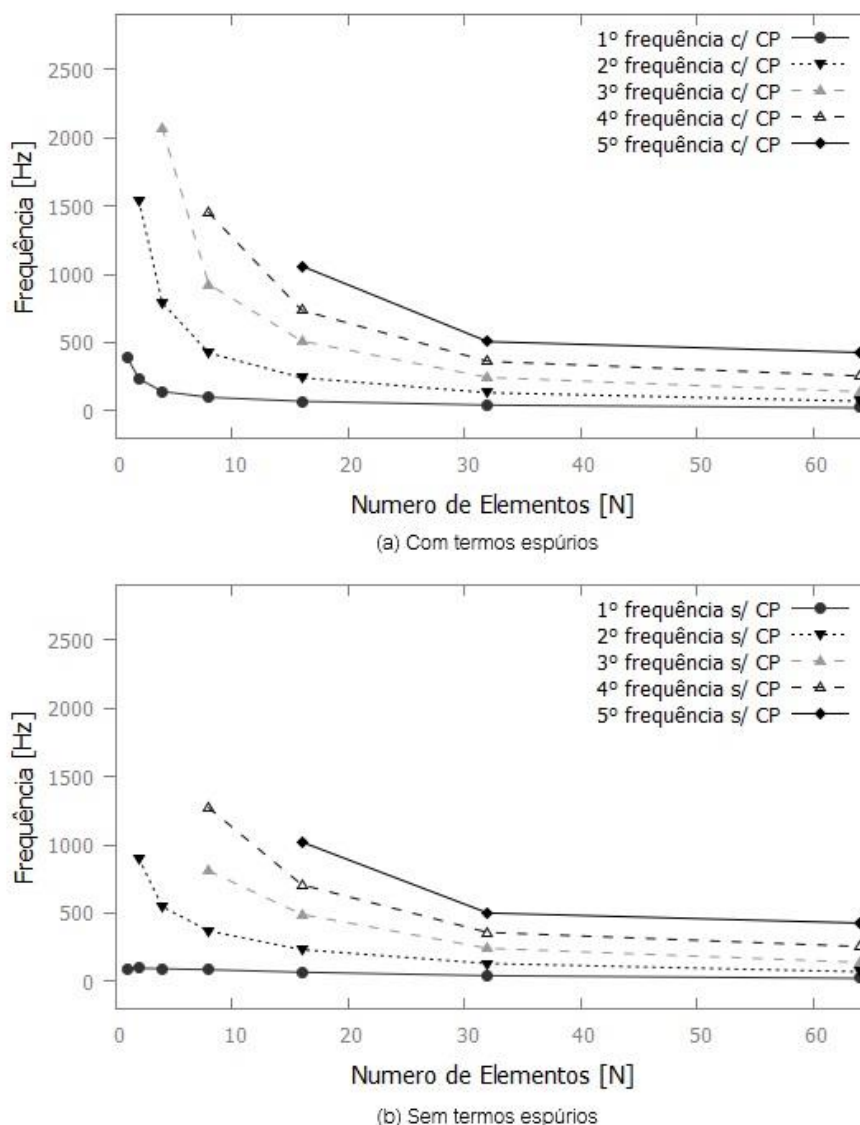
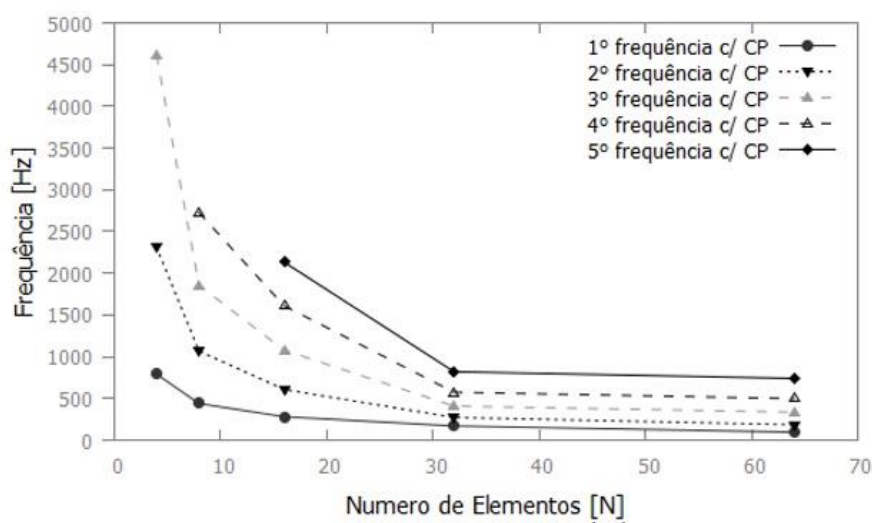


Figura 22 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-Engastada, para a relação  $h/L = 0,1$

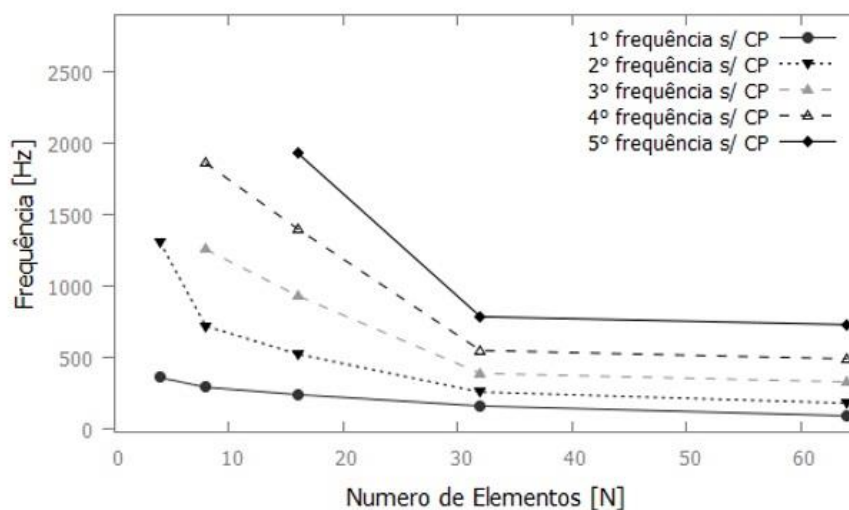
Fonte: O autor, 2019

O resultado da imagem 15, apresenta, para uma relação  $h/l=0,1$ , os gráficos de convergência das frequências dos cinco primeiros valores, em ordem

crecente. O resultado do primeiro gráfico: (a) com termos espúrios, demonstra uma convergência de frequência, apenas para um número de elementos a partir de 32 elementos, e quanto maior a frequência, menor a velocidade para a convergência. O gráfico (b), apresenta os valores sem termos espúrios e demonstra uma maior rapidez para a convergência dos valores da frequência. Isso aparece muito claro para a curva da primeira frequência.



(a) Com termos espúrios



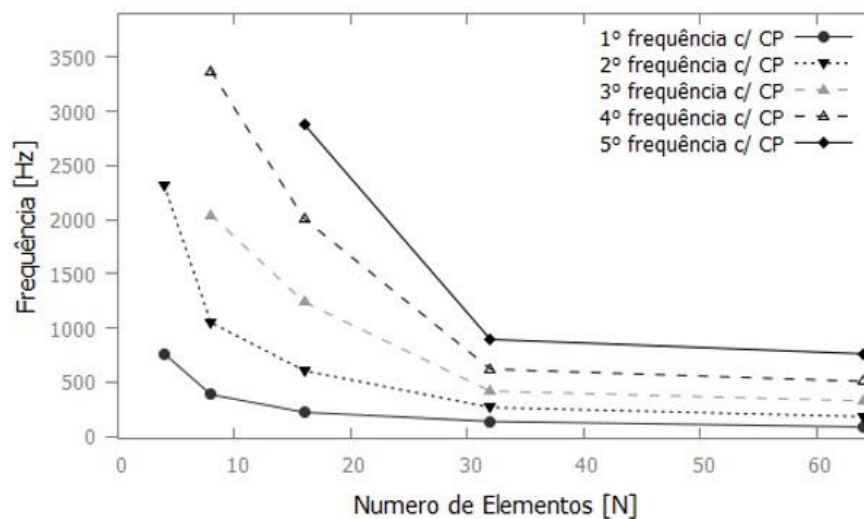
(b) Sem termos espúrios

Figura 23 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-Engastada, para a relação  $h/L = 0,05$

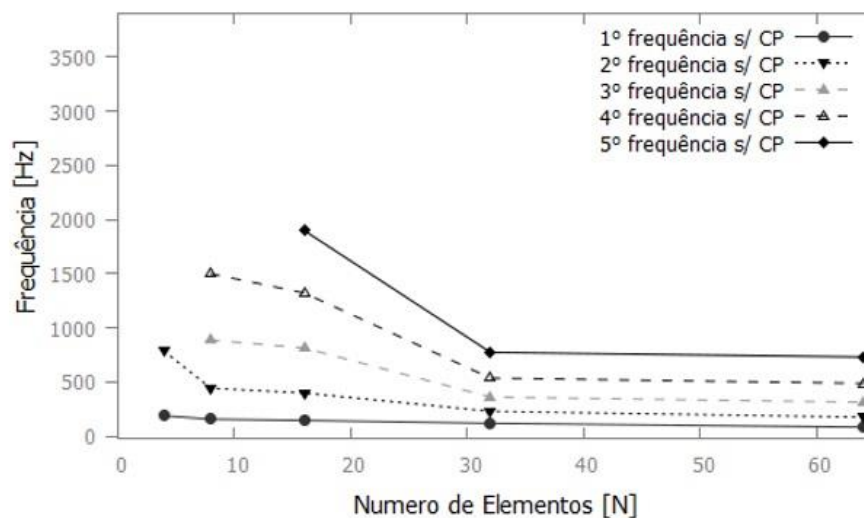
Fonte: O autor, 2019

Da mesma forma que o resultado do gráfico da imagem 9, o gráfico da imagem 10 agora com uma relação  $h/l=0,05$ , demonstra no primeiro gráfico (a)

uma convergência de frequência, similar com a primeira relação, ou seja, a partir de 32 elementos nota-se uma convergência. Já para o gráfico (b) o resultado de convergência é notado com uma maior velocidade e para este caso as duas primeiras frequências são com maior rapidez a convergência.



(a) Com termos espúrios



(b) Sem termos espúrios

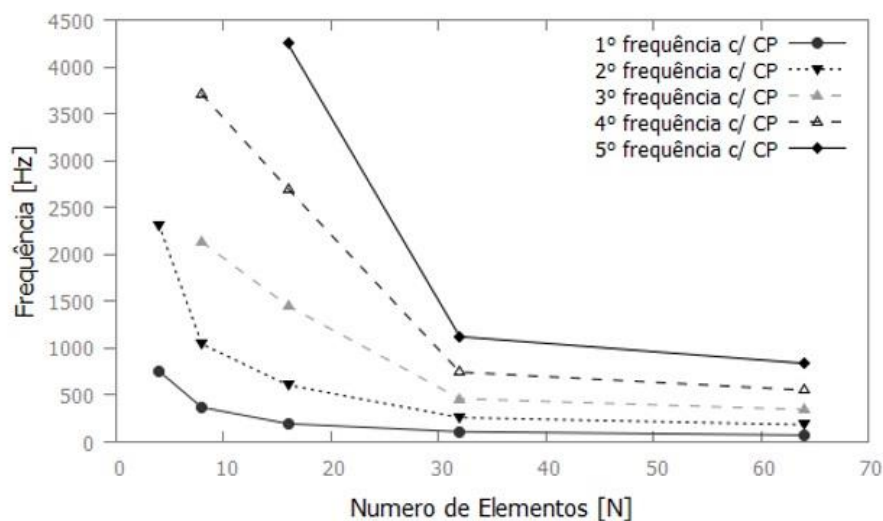
Figura 24 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-Engastada, para a relação  $h/L = 0,025$

Fonte: O autor, 2019

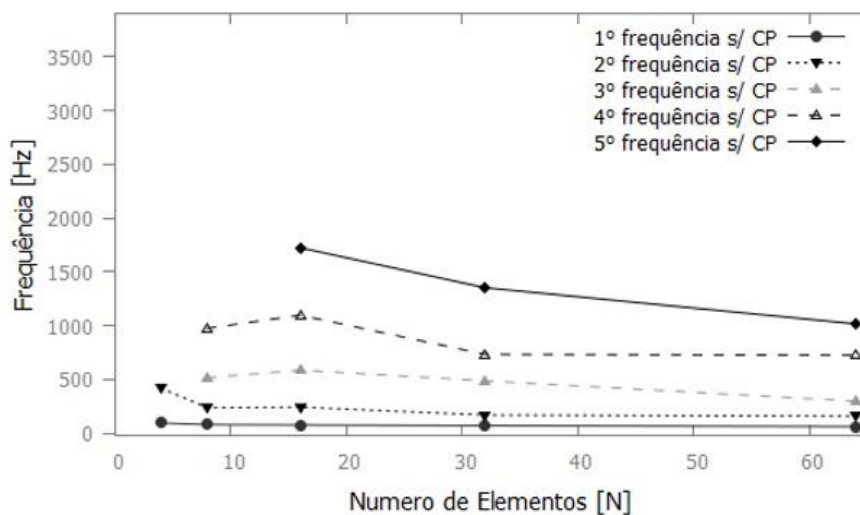
Da mesma forma que o resultado dos gráficos das imagens 9 e 10, o gráfico da imagem 11 apresenta os resultados para a relação, para uma relação  $h/l=0,025$ . O primeiro gráfico (a) com 32 elementos converge. Seguindo uma



mesma expectativa pela relação anterior, o gráfico (b) apresenta uma maior rapidez para a convergência dos valores da frequência, agora a terceira frequência demonstra uma melhor rapidez.



(a) Com termos espúrios



(b) Sem termos espúrios

Figura 25 – Convergência da Frequências naturais [Hz] para vigas Engastada-Engastada, para a relação  $h/L = 0,0125$

Fonte: O autor, 2019

Seguindo uma mesma tendência dos gráficos anteriores, agora para uma relação  $h/l=0,0125$ . Os dados do primeiro gráfico (a) da mesma forma e o gráfico (b) apresenta uma maior rapidez para a convergência dos valores da frequência, com um melhor resultado nas duas primeiras frequências e as posteriores, com uma melhor rapidez para convergir.

Dessa forma, após analisar as quatro imagens de convergência para uma viga Engastada-Engastada, nota-se que conforme relação  $h/l$  é dividida pela metade, a velocidade de convergência também melhora. Verifica-se também que em todos os casos a notação *strain gradient* apresenta um resultado satisfatório.

## 6 CONCLUSÃO

Este trabalho propôs a análise de vibração livre de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko, utilizando elementos finitos *strain gradient*.

A implementação computacional através de algoritmos no código LAMFEM e configurada na plataforma FORTRAN® foi concluída com sucesso.

A formulação dos elementos de vigas para: 1,2,4,8,16, 32 e 64 com os materiais isotrópicos e compósitos laminados foi apresentada em detalhes. A técnica de redução de *Guyan* foi implantada.

Uma série de análises numéricas foram realizadas. Com algumas condições de contornos mais relevantes para análise de vibração livre. Dessa forma, as conclusões sobre o desempenho dos elementos finitos *strain gradient* foram:

1. Os resultados para a análise de frequência do modelo de viga de Euler-Bernoulli apresentou com precisão os resultados, validando apenas as frequências de acordo com o numero de elementos. Não foi realizado análise para com e sem termos espúrios;
2. Para análises de frequências, as diferenças de relação  $h/L$  não impactam em resultados com e sem termos espúrios, uma vez que as frequências não se alteram com relevância para as diferentes relações;
3. Em uma ordem crescente das frequências, os elementos com cisalhamento parasítico se mostram ineficientes com uma taxa de convergência mais lenta. As primeiras apresentam uma convergência com maior rapidez para os resultados sem os termos espúrios;

4. Os resultados para as vigas de materiais compósitos laminados apresentam mais eficiência quanto a convergência das frequências para os elementos, os resultados conforme a configuração diferente de lâminas, apresentam a convergência das frequências e a forma de que afetam a rigidez das vigas;
5. Os resultados dos modos de vibração, não apresentam diferenças significativas entre as curvas de deslocamentos com e sem termos espúrios. Dessa forma conclui-se que elementos *strain gradient* não afetam esses resultados.
6. Sendo assim, o emprego da notação *strain gradient* oferece algumas vantagens discutidas ao longo desta dissertação. Muitos trabalhos apresentam diferentes métodos para tal solução, porém o método implementado nesse trabalho foi de forma simples eficiente na solução do problema de vibração.

## 7 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Esta dissertação, como citado, de uma forma inédita, permitiu o conhecimento sobre a análise dinâmica de estruturas, empregando a notação *strain gradient*. Entretanto, ficou limitado apenas a análises de vibração livre. Apresentando dessa forma uma oportunidade da continuidade do trabalho para análise de vibrações forçadas e com o emprego de amortecimento. Outra possibilidade é o enriquecimento dos resultados de autovalores e autovetores, com a aplicação em outros métodos com maior eficiência e com técnica de condensação dinâmica. E por último, esse trabalho abre caminho para análises modal em placas de compósitos laminados já formuladas.

## REFERÊNCIAS

- ABDALLA FO, J. E.; FAGUNDES, F. A.; MACHADO, R. D. Identification and elimination of parasitic shear in a laminated composite beam finite element. **Advances in Engineering Software**, v. 37, n. 8, p. 522–532, 2006.
- AZEVEDO, A. F. M. **Método dos Elementos Finitos (Apostila)**. 2003.
- BAKR, E. M.; SHABANA, A. A. Timoshenko beams and flexible multibody system dynamics. **Topics in Catalysis**, v. 116, n. 1, p. 89–107, 1987. Academic Press Inc. (London) Limited. Disponível em: <[http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X\(87\)81322-6](http://dx.doi.org/10.1016/S0022-460X(87)81322-6)>. .
- BATHE, K. J. **Finite element procedures. Second edition**. 2006.
- COOK D. R., MALKUS D. S., P. M. E. **Concept and application of Finite Element Analysis**. 2013.
- CORN, S.; BOUHADDI, N.; PIRANDA, J. Transverse vibrations of short beams: Finite element models obtained by a condensation method. **Journal of Sound and Vibration**, 1997.
- CRAIG, R. R. **Structural dynamics. An Introduction to Computer Methods**. 1981.
- DAWE, D. J. A finite element for the vibration analysis of Timoshenko beams. **Journal of Sound and Vibration**, v. 60, n. 1, p. 11–20, 1978.
- DOW, J. O. **A Unified Approach to the Finite Element Method and Error Analysis Procedures**. 1999.
- DOW J.O. **A Unified Approach to The Finite Element Method and Error Analysis Procedures**. San Diego, 1998.
- FERREIRA, A. J. M.; FASSHAUER, G. E. Computation of natural frequencies of shear deformable beams and plates by an RBF-pseudospectral method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2006.
- FRIEDMAN, Z.; KOSMATKA, J. B. An improved two-node timoshenko beam finite element. **Computers and Structures**, v. 47, n. 3, p. 473–481, 1993.
- GUYAN, R. Reduction of stiffness and mass matrices. **AIAA Journal, American Institute of Aeronautics and Astronautics**, v. 3, n. 2, p. 380, 1965.
- HAN, S. M.; BENAROYA, H.; WEI, T. Dynamics of Transversely Vibrating Beams. **Journal of sound and vibration**, v. 225, n. 5, p. 935–988, 1999.

- JONES, R. M. **Mechanics Of Composite Materials**. 2nd ed. Philadelphia, PA, 1999.
- KAPUR, K. K. Vibrations of a Timoshenko Beam, Using Finite-Element Approach. **The Journal of the Acoustical Society of America**, v. 40, n. 5, p. 1058–1063, 1966.
- KARAMANLI, A. Free vibration analysis of two directional functionally graded beams using a third order shear deformation theory. **Composite Structures**, 2018.
- KRUSZEWSKI, B. E. T.; AIR, L.; BASE, F. National Advisory Committee for Aeronautics Technical Note 1909 Effect of Transverse Shear and Rotary Inertia on. , , n. July, 1949.
- LEE, J.; SCHULTZ, W. W. Eigenvalue analysis of Timoshenko beams and axisymmetric Mindlin plates by the pseudospectral method. **Journal of Sound and Vibration**, 2004.
- LEE, S. J.; PARK, K. S. Vibrations of Timoshenko beams with isogeometric approach. **Applied Mathematical Modelling**, 2013.
- MUKHERJEE, S.; PRATHAP, G. Analysis of shear locking in Timoshenko beam elements using the function space approach. **Communications in Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 6, p. 385–393, 2001.
- PAZ, M. **Structural Dynamics**. 2nd ed. New York, 1985.
- PRZEMIENIECKI J.S. **Theory of matrix structural analysis**. New York, 1969.
- RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**. 5th, 2011.
- REDDY J. N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3rd ed. New York, 2006.
- RIXEN, D. GÉRADIN, M. **Mechanical\_Vibration\_Daniel\_J.Rixen\_Wile.pdf**. 3rd ed. Chennai, 2015.
- SHAHADAF TH, A. K. Vibration Analysis of Composite Beam. , , n. May, 2013.
- SHANG HSU, Y. Enriched finite element methods for Timoshenko beam free vibration analysis. **Applied Mathematical Modelling**, v. 40, n. 15–16, p. 7012–7033, 2016. Elsevier Inc.
- SHASTRY, B. P.; RAO, G. V. Free vibrations of short beams. **Journal of Sound and Vibration**, 1985.
- SINGIRESU S. RAO. **The Finite Element Method in Engineering**. 2011.

- TESSLER, A.; DONG, S. B. On a hierarchy of conforming timoshenko beam elements. **Computers and Structures**, v. 14, n. 3–4, p. 335–344, 1981.
- THOMAS, D. L.; WILSON, J. M.; WILSON, R. R. Timoshenko beam finite elements. **Journal of Sound and Vibration**, v. 31, n. 3, p. 315–330, 1973.
- THOMAS, J.; ABBAS, B. A. H. Finite element model for dynamic analysis of Timoshenko beam. **Journal of Sound and Vibration**, v. 41, n. 3, p. 291–299, 1975.
- TIMOSHENKO, S. **Vibration Problems in Engineering**. 2nd ed. New York, 1937.
- TIMOSHENKO, S. **History of Strength of materials**. New York: 1983, 1983.
- VASCONCELOS, A. C. A.; AZEVÊDO, A. S. DA C.; HOEFEL, S. DOS S. Finite element analysis of shear-deformation and rotatory inertia for beam vibration. **XXXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**, 2016.
- XU, S.; WANG, X. Free vibration analyses of Timoshenko beams with free edges by using the discrete singular convolution. **Advances in Engineering Software**, 2011.



## APÊNDICES

### APÊNDICIE A – FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO

Conforme apresentado na definição de elementos finitos, o método MEF apresenta soluções em um problema de acordo com sua classificação: simples, ou complexo, dependendo diretamente da geometria e da necessidade de precisão a qual o método e o problema são aplicados.

Se um tipo de variação polinomial é assumido para a variável de campo  $\emptyset(x, y, z)$ , pode se expressar:

$$\begin{aligned} &\textbf{Elemento unidimensional: } \emptyset(x) \\ &\emptyset(x) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \dots \alpha_mx^m \end{aligned} \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} &\textbf{Elemento bidimensional: } \emptyset(x, y) \\ &\emptyset(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5y^2 + \alpha_6xy + \dots \alpha_my^m \end{aligned} \tag{A.2}$$

$$\begin{aligned} &\textbf{Elemento tridimensional: } \emptyset(x, y, z) \\ &\emptyset(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4z + \alpha_5x^2 + \alpha_6y^2 + \\ &\quad + \alpha_7z^2 + \alpha_8xy + \alpha_9yz + \alpha_{10}zx \dots \alpha_mz^m \end{aligned} \tag{A.3}$$

Onde:

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_m$	São os coeficientes polinomiais
n	É o grau do polinômio
m	Número de coeficientes polinomiais

$m = n + 1$  Para um elemento unidimensional

$m = \sum_{j=1}^{n+1} j$  Para um elemento bidimensional

$m = \sum_{j=1}^{n+1} j(n+2-j)$  Para um elemento tridimensional

Define-se dessa forma a função de interpolação conforme o grau do polinômio e o número de coeficientes:

a) Para  $n=1$  (modelo linear)

**Unidimensional**  $\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x$  (A.4)

**Bidimensional**  $\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y$  (A.5)

**Tridimensional**  $\phi(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z$  (A.6)

b) Para  $n=2$  (modelo quadrático)

**Unidimensional**  $\phi(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2$  (A.7)

**Bidimensional**  $\phi(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy$  (A.8)

**Tridimensional**  $\phi(x, y, z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} zx$  (A.9)

a) Para  $n=3$  (modelo cúbico)

$$\text{Unidimensional} \quad \emptyset(x) = \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3x^2 + \alpha_4x^3 \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} \text{Bidimensional} \quad \emptyset(x, y) = & \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4x^2 + \alpha_5y^2 \\ & + \alpha_6xy + \alpha_7x^3 + \alpha_8y^3 \\ & + \alpha_9yx^2 + \alpha_{10}xy^2 + \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\begin{aligned} \text{Tridimensional} \quad \emptyset(x, y, z) = & \alpha_1 + \alpha_2x + \alpha_3y + \alpha_4z + \alpha_5x^2 \\ & + \alpha_6y^2 + \alpha_7z^2 + \alpha_8xy + \alpha_9yx + \alpha_{10}xz \\ & + \alpha_{11}x^3 + \alpha_{12}y^3 + \alpha_{13}z^3 \\ & + \alpha_{14}yx^2 + \alpha_{15}zx^2 + \alpha_{16}zy^2 \\ & + \alpha_{17}xy^2 + \alpha_{18}xz^2 + \alpha_{19}zy^2 \\ & + \alpha_{20}xyz \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

## APÊNDICIE B – MATRIZ DE RIGIDEZ E MASSA – EULER BERNOULLI

Para os modelos de vigas EBT, formam-se as matrizes de rigidez e massa a partir das funções de forma, relacionando-as conforme o campo de deslocamento dos elementos: (AZEVEDO, 2003; RAO, 2011; COOK ; MALKUS, 2013)

$$\text{Deslocamento Axial} \quad u(x_e) = N_i(x_e)u_i + N_j(x_e)u_j \quad (\text{B.1})$$

- $u_i, u_j$  são os nós representados para os deslocamentos axiais e de forma conectoras para os graus de liberdades.
- $N_i(x_e), N_j(x_e)$  são as representações para as funções de forma dos elementos.

$$\begin{aligned} N_1(x_e) &= 1 - \frac{x}{L} \\ N_2(x_e) &= \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

$$\text{Movimento transversal} \quad w(x_e) = N_i(x_e)w_i + N_j(x_e)w_j \quad (\text{B.3})$$

- $w_i, w_j$  são os nós representados para os deslocamentos verticais e de forma conectoras para os graus de liberdades.
- $N_i(x_e), N_j(x_e)$  são as representações para as funções de forma dos elementos.

Na literatura, muitas das análises para vigas de EBT, as funções de forma para as vigas uniformes, são expressas por polinômios cúbicos.

$$w(x) = c_1 + c_2 \left(\frac{x}{L}\right) + c_3 x \left(\frac{x}{L}\right)^2 + c_4 x \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (\text{B.4})$$

Dessa as funções de forma são expressas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
N_1(x_e) &= 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
N_2(x_e) &= x - 2L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
N_3(x_e) &= 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
N_4(x_e) &= -L\left(\frac{x}{L}\right)^2 + L\left(\frac{x}{L}\right)^3
\end{aligned} \tag{B.5}$$

#### APÊNDICIE B.1 – MATRIZ DE RIGIDEZ E MASSA – TIMOSHENKO

A definição da aproximação para os campos considerados na teoria de Timoshenko é baseada exclusivamente no conhecimento do valor que a grandeza física toma num determinado número de nós definidos no elemento. Sendo assim pode-se escrever:

$$u(x_e) = N_i(x_e)u_i + N_j(x_e)u_j \tag{B1.1}$$

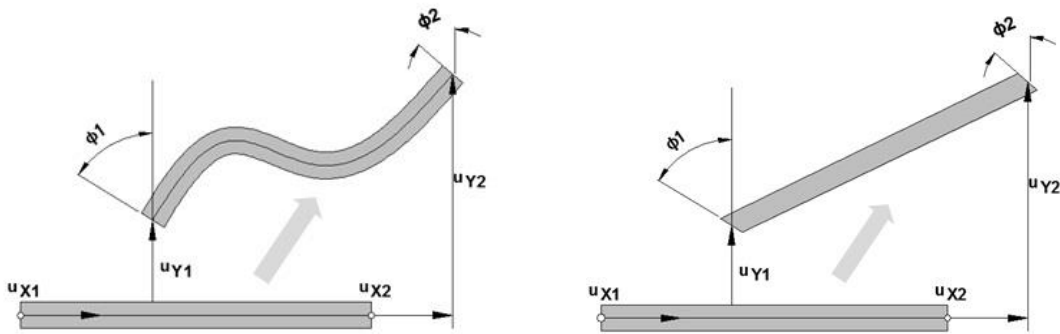
$$w(x_e) = N_i(x_e)w_i + N_j(x_e)w_j \tag{B1.2}$$

$$q(x_e) = N_i(x_e)q_i + N_j(x_e)q_j \tag{B1.3}$$

As equações (19), (20) e (21) são funções de forma referentes aos nós  $i$  e  $j$  dos elementos aplicados. Essas funções podem ser expressas por polinômios de primeiro grau, em  $x$ :

$$N_i(x_e) = \frac{1}{2}\left(1 - \left(2\frac{x}{l}\right)\right) \tag{B1.4}$$

Abaixo, podemos verificar um comparativo entre a definição de forma entre as vigas de Bernoulli e de Timoshenko:



**C1** - elemento com dois nós, indicando de forma cúbica elemento de Bernoulli.

**C0** - elemento com dois nós indicando deslocamento linear e de rotação. Representação da viga de Timoshenko.

Figura B1 - Cinemática para uma viga de dois nós em um modelo de elementos finitos, baseado em: na teoria de viga de (a) Euler-Bernoulli e apresentando a teoria de viga de Timoshenko (b).

Fonte: IFEM Notes, Colorado 2004

Para um modelo de viga com 2 nós, definimos a matriz determinante para a função de forma, em relação as funções de rotação e lineares da seguinte forma:

$$N = \begin{bmatrix} u(x) \\ w(x) \\ q(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{X}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{X}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} - \frac{X}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{X}{L} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} - \frac{X}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{2} + \frac{X}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(x_1) \\ w(x_1) \\ q(x_1) \\ u(x_2) \\ w(x_2) \\ q(x_2) \end{bmatrix} \quad (\text{B1.5})$$

## APÊNDICIE C – CONSTRUÇÃO DAS MATRIZES DE RIGIDEZ E MASSA

Dessa forma, para representarmos os coeficientes matriciais de rigidez e massa e as forças generalizadas no sentido axial, podemos representar pela integração ao longo da viga:

$$k_{ij} \int_0^l EA N_i N_j dx \quad (\text{C.1})$$

$$m_{ij} \int_0^l \rho A N_i N_j dx \quad (\text{C.2})$$

$$p_i \int_0^l p(x, t) N_i dx \quad (\text{C.3})$$

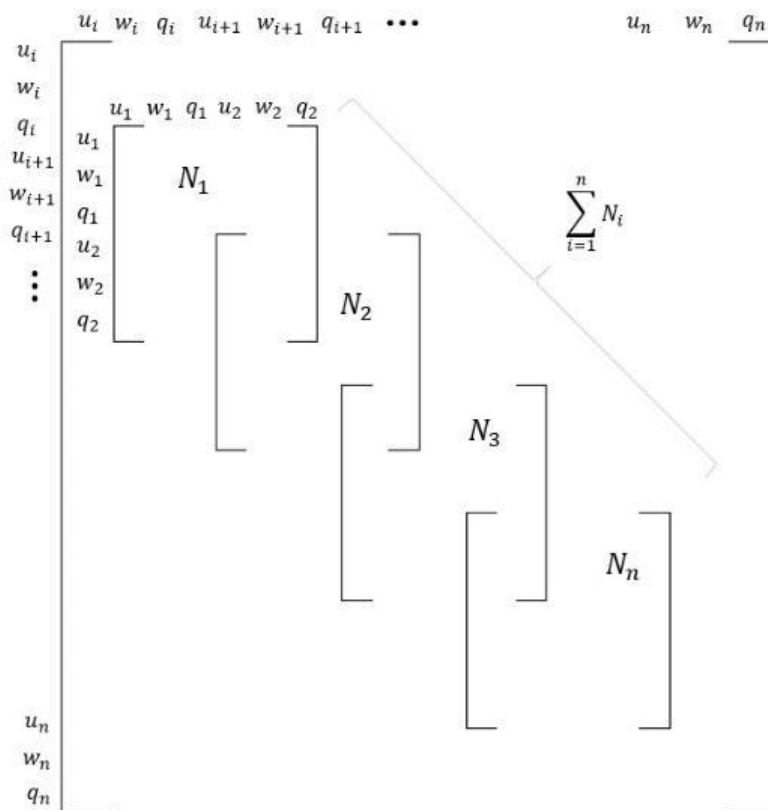


Figura 26– Determinação de matriz global por matrizes de elementos

Fonte: o autor (2019)

Os termos  $B_b$  e  $B_s$  são definidos como:

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{l} & 0 & \frac{-1}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{C.4})$$

$$B_d = \begin{bmatrix} \frac{-1}{l} & -\frac{1}{2}(1-s) & \frac{1}{l} & -\frac{1}{2}(1-s) \end{bmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Dessa forma a matriz de rigidez, pode ser expressa como:

$$K = \frac{EI_2}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA}{l} \begin{bmatrix} 1 & l/2 & -1 & l/2 \\ l^3/3 & -l/2 & l^2/6 & \\ & 1 & -l/2 & \\ & & l^3/3 & \end{bmatrix} \quad (\text{C.6})$$

## C1 - MATERIAIS ISOTRÓPICOS

São materiais com as propriedades com a mesma forma em todas as direções em um ponto respectivo, essa propriedade independe da orientação em um ponto no corpo (JONES,1999).

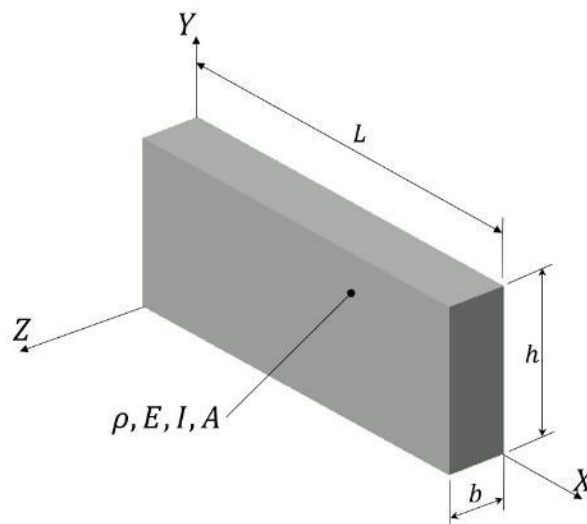


Figura 27 – Modelo de viga com material Isotrópico

Fonte: O autor (2019)



As constantes dos materiais isotrópicos são definidas por:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Módulo de elasticidade [GPa]} & E \\
 \text{Módulo de Poisson} & \nu \\
 \text{Módulo de Cisalhamento [GPa]} & G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \\
 \text{Densidade [kg/m}^3\text{]} & \rho
 \end{array} \quad (42)$$

$$\text{Pa} = \text{N/m}^2 \quad \text{MPa} = 10^6 \text{Pa} \quad \text{GPa} = 10^9 \text{Pa}$$

Para materiais isotrópicos a matriz  $M$  define-se apenas para uma referência de material, ou seja, uma densidade aplicada. Podemos representar da seguinte forma:

$$M = \int \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} \\ N_{41} & 0 & 0 \\ 0 & N_{52} & 0 \\ 0 & 0 & N_{63} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho A & 0 & 0 \\ 0 & \rho A & 0 \\ 0 & 0 & \rho I \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 & N_{14} & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & 0 & N_{25} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} & 0 & 0 & N_{36} \end{bmatrix} dV \quad (C1.1)$$

Para os elementos de  $N$  em função de  $n \times n$ , define-se a partir da equação (B.5) variando-a de acordo com a posição na viga, relacionado a  $l$ .

## C.2 MATERIAIS ORTOTRÓPICOS

Os materiais Ortotrópicos são configurados com lâminas de materiais são tipicamente aplicações em materiais compósitos. Com fibras e as matrizes são aplicados dentro de um bloco, esses blocos, em forma de lâminas, podem ser empilhados, formando camadas de lâminas. A aplicação das lâminas com suas respectivas orientações das fibras irá definir a propriedade mecânica do material. Os módulos de elasticidade nos sentidos ortogonais e o coeficiente de Poisson nas principais direções 1 e 2 (longitudinal e transversal) respectivamente de uma lâmina são (REDDY, 2004):

$$E_1 = E_f v_f + E_m v_m \quad (43)$$

$$E_2 = \frac{E_f v_m}{E_f v_m + E_m v_f} \quad (44)$$

$$v_1 = v_f v_f + v_m v_m \quad (45)$$

$$G_{12} = \frac{G_f v_m}{G_f v_m + G_m v_f} \quad (46)$$

Onde:

$E_f$  → Módulo de elasticidade da fibra;

$E_m$  → Módulo de elasticidade da matriz;

$v_f$  → coeficiente de *Poisson* da fibra;

$v_m$  → coeficiente de *Poisson* da matriz;

$v_f$  → Fração de volume da fibra;

$v_m$  → Fração de volume da matriz;

$$G_f = \frac{E_f}{2(1 + v_f)} \quad (47)$$

$$G_m = \frac{E_m}{2(1 + v_m)} \quad (48)$$

$G_f$  → Módulo de elasticidade transversal da fibra;

$G_m$  → Módulo de elasticidade transversal da matriz;

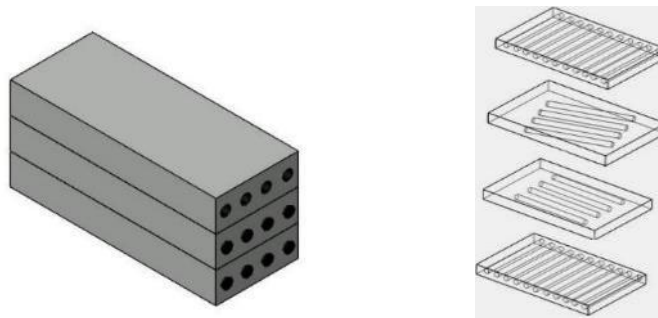


Figura 28 – Modelo de viga com material ortotrópico (laminado)

Fonte: O autor (2019)

Em vigas de materiais compósitos laminados, as propriedades mecânicas são definidas por sua sequência de empilhamento, espessura e orientação das fibras. Para um estudo do comportamento das lâminas sobrepostas tem-se a

necessidade de definir o ângulo de orientação das fibras em cada lâmina respectiva conforme sequenciadas.

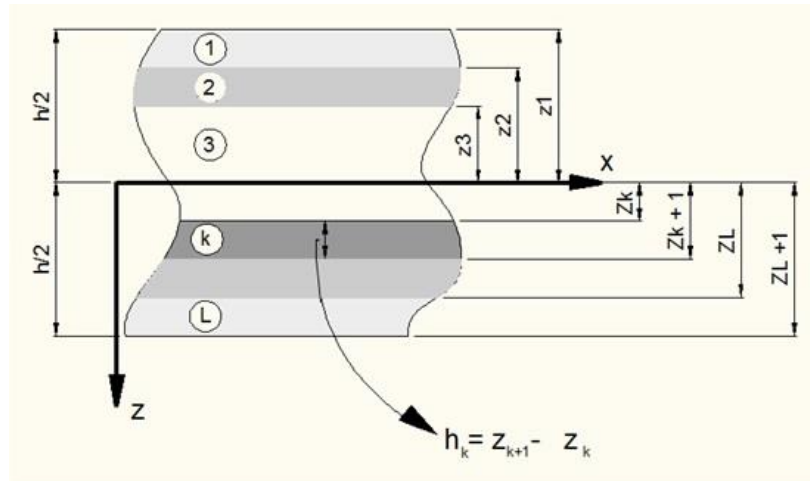


Figura 29 – Sequência de laminação determinação por ângulo

Fonte: O autor, 2013 adaptado de: REDDY, 2004.

Para materiais compostos a matriz  $\hat{M}$  define-se em relação a cada uma das lâminas correspondentes, ou seja, tendo-se uma variação de material e respectivamente a densidade, se aplica para a matriz.

$$m \int \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} \\ N_{41} & 0 & 0 \\ 0 & N_{52} & 0 \\ 0 & 0 & N_{63} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \rho_0 & 0 & \rho_1 \\ 0 & \rho_0 & 0 \\ \rho_1 & 0 & \rho_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_{11} & 0 & 0 & N_{14} & 0 & 0 \\ 0 & N_{22} & 0 & 0 & N_{25} & 0 \\ 0 & 0 & N_{33} & 0 & 0 & N_{36} \end{bmatrix} dV$$

(C.2)

Para a definição das lâminas definimos em função da geometria e da densidade do material (REDDY, 2004):

$$\rho_0 = b \sum_{k=1}^n (\rho)_k (z_k - z_{k-1}) \quad (C2.1)$$

$$\rho_1 = \frac{b}{2} \sum_{k=1}^n (\rho)_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \quad (C2.2)$$

$$\rho_2 = \frac{b}{3} \sum_{k=1}^n (\rho)_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \quad (C2.3)$$

