PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ
ESCOLA POLITÉCNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

THIAGO DE OLIVEIRA ABECHE

MODELAGEM COMPUTACIONAL DA INTERAÇÃO DINÂMICA DESACOPLADA ENTRE VIGA E VEÍCULO CONSIDERANDO AS IRREGULARIDADES DA VIA E A MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

CURITIBA
2015

THIAGO DE OLIVEIRA ABECHE

MODELAGEM COMPUTACIONAL DA INTERAÇÃO DINÂMICA DESACOPLADA ENTRE VIGA E VEÍCULO CONSIDERANDO AS IRREGULARIDADES DA VIA E A MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos Computacional, da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Roberto Dalledone Machado, D. Eng.

CURITIBA

2015

THIAGO DE OLIVEIRA ABECHE

MODELAGEM COMPUTACIONAL DA INTERAÇÃO DINÂMICA DESACOPLADA ENTRE VIGA E VEÍCULO CONSIDERANDO AS IRREGULARIDADES DA VIA E A MECÂNICA DO DANO CONTÍNUO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto Sensu em Engenharia Mecânica, Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos Computacional, da Escola Politécnica, da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia (M. Eng.).

COMISSÃO EXAMINADORA

Prof. D. Eng. Roberto Dalledone Machado
Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Prof. D. Eng. Fernando Luiz Martinechen Beghetto
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. D. Sc. Luiz Antonio Farani de Souza
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. D. Eng. Hsu Yang Shang
Pontifícia Universidade Católica do Paraná

CURITIBA, 29 de Outubro de 2015.

Dedico este trabalho aos meus amados e queridos pais, Péricles e Rosana, à minha amada irmã Thaise, e à Vanessa, minha companheira e amor da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao eterno criador do tudo e do nada pela possibilidade da vida, pelo livre arbítrio, pela saúde e pela presença confortante em todos os instantes da vida.

Agradeço aos meus amados pais Péricles e Rosana, pelo amor, pelo companheirismo, pelo apoio e incentivo, pela paciência, pela união, pelos ensinamentos e exemplos, pela imprescindível presença e pela segurança nos momentos de maior necessidade, pelas oportunidades, pela felicidade e alegria que me trazem, pelo amparo, pelo auxílio em qualquer situação e por terem feito tudo por mim durante toda a minha vida.

À minha amada e querida irmã pela confiança, pelo apoio e pela grande alegria transmitida.

Ao Professor Roberto Dalledone Machado pela ilustre, honrosa e segura orientação que inevitavelmente desperta o fascínio pelo conhecimento ministrado, pelas interessantes aulas lecionadas, pela contribuição, pelas oportunidades presenteadas, pela paciência, pela dedicação, pela disponibilidade em ajudar até mesmo nos momentos inoportunos, pela gratificante oportunidade em compartilhar sua sabedoria, pelos conselhos, pelo exemplo de pessoa e pela grande amizade.

Ao Professor João Elias Abdalla Filho pelo conhecimento transmitido, pelas aulas ministradas, pelas conversas esclarecedoras, pela amizade construída, pela disponibilidade em sempre ajudar, pelo exemplo de pessoa e pelas oportunidades.

Ao Professor Fernando Luiz Martinechen Beghetto pela grande ajuda sempre ofertada, pelo conhecimento, pela oportunidade e iniciação em trabalhar com sua linha de pesquisa, pelo incentivo, pelos conselhos, pelos exemplos, pela dedicação, pelo companheirismo e pela amizade.

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (PPGEM/PUCPR) pela acolhida.

À CAPES pelo suporte financeiro através da concessão da bolsa de dedicação exclusiva.

Aos Professores do PPGEM/PUCPR, Nilson Barbieri, Renato Barbieri e Key Fonseca, pelo conhecimento transmitido, pela excelência acadêmica e pelas orientações durante o curso.

Ao Professor Luiz Antonio Farani de Souza pela oportunidade do primeiro contato com a pesquisa científica, pelo incentivo, pelo exemplo de dedicação e sede de conhecimento e por ser uma pessoa de bem.

Ao Professor Hsu Yang Shang pela disponibilidade em me ajudar de bom grado a entender as complexas equações dinâmicas não lineares.

Aos meus colegas de mestrado, em especial ao Bruno Matos Martins e ao Marcos Battistela Lopes, companheiros de estudo, pela amizade desenvolvida.

À Jane pela grande ajuda, pelos grandes favores, pela preocupação e pela amizade.

Em especial à Vanessa, amor da minha vida, pelo amor, pelo carinho, pela companhia, pelas imensuráveis ajudas durante a realização deste trabalho, pela paciência e compreensão, pela confiança, pela dedicação, pelos sorrisos, pelo bom coração, por ser um exemplo de pessoa, pela felicidade que me traz e por ser tão especial em minha vida.

E a todos que me acompanharam durante o período de produção deste trabalho e de forma direta ou indireta o influenciaram.

"*Se vi mais longe, foi por estar de pé sobre ombros de gigantes*".

(Isaac Newton, 1676)

RESUMO

Os efeitos da interação entre veículo e infraestrutura têm uma importância significativa nas respostas dinâmicas de ambos os sistemas com diversas aplicações dentro do campo de rodovias e ferrovias. Quando as cargas de um veículo são capazes de produzir deformações acumuladas suficientes para provocar danos na infraestrutura, as respostas dinâmicas sofrem alteração. Ao atravessar uma ponte com certa velocidade, o veículo está sujeito aos efeitos das irregularidades da via. O movimento de um veículo sobre uma ponte já é, por si só, uma ação dinâmica sobre a estrutura. Entretanto, irregularidades na pista tendem a excitar dinamicamente o veículo que, por sua vez, desperta vibrações adicionais na estrutura da ponte além daquelas produzidas pelo seu próprio movimento. A abordagem desenvolvida no presente estudo trata de forma desacoplada este fenômeno. Essas vibrações tendem a aumentar o grau de danificação estrutural. Isto modifica as respostas dinâmicas da estrutura, aumentando a magnitude e as oscilações das respostas dentro do mesmo intervalo de tempo se comparadas aos modelos dinâmicos lineares, especialmente nas velocidades críticas do veículo, capazes de provocar alguma ressonância. Além de modificar as respostas dinâmicas em termos de deslocamentos, velocidades, acelerações e deformações, o dano altera as frequências naturais de vibração da estrutura. Tais efeitos não são possíveis de ser analisados com modelos dinâmicos lineares. Efeitos de não linearidade física ocorrem pelo fato das forças não dependerem linearmente dos deslocamentos na medida em que ocorre danificação do material. Assim, este trabalho procura avaliar os efeitos dinâmicos não lineares produzidos por uma ponte de concreto armado por meio do método dos elementos finitos cujo grau de danificação é alterado ao longo do tempo por meio da perda de rigidez da estrutura pela mecânica do dano. As irregularidades da via são representadas por funções harmônicas senoidais, periódicas triangulares e retangulares e não periódicas na forma de pulsos. No modelo da ponte utilizam-se elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*, com funções de interpolação cúbicas de *Hermite*. Para o tratamento diferenciado do comportamento do concreto à tração e à compressão utiliza-se o modelo constitutivo de dano de *Mazars*, considerando a condição de inversão de esforços devido, também, à vibração. A mecânica do dano contínuo é considerada dinamicamente. Consequentemente, o dano é avaliado em cada camada da seção transversal de cada elemento estrutural para cada iteração dentro de cada passo de tempo. Utiliza-se um modelo elastoplástico bilinear com encruamento para o aço estrutural. O amortecimento estrutural é definido pelo método de *Rayleigh*. As equações de movimento são obtidas através do equilíbrio dinâmico não linear e integradas numericamente no tempo usando o método de *Newmark* em conjunto com o método iterativo e incremental de *Newton-Raphson*. Desenvolveu-se um código computacional nas linguagens MATLAB, C++ e Fortran. Esta proposta visa contribuir para o estudo do monitoramento da saúde e da integridade estrutural das estruturas de pontes em que o grau de danificação é alterado ao longo do tempo.

Palavras-chave: Mecânica do Dano. Interação Dinâmica. Método dos Elementos Finitos. Dinâmica Não Linear. Modelagem Computacional.

ABSTRACT

The effects of vehicle-infrastructure interaction have a significant importance on the dynamic responses of both systems with several applications within highways and railways field. When the loads of a vehicle are capable to produce accumulated strains sufficient to cause damage to the infrastructure, the dynamic responses suffer alteration. By crossing a bridge with a certain speed, the vehicle is subjected to the effects of track irregularities. The movement of a vehicle on a bridge is already, by itself, a dynamic action on the structure. However, the irregularities of the track tend to excite the vehicle dynamically which in turns triggers additional vibrations in the bridge structure apart from those produced by their own movement. The approach developed in this work treats this phenomenon uncoupled. These vibrations tend to increase the degree of structural damage. This modifies the dynamic responses of the structure, increasing the magnitude and the oscillations of the responses within the same time interval if compared to linear dynamic models, especially at critical speeds of the vehicle, capable to provoke some resonance. Apart from changing the responses in terms of displacements, velocities, accelerations and strains, the damage alters the natural frequencies of vibration of the structure. Such effects are not possible to be analyzed with linear dynamic models. Effects of physical nonlinearities occur by the fact that the forces no longer linearly depend from the displacements when damage to the material occurs. Thereby, this work aims to evaluate the nonlinear dynamic effects produced in a reinforced concrete bridge through the finite element method on which the degree of damage is altered over time through the stiffness loss of the structure by damage mechanics. The track irregularities are represented by sinusoidal harmonic, triangular and rectangular periodic and non-periodic in the form of pulses functions. In the bridge model are used *Euler-Bernoulli* beam elements with *Hermite* cubic interpolation functions. For the differentiated treatment of the concrete behavior to traction and compression is utilized the *Mazars*' damage constitutive model, considering the condition of stress inversion also due to vibration. The continuum damage mechanics is considered dynamically. Consequently, the damage is evaluated in each layer of every single structural element cross section for each iteration within each time step. A bilinear elastoplastic model with strain hardening is used for the structural steel. The structural damping is defined by the *Rayleigh* method. The equations of motion are obtained by nonlinear dynamic equilibrium and numerically integrated in time using the *Newmark* method together with the *Newton-Raphson* iterative and incremental method. A computer code has been developed in MATLAB, C++ and Fortran programming languages. This proposal seeks to contribute to the study of the health monitoring and structural integrity of bridge structures on which the degree of damage is altered over time.

Key-words: Damage Mechanics. Dynamic Interaction. Finite Element Method.

Nonlinear Dynamics. Computational Modeling.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Exemplo de flexão em viga de materiais compósitos..............................41
Figura 2 – Flexão composta plana de uma viga de materiais compósitos 42
Figura 3 – Classificação dos modelos estruturais quanto à geometria 48
Figura 4 – Algoritmo de formulação direta, variacional e de resíduos no MEF 50
Figura 5 – Viga submetida a um carregamento uniformemente distribuído 51
Figura 6 – Tensões axiais na seção transversal da viga..52
Figura 7 – Configuração deformada da viga flexionada...52
Figura 8 – Elemento finito de viga e seus graus de liberdade..................................54
Figura 9 – Gráficos das funções de interpolação polinomiais cúbicas de *Hermite*....56
Figura 10 – Modos naturais de vibração de uma viga biapoiada 63
Figura 11 – Deformação equivalente 69
Figura 12 – Curva σ x ε para ciclos de carregamento e de descarregamento........70
Figura 13 – Fator de magnificação dinâmica...72
Figura 14 – Método da aceleração constante média de *Newmark*............................80
Figura 15 – Relação entre força e deslocamento do método de *Newton-Raphson* completo...92
Figura 16 – Relação entre força e deslocamento do método de *Newton-Raphson* modificado...94
Figura 17 – Modelo de veículo com 1 grau de liberdade..104
Figura 18 – Diagrama tensão-deformação para o modelo de dano de *Mazars* 111
Figura 19 – Resposta uniaxial do modelo de *Mazars*: (a) tração, (b) compressão..113
Figura 20 – Modelo elastoplástico bilinear com encruamento para o aço 114
Figura 21 – Seção transversal retangular da ponte dividida em n camadas 115
Figura 22 – Ponte biapoiada com carregamento estático crescente.......................128
Figura 23 – Relação força vs. deslocamento comparando respostas estáticas lineares e não lineares 130
Figura 24 – Danos discretizados em 6 camadas obtidos ao final da análise estática não linear...131
Figura 25 – Danos discretizados em 60 camadas obtidos ao final da análise estática não linear...131
Figura 26 – Ponte biapoiada com carregamento crescente ao longo do tempo 132
Figura 27 – Diagrama da força concentrada ao longo do tempo............................134

Figura 28 – Resposta dinâmica de deslocamento..135
Figura 29 – Resposta dinâmica de deslocamento até a estabilização da vibração.135
Figura 30 – Resposta dinâmica de velocidade..136
Figura 31 – Resposta dinâmica de velocidade até a estabilização da vibração......136
Figura 32 – Resposta dinâmica de aceleração 137
Figura 33 – Resposta dinâmica de aceleração até a estabilização da vibração 137
Figura 34 – Resposta dinâmica de aceleração analisada até 0.36 s 138
Figura 35 – Ilustração da interação dinâmica linear do exemplo 4.3.......................139
Figura 36 – Deslocamentos dos sistemas do exemplo 4.3 141
Figura 37 – Deslocamentos no centro da ponte...142
Figura 38 – Resposta dinâmica linear de velocidade no centro da ponte 144
Figura 39 – Resposta dinâmica linear de aceleração no centro da ponte...............144
Figura 40 – Fator de amplificação dinâmica no centro da ponte sem danos 145
Figura 41 – Fator de amplificação dinâmica da ponte sem danos com refino de análises 146
Figura 42 – Respostas dinâmicas de deslocamento no centro da ponte com variação do dano generalizado..149
Figura 43 – Comparação entre respostas dinâmicas de deslocamento no centro da ponte 150
Figura 44 – Comparação entre respostas dinâmicas de deslocamento no centro da ponte até a estabilização da vibração 150
Figura 45 – Comparação entre respostas dinâmicas de velocidade no centro da ponte 152
Figura 46 – Comparação entre respostas dinâmicas de velocidade no centro da ponte até a estabilização da vibração 152
Figura 47 – Comparação entre respostas dinâmicas de aceleração no centro da ponte 153
Figura 48 – Comparação entre respostas dinâmicas de aceleração no centro da ponte até a estabilização da vibração 154
Figura 49 – Configuração danificada final da ponte com irregularidades harmônicas senoidais 154
Figura 50 – Evolução dos danos na seção transversal do décimo elemento ao longo do tempo 155

Figura 51 – Fator de amplificação dinâmica sem danos, gerado com 121 análises computacionais 157
Figura 52 – Fator de amplificação dinâmica com danos, gerado com 121 análises computacionais 157
Figura 53 – Fator de amplificação dinâmica com danos, gerado com 10,201 análises computacionais 158
Figura 54 – Irregularidades harmônicas senoidais, periódicas triangulares e periódicas retangulares 161
Figura 55 – Comparação das respostas dinâmicas lineares de deslocamento com a resposta estática 162
Figura 56 – Comparação entre respostas dinâmicas não lineares de deslocamento com a resposta estática para diferentes irregularidades 165
Figura 57 – Ação do amortecimento estrutural na estabilização da resposta dinâmica não linear de deslocamento 166
Figura 58 – Respostas dinâmicas não lineares de velocidade para diferentes irregularidades....................167
Figura 59 – Respostas dinâmicas não lineares de aceleração para diferentes irregularidades....................168
Figura 60 – Configuração da ponte com irregularidades retangulares dividida em 6 camadas....................169
Figura 61 – Evolução dos danos no quarto elemento ao longo do tempo dividido em 6 camadas....................170
Figura 62 – Configuração da ponte com irregularidades retangulares dividida em 60 camadas....................171
Figura 63 – Evolução dos danos no quarto elemento ao longo do tempo dividido em 60 camadas....................171
Figura 64 – Irregularidades na forma de pulsos não periódicos do exemplo 4.3 173
Figura 65 – Comparação das respostas dinâmicas lineares de deslocamento para as diferentes irregularidades na forma de pulsos....................174
Figura 66 – Comparação entre respostas dinâmicas lineares pulso e periódicas triangulares com a resposta estática....................175
Figura 67 – Comparação entre respostas dinâmicas lineares pulso e periódicas retangulares com a resposta estática....................175

Figura 68 – Comparação entre as respostas dinâmicas de deslocamento para as diferentes irregularidades na forma de pulsos com rotina capaz de captar não linearidades....176
Figura 69 – Respostas dinâmicas de velocidade para diferentes irregularidades na forma de pulsos com rotina capaz de captar não linearidades....177
Figura 70 – Respostas dinâmicas de aceleração para diferentes irregularidades na forma de pulsos com rotina capaz de captar não linearidades....178
Figura 71 – Respostas dinâmicas de aceleração para irregularidades na forma de pulsos no trecho de 1,3 s até 1,9 s com rotina capaz de captar não linearidades ..178
Figura 72 – Comparação entre respostas dinâmicas não lineares pulso e harmônicas triangulares com a resposta estática....179
Figura 73 – Comparação entre respostas dinâmicas não lineares pulso e harmônicas retangulares com a resposta estática....180
Figura 74 – Irregularidades na forma de pulsos não periódicos do exemplo 4.6 182
Figura 75 – Irregularidades do pavimento na forma de arcos do exemplo 4.6........182
Figura 76 – Interação dinâmica entre veículo, irregularidades e ponte com dois apoios e dois balanços....183
Figura 77 – Deslocamentos no centro da ponte do exemplo 4.6.2 183
Figura 78 – Deslocamentos na extremidade do balanço da esquerda do exemplo 4.6.2 184
Figura 79 – Deslocamentos no grau de liberdade 23 do exemplo 4.6.2 185
Figura 80 – RD de deformação da camada superior de cada elemento (irregularidades retangulares) do exemplo 4.6.3 186
Figura 81 – Configuração danificada final da ponte do exemplo 4.6.2 para as diferentes irregularidades periódicas....187
Figura 82 – Evolução dos danos na seção transversal do elemento mais solicitado ao longo do tempo (exemplo 4.6.2)....188
Figura 83 – RD de deformação da camada inferior de cada elemento (irregularidades retangulares) do exemplo 4.6.2....189
Figura 84 – Respostas dinâmicas de velocidade obtidas no centro da ponte para diferentes irregularidades (exemplo 4.6.2) 191
Figura 85 – Respostas dinâmicas de velocidades obtidas no centro da ponte para as diferentes irregularidades entre o 0.9 s e 1.8 s (exemplo 4.6.2)....191

Figura 86 – Respostas dinâmicas de aceleração obtidas no centro da ponte para diferentes irregularidades (exemplo 4.6.2) 192
Figura 87 – Respostas dinâmicas de aceleração obtidas no centro da ponte para diferentes irregularidades entre 1.08 s e 1.8 s (exemplo 4.6.2)..............................192
Figura 88 – Interação dinâmica entre veículo, irregularidade e ponte com três apoios e dois balanços 193
Figura 89 – Deslocamentos na extremidade do balanço da esquerda do exemplo 4.6.3 193
Figura 90 – Deslocamentos no grau de liberdade 23 do exemplo 4.6.3 194
Figura 91 – Deslocamentos no grau de liberdade 23 entre 0.9 s e 1.8 s do exemplo 4.6.3 195
Figura 92 – RD de deformação da camada superior de cada elemento (irregularidades retangulares) do exemplo 4.6.3 196
Figura 93 – RD de deformação da camada inferior de cada elemento (irregularidades retangulares) do exemplo 4.6.3...197
Figura 94 – Configuração danificada final da ponte do exemplo 4.6.3 para as diferentes irregularidades periódicas...198
Figura 95 – Evolução dos danos na seção transversal do elemento mais solicitado ao longo do tempo (exemplo 4.6.3)...199
Figura 96 – RD lineares de velocidade para diferentes irregularidades periódicas do exemplo 4.5...220
Figura 97 – RD lineares de aceleração para diferentes irregularidades periódicas do exemplo 4.5...220
Figura 98 – Respostas dinâmicas lineares de velocidade para diferentes irregularidades na forma de pulsos do exemplo 4.5 221
Figura 99 – Respostas dinâmicas lineares de aceleração para diferentes irregularidades na forma de pulsos do exemplo 4.5 221
Figura 100 – Respostas dinâmicas lineares de aceleração para irregularidades na forma de pulsos até 1.9 s do exemplo 4.5...222

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tipos de irregularidades da via 105
Tabela 2 – Dados de entrada do exemplo 4.1..129
Tabela 3 – Parâmetros materiais do exemplo 4.1 129
Tabela 4 – Dados de entrada do exemplo 4.2..133
Tabela 5 – Dados de entrada do exemplo 4.3..140
Tabela 6 – Dados de entrada do exemplo 4.4..148
Tabela 7 – Comparação entre frequências naturais da ponte íntegra e da ponte danificada...159
Tabela 8 – Dados de entrada do exemplo 4.5..160
Tabela 9 – Frequências naturais da ponte com irregularidades periódicas retangulares 172
Tabela 10 – Dados de entrada do exemplo de ponte com dois balanços 181

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	- Associação Brasileira de Normas Técnicas
CPU	- Unidade Central de Processamento (*Central Processing Unit*)
DL	- Dinâmico Linear
DNL	- Dinâmico Não Linear
ed.	- Edição
Ed.	- Editor
f.	- Folha
MEF	- Método dos Elementos Finitos
NBR	- Norma Brasileira Regulamentar
p.	- Página
pp.	- Páginas, inicial e final do artigo
PUCPR	- Pontifícia Universidade Católica do Paraná
RAM	- Memória de Acesso Aleatório (*Random Access Memory*)
RD	- Respostas Dinâmicas
RVE	- Elemento de Volume Representativo

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal constante.
L_b	Comprimento da viga.
σ_y	Tensão normal em relação ao eixo (y).
σ_x	Tensão normal em relação ao eixo (x).
v	Velocidade do veículo.
t	Tempo.
I	Momento de inércia da seção.
$q(x)$	Carregamento transversal uniformemente distribuído.
$u(x,y)$	Campos de deslocamentos axiais.
$w(x,y)$	Campos de deslocamentos transversais.
y	Altura em relação à linha neutra.
$\frac{dw}{dx}$	Ângulo de rotação.
ε_x	Deformação relativa axial em relação ao eixo (x).
$\prod$	Energia potencial total da viga.
L	Comprimento do elemento finito.
c_i	Constantes das funções de forma.
$H_i(x)$	Funções de forma do elemento finito de viga.
T	Energia cinética do elemento finito da viga.
ρ	Massa específica do material.
$\sum$	Somatório.
$(\dot{\ })$	Primeira derivada em relação ao tempo.
$(\ddot{\ })$	Segunda derivada em relação ao tempo.
$(\ ')$	Primeira derivada em relação ao eixo (x).
$(\ '')$	Segunda derivada em relação ao eixo (x).
$\{\ \}^T$	Vetor transposto.
$\int$	Integral simples.
$\iint$	Integral dupla.

$[M]$	Matriz de massa do sistema.
$[M_e]$	Matriz de massa do elemento finito de viga.
$[M_B]$	Matriz de massa da viga.
m	Massa.
V	Energia potencial de deformação.
Ω	Volume de integração do sólido.
$[K]$	Matriz de rigidez do sistema.
$[K_e]$	Matriz de rigidez do elemento finito de viga.
$[K_B]$	Matriz de rigidez da viga.
Q_i	Forças não conservativas.
q_i	Coordenadas generalizadas.
p_i	Esforços nodais.
$\{F_B(t)\}$	Vetor de forças externas aplicadas à viga.
$\{U_B\}$	Vetor de deslocamento da viga.
$\{\dot{U}_B\}$	Vetor de velocidade da viga.
$\{\ddot{U}_B\}$	Vetor de aceleração da viga.
ω_{nbs}	Frequências naturais da ponte.
ω_{nb1}	Primeira frequência natural da viga.
ω_{nb2}	Segunda frequência natural da viga.
α_B	Coeficiente de *Rayleigh* que multiplica a matriz de massa.
β_B	Coeficiente de *Rayleigh* que multiplica a matriz de rigidez.
ω_{nbn}	N-ésima frequência natural da viga.
$\phi_{n(x)}$	Modos naturais de vibração.
ζ_B	Razão de amortecimento para a viga.
m_u	Massa unitária da viga.
$[C_B]$	Matriz de amortecimento do sistema.
$\{\dot{U}_B\}$	Vetor de velocidades do sistema.
$\tilde{S}$	Área efetiva.
S	Área íntegra.
S_0	Área com defeitos.
D_n	Medida local de dano.
$\vec{n}$	Versor normal n.

D	Variável escalar de dano.
$\tilde{\sigma}$	Tensão efetiva.
F	Força aplicada no elemento representativo.
ε_e	Deformação equivalente.
$\tilde{E}$	Módulo de *Young* do material danificado.
E	Módulo de *Young* do material íntegro.
m_1	Massa suspensa.
m_2	Massa não suspensa.
k	Coeficiente de rigidez da mola.
c	Coeficiente de amortecimento do amortecedor.
$y(t)$	Irregularidades da via.
f_m	Força resistiva elástica que age na mola.
f_A	Força resistiva devido ao amortecimento.
ω	Frequência de excitação externa.
f	Frequência cíclica.
l	Comprimento da onda senoidal.
g	Aceleração da gravidade.
$\tilde{\varepsilon}$	Deformação equivalente do modelo constitutivo de *Mazars*.
ε_i	Componentes de deformações principais.
$(\varepsilon_i)_+$	Componentes positivas de deformações principais.
ε_{d0}	Deformação de início de danificação correspondente ao esforço máximo em uma prova de tração uniaxial.
ε	Deformação específica.
σ	Tensão.
α_t e α_C	Componentes da combinação linear ($0 \leq \alpha_T, \alpha_C \leq 1$).
A_T, B_T	Parâmetros do modelo relativos à tração.
A_C, B_C	Parâmetros do modelo relativos à compressão.
ν	Coeficiente de Poisson do concreto.
E_{c0}	Módulo de *Young* inicial longitudinal do concreto.
E_{a0}	Módulo de *Young* longitudinal inicial do aço.
E_a	Módulo de *Young* longitudinal após a cedência do aço.
FAD	Fator de amplificação dinâmica.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 12
1.1 MOTIVAÇÃO 17
1.2 OBJETIVO 20
1.2.1 Objetivo geral 20
1.2.2 Objetivos específicos 20
1.3 LIMITAÇÕES DO PRESENTE TRABALHO 21
1.4 METODOLOGIA 21
1.5 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA 24
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA 40
2.1 TEORIA DE FLEXÃO EM VIGAS 40
2.1.1 Flexão composta plana 40
2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF) 47
2.2.1 Teoria de viga de *Euler-Bernoulli* 51
2.2.1.1 Elemento finito de viga 53
2.3 TEORIA DO DANO CONTÍNUO 64
2.4 SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES 71
2.4.1 Contextualização 71
2.4.2 Fundamentação teórica e dedução da equação dinâmica não linear de movimento da estrutura da ponte 79
2.4.3 Métodos de solução de equações não lineares 86
2.4.3.1 Método de *Newton-Raphson* 90
2.4.3.2 Método de *Newton-Raphson* modificado 93
2.4.3.3 Critérios de convergência 94
2.4.4 Método otimizado de solução de equações dinâmicas não lineares iterativas 97
3 MODELOS MATEMÁTICOS DO VEÍCULO E DA PONTE 102
3.1 MODELOS MATEMÁTICOS DE VEÍCULOS ACOPLADOS COM IRREGULARIDADES 103
3.2 MODELO DINÂMICO LINEAR DESACOPLADO ENTRE VEÍCULO, IRREGULARIDADE E PONTE 107
3.3 MODELO CONSTITUTIVO DE DANO DE *MAZARS* (1984) 110
3.4 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO ESTRUTURAL 113

3.5 MODELO DE RIGIDEZ EQUIVALENTE 114
3.6 MODELO MATEMÁTICO DINÂMICO NÃO LINEAR ATRAVÉS DA MECÂNICA DO DANO PARA A PONTE 116
3.6.1 Inicialização das variáveis e aplicação das condições iniciais 117
3.6.2 Processo iterativo do método implícito de integração direta no tempo de *Newmark* 118
3.6.3 Processo iterativo e incremental do método de *Newton-Raphson* 120
4 ANÁLISES NUMÉRICAS 127
4.1 EXEMPLO DE VIGA BIAPOIADA COM CARREGAMENTO ESTÁTICO CRESCENTE 127
4.1.1 Dados de entrada do exemplo 4.1 129
4.1.2 Análise estática linear e não linear dos deslocamentos máximos 129
4.2 EXEMPLO DE PONTE BIAPOIADA COM CARREGAMENTO CRESCENTE AO LONGO DO TEMPO 132
4.2.1 Dados de entrada do exemplo 4.2 133
4.2.2 Análise dinâmica linear da ponte 134
4.3 EXEMPLO DINÂMICO LINEAR DE PONTE COM IRREGULARIDADES SENOIDAIS E VEÍCULO TRANSEUNTE CONSIDERANDO A RIGIDEZ CONSTANTE 139
4.3.1 Dados de entrada do exemplo 4.3 140
4.3.2 Análise das respostas estáticas e dinâmicas lineares dos sistemas 141
4.4 EXEMPLO DL E DNL DE PONTE COM IRREGULARIDADES HARMÔNICAS SENOIDAIS E VEÍCULO TRANSEUNTE COM GRANDE CARGA 148
4.4.1 Dados de entrada do exemplo 4.4 148
4.4.2 Análise dinâmica linear e não linear da ponte 149
4.5 EXEMPLO DE PONTE COM DIVERSAS FORMAS DE IRREGULARIDADES SUJEITA A VEÍCULO TRANSEUNTE 160
4.5.1 Dados de entrada do exemplo 4.5 160
4.5.2 Análise com irregularidades periódicas senoidais, triangulares e retangulares 161
4.5.2.1 Análise dinâmica linear para as diferentes irregularidades periódicas 162
4.5.2.2 Análise dinâmica não linear para as diferentes irregularidades periódicas através da mecânica do dano 165

4.5.3 Exemplo com irregularidades na forma de pulsos não periódicos triangulares e retangulares 172
4.5.3.1 Análise com rotina dinâmica linear considerando apenas o momento de inércia para diferentes irregularidades na forma de pulsos aperiódicos..................174
4.5.3.2 Análise dinâmica não linear..176
4.6 EXEMPLO DE PONTE COM DOIS BALANÇOS..181
4.6.1 Dados de entrada do exemplo 4.6..181
4.6.2 Ponte com dois balanços biapoiada..183
4.6.3 Ponte com dois balanços e três apoios...193
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS...200
5.1 RESUMO E CONCLUSÕES..200
5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS..206
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS...209

1 INTRODUÇÃO

Diversos problemas nas engenharias em geral são de natureza complexa e necessitam de análises mais detalhadas e precisas. É o caso tanto de estruturas com grandes dimensões quanto de sistemas estruturais sujeitos a efeitos físicos de maior complexidade.

Atualmente, o engenheiro estrutural se defronta com problemas complexos, cuja análise deve ser realizada no domínio da dinâmica não linear. A solução desses problemas era, entretanto, extremamente difícil, se não mesmo impossível, há pouco tempo atrás. Alguns fatores motivaram o tratamento de modelos cada vez mais complexos (MACHADO, 1983).

Frequentemente, são realizadas consultorias especializadas na concepção e dimensionamento de estruturas mais complicadas, como pontes, reatores nucleares e barragens, a fim de garantir o bom comportamento da estrutura perante efeitos que não podem ser bem representados com uma análise mais simplista. Por segurança estabelecida por norma, tais estruturas precisam ser avaliadas perante critérios mais rigorosos de modo a garantir a integridade estrutural. Muitas vezes, verificam-se os efeitos não lineares das estruturas, mesmo que elas tenham predominantemente um comportamento linear. Ao mesmo tempo, em muitos problemas é necessário analisar as estruturas dinamicamente.

Muitas vezes a estrutura se comporta de uma maneira não linear quando submetida a carregamentos dinâmicos. Por exemplo, em transientes de curta duração, como no caso de cargas de impacto ou de explosões, pode ocorrer um escoamento do material, ocasionado por elevadas tensões (MACHADO, 1983).

Entretanto, a análise minuciosa de tais efeitos pode ser de extrema complexidade, exigindo uma dedicação e tempo dispendiosos que podem inviabilizar o projeto. Além disso, o conhecimento necessário a tais análises exige um aprofundamento que na grande maioria das vezes pode não ser encontrado num profissional com graduação, sendo necessária a contratação de profissionais com pós-graduação, *stricto sensu*, com mestrado e doutorado.

No intuito de facilitar e evitar a necessidade das análises minuciosas e mais científicas, as normas, em geral, fazem grandes simplificações dos problemas levando, normalmente, a um superdimensionamento das estruturas numa tentativa de aumentar a capacidade resistente das mesmas com o intuito de suportar os efeitos mais complicados, garantindo a segurança e integridade estrutural. Obviamente, para realizar essa proposição, os revisores da norma precisam ser profissionais mais especializados, comumente com titulação de doutorado, capazes de avaliar, através de pesquisas científicas, a garantia estatística de tais simplificações.

Na engenharia civil, o dimensionamento de pontes, por norma, permite considerar os efeitos dinâmicos das cargas móveis de maneira simplificada, assimilando-se as cargas móveis a cargas estáticas, através de sua multiplicação por um coeficiente de impacto para majoração das cargas. Ocasionando normalmente um superdimensionamento e não considerando os efeitos e respostas reais da estrutura, como para o caso da ressonância.

Muitas vezes tais simplificações podem realmente garantir a segurança e a integridade das estruturas ao penalizar o custo, excessivamente, devido ao superdimensionamento gerado. Em contrapartida, em diversos problemas tanto específicos quanto gerais, tais simplificações podem não garantir com eficácia a não ocorrência de tais efeitos, não sendo capazes de representar efetivamente o comportamento estrutural e até mesmo, em alguns casos, tais simplificações podem ser muito prejudiciais às estruturas.

Nesses casos, faz-se necessário contratar profissionais mais especializados capazes realizar análises de maior caráter científico que representem mais adequadamente o comportamento da estrutura. O aprofundamento das linhas de pesquisa científica, bem como o desenvolvimento de novas tecnologias possibilitaram análises de fenômenos anteriormente desconhecidos e necessários ao entendimento da realidade de tais problemas de engenharia.

Evidentemente, a maioria dos problemas reais analisados pela engenharia, física, química, entre outras, faz uso de alguma simplificação, mesmo em análises mais complexas desenvolvidas em pesquisas científicas. Porém, as simplificações feitas devem ser capazes de representar bem as respostas reais dos problemas. Caso contrário, a simplificação não será suficientemente capaz de representar a realidade e por isso deve ser desprezada.

Além disso, a diferença na complexidade de uma análise comum, em nível de graduação, para uma análise mais aperfeiçoada, em nível de pesquisa de pós-graduação, pode ser tão grande que exija anos, décadas e até séculos de desenvolvimento. É assim que muitos avanços da atualidade aconteceram, dando-se continuidade ao estudo de outros pesquisadores e contribuindo para o desenvolvimento de novos estudos realizados por pesquisadores no futuro. Trata-se, portanto, de um avanço coletivo, caracterizando pesquisa científica.

Muitas consultorias, no entanto, são realizadas não mais durante a concepção estrutural, mas sim quando há algum problema detectado na estrutura o qual não pode mais ser solucionado por métodos de solução convencionais utilizados pelas engenharias. Nesses casos, é necessário realizar análises mais dispendiosas e dificultosas para tentar, se possível, garantir a vida útil da estrutura através de alguma intervenção ou, no pior dos casos, é necessário declarar a incapacidade funcional da estrutura.

Uma consultoria especializada realizada em uma estrutura já comprometida trará maiores dificuldades e maiores gastos de intervenção do que aqueles se tivessem sido realizados previamente à construção da mesma, durante o dimensionamento estrutural. Além disso, muitas vezes ocorre o colapso estrutural sem aviso prévio.

Apesar de tais análises serem dispendiosas, são importantes na proporção em que um acidente puder se tornar catastrófico. Assim, verificações de choques, explosões, abalos sísmicos, etc., precisam ser consideradas no projeto (MACHADO, 1983).

Deste modo, a análise não linear de estruturas complexas, por métodos numéricos orientados à computação, tem assumido recentemente grande importância em muitas áreas da engenharia. Isto decorre da ênfase que se tem dado em estudar modelos mais realísticos e efetuar análises precisas de componentes estruturais críticos (EBECKEN, 1977).

Houve uma mudança no conceito de utilização dos materiais, procurando-se maior economia que, aliada à garantia de segurança, visava a um completo aproveitamento das características de resistência. Em consequência, surgiram estruturas mais esbeltas e com maiores possibilidades de apresentarem um comportamento estrutural não linear, quer em termos de equação constitutiva, caso das não linearidades físicas, quer em termos de grandes deslocamentos e mudanças acentuadas na geometria, caso das não linearidades geométricas (MACHADO, 1983).

Outro fator é devido ao aparecimento de novos e complexos sistemas estruturais, sujeitos às ações preponderantemente dinâmicas. É o caso, por exemplo, das estruturas *offshore*, de prospecção e exploração de petróleo na plataforma marítima continental, bem como as estruturas de pontes. A análise dinâmica dessas estruturas é fundamental. Nas estruturas *offshore*, um dos carregamentos mais importantes a ser considerado no projeto estrutural é o carregamento devido à ação das ondas (MACHADO, 1983).

Para tal desenvolvimento, houve avanços significativos nas mais diversas cadeiras do conhecimento, como na dinâmica dos sistemas, vibrações, dinâmica das estruturas, dinâmica veicular, elementos finitos, mecânica do dano, mecânica da fratura, mecânica do contínuo, teoria da elasticidade, teoria da plasticidade, análise não linear, microestrutura, cristalografia, análise em multiescala, termodinâmica avançada, acústica avançada, citados aqui, dentre uma infinidade de outras áreas.

Deve-se destacar a importância do Método dos Elementos Finitos que, pela sua simplicidade e pelo seu vasto campo de aplicação, é hoje uma ferramenta de cálculo universalmente consagrada. Através dele, discretizando-se o meio contínuo de modo sistematico e uniforme foi possível a realização de análises tão sofisticadas quanto precisas (MACHADO, 1983).

O aumento do transporte de cargas rodoferroviárias, especialmente no Brasil, com elevação da intensidade dos valores das cargas sobre as estradas, tem produzido degradação em muitas pontes. Este é um assunto de suma importância, pois tem relação com a saúde estrutural de pontes e com a própria questão da conservação da estrutura rodoferroviária.

Análises de estruturas de concreto armado baseadas em modelos materiais elásticos (lineares ou não lineares) são largamente utilizados em escritórios de projeto na atualidade, sendo seus resultados empregados no dimensionamento e avaliação do comportamento global das mesmas. Quando essas estruturas são submetidas a carregamentos que causam o início de fissuração do concreto em tração, as análises elásticas não têm capacidade de simular adequadamente esse comportamento (LEONEL et al., 2003).

Nas últimas décadas, a evolução dos computadores e a consequente expansão dos limites de aplicação de técnicas numéricas, como o método dos elementos finitos (MEF), o método das diferenças finitas e o método dos elementos de contorno, têm impulsionado o cálculo estrutural na engenharia civil. Aproveitando-se dessas facilidades, têm surgido diversas teorias que se propõem a resolver determinados problemas, buscando respostas cada vez mais próximas do comportamento real da estrutura (ÁLVARES, 1999).

A implementação de algoritmos iterativos e incrementais associados a critérios de plasticidade ou dano permite considerar a evolução do comportamento estutural em relação aos estados limites últimos e de serviço. Contudo, nessas análises estão envolvidas imprecisões relacionadas à escolha do modelo material, do elemento e da malha de elementos finitos e da técnica de solução das equações não lineares.

Nos últimos vinte anos foram publicados vários trabalhos a respeito do comportamento dinâmico de pontes e veículos, em especial pesquisas de modelos matemáticos relacionandos ao problema de interação dinâmica entre a estrutura da ponte e do veículo. O método dos elementos finitos tem sido muito utilizado para a modelagem dos sistemas estruturais, bem como a dinâmica veicular e a dinâmica de multicorpos que estudam e desenvolvem modelos matemáticos de veículos (BEGHETTO, 2006).

Pensando em contribuir com esse tema estudam-se os problemas de interação dinâmica entre veículo e ponte levando em conta as irregularidades da pista. Existem inúmeras referências na literatura que tratam desse tema. Dentre algumas, citam-se o trabalho de Delgado e Santos (1997), que conceberam modelos de interação dinâmica entre pontes e trens de alta velocidade, abordando os efeitos dinâmicos em veículos e pontes, e o trabalho de Yang, Yau e Hsu (1997), os quais estudaram a vibração de vigas simples submetidas à passagem de trens de alta velocidade, com base nas condições de ressonância e na dinâmica das cargas. Estes e demais trabalhos serão detalhados na revisão bibliográfica, sessão 1.5.

O comportamento de uma estrutura submetida a acréscimos de carga passará inicialmente pelo estado elástico, sofrendo pequenas deformações. Posteriormente, para acréscimos maiores de carga, poderá passar por um estado plástico e eventualmente por deformações finitas, até a ruptura da mesma de forma súbita ou previamente a uma degradação progressiva. A mecânica do dano contínuo estuda esses últimos estados de tensão-deformação permitindo determinar uma resistência residual e tensões efetivas devido a degradações (possíveis fissuras ou vazios) para estruturas em solicitações, bem como propõe medidas necessárias para o aumento da resistência.

A mecânica do dano em meios contínuos leva em conta os efeitos da degradação, em modo difuso e progressivo, possibilitando a análise microscópica desses microprocessos heterogêneos (isto é, como localizações e acúmulos de deformações de caráter irreversível) de sólidos submetidos a ações de natureza mecânicas ou não mecânicas, envolvidos durante o processo de deformação de materiais na macroescala, através de redução das propriedades de resistência e rigidez do material.

Muitos problemas de degradação material são estudados com análises estáticas iterativas e incrementais. Este estudo acopla a mecânica do dano nas análises dinâmicas, tornando o problema dinâmico não linear. Jacob e Ebecken (1994) desenvolveram rotinas computacionais otimizadas para programas de análise estrutural dinâmica não linear no intuito de ganhar maior eficiência computacional, tanto em relação ao tempo de processamento da CPU como aos requerimentos de memória, conseguindo, assim, um menor esforço computacional e, consequentemente, obtendo resultados com menor tempo de simulação.

Na notação numérica deste trabalho, será adotado a vírgula como separador de milhares e o ponto como saparados de decimais em todos os capítulos.

1.1 MOTIVAÇÃO

Embora um grande número de problemas na engenharia seja resolvido com modelos estáticos, é possível perceber que diferentemente dos modelos de análise estática, nas análises dinâmicas as estruturas vibram, o que provoca oscilações nas respostas estruturais. Enquanto a resposta estática de deslocamento permanece inerte ao longo do tempo, as respostas dinâmicas de deslocamento oscilam em torno da resposta estática. Além disso, a estática considera apenas a parcela da rigidez nas respostas da estrutura, enquanto na dinâmica leva-se em conta a parcela da massa e do amortecimento nas respostas estruturais.

Na realidade todas as estruturas estão sujeitas às ações dinâmicas. Quando essas ações não proporcionam diferenças significativas em relação às respostas estáticas, a simplificação do problema com uma análise estática pode ser suficiente para representá-lo. No entanto, com a maior exigência da engenharia na atualidade por conta dos avanços tecnológicos, das necessidades econômicas e estéticas, dentre outros, nitidamente tem sido observado a exigência de maiores vãos e alturas, esforços de maior magnitude e menores dimensões de peças estruturais para suportá-los, o que resultam em estruturas mais esbeltas e sujeitas às ações não antigamente consideradas; ou seja, têm se exigido maiores solicitações ao mesmo tempo que tem se limitado as dimensões estruturais com capacidade resistente para suportá-las. Nesse sentido, as ações dinâmicas não podem mais ser desprezadas.

Comumente nas estruturas civis convencionais, as ações dinâmicas são provenientes de cargas acidentais como pessoas, ventos, etc., de baixa intensidade em relação às cargas permanentes. No entanto, com as exigências atuais tais ações tem tido uma intensidade mais significativa em relação às cargas permanentes.

Um tipo de estrutura que sempre teve um efeito dinâmico de maior importância são as estruturas de pontes. Nas pontes os efeitos dinâmicos decorrem da passagem dos veículos. Por norma, o dimensionamento de pontes permite os considerar efeitos dinâmicos dos veículos de maneira simplificada, considerando as cargas dinâmicas como cargas estáticas multiplicadas por um coeficiente de impacto para majoração das cargas, levando a um superdimensionamento da estrutura e desprezando os reais efeitos dinâmicos que podem ser provocados.

Dependendo do caso, a passagem do veículo pode provocar efeitos de magnitude muito maior que as respostas estáticas. Além disso, as irregularidades na via da ponte potencializam esse fenômeno. Isso pode levar a um desgaste da estrutura, comumente observadas no Brasil. Ao longo do tempo isso pode gerar fadiga do material e em algumas situações o material pode sofrer danificação muitas vezes por desconhecimento dos efeitos dinâmicos no dimensionamento de estruturas.

Quando ocorre um processo de danificação do material, tratada pela mecânica do dano ou pela mecânica da fratura, a resposta real da estrutura passa a ser uma resposta dinâmica não linear, em que a não linearidade física ou geométrica é considerada não mais estaticamente, mas ao longo do tempo. Nesse contexto, é importante salientar as diferentes formas de abordagem: estática linear, estática não linear, dinâmica linear e dinâmica não linear, as quais foram grande motivação para o desenvolvimento deste trabalho.

Uma abordagem da mecânica do dano muito encontrada na literatura é a análise de vigas de concreto armado sujeitas a carregamentos estáticos crescentes.

A partir de certa intensidade de carregamento, a resposta estática da estrutura passa a não mais depender linearmente da mesma. Trata-se, portanto, de uma análise estática não linear. A respeito desse trabalho, citam-se o trabalho de Kachanov (1958), Murakami (1983), *Mazars* (1984), Lemaitre e Chaboche (1985), Lemaitre (1992), Pituba e Proença (2005) e Souza (2009).

Em relação à interação dinâmica, há diversas abordagens acopladas e desacopladas na literatura que promovem a interação entre a dinâmica estrutural e dinâmica veicular. Os trabalhos de Beghetto (2006; 2011) considera os efeitos da interação dinâmica linear entre uma ponte de concreto armado e um veículo variando-se as irregularidades da via e a velocidade veicular. Nesta forma de abordagem, os efeitos dinâmicos são considerados, porém sem a danificação ou plastificação do material. Trata-se, portanto, de uma análise dinâmica linear.

O presente trabalho é uma continuação dos trabalhos de Beghetto (2006; 2011), e Souza (2009), o qual procura realizar a união da dinâmica estrutural e veicular com a mecânica do dano. Desenvolvendo a união dessas duas linhas de pesquisa no intuito de entender a evolução do dano e suas consequências nas respostas dinâmicas em estruturas sujeitas a carregamentos, tanto concentrados quanto móveis, capazes de provocar a degradação de suas propriedades materiais.

Inicialmente, tomou-se por hipótese a existência de danos generalizados ao longo da ponte no intuito de verificar o grau de influência nas respostas dinâmicas da estrutura. No entanto, o entendimento e o desenvolvimento de uma análise dinâmica não linear necessitou um maior aprofundamento nas teorias do dano dos meios contínuos, da elasticidade, da plasticidade, da dinâmica estrutural e veicular, bem como dos efeitos de não linearidade nos tópicos avançados em mecânica computacional, de modo a considerar a mecânica do dano contínuo não mais de modo generalizado, mas em cada camada de cada seção transversal do elemento de viga de *Euler-Bernoulli* dentro de cada iteração ao longo do tempo.

1.2 OBJETIVO

1.2.1 Objetivo geral

O presente trabalho tem por objetivo geral analisar os efeitos dinâmicos obtidos da interação desacoplada entre um veículo e uma ponte, considerando a velocidade do veículo, as irregularidades da via, e um modelo constitutivo baseado na mecânica do dano contínuo para simular o comportamento da parcela de concreto da estrutura da ponte diferenciado à tração e à compressão, através de uma análise dinâmica não linear.

1.2.2 Objetivos específicos

O presente trabalho tem como objetivos espefícos:

a) comparar as respostas estáticas lineares com as respostas estáticas não lineares através da mecânica do dano;
b) comparar as respostas estáticas com as dinâmicas em relação aos deslocamentos;
c) comparar as respostas dinâmicas lineares com as respostas dinâmicas não lineares através da mecânica do dano;
d) verificar a importância da discretização da seção transversal da ponte em camadas nas análises dinâmicas;
e) comparar as respostas dinâmicas obtidas para diferentes formas de irregularidades da via;
f) analisar a evolução do dano ao longo do tempo de passagem do veículo para as diferentes formas de irregularidades;
g) analisar a configuração danificada da ponte;
h) analisar os efeitos do fator de amplificação dinâmica ao se variar velocidades do veículo e amplitude das irregularidades da via; e
i) comparar as frequências naturais de vibração da estrutura íntegra com a estrutura danificada analisada com a mecânica do dano perante as mesmas solicitações.

1.3 LIMITAÇÕES DO PRESENTE TRABALHO

O presente trabalho foi desenvolvido considerando algumas simplificações teóricas. Por conta disso, algumas limitações fazem parte do presente trabalho, dentre elas:

a) não se leva em conta a fluência (deformação lenta) do material;
b) não se leva em conta a retração do concreto e a relaxação no aço;
c) o veículo é simplificado, com um grau de liberdade;
d) para fins de danificação da peça durante a passagem do veículo, a magnitude do carregamento pode ser maior do que a de veículos tipo;
e) apesar de, na realidade, haver acoplamento entre o movimento do veículo e a oscilação da ponte, neste trabalho os efeitos são desacoplados;
f) não há consideração da armadura transversal de cisalhamento; e
g) não se leva em consideração a fadiga do material por passagens sucessivas de veículos.

1.4 METODOLOGIA

Para atingir o objetivo do trabalho, desenvolve-se um programa de elementos finitos baseado em elementos de viga de *Euler-Bernoulli* para análise dinâmica das estruturas no intuito de promover a união de duas linhas de pesquisa, uma da interação dinâmica desacoplada entre veículo e ponte através das irregularidades da via e outra da danificação de vigas de concreto armado sujeitas a carregamentos estáticos crescentes. A viga de ponte tem os esforços transmitido à sua estrutura através dos pontos de contato da roda com as irregularidades de seu pavimento e são formados pela contribuição do peso próprio das massas suspensas e não suspensas do veículo e dos esforços inerciais. O método de *Rayleigh* é utilizado para considerar o amortecimento estrutural da ponte. Esse assunto é tratado na sessão 2.2 na página 47.

Todavia, ao fazer essa união, o problema não se torna mais dinâmico linear nem mais estático não linear. A equação governante do problema passa a ser uma equação dinâmica não linear de maior complexidade e de difícil convergência. Poucos trabalhos na literatura ilustram com maior detalhe as teorias e os procedimentos matemáticos para lidar com esse problema. Em especial, destacam-se, dentre os mais importantes, os trabalhos de Machado (1983), de Ebecken (1977) e de Jacob e Ebecken (1994). Para uma abordagem mais geral recomenda-se o trabalho de Bathe (1996).

Ao analisarem as respostas dinâmicas da interação de sistemas veículo-ponte com trens de alta velocidade, Yang e Yau (1997) provaram que dois sistemas de equações diferenciais de segunda ordem podem ser escritos um para o veículo e outro para a ponte, como é feito neste trabalho.

O veículo rodoviário ou ferroviário ao atravessar a ponte sofre influência dos efeitos das irregularidades da via. Desenvolve-se um modelo simplificado de veículo com dois graus de liberdade acoplado com as diferentes formas de irregularidades da via da ponte.

As irregularidades da via da ponte são tratadas por meio de funções harmônicas senoidais, periódicas triangulares, periódicas retangulares, não periódicas na forma de pulsos triangulares, retangulares e em dente de serra, além da via sem irregularidades plana e na forma de arco. Este tópico é detalhado na sessão 3.1 em especial na Tabela 1 encontrada na página 105.

Para considerar o acoplamento do veículo com as diferentes formas de irregularidades, considera-se o veículo parado e sujeito às excitações de base provenientes das amplitudes das irregularidades da via passando com certa frequência em sua roda. Admitindo-se a roda indeformável e sem falhas durante toda a análise, além de desconsiderar os efeitos da temperatura, do atrito entre as superfícies da roda e do trilho, tem-se um problema de excitação de base. Assim, torna-se possível analisar as respostas dinâmicas do veículo.

A interação dinâmica entre o modelo acoplado de veículo e irregularidades com a estrutura da ponte é feita de modo desacoplado. Desse modo, os efeitos dinâmicos gerados pelo acoplamento entre o veículo e as irregularidades são transmitidos integralmente para a estrutura da ponte. Ou seja, os efeitos dinâmicos gerados entre o veículo e as irregularidades não sofrem influência das respostas dinâmicas da ponte, como ocorre nos modelos acoplados. Embora seja uma simplificação, o modelo consegue representar bem o objetivo do trabalho, pois consegue analisar as respostas dinâmicas da estrutura sobre um carregamento de intensidade e posição variável perante os efeitos da danificação do material.

Efeitos de não linearidade são provenientes do dano e ocorrem pelo fato das forças não dependerem mais linearmente dos deslocamentos da estrutura e das tensões não dependerem linearmente das deformações. O dano analisado foi baseado na mecânica do dano contínuo, detalhada na sessão 2.3, página 64. O modelo de dano adotado é o modelo constitutivo de dano de *Mazars* (1984), o qual pode ser encontrado na sessão 3.3 dos modelos matemáticos na página 110.

Os efeitos da não linearidade física decorrentes da danificação do material alteram os efeitos dinâmicos da estrutura, intensificando-os em termos de deslocamentos, deformações, velocidades, acelerações, oscilações e vibrações. Esses efeitos fazem com que a lei de *Hooke* não seja mais realista para representação do problema. Por esse motivo, a dinâmica linear que é valida num regime elástico linear, não é mais capaz de resolver os problemas com não linearidade. À vista disso, o problema se torna dinâmico não linear, necessitando formulações incrementais e iterativas em conjunto com algoritmos de integração no tempo para solução das respostas dinâmicas não lineares. Os tópicos relativos à solução de equações dinâmicas não lineares podem ser encontrados na sessão 2.4 a partir da página 71.

Assim, neste trabalho foi implementada uma modelagem computacional nas linguagens MATLAB versão R2012a (7.14.0.739), C++ e Fortran, considerando todos os tópicos acima abordados, capaz de verificar os procedimentos estático linear, estático não linear, dinâmico linear e dinâmico não linear com a presença de não linearidades físicas através da mecânica do dano sujeitos a carregamentos de qualquer forma e tipo, sejam eles estáticos ou dinâmicos, parados ou em movimento. Para realizar as análises numéricas foi utilizado um computador com CPU i7-2670QM com 8 núcleos de 2.2 GHz em modo padrão e 3.1 GHz em modo overclock e undervolting, memória RAM de 8 GB DDR3 e placa de vídeo NVIDIA GeForce GTX 560M GDDR5, em sistemas operacionais Linux (Slackware, Red Hat, SuSE, Debian e Ubuntu) e Windows (7, XP, Server 2008, 8 e 8.1).

Os resultados obtidos são interpretados e discutidos nas análises numéricas do capítulo 4, encontrados a partir da página 127. A metodologia será mais detalhada ao longo do trabalho.

1.5 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Delgado e Santos (1997) propõem a modelagem da interação dinâmica entre trens de alta velocidade e pontes, com vão único. A ponte, composta por uma viga simplesmente apoiada, é modelada com o método dos elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli* e possuem rigidez uniforme ao longo do seu comprimento.

A mecânica estática soluciona parte do problema, pois considera a parcela dos efeitos elásticos do problema real, os quais são representados pela lei de *Hooke* da resistência dos materiais (BEER & JOHNSTON, 2008; HIBBELER, 2009; BEER & JOHNSTON, 2010).

Em um problema sem interação dinâmica, o veículo é representado por uma carga constante que se move com velocidade constante ao longo do comprimento da viga, gerando a influência das cargas, consequentemente, transmitindo à ponte esses efeitos.

Já em um modelo com interação dinâmica, a parcela dos efeitos inerciais da massa em movimento é levada em consideração, através da segunda lei de *Newton*. Como o veículo possui uma mola e um amortecedor, também são considerados, respectivamente, os efeitos elásticos da rigidez, solucionados com a mecânica estática através da lei de *Hooke*, e os efeitos da dissipação de energia por conta do amortecimento. Dessa forma, o veículo passa a ser representado por um sistema móvel de massa-mola-amortecedor onde a equação de equilíbrio dinâmico do veículo se dá pela soma de três parcelas: a parcela elástica, a parcela de amortecimento e a parcela inercial.

Yang, Yau e Hsu (1997) analisam a vibração de vigas simples produzidas por trens de alta velocidade. A viga biapoiada sofre ações de cargas concentradas com intervalos uniformes, movendo-se com velocidade constante. Os deslocamentos da viga são representados por funções harmônicas para obtenção da solução analítica. É apresentado um estudo paramétrico onde são variadas as velocidades do veículo, seus comprimentos e os comprimentos dos vãos da viga. Percebe-se um impacto maior do veículo nas vigas de vãos curtos. Identificam-se as condições de ressonância e as velocidades atuantes no fenômeno. Concluiu-se que as massas móveis tendem a alongar o período de vibração da viga. O amortecimento contribui para a redução das amplitudes de deslocamentos da viga, principalmente nas condições ressonantes.

Sophianopoulos e Michaltsos (1999) apresentam a formulação e os métodos de solução para vibração combinada lateral-torsional de vigas sujeitas aos carregamentos veiculares. A viga é simplesmente apoiada com seção transversal simétrica e rigidez constante ao longo do seu comprimento. O carregamento do veículo é representado por um sistema de massa suspensa conectada por uma mola a uma massa não suspensa. O mesmo move-se com velocidade constante, na direção da viga, tendo uma excentricidade em relação ao eixo de simetria vertical da seção transversal da viga. Além dessas vibrações verticais, verificam-se as vibrações laterais e torsionais associadas à excentricidade do carregamento. Os deslocamentos da viga são representados por séries harmônicas. As equações de movimento são demonstradas e sugere-se o método de *Runge-Kutta* para a integração no tempo.

Outro estudo paramétrico foi realizado por Michaltsos (2000) em pontes leves de aço. Os veículos foram escolhidos de acordo com os comprimentos dos vãos das pontes. São abordados e parametrizados os efeitos de curvatura das pontes. São consideradas as influências das irregularidades da via tanto em pontes de vãos curtos como em pontes de vãos longos. O estudo concluiu que modelos de veículos representados por um único eixo tem uma melhor análise numérica em pontes de vãos longos. Já em pontes de vãos curtos, onde os efeitos do impacto é maior, é recomendado a utilização de modelos de veículos mais complexos, enfatizando os que apresentam a modelagem numérica de suas suspensões.

Os efeitos provocados pelas irregularidades em trens de alta velocidade foram demonstrados por Frýba (2001), onde o modelo de veículo foi definido como uma série de cargas concentradas com intervalos uniformes movendo-se com velocidade constante. Evidenciam-se as vibrações excessivas similares ao fenômeno de ressonância em pontes de vãos médios e curtos, sendo o efeito mais intenso em velocidades superiores a 200 km/h. Há uma preocupação com o desconforto dos passageiros, menores condições de segurança, desestabilização do lastro e possibilidade de descarrilamento dos veículos, geradas pelas vibrações ressonantes. O estudo concluiu que as amplitudes das vibrações ressonantes são diretamente proporcionais ao quadrado da velocidade do veículo e ao comprimento do vão da ponte, bem como inversamente proporcionais ao amortecimento da ponte, comprimento do veículo e rigidez da ponte.

Cheng, Au e Cheung (2001) propuseram um elemento de ponte-via-veículo para investigar a interação entre um trem móvel, a estrutura que suporta os trilhos, e a ponte. A modelagem do trem móvel foi feita com uma série de veículos com dois graus de liberdade na locação de seus eixos. Cada eixo consiste em uma massa suspensa interconectada a uma massa não suspensa por um conjunto de mola-amortecedor. A plataforma e os trilhos são modeladas como vigas elásticas lineares de *Euler-Bernoulli*. A rigidez e amortecimento dos dormentes são modelados como uma série de molas e amortecedores. As equações de movimento são montadas em um único sistema, o qual pode ser integrado numericamente com o método de *Newmark*. Evidenciou-se que a presença ou ausência de lastro não influencia a resposta dinâmica da ponte. A escolha dos modelos discreto ou contínuo para a representação dos dormentes não apresentou variações nas respostas dinâmicas da ponte. Observou-se uma redução nas amplitudes dinâmicas com o amortecimento de *Rayleigh*, principalmente nas condições de ressonância.

Novos métodos de análise dinâmica para as pontes ferroviárias foram estudados por Goicolea et al. (2002) no código espanhol *(Instrucción de Acciones em Puentes de Ferrocarril – IAPF)* e no código europeu *(EUROCODE 1)*. Com destaque no método do fator de impacto, análise dinâmica com cargas móveis, método dos elementos finitos, análise dinâmica com interação entre veículo e estrutura bem como modelos baseados em séries harmônicas. Esse estudo possibilitou a análise do comportamento dinâmico dos veículos. Utilizaram-se análises experimentais para verificar o nível de precisão dos resultados analíticos. Foram analisadas as classes dos trens de alta velocidade empregados na Europa e propostos seus respectivos modelos.

Através de uma revisão das normas do *ERRI (European Rail Research Institute)* Museros et al. (2002) avançaram os estudos na análise de pontes ferroviárias de vãos curtos para trens de alta velocidade. Tiveram em estudo os efeitos da distribuição das forças através dos dormentes e lastro. Os mesmos mostraram uma redução dos deslocamentos e acelerações das pontes utilizadas nos modelos. Isto ocorre devida à absorção de energia nos dormentes e no lastro.

Ao estudarem os efeitos da flexibilidade dos apoios na vibração de vigas sujeitas a um carregamento móvel oscilante (sistema massa-mola), Yonghong, Tan e Bergman (2002) concluíram que a flexibilidade dos apoios das vigas geralmente contribui para o aumento das respostas dinâmicas, da força de interação dinâmica e da força de cisalhamento. Tais efeitos são mais intensos nas estruturas de vãos curtos, por serem mais acentuados os impactos produzidos pelas cargas móveis.

Correa (2003) estudou vibrações em pontes ferroviárias produzidas pela passagem de um trem eletrificado utilizado no Brasil para o transporte coletivo urbano. Utilizou-se vários modelos para o carregamento dinâmico, como forças concentradas, sistema de massa-mola-amortecedor e veículos com 2 e 6 graus de liberdade. A ponte e os trilhos foram modelados com elementos de pórtico plano. A interação dinâmica entre trem-trilho-estrutura considerou irregularidades geométricas dos trilhos e das rodas. Ao comparar os modelos, se destaca, com os melhores resultados, o modelo de interação dinâmica com veículo de 6 graus de liberdade. Também foi observado que os trens trafegam em uma faixa de velocidade segura, sem influência da ressonância da ponte em análise.

Song, Noh e Choi (2003) fizeram uma modelagem tridimensional por elementos finitos *NFS (nonconforming flat shell)* com 6 graus de liberdade para a interação entre pontes e trens de alta velocidade. Já os trilhos e os dormentes foram modelados com elementos finitos de viga. O lastro foi modelado com uma série de molas elásticas lineares. No problema proposto, os trilhos são apoiados transversalmente aos dormentes, os quais se apóiam sobre o lastro que fica disposto sobre a plataforma da ponte. Foi considerado um modelo de trem de alta velocidade, com vagões articulados, com 38 graus de liberdade. É utilizada a formulação lagrangeana de forma a encontrar as equações de movimento do sistema. Houve grande correspondência com os valores experimentais. Ao trafegar com velocidades próximas aos 300 km/h, nota-se um aumento das respostas dinâmicas.

Xia, Zhang e De Roeck (2003), realizaram um estudo na ponte *St. Antoine Bridge*, de concreto protendido, que pertence à linha entre as cidades de Paris e Bruxelas. O trem articulado estudado é o *Thalys*, usado na europa para transporte de passageiros em alta velocidade. O trem é composto por uma locomotiva, um carro de transição, seis carros normais articulados, um carro de transição e outra locomotiva (estrutura simétrica). A composição totaliza 10 veículos, 13 truques e 26 eixos. Do segundo ao nono, os veículos são articulados entre si e tratados como um grupo. Este grupo que compreende 8 veículos e 9 truques pode ser modelado como

17 corpos rígidos com 85 graus de liberdade. Com os 30 graus de liberdade das duas locomotivas (15 em cada), o modelo completo totaliza 115 graus de liberdade. A ponte foi modelada com elementos finitos tridimensionais, considerou-se o método de *Rayleigh* para o amortecimento e fez-se usofruto do método de *Newmark* para integrar as equações diferenciais. As respostas numéricas das deflexões e acelerações no centro do vão tiveram boa correlação com as respostas experimentais.

Law et al. (2004) apresentaram um modelo com 4 graus de liberdade. As equações de movimento foram obtidas através da formulação lagrangeana. A ponte foi modelada como uma viga reta e as matrizes elementares de massa e rigidez foram obtidas usando as funções de interpolação cúbica de *Hermite*, como visto, posteriormente, neste trabalho. O amortecimento é considerado com o método de *Rayleigh*. A identificação das cargas dos eixos do veículo, usando o método dos elementos finitos, se inicia através da medição de deformações da estrutura com auxílio de *strain gauges,* extensômetros usados para medir deformações de corpos. Os erros das medições são minimizados através do método dos mínimos quadrados. Com as deformações obtêm-se os deslocamentos através da teoria da elasticidade. Com os deslocamentos e o carregamento dos nós, são obtidas as cargas do eixo do veículo. Foram feitas simulações numéricas e experimentais com modelos reduzidos.

Ren, Zhao e Harik (2004) fizeram a modelagem, a análise experimental e a análise analítica de uma ponte rodoviária real de aço em arco, que liga as cidades de *Marshall* e *Livingston* sobre o rio *Tennessee*, no estado de *Kentuchy*, nos EUA. A mesma possui 9 vãos simétricos com um total de 643 metros de extensão. A análise foi feita somente com o vão central, onde se localiza a estrutura em arco com comprimento de 163 metros. Com o auxílio de acelerômetros devidamente calibrados e instalados, foram realizadas as medições. As barras do arco foram modeladas por elementos finitos de pórtico espacial com 12 graus de liberdade por elemento. Os pilares-parede e a plataforma da ponte foram modelados com elementos finitos de placas. O amortecimento foi considerado, também, utilizando o método de *Rayleigh*. Os resultados experimentais foram comparados com os numéricos e apresentou boas aproximações. O modelo numérico também pode ser utilizado em análises de estruturas submetidas a esforços provocados por veículos, ventos, terremotos, etc.

Lou (2005) propôs um elemento de interação entre veículo-via-ponte considerando o balanço do veículo (*pitching motion*). O veículo foi modelado com 2 eixos e totaliza 4 graus de liberdade. A plataforma e os trilhos foram modelados com elementos de viga de *Euler-Bernoulli*. Nos elementos de viga está presente um sistema mola-amortecedor contínuo que simula uma fundação visco-elástica contínua. As equações de interação são obtidas através do princípio de *Hamilton*. O método de *Rayleigh* é considerado para o amortecimento. Foram estudados os efeitos da velocidade do veículo, a presença da estrutura de fundação da via e as irregularidades. Na análise concluiu-se que os efeitos da estrutura de fundação da via são significantes para o deslocamento vertical e aceleração vertical do veículo, bem como as forças de contato entre os eixos e a via. Os efeitos de rotação, deslocamento vertical e aceleração vertical do veículo no centro do vão da ponte são insignificantes quando considerada a estrutura da via. A aceleração vertical e aceleração de rotação do veículo são significantes quando considerada as irregularidades da via. As forças de contato entre os eixos e a via, os deslocamentos e acelerações verticais dos trilhos e da ponte no centro do vão também são significantes.

Beghetto (2006) estudou os comportamentos dos corpos dinâmicos de uma ponte ferroviária e de um veículo, composto pela associação de corpos rígidos conectados em sistemas de suspensões, através de análises numéricas em modelos tridimensionais, variando a velocidade e as irregularidades verticais da via. Foram utilizados os elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*. No veículo encontram-se nove equações de movimento através do princípio de *D'Alembert*, da segunda lei de *Newton* e do equilíbrio de forças e momentos. As equações de movimento de ambos os sistemas também foram integradas numericamente usando o método de *Newmark*.

Bernardes (2006) baseado no proposto por Yang, Yau e Hsu (1997), desenvolveu um modelo matemático massa-mola-amortecedor da interação veículo-ponte considerando o sistema do veículo acoplado ao da ponte. Neste modelo, as respostas dinâmicas do veículo afetam as respostas dinâmicas da ponte que, por sua vez, afetam as respostas dinâmicas do veículo. Ou seja, devido às irregularidades da via o veículo terá uma vibração transversal que excita a ponte e vice-versa. Neste modelo, é como se as forças e demais efeitos dinâmicos gerados pelo modelo acoplado entre veículo e irregularidades sofressem uma alteração na medida em que ocorresse a vibração na ponte. O modelo acoplado desenvolvido é um modelo muito interessante e realista em relação ao movimento de veículos em pontes. No entanto, o modelo desenvolvido não considerou a danificação do material, podendo simular estruturas de ponte apenas dentro do regime elástico linear.

Melo (2007) analisou os coeficientes de impacto das normas brasileiras implementando um modelo analítico-numérico simplificado para pontes rodoviárias com tráfego de veículos pesados.

Santos (2007), ao fazer uma modelagem matemática e numérico-computacional da interação entre veículo e pontes rodoviárias analisando a redução de vibrações, valida os resultados com dados experimentais.

Yau (2009) tratou de um problema de interação não linear com condições de contorno variáveis com o tempo ao analisar vigas suspensas sujeitas às solicitações de cargas dinâmicas e terremotos (movimentações de apoio). As respostas do problema são divididas em: pseudo estática e componente inercial dinâmica. Yau (2009) comprova que ondas sísmicas de maior intensidade podem amplificar grandiosamente as respostas do sistema. É proposto, como solução para esse efeito, a redução na rigidez e o aumento da inclinação dos cabos, no intuito de aliviar esse efeito.

Beghetto (2011) analisa a interação dinâmica tridimensional entre veículo e ponte ferroviária considerando a mecânica de contato entre as rodas e os trilhos, frente à variação de velocidade e presença das irregularidades da via, através de análises numéricas computacionais. No veículo encontram-se 25 equações de movimento através do equilíbrio dinâmico. As irregularidades da via são representadas por funções harmônicas. O modelo de contato mecânico entre as rodas e os trilhos é embasado nas teorias de *Hertz* e de *Kalker*. No modelo de saturação do contato baseando-se na lei do atrito de *Coulomb*, é inserido o modelo de *Vermeulen* e *Johnson*, restringindo-se as forças tangenciais de contato e o momento de rotação *spin* das rodas segundo um polinômio cúbico, de modo a contemplar as não linearidades geométricas devido aos perfis das rodas e dos trilhos, bem como, os limites de aderência no contato entre rodas e trilhos. A ponte ferroviária é representada por duas vigas simétricas e paralelas, biapoiadas, representadas por elementos finitos de pórtico tridimensional embasados na teoria de *Euler-Bernoulli*. No amortecimento estrutural é usado o método de *Rayleigh*. As equações de movimento são integradas numericamente utilizando-se o método de *Newmark*.

Referentes ao estudo do comportamento dinâmico do veículo ferroviário e ao estudo do contato mecânico entre rodas e trilhos realizado por Beghetto (2011) são apresentadas: a análise modal do veículo; a análise de vibração forçada do veículo nas condições de ressonância, sob diferentes condições de velocidade e irregularidades da via; a análise dinâmica do contato entre as rodas e os trilhos; e a análise dos deslizamentos e da perda de contato entre as rodas e os trilhos, combinando-se os modelos de irregularidades da via, variando-se a velocidade do veículo, e considerando-se os trilhos contaminados com óleo.

Referentes ao estudo da ponte ferroviária no trabalho de Beghetto (2011) são apresentadas: a análise modal da ponte; e a análise de vibração forçada na ponte produzida pelo tráfego do veículo ferroviário, e da composição Trem Unidade Elétrico (TUE), sob diferentes condições de velocidade e irregularidades da via, abordando-se as condições de ressonância da ponte produzidas pelo tráfego tanto do veículo ferroviário quanto da composição TUE. Os resultados obtidos nas análises numéricas são interpretados e analisados. Dentre inúmeras conclusões pode-se citar que nas condições de ressonância da ponte produzidas pelo tráfego do veículo ferroviário, observou-se que as respostas dinâmicas são amplificadas, apresentando-se amplitudes de valores relativamente maiores que nas demais condições. Porém, apesar das condições ressonantes, as máximas amplitudes dos deslocamentos encontradas são relativamente pequenas. Também se percebeu que com a intensidade da vibração da estrutura da ponte, as amplitudes oscilam entre valores positivos e negativos, invertendo-se, desta forma, os sentidos das tensões às quais a estrutura está sendo submetida.

No problema em questão, ao atravessar a viga, o veículo está sujeito aos efeitos das irregularidades da via. Se a roda de massa não suspensa for considerada indeformável, constitui-se um problema de excitação de base onde, para obtenção da solução analítica, os deslocamentos da viga são representados por funções senoidais harmônicas. Variam-se as velocidades e irregularidades para realização do estudo paramétrico.

É fundamentado que a primeira ressonância representa a condição mais crítica e deve ser sempre evitada. O amortecimento da viga pode reduzir a resposta ressonante. Quanto menor o vão da viga, maior será o fator do impacto nos deslocamentos da mesma. As condições de ressonância são identificadas e são apresentadas as velocidades necessárias para que o fenômeno ocorra.

Analisando os efeitos das massas móveis, que representam o veículo, e do amortecimento estrutural da viga, obtem-se as respostas dinâmicas da viga em forma de uma solução numérica aproximada. O amortecimento estrutural da viga é considerado através do método de *Rayleigh* (CHOPRA, 1995; BATHE, 1996; KWON & HYOCHOONG, 1997). O sistema de equações é integrado numericamente utilizando o método de *Newmark* (NEWMARK, 1959; CHOPRA, 1995; BATHE, 1996; KWON & HYOCHOONG, 1997). O sistema é, então, resolvido com o método da eliminação de *Gauss*.

A resposta não linear física de sólidos é uma manifestação macroscópica de mudanças irreversíveis na microestrutura. A mecânica do dano contínuo é uma ferramenta para a análise dos efeitos da deterioração do material em sólidos submetidos à ação de natureza mecânica ou térmica. Enquanto que a mecânica da fratura lida com as condições de propagação de fissuras macroscópicas, a mecânica do dano contínuo estuda o efeito de microfissuras distribuídas na resposta do material. A teoria do dano descreve localmente a evolução dos fenômenos que se desenvolvem entre um estado inicial, relativo a uma situação de material íntegro, e um estado final, representado pela formação de uma fissura macroscópica ou, em outras palavras, a ruptura do elemento de ‘volume representativo’ em torno do ponto considerado. No caso do concreto, um material no qual a fissuração é o fenômeno dominante no comportamento não linear, a mecânica do dano é sem dúvida capaz de formular modelos realísticos (PITUBA, 1998).

O dano não é uma grandeza física que pode ser medido diretamente. Em uma modelagem matemática, entretanto, é possível quantificar o dano através da redução progressiva de uma propriedade mecânica global do problema. Na maioria das modelagens, há uma redução na rigidez do material, por exemplo, reduzindo seu módulo de deformação.

O comportamento de uma estrutura submetida a acréscimos de carga passará inicialmente pelo estado elástico, sofrendo pequenas deformações, posteriormente, para acréscimos maiores de carga, por um estado plástico e eventualmente deformações finitas, até a ruptura, súbita ou previamente a uma degradação progressiva, da mesma. A mecânica do dano contínuo e a mecânica da fratura estudam esses últimos estados de tensão-deformação permitindo determinar uma resistência residual e tensão efetiva devido a degradações (possíveis fissuras ou vazios) para estruturas em solicitações, bem como propõem medidas necessárias para o aumento da resistência.

Enquanto a mecânica da fratura leva em conta as condições de propagação de uma fratura macroscópica imersa num meio contínuo íntegro, a mecânica do dano se ocupa do efeito, sobre a resposta material, de um processo de microfissuração distribuída que se desenvolve numa etapa preliminar à formação da fissura discreta (ARAÚJO, 2003), permitindo retratar a evolução dos fenômenos, através de um elemento de 'volume representativo' de material em torno do ponto considerado, que se desenvolvem entre um estado inicial íntegro e um estado final degradado que tem como particularidade a formação de uma fissura macroscópica definida pela ruptura do elemento de volume representativo. A mecânica do dano possibilita a análise microscópica de processos irreversíveis.

A relação dano-fratura pode ser colocada, segundo Janson e Hult (1977):

- na mecânica do Dano, a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um campo de defeitos continuamente distribuído, tais como microfissuras ou poros;

- na mecânica da Fratura, a resistência de uma estrutura carregada é determinada em função da evolução de um defeito em particular, como uma fissura pontiaguda pré-definida. O meio em volta da fissura é assumido como mecanicamente intacto.

Janson e Hult (1977) usaram a terminologia mecânica do dano contínuo *(“continuum damage mechanics”)* para designar modelos da mecânica do contínuo que tratam de respostas materiais considerando o processo de danificação. Lemaitre e Chaboche (1985) formularam as bases da teoria baseadas na termodinâmica dos processos irreversíveis.

Kachanov (1958 apud KACHANOV, 1986; apud PITUBA, 1998, p. 27) foi o pioneiro a introduzir a idéia de dano contínuo, no intuito de modelar o efeito da fissuração distribuída na ruptura do tipo frágil observada em metais após um período de deformação lenta. Foi proposta a consideração de uma variável ψ, denominada continuidade. Portanto em um material livre, por completo, de defeitos, o mesmo teria $\psi = 1$. Um material completamente deteriorado sem nenhuma capacidade de resistência a solicitações teria $\psi = 0$. A variável ψ, portanto, quantifica a ausência de deterioração do material. De forma análoga, $D=1-\psi$ caracteriza uma medida do estado de deterioração ou dano. Para um material completamente livre de defeitos, tem-se $D=0$, ou seja, um material íntegro. Já $D=0$ caracteriza um estado de completa perda de integridade da estrutura material. Nesse estudo, o dano D foi considerado uma variável escalar, porém estudos posteriores proporam quantidades tensoriais para descrever o dano. Portanto o dano pode ser de natureza escalar, dano isótropo, ou tensorial, dano anisótropo.

Rabotnov (1969) propôs considerar a perda de rigidez material como consequência da fissuração. Posteriormente a mecânica do dano contínuo *("Continuum Damage Mechanics")* formalizou-se com base na termodinâmica dos processos irreversíveis por Lemaitre e Chaboche (1985).

Nos últimos anos diversos modelos constitutivos com o conceito de dano vêm sendo propostos, em especial para o concreto, como deterioração lenta do material, interação dano-fadiga, dano em materiais dúcteis, dano em estruturas de concreto armado, dano em estruturas de concreto em fibras sujeitas a carregamento cíclico, dano em pórticos de concreto armado, entre outras (PITUBA, 1998).

Souza (2009) propôs um algoritmo numérico de remodelação anisotrópico baseado na teoria da mecânica do dano contínuo para simular a porosidade do osso com dano, seguindo o modelo proposto por Doblaré e Garcia (2002). O modelo também foi aplicado a problemas bidimensionais de ossos longos com e sem prótese, com particular referência à extremidade proximal do fêmur humano.

Tais modelos de dano podem ser classificados como escalares ou isótropos e anisótropos, dependendo da natureza da variável de dano usada, como visto anteriormente. A vantagem dos modelos escalares é a sua simplicidade devido a um número reduzido de parâmetros a identificar. Ao mesmo tempo os modelos escalares podem ter restrições de aplicações, dependendo da situação. Já os modelos anisótropos, que tem a variável de dano como uma grandeza tensorial, podem ser aplicados em diversos problemas de engenharia, porém possuem uma maior complexidade de identificação dos parâmetros utilizados.

Nesse trabalho é utilizado o modelo escalar de *Mazars* (1984), sendo indicado para analisar o processo de danificação do concreto submetido a carregamentos proporcionais ou cícilicos. O dano é uma função da deformação equivalente a qual define o estado local de alongamento do material. A lei de evolução da variável de dano é definida de forma a recuperar os resultados experimentais dos testes de tração e compressão uniaxiais, que são as bases para identificar os parâmetros do modelo.

O comportamento físico não linear de sólidos é uma manifestação de mudanças irreversíveis na sua microestrutura. No concreto, estas mudanças estão predominantemente ligadas ao desenvolvimento de microfissuras. Este processo tem início já durante a cura do concreto e evolui até a localização das microfissuras e formação de um defeito macroscópico. Como essa fissuração ocorre de forma distribuída, a mecânica do dano é capaz de formular modelos muito realistas para o concreto (GUELLO, 2002).

Em análises práticas, é observada macroscopicamente a resposta não linear dos sólidos devido à ocorrência de processos irreversíveis em sua microestrutura, tais como: escorregamentos relativos entre cristais, perdas de coesão em planos de clivagem ou contorno dos grãos, mudanças de porosidade, mudanças de fase, difusão de elementos químicos e outros (ARAÚJO, 2003).

A mecânica do dano em meios contínuos leva em conta os efeitos da degradação, em modo difuso e progressivo, possibilitando a análise microscópica desses microprocessos heterogêneos (isto é, como localizações e acumulações de deformações de caráter irreversível) de sólidos submetidos às ações de natureza mecânicas ou não mecânicas envolvidos durante o processo de deformação de materiais na macroescala, através de redução das propriedades de resistência e rigidez do material.

Uma lei constitutiva, ou modelo constitutivo é um modelo mecânico-matemático que descreve idealmente o comportamento tensão-deformação do material, (LUCCIONI, 1993).

Há uma grande dificuldade em formular uma lei constitutiva que descreva de forma geral o comportamento de um material para qualquer tipo de solicitação. Um material passará por diferentes estados para determinados limites de solicitações, sendo este regido por diferentes teorias para tais limites, como a teoria da elasticidade para certo limite, a teoria da plasticidade e mais recentemente a mecânica do dano, cada uma coerente ao comportamento estudado, porém nunca são suficientemente gerais.

Há diversos trabalhos que abordam diferentes leis constitutivas para o concreto, mas devido à sua complexidade a formulação de um modelo constitutivo completo e não somente geral se torna algo difícil (PITUBA, 1998).

O conceito de dano foi inicialmente utilizado para análise e descrição do comportamento de metais em regime de ruptura sob carregamentos monotônicos ou cíclicos. Nos metais em regime de ruptura aparecem microfissuras após o desenvolvimento de uma pronunciada plastificação. O conceito de dano, por estar relacionado à evolução de microfissuras, aplica-se bem ao concreto uma vez que o desenvolvimento da microfissuração pode ser considerado contínuo e se inicia com baixas tensões ou deformações (DRIEMEIER, 1995).

O concreto já apresenta microfissuras provenientes do fenômeno de retração mais liberação de calor, que se desenvolve na fase inicial da cura, antes mesmo de qualquer aplicação de carga (PITUBA, 1998).

As deformações permanentes também ocorrem devido às microfissuras. Isso se relaciona ao fato que, em casos de descarregamento, as faces rugosas das fissuras, bem como a heterogeneidade do material, impedem o fechamento delas.

Observa-se a recuperação da rigidez do concreto quando há inversão do carregamento. Esse fenômeno peculiar do concreto, e também de muitos outros materiais granulares, é conhecido como resposta unilateral.

O aumento das fissuras se da na fase de carregamento por incompatibilidade de deformações a qual ocorre pelas diferentes características de resistência e propriedades elásticas dos agregados graúdos e da argamassa. Essas incompatibilidades são responsáveis pela baixa resistência à tração do concreto.

O concreto possui um comportamento mecânico global diretamente ligado a fatores como índice de vazios, tamanho dos agregados, relação água-cimento, textura, entre outros, os quais são considerados nas leis de evolução das variáveis que definem o dano para formular modelos constitutivos (GUELLO, 2002).

A análise dos sistemas é feita considerando o material totalmente íntegro. No intuito de ser obter as respostas com o material danificado, este trabalho visa incluir à estrutura o conceito de dano. Dentre os modelos constitutivos, é utilizado o modelo constitutivo de *Mazars* (1984) neste trabalho.

No sentido de buscar respostas mais realísticas, a norma ABNT NBR-6118:2007 para projetos de estruturas em concreto armado apresenta no seu texto as bases para a consideração das não linearidades físicas associadas a essas estruturas.

Em relação aos modelos baseados na teoria da mecânica do dano contínuo, essencialmente esses admitem que a perda progressiva de rigidez e de resistência do material é devida exclusivamente ao processo de microfissuração. No caso do concreto, um material no qual a fissuração é o fenômeno dominante no comportamento não linear, a mecânica do dano aplica-se com vantagens sobre outras teorias (PITUBA & PROENÇA, 2005).

Observou-se que os trabalhos de análise dinâmica abordados anteriormente não introduziram os efeitos da degradação da estrutura. Esse trabalho pretende conceder além do problema com análises dinâmicas considerando o fenômeno de ressonância, amortecimento, entre outros para o material íntegro, a perda da rigidez e resistência progressiva na estrutura de modo a determinar como são as respostas dinâmicas da estrutura mediante a variação de um material íntegro até um estado final degradado. Ao incorporar a danificação do material na análise dinâmica, a equação torna-se dinâmica não linear, necessitando a união de processos incrementais, procedimentos iterativos, como o método de *Newton-Raphson*, aliado aos algoritmos iterativos de integração temporal, como o método de *Newmark*. Nesse sentido, o problema acaba distinguindo-se tanto dos problemas estáticos não lineares pela mecânica do dano, quanto dos dinâmicos lineares em regime elástico linear, tendo uma equação governante de maior complexidade e de difícil convergência.

Hughes (1976) estudou a estabilidade, convergência, crescimento e decadência da energia do método da aceleração média aplicada a uma classe de problemas elásticos lineares e não lineares encontrados na dinâmica estrutural. Uma identidade energética discreta é obtida e a causa do crescimento espúrio e decadência energética, observado em problemas não lineares, é apresentada. A noção de estabilidade é definida, a qual garante que, para passos pequenos de tempo, a energia é conservada assintoticamente e para grandes passos de tempo não ocorre amplificação de modos mais altos. Por meio da identidade energética, o método da aceleração média provou ser estável nesse sentido. Além disso, a convergência é provada e a taxa de convergência demonstrou ser de segunda ordem, com respeito aos passos de tempo, para ambos os deslocamentos e as velocidades.

Ebecken (1977) implementou um sistema computacional denominado LORANE-NL, projetado com linguagem orientada, para análise não linear estática e dinâmica fazendo uso do método dos elementos finitos. Os procedimentos computacionais implementados se destinam a análise de grandes deslocamentos e grandes deformações através de soluções incrementais com verificações de equilíbrio. Diferentes formulações e técnicas numéricas são apresentadas e alguns exemplos ilustrativos são discutidos.

Machado (1983) estudou algoritmos mistos de integração no tempo das equações gerais da dinâmica, aplicado a problemas não lineares, para tratar a interação de diferentes meios, realizando análises dinâmicas não lineares de sistemas rígido-flexíveis. As regiões de diferentes características são tratadas através de algoritmos implícitos e explícitos simultaneamente. A integração explícita é feita pelo método da diferença central, enquanto a implícita é feita pelo operador de *Newmark*. As análises são dirigidas a problemas de interação entre solo, fluido e estrutura. Examinou-se a possibilidade de desprezar a contribuição da rigidez no domínio do fluido para a interação entre fluido e estrutura. Utilizaram-se elementos finitos isoparamétricos com números de pontos nodais variados, bem como matrizes de massa discretas agrupadas a partir da matriz de massa consistente. Os resultados obtidos são comparados com os procedimentos usuais.

Jacob e Ebecken (1994) descrevem uma implementação computacional otimizada para programas de análise dinâmica estrutural não linear através da combinação da técnica iterativa de *Newton-Raphson* modificado com o operador de integração temporal implícita de *Newmark*, trabalhando em uma formulação incremental e iterativa para as equações de movimento com maior eficiência computacional. A implementação desenvolvida alcança um eficiência computacional aperfeiçoada em relação tempo de processamento da CPU e requisitos de memória RAM, através da formulação e detalhes de implementação apresentados.

Bathe (1996) apresenta todo o desenvolvimento para solução de equações estáticas e dinâmicas, lineares ou não lineares, através do método dos elementos finitos. No entanto, a abordagem dinâmica não linear é mais geral, não havendo uma descrição mais específica sobre o tratamento das equações dinâmicas não lineares em aspectos mais específicos. No entanto são apresentados comentários e referências para esses aspectos.

Bathe e Baig (2005) propõem um esquema de integração composta no tempo e comparam algumas soluções de problemas com a regra do trapézio e o método de *Wilson* θ. Segundo os autores, os métodos incondicionalmente estáveis nas análises lineares parecem ser uma escolha natural para o uso em análises não lineares, mas infelizmente podem não permanecer estáveis para determinados períodos de tempo em soluções de respostas de grandes deslocamentos e longos intervalos de tempo. Nesse sentido, um algoritmo de integração estável e eficiente é desejado. Verificou-se que o procedimento de integração composta proposto é eficaz onde a regra do trapézio falhou em produzir uma solução estável.

Abeche et al. (2015) trataram da interação dinâmica entre veículo, irregularidade e ponte através do método dos elementos finitos, considerando a perda de rigidez da estrutura da ponte pela mecânica do dano. As irregularidades da via excitam dinamicamente o veículo que acaba despertando vibrações adicionais na estrutura da ponte além das produzidas pelo movimento próprio do veículo. Essa condição tende a aumentar as respostas dinâmicas especialmente nas condições de ressonância. A interação dinâmica é tratada de forma desacoplada. As irregularidades da via são representadas por funções harmônicas senoidais. Utilizam elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli* com funções de interpolação cúbicas de *Hermite*. O amortecimento estrutural é definido pelo método de *Rayleigh*. Utilizou-se o modelo de dano de *Mazars*. As equações dinâmicas não lineares são integradas numericamente no tempo através do método de *Newmark*. O sistema é resolvido com a união deste método com a técnica iterativa de *Newton-Raphson*. A intensa danificação do material modificou completamente as respostas dinâmicas da estrutura. As respostas dinâmicas de deslocamento tiveram maiores magnitudes e maiores vibrações na presença do dano se comparadas às obtidas na ponte íntegra para o mesmo carregamento aplicado. Obtiveram-se grandes variações nas respostas dinâmicas de velocidade e aceleração para o mesmo intervalo de tempo, oscilando entre valores positivos e negativos. O dano provocou amplificação de magnitude e oscilações em todas as respostas dinâmicas não lineares da estrutura. O trabalho contribuiu para o estudo e monitoramento da saúde de estruturas de pontes.

Este capítulo apresentou uma revisão bibliográfica de trabalhos que abordam os efeitos dinâmicos em veículos e pontes, a mecânica do dano contínuo e modelos constitutivos de dano, considerando a degradação material em materiais como o concreto, bem como os sistemas dinâmicos não lineares necessários para solucionar o problema em questão. Nota-se uma grande evolução na análise da dinâmica estrutural, especialmente em problemas não lineares. Grande parte do avanço se da pelo avanço da tecnologia computacional e o emprego do método dos elementos finitos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A fundamentação teórica abrange a teoria de flexão em vigas, o método dos elementos finitos (MEF), abordando a teoria de *Euler-Bernoulli* e seu elemento de viga, a teoria do dano contínuo e os sistemas dinâmicos não lineares, com a intenção de fazer uma revisão da fundamentação teórica envolvida nos assuntos abordados.

2.1 TEORIA DE FLEXÃO EM VIGAS

No intuito de melhor entender os elementos finitos de viga, principalmente os elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli*, utilizados no presente trabalho, faz-se necessário entender os fundamentos teóricos da flexão em vigas. Esta sessão foi baseada principalmente no livro de Azevedo (2003). A presente sessão serve, também, como base para o entendimento dos elementos finitos de viga de *Timoshenko*, os quais não são abordados neste trabalho.

2.1.1 Flexão composta plana

O principal intuito dessa sessão é demonstrar o comportamento de uma viga sujeita à flexão de modo a melhor analisar as deformações e tensões na mesma.

Basicamente, na mecânica dos sólidos deformáveis, a flexão é um esforço físico que causa o efeito de deformação perpendicular ao eixo principal do sólido paralelo à força atuante.

Existem duas principais hipóteses cinemáticas para descrever o campo de deslocamentos de um prisma mecânico alongado por flexão: a hipótese de *Navier-Bernoulli* e a hipótese de *Timoshenko*. O primeiro afirma que duas seções planas e paralelas permanecem sendo planas e paralelas ao longo do processo de deformação, inclusive se houver plasticidade. Na segunda, supõe-se que uma seção normal ao eixo principal do prisma não mantém essa característica após a deformação, considerando a deformação devido ao esforço cortante.

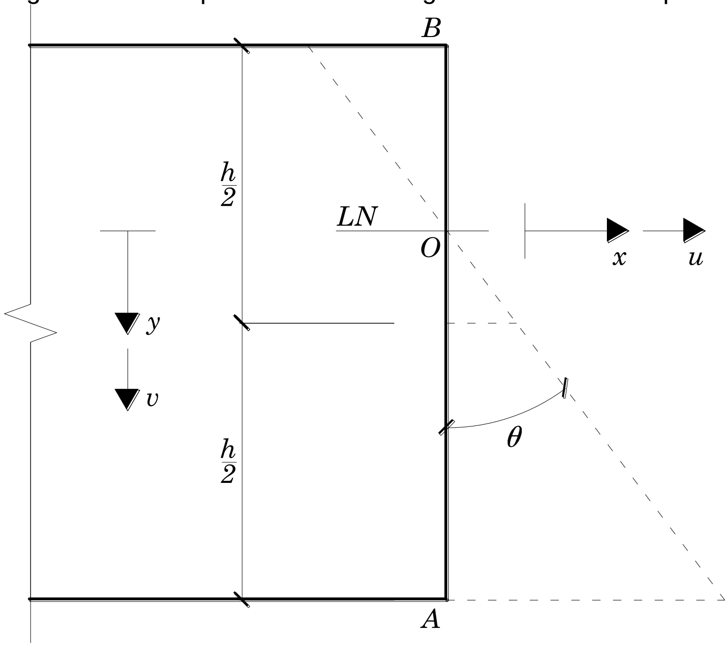
Nesta sessão considera-se a hipótese de *Navier-Bernoulli*. Assim, são consideradas apenas as deformações devido às tensões normais.

A flexão pode ser classificada em três tipos de acordo com os esforços atuantes: flexão pura, flexão simples e flexão composta. A flexão pura ocorre quando o único esforço interno atuante é o momento fletor, ou seja, o esforço normal e o esforço cortante são nulos. Já a flexão simples ocorre quando o esforço interno normal é nulo, havendo ação do esforço interno cortante e do esforço interno de momento fletor. Na flexão composta, por sua vez, há presença dos três esforços internos, ou seja, o esforço interno normal não é nulo. Este é o caso de vigas de pórticos.

No caso de materiais compósitos, como o concreto armado, em que há pelo menos dois componentes ou pelo menos duas fases com propriedades físicas e químicas distintas na sua composição, haverá variação da posição da linha neutra por conta da homogeinização da seção transversal, a qual transforma uma seção com diferentes materiais em seção homogênea equivalente. A linha neutra estará posicionada no centro geométrico da seção transformada.

A Figura 1 apresenta um exemplo de flexão em uma viga de materiais compósitos, como o caso do concreto armado com armadura de tração.

Figura 1 – Exemplo de flexão em viga de materiais compósitos



Fonte: O autor.

Nota-se variação da posição da linha neutra. Como no caso do concreto armado colocam-se maiores quantidades de aço na parte tracionada da viga para resistir aos esforços de tração pelo fato do concreto ter baixa resistência à tração, a linha neutra tende a se aproximar da face superior da viga, estando acima da metade da altura da mesma. Como as camadas superiores estão comumente comprimidas e as inferiores comumente tracionadas e como o concreto tem respostas de deformação diferentes para compressão e tração, há uma rotação da face $\overline{AB}$ em torno da linha neutra com deslocamentos por tração no ponto A, por alongamento, e deslocamentos por compressão no ponto B, por encurtamento. Devido à resistência, os deslocamentos têm maiores magnitudes nas regiões tracionadas da viga.

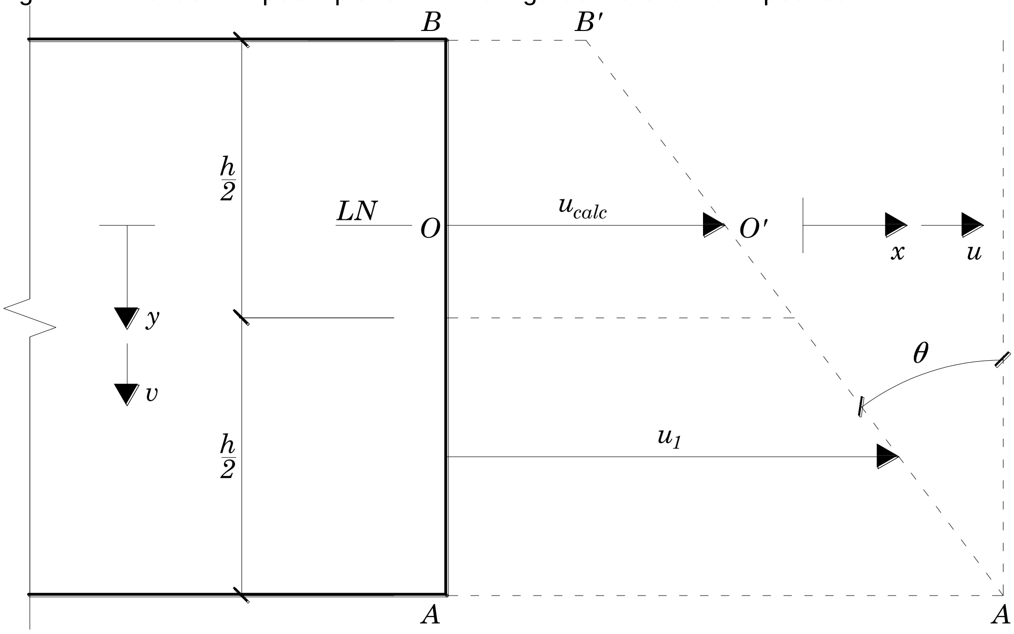
Através da definição geométrica da tangente, pode-se definir o deslocamento de qualquer ponto devido à rotação ocasionada na flexão como sendo:

$$|x| = |y| \tan(\theta) \qquad (1)$$

em que os valores foram apresentados em módulo devido à mudança de sinal dos pontos tracionados e comprimidos, adotados conforme convenção arbitrada.

A Figura 2 apresenta a flexão composta plana de uma viga de materiais compósitos por conta da rotação da face $\overline{AB}$ bem como deslocamentos ocasionados pelos esforços internos normais.

Figura 2 – Flexão composta plana de uma viga de materiais compósitos



Fonte: O autor.

O deslocamento no ponto 1 pode ser definido pelas seguintes equações:

$$u_1 = u_{calc} + |x| \tag{2}$$

$$u_1(x, y) = u_{calc} + |y| \tan(\theta(x)) \tag{3}$$

ou

$$u_1 = u_{calc} + |y| \tan(\theta) \tag{4}$$

A extensão segundo o eixo x é, então, dada por:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u_{calc} + |y| \tan(\theta)\right) = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d \tan(\theta)}{dx} \tag{5}$$

Caso x seja positivo para a direita, a extensão ε_{x1} é positiva quando existe um alongamento.

$$\theta(x) = \frac{\partial v(x)}{\partial x} = \frac{dv}{dx} \tag{6}$$

Substituindo a equação (6) na equação (5), obtém-se:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d}{dx}\left(\tan\left(\frac{dv}{dx}\right)\right) = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d \tan\left(\frac{dv}{dx}\right)}{dx} \tag{7}$$

Aplicando a regra da cadeia na equação acima, tem-se para a derivada da segunda parcela que:

$$\frac{d \tan\left(\frac{dv}{dx}\right)}{dx} = \frac{d \tan(\beta)}{dx} = \frac{d \tan(\beta)}{d\beta} \frac{d\beta}{dx} \tag{8}$$

Assim, substituindo a equação (8) na equação (7), obtém-se:

$$\varepsilon_{x1} = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d \tan\left(\frac{dv}{dx}\right)}{dx} = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d \tan(\beta)}{dx} = \frac{du_{calc}}{dx} + |y| \frac{d \tan(\beta)}{d\beta} \frac{d\beta}{dx} \tag{9}$$

em que:

$$\beta = \frac{dv}{dx} \qquad \text{e} \qquad \frac{d \tan(\beta)}{d\beta} = \sec^2(\beta) \tag{10}$$

Então, ao resolver e substituir as derivadas na parcela da regra da cadeia, obtém-se:

$$\frac{d\tan(\beta)}{d\beta}\frac{d\beta}{dx}=\sec^2(\beta)\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right)=\sec^2\left(\frac{dv}{dx}\right)\frac{d^2v}{dx^2} \tag{11}$$

Portanto, a deformação do ponto genérico 1 na direção cuja normal é $\vec{x}$ para o caso geral de flexão composta plana em vigas é:

$$\varepsilon_{x1}=\frac{du_{calc}}{dx}+|y|\sec^2\left(\frac{dv}{dx}\right)\frac{d^2v}{dx^2} \tag{12}$$

O sentido da deformação, alongamento ou encurtamento, para o caso geral de flexão composta plana em vigas fica a critério da convenção adotada.

Considerando o caso de pequenas deformações e deslocamentos, a seguinte simplificação pode ser feita:

$$\tan(\theta)\cong\theta \tag{13}$$

Consequentemente, a equação (3) se torna:

$$u_1(x,y)=u_{calc}+|y|\theta(x) \tag{14}$$

Ao substituir a equação (6) na equação (5) considerando a simplificação feita na equação (13), encontra-se, conforme demonstrado na equação abaixo:

$$\varepsilon_{x1}=u_{1,x}=\frac{du_{calc}}{dx}+|y|\frac{d\theta}{dx}=\frac{du_{calc}}{dx}+|y|\frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) \tag{15}$$

Portanto, a deformação do ponto genérico 1 no eixo cuja normal é $\vec{x}$ para o caso de pequenas deformações, é dada por:

$$\varepsilon_{x1}=\frac{du_{calc}}{dx}+|y|\frac{d^2v}{dx^2} \tag{16}$$

Azevedo (2003), nas deduções da teoria de viga de *Euler-Bernoulli* em seu livro, considera apenas os deslocamentos laterais $v(x)$. Ou seja, considerou constante a componente u_{calc} do campo de deslocamentos para determinação da deformação, ou extensão, ε_{x1}.

Uma vez consideradas pequenas as dimensões da seção transversal da viga em relação ao seu comprimento, é possível desprezar os efeitos das tensões normais aos outros eixos σ_y e σ_z. Dessa forma, a lei de *Hooke* generalizada fica reduzida a:

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E} \tag{17}$$

sendo σ_x a tensão normal em relação ao eixo longitudinal x da viga.

Portanto, a tensão normal no ponto 1 da seção transversal da viga, σ_{x1}, é definido por:

$$\sigma_{x1} = E\varepsilon_{x1} = E\frac{du_{calc}}{dx} + E|y|\frac{d^2v}{dx^2} \tag{18}$$

A resultante das tensões normais na seção transversal é:

$$N = \int_S \sigma_{x1}\ dS = \int_S \left(E\frac{d\ u_{calc}}{d\ x} + E|y|\frac{d^2v}{dx^2} \right) dS = \int_S \left(E\frac{d\ u_{calc}}{d\ x} + E|y|\frac{d\theta}{dx} \right) dS \tag{19}$$

sendo S a área da seção transversal.

Semelhantemente, se define o momento fletor como sendo:

$$M = \int_S \sigma_{x1}\ |y|\ dS = \int_S \left(E\frac{du_{calc}}{dx} + E|y|\frac{d\theta}{dx} \right) |y|\ dS \tag{20}$$

As equações acima foram deduzidas considerando o módulo da altura do ponto em relação à seção transversal, $|y|$. O sentido do momento fletor fica a critério da convenção de sinal adotada para os eixos de referência. Azevedo (2003) considera que um momento fletor é positivo quando provoca trações nas fibras que têm coordenadas y positivas.

Supondo que o módulo de *Young* E é constante em todos os pontos da barra e passando para fora da integral tudo o que não depende nem de y nem de z, resulta das equações (19) e (20), respectivamente:

$$N = E\frac{du_{calc}}{dx}\int_S dS + E\frac{d\theta}{dx}\int_S |y|\ dS \tag{21}$$

e

$$M = E\frac{du_{calc}}{dx}\int_S\ |y|\ dS + E\frac{d\theta}{dx}\int_S\ |y|^2\ dS \tag{22}$$

Uma vez que os eixos y e z são os eixos principais centrais de inércia, o seguinte momento estático de área é nulo:

$$\int_S\ |y|^2\ dS = 0 \tag{23}$$

A área e o momento de inércia em relação a z são definidos com as seguintes expressões:

$$A = \int_S dS \tag{24}$$

$$I = \int_S |y|^2 \; dS \tag{25}$$

Assim, é possível simplificar as equações (21) e (22) para:

$$N = EA\frac{du_{calc}}{dx} \tag{26}$$

e

$$M = EI\,\frac{d\theta}{dx} = EI\,\frac{d^2v}{dx^2} \tag{27}$$

Designando a extensão correspondente ao eixo longitudinal da barra por ε_o, têm-se:

$$\varepsilon_o = \frac{du_{calc}}{dx} \tag{28}$$

$$N = EA\varepsilon_o \tag{29}$$

que corresponde a expressão clássica relativa à tração de barras (MASSONNET, 1968; BEER & JOHNSTON, 2008; HIBBELER, 2009; BEER & JOHNSTON, 2010).

Designando por k a curvatura da barra, como sendo:

$$k = \frac{d^2v}{dx^2} \tag{30}$$

resulta, ao substituí-la em (27), em:

$$M = EIk \tag{31}$$

ou

$$k = \frac{M}{EI} \tag{32}$$

que corresponde a uma das expressões clássicas da flexão de vigas (MASSONNET, 1968; BEER & JOHNSTON, 2008; HIBBELER, 2009; BEER & JOHNSTON, 2010).

As expressões (26) e (27) são equivalentes a:

$$\frac{du_{calc}}{dx} = \frac{N}{EA} \tag{33}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \tag{34}$$

Substituindo as equações anteriores (33) e (34) em (18), obtém-se:

$$\sigma_{x1} = E\frac{N}{EA} + E|y|\frac{M}{EI} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I}|y| \tag{35}$$

que corresponde à equação clássica da flexão composta (MASSONNET, 1968; BEER & JOHNSTON, 2008; HIBBELER, 2009; BEER & JOHNSTON, 2010).

2.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

A fundamentação teórica do método dos elementos finitos, desta sessão 2.2, teve como principal influência o trabalho de Soriano (2003).

O matemático Richard Courant, no estudo da torção de *Saint-Venant*, empregou pioneiramente em 1943 o método de *Rayleigh-Ritz* em subdomínios na concepção de elementos finitos (Bulletin of American Mathematic Society, vol. 49, pp. 1-23 apud SORIANO, 2003).

As limitações da mente humana são tais que o homem não consegue dominar completamente o comportamento do complexo mundo que o cerca numa só operação global. Por isso, uma forma natural de proceder dos engenheiros, cientistas e outros profissionais, consiste em separar os sistemas em componentes básicos, ou seja, aplicar o processo de análise do método científico de abordagem de problemas. Com essa operação, tem-se a oportunidade de estudar o comportamento dos elementos – que é mais simples –, e depois sintetizar as soluções parciais para o estudo do sistema global. A discretização de sistemas contínuos tem objetivos análogos, ou seja, particiona-se o domínio – o sistema – em componentes cujas soluções são mais simples e, depois, unem-se as soluções parciais para obter a solução do problema (FONSECA, 2002).

Em estudo do comportamento de sistemas físicos são utilizados modelos físicos (usualmente em escala reduzida, de laboratório) e/ou modelos matemáticos. O avanço da ciência e o cotejamento entre esses modelos têm motivado um grande desenvolvimento dos modelos matemáticos, propiciando modelagens realísticas, confiáveis e de aplicações práticas na engenharia, muito mais econômicas do que os modelos físicos. Embora o modelo matemático guarde aproximações em relação ao sistema físico original, sua solução é dita exata. A análise desses modelos matemáticos habitualmente requer o uso de métodos numéricos, entre os quais se inclui o de elementos finitos. Esse método foi desenvolvido para a análise de meios contínuos, possibilitando, nos dias de hoje, a análise da maior parte dos sistemas físicos dos quais trata a engenharia (SORIANO, 2003).

Os modelos matemáticos de caráter estrutural podem ser classificados quanto a geometria, na Figura 3, em (Idem, 2003):

Figura 3 – Classificação dos modelos estruturais quanto à geometria

$$\begin{cases} \textit{reticulados} \begin{cases} \textit{treliça} \begin{cases} \textit{plana} \\ \textit{espacial} \end{cases} \\ \textit{pórtico} \begin{cases} \textit{plano (incluindo viga e arco)} \\ \textit{espacial} \end{cases} \\ \textit{grelha (incluindo eixo)} \end{cases} \\ \textit{bidimensionais} \begin{cases} \textit{estado plano} \begin{cases} \textit{de tensões} \\ \textit{de deformações} \end{cases} \\ \textit{placa} \\ \textit{casca} \end{cases} \\ \textit{tridimensionais} \\ \textit{mistos} \\ \textit{com cabos ou membranas} \end{cases}$$

Fonte: O autor.

Com a necessidade de projetar estruturas de modelos contínuos e com a disponibilidade de computadores, surge em 1955 o Método de Elementos Finitos a partir da evolução da análise matricial de modelos reticulados.

Engenheiros aeronáuticos criaram os primeiros elementos para a análise de distribuição de tensões em chapas de asa de avião. Argyris e Kelsey (1960) foram os primeiros a tratar das formulações de elementos em 1955 (republicada em 1960), seguidos por Turner et al. (1956). Foram, portanto, a engenharia aeronáutica e o computador digital os responsáveis pelo surgimento do método dos elementos finitos.

Gallagher e Padlog (1963) foram os primeiros a determinar campos de deslocamentos e cargas críticas em vigas e placas com elementos finitos, considerando a não linearidade geométrica. Archer (1963) usou campos de deslocamento em elementos finitos para determinar a matriz de massa consistente. Em 1963 já havia aplicações de elementos finitos em problemas estáticos, de não linearidade, e dinâmicos. Essa formulação do elemento desenvolvida através do princípio dos deslocamentos virtuais é chamada formulação direta. Não havia critérios com garantia de convergência para a solução exata.

Melosh (1963) apresentou uma formulação do método de elementos finitos com a minimização de um funcional de energia potencial total, que era igual a energia de deformação elástica menos duas vezes o trabalho das forças externas. Funcional é toda e qualquer função cujo domínio é um espaço vetorial e a imagem é o corpo de escalares, ou seja, funcional é a função de uma função.

Veubeke (1965) demonstrou a formulação do método dos elementos finitos com outros funcionais da mecânica dos sólidos deformáveis. Porém, verificou-se que as bases do método já haviam sido estabelecidas por Lord *Rayleigh* em 1870, por Walther Ritz em 1909 e por Richard Courant (1943). Mostrou-se que o método de elementos finitos é um caso particular do método de *Rayleigh-Ritz*. Esbeleceram-se critérios de convergência e verificou-se que o método poderia ser empregado em qualquer problema de meio contínuo regido por funcional. Essa é denominada formulação variacional (SORIANO, 2003).

A formulação variacional permitiu que o método dos elementos finitos resolvesse diversos problemas do meio contínuo, como problemas de meios porosos, transferência de calor e eletrostáticos, apresentados primeiramente nos trabalhos de Zienkiewicz e Cheung (1965), Zienkiewicz et al. (1966) entre outros.

Cheung e Zienkiewicz (1965) foram os primeiros a aplicar o método em interação solo-estrutura. Zienkiewicz e Cheung (1967) publicaram o primeiro livro relacionado ao método dos elementos finitos. Zienkiewicz et al. (1968) usaram do processo iterativo do método para analisar fissuras em meios elásticos.

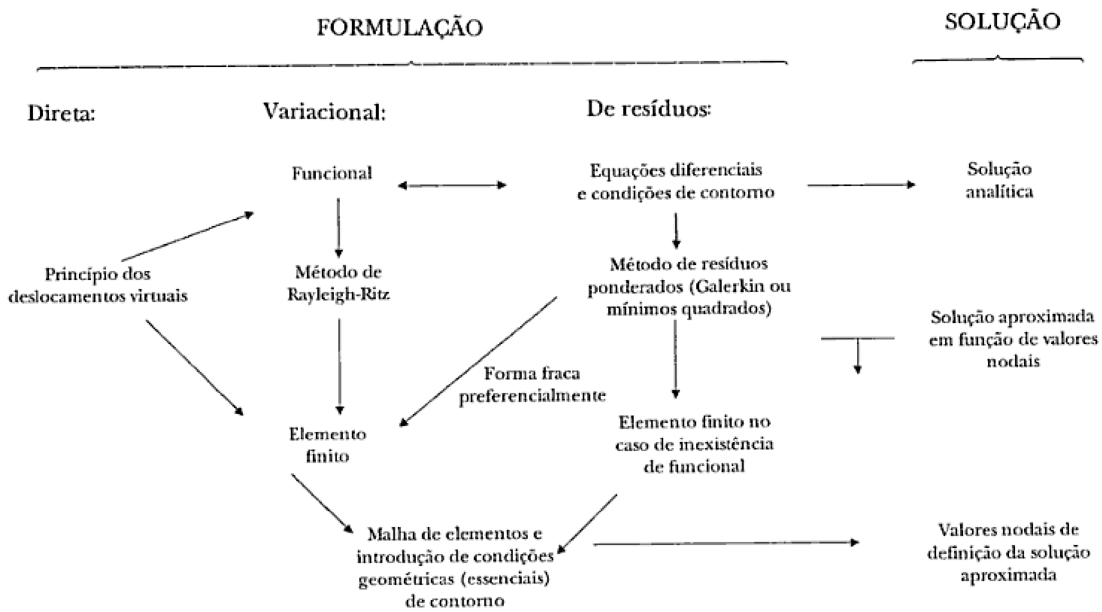
Szabo e Lee (1969) viram que o método poderia ser formulado diretamente a partir de equações diferenciais e condições de contorno de problemas de meios contínuos, como o método dos resíduos ponderados de *Galerkin*.

Herrmann (1972) demonstrou que a formulação obtida pelo funcional de energia potencial total poderia ser também obtida com o método dos mínimos quadrados de resíduos de tensões. Lynn e Arya (1973) formularam o método dos mínimos quadrados, que também é um caso de método de resíduos ponderados. Dessa forma, a aplicação do método dos elementos finitos não se limitou mais a problemas regidos por funcionais.

Semelhante à formulação variacional, na formulação de resíduos do método dos elementos finitos, arbitram-se campos de variáveis no elemento em função dos correspondentes valores nodais. A partir das equações algébricas (obtidas através das formulações direta, variacional ou de resíduos), que regem o comportamento aproximado de cada um dos subdomínios (denominados elementos finitos), monta-se o sistema de equações da malha de elementos como um todo, denominado *sistema global*, que, juntamente com as condições de contorno ainda não atendidas ao se arbitrar o(s) campo(s) de variável(eis) nos subdomínios, permite a determinação dos valores nodais de definição desse(s) campo(s). Pode-se, então, retornar à análise de cada elemento isoladamente para determinação de incógnitas em qualquer um de seus pontos (SORIANO, 2003).

A Figura 4 a seguir demonstra as formulações direta, variacional e de resíduos. Quando usada a forma fraca de resíduos em problemas regido por funcional, as formulações direta, variacional e de resíduos conduzem ao mesmo resultado.

Figura 4 – Algoritmo de formulação direta, variacional e de resíduos no MEF



Fonte: Adaptado de Soriano (2003).

Pretende-se, através dessas conceitualização do método dos elementos finitos, passar ao leitor uma idéia do método e sua importância, bem como o progresso em sua evolução, que possibilitou à engenharia resolver problemas anteriormente não passíveis de avaliação, dando respostas a problemas que, há algumas décadas, não tinham solução.

2.2.1 Teoria de viga de *Euler-Bernoulli*

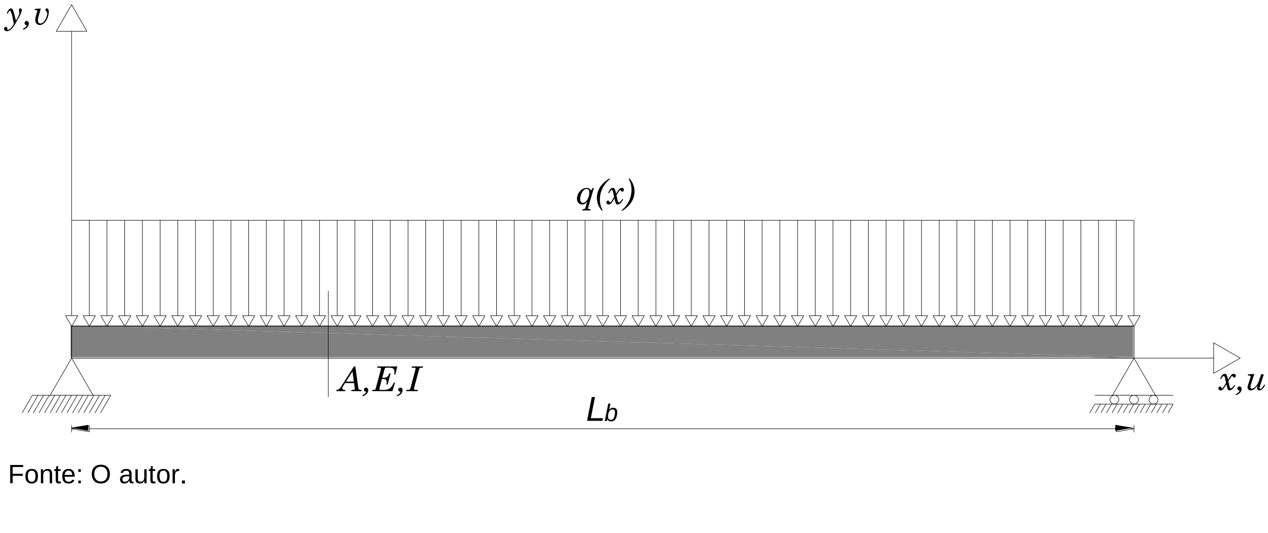
Nesta sessão é feita uma revisão teórica da viga de *Euler-Bernoulli* segundo o trabalho de dissertação de Beghetto (2006) e tese (Idem, 2011).

A teoria da viga de *Euler-Bernoulli*, conhecida como teoria clássica da viga, possui as seguintes características (CRAIG, 1981):

a) A existência da linha neutra no eixo x, onde a viga não sofre tração nem compressão;
b) Seções planas e perpendiculares à linha neutra permanecem planas e perpendiculares após a deformação, ou seja, as deformações devidas ao cisalhamento são negligenciadas;
c) Material elástico linear e homogêneo;
d) As tensões σ_y e σ_z são desprezíveis se comparadas à tensão axial σ_x; e
e) O plano xy é um plano principal.

A Figura 5 a seguir demonstra uma viga biapoiada submetida a um carregamento transversal uniformemente distribuído.

Figura 5 – Viga submetida a um carregamento uniformemente distribuído

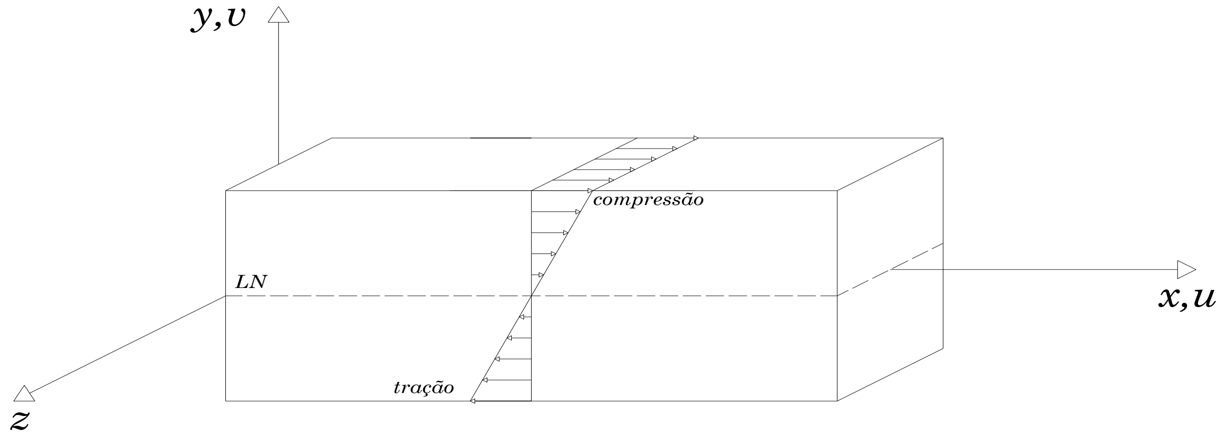


Fonte: O autor.

Na Figura 5, L_b representa o comprimento da viga, A representa a área de seção transversal constante, E representa o módulo de deformação do material, módulo de *Young*, I representa o momento de inércia da seção transversal e $q(x)$ representa o carregamento transversal uniformemente distribuído.

O carregamento transversal gera um momento fletor, o qual produz tensões axiais de tração e compressão, conforme demonstra a Figura 6 a seguir:

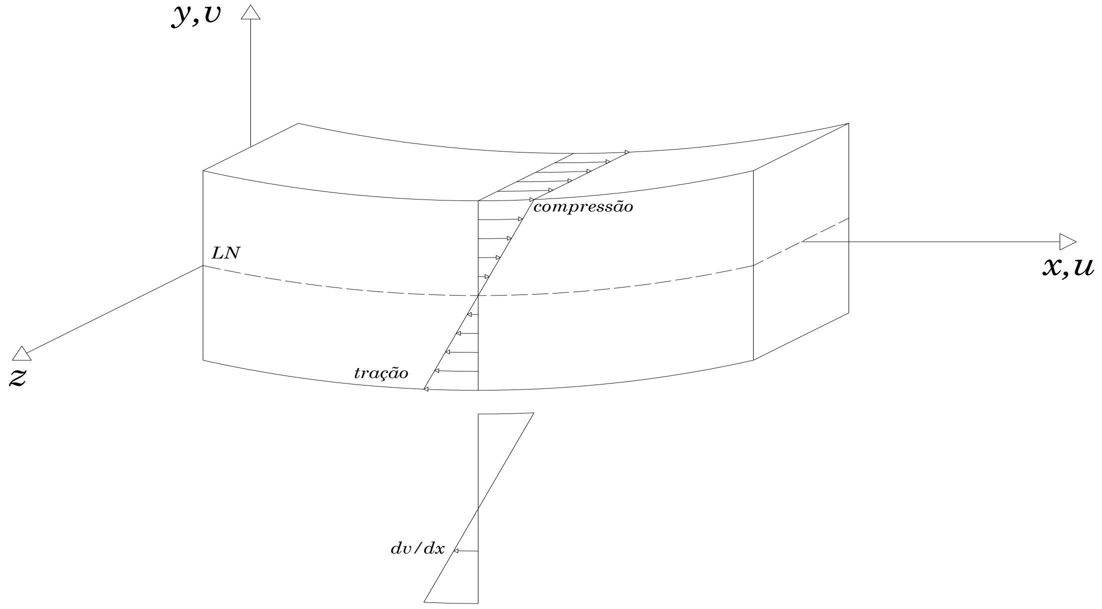
Figura 6 – Tensões axiais na seção transversal da viga



Fonte: O autor.

Ao sofrer flexão a viga apresenta a configuração representada na Figura 7 seguir:

Figura 7 – Configuração deformada da viga flexionada



Fonte: O autor.

A deformação da viga sob a condição de carregamento é descrita por dois campos de deslocamentos:

$$u(x, y) \qquad \text{e} \qquad v(x, y) \tag{36}$$

em que $u(x,y)$ e $v(x,y)$ representam, respectivamente, os campos de deslocamentos axial e transversal. Esses campos são obtidos a partir das seguintes relações:

$$u(x,y) = -y\frac{\partial v(x)}{\partial x} = -y\frac{dv}{dx} \qquad \text{e} \qquad v(x,y) = v(x) \tag{37}$$

em que y é a altura em relação à linha neutra e dv/dx é o ângulo de rotação. Através da relação entre deslocamento e deformação, obtêm-se:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -y\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x} = -y\frac{d^2 v}{dx^2} \tag{38}$$

Segundo a lei de *Hooke*, que relaciona as tensões e deformações, tem-se:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -Ey\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x} = -Ey\frac{d^2 v}{dx^2} \tag{39}$$

em que σ_x e ε_x representam, respectivamente, a tensão axial em relação ao eixo x e a deformação relativa axial.

Portanto, a energia potencial da viga é definida como:

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^{L_b} EI\left(\frac{d^2 v}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^{L_b} qv dx \tag{40}$$

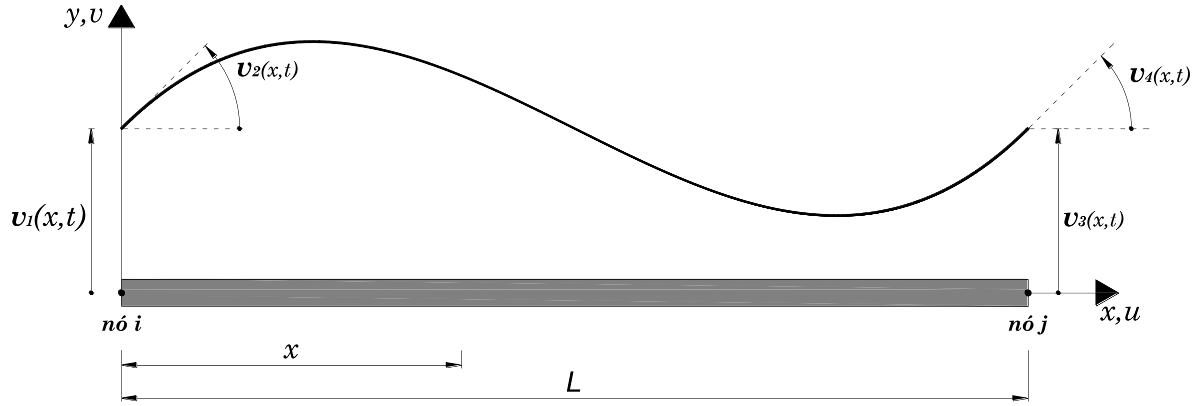
em que a primeira parcela representa a energia interna de deformação, e a segunda parcela representa o trabalho produzido pelas forças externas.

2.2.1.1 Elemento finito de viga

Nesta sessão é feita a revisão teórica sobre os elementos finitos de viga, com direcionamento especial aos elementos finitos de viga de *Euler-Bernoulli* no intuito de melhor compreender o método. A fundamentação teórica realizada nesta sessão teve grande influência do trabalho realizado na dissertação de mestrado de Beghetto (2006) e em sua tese de doutorado (Idem, 2011).

Os elementos finitos de viga também são originados pela subdivisão da viga em pequenos membros os quais possuem as mesmas propriedades materiais e geométricas pertencentes à viga original. Nos elementos finitos aqui utilizados são admitidas as hipóteses da teoria de viga de *Euler-Bernoulli*. A Figura 8 a seguir apresenta um elemento finito de viga e seus respectivos graus de liberdade:

Figura 8 – Elemento finito de viga e seus graus de liberdade



Fonte: Adaptado de Beghetto (2011).

em que L representa o comprimento total do elemento finito de viga delimitado entre os nós i e j, $v_1(x,t)$ e $v_2(x,t)$ representam, respectivamente, o deslocamento transversal e a rotação do nó i, bem como $v_3(x,t)$ e $v_4(x,t)$ representam, respectivamente, o deslocamento transversal e a rotação do nó j. Sendo assim, o elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli* possui quatro graus de liberdade.

A equação diferencial de quarta ordem que governa o problema de flexão de vigas sujeita à um carregamento transversal uniformemente distribuído, é apresentada da seguinte maneira (REDDY, 1984):

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2v}{dx^2}\right)-q(x)=0 \qquad \left(0\le x\le L_b\right) \tag{41}$$

Deve-se selecionar uma função polinomial completa e contínua que represente o campo de deslocamento v e que satisfaça as condições de contorno essenciais. É escolhida então uma função cúbica, pois existem quatro condições de contorno essenciais (CRAIG, 1981; CHOPRA, 1995; BATHE, 1996).

$$v(x,t)=c_1+c_2\,\frac{x}{L}+c_3\left(\frac{x}{L}\right)^2+c_4\left(\frac{x}{L}\right)^3 \tag{42}$$

em que as condições de contorno essenciais são:

$$\begin{aligned} v_1(x,t)&=v(0,t)=c_1\\ v_2(x,t)&=v_{,x}(0,t)=\frac{c_2}{L}\\ v_3(x,t)&=v(L,t)=c_1+c_2+c_3+c_4\\ v_4(x,t)&=v_{,x}(L,t)=\frac{c_2}{L}+\frac{2c_3}{L^2}L+\frac{3c_4}{L^3}L^2=\frac{c_2}{L}+\frac{2c_3}{L}+\frac{3c_4}{L} \end{aligned} \tag{43}$$

em que $v_{,x} = dv/dx = \theta$ representa a primeira derivada em relação a x, que corresponde a rotação.

Encontrando os valores de c_i para $i = 1,2,3,4$ e substituindo-os na equação (42), tem-se:

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{4} \psi_i(x) v_i(x,t) \tag{44}$$

que em notação matricial se escreve:

$$v(x,t) = \{\psi_1 \quad \psi_2 \quad \psi_3 \quad \psi_4\} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{45}$$

em que $\psi_i(x)$ são as funções de forma, funções coordenadas, ou funções de interpolação para o elemento finito de viga e são representadas respectivamente por:

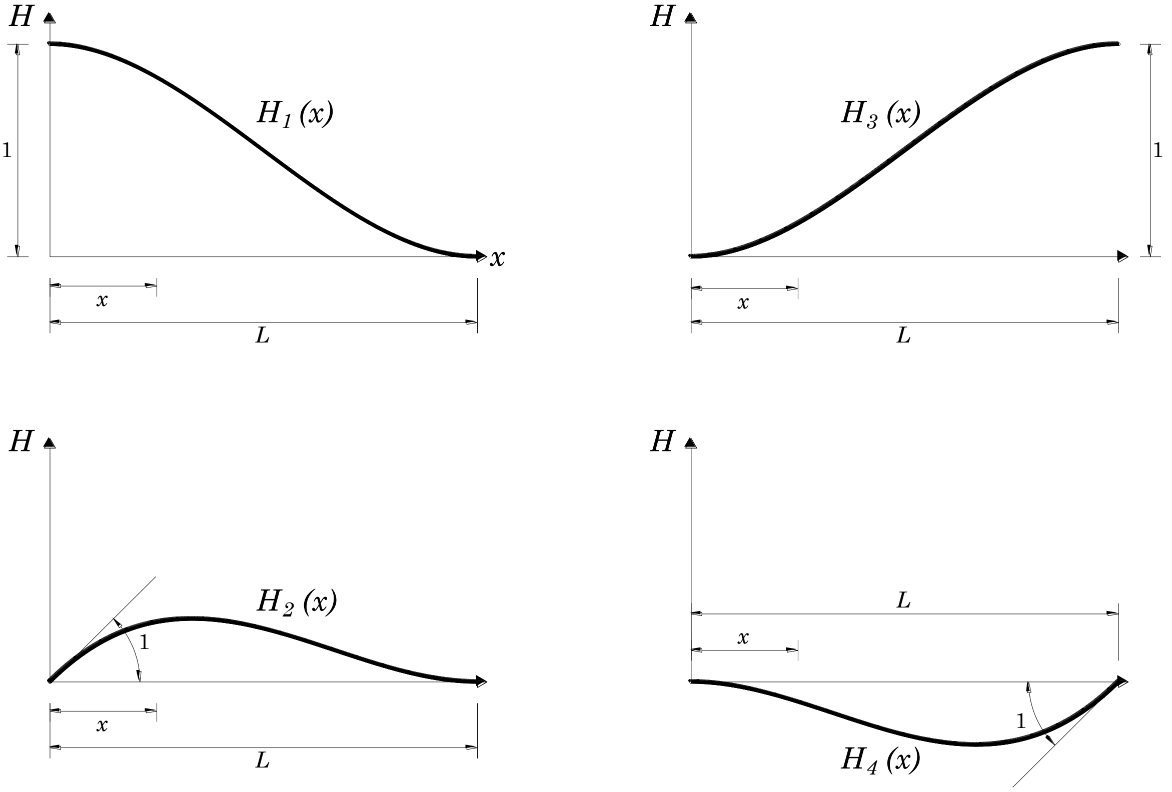
$$\begin{aligned}
\psi_1(x) &= H_1(x) = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
\psi_2(x) &= H_2(x) = x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \\
\psi_3(x) &= H_3(x) = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \\
\psi_4(x) &= H_4(x) = \frac{x^2}{L}\left(\frac{x}{L} - 1\right)
\end{aligned} \tag{46}$$

As funções de forma, ou interpoladoras, $H_i(x)$ são conhecidas como funções polinomiais cúbicas de *Hermite*, que satisfazem as seguintes condições de contorno:

$$\begin{array}{llll}
H_1(0) = 1 & H_{1,x}(0) = 0 & H_1(L) = 0 & H_{1,x}(L) = 0 \\
H_2(0) = 0 & H_{2,x}(0) = 1 & H_2(L) = 0 & H_{2,x}(L) = 0 \\
H_3(0) = 0 & H_{3,x}(0) = 0 & H_3(L) = 1 & H_{3,x}(L) = 0 \\
H_4(0) = 0 & H_{4,x}(0) = 0 & H_4(L) = 0 & H_{4,x}(L) = 1
\end{array} \tag{47}$$

As funções são representadas graficamente na Figura 9 seguir:

Figura 9 – Gráficos das funções de interpolação polinomiais cúbicas de *Hermite*



Fonte: O autor.

Segundo o que foi exposto na sessão 2.1.1, considerando constante a parcela u_{calc} do campo de deslocamentos na equação (16), ou seja, considerando apenas os deslocamentos laterais $v(x)$, tem-se:

$$\varepsilon_{x1} = |y| \frac{d^2 v}{dx^2} \tag{48}$$

Considerando a coordenada y negativa em relação ao eixo de referência, tem-se:

$$\varepsilon_{x1} = -y \frac{d^2 v}{dx^2} \tag{49}$$

Designando como $\bar{\varepsilon}_{x1}$ a seguinte componente da equação (49):

$$\bar{\varepsilon}_{x1} = -\frac{d^2 v}{dx^2} \tag{50}$$

tem-se:

$$\varepsilon_{x1} = y \bar{\varepsilon}_{x1} \tag{51}$$

Substituindo a equação (45) na equação (50), tem-se:

$$\bar{\varepsilon}_{x1} = -\frac{d^2\left(\sum_{i=1}^{4}\psi_i(x)v_i(x,t)\right)}{dx^2} = \left\{-\frac{d^2\psi_1}{dx^2} \quad -\frac{d^2\psi_2}{dx^2} \quad -\frac{d^2\psi_3}{dx^2} \quad -\frac{d^2\psi_4}{dx^2}\right\}\begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{Bmatrix} \tag{52}$$

Definindo a matriz de deformação $[B]$ como:

$$[B] = \left[-\frac{d^2\psi_1}{dx^2} \quad -\frac{d^2\psi_2}{dx^2} \quad -\frac{d^2\psi_3}{dx^2} \quad -\frac{d^2\psi_4}{dx^2}\right] \tag{53}$$

passa-se a escrever a equação (50) como sendo:

$$\bar{\varepsilon}_{x1} = [B]\{v\} \tag{54}$$

Substituindo a equação anterior (54) na equação (51), obtém-se:

$$\varepsilon_{x1} = y[B]\{v\} \tag{55}$$

Atendendo às funções de forma como funções polinomiais cúbicas de *Hermite*, conforme a equação (46), e integrando no domínio do elemento entre as coordenadas locais 0 e 1 a matriz de deformação $[B]$ passa a ter os seguintes componentes:

$$[B] = \left[\frac{6}{L^2} - \frac{12}{L^3}x \quad \frac{4}{L} - \frac{6}{L^2}x \quad -\frac{6}{L^2} + \frac{12}{L^3}x \quad \frac{2}{L} - \frac{6}{L^2}x\right] \tag{56}$$

Caso a integração no domínio do elemento seja feita entre as coordenadas locais $-1/2$ e $+1/2$, ou seja, caso a origem esteja localizada no centro do elemento, a equação (56) passa a ser:

$$[B] = \left[-\frac{12}{L^3}x \quad \frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x \quad \frac{12}{L^3}x \quad -\frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x\right] \tag{57}$$

A energia cinética do elemento finito de viga pode ser representada por:

$$T=\frac{1}{2}\int_0^L \rho A\dot{v}^2 dx$$
$$T=\frac{1}{2}\int_0^L \rho A\left[\sum_{i=1}^{4} H_i(x)\dot{v}_i(x,t)\right]\left[\sum_{j=1}^{4} H_j(x)\dot{v}_j(x,t)\right]dx$$
$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left[\int_0^L \rho A H_i(x)H_j(x)dx\right]\dot{v}_i(x,t)\dot{v}_j(x,t) \tag{58}$$
$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} m_{ij}\dot{v}_i\dot{v}_j$$
$$T=\frac{1}{2}\{\dot{v}_e\}^T[M_e]\{\dot{v}_e\}$$

em que T , ρ , A e $\dot{()}$ representam respectivamente a energia cinética do elemento finito de viga, a massa específica do material, a área de seção transversal e a primeira derivada com relação ao tempo. A matriz de massa do elemento finito de viga $[M_e]$, como será vista no modelo matemático veículo-irregularidade-ponte, pode ser obtida utilizando-se as funções de forma da seguinte maneira:

$$m_{ij}=\int_0^L \rho A\psi_i\psi_j dx=\int_0^L \rho A H_i H_j dx$$
$$[M_e]=\frac{\rho A L}{420}\begin{bmatrix}156 & 22L & 54 & -13L\\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2\\ 54 & 13L & 156 & -22L\\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2\end{bmatrix} \tag{59}$$

A energia potencial de deformação do elemento finito de viga pode ser representada da seguinte maneira:

$$V=\frac{1}{2}\int_\Omega \sigma_x\varepsilon_x d\Omega$$
$$V=\frac{1}{2}\int_\Omega Ey^2\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2 d\Omega$$
$$V=\frac{1}{2}\int_\Omega Ey^2(v'')^2 d\Omega$$
$$V=\frac{1}{2}\int_0^L\int_A Ey^2(v'')dxdydz \tag{60}$$
$$V=\frac{1}{2}\int_0^L\int_A Ey^2\left[\sum_{i=1}^{4}\frac{d^2\psi_i(x)}{dx^2}v_i(x,t)\right]\left[\sum_{j=1}^{4}\frac{d^2\psi_j(x)}{dx^2}v_j(x,t)\right]dAdx$$
$$V=\frac{1}{2}\int_0^L\int_A Ey^2\left[\sum_{i=1}^{4}\frac{d^2H_i(x)}{dx^2}v_i(x,t)\right]\left[\sum_{j=1}^{4}\frac{d^2H_j(x)}{dx^2}v_j(x,t)\right]dAdx$$

em que $v'' = d^2v/dx^2$ representa a segunda derivada em relação a x, V representa a energia potencial de deformação do elemento finito de viga e Ω representa o volume de integração do sólido.

Definindo a segunda derivada em relação a x dos polinômios de *Hermite* como sendo $H'' = d^2H/dx^2$, obtém-se da equação (60):

$$V = \frac{1}{2}\int_0^L \int_A Ey^2 \left[\sum_{i=1}^{4} H_i''(x) v_i(x,t)\right]\left[\sum_{j=1}^{4} H_j''(x) v_j(x,t)\right] dA dx$$
$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left[\int_0^L \int_A Ey^2 dA \; H_i''(x) H_j''(x) dx\right] v_i(x,t) v_j(x,t) \quad (61)$$

na qual o momento de inércia de área é definido por:

$$I = \int_A y^2 dA \quad (62)$$

Assim, define-se a energia potencial de deformação do elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli* como sendo:

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}\left[\int_0^L E \; I \; H_i'' H_j'' \; dx\right] v_i(x,t) v_j(x,t)$$
$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} K_{ij} v_i v_j \quad (63)$$
$$V = \frac{1}{2}\{v_e\}^T [K_e]\{v_e\}$$

em que a matriz de rigidez do elemento finito de viga $[K_e]$ da equação acima pode ser obtida da dedução direta da equação anterior ou através das funções de forma, sendo definida, portanto, por:

$$[K_e] = \int_\Omega [B]^T [c][B] d\Omega$$
$$K_{ij} = \int_0^L E \; I \; \psi_i''(x) \; \psi_j''(x) \; dx$$
$$K_{ij} = \int_0^L E \; I \; H_i'' H_j'' \; dx \quad (64)$$
$$[K_e] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

na qual o subíndice e refere-se a elementar. No caso, $[K_e]$ é a matriz de rigidez elementar, ou seja, de um determinado elemento da malha.

Os esforços externos aplicados ao elemento finito de viga podem ser escritos da seguinte forma:

$$\{F_{e_i}(t)\} = \int_0^L q(x) H_i dx \tag{65}$$

na qual tem-se a seguinte distribuição nodal dos esforços para o carregamento distribuído $q(x)$:

$$\{F_e(t)\}^T = \begin{Bmatrix} \frac{q(x)L}{2} & \frac{q(x)L^2}{12} & \frac{q(x)L}{2} & -\frac{q(x)L^2}{12} \end{Bmatrix} \tag{66}$$

O princípio de *Hamilton* (CLOUGH & PENZIEN, 1993), também conhecido equivocadamente como princípio do menor esforço, de mínima ação, quando na verdade a ação apenas precisa ser estacionária e não necessariamente a um valor mínimo, estabelece que a variação da energia cinética e potencial mais a variação do trabalho produzido pelas forças não conservativas durante o intervalo de tempo definido entre t_1 e t_2 é nula:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta[T(t) - V(t)]dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc}(t)dt = 0 \tag{67}$$

em que W_{nc} representa o trabalho virtual produzido pelas forças não conservativas atuantes no sistema, como as forças externas arbitrárias e o amortecimento, e δ refere-se à variação durante o intervalo de tempo definido.

A equação lagrangeana de movimento deriva diretamente do princípio de *Hamilton* (CLOUGH & PENZIEN, 1993) e são matematicamente equivalentes. Como, matematicamente, as equações de *Hamilton* podem ser derivadas das equações de *Lagrange* e as equações de *Lagrange* podem ser derivadas a partir das leis de *Newton*, as quais são equivalentes e resumem a mecância clássica, pode-se observar que a mecânica clássica é fundamentalmente governada por um princípio de variação (ZATZKIS, 1960; DVORAK & FREISTETTER, 2005). Abaixo é obtida a equação lagrangeana de movimento:

$$
\begin{aligned}
&T = T\left(q_1, q_2, ..., q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_N\right)\\
&V = V\left(q_1, q_2, ..., q_N\right)\\
&\delta W_{nc} = Q_1\delta q_1 + Q_1\delta q_1 + ... + Q_N\delta q_N\\
&\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\partial \dot{q}_i dt = \left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\partial q_i\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\partial q_i dt\\
&\int_{t_1}^{t_2}\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial q_i} + Q_i\right]\delta q_i\right\}dt = 0\\
&Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i}
\end{aligned}
\tag{68}
$$

em que Q_i são as funções de forças não conservativas incluindo o amortecimento e as forças externas arbitrárias aplicadas nas coordenadas generalizadas q_i. Reescrevendo a equação lagrangeana de movimento, permutando-se apropriadamente as coordenadas generalizadas pelos graus de liberdade e as forças conservativas pelos esforços nodais, tem-se (BEGHETTO, 2011):

$$
\{F_e(t)\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\{\dot{v}_e\}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\{v_e\}} + \frac{\partial V}{\partial\{v_e\}}
\tag{69}
$$

Substituindo-se a energia cinética T obtida da equação (58), a energia potencial de deformação V obtida da equação (63) e os esforços externos nodais $F_{e_i}(t)$ na equação lagrangeana de movimento obtêm-se:

$$
\begin{aligned}
&F_{e_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{v}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial v_i} + \frac{\partial V}{\partial v_i}\\
&em\ que\ T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} m_{ij}\dot{v}_i\dot{v}_j\\
&em\ que\ V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} K_{ij}v_i v_j\\
&F_{e_i} = \sum_{j=1}^{4} m_{ij}\ddot{v}_j - 0 + \sum_{j=1}^{4} K_{ij}v_j
\end{aligned}
\tag{70}
$$

Reescrevendo na forma matricial, obtêm-se:

$$\{F_e(t)\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\{\dot{v}_e\}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\{v_e\}} + \frac{\partial V}{\partial\{v_e\}}$$
$$em\ que\ T = \frac{1}{2}\{\dot{v}_e\}^T[M_e]\{\dot{v}_e\} \tag{71}$$
$$em\ que\ V = \frac{1}{2}\{v_e\}^T[K_e]\{v_e\}$$
$$\{F_e(t)\} = [M_e]\{\ddot{v}_e\} + [K_e]\{v_e\}$$

na equação de movimento, a primeira parcela representa as forças inerciais, e a segunda parcela, as forças elásticas.

Os vetores de aceleração e de deslocamento elementares são dados respectivamente através da seguinte relação:

$$\{\ddot{v}_e\}^T = \{\ddot{v}_1 \quad \ddot{v}_2 \quad \ddot{v}_3 \quad \ddot{v}_4\} \quad \text{e} \quad \{v_e\}^T = \{v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4\} \tag{72}$$

Para a viga toda subdividida convenientemente em n elementos, respeitando a conectividade dos elementos e as condições de contorno, têm-se:

$$[M_B] = \sum_{e=1}^{n}[M_e]$$
$$[K_B] = \sum_{e=1}^{n}[K_e]$$
$$\{F_B(t)\} = \sum_{e=1}^{n}\{F_e(t)\} \tag{73}$$
$$\{u_B\} = \sum_{e=1}^{n}\{v_e\}$$
$$\{\ddot{u}_B\} = \sum_{e=1}^{n}\{\ddot{v}_e\}$$

em que $[M_B]$ e $[K_B]$ representam as matrizes de massa e de rigidez da viga, respectivamente, $\{F_B(t)\}$ representa o vetor de forças aplicadas à viga, $\{u_B\}$ representa o vetor de deslocamentos da viga e $\{\ddot{u}_B\}$ representa o vetor de acelerações da viga.

Assim sendo, podem-se escrever as equações de movimento da ponte íntegra na forma matricial:

$$[M_B]\{\ddot{u}_B\} + [K_B]\{u_B\} = \{F_B(t)\} \tag{74}$$

Para incluir o amortecimento no sistema, emprega-se o método de *Rayleigh* (CHOPRA, 1995). Desta maneira a matriz de amortecimento do sistema é obtida através de uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez, ou seja:

$$[C_B] = \alpha_B [M_B] + \beta_B [K_B] \tag{75}$$

sendo:

$$\alpha_B = \frac{2\zeta\omega_{nb1}\omega_{nb2}}{\omega_{nb1} + \omega_{nb2}} \quad \text{e} \quad \beta_B = \frac{2\zeta_B}{\omega_{nb1} + \omega_{nb2}} \tag{76}$$

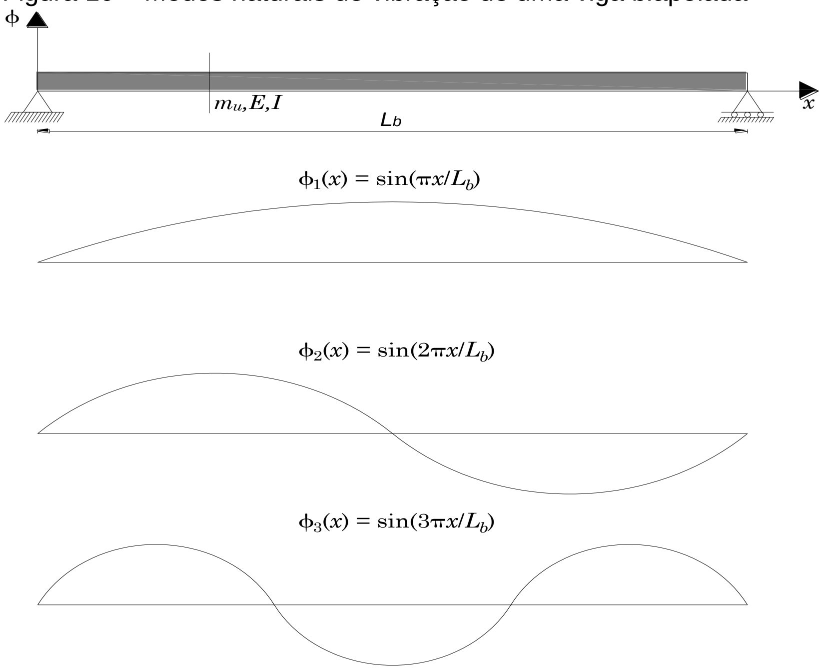
em que ω_{nb1} e ω_{nb2} representam a primeira frequência natural de vibração e a segunda frequência natural de vibração, respectivamente. O coeficiente ζ_B representa a razão de amortecimento da estrutura que é estimada em função do tipo da estrutura (CHOPRA, 1995).

O cálculo das frequências naturais para vigas biapoiadas e seus respectivos modos naturais de vibração podem ser obtidos segundo Chopra (1995), pelas relações:

$$\omega_{nbn} = \frac{n^2\pi^2}{L_b{}^2}\sqrt{\frac{EI}{m_u}} \qquad \phi_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L_b} \qquad n = 1,2,3,\ldots \tag{77}$$

em que ω_{nbn} representa as frequências naturais de vibração, $\phi_n(x)$ representa os modos naturais de vibração e m_u representa a massa unitária da viga. Os modos naturais de vibração de uma viga biapoiada são representados na figura 10 a seguir juntamente com suas soluções analíticas.

Figura 10 – Modos naturais de vibração de uma viga biapoiada



Fonte: O autor.

Incluindo o amortecimento no sistema, pode-se escrever a equação matricial de movimento do sistema, apresentado na equação (74) para a ponte íntegra, da seguinte maneira:

$$[M_B]\{\ddot{u}_B\}+[C_B]\{\dot{u}_B\}+[K_B]\{u_B\}=\{F_B(t)\} \quad (78)$$

em que $[C_B]$ e $\{\dot{u}_B\}$ representam a matriz de amortecimento e o vetor de velocidades do sistema, respectivamente, que é definido pela conectividade dos elementos e condições contorno como sendo:

$$\{\dot{u}_B\}=\sum_{e=1}^{n}\{\dot{v}_e\} \quad (79)$$

em que $\{\dot{v}_e\}$ é o vetor de velocidade elementar definido por:

$$\{\dot{v}_e\}^T=\{\dot{v}_1 \quad \dot{v}_2 \quad \dot{v}_3 \quad \dot{v}_4\} \quad (80)$$

2.3 TEORIA DO DANO CONTÍNUO

Considere-se um sólido com dano do qual é retirado um elemento de volume representativo, RVE. Entende-se por “representativo” um elemento com dimensões suficientemente grandes para considerar a distribuição de microdefeitos contínua e suficientemente pequeno para ser considerado como um ponto material do contínuo. Ou seja, espera-se que o elemento seja realmente representativo do meio.

Considerando S a área de uma das faces do elemento representativo, a área da seção transversal do RVE sem danos ou íntegro, definida por um versor $\vec{n}$, $\tilde{S}$ é área que resiste efetivamente aos esforços, capaz de englobar possíveis danos na seção transversal do RVE. Define-se a área efetiva por:

$$\tilde{S}=S-S_D \quad (81)$$

sendo a área efetiva $\tilde{S}$, a subtração da área íntegra S pela área com defeitos S_D.

Lemaitre e Chaboche (1985) definiram a medida local de dano como sendo:

$$D_{\vec{n}}=\lim_{S\to 0}\frac{S_D}{S} \quad (82)$$

A variável de dano assume valores no intervalo de $0\le D_{\vec{n}}\le 1$, sendo que $D_{\vec{n}}=0$ representa o material íntegro e $D_{\vec{n}}=1$ indica um estado de total deterioração.

O dano isotrópico corresponde a uma situação onde a variável de dano é uniforme em qualquer direção cuja normal é o versor $\vec{n}$, ou seja, apenas uma variável escalar representa o dano em um ponto material (GUELLO,2002).

$$D = D_{\vec{n}} \qquad \forall \vec{n} \tag{83}$$

Se o dano é isotrópico, a variável escalar $D_{\vec{n}}$ não depende da normal. A variável intrínseca é um escalar (KACHANOV, 1958):

$$D = \frac{\delta S_D}{\delta S} \tag{84}$$

Dessa forma, a variável D pode ser aplicada como tal em problemas unidimensionais. Ela também pode ser utilizada como uma avaliação fácil do dano aproximado em problemas tridimensionais, particularmente em problemas de carregamento proporcional (LEMAITRE & DESMORAT, 2005).

Se vários mecanismos de danificações acontecerem, simultaneamente ou não, cada um deles pode ser representado por uma variável escalar específica D_k com o mesmo significado físico do caso unidimensional da equação (84). É o caso clássico de materiais compósitos onde podem ocorrer delaminação de fibras, clivagem, fissurações das matrizes, dentre outros fenômenos (LEMAITRE, 1992). Podem ser usadas duas ou mais variáveis independentes (LADEVÈZE, 1983) como, por exemplo, D_F para ruptura de fibras quasi-quebradiças, D_T para rachaduras transversais das matrizes, D_S para fracionamentos por cisalhamento.

O dano é comumente não isotrópico devido à microfissurações mais ou menos perpendiculares a maior tensão principal positiva. Assim, a densidade da superfície de microdefeitos no plano cuja normal $\vec{n}$ atua através de um operador que transforma a superfície δS e $\vec{n}$ numa área menor, porém contínua, com uma nova normal $\vec{n}_2$ (MURAKAMI, 1981). Para manter este significado físico, o dano atua através do operador $\left(\overline{\overline{I}} - \overline{\overline{D}}\right)$, portanto:

$$\left(\delta_{ij} - D_{ij}\right) n_j \delta S = \tilde{n}_i \delta \tilde{S} \tag{85}$$

em que δ_{ij} é o delta de *Kronecker* e $\overline{\overline{D}}$, ou D_{ij} em notação indicial, é o tensor de dano de segunda ordem.

Na realidade, a maior generalização para a variável de dano é uma representação por um tensor de quarta ordem, como pode ser demonstrado de diversas formas (CHABOCHE, 1978; KRAJCINOVIC & FONSEKA, 1981; LECKIE & OÑATE, 1981; CHOW & WANG, 1987a; CHOW & WANG, 1987b; LEMAITRE, 1992). Este tensor é de difícil utilização.

Considerando uma área no plano cuja normal é o versor $\vec{n}$ que contenha danos, δS, e um vetor $\vec{v}$ tal que o tensor $v_i n_j \delta S$ define a configuração geométrica de referência, a mecânica do dano contínuo define a configuração contínua efetiva por uma área modificada $\delta\tilde{S}$ e um versor normal modificado $\tilde{\vec{n}}$. O dano D_{ijkl} é o operador que transforma o tensor de segunda ordem $v_i n_j \delta S$ da configuração de referência no tensor $v_i \tilde{n}_j \delta\tilde{S}$ da configuração efetiva. Matematicamente, esse é um tensor de quarta ordem, em que:

$$\begin{aligned} &\left(I_{ijkl} - D_{ijkl}\right) v_k n_l \delta S = v_i \tilde{n}_j \delta\tilde{S} \\ &D_{ijkl} = D_{ijlk} = D_{jikl} = D_{klij} \end{aligned} \tag{86}$$

Se todos os defeitos são abertos de tal forma que não há microforças atuando na superfície das microfissuras ou microcavidades representadas por S_D é conveniente introduzir uma tensão efetiva relacionada com a superfície que resiste efetivamente à carga (RABOTNOV, 1969).

Se considerarmos apenas a área efetiva, ou seja, a área da seção livre de dano, como responsável por equilibrar os esforços, define-se tensão efetiva para um caso unidimensional como sendo:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} \tag{87}$$

em que F é a força aplicada no elemento representativo e $\tilde{S}$ é a área efetiva.

A definição da tensão efetiva, aqui apresentada, é para o material em tensão normal. Porém, na compressão, se as aberturas de alguns defeitos fecham, para o dano se mantendo inalterado, a superfície que efetivamente resiste à carga é maior que $S - S_D$. Em particular, se todos os defeitos se fecharem a tensão efetiva na compressão $\tilde{\sigma}^-$ é igual à tensão usual σ. Assim, deve-se observar que o conceito de área efetiva pode variar tendo em conta as concentrações de microtensões e interações mútuas dos defeitos solicitados entre tensões normais e tensões cisalhantes. Somente a micromecânica pode dar um significado preciso do conceito de área efetiva, ao considerar este conceito globalmente na mesoescala através da identificação da variável de dano por meio de seu acoplamento com a elasticidade ou com a plasticidade (LEMAITRE, 1992).

Da equação (81), a área efetiva $\tilde{S}$ pode ser escrita em função da variável D através da seguinte relação:

$$\tilde{S} = S - S_D = S(1 - D) \tag{88}$$

No caso uniaxial de dano isotrópico sem o efeito de fechamento das microfissuras na compressão, o valor médio das microtensões é simplesmente obtido do equilíbrio de forças (RABOTNOV, 1969). Dessa forma a tensão efetiva $\tilde{\sigma}$ pode ser escrita como:

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{F}{S(1 - D)} = \frac{\sigma}{(1 - D)} \tag{89}$$

Por lógica matemática, $\tilde{\sigma} \geq \sigma$ já que a área efetiva nunca será maior que a área íntegra. Assim:

$\tilde{\sigma} = \sigma$ para o material íntegro, ou seja, sem danificação, pois a área efetiva coincide com a área íntegra e consequentemente não há dano, e;

$\tilde{\sigma} \to \infty$ para o material aproximando-se do seu estado total de deteriorização, ou seja, totalmente danificado, pois a área efetiva passa a ser nula.

Já em um caso tridimensional, não abordado na análise numérica deste trabalho, o operador $(1 - D)$ se aplica a todas as componentes do tensor das tensões. Escreve-se, portanto, o tensor de tensões efetivas $\overline{\overline{\tilde{\sigma}}}$ como sendo:

$$\overline{\overline{\tilde{\sigma}}} = \frac{\overline{\overline{\sigma}}}{(1 - D)} \tag{90}$$

ou em notação indicial, escreve-se o tensor de tensões efetivas $\tilde{\sigma}_{ij}$ como sendo:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{(1 - D)} \tag{91}$$

em que $\overline{\overline{\boldsymbol{\sigma}}}$ ou σ_{ij}, em notação indicial, aqui representa o tensor de tensões de *Cauchy*.

O caso do dano anisotrópico tem maior complexidade e é muito mais dificultoso de assegurar uma boa representação dos comportamentos físicos, bem como a compatibilidade com a termodinâmica. Na verdade, a tensão efetiva representada com um tensor de dano de segunda ordem é uma aproximação da tensão efetiva exata deduzida da representação mais geral do dano pelo tensor de quarta ordem D_{ijkl} segundo a equação (86). A tensão efetiva é definida de forma análoga a equação (90) ou (91), mas, aqui, pela projeção do vetor de tensões no vetor de referência $\vec{v}$ (LEMAITRE & DESMORAT, 2005), conforme equação abaixo:

$$\begin{gathered} v_i \tilde{\sigma}_{ij} \tilde{n}_j \delta\tilde{S} = v_i \sigma_{ij} n_j \delta S \\ \tilde{\sigma}_{ij} \left(I_{ijkl} - D_{ijkl} \right) v_k n_l \delta S = \sigma_{kl} v_k n_l \delta S \end{gathered} \tag{92}$$

Como o tensor de dano D_{ijkl} é um simétrico, conforme equação (86), o tensor de tensões efetivas também é simétrico:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{kl} \left(\overline{\overline{\overline{I}}} - \overline{\overline{\overline{\overline{D}}}} \right)^{-1}_{klij} \tag{93}$$

que também pode ser escrito como:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \tag{94}$$

em que:

$$M_{ijkl} = \left(\overline{\overline{\overline{I}}} - \overline{\overline{\overline{\overline{D}}}} \right)^{-1}_{klij} \tag{95}$$

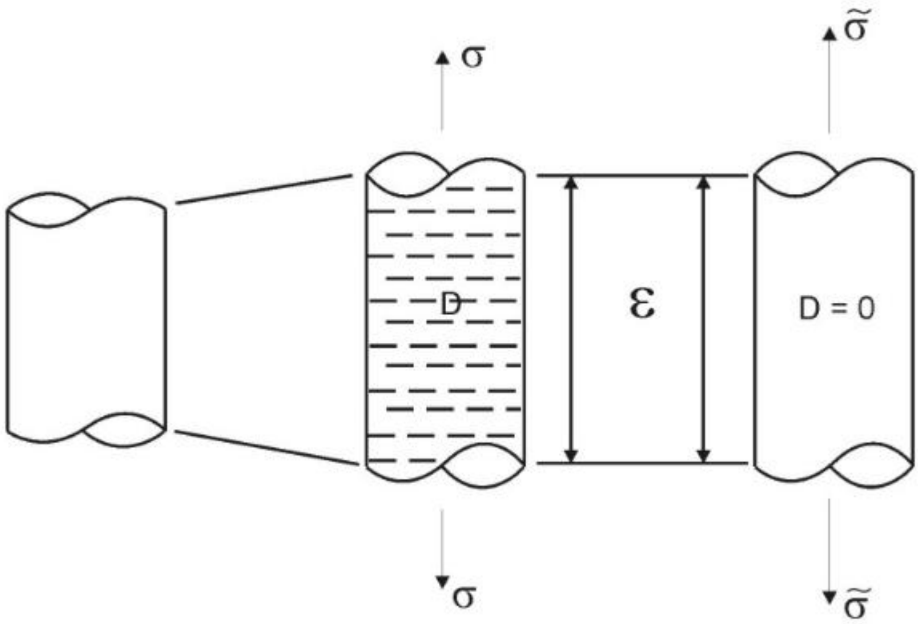
Uma forma de evitar uma análise micromecânica para cada tipo de defeito e cada tipo de mecanismo de dano é postular um princípio na mesoescala (LEMAITRE, 1992).

Na termodinâmica, o método do estado local assume que o estado termomecânico em um ponto é completamente definido pelos valores de tempo de um conjunto de variáveis de estado contínuas dependentes do ponto considerado. Este postulado aplicado na microescala impõe que as equações constitutivas para a deformação de um elemento de microvolume não são modificadas pela vizinhança de um elemento de microvolume contendo uma microfissura. Extrapolando para a mesoescala, isto significa que as equações constitutivas de deformação escritas para a superfície $\delta S - \delta S_D$ não são modificadas pelo dano, ou que a verdadeira tensão atuante no material é a tensão efetiva $\tilde{\sigma}$ e não mais a tensão σ (Idem, 1992).

Lemaitre e Chaboche (1985) apresentaram a hipótese de deformação equivalente a fim de obter um modelo coerente com a hipótese do meio contínuo:

> "O estado de deformação, unidimensional ou tridimensional, de um material com dano é obtido da lei do comportamento do material íntegro onde a tensão normal é substituída pela tensão efetiva."

Figura 11 – Deformação equivalente



Fonte: LEMAITRE & CHABOCHE, 1985.

Considerando um material com comportamento elástico linear para a porção intacta do meio, no caso unidimensional a deformação elástica pode ser escrita a partir da relação entre tensão efetiva e o módulo de deformação do material íntegro da seguinte forma, segundo Pituba (1998):

$$\varepsilon_e = \frac{\tilde{\sigma}}{E} = \frac{\sigma}{(1-D)E} \qquad (96)$$

O módulo de *Young* do material danificado $\tilde{E}$, para um meio contínuo de resposta equivalente ao material com imperfeições, é definido ao substituir a tensão efetiva na relação anterior. Assim, obtém-se:

$$\tilde{E} = (1-D)E \qquad (97)$$

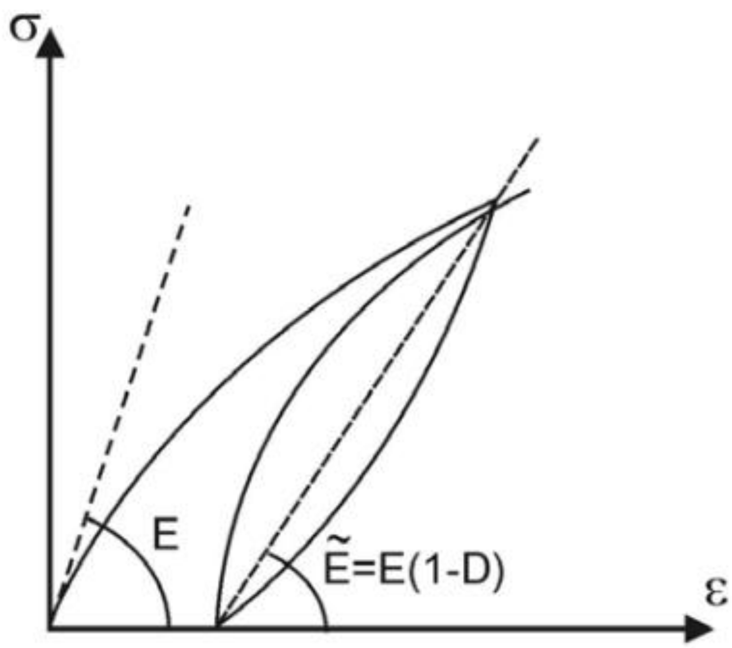
Assim, outra forma de definir o tensor de quarta ordem de dano $\overline{\overline{\overline{\overline{D}}}}$ é considerando o operador que transforma o tensor de deformação inicial do material íntegro E_{ijkl} no atual tensor de deformação do material $\tilde{E}_{ijkl}$ amaciado pelo dano:

$$\tilde{E}_{ijkl} = \left(I_{ijrs} - D_{ijrs}\right)E_{rskl} \tag{98}$$

De um ponto de vista puramente teórico, a relação demonstrada na equação acima não produz uma real variável de estado porque exige o conhecimento de um determinado comportamento do material, como a elasticidade (LEMAITRE & DESMORAT, 2005).

Entretanto, essa relação permite determinar indiretamente a variável de dano para materiais elásticos a partir de medidas do módulo de deformação realizadas em ensaios com ciclos de carregamento e descarregamento, conforme a Figura 12.

Figura 12 – Curva σ x ε para ciclos de carregamento e de descarregamento



Fonte: GUELLO, 2002.

2.4 SISTEMAS DINÂMICOS NÃO LINEARES

2.4.1 Contextualização

O desenvolvimento de procedimentos de análise não linear pelo método dos elementos finitos é baseado essencialmente no conhecimento de três diferentes áreas: mecânica do contínuo, procedimentos de análise numérica e implementação computacional. Na mecânica do contínuo, a formulação das equações de movimento, o desenvolvimento de elementos finitos e o desenvolvimento de modelos constitutivos de materiais são os principais temas relacionados à análise não linear. Dentro dos métodos numéricos, a integração numérica no espaço, a solução de sistemas de equações, o cálculo de autovalores e a integração numérica no tempo são o foco para análises não lineares. Já em relação às técnicas computacionais, para implementação de sistemas de análise não linear, faz-se necessário o estudo e o entendimento dos métodos de programação, coadaptação de *hardwares* e *softwares* disponíveis, estruturas de dados, flexibilidade de modificações de rotinas e organização eficiente dos programas implementados (EBECKEN, 1977).

A solução das respostas dinâmicas não lineares de um sistema de elementos finitos é, em essência, obtida utilizando as formulações incrementais, os procedimentos de solução iterativa e os algoritmos de integração no tempo (BATHE, 1996).

Nesta sessão, faz-se uma contextualização dos métodos de análise dinâmica no intuito de melhor compreender a lógica e as aplicações da dinâmica não linear, comentando desde as bases iniciais do problema, os métodos de análise, ou algoritmos de integração no tempo, como os procedimentos diretos e o método da superposição modal. Dentro dos métodos de integração direta citam-se os algoritmos explícitos, como o método da diferença central, e os algoritmos implícitos, como o método de *Newmark*, *Wilson*, *Park* e *Hubolt*, preferencialmente abordados com maior detalhamento neste estudo.

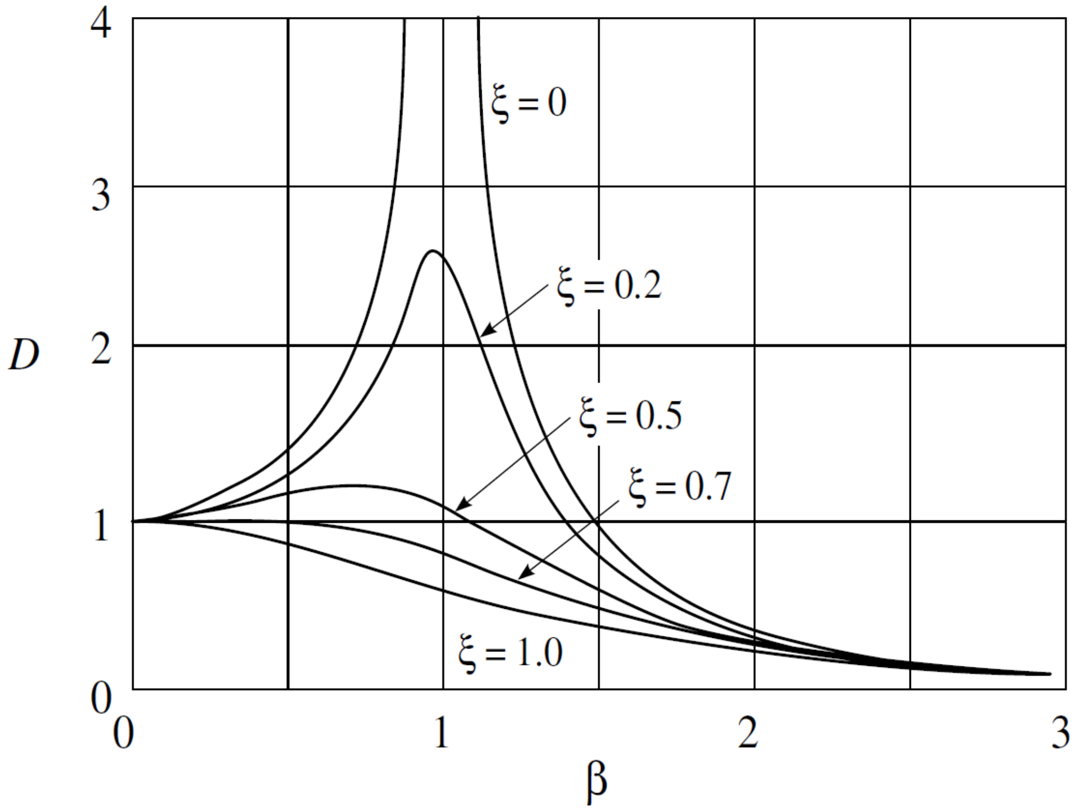
Seja a equação dinâmica estrutural no caso mais geral:

$$[M]\{\ddot{u}\}+[C]\{\dot{u}\}+[K]\{u\}=\{F\} \tag{99}$$

A equação acima pode ser integrada por dois tipos de algoritmos diferentes, os procedimentos diretos, em que se obtem a solução a cada passo de tempo, passo a passo, e o método da superposição modal, em que as coordenadas do sistema são transformadas num sistema de coordenadas nodais no intuito de reduzir os graus de liberdade analisados.

A escolha em se utilizar o método de integração direta ou o método da superposição modal, nos sistemas dinâmicos, deve ser decidida levando-se em conta somente a eficiência. Entretanto, essa escolha só pode ser feita conhecendo-se um aspecto muito importante do método da superposição modal que diz respeito à distribuição e frequência das cargas, o que pode tornar a solução de algumas estruturas pelo método da superposição modal muito mais eficiente que o método da integração direta, principalmente pelo fato de que somente os primeiros modos necessitam realmente ser considerados. A Figura 13 apresenta a variação do fator de magnificação dinâmica D em função do amortecimento ξ e da razão de frequências β.

Figura 13 – Fator de magnificação dinâmica



Fonte: CLOUGH & PENZIEN, 2003.

em que $\beta = \frac{\hat{\omega}}{\omega}$, sendo $\hat{\omega}$ a frequência de excitação da carga externa e ω a frequência natural de vibração da estrutura.

Já a resposta nos modos com grande relação entre frequências β é insignificante, ou seja, as cargas variam tão rapidamente que o sistema não se move, e a resposta estática é medida quando a relação entre frequências β está próxima de zero, ou seja, as cargas variam tão lentamente que o sistema simplesmente segue as cargas estaticamente. Dessa forma, na análise de um sistema com múltiplos graus de liberdade, a resposta nas maiores frequências do sistema, que são muito maiores que as maiores frequências das cargas, é simplesmente uma resposta estática. Assim, a essência de uma resposta dinâmica obtida através da solução pelo método da superposição modal, é que frequentemente somente uma pequena fração do número total de equações desacopladas deve ser considerada a fim de se obter uma boa solução aproximada da solução exata (BATHE, 1996).

É importante notar que o método da superposição modal, seja formulado no domínio do tempo ou no domínio da frequência, implica na avaliação de várias contribuições de respostas independentes que são combinadas para obter a resposta total.

No processo através do domínio do tempo, integral de *Duhamel*, a carga é considerada como sendo uma sucessão de pulsos de curta duração, e a resposta da vibração livre para cada pulso torna-se uma contribuição separada da resposta total em qualquer instante de tempo subsequente.

No método da superposição modal através do domínio da frequência, assume-se que a carga é periódica e, por isso, resolvida em seus componentes harmônicos discretos através da transformada de *Fourier*. Os correspondentes componentes de resposta harmônica da estrutura são então obtidos multiplicando esses componentes de carga pelo coeficiente de respostas de frequências da estrutura e, finalmente, a resposta total da estrutura é obtida pela combinação dos componentes de resposta harmônica, através da transformada inversa de *Fourier*.

Como o método da superposição modal é aplicado para se obter o resultado final em ambos os procedimentos, nenhum desses métodos é adequado para utilização na análise de respostas não lineares. Por conseguinte, deve-se tomar cuidado ao decidir aplicá-los, seja o método da superposição modal no domínio do tempo ou o mesmo no domínio da frequência, na engenharia sísmica onde é esperado que um sismo grave pudesse induzir a deformações inelásticas na estrutura cuja resposta final seria então desconhecida (CLOUGH & PENZIEN, 2003).

A escolha apropriada desses algoritmos é responsável pela eficiência da análise. Ao contrário dos programas de análise estática, que podem ser utilizados como verdadeiras caixas pretas pelo engenheiro, os de análise dinâmica podem fornecer resultados absolutamente irreais, se o usuário não tiver um profundo conhecimento dos algoritmos de integração no tempo das equações gerais da dinâmica. Além disso, a solução pode se tornar muito onerosa se estes programas forem empregados inadequadamente (MACHADO, 1983).

Visto tais motivos, esse estudo não irá se aprofundar no método da superposição modal, principalmente por esse estudo tratar, dentre outras, de uma abordagem dinâmica não linear. Maiores referências para um aprofundamento do método da superposição modal podem ser encontradas nos trabalhos de Clough e Penzien (2003), Bathe (1996) e Chopra (1995).

Assim, os procedimentos diretos, também chamados de procedimentos passo a passo, são uma abordagem também muito eficiente para análise da resposta dinâmica, preferencialmente para a análise da resposta dinâmica não linear porque evitam qualquer superposição de modos e não necessitam de nenhuma transformação de coordenadas.

Basicamente, nos procedimentos diretos para análise dinâmica não linear, os problemas partem de um deslocamento e velocidade num determinado instante de tempo escolhido, normalmente partindo do repouso $t = 0$, adota-se um intervalo de integração Δt conveniente ao problema, e obtêm-se as soluções nos tempos seguintes $t + i\Delta t$ em que i varia de acordo com o número de passos de tempo desejado. Posteriormente, será explicada a necessidade de se utilizar passos de tempo mais curtos. Além disso, por se tratar de uma análise não linear, assim como na análise estática não linear, obviamente será necessário fazer uso de algum processo iterativo, como o processo, ou técnica, iterativo de *Newton-Raphson* ou *Newton-Raphson* modificado os quais também será demonstrado mais detalhadamente posteriormente.

Esses procedimentos, em especial os de algoritmos implícitos como o método de *Newmark*, detalhados posteriormente, são adotados para aplicação nas análises numéricas deste estudo.

Há diversos métodos passo a passo, mas em todos eles os históricos do carregamento e da resposta são divididos em uma sequência de intervalos de tempo ou passos de tempo. A resposta durante cada passo, em seguida, é calculada a partir das condições iniciais de deslocamento e velocidade existentes no início do passo e partir do histórico de carregamento durante o passo. Assim, a resposta para cada passo é um problema de análise independente em que não há necessidade de combinar as contribuições das respostas dentro do passo.

O comportamento não linear pode ser facilmente considerado por esta abordagem, meramente assumindo que as propriedades estruturais permanecem constantes durante cada passo e fazendo com que elas se alterem de acordo com qualquer forma de comportamento específico do material de uma etapa para a próxima, ou seja, iterativamente. Consequentemente, a análise não linear é na verdade uma sequência de análises lineares de um sistema em transformação, ou seja, de um sistema em que alguma propriedade material está sendo alterada ao longo do tempo. Qualquer grau de refinamento desejado no comportamento não linear pode ser obtido nesse procedimento ao tornar os passos de tempo da análise suficientemente curtos. Esses procedimentos também podem ser aplicados em qualquer tipo de não linearidade, incluindo alterações de massa e propriedades de amortecimento, bem como as não linearidades mais comuns devido às mudanças de rigidez (CLOUGH & PENZIEN, 2003).

Basicamente, são dois principais grupos de métodos diretos, ou passo a passo: os algoritmos explícitos e os algoritmos implícitos. Esta diferença é que nos primeiros, as condições de equilíbrio dinâmico são realizadas no tempo t. Já nos segundos, as soluções são obtidas considerando as condições de equilíbrio dinâmico no tempo $t + i\Delta t$.

Analogamente à comparação entre o método da superposição modal e os métodos diretos, a escolha entre os métodos diretos explícitos e os métodos diretos implícitos, deve estar de acordo com o problema analisado. De qualquer forma, há uma preferência na utilização dos algoritmos implícitos pelo fato destes serem, geralmente, incondicionalmente estáveis, ou seja, a solução é estável para qualquer intervalo de integração adotado, independentemente do intervalo de tempo analisado, sem prejuízo da estabilidade.

Segundo Hughes (1976) o método da aceleração linear conserva a energia total para sistemas dinâmicos lineares não amortecidos, uma propriedade que compartilha com as equações exatas da mecânica do contínuo. Deste modo, o método é incondicionalmente estável, pois a estabilidade não depende do tamanho do passo de tempo empregado. Naturalmente, essa propriedade foi objeto de estudo de muita investigação para o regime não linear. Entretanto, várias afirmações contraditórias foram feitas em relação a sua estabilidade quando aplicado a sistemas estruturais não lineares. Existem vários critérios de estabilidade e nem sempre todos são atendidos conjuntamente. Dessa forma, o estudo foi uma tentativa de aprofundar o entendimento do comportamento do método da aceleração linear em problemas não lineares. Em particular, considerando diferentes noções de estabilidade energética para as análises não lineares.

Assim, Hughes (1976) define uma noção de estabilidade que garante que, para pequenos passos de tempo, a energia é conservada assintoticamente e, para o caso de grandes passos de tempo, não ocorre amplificação dos modos mais elevados de vibração.

Esse conceito é de extrema importância, pois a estabilidade do algoritmo implica na convergência dos resultados. Para que um algoritmo seja estável, é necessário que qualquer erro que tenha sido introduzido durante a análise não seja amplificado acima de um determinado valor limite. Esta é uma definição sumária de estabilidade, válida para qualquer algoritmo (MACHADO, 1983).

Por sua vez, os algoritmos explícitos são interessantes quando o sistema possuir muitos graus de liberdade e no caso de propagação de ondas. Nele, não há necessidade da montagem das matrizes globais da estrutura, principalmente quando é utilizada a matriz de massa concentrada, que traz grande eficiência computacional, pois o sistema terá equações desacopladas que podem ser resolvidas independentemente. Entretanto, diferentemente dos algoritmos implícitos, os explícitos não tem estabilidade garantida para qualquer intervalo de tempo definido. Para ter estabilidade, é necessário que o intervalo de integração utilizado não seja superior a um intervalo dito crítico, este função do menor período de vibração do sistema, o qual é diretamente proporcional à sua quantidade de massa. Caso contrário, o método é instável nos intervalos de tempo maiores que o intervalo crítico, acumulando erros de arredondamento e tornando a análise ineficiente por não corresponder bem a realidade. Por isso, estes são chamados de condicionalmente estáveis.

Claro que dependendo do problema em análise, da capacidade e dos custos computacionais, como no caso de muitos graus de liberdade, os algoritmos explícitos podem ser mais eficientes, pois economizam uma preciosa quantidade de memória RAM já que no método não há mais necessidade da montagem das matrizes globais da estrutura. Contudo, a limitação de se utilizar intervalos de tempo menores que o intervalo crítico é a maior desvantagem dos algoritimos explícitos. Como o período de vibração é diretamente proporcional à quantidade de massa do sistema, num sistema de elementos finitos com pouca massa ocasionarão um pequeno período de vibração. Consequentemente, o intervalo crítico será muito pequeno e os intervalos de integração deverão ser menores ainda, ocasionando um dispendioso esforço computacional desnecessário uma grande lentidão na análise a qual poderia ser feita com menor tempo através dos métodos implícitos.

Operações matriciais como inversão de matrizes, fatoração, substituição, entre inúmeras outras, estão entre os algoritimos que mais ocupam a memória computacional. Nesse sentido, os algoritmos implícitos, por utilizarem inúmeras operações, levam desvantagem em relação ao esforço computacional quando os problemas forem representados por sistemas com um grande número de graus de liberdade. Quanto mais refinada for a malha de elementos finitos, maior serão os requisitos de memória e maior será o tempo de processamento do problema. Alguns *softwares* comerciais acabam armazenando todas as variáveis e operações realizadas na simulação sem informar o usuário e sem permitir a alteração dessa configuração, aumentando, assim, infinitamente o esforço computacional e comprometendo a vida útil dos componentes da máquina.

Mesmo em *softwares* avançados que fazem uso de linguagem de programação ou apenas na lingaguem de programação propriamente dita, posteriormente compilada para análise, é preciso tal cuidado, mesmo porque algumas operações básicas, como multiplicação e inversão, já estão pré-programadas e destas, mesmo as editáveis, possuem linhas de programação pré-aplicadas em linguagens mais primordiais e complexas. Dependendo das dimensões das matrizes em operação e da máquina utilizada para fazer a simulação, o sistema poderá travar, sem concluir a operação, ou em alguns casos até mesmo levar ao superaquecimento e danificação irreversível dos componentes computacionais. Dependendo da simulação computacional em questão, é necessário um conhecimento um pouco mais aprofundado das linguagens para evitar esses problemas.

Em compensação, o progressivo avanço computacional permitiu que análises nunca feitas anteriormente, impossíveis com a tecnologia disponível na época, hoje sejam realizadas sem causar tanto desgaste computacional e com um tempo de processamento relativamente curto. Obviamente, dependendo do problema e da análise, ainda há grandes preocupações com a eficiência dos algoritmos e ainda há limitações, mas é indiscutível que o avanço tecnológico exponencial e progressivo, mesmo em poucos anos, proporcionou um colossal ganho de eficiência computacional. Atualmente, grande parte dos problemas anteriormente insolucionáveis devido às limitações tecnológicas, principalmente de *Hardware*, são debatidos em relação ao menor tempo de processamento, sendo até mesmo possível através de algumas simulações computacionais complexas, determinar a influência, por exemplo, que um acidente local num duto de gás trará na rede global com um tempo de processamento suficientemente rápido para que o próprio sistema, com as respostas obtidas da simulação, intervenha de acordo na rede evitando maiores catástrofres.

É evidente que, além dos aspectos acima discutidos, as análises no campo da dinâmica não linear só puderam ser concretizadas com o aperfeiçoamento dos computadores digitais, que se tornaram mais rápidos e com maior capacidade de armazenamento de dados. Em paralelo, houve um aprimoramento nos processos e nas técnicas de programação, que permitiram a implementação de programas eficientes (MACHADO, 1983).

Devido a essa questão da evolução computacional e, pelo que foi explicado anteriormente em relação às análises dinâmicas não lineares, este estudo teve como preferencia a utilização dos algoritmos implícitos, em especial do método de *Newmark*.

Em muitos problemas de interação de meios diferentes, pode ser mais eficiente tratar as diversas regiões do sistema com algoritmos implícitos e explícitos simultaneamente. É o caso da interação fluído-estrutura, em que o sistema rígido-flexível global é melhor e mais eficientemente analisado se cada meio for tratado com um algoritmo diferente.

No caso da estrutura, um meio rígido, a deformação será menor do que do fluido, um meio flexível. Deste modo, um algoritmo implícito utilizado em todo o sistema pode trazer benefícios na parte rígida, mas demandaria um grande esforço computacional na montagem das matrizes globais, totalmente desnecessário por considerar globalmente os efeitos inerciais da parte flexível.

Já um algoritmo explícito utilizado em todo o sistema teria um intervalo crítico muito reduzido, limitado devido à influência da região rígida, e consequentemente um intervalo de integração global ainda menor e desnecessário na região flexível, a qual poderia atingir convergência com um intervalo crítico muito maior. Ou seja, é mais eficiente tratar a estrutura com um algoritmo implícito e o fluido com um algoritmo explícito. Assim surgiram os algoritmos mistos ou implícito-explícitos. O trabalho de Machado (1983) faz análises dinâmicas não lineares de sistemas rígido-flexíveis através do método dos elementos finitos implementando algoritmos mistos na linguagem de programação Fortran-IV.

Após a revisão contextual aqui apresentada, a sessão abaixo apresenta a fundamentação teórica necessária para o entendimento e dedução da equação dinâmica não linear da ponte apresentada neste trabalho.

2.4.2 Fundamentação teórica e dedução da equação dinâmica não linear de movimento da estrutura da ponte

A fundamentação teórica necessária para obtenção da equação dinâmica não linear de movimento que rege o problema teve essencial e imprescindível influência do trabalho de dissertação de Machado (1983).

O algoritmo de *Newmark* pode ser entendido como uma extensão do método da aceleração linear. Considera-se que a aceleração varie linearmente com o tempo. Desta forma, os deslocamentos e as velocidades podem ser expressos como:

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + \left[(1-\gamma)\{\ddot{u}\}_t + \gamma\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}\right]\Delta t \tag{100}$$

$$\{u\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \{\dot{u}\}_t \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\{\ddot{u}\}_t + \beta\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \tag{101}$$

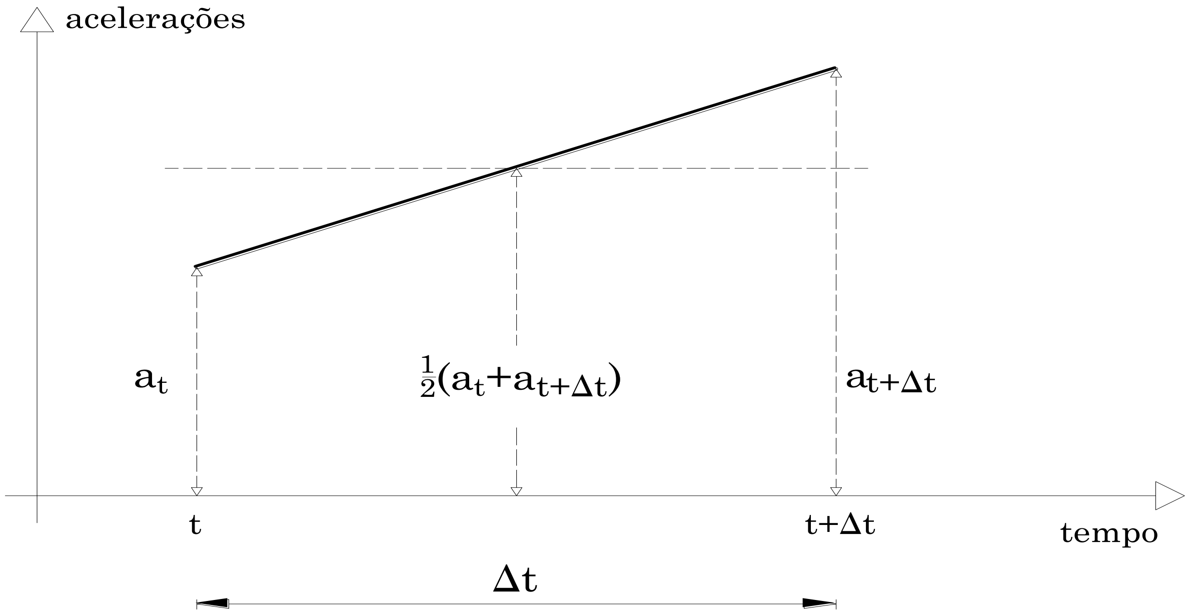
em que β e γ são parâmetros que podem ser determinados para obter precisão na integração numérica e estabilidade.

O método de *Newmark* é incondicionalmente estável quando seus parâmetros obedecem aos critérios abaixo:

$$\gamma \geq \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \beta \geq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\gamma\right)^2 \tag{102}$$

Quando $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{6}$ as equações (100) e (101) correspondem ao método da aceleração linear, também obtido adotando-se $\theta = 1$ no método de *Wilson* θ. *Newmark* inicialmente propôs como método incondicionalmente estável o método da aceleração constante média, cujos parâmetros são $\gamma = \frac{1}{2}$ e $\beta = \frac{1}{4}$, também conhecido como regra trapezoidal, conforme a Figura 14.

Figura 14 – Método da aceleração constante média de *Newmark*



Fonte: O autor.

As soluções em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações das equações (100) e (101) são obtidas ao considerar as condições de equilíbrio no tempo $t+\Delta t$. Desta forma, como explicado anteriormente, o método de *Newmark* é um método implícito de integração direta. Assim, a equação de equilíbrio dinâmico através do método de *Newmark* é dada por:

$$[M]\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} + [C]\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} + [K]\{u\}_{t+\Delta t} = \{F^{ext}\}_{t+\Delta t} \tag{103}$$

Define-se $\{\tilde{\dot{u}}\}_{t+\Delta t}$ e $\{\tilde{u}\}_{t+\Delta t}$ como os valores preditores, ou das estimativas, das velocidades e dos deslocamentos, respectivamente, no tempo t em relação ao tempo $t+\Delta t$ segundo Machado (1983) como sendo:

$$\{\tilde{\dot{u}}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + (1-\gamma)\{\ddot{u}\}_t \Delta t \tag{104}$$

$$\{\tilde{u}\}_{t+\Delta t} = \{u\}_t + \{\dot{u}\}_t \Delta t + \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{\ddot{u}\}_t \Delta t^2 \tag{105}$$

Desta forma, as equações (100) e (101) podem ser expressas em função de seus valores preditores, conforme (104) e (105), por:

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\tilde{\dot{u}}\}_{t+\Delta t} + \gamma\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} \Delta t \tag{106}$$

$$\{u\}_{t+\Delta t} = \{\tilde{u}\}_{t+\Delta t} + \beta\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} \Delta t^2 \tag{107}$$

em que, neste caso, $\{\tilde{\dot{u}}\}_{t+\Delta t}$ e $\{\tilde{u}\}_{t+\Delta t}$ são conhecidos como valores corretores das velocidades e dos deslocamentos no tempo $t+\Delta t$.

Assim, o algoritmo de *Newmark* resolve o sistema da equação (103) utilizando as equações (106) e (107) satisfazendo as condições iniciais de velocidade $\{\dot{u}(0)\}$ e deslocamento $\{u(0)\}$, respectivamente, do problema.

Isolando-se o vetor de aceleração no tempo $t+\Delta t$ da equação (107), tem-se:

$$\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2}\left(\{u\}_{t+\Delta t} - \{\tilde{u}\}_{t+\Delta t}\right) \tag{108}$$

Substituindo a equação (108) na equação (106), obtém-se:

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\tilde{\dot{u}}\}_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t}\left(\{u\}_{t+\Delta t} - \{\tilde{u}\}_{t+\Delta t}\right) \tag{109}$$

ou:

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\tilde{\dot{u}}\}_{t+\Delta t} + \gamma\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} \Delta t \tag{110}$$

Substituindo-se a equação (105) em (108) e substituindo novamente esta equação resultante e a equação (104), ambas em (109), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2}\left(\{u\}_{t+\Delta t} - \{\tilde{u}\}_{t+\Delta t}\right) \\ \{\ddot{u}\}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2}\left(\{u\}_{t+\Delta t} - \{u\}_t - \{\dot{u}\}_t \Delta t - \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{\ddot{u}\}_t \Delta t^2\right) \end{aligned} \tag{111}$$

e

$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\tilde{\dot{u}}\}_{t+\Delta t} + \gamma\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}\Delta t$$
$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + (1-\gamma)\{\ddot{u}\}_t\Delta t + \gamma\{\ddot{u}\}_{t+\Delta t}\Delta t$$
$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + (1-\gamma)\{\ddot{u}\}_t\Delta t + \gamma\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(\{u\}_{t+\Delta t} - \{u\}_t - \{\dot{u}\}_t\Delta t - \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{\ddot{u}\}_t\Delta t^2\right)\right)\Delta t$$
$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + (1-\gamma)\{\ddot{u}\}_t\Delta t + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(\{u\}_{t+\Delta t} - \{u\}_t - \{\dot{u}\}_t\Delta t - \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{\ddot{u}\}_t\Delta t^2\right) \tag{112}$$
$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}\}_t + (1-\gamma)\{\ddot{u}\}_t\Delta t + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{u\}_{t+\Delta t} - \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{u\}_t - \frac{\gamma}{\beta}\{\dot{u}\}_t - \frac{\gamma}{\beta}\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{\ddot{u}\}_t\Delta t$$
$$\{\dot{u}\}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{u\}_{t+\Delta t} - \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{u\}_t + \left(1-\frac{\gamma}{\beta}\right)\{\dot{u}\}_t + \{\ddot{u}\}_t\Delta t\left(1-\frac{\gamma}{2\beta}\right)$$

Aplicando-se as equações (111) e (112) na equação (103) e utilizando a manipulação matemática convenientemente, obtém-se:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{[M]}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma[C]}{\beta\Delta t} + [K]\right)\{u\}_{t+\Delta t} = \{F^{ext}\}_{t+\Delta t} + \frac{[M]}{\beta\Delta t^2}\left(\{u\}_t + \{\dot{u}\}_t\Delta t + \left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{\ddot{u}\}_t\Delta t^2\right)\\ &+[C]\left(\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{u\}_t + \left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\{\dot{u}\}_t + \left(\frac{\gamma}{2\beta}-1\right)\{\ddot{u}\}_t\Delta t\right)\end{aligned} \tag{113}$$

Por mais complexa que seja a equação acima, ela pode ser resolvida para cada passo de tempo caso o sistema tenha suas propriedades de massa, amortecimento e rigidez constantes, invariáveis, durante toda a análise, ou seja, se ela permanecer uma equação dinâmica linear. Caso o sistema possua alguma variação em suas propriedades, seja massa, amortecimento ou rigidez ao longo do tempo, o sistema passa a ser dinâmico não linear e somente o método de *Newmark* não é mais suficientemente capaz de obter as respostas dinâmicas da estrutura para cada passo de tempo.

Num sistema de equações estático linear, os deslocamentos da estrutura dependem linearmente do carregamento aplicado, ou seja, é válida a lei de *Hooke* para o problema, conforme equação abaixo:

$$[K]\{u\} = \{F\} \tag{114}$$

em que $[K]$ é a matriz que representa a rigidez do sistema, constante por ser linear, $\{u\}$ é o vetor que representa os deslocamentos da estrutura e $\{F\}$ representa o vetor que contêm os carregamentos estáticos externos aplicados na estrutura.

Num sistema dinâmico linear através do método de *Newmark*, considera-se a contribuição da massa e do amortecimento no problema e não somente a parcela da rigidez, como na análise estática. Entretanto, numericamente, a resposta pode ser sistematizada de forma muito similar a resposta estática linear da equação acima ao considerar uma matriz de rigidez efetiva, com contribuições das parcelas da matriz de massa e da matriz de amortecimento, e um vetor de forças efetivas, com contribuições da matriz de massa e da matriz de amortecimento ambas multiplicadas pelos vetores das respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade e aceleração relativas aos parâmetros de *Newmark*. Assim, a solução do problema é um conjunto de soluções similares a equação (114) em cada passo de tempo, obtendo, dessa forma, as respostas dinâmicas lineares de deslocamento, velocidade e aceleração no tempo $t+\Delta t$ e considerando suas contribuições no vetor de forças efetivas no próximo passo de tempo.

Assim como nas equações estáticas não lineares, para melhor entendimento da física por trás da equação matemática, as respostas dinâmicas não lineares de deslocamento passam a não mais depender linearmente do carregamento ou dos efeitos externos aplicados, conforme a equação estática não linear abaixo:

$$[K(u)]\{u\} = \{F\} \qquad (115)$$

A solução numérica da equação acima só pode ser feita de maneira incremental e iterativa, considerando o histórico do carregamento e os consequentes históricos dos deslocamentos em cada passo de carga, através de algum método numérico iterativo de solução não linear. Usualmente emprega-se o método de *Newton-Raphson* ou o método de *Newton-Raphson* modificado.

De modo similar a comparação entre a estática linear e a dinâmica linear, a dinâmica não linear é similar a estática não linear com contribuição da massa e do amortecimento, além da rigidez, em cada passo de tempo. Como explicado anteriormente, as resposta dinâmicas não lineares não mais dependerão linearmente dos carregamentos ou efeitos externos e, além disso, podem considerar a variação de todas as outras propriedades devido à variação de apenas uma ou mais não linearidades físicas. Dessa forma, as soluções de equações dinâmicas não lineares podem ser totalmente imprevisíveis, sendo primordial, para confirmação das análises numéricas realizadas, a dificultosa convergência das mesmas perante critérios energéticos.

Considerando uma variação na rigidez na equação dinâmica não linear, tem-se uma rigidez que depende dos deslocamentos e do tempo, conforme equação abaixo:

$$[K(u,t)] \tag{116}$$

ou uma rigidez que depende dos deslocamentos, em cada passo de tempo:

$$[K(u)]_{t+\Delta t} \tag{117}$$

dependendo da análise.

Normalmente, na formulação das equações dinâmicas não lineares, empregam-se coordenadas lagrangeanas. Nesses casos o vetor de forças pode ser dividido em:

$$\{F\} = \{F^{ext}\} - \{F^{\text{int}}\} \tag{118}$$

em que $\{F^{ext}\}$ representa o vetor de forças externas atuantes no sistema e $\{F^{\text{int}}\}$ representa o vetor de forças internas, que dependem das respostas dinâmicas, ou seja, do histórico no tempo, de deslocamentos e das velocidades.

As não linearidades a serem consideradas podem ser originadas por grandes deslocamentos da estrutura, a uma plastificação parcial ou total da mesma, ou devido a outras variações. Analiticamente, estes efeitos podem ser representados por complexas equações algébricas, equações diferenciais, equações integrais ou, em algumas vezes, são necessárias inequações como no caso da teoria da plasticidade ou na teoria do dano (MACHADO, 1983). Assim, o vetor de forças internas pode ser escrito da seguinte forma:

$$\{F^{\text{int}}\} = [N(d,v)] \tag{119}$$

em que $[N]$ é uma função não linear dos deslocamentos e das velocidades.

As derivadas parciais de $[N]$ em relação a $\{d\}$ e a $\{v\}$

$$[K]_T = \frac{\partial[N]}{\partial\{d\}} \tag{120}$$

e

$$[C]_T = \frac{\partial[N]}{\partial\{v\}} \tag{121}$$

são conhecidas, respectivamente, como matriz de rigidez tangente e matriz de amortecimento tangente.

Caso a matriz de amortecimento seja obtida a partir da matriz de massa, o vetor de forças internas passa a ser uma função não linear apenas dos deslocamentos, sendo reduzida a:

$$\{F^{\text{int}}\} = [N(d)] \tag{122}$$

Se for considerado que o vetor de forças internas da análise dinâmica não linear como:

$$[K(u)]_{t+\Delta t}\{u\}_{t+\Delta t} = \{F^{\text{int}}\}_{t+\Delta t} \tag{123}$$

a equação (113) passa a ser:

$$\begin{aligned}&\left(\frac{[M]}{\beta\Delta t^2}+\frac{\gamma[C]}{\beta\Delta t}\right)\{u\}_{t+\Delta t}+\{F^{\text{int}}\}_{t+\Delta t}=\{F^{ext}\}_{t+\Delta t}+\frac{[M]}{\beta\Delta t^2}\left(\{u\}_t+\{\dot{u}\}_t\Delta t+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)\{\ddot{u}\}_t\Delta t^2\right)\\&+[C]\left(\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{u\}_t+\left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\{\dot{u}\}_t+\left(\frac{\gamma}{2\beta}-1\right)\{\ddot{u}\}_t\Delta t\right)\end{aligned} \tag{124}$$

A equação acima representa um sistema de equações dinâmicas não linares que permite a determinação das respostas dinâmicas de deslocamento no tempo $t+\Delta t$. Como o sistema agora é dinâmico e não linear, é necessário utilizar o método de *Newmark*, no caso adotado, em conjunto com um método iterativo de solução não linear, como *Newton-Raphson* ou *Newton-Raphson* modificado. Devem-se considerar os efeitos das não linearidades físicas desejadas nas propriedades do material, sejam na massa, amortecimento ou rigidez, a cada iteração dentro de cada passo de tempo. Como a não linearidade prevista nas equações (120) e (121) torna a rigidez uma função dos deslocamentos da estrutura a cada instante de tempo, além de ser função das propriedades físicas e geométricas, deve-se considerar os deslocamentos da mesma em cada instante de tempo.

Entretanto, uma alteração na rigidez terá consequência na matriz de amortecimento que por sua vez é função da matriz de massa e de rigidez da estrutura. Assim, dentro de cada passo de tempo, há um processo iterativo, como o de *Newton-Raphson*, buscando a convergência do sistema não linear. Nesse sentido, muitos trabalhos citam a união do método de *Newmark* com o processo iterativo de *Newton-Raphson* como sendo um problema estático efetivo, o que deve ser visto com cautela pelo fato da equação dentro de cada passo de tempo depender também das contribuições da massa e do amortecimento. Neste processo, a atualização da matriz de rigidez gera uma atualização da matriz de amortecimento que, por sua vez, geram novos deslocamentos. Isso ocorre iterativamente até a obtenção da convergência.

Como a resposta da equação acima é feita em termos de deslocamentos, ao atingí-la é necessário atualizar as respostas dinâmicas de velocidade e aceleração, que são posteriormente definidas através das equações (108) e (109), respectivamente. Atualizando as respostas dinâmicas e as matrizes estruturais do problema, se da um novo passo de tempo, considerando as respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade e aceleração do passo de tempo anterior e analisando o problema no novo passo de tempo o qual pode ter uma mudança de carregamento ou ações atuantes na estrutura, e todo o processo se reinicia até o tempo final, ou número de passos de tempo, da análise desejada.

2.4.3 Métodos de solução de equações não lineares

Segundo Bathe (1996), o problema básico na solução de problemas não lineares é encontrar o estado de equilíbrio de um corpo perante certa solicitação aplicada. Sejam os carregamentos externos dependentes do tempo, o equilíbrio de um corpo pode ser expresso por:

$$\{R\}_t - \{F\}_t = \{0\} \tag{125}$$

em que o vetor $\{R\}_t$ contém as forças externas nodais aplicadas na configuração no tempo t e o vetor $\{F\}_t$ contém as forças internas nodais determinadas em função das tensões do elemento nessa configuração. Ambos os vetores são determinados usando, por exemplo, o princípio dos trabalhos virtuais. Nota-se que em qualquer ponto, a somatória de forças internas nodais contidas no vetor $\{F\}_t$ que estão em equilíbrio com as forças externas nodais aplicadas representadas pelo vetor $\{R\}_t$ deve incluir todos os efeitos devido às forças de corpo, forças de superfície, forças concentradas, forças inerciais, forças devido o amortecimento, reações, tensões iniciais e etc. Deste modo, tem-se:

$$\{R\}_t = \{R_B\}_t + \{R_S\}_t + \{R_C\}_t \tag{126}$$

em que $\{R_B\}_t$, $\{R_S\}_t$ e $\{R_C\}_t$ representam os vetores de forças externas de corpo, de superfície e concentradas, respectivamente. Ao mesmo tempo, o vetor de forças internas nodais pode ser escrito como:

$$\{F\}_t = \{F_I\}_t + \{F_D\}_t + \{F_E\}_t \tag{127}$$

em que $\{F_I\}_t$, $\{F_D\}_t$ e $\{F_E\}_t$ representam, respectivamente, os vetores de forças internas inerciais, de amortecimento e elásticas.

O sistema da equação (125) deve expressar o equilíbrio do sistema na configuração deformada levando em conta todas as não linearidades. Visto isso, a solução da resposta não linear é satisfeita através do histórico completo do carregamento aplicado em um determinado instante inicial até determinado instante de tempo t desejado. Na análise estática, por sua vez, em que não há consideração dos efeitos temporais e inerciais, o tempo é uma variável conveniente apenas para denotar variação da intensidade do carregamento aplicado e a correspondente configuração variada, o que é conhecido como passo de carga. Entretanto, na análise dinâmica e na análise estática com efeito material do tempo, o tempo é uma variável real que deve ser devidamente incluída na modelagem do problema físico real. Baseado nessas considerações nota-se que o uso da variável tempo para descrever a aplicação da carga e o histórico da solução representa uma boa aproximação e corresponde a afirmação de que a análise dinâmica é basicamente uma análise estática incluindo os efeitos inerciais (BATHE, 1996).

Numa análise estática em que o tempo e os efeitos inerciais não são analisados, além dos passos de carga podem ser dados passos de deslocamento se ao invés do incremento de carga for dado um incremento de deslocamento. Dependendo da análise, o incremento pode ser feito em diversas outras grandezas. Assim, comumente a literatura refere-se às variações de alguma grandeza para uma nova análise do problema, seja para refinamento da análise de modo a melhor representar algum efeito ou apenas por conveniência computacional, somente como passo ou incremento. Por conseguinte, deve-se observar a diferença entre o passo de carga e o passo de tempo. Numa análise dinâmica, muitas vezes é necessário realizar um passo ou incremento de carga dentro de um passo ou incremento de tempo ao mesmo tempo em que certos momentos desejam-se manter a intensidade da carga e realizar somente um passo de tempo, como é o caso da análise do efeito temporal nas diversas grandezas dinâmicas, ou até mesmo retirar completamente o carregamento no passo de carga e realizar um passo de tempo, como é o caso da vibração livre amortecida e da vibração livre não amortecida.

Na maioria dos casos a solução é obtida apenas em termos de tensões e deslocamentos alcançados para níveis específicos de carregamento ou níveis específicos de tempo, necessitando somente os níveis de carga para obter a configuração de equilíbrio sem a necessidade de também buscar a solução para demais condições de equilíbrio. No entanto, quando a análise inclui não linearidades físicas ou geométricas, como o processo de danificação do material, ou até mesmo fenômenos dependentes do tempo, as condições de equilíbrio devem ser resolvidas para o completo intervalo de tempo de interesse. A resposta é obtida usando uma solução passo a passo e incremental que pode ser reduzida a uma análise de um só passo se numa solução estática independentemente do tempo o carregamento for aplicado de uma só vez e apenas a configuração correspondente a esse carregamento for necessária.

Porém, mesmo nesses casos é necessária uma solução incremental, mesmo que realizada automaticamente, com um número de passos de carga até alcançar a carga total obtida para minimizar os gastos computacionais (BATHE, 1996). No caso das análises estáticas não lineares através da mecânica do dano em que o tempo e os efeitos inerciais não são considerados, mas há influência da condição de danificação propriamente dita, a solução deve ser feita em pequenos passos de carga com iterações tantas quanto necessárias para se atingir a convergência de modo a obter uma boa aproximação da evolução do dano.

Basicamente, a solução passo a passo e incremental admite que seja conhecida a solução para o tempo t e que seja dado um incremento Δt convenientemente escolhido para a obtenção da solução $t+\Delta t$ desconhecida. Consequentemente, ao considerar a equação (125) no tempo $t+\Delta t$ se obtém:

$$\{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t} = \{0\} \tag{128}$$

Admite-se que os carregamentos externos $\{R\}_{t+\Delta t}$ são independentes das deformações, ou seja, um sistema desacoplado em que as forças externas não são afetadas pelas deformações resultantes dos esforços internos. Como a solução do problema no instante t é conhecida, tem-se:

$$\{F\}_{t+\Delta t} = \{F\}_t + \{\Delta F\} \tag{129}$$

em que $\{\Delta F\}$ é vetor de incremento de forças internas nodais correspondente ao incremento de tensões e deslocamentos do elemento no tempo t ao tempo $t+\Delta t$, o qual pode ser aproximado usando a matriz de rigidez tangente $[K]_t$ que corresponde as condições geométricas e materiais no tempo t, como sendo:

$$\{\Delta F\}=[K]_t\{\Delta u\} \tag{130}$$

em que $\{\Delta u\}$ é o vetor de incremento de deslocamentos nodais. A matriz de rigidez tangente corresponde à derivada do vetor de forças internas nodais $\{F\}_t$ em relação ao vetor de deslocamentos nodais $\{u\}_t$, como sendo:

$$[K]_t=\frac{\partial\{F\}_t}{\partial\{u\}_t} \tag{131}$$

Substituindo-se a equação (130) em (129) e posteriormente em (128), obtém-se:

$$[K]_t\{\Delta u\}=\{R\}_{t+\Delta t}-\{F\}_t \tag{132}$$

Resolvendo para $\{\Delta u\}$, a aproximação dos deslocamentos no tempo $t+\Delta t$ é dada por:

$$\{u\}_{t+\Delta t}=\{u\}_t+\{\Delta u\} \tag{133}$$

que são uma aproximação dos deslocamentos correspondentes ao carregamento aplicado no instante de tempo $t+\Delta t$.

Obtidas as respostas de deslocamento no tempo $t+\Delta t$, calculam-se as tensões e as correspondentes forças internas nodais no tempo $t+\Delta t$ e prosseguir com o próximo passo ou incremento de tempo e os consequentes processos iterativos. No entanto, devido à aproximação feita em (130), a solução pode conter erros significativos caso dependendo do passo de tempo ou carga adotado, tornando a solução instável. Por isso, é necessário realizar o processo iterativo até que a solução da equação (125) tenha convergência com precisão suficientemente desejada (BATHE, 1996).

Os métodos iterativos mais utilizados numa análise por elementos finitos são baseadas na técnica de *Newton-Raphson*. As equações (125) a (133) são utilizadas no procedimento iterativo do método de *Newton-Raphson* para solução das equações não lineares através do método dos elementos finitos e também são conhecidas como técnica incremental ou método de *Newton*.

2.4.3.1 Método de *Newton-Raphson*

O método de *Newton-Raphson* é uma extensão da técnica incremental apresentada nas equações (125) a (133), com a diferença de que tendo calculado um incremento nodal de deslocamentos, o qual define um novo vetor de deslocamento total, repete-se a solução incremental descrita acima utilizando o agora conhecido vetor de deslocamento total ao invés do vetor de deslocamentos no tempo t até atingir-se a convergência necessária.

As equações utilizadas no processo iterativo do método de *Newton-Raphson*, para $i = 1,2,3,\ldots,n$ são:

$$\{\Delta R\}^{(i-1)} = \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \tag{134}$$

$$[K]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\{\Delta u\}^{(i)} = \{\Delta R\}^{(i-1)} \tag{135}$$

$$\{u\}_{t+\Delta t}^{(i)} = \{u\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \{\Delta u\}^{(i)} \tag{136}$$

com

$$\{u\}_{t+\Delta t}^{(0)} = \{u\}_{t} \tag{137}$$

$$\{F\}_{t+\Delta t}^{(0)} = \{F\}_{t} \tag{138}$$

em que essas equações são obtidas da linearização da resposta do sistema de elementos finitos sobre as condições no tempo $\mathrm{t} + \Delta \mathrm{t}$ na iteração $(i-1)$. Em cada iteração, calcula-se um vetor de carregamento desbalanceado na equação (134) que produz um vetor de incremento de deslocamentos na equação (135) e continua-se o processo iterativo até que o vetor de carregamento desbalanceado $\{\Delta R\}^{(i-1)}$ ou o vetor de incremento de deslocamentos $\{\Delta u\}^{(i)}$ sejam suficientemente pequenos (BATHE, 1996).

Dada a importância do assunto no trabalho em questão, o problema será tratado de uma maneira mais formal, segundo a teoria descrita no trabalho de Bathe (1996).

A condição de equilíbrio do elemento finito consiste em encontrar a solução das equações (BATHE, 1996):

$$\{f(\{u*\})\} = \{0\} \tag{139}$$

em que

$$\{f(\{u^*\})\} = \{R(\{u^*\})\}_{t+\Delta t} - \{F(\{u^*\})\}_{t+\Delta t} \tag{140}$$

Nota-se que o vetor de solução $\{u^*\}$ pode conter demais variáveis além das de deslocamento como, por exemplo, variáveis de pressão ou rotações.

Assumindo que na solução iterativa determina-se $\{u\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}$, a expansão da série de Taylor fornece:

$$\{f(\{u^*\})\} = \left\{f\left(\{u\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}\right)\right\} + \left[\frac{\partial\{f\}}{\partial\{u\}}\right]\Bigg|_{\{u\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}} \left(\{u^*\} - \{u\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}\right) + termos\, de\, maior\, ordem \tag{141}$$

Substituindo a equação (140) em (141) utilizando a equação (139) e admitindo que o carregamento externo aplicado independa das deformações, tem-se:

$$\left[\frac{\partial\{F\}}{\partial\{u\}}\right]\Bigg|_{\{u\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}} \left(\{u^*\} - \{u\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}\right) + termos\, de\, maior\, ordem = \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \tag{142}$$

Negligenciando os termos de maior ordem na equação (142), obtém-se o incremento de deslocamentos como sendo:

$$[K]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\{\Delta u\}^{(i)} = \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \tag{143}$$

em que a matriz de rigidez tangente $[K]_{t+\Delta t}^{(i-1)}$ é definida por:

$$[K]_{t+\Delta t}^{(i-1)} = \left[\frac{\partial\{F\}}{\partial\{u\}}\right]\Bigg|_{\{u\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}} \tag{144}$$

Assim, o vetor de solução de deslocamento melhorado é definido por:

$$\{u\}_{t+\Delta t}^{(i)} = \{u\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \{\Delta u\}^{(i)} \tag{145}$$

A solução pelo método de *Newton-Raphson* da equação (128) é constituída das relações (143) a (145). Como a análise é feita de forma incremental e iterativa com passos de carga ou passos de tempo Δt, como explicado anteriormente, as condições iniciais das iterações são:

$$[K]_{t+\Delta t}^{(0)} = [K]_t \tag{146}$$

$$\{F\}_{t+\Delta t}^{(0)} = \{F\}_t \tag{147}$$

$$\{u\}_{t+\Delta t}^{(0)} = \{u\}_t \tag{148}$$

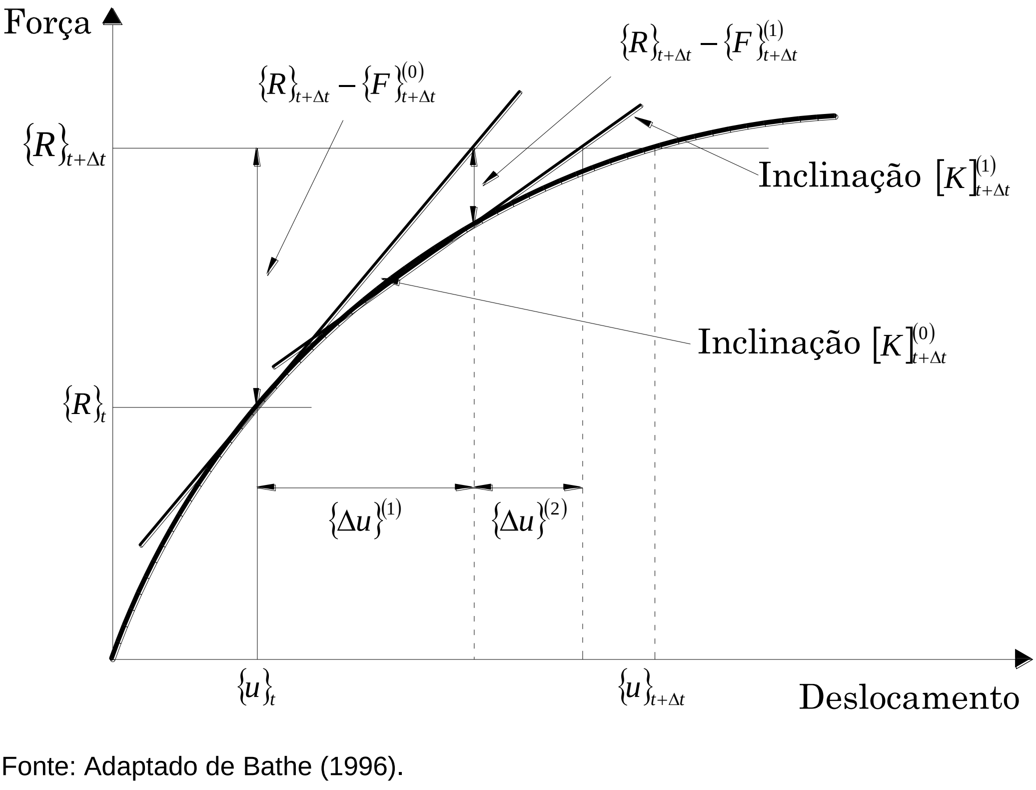
O processo iterativo é realizado ciclicamente até serem satisfeitas as condições do critério de convergência abordado na sessão 2.4.3.3.

Nesse procedimento, a matriz de rigidez tangente é recalculada em cada iteração, mudando a inclinação do diagrama de força e deslocamento a cada iteração. Por esse motivo, o método também é conhecido como *Full Newton-Raphson Method*, ou Método de *Newton-Raphson* cheio ou completo.

Há algumas desvantagens do método de *Newton-Raphson* Completo em relação ao esforço computacional. Dependendo da análise, o fato do método recalcular a matriz de rigidez tangente $[K]_{t+\Delta t}^{(i-1)}$ a cada iteração traz um esforço computacional grande que muitas vezes pode ser desnecessário. Além disso, caso a solução para a equação (143) seja direta, há necessidade de fatorar a matriz de rigidez em cada iteração. Há ainda, o problema relativo ao caso da matriz de rigidez tangente poder ser assimétrica por integrar parâmetros de grandes deslocamentos e rotações, bem como plasticidade não associada, mesmo sendo simétrica em um estado de solução, sendo necessária, em geral, uma solução assimétrica (ZIENKIEWICZ & TAYLOR, 2000).

A Figura 15 procura ilustrar a relação entre força e deslocamento com o método de *Newton-Raphson* completo.

Figura 15 – Relação entre força e deslocamento do método de *Newton-Raphson* completo



Fonte: Adaptado de Bathe (1996).

Nota-se a mudança de inclinação nas iterações pelo fato da matriz de rigidez, que é a própria inclinação da reta em cada passo, ser atualizada dentro de cada iteração. Além disso, é possível observar que a convergência foi obtida com apenas duas iterações dentro do passo de tempo da Figura 15. Isso ocorre por que apesar de exigir um maior esforço computacional para atualização da matriz de rigidez, a atualização faz com que a convergência seja atingida com poucas iterações. No caso da curva do diagrama força-deslocamento ter convexidade para baixo, como, por exemplo, perante um esforço negativo de compressão, o método funciona de forma similar.

2.4.3.2 Método de *Newton-Raphson* modificado

Considerando o processo iterativo do método de *Newton-Raphson*, é reconhecido que, em geral, o maior custo computacional por iteração reside no cálculo e fatorização da matriz de rigidez tangente. Uma vez que esses cálculos podem ser bastante dispendiosos, a utilização de uma modificação do algoritmo de *Newton-Raphson* completo pode ser eficiente (BATHE, 1996).

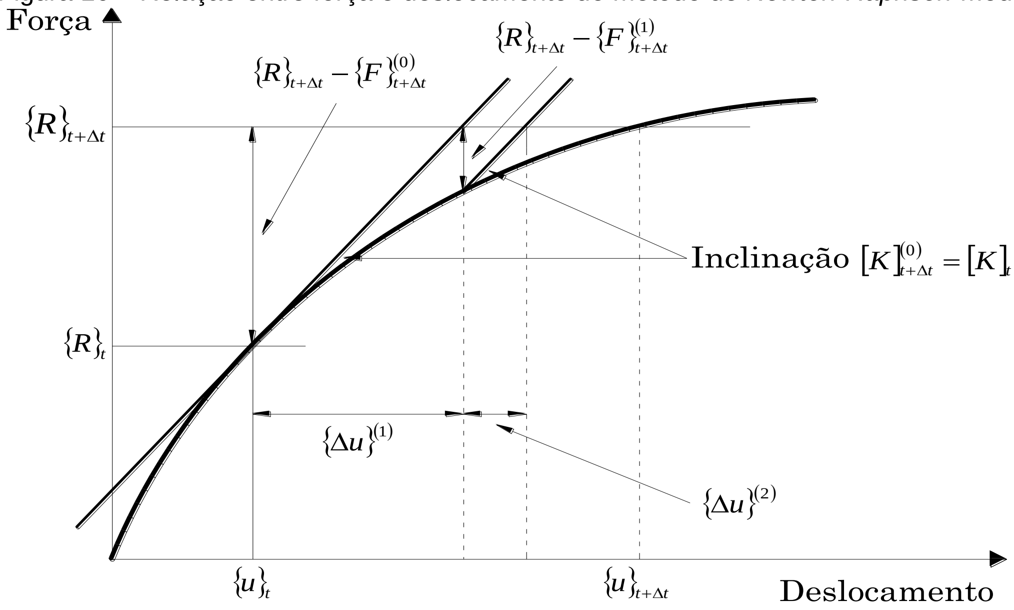
Tal modificação consiste em utilizar a matriz de rigidez inicial $\left[K\right]_{\tau}$ na equação (143). Desta forma, tem-se:

$$\left[K\right]_{\tau}\left\{\Delta u\right\}^{(i)} = \left\{R\right\}_{t+\Delta t} - \left\{F\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \tag{149}$$

com as mesmas condições iniciais das equações (147) e (148), e τ correspondente a uma das configurações de equilíbrio admitidas nos tempos $0, \Delta t, 2\Delta t, \ldots$, ou t. O método iterativo de *Newton-Raphson* modificado envolve menos reformulações de rigidez do que o método iterativo completo de *Newton-Raphson* e baseia a atualização da matriz de rigidez em uma condição de equilíbrio admitida. A escolha dos passos de tempo em que a matriz de rigidez deve ser atualizada depende do grau de não linearidade da resposta do sistema, isto é, quanto mais não linear for a resposta, mais frequentemente a atualização deve ser realizada.

A Figura 15 procura ilustrar a relação entre força e deslocamento com o método de *Newton-Raphson* completo.

Figura 16 – Relação entre força e deslocamento do método de *Newton-Raphson* modificado



Fonte: O autor.

A inclinação continua a mesma em todas as iterações dentro de cada passo de tempo. Isso ocorre por que a matriz de rigidez é atualizada apenas nas condições de equilíbrio admitidas que, normalmente, é feita apenas a cada passo de tempo e não mais a cada iteração. Também é possível observar uma menor aproximação da resposta com duas iterações se comparada ao método de *Newton-Raphson* completo apresentado na Figura 15. Deste modo, o método de *Newton-Raphson* modificado precisa de uma maior quantidade de iterações para atingir a convergência. No entanto, o fato desse método ter menos operações de fatorização e inversão da matriz de rigidez o torna computacionalmente mais rápido e eficiente, tendo um menor esforço computacional, mesmo tendo um maior número de iterações. Assim como no método completo, caso a curva do diagrama força-deslocamento tenha convexidade para baixo, como, por exemplo, perante um esforço negativo de compressão, o método funciona de forma similar.

2.4.3.3 Critérios de convergência

De modo a obter respostas significativas com qualidade suficiente para representar a realidade, há a necessidade de se utilizar um critério de convergência dos resultados obtidos para finalizar o processo iterativo na análise que seja suficientemente adequado para garantir a precisão da solução e evitar o esforço computacional desnecessário. Tal critério é conhecido como critério de convergência ou critério de parada.

Assim, para que a solução incremental baseada num processo numérico iterativo seja efetiva, um critério realístico deve ser utilizado para determinar o final do processo iterativo. No final de cada iteração, a solução obtida deve ser verificada para ver se ocorre convergência ou divergência em relação à tolerância admissível. Se as tolerâncias de convergência são muito grandes, resultados imprecisos podem ser obtidos e caso as tolerâncias sejam muito pequenas, muito esforço computacional é gasto para obter-se uma precisão desnecessária. Similarmente, uma verificação da divergência ineficaz pode terminar a iteração mesmo quando a solução não for realmente divergente ou até mesmo forçar a iteração para procurar uma solução inatingível (BATHE, 1996).

Como se busca a solução em termos de deslocamento no tempo $t+\Delta t$ faz sentido como critério de convergência que os deslocamentos no final de cada iteração sejam uma parcela, ou tolerância, da solução de deslocamentos reais:

$$\frac{\left\|\{\Delta u\}^{(i)}\right\|_2}{\left\|\{u\}_{t+\Delta t}\right\|_2} \leq tol_u \tag{150}$$

$$\left\|\{\Delta u\}^{(i)}\right\|_2 = \sum_{k=1}^{ntgl}\left(\Delta u_k{}^{(i)}\right)^2 \tag{151}$$

$$\left\|\{u\}_{t+\Delta t}\right\|_2 = \sum_{k=1}^{ntgl}\left(u_{k\,t+\Delta t}\right)^2 \tag{152}$$

em que tol_u é a tolerância de convergência de deslocamentos, $ntgl$ é o número total de graus de liberdade do sistema, a parcela $\left\|\{\Delta u\}^{(i)}\right\|_2$ é a norma euclidiana do vetor $\{\Delta u\}^{(i)}$ e a parcela $\left\|\{u\}_{t+\Delta t}\right\|_2$ é a norma euclidiana do vetor $\{u\}_{t+\Delta t}$. Esse vetor real de deslocamentos $\{u\}_{t+\Delta t}$ é desconhecido e deve ser aproximado. Frequentemente, o último valor calculado do vetor de deslocamentos $\{u\}_{t+\Delta t}^{(i)}$ é utilizado como uma aproximação do vetor $\{u\}_{t+\Delta t}$ em conjunto com um valor suficientemente pequeno para a tolerância tol_u Nesse caso, tem-se:

$$\frac{\left\|\{\Delta u\}^{(i)}\right\|_2}{\left\|\{u\}_{t+\Delta t}^{(i)}\right\|_2} \leq tol_u \tag{153}$$

Entretanto, em algumas análises a solução real pode divergir do valor obtido quando utilizada a equação (153) pelo fato de que os deslocamentos calculados mudarem muito pouco em cada iteração, mas continuarem mudando ao longo das seguintes iterações, como ocorre, por exemplo, na análise elastoplástica em determinadas condições de carregamento quando é utilizado o método de *Newton-Raphson* modificado ou quando as estruturas tem um ganho de rigidez conforme se aumentam os deslocamentos. Desta forma, adota-se um segundo critério de convergência que mensure a norma euclidiana do vetor de carregamento desbalanceado como uma parcela, ou tolerância, da norma euclidiana do vetor de incremento de carga original, de modo a expandir os critérios de convergência para os casos gerais:

$$\left\| \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t}^{(i)} \right\|_2 \leq tol_F \left\| \{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_t \right\|_2 \tag{154}$$

em que tol_F é a tolerância de convergência em termos de força. No entanto, esse critério tem a dificuldade de não conter deslocamentos em sua formulação podendo resultar no término da iteração quando há pequenas variações no vetor de carregamento desbalanceado enquanto não há variações suficientemente pequenas nos deslocamentos. É o caso, por exemplo, de estruturas com pequeno módulo de encruamento entrando em regime de plastificação. Nesses casos, ambos os critérios de convergência, ou critérios de parada, devem ser utilizados.

Um terceiro critério de convergência pode ser utilizado de modo a incluir tanto os termos de força como os de deslocamento perante os valores de equilíbrio tolerados, comparando o incremento de energia interna durante cada iteração, que é a quantidade de trabalho realizada pelo vetor de carregamento desbalanceado nos incrementos de deslocamento, com o incremento de energia interna inicial. A convergência energética é atingida quando:

$$\{\Delta u\}^{(i)T} \left(\{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \right) \leq tol_E \left(\{\Delta u\}^{(1)T} \left(\{R\}_{t+\Delta t} - \{F\}_t \right) \right) \tag{155}$$

em que tol_E é a tolerância de convergência energética.

Como esse critério contém termos tanto de força como de deslocamento, é uma medida atrativa na prática. Um ponto importante é que as tolerâncias de convergência tol_u, tol_F e tol_E podem precisar ser muito pequenas em algumas soluções de modo a atingir uma solução com boa precisão. Em geral, a utilização do método de *Newton-Raphson* completo na solução incremental leva a uma maior precisão na solução do que o método de *Newton-Raphson* modificado uma vez que, se houver convergência, o erro na solução diminui muito rapidamente nas últimas iterações do método de *Newton-Raphson* completo (BATHE, 1996).

2.4.4 Método otimizado de solução de equações dinâmicas não lineares iterativas

Um problema corriqueiro de análises dinâmicas não lineares é a questão da eficiência computacional. Por fazer uma união de um método iterativo, no caso o método *Newton-Raphson*, com um operador de integração implícita no tempo, no caso o método de *Newmark*, trabalhando com uma formulação iterativa-incremental para as equações de movimento, a exigência computacional é muito maior do que se comparada às análises estáticas não lineares ou às análises dinâmicas lineares. Deste modo, é viável implementar uma rotina computacional otimizada no intuito de diminuir o desgaste computacional e atingir maior eficiência em relação ao tempo de processamento da unidade de processamento central CPU e requisitos de memória RAM.

Uma forma interessante de se tratar o problema dinâmico não linear iterativamente segundo o trabalho de Jacob e Ebecken (1994), adaptado e descrito nesta sessão, é considerar o incremento de deslocamento diretamente na equação de movimento:

$$\left[M_B\right]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left\{\ddot{u}_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i)} + \left[C_B\right]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left\{\dot{u}_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i)} + \left[K_B\right]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left\{\Delta\Delta u\right\}^{(i)} = \left\{F_B^{ext}\right\}_{t+\Delta t} - \left\{F_B^{\text{int}}\left(\left\{u_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}\right)\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \quad (156)$$

$$\left\{\Delta u\right\}^{(i)} = \left\{\Delta u\right\}^{(i-1)} + \left\{\Delta\Delta u\right\}^{(i)} \quad (157)$$

$$\left\{u_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i)} = \left\{u_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \left\{\Delta\Delta u\right\}^{(i)} \quad (158)$$

Os vetores $\left\{\ddot{u}_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i)}$, $\left\{\dot{u}_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i)}$ e $\left\{u_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i)}$ contêm valores desconhecidos de acelerações, velocidades e deslocamentos. $\left\{\Delta u\right\}^{(i)}$ é o vetor incremental de deslocamentos e o vetor $\left\{\Delta\Delta u\right\}^{(i)}$ é o vetor de variação incremental de deslocamentos obtido a cada iteração. $\left\{F_B^{ext}\right\}_{t+\Delta t}$ é o vetor de carregamentos externos atuantes na ponte e $\left\{F_B^{\text{int}}\left(\left\{u_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}\right)\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}$ é o vetor de forças internas que depende dos deslocamentos da ponte.

Substituindo a equação (105) na equação (107), tem-se:

$$\{u_B\}_{t+\Delta t} = \{u_B\}_t + \{\dot{u}_B\}_t \Delta t + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\{\ddot{u}_B\}_t \Delta t^2 + \beta\{\ddot{u}_B\}_{t+\Delta t} \Delta t^2 \tag{159}$$

Substituindo a equação (104) em (106), tem-se:

$$\{\dot{u}_B\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}_B\}_t + (1-\gamma)\{\ddot{u}_B\}_t \Delta t + \gamma\{\ddot{u}_B\}_{t+\Delta t} \Delta t \tag{160}$$

O vetor incremental de deslocamentos também pode ser expresso como sendo:

$$\{\Delta u\}^{(i)} = \{u_B\}_{t+\Delta t} - \{u_B\}_t \tag{161}$$

As equações (159) e (160) podem ser reorganizadas para se obter a seguinte forma incremental-iterativa em termos de acelerações e velocidades:

$$\{\ddot{u}_B\}^{(i)}_{t+\Delta t} = -\frac{1}{\beta \Delta t}\{\dot{u}_B\}_t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\{\ddot{u}_B\}_t + \frac{1}{\beta \Delta t^2}\{\Delta u\}^{(i)} \tag{162}$$

$$\{\dot{u}_B\}^{(i)}_{t+\Delta t} = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\{\dot{u}_B\}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\{\ddot{u}_B\}_t + \frac{\gamma}{\beta \Delta t}\{\Delta u\}^{(i)} \tag{163}$$

Nota-se que os dois primeiros termos do lado direito das equações (162) e (163) não são desconhecidos, pois dependem somente dos valores já obtidos no passo anterior. Esses termos, portanto, definem aproximações iniciais para as acelerações e velocidades. São também definidos como valores preditores, ou das estimativas, das acelerações e das velocidades, $\{\ddot{u}^*_B\}$ e $\{\dot{u}^*_B\}$, respectivamente:

$$\{\ddot{u}^*_B\} = -\frac{1}{\beta \Delta t}\{\dot{u}_B\}_t - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\{\ddot{u}_B\}_t \tag{164}$$

e

$$\{\dot{u}^*_B\} = \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\{\dot{u}_B\}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t\{\ddot{u}_B\}_t \tag{165}$$

Assim, as equações (162) e (163) podem ser reescritas como:

$$\{\ddot{u}_B\}^{(i)}_{t+\Delta t} = \{\ddot{u}^*_B\} + \frac{1}{\beta \Delta t^2}\{\Delta u\}^{(i)} \tag{166}$$

$$\{\dot{u}_B\}^{(i)}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}^*_B\} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t}\{\Delta u\}^{(i)} \tag{167}$$

ou considerando a equação (157):

$$\left\{\ddot{u}_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i)} = \left\{\ddot{u}_B^*\right\} + \frac{1}{\beta \Delta t^2}\left(\left\{\Delta u\right\}^{(i-1)} + \left\{\Delta\Delta u\right\}^{(i)}\right) \tag{168}$$

$$\left\{\dot{u}_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i)} = \left\{\dot{u}_B^*\right\} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t}\left(\left\{\Delta u\right\}^{(i-1)} + \left\{\Delta\Delta u\right\}^{(i)}\right) \tag{169}$$

A equação de movimento (156) pode ser reescrita em função da equação (75) do amortecimento, obtendo-se:

$$\left[M_B\right]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\left(\left\{\ddot{u}_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i)} + \alpha_B\left\{\dot{u}_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i)}\right) + \left[K_B\right]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\left(\beta_B + \left\{\Delta\Delta u\right\}^{(i)}\right) = \left\{F_B^{ext}\right\}_{t+\Delta t} - \left\{F_B^{\text{int}}\left(\left\{u_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}\right)\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \tag{170}$$

Substituindo as equações (168) e (169) em (170), obtém-se:

$$\begin{aligned}
&\left[M_B\right]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\left(\begin{aligned}&\left(\left\{\ddot{u}_B^*\right\} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\left(\left\{\Delta u\right\}^{(i-1)} + \left\{\Delta\Delta u\right\}^{(i)}\right)\right)\\ &+\alpha_B\left(\left\{\dot{u}_B^*\right\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(\left\{\Delta u\right\}^{(i-1)} + \left\{\Delta\Delta u\right\}^{(i)}\right)\right)\end{aligned}\right)\\
&+\left[K_B\right]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\left(\beta_B\left(\left\{\dot{u}_B^*\right\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(\left\{\Delta u\right\}^{(i-1)} + \left\{\Delta\Delta u\right\}^{(i)}\right)\right) + \left\{\Delta\Delta u\right\}^{(i)}\right)\\
&= \left\{F_B^{ext}\right\}_{t+\Delta t} - \left\{F_B^{\text{int}}\left(\left\{u_B\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}\right)\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}
\end{aligned} \tag{171}$$

A aplicação do operador de integração no tempo na equação de movimento iterativa-incremental da equação (156) leva à definição de um sistema de equações algébricas efetivo para ser resolvido com o método de *Newton-Raphson* completo ou com o método de *Newton-Raphson* modificado. Uma forma geral para esse sistema efetivo pode ser expressa como:

$$\left[A\right]\left\{\Delta u\right\}^{(i)} = \left\{b\right\}^{(i-1)} \tag{172}$$

em que $\left[A\right]$ é a matriz efetiva definida como uma combinação das matrizes de massa, amortecimento e rigidez afetadas por coeficientes escalares e $\left\{b\right\}^{(i-1)}$ é o vetor de resíduos efetivo calculado em termos dos carregamentos externos e forças elásticas, de amortecimento e inerciais da iteração anterior.

Nesse ponto, os termos já conhecidos da iteração (i) poderiam ser transferidos para o lado direito da equação de movimento (171), para serem incorporados ao vetor de resíduos efetivo $\left\{b\right\}^{(i-1)}$ da equação (172). Entretanto, se isto fosse feito sem demais considerações, o cálculo de $\left\{b\right\}^{(i-1)}$ exigiria dispendiosas multiplicações com a matriz de rigidez global da estrutura da ponte $\left[K_B\right]_{t+\Delta t}^{(i-1)}$. Uma forma de evitar essas multiplicações, onerosas ao processamento computacional, é demonstrada a seguir. Essa forma consiste em definir o vetor $\{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)}$ como os termos entre parênteses que multiplicam $[K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)}$ na equação (171). Dessa forma, tem-se:

$$\{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)} = \beta_B\left(\{\dot{u}_B^*\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\left(\{\Delta u\}^{(i-1)} + \{\Delta\Delta u\}^{(i)}\right)\right) + \{\Delta\Delta u\}^{(i)} \tag{173}$$

e, analogamente:

$$\{\Delta\Delta u\}^{(i)} = \frac{\{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)} - \beta_B\left(\{\dot{u}_B^*\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{\Delta u\}^{(i-1)}\right)}{\frac{\beta_B\gamma}{\beta\Delta t} + 1} \tag{174}$$

Observa-se que no caso particular em que o amortecimento, proporcional à rigidez, não é definido, caso $\beta_B = 0$, as equações (173) e (174) reduzem-se a:

$$\{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)} = \{\Delta\Delta u\}^{(i)} \tag{175}$$

Reescrevendo a equação (171) usando a definição de $\{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)}$ apresentada na equação (173) e transferindo os termos já conhecidos da iteração (i) para o lado direito da equação de movimento, obtém-se:

$$\begin{aligned}
&[M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2} + \alpha_B\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\right)\{\Delta\Delta u\}^{(i)} + [K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)} \\
&= \{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t} - \left\{F_B^{\text{int}}\left(\{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}\right)\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \\
&- [M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\left(\left(\{\ddot{u}_B^*\} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\{\Delta u\}^{(i-1)}\right) + \alpha_B\left(\{\dot{u}_B^*\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{\Delta u\}^{(i-1)}\right)\right)
\end{aligned} \tag{176}$$

Substituindo a equação (174) na equação (176), obtém-se:

$$\begin{aligned}
&[M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\left(\frac{1}{\beta\Delta t^2} + \alpha_B\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\right)\left(\frac{\{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)} - \beta_B\left(\{\dot{u}_B^*\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{\Delta u\}^{(i-1)}\right)}{\frac{\beta_B\gamma}{\beta\Delta t} + 1}\right) + [K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\{\Delta\Delta\hat{u}\}^{(i)} \\
&= \{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t} - \left\{F_B^{\text{int}}\left(\{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}\right)\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \\
&- [M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\left(\left(\{\ddot{u}_B^*\} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\{\Delta u\}^{(i-1)}\right) + \alpha_B\left(\{\dot{u}_B^*\} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{\Delta u\}^{(i-1)}\right)\right)
\end{aligned} \tag{177}$$

Definindo $\hat{\alpha}_0$ como sendo:

$$\hat{\alpha}_0 = \left(\frac{1}{\beta \Delta t^2} + \alpha_B \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \right) \left(\frac{1}{\frac{\beta_B \gamma}{\beta \Delta t} + 1} \right) \tag{178}$$

e transferindo novamente os termos já conhecidos da iteração (i) para o lado direito da equação de movimento, obtém-se:

$$\begin{aligned} &\hat{\alpha}_0 \left[M_B \right]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left\{ \Delta\Delta\hat{u} \right\}^{(i)} + \left[K_B \right]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left\{ \Delta\Delta\hat{u} \right\}^{(i)} \\ &= \left\{ F_B^{ext} \right\}_{t+\Delta t} - \left\{ F_B^{\text{int}} \left(\left\{ u_B \right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \right) \right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \\ &- \left[M_B \right]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left(\left(\left\{ \ddot{u}_B^* \right\} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left\{ \Delta u \right\}^{(i-1)} \right) + \left(\alpha_B - \hat{\alpha}_0 \beta_B \right) \left(\left\{ \dot{u}_B^* \right\} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \left\{ \Delta u \right\}^{(i-1)} \right) \right) \end{aligned} \tag{179}$$

Essa equação de movimento pode ser finalmente escrita de forma similar a equação (172) para ganho de eficiência computacional, como sendo um sistema efetivo de equação algébricas lineares a ser resolvido em cada iteração do método de *Newton-Raphson* completo ou com o método de *Newton-Raphson* modificado:

$$\left[\hat{A} \right] \left\{ \Delta\Delta\hat{u} \right\}^{(i)} = \left\{ \hat{b} \right\}^{(i-1)} \tag{180}$$

em que a matriz é definida como:

$$\left[\hat{A} \right] = \hat{\alpha}_0 \left[M_B \right]_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \left[K_B \right]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \tag{181}$$

e a matriz $\left\{ \hat{b} \right\}^{(i-1)}$ como:

$$\begin{aligned} \left\{ \hat{b} \right\}^{(i-1)} &= \left\{ F_B^{ext} \right\}_{t+\Delta t} - \left\{ F_B^{\text{int}} \left(\left\{ u_B \right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \right) \right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \\ &- \left[M_B \right]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \left(\left(\left\{ \ddot{u}_B^* \right\} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \left\{ \Delta u \right\}^{(i-1)} \right) + \left(\alpha_B - \hat{\alpha}_0 \beta_B \right) \left(\left\{ \dot{u}_B^* \right\} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \left\{ \Delta u \right\}^{(i-1)} \right) \right) \end{aligned} \tag{182}$$

Com esse método otimizado, há um grande ganho de velocidade computacional na obtenção da resposta por haver menos operações de inversão de matrizes.

3 MODELOS MATEMÁTICOS DO VEÍCULO E DA PONTE

Serão apresentados os modelos matemáticos para análise estática linear, estática não linear, dinâmica linear e dinâmica não linear através da mecânica do dano para uma ponte sujeita às forças de intensidade e posição variáveis, seja por uma força de posição fixa e intensidade variável, seja por uma força de intensidade fixa e posição variável ou, no caso dos modelos acoplados entre veículo e irregularidade, de intensidade e posição variáveis conforme a velocidade do veículo e a amplitude das irregularidades da via.

Nas análises estáticas e dinâmicas não lineares a não linearidade física é considerada por meio da mecânica do dano para simular o comportamento do concreto. O modelo constitutivo de dano de *Mazars* (1984) também será apresentado neste capítulo.

De modo a considerar o dano em cada camada dentro de cada seção transversal analisada e o equilíbrio de esforços na seção, será apresentado o modelo da rigidez equivalente. Este modelo também é utilizado para vigas mistas de materiais compósitos que são vigas de diferentes tipos de materiais. Neste modelo considera-se a perfeita aderência entre o aço e o concreto nas estruturas de concreto armado nos modelos de pontes.

Nos modelos com interação dinâmica, são descritos os modelos matemáticos do veículo acoplado com os diferentes tipos de irregularidade das vias, como irregularidades harmônicas senoidais, triangulares e retangulares periódicas, além de pulsos representando uma única irregularidade senoidal, triangular ou retangular em alguma posição da viga. A interação entre o veículo, irregularidades da via e ponte é feita de forma desacoplada. Assim, obtêm-se as forças produzidas pelo modelo acoplado entre veículo e irregularidade e transmitem-se os esforços à ponte de forma desacoplada. Serão descritos seus componentes e a formulação das equações de movimento.

Assim, neste capítulo estão subdivididos os modelos de veículo para os diferentes casos de irregularidades, o modelo para análise dinâmica linear da ponte e sua interação dinâmica com as forças geradas em cada modelo de veículo-irregularidade, o modelo constitutivo de dano de *Mazars* (1984), o modelo constitutivo para o aço estrutural, o modelo de rigidez equivalente de cada seção transversal e o modelo dinâmico não linear da ponte através da mecânica do dano e sua interação dinâmica com o veículo trafegando em diferentes tipos de irregularidade.

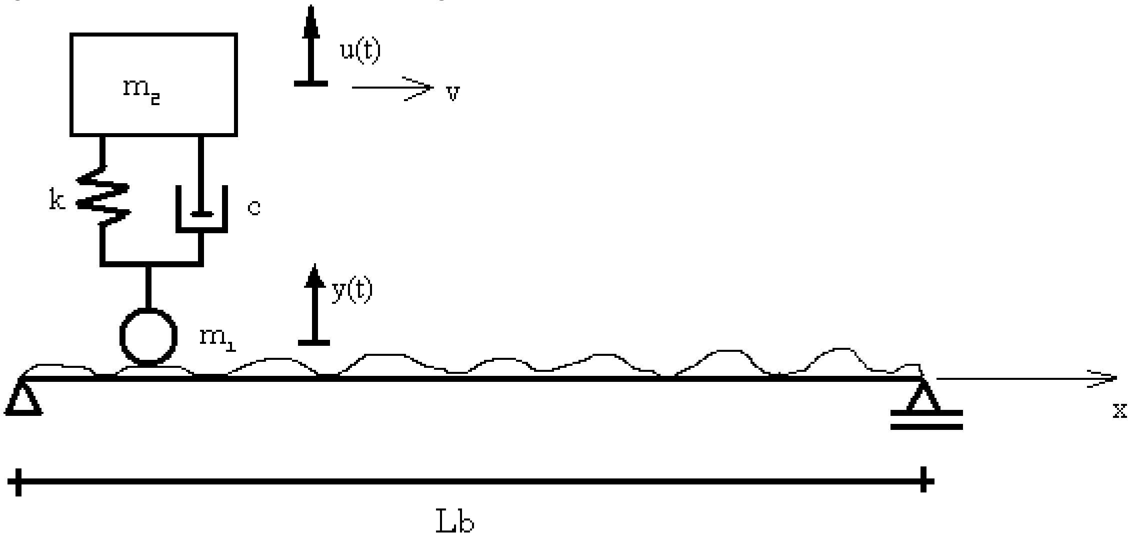
3.1 MODELOS MATEMÁTICOS DE VEÍCULOS ACOPLADOS COM IRREGULARIDADES

Este modelo computacional implementado considera a passagem do veículo com 1 grau de liberdade nas diferentes formas de irregularidades da via e transmite os esforços gerados entre o veículo e irregularidade de forma desacoplada para a análise dinâmica linear ou não linear da ponte, ou seja, as respostas dinâmicas da ponte não afetam as forças provocadas entre o acoplamento entre a passagem do veículo e as irregularidades. Assim, primeiramente analisam-se as forças geradas do acoplamento entre veículo e irregularidade e estas são transmitidas à ponte para a análise dinâmica linear, sem danos, ou não linear, com danos, da mesma. Trata-se, portanto, de um modelo acoplado entre veículo e irregularidade, mas desacoplado entre veículo-irregularidade e ponte.

Para a análise dinâmica linear da ponte, após transmitirem-se os esforços gerados entre o veículo e as irregularidades, não se faz distinção da geometria da seção transversal da ponte pelo fato da mesma ter seção transversal constante ao longo de seu comprimento. Desta forma, como Yang, Yau e Hsu (1997), a análise dinâmica linear é feita somente considerando o momento de inércia constante ao longo do comprimento da ponte. Por sua vez, na análise dinâmica não linear da ponte, após serem transmitidos de forma desacoplada os esforços gerados pelo acoplamento entre o veículo e as irregularidades, é necessário um completo mapeamento da seção transversal da ponte considerando a base e a altura da seção transversal bem como a altura de cada camada de cada material de modo a melhor simular a evolução do dano ao longo de cada camada dentro de cada seção transversal da ponte para cada iteração dentro de cada passo de tempo para analisar as respostas perante as diferentes formas de carregamento.

O modelo de veículo com 1 grau de liberdade utilizado para as diferentes formas de irregularidades detalhadas abaixo é formado por uma massa não suspensa da roda m_1, uma massa suspensa m_2, uma mola com coeficiente de rigidez k e um amortecedor com coeficiente de amortecimento c conforme mostra a Figura 17.

Figura 17 – Modelo de veículo com 1 grau de liberdade



Fonte: O autor.

As massas da mola e do amortecedor são desprezadas durante toda análise. Admite-se comportamento elástico linear para a mola e comportamento viscoso linear para o amortecedor.

O veículo ao atravessar a ponte com velocidade constante ou variável v está sujeito aos efeitos das irregularidades da via, representadas por $y(t)$. Considerando-se indeformável a roda representada pela massa m_1, tem-se um problema conhecido como excitação de base. Basta considerar o veículo parado sujeito a uma excitação harmônica de base $y(t)$. Assim tem-se a força resistiva elástica que age na mola e a força resistiva devido ao amortecimento, representadas respectivamente por:

$$f_M = k[u_v(t) - y(t)] \tag{183}$$

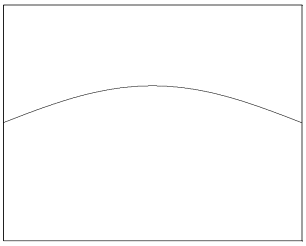
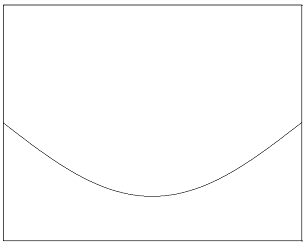
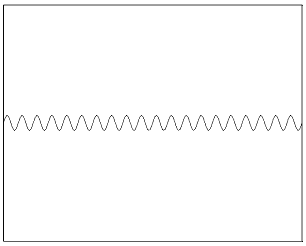
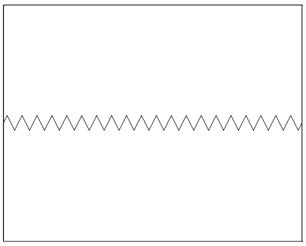
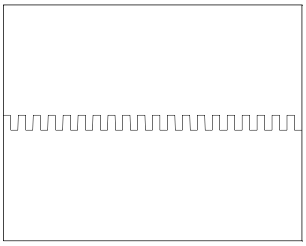
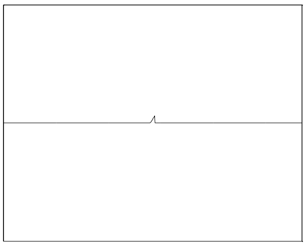
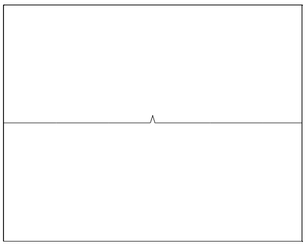
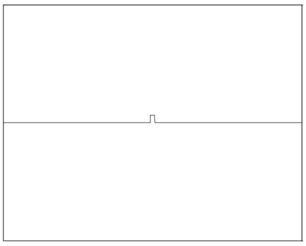
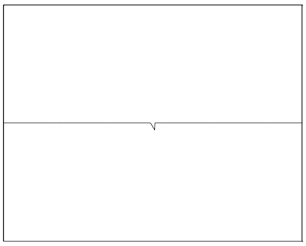
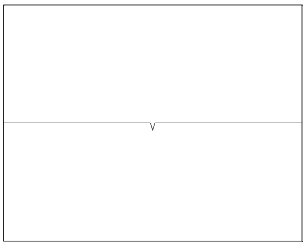
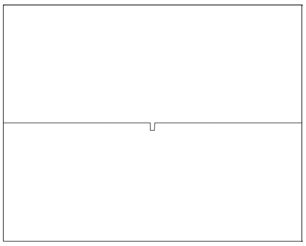
$$f_A = c[\dot{u}_v(t) - \dot{y}(t)] \tag{184}$$

Desta forma, a equação de movimento que rege o problema pode ser escrita da seguinte maneira:

$$m_2\ddot{u}_v(t) + c[\dot{u}_v(t) - \dot{y}(t)] + k[u_v(t) - y(t)] = 0 \tag{185}$$

Na Tabela 1 estão ilustradas as seguintes formas de irregularidades:

Tabela 1 – Tipos de irregularidades da via

Tipos de irregularidades		
Sem irregularidades plana 	Sem irregularidades em arco para cima 	Sem irregularidades em arco para baixo 
Harmônicas senoidais periódicas 	Triangulares periódicas 	Retangulares periódicas 
Pulso em dente de serra para cima aperiódico 	Pulso triangular para cima aperiódico 	Pulso retangular para cima aperiódico 
Pulso em dente de serra para baixo aperiódico 	Pulso triangular para baixo aperiódico 	Pulso retangular para baixo aperiódico 

Fonte: O autor.

Para cada irregularidade descrita na Tabela 1, são determinados os diferentes modelos de veículos acoplados com as irregularidades.

Em cada função de excitação de base $y(t)$ que representa cada tipo de irregularidade da via, deriva-se a função em relação ao tempo para obter-se a parcela $\dot{y}(t)$ relativa à força resistiva devido ao amortecimento:

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} \tag{186}$$

Utiliza-se a diferenciação numérica analisando a precisão na maioria dos casos ou quando a irregularidade analisada for aleatória.

Para o caso das irregularidades da via representadas na forma de funções harmônicas senoidais, tem-se:

$$y(t) = A\sin(\omega t) \tag{187}$$

Na equação (187), A representa a amplitude de onda, ω a frequência de excitação externa e t o tempo. Onde ω pode ser representado por:

$$\omega = 2\pi f \tag{188}$$

em que f representa a frequência cíclica e é obtida através de:

$$f = \frac{v}{l} \tag{189}$$

em que v representa a velocidade do veículo e l o comprimento da onda senoidal.

Assim, substituindo-se a equação (189) em (188) e posteriormente (41) na equação (187), tem-se:

$$y(t) = A\sin\left(\frac{2\pi v}{l}t\right) \tag{190}$$

A equação (190) representa as irregularidades da via correlacionada com a velocidade do veículo. Derivando-se (190) com relação ao tempo, tem-se:

$$\dot{y}(t) = \frac{2\pi A v}{l}\cos\left(\frac{2\pi v}{l}t\right) \tag{191}$$

Agora se substitui (190) e (191) em (185), e obtém-se:

$$m_2\ddot{u}_v(t) + c\dot{u}_v(t) + ku_v(t) = c\left[\frac{2\pi A v}{l}\cos\left(\frac{2\pi v}{l}t\right)\right] + k\left[A\sin\left(\frac{2\pi v}{l}t\right)\right] \tag{192}$$

em que (192) é a equação de movimento (185), aqui apresentada na forma expandida.

A força produzida pela excitação de base pode ser definida por:

$$F_{EB}(t) = c\left[\dot{u}_v(t) - \dot{y}(t)\right] + k\left[u_v(t) - y(t)\right] \tag{193}$$

Percebe-se que a força provocada pela excitação de base é a soma das forças resistivas da mola e do amortecedor, conforme são apresentadas através das equações (183) e (184). Desta maneira resta complementar os pesos provenientes das massas m_1 e m_2, tem-se:

$$F_{EB}(t) = (m_1 + m_2)g + c[\dot{u}_v(t) - \dot{y}(t)] + k[u_v(t) - y(t)] \tag{194}$$

onde g representa a aceleração da gravidade.

Definida a força produzida pelo peso próprio do veículo e pela irregularidade harmônica senoidal periódica, deve-se agora transferir os esforços à ponte.

3.2 MODELO DINÂMICO LINEAR DESACOPLADO ENTRE VEÍCULO, IRREGULARIDADE E PONTE

Neste modelo, assim como no de Yang, Yau e Hsu (1997), não se faz distinção da geometria da seção transversal da ponte, analisando o problema somente com o momento de inércia da mesma.

A ponte biapoiada apresentada na Figura 17 tem seção transversal e rigidez constante ao longo de seu comprimento L_b. Para a modelagem da ponte utilizam-se os elementos finitos de vigas de *Euler-Bernoulli* (CHOPRA, 1995; BATHE, 1996; KWON & HYOCHOONG, 1997). As matrizes elementares de rigidez e de massa são, respectivamente, reapresentadas aqui por:

$$[K_e] = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{64}$$

$$[M_e] = \frac{\rho AL}{420}\begin{bmatrix} 156 & 22L & 54 & -13L \\ 22L & 4L^2 & 13L & -3L^2 \\ 54 & 13L & 156 & -22L \\ -13L & -3L^2 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} \tag{59}$$

Nas equações (64) e (59) os parâmetros físicos E e ρ representam, respectivamente, o módulo de deformação e a massa específica do elemento. Os parâmetros geométricos A, I e L representam, respectivamente, a área de seção transversal, o momento de inércia e o comprimento do elemento.

Para calcular as forças nodais equivalentes às solicitações no interior dos elementos, para qualquer forma de solicitação, seja estática ou dinâmica, de posição e intensidade fixas ou variáveis, é necessário encontrar os esforços dinâmicos em cada elemento. A equação dos esforços dinâmicos em cada elemento é definida por:

$$\{F_e(t)\} = \int_0^L q(x,t)\{H\}^T dx \tag{195}$$

em que $\{H\}$ contém as funções cúbicas de interpolação de *Hermite*, assim:

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} 1-3(x/L)^2 + 2(x/L)^3 \\ x\left[1-2(x/L)+(x/L)^2\right] \\ 3(x/L)^2 - 2(x/L)^3 \\ x\left[(x/L)^2 - (x/L)\right] \end{Bmatrix} \tag{196}$$

$$\{H\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2L}x + \frac{2}{L^3}x^3 \\ \frac{L}{8} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2L}x - \frac{2}{L^3}x^3 \\ -\frac{L}{8} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \end{Bmatrix} \tag{197}$$

em que x, representa a abscissa em que se encontra o esforço em cada elemento, e L é o comprimento do elemento.

No caso das forças aplicadas na ponte serem provenientes da passagem do veículo pelas irregularidades da via, substitui-se (194) em (195) e integrando, obtém-se:

$$\{F_e(t)\} = -F_{EB}(t)\{H\}^T \tag{198}$$

em que o sinal negativo é atribuído devido à convenção do sistema definido anteriormente.

Sendo a velocidade constante do veículo v definida por:

$$v = LIM_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \tag{199}$$

Deixa-se a abscissa x em função do tempo através da velocidade v, assim $\{H\}$ fica:

$$\{H^*\} = \begin{Bmatrix} 1-3(vt/L)^2 + 2(vt/L)^3 \\ vt\left[1-2(vt/L)+(vt/L)^2\right] \\ 3(vt/L)^2 - 2(vt/L)^3 \\ vt\left[(vt/L)^2 - (vt/L)\right] \end{Bmatrix} \tag{200}$$

$$\{H^*\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2L}vt + \frac{2}{L^3}(vt)^3 \\ \frac{L}{8} - \frac{1}{4}vt - \frac{1}{2L}(vt)^2 + \frac{1}{L^2}(vt)^3 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2L}vt - \frac{2}{L^3}(vt)^3 \\ -\frac{L}{8} - \frac{1}{4}vt + \frac{1}{2L}(vt)^2 + \frac{1}{L^2}(vt)^3 \end{Bmatrix} \tag{201}$$

Para o caso da velocidade variável obtida do movimento retilíneo uniformemente variável, incluem-se as parcelas de aceleração a constante:

$$\{H^*\} = \begin{Bmatrix} 1 - \left(\frac{vt + \frac{a}{2}t^2}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{vt + \frac{a}{2}t^2}{L}\right)^3 \\ \left(vt + \frac{a}{2}t^2\right)\left[1 - 2\left(\frac{vt + \frac{a}{2}t^2}{L}\right) + \left(\frac{vt + \frac{a}{2}t^2}{L}\right)^2\right] \\ 3\left(\frac{vt + \frac{a}{2}t^2}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{vt + \frac{a}{2}t^2}{L}\right)^3 \\ \left(vt + \frac{a}{2}t^2\right)\left[\left(\frac{vt + \frac{a}{2}t^2}{L}\right)^2 - \left(\frac{vt + \frac{a}{2}t^2}{L}\right)\right] \end{Bmatrix} \tag{202}$$

ou

$$\{H^*\} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2L}\left(vt + \frac{a}{2}t^2\right) + \frac{2}{L^3}\left(vt + \frac{a}{2}t^2\right)^3 \\ \frac{L}{8} - \frac{1}{4}\left(vt + \frac{a}{2}t^2\right) - \frac{1}{2L}\left(vt + \frac{a}{2}t^2\right)^2 + \frac{1}{L^2}\left(vt + \frac{a}{2}t^2\right)^3 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2L}\left(vt + \frac{a}{2}t^2\right) - \frac{2}{L^3}\left(vt + \frac{a}{2}t^2\right)^3 \\ -\frac{L}{8} - \frac{1}{4}\left(vt + \frac{a}{2}t^2\right) + \frac{1}{2L}\left(vt + \frac{a}{2}t^2\right)^2 + \frac{1}{L^2}\left(vt + \frac{a}{2}t^2\right)^3 \end{Bmatrix} \tag{203}$$

Reescrevendo-se a equação (198) utilizando-se qualquer uma das equações entre (200) e (203), obtém-se:

$$\{F_e(t)\} = -F_{EB}(t)\{H^*\}^T \tag{204}$$

Definidas as matrizes elementares de rigidez e de massa e o vetor elementar de forças, montam-se as matrizes globais da estrutura da ponte não danificada, através da conectividade de cada elemento. Utilizando-se o amortecimento de *Rayleigh*, obtêm-se equações de movimento da ponte íntegra:

$$[M_B]\{\ddot{u}_B\}+[C_B]\{\dot{u}_B\}+[K_B]\{u_B\}=\{F_B(t)\} \qquad (205)$$

Para a integração no tempo da equação (205), utiliza-se o método de *Newmark* com aceleração média e o sistema de equações é resolvido por meio do método da eliminação de *Gauss*.

3.3 MODELO CONSTITUTIVO DE DANO DE *MAZARS* (1984)

O concreto é simulado por meio do modelo de dano proposto por *Mazars* (1984), que tem por base algumas evidências experimentais observadas em ensaios uniaxiais de corpo de prova em concreto, tendo por hipóteses fundamentais (PITUBA, 1998):

- o dano é representado por uma variável escalar D $(0 \le D \le 1)$ cuja evolução ocorre quando um valor de referência para o 'alongamento equivalente' é superado;

- localmente o dano é proveniente da existência de deformações de alongamento;

- considera-se, portanto, que o dano seja isótropo, embora análises experimentais mostrem que o dano conduz, em geral, a uma anisotropia do concreto (o qual pode ser considerado inicialmente como isótropo); e

- o concreto com dano comporta-se como meio elástico. Portanto, deformações permanentes, sejam elas de natureza plástica, viscosa ou induzida pelo próprio processo de danificação, evidenciadas experimentalmente numa situação de descarregamento são desprezadas.

O quadrado da deformação equivalente é igual à soma dos quadrados das componentes de deformação principal positivos:

$$\tilde{\varepsilon}^2 = \sum_i \left\langle \varepsilon_i^2 \right\rangle_+ \qquad (i=1,2,3) \qquad (206)$$

O estado de extensão é localmente caracterizado por um alongamento ou uma deformação equivalente, expressa como (PITUBA, 1998):

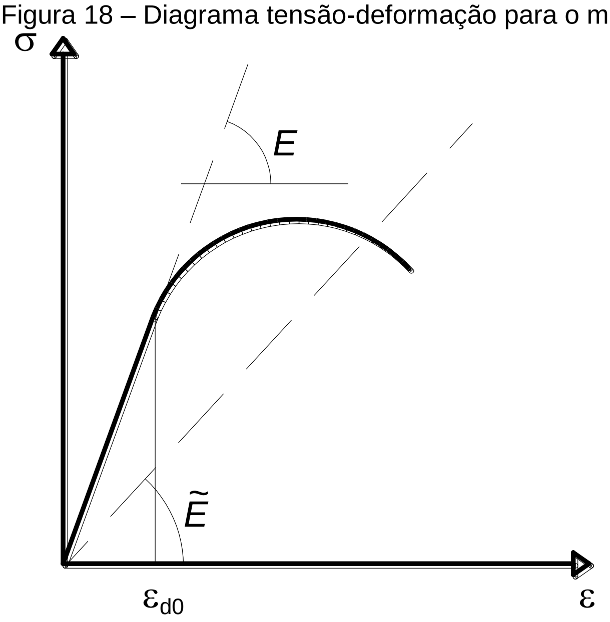
$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2 + \ldots + \langle \varepsilon_n \rangle_+^2} \qquad (i = 1,2,3) \tag{207}$$

em que ε_i são as componentes de deformações principais e $\langle \varepsilon_i \rangle_+$ sua parte positiva definida por:

$$\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_i + |\varepsilon_i|\right] \tag{208}$$

Nesse modelo, adota-se que o dano se inicia quando a deformação equivalente atinge um valor de deformação de referência ε_{d0}, determinado em ensaios de tração uniaxial em correspondência à tensão máxima, conforme a Figura 18.

Figura 18 – Diagrama tensão-deformação para o modelo de dano de *Mazars*



Fonte: O autor.

A relação constitutiva, no caso particular de estado unidimensional de tensão, é dada por (TIAGO et al., 2002):

$$\sigma = (1 - D(\varepsilon))E_{c0}\varepsilon \tag{209}$$

em que E_{c0} é o módulo de deformação inicial, ou seja, do material não danificado.

A variável de dano, D, é dada por uma combinação linear das variáveis básicas de dano, D_T e D_C, por intermédio dos coeficientes de combinação, α_T e α_C:

$$D(\varepsilon)=\alpha_T D_T+\alpha_C D_C \qquad \alpha_T+\alpha_C=1 \tag{210}$$

em que os valores dos coeficientes α_T e α_C estão contidos no interval fechado $[0,1]$, e procuram representar a contribuição de solicitações à tração e à compressão para o estado local de extensão, respectivamente (PITUBA & PROENÇA, 2005).

Por hipótese, neste trabalho, são considerados apenas os estados unidimensionais de tensão. No caso de tração pura tem-se $\alpha_T=1$ e $\alpha_C=0$ e no caso da compressão pura, $\alpha_T=0$ e $\alpha_C=1$. As variáveis básicas de dano são dadas por:

$$D_T(\tilde{\varepsilon})=1-\frac{\varepsilon_{d0}(1-A_T)}{\tilde{\varepsilon}}-\frac{A_T}{e^{B_T(\tilde{\varepsilon}-\varepsilon_{d0})}} \tag{211}$$

$$D_C(\tilde{\varepsilon})=1-\frac{\varepsilon_{d0}(1-A_C)}{\tilde{\varepsilon}}-\frac{A_C}{e^{B_C(\tilde{\varepsilon}-\varepsilon_{d0})}} \tag{212}$$

em que A_T, B_T, A_C e B_C são parâmetros característicos do material em tração uniaxial e compressão uniaxial, respectivamente, $\tilde{\varepsilon}$ é a deformação equivalente, abaixo da qual não ocorre dano, e ε_{d0} é o parâmetro da deformação elástica limite. Os subíndices T e C referem-se à tração e à compressão, respectivamente.

De modo a considerar o efeito de *Poisson*, a deformação equivalente é dada por:

$$\tilde{\varepsilon}=\begin{cases}\varepsilon, & se\, \varepsilon\geq 0\\ -\nu\sqrt{2}\varepsilon, & de\, outra\ forma\end{cases} \tag{213}$$

em que ν é o coeficiente de *Poisson* do concreto.

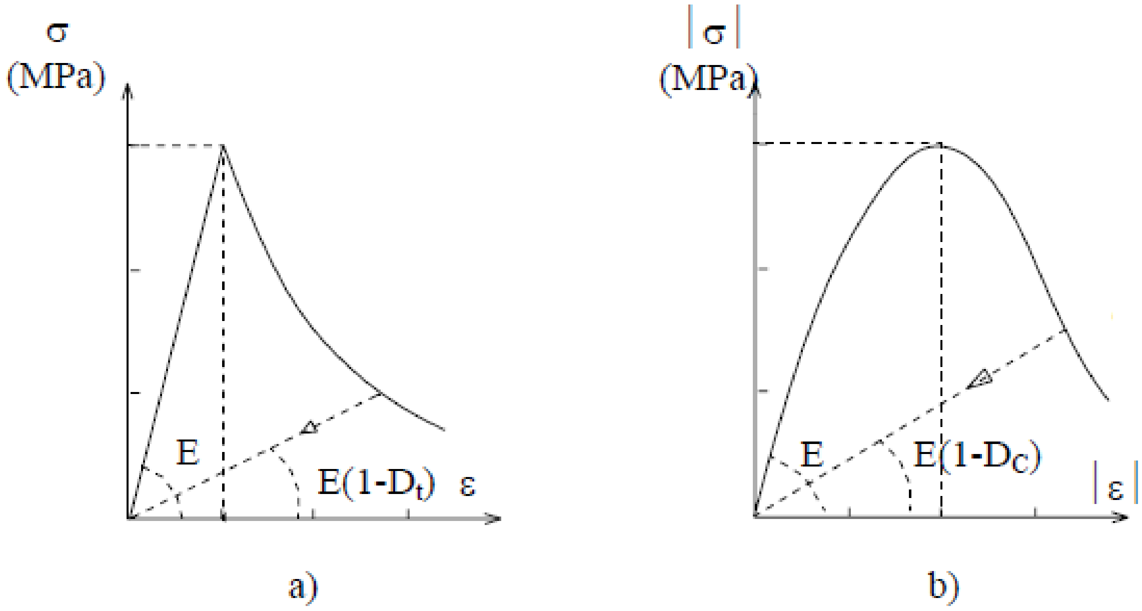
Portanto, se o módulo da deformação equivalente é menor que a deformação de referência $\left(|\tilde{\varepsilon}|<\varepsilon_{d0}\right)$, então não há dano algum $(D=0)$.

Algumas dificuldades são evidenciadas na aplicação direta desse tipo de modelo na análise de estruturas: uma instabilidade na resposta, visualizada na curva carga-deslocamento pela irregularidade no seu desenvolvimento, *non-smoth*, e uma não objetividade caracterizada por resultados mais rígidos com o refinamento da malha (ÁLVARES, 1993 e PEREGO, 1989).

Mazars (1984) propôs os seguintes limites de variação para os parâmetros A_T, B_T, A_C e B_C, obtidos a partir da calibração com resultados experimentais (PITUBA, 1998):

$$0.7 \le A_T \le 1 \qquad 10^4 \le B_T \le 10^5 \qquad 10^{-5} \le \varepsilon_{d0} \le 10^{-4}$$
$$1 \le A_C \le 1.5 \qquad 10^3 \le B_C \le 2.10^3 \tag{214}$$

Figura 19 – Resposta uniaxial do modelo de *Mazars*: (a) tração, (b) compressão



Fonte: Adaptado de Pituba (1998).

3.4 MODELO CONSTITUTIVO PARA O AÇO ESTRUTURAL

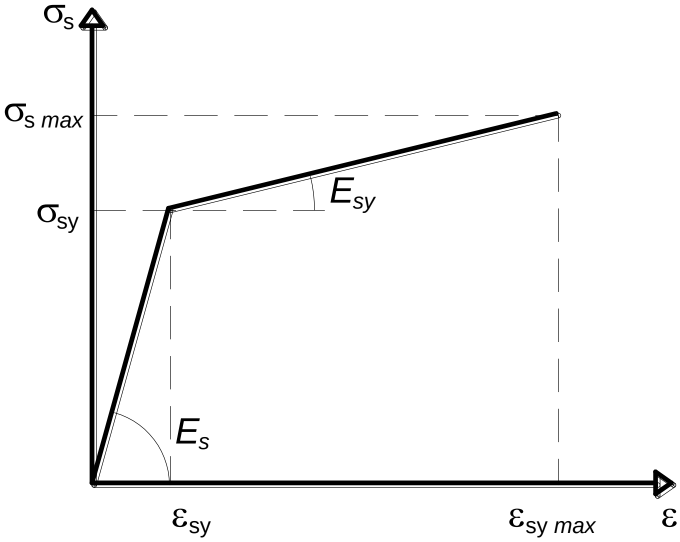
Neste estudo, utiliza-se um modelo uniaxial para descrever o comportamento das armaduras, uma vez que em estruturas de concreto armado as barras de aço resistem, fundamentalmente, a esforços axiais.

No modelo computacional implementado, o aço estrutural é representado como um material elastoplástico tendo o mesmo comportamento quando submetido à tração e à compressão.

Embora simplista, o modelo do aço estrutural é mais criterioso do que os modelos elásticos lineares de cálculo normativos utilizados na grande maioria dos escritórios de projeto estrutural por considerar do metal por deformação plástica, ou seja, por encruamento.

Trata-se de um modelo elastoplástico bilinear com encruamento. A representação é dada por um diagrama tensão-deformação bilinear (PASA, 2007), conforme a Figura 20.

Figura 20 – Modelo elastoplástico bilinear com encruamento para o aço



Fonte: O autor.

Assim, a tensão atuante no aço estrutural é determinada por (TIAGO et al., 2002):

$$\sigma = \begin{cases} E_s \varepsilon, & -\varepsilon_{sy} \le \varepsilon \le \varepsilon_{sy} \\ \sigma_{sy} + E_{sy}(\varepsilon - \varepsilon_{sy}), & caso\ contrário \end{cases} \tag{215}$$

em que E_s é o módulo de deformação inicial do aço estrutural, ε_{sy} é sua extensão de cedência limite e E_{sy} é o módulo de deformação longitudinal após a cedência do aço definida por:

$$E_{sy} = k_s E_s \tag{216}$$

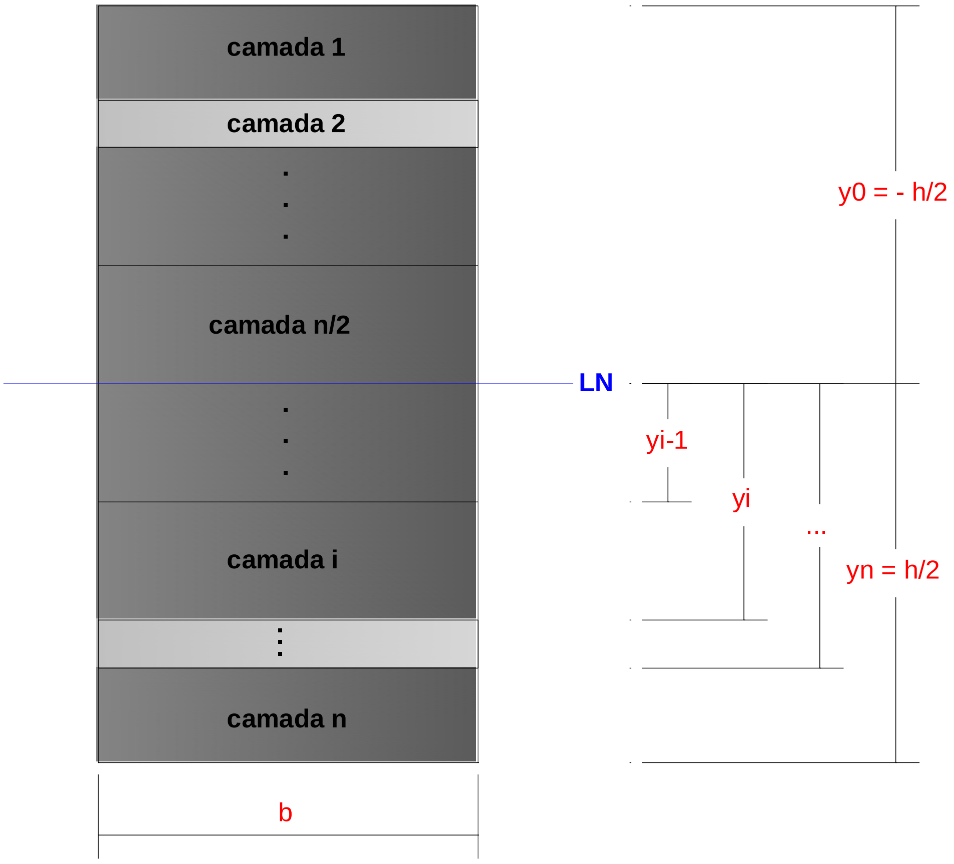
em que k_s é a relação entre o módulo de deformação após cedência do aço E_{sy} e o módulo de deformação longitudinal do aço estrutural E_s.

Se descarregado no segundo trecho do diagrama representado na Figura 20, o modelo tem uma deformação permanente associada.

3.5 MODELO DE RIGIDEZ EQUIVALENTE

Uma vez que a mecânica do dano contínuo é considerada dinamicamente, faz-se necessário avaliar os danos em cada seção transversal da ponte, ou seja, para cada iteração na análise estática não linear e para cada iteração dentro de cada passo de tempo na análise dinâmica não linear. Neste sentido, a seção transversal da ponte é dividida em n camadas, como vigas laminadas de material composto, como mostrado na Figura 21, para ser possível determinar a rigidez equivalente.

Figura 21 – Seção transversal retangular da ponte dividida em n camadas



Fonte: O autor.

Para o caso particular de simetria em vigas laminadas de material composto com largura b constante, a rigidez à flexão equivalente EI_{eqv} é determinada por (KWON & HYOCHOONG, 1997):

$$EI_{eqv} = \frac{1}{3} b \sum_{i=1}^{n} E_i \left(y_i^3 - y_{i-1}^3 \right) \qquad (217)$$

em que n é o número de camadas, b é a largura da seção transversal retangular, E_i é o módulo de deformação da i-ésima camada, sendo E_c para camadas de concreto e E_s ou E_{sy} para camadas de aço, y_i e y_{i-1} são os valores das coordenadas no eixo y da divisão de pontos das i-ésimas camadas consecutivas, as quais subtraídas resultam na altura da camada.

Na obtenção do vetor de força interna elementar, abordado na sessão 3.6, a rigidez à flexão equivalente é determinada para cada ponto de *Gauss* na integração numérica, utilizando o método da quadratura de *Gauss*.

No processo de cálculo da rigidez equivalente, quando os materiais, concreto ou aço, apresentam comportamento não linear, a posição da linha neutra varia e é recalculada em cada iteração numérica de acordo com a deterioração de qualquer camada. Assim, as coordenadas y_i são redefinidas e a rigidez equivalente é recalculada através do teorema de *Steiner*, ou teorema dos eixos paralelos (BEER & JOHNSTON, 2008; HIBBELER, 2009; BEER & JOHNSTON, 2010), conforme a equação (217) para esta nova posição da linha neutra.

3.6 MODELO MATEMÁTICO DINÂMICO NÃO LINEAR ATRAVÉS DA MECÂNICA DO DANO PARA A PONTE

O problema em questão, primeiro calcula as respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade e aceleração com a ponte íntegra, sem danos, resolvendo a equação (205) com a rotina dinâmica linear sem consideração da geometria da seção transversal da ponte, como apresentado na sessão 3.2. Por outro lado, quando se verificada a presença de danos as forças não são mais linearmente dependentes dos deslocamentos, fazendo com que a matriz de rigidez previamente fixa se torne instantânea, ou seja, dependente do tempo, caracterizando não linearidade como mostrado abaixo:

$$[K_B]=[K_B(\{u_B\})] \tag{218}$$

Por isso, adaptando a equações de movimento da ponte (103) e (113) segundo Machado (1983) com as equações de movimento da ponte (156), (171) e (180) segundo Jacob e Ebecken (1994), a equação global de movimento da ponte danificada é reescrita como:

$$\left(\frac{[M]_{t+\Delta t}^{(i-1)}}{\beta\Delta t^2}+\frac{\gamma[C]_{t+\Delta t}^{(i-1)}}{\beta\Delta t}\right)\{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i)}+[K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\{\Delta u\}^{(i)}=$$
$$\{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t}+\frac{[M]_{t+\Delta t}^{(i-1)}}{\beta\Delta t^2}\left(\{u_B\}_t+\{\dot{u}_B\}_t\Delta t+(0.5-\beta)\{\ddot{u}_B\}_t\Delta t^2\right)^{(i)} \tag{219}$$
$$+[C]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\left(\frac{\gamma}{\beta\Delta t}\{u_B\}_t+\left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)\{\dot{u}_B\}_t+\left(\frac{\gamma}{2\beta}-1\right)\{\ddot{u}_B\}_t\Delta t\right)^{(i)}-\{F_B^{\text{int}}\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}$$

ou

$$[M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\ \{\ddot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)}+[C_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\ \{\dot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)}+[K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)}\ \{\Delta u\}^{(i)}=\{\Delta F_B\}_{t+\Delta t} \tag{220}$$

em que

$$\{\Delta F_B\}_{t+\Delta t}=\{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t}-\{F_B^{\text{int}}\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \tag{221}$$

A equação não linear de movimento estabelecida nas equações (219) ou (220), é resolvida de forma incremental e iterativa através da combinação da técnica iterativa de *Newton-Raphson* com o operador de integração temporal implícito do método de *Newmark*.

Neste modelo, faz-se distinção da geometria da seção transversal dentro de cada elemento de modo a buscar a evolução do processo de danificação das camadas materiais da ponte perante solicitações dinâmicas na estrutura.

3.6.1 Inicialização das variáveis e aplicação das condições iniciais

Diferente dos sistemas de massa variável, como no caso de um foguete que perde massa ao ter seu combustível expulso para adquirir maior velocidade durante seu lançamento, no modelo apresentado o dano não interfere na massa da estrutura. Deste modo, a matriz de massa consistente utilizada no modelo é constante, conforme apresentada na equação (59), e não precisa ser recalculada dentro dos processos iterativos. Portanto, monta-se uma única vez a matriz de massa global da estrutura da ponte através da conectividade de cada elemento.

Primeiramente, toma-se como rigidez inicial da estrutura, íntegra até então, o modelo de rigidez equivalente conforme a equação (217) para cada elemento. Assim, tem-se:

$$(EI_{eqv})_{inicial}=\frac{1}{3}b\sum_{i=1}^{n}E_i\left(y_i^3-y_{i-1}^3\right) \tag{222}$$

Com a rigidez equivalente inicial de cada elemento da estrutura, obtidas através das relações físicas e geométricas da seção transversal, montam-se as matrizes de rigidez elementares, até então iguais para todos os elementos por não haver danificação do material e pela seção transversal ser constante ao longo do comprimento da viga, com a equação (64).

De modo a considerar o amortecimento estrutural no modelo dinâmico, a matriz de amortecimento da ponte é definida pelo método de *Rayleigh* conforme apresentado na equação (75).

Aplicam-se as condições iniciais, por se tratar de um problema dinâmico, que considerando que o problema parte do repouso são:

$$\{u_B\}_{t=1} = \{0\} \tag{223}$$

$$\{\dot{u}_B\}_{t=1} = \{0\} \tag{224}$$

$$\{\ddot{u}_B\}_{t=1} = \{0\} \tag{225}$$

3.6.2 Processo iterativo do método implícito de integração direta no tempo de *Newmark*

Inicia-se o processo de *Newmark* com a variação do passo de tempo Δt constante e as iterações de passo de tempo variando da primeira até o número total de iterações de passo de tempo desejada na análise, ou seja:

$$\{t\} = \{1 \quad \ldots \quad nt_{análise}\} \tag{226}$$

em que $nt_{análise}$ é o número total de iterações de passo de tempo desejado na análise, podendo ser igual ou superior ao número total de iterações de passo de tempo da duração da força aplicada na ponte, seja do veículo em movimento, fixa de intensidade crescente ou de natureza qualquer.

Deste modo, caso o número total de iterações de passo de tempo da análise seja superior ao número total de iterações de passo de tempo da carga aplicada, definidos nos dados de entrada, o modelo analisa as respostas dinâmicas mesmo depois de cessado o efeito da carga. Assim, é possível analisar a estabilização da estrutura devido à ação do amortecimento estrutural.

No primeiro passo de tempo montam-se as iguais matrizes de rigidez elementares com cada rigidez equivalente inicial obtida da seção transversal de cada elemento inicialmente íntegro. No entanto, conforme ocorre o processo de danificação do material, as matrizes de rigidez elementares montadas através da equação (64) se diferenciam devido à variação da rigidez equivalente de cada elemento por conta da mecânica do dano.

Monta-se a matriz de rigidez global da estrutura da ponte com a contribuição das respectivas matrizes elementares e de conectividade obtidas da avaliação de cada elemento e aplicam-se as condições de contorno.

Estimam-se os valores dos deslocamentos e das velocidades através dos valores preditores de deslocamentos e velocidades, apresentados nas equações (105) e (104), como sendo:

$$\{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} = \{\tilde{u}_B\}_{t+\Delta t} \tag{227}$$

$$\{\dot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} = \{\tilde{\dot{u}}_B\}_{t+\Delta t} \tag{228}$$

em que i é o número da iteração dentro de cada passo de tempo it.

Admite-se que as acelerações iniciais são nulas apenas na primeira iteração dentro de cada passo de tempo, ou seja:

$$\{\ddot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} = \{0\} \tag{229}$$

No entanto, as demais respostas dinâmicas não possuem essa restrição e, portanto, não são nulas na primeira iteração, a não ser no primeiro instante de tempo. Devido ao problema partir do repouso, tendo condições iniciais nulas, os valores preditores são nulos no primeiro instante de tempo e, consequentemente, as primeiras respostas dinâmicas também serão nulas neste instante. Entretanto, como os valores preditores calculados dependem dos valores de deslocamentos, velocidades e acelerações do tempo anterior e estes são cumulativos em cada iteração, eles não serão mais nulos nos próximos instantes de tempo, exceto se na condição de equilíbrio dinâmico não linear houver estabilização do sistema, como é o caso da análise do amortecimento após a passagem do veículo sobre a ponte.

3.6.3 Processo iterativo e incremental do método de *Newton-Raphson*

A partir deste ponto, utiliza-se o método de *Newton-Raphson* modificado, conforme apresentado na sessão 2.4.3.1 com passos de deslocamentos. Também é possível utilizar o método de *Newton-Raphson* completo caso a matriz de rigidez global da estrutura da ponte seja atualizada a partir deste ponto.

Com as estimativas dos deslocamentos globais obtidas na equação (227) calculam-se os deslocamentos nodais, inicialmente nulos na primeira e única iteração do primeiro passo de tempo do método de *Newton-Raphson* devido às condições iniciais do problema, para cada elemento cujas coordenadas locais variam de $-1/2$ a $+1/2$, para dois pontos de integração de *Gauss* de posição $P_1 = -1/\sqrt{3}$ e $P_2 = +1/\sqrt{3}$ cujos pesos W_{Gauss} valem 1.

A matriz de deformação $[B]$, reapresentada abaixo, é calculada para cada ponto de integração de *Gauss*.

$$[B] = \begin{bmatrix} -\dfrac{d^2\psi_1}{dx^2} & -\dfrac{d^2\psi_2}{dx^2} & -\dfrac{d^2\psi_3}{dx^2} & -\dfrac{d^2\psi_4}{dx^2} \end{bmatrix} \tag{53}$$

A deformação de cada ponto de integração de *Gauss*, em cada elemento, é calculada com o tensor de primeira ordem de deformações, conforme a equação (54). Assim tem-se:

$$\varepsilon_{el} = [B]\{v\} \tag{230}$$

Para o cálculo da deformação de cada camada de cada seção transversal de cada elemento, substitui-se a equação (230) na equação (55). Desta forma tem-se:

$$\varepsilon_{camada(j)} = y_{camada(j)}\varepsilon_{el} \quad (j = 1,\ldots,nc) \tag{231}$$

em que nc é o número de camadas e $y_{camada(j)}$ é o tensor de primeira ordem, ou vetor, das alturas de camada analisada.

Para cada deformação de cada camada, associa-se cada camada com o módulo de deformação do material relacionado, como feito em vigas laminadas de material composto e detalhado no modelo de rigidez equivalente da sessão 3.5, e verifica-se a deformação associada da camada com o critério não linear do material equivalente. Ou seja, compara-se a deformação da camada obtida com a deformação máxima limite do material. Quando a deformação limite é atingida ou ultrapassada utiliza-se o modelo não linear do material associado. No caso do concreto utiliza-se o modelo constitutivo de dano de *Mazars*, conforme a sessão 3.3, e no caso do aço estrutural utiliza-se o modelo constitutivo para o aço estrutural, conforme a sessão 3.4.

O efeito de inversão dos esforços é verificado de acordo com a convenção adotada para as forças atuantes. Deste modo, uma camada que comumente estaria sendo comprimida pode estar em regime de tração devido à inversão de esforços, como o caso de balanços ou por grandes vibrações.

Para o caso das camadas de concreto superarem o valor limite de deformação imposta, a tolerância de deformação, verificam-se os danos segundo as equações (211) e (212) e o módulo de deformação da camada de concreto analisada é atualizado, conforme:

$$\tilde{E}_{camada concreto} = (1 - D)E_c \qquad (232)$$

em que $\tilde{E}_{camada concreto}$ é o módulo de deformação da camada de concreto analisada atualizada com o critério de dano de *Mazars*, ou simplesmente o módulo de deformação danificado da camada de concreto, e E_c é o módulo de deformação do concreto íntegro.

Os danos são armazenados em cada iteração. A rotina verifica se o novo dano calculado na próxima iteração, ou até mesmo em outra iteração dentro de um próximo passo de tempo, é menor que o dano armazenado previamente. Se por acaso o dano obtido for menor que o dano armazenado, define-se como dano resultante o dano armazenado previamente, o de maior intensidade, de modo a não permitir o processo de regeneração do material, como ocorre com o osso humano, garantindo, assim, a hipótese de que o dano é progressivo.

As camadas de aço estrutural, por sua vez, têm suas extensões comparadas com a extensão de cedência limite e caso ultrapassado ou atingido, conforme a equação (215), seu módulo de deformação é atualizado conforme a equação (216), reapresentada abaixo:

$$E_{sy} = k_s E_s \qquad (216)$$

O módulo de deformação de cada camada é atualizado da seguinte forma:

$$E_{camada(j)} = \begin{cases} \tilde{E}_{camada\,concreto} & para\ as\ camadas\ de\ concreto \\ E_{sy} & para\ as\ camadas\ de\ aço \end{cases} \qquad (j = 1, \ldots, nc) \tag{233}$$

em que $E_{camada(j)}$ é tensor de primeira ordem do módulo de deformação de cada camada atualizada.

Nota-se que quando não houver danificação do concreto ou escoamento da armadura de aço, a rotina implementada para o modelo se tornará dinâmico linear com a consideração da seção transversal. Mais a frente, na sessão 4.5 das análises numéricas, haverá comparação entre as respostas dinâmicas lineares obtidas com o modelo dinâmico linear descrito na sessão 3.2 que não considera as dimensões geométricas da peça, considerando apenas o momento de inércia constante ao longo dos elementos, o qual poderia ser obtido com uma geometria diferente, com as respostas dinâmicas lineares obtidas com o modelo descrito nesta sessão 3.6, o qual leva em consideração as dimensões da seção transversal da peça.

Quando não há danificação das camadas de concreto ou plastificação das camadas de aço, a posição da linha neutra permanece inalterada. Entretanto, quando ocorre algum desses fenômenos a posição da linha neutra da seção transversal de cada elemento varia e é recalculada para cada iteração de passo de tempo.

$$y_{LN} = \frac{\sum_{j=1}^{nc} y_{camada(j)}\, E_{camada(j)}\, A_{camada(j)}}{\sum_{j=1}^{nc} E_{camada(j)}\, A_{camada(j)}} \tag{234}$$

em que y_{LN} é a nova posição da linha neutra, e $A_{camada(j)}$ é o tensor de primeira ordem das áreas de cada camada analisada. A origem é posicionada para a nova posição da linha neutra y_{LN} obtida de modo a considerar quais camadas sofrem efeito de tração ou compressão perante a carga atuante na viga para cada iteração de passo de tempo.

São armazenados os módulos de deformação atualizados de cada camada em cada elemento a cada iteração dentro de cada passo de tempo e os associados momentos de inércia.

O tensor de tensões normais atuantes em cada camada de cada elemento é definido por:

$$\sigma_{camada(j)} = E_{camada(j)}\, \varepsilon_{camada(j)} \tag{235}$$

O tensor dos momentos atuantes em cada camada de cada elemento é definido por:

$$M_{camada(j)} = \frac{\sigma_{camada(j)} I_{camada(j)}}{y_{camada(j)}} \tag{236}$$

em que $I_{camada(j)}$ é tensor dos momentos de inércia de cada camada.

O tensor que contém as rigidezes equivalentes de cada elemento $EI_{eqv\,el}$ é definido a partir da adaptação da equação (217) para a atualização das matrizes de rigidez elementares e consequente atualização da matriz de rigidez global da estrutura, como:

$$EI_{eqv\,el} = \frac{1}{3} b \sum_{j=1}^{nc} E_{camada(j)} \left(y^3_{camada(j)} - y^3_{camada(j-1)} \right) \tag{237}$$

Nota-se que o momento de inércia de cada elemento de seção transversal constante é igual o somatório das inércias das camadas discretizadas desses elementos. Assim, tem-se:

$$I_{el} = \sum_{j=1}^{nc} I_{camada(j)} = \frac{1}{3} b \sum_{j=1}^{nc} \left(y^3_{camada(j)} - y^3_{camada(j-1)} \right) \tag{238}$$

O tensor das tensões atuantes em cada elemento σ_{el} é definido por:

$$\sigma_{el} = \frac{EI_{eqv\,el}\, \varepsilon_{el}}{I_{el}} \tag{239}$$

Segundo Zienkiewicz (1977) a equação de equilíbrio de problemas constitutivos não lineares na mecânica dos sólidos, ou na elasticidade não linear, é dada por:

$$\int_V [B]\{\sigma\} dV + f = 0 \tag{240}$$

em que V é o volume do corpo e os deslocamentos e as deformações são definidos por:

$$\{u\} = [N]\{a\} \qquad \text{e} \qquad \{\varepsilon\} = [L]\{u\} = [B]\{a\} \tag{241}$$

Essa derivação com base no princípio dos trabalhos virtuais, e não em princípios energéticos, é valida para qualquer comportamento material (ZIENKIEWICZ, 1977).

A força interna global $\left\{F_B^{\text{int}}\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)}$ busca a configuração de equilíbrio dinâmico não linear em cada iteração do método *Newton-Raphson* dentro de cada passo de tempo do método de *Newmark*. Suas componentes são as parcelas de forças internas provenientes das tensões atuantes em cada ponto de integração de *Gauss* para cada elemento.

Segundo Bathe (1996), define-se o vetor de forças internas nodais que correspondem as tensões atuantes nos elementos na configuração de equilíbrio analisada como sendo:

$$\left\{F_B^{\text{int}}\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} = \sum_{m=1}^{nel} \int_{V_{t+\Delta t}^{(m)}} \left[B\right]_{t+\Delta t}^{(m)\,T} \left[\sigma\right]_{t+\Delta t}^{(m)} dV_{t+\Delta t}^{(m)} \qquad (242)$$

em que nel representa o número total de elementos da ponte.

Muitas integrais necessárias na aplicação do método dos elementos finitos não são triviais. Ou a primitiva da função integranda não existe ou é muito complicada para viabilizar sua utilização prática. Nesse sentido, há a necessidade de recorrer a técnicas de integração numérica, também chamadas de quadratura. Dentre elas, a mais utilizada é a quadratura de *Gauss* pelo fato de ser facilmente implementada em um algoritmo computacional devido a principal dificuldade estar na escolha de um número de pontos, e suas respectivas posições, que sejam adequados à precisão desejada (COOK et al., 2002).

O vetor de forças internas é calculado para cada ponto de integração de *Gauss* ao longo do elemento por integração numérica através do método da quadratura *Gaussiana*:

$$\int_{-1}^{+1} f\left(x\right)dx = \sum_{i=1}^{np\,\text{int}} f\left(P_i\right)W_{Gauss(i)} \qquad (243)$$

em que $f\left(x\right)$ é uma função polinomial, $np\,\text{int}$ é o número de pontos de integração de *Gauss*, P_i é a posição de um i-ésimo ponto de *Gauss* ou de amostragem e $W_{Gauss(i)}$ é o peso, *weight*, associado a esse i-ésimo ponto de integração.

Assim, aplicando-se a quadratura de *Gauss* na equação (242), tem-se:

$$\left\{F_B^{\text{int}}\right\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} = \sum_{m=1}^{nel} \sum_{p=1}^{np\,\text{int}} \left[B\right]_{t+\Delta t}^{(p,m)T} \left[\sigma\right]_{t+\Delta t}^{(p,m)} J^{(m)} W_{Gauss}^{(p)} \qquad (244)$$

em que J é o valor do integral calculado de acordo com a quadratura de *Gauss* que no caso vale:

$$J = \frac{L_e}{2} \tag{245}$$

em que L_e é o comprimento do elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli* adotado.

Após determinado o vetor de forças internas nodais global para cada iteração dentro de cada passo de tempo, aplicam-se as condições de contorno, as restrições, ao vetor de forças internas global da estrutura.

O vetor de forças residuais, também conhecido como vetor de forças desbalanceadas é calculado por meio da equação (219), como sendo:

$$\{\Delta F\}^{(i)} = \{F_B^{ext}\}_{t+\Delta t} - [M_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\ddot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} - [C_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} \{\dot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} - \{F_B^{\text{int}}\}_{t+\Delta t}^{(i-1)} \tag{246}$$

Ao observar alguns termos da esquerda da equação (219), a matriz de rigidez efetiva é definida por:

$$[K_{EF}] = [K_B]_{t+\Delta t}^{(i-1)} + \frac{[M]_{t+\Delta t}^{(i-1)}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma [C]_{t+\Delta t}^{(i-1)}}{\beta \Delta t} \tag{247}$$

Os deslocamentos são obtidos ao resolver a equação abaixo, também conhecida como equação estática efetiva, através do método de eliminação de *Gauss*:

$$[K_{EF}]\{\Delta u\}^{(i)} = \{\Delta F\}^{(i)} \tag{248}$$

em que o vetor incremental de deslocamentos $\{\Delta u\}^{(i)}$ nada mais é do que a variação dos deslocamentos em cada iteração.

Inicia-se, portanto, a fase das correções das respostas dinâmicas da estrutura com o vetor incremental de deslocamentos e com os vetores preditores obtidos na iteração, através das seguintes equações:

$$\{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i+1)} = \{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i)} + \{\Delta u\}^{(i)} \tag{249}$$

$$\{\ddot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i+1)} = \frac{1}{\beta \Delta t^2}\left(\{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i+1)} - \{\tilde{u}_B\}_{t+\Delta t}\right) \tag{250}$$

$$\{\dot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i+1)} = \{\tilde{\dot{u}}_B\}_{t+\Delta t} + \gamma \{\ddot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i+1)} \Delta t \tag{251}$$

Verificam-se os critérios de convergência com as equações (153), (154) e (155). Caso não se obtenha convergência numérica em um dos três critérios, incrementa-se o índice contador de iterações i em uma unidade, e reinicia-se o método de *Newton-Raphson*, modificado ou completo, da sessão 3.6.3 com as respostas dinâmicas obtidas da iteração anterior até atingir a convergência.

Quando a convergência for obtida nos três critérios, chega-se ao fim do processo iterativo de *Newton-Raphson* e as respostas dinâmicas para determinado passo de tempo correspondem aos últimos valores obtidos na iteração, ou seja:

$$\{u_B\}_{t+\Delta t} = \{u_B\}_{t+\Delta t}^{(i+1)} \tag{252}$$

$$\{\dot{u}_B\}_{t+\Delta t} = \{\dot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i+1)} \tag{253}$$

$$\{\ddot{u}_B\}_{t+\Delta t} = \{\ddot{u}_B\}_{t+\Delta t}^{(i+1)} \tag{254}$$

Obtendo as respostas dinâmicas não lineares ao final de iteração dentro do passo de tempo desejado, retorna-se à sessão 3.6.2 e dá-se um novo passo de tempo sempre que se desejar calcular os deslocamentos, velocidade, acelerações, etc., para um novo tempo até se atingir o tempo final de análise, em que o processo é encerrado.

4 ANÁLISES NUMÉRICAS

4.1 EXEMPLO DE VIGA BIAPOIADA COM CARREGAMENTO ESTÁTICO CRESCENTE

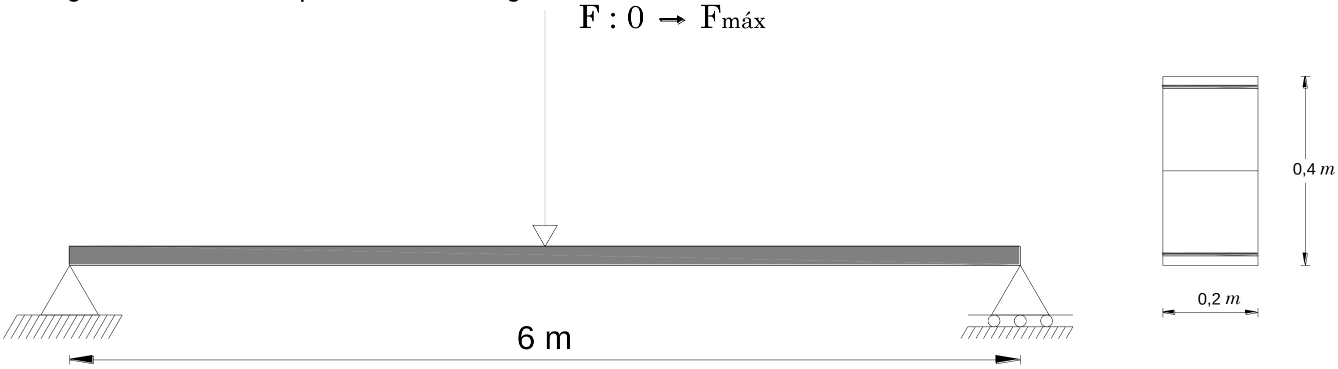
Como primeiro exemplo, tem-se por objetivo comparar as respostas estáticas lineares de uma viga de concreto armado com as respostas estáticas não lineares através da mecânica do dano, quando esta é solicitada por uma carga estática crescente aplicada no centro do vão. Utiliza-se o método dos elementos finitos para discretização do domínio. A perda de rigidez do material pela mecânica do dano faz com que o problema se torne estático não linear pelo fato das forças não mais dependerem dos deslocamentos. Dessa forma, para obter uma boa acurácia dos resultados faz-se necessário utilizar incrementos de cargas pequenos suficientes para captar mínimas variações nas respostas. Assim, é necessário um histórico preciso do carregamento aplicado bem como os consequentes históricos dos deslocamentos para perceber os efeitos mais próximos da realidade. Não são consideradas as parcelas dinâmicas da massa e do amortecimento no problema em questão. O efeito temporal também não é considerado. Por esse motivo, utilizam-se somente passos de carga, não são utilizados passos de tempo. Portanto, a solução numérica deste exemplo é feita de maneira incremental e iterativa através do método numérico de solução não linear de *Newton-Raphson*, mas poderia ser utilizado o método de *Newton-Raphson* modificado se desejado, em que dentro de cada passo de carga inicia-se o processo iterativo com quantas iterações forem necessárias até atingir a convergência e ao atingí-la armazenam-se os máximos deslocamentos obtidos na convergência e dá-se um novo passo de carga.

O trabalho atual não teve como objetivo analisar o critério de falha do material, que pode ser sugerido para trabalhos futuros, mas preocupou-se apenas em comparar as respostas de deslocamento estático linear e não linear. A danificação do material não é alterada por essa questão. Na verdade, o critério de falha poderia informar para qual estado de danificação do material ocorreria o fenômeno da ruptura. O mesmo também é muito usado como um critério de segurança, pois se o estado de tensões num determinado ponto analisado apresentar resultado inferior ao limite estabelecido haverá segurança do material, mesmo se ele estiver danificado.

Para uma abordagem sobre os diversos critérios de falha utilizados para o concreto, recomenda-se a teoria de *Rankine* encontrada no trabalho de Jekins (1920), a teoria da deformação máxima, uma extensão da teoria de *Saint-Venant*, encontrada no trabalho de Waddups (1967), o critério de falha de *Mohr-Coloumb*, a teoria de *Hill* encontrada em Hill (1948), teoria de *Tsai-Hill* (PERRUT, 2009) e a teoria de *Tsai-Wu* (TSAI & WU, 1971; SOUZA & MACHADO, 2013).

A Figura 22 ilustra a viga biapoiada com uma carga crescente concentrada no meio do vão em sua vista lateral, onde se observa a posição dos apoios e as condições de contorno, bem como a vista frontal, que ilustra a seção transversal da viga e suas camadas materiais.

Figura 22 – Ponte biapoiada com carregamento estático crescente



Fonte: O autor.

Ao observar a Figura 22, nota-se que o carregamento varia de 0 até um carregamento máximo definido como $F_{máx}$. Essa variação de força aplicada, nesta sessão, não considera os efeitos temporais relativos à duração do carregamento aplicado. Na verdade, o carregamento é aplicado estaticamente, o método iterativo de *Newton-Raphson* busca o equilíbrio estático não linear dos esforços até a convergência que, depois de atingida, inicia-se um novo carregamento com os resultados do passo de carga anterior.

4.1.1 Dados de entrada do exemplo 4.1

Os dados de entrada do exemplo 4.1 são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 – Dados de entrada do exemplo 4.1

Dados de entrada	
Viga	Força
$L_b = 6\ m$	$F_{máx} = 40\,kN$
$b = 0.2\ m$	$100\ Passos\ de\ Força$
$h = 0.4\ m$	$\Delta F = 0.4\,kN$
$I = 0.001067\ m^4$	
$20\ Elementos$	Tolerâncias
$2\,gl/nó$	$tol_u = 0.00001$
$Biapoiada$	$tol_F = 0.00001$
$c = 2\ cm$	$tol_E = 0.00001$
$\rho = \frac{A_s}{A_c} = 0.928938\%$	

Fonte: O autor.

Os parâmetros materiais do exemplo 4.1 são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Parâmetros materiais do exemplo 4.1

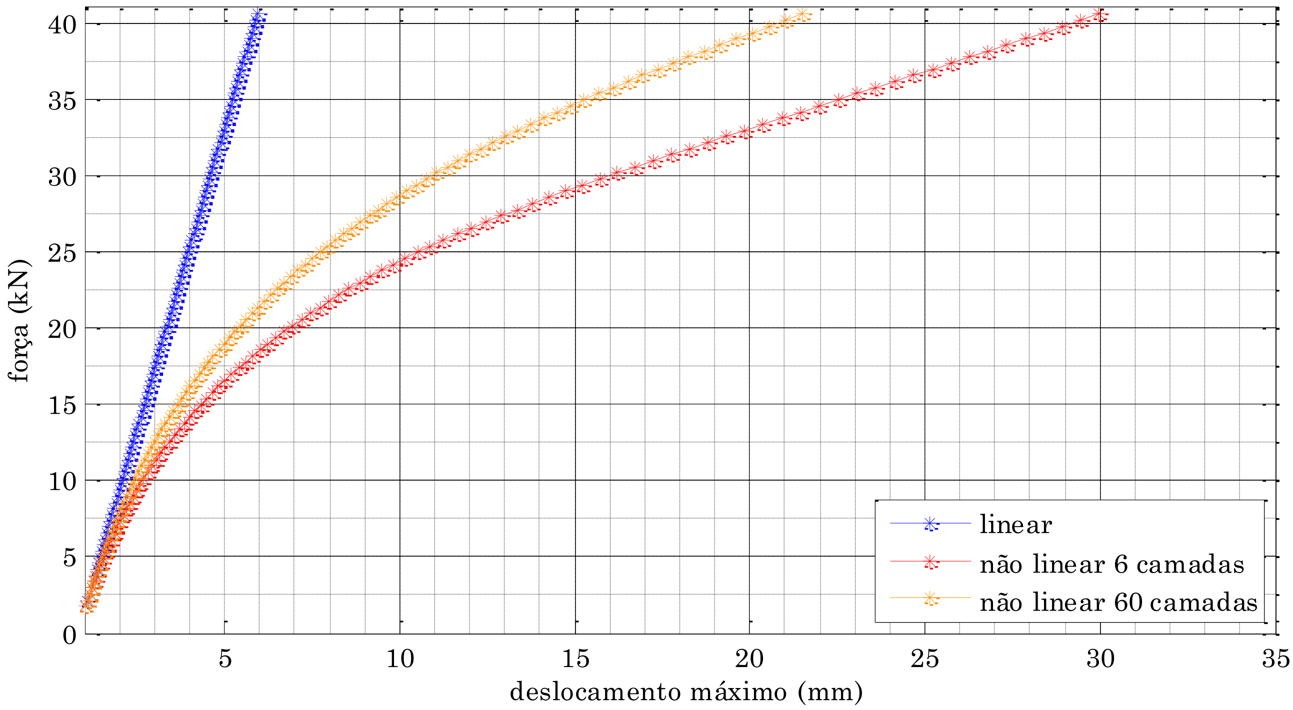
Parâmetros materiais	
Concreto	Aço
$E_c = 29.43\,GPa$	$E_s = 210\,GPa$
$\nu_c = 0.2$	$\nu_s = 0.3$
$6\,Camadas$	$2\,Camadas$
$A_T = 0.995$	$k_s = 0.85$
$B_T = 30{,}000.00$	$d = 0.379080\ m$
$A_C = 1.2$	$d' = 0.020920\ m$
$B_C = 1{,}050.00$	
$\varepsilon_{d0} = 5.10^{-5}$	

Fonte: O autor.

4.1.2 Análise estática linear e não linear dos deslocamentos máximos

A Figura 23 compara as respostas estáticas lineares com as estáticas não lineares de deslocamento no ponto de aplicação da carga, conforme sua variação.

Figura 23 – Relação força vs. deslocamento comparando respostas estáticas lineares e não lineares



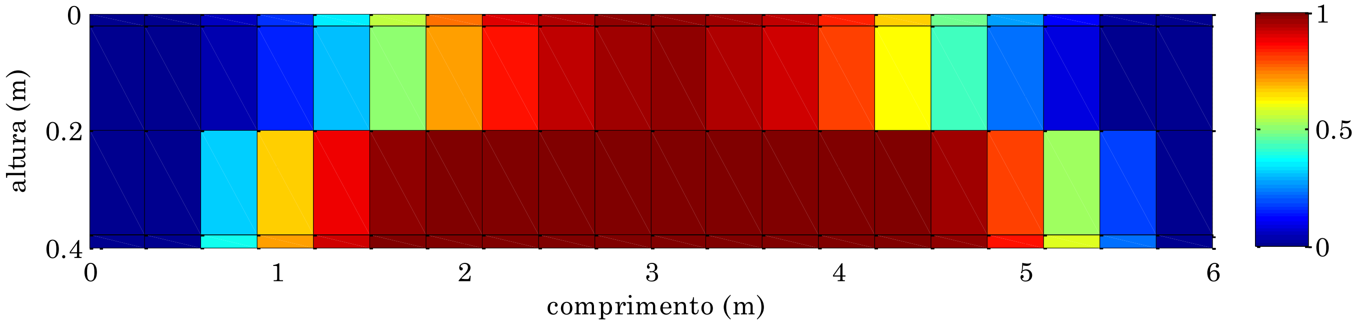
Fonte: O autor.

Observa-se que para o mesmo carregamento, a estrutura apresenta respostas diferentes de deslocamento. Ou seja, as respostas estáticas de deslocamento, para determinados carregamentos, não dependem mais linearmente das forças, o que caracteriza a não linearidade. Para esses trechos não lineares, a lei de *Hooke* não é mais verdadeira, necessitando maiores deslocamentos para obter-se o equilíbrio.

Também se observa que os deslocamentos foram maiores na discretização com 6 camadas do que na discretização com 60 camadas. Como a danificação ocorre homogeneamente dentro de cada camada, numa discretização com um menor número de camada cada uma terá uma área mais expressiva da viga sendo danificada, provocando uma danificação mais proeminente. Na discretização com 60 camadas, a viga foi dividida em mais camadas e, por isso, cada uma teve uma área de igual danificação menor do que a anterior, resultando numa danificação melhor distribuída que representa melhor a realidade.

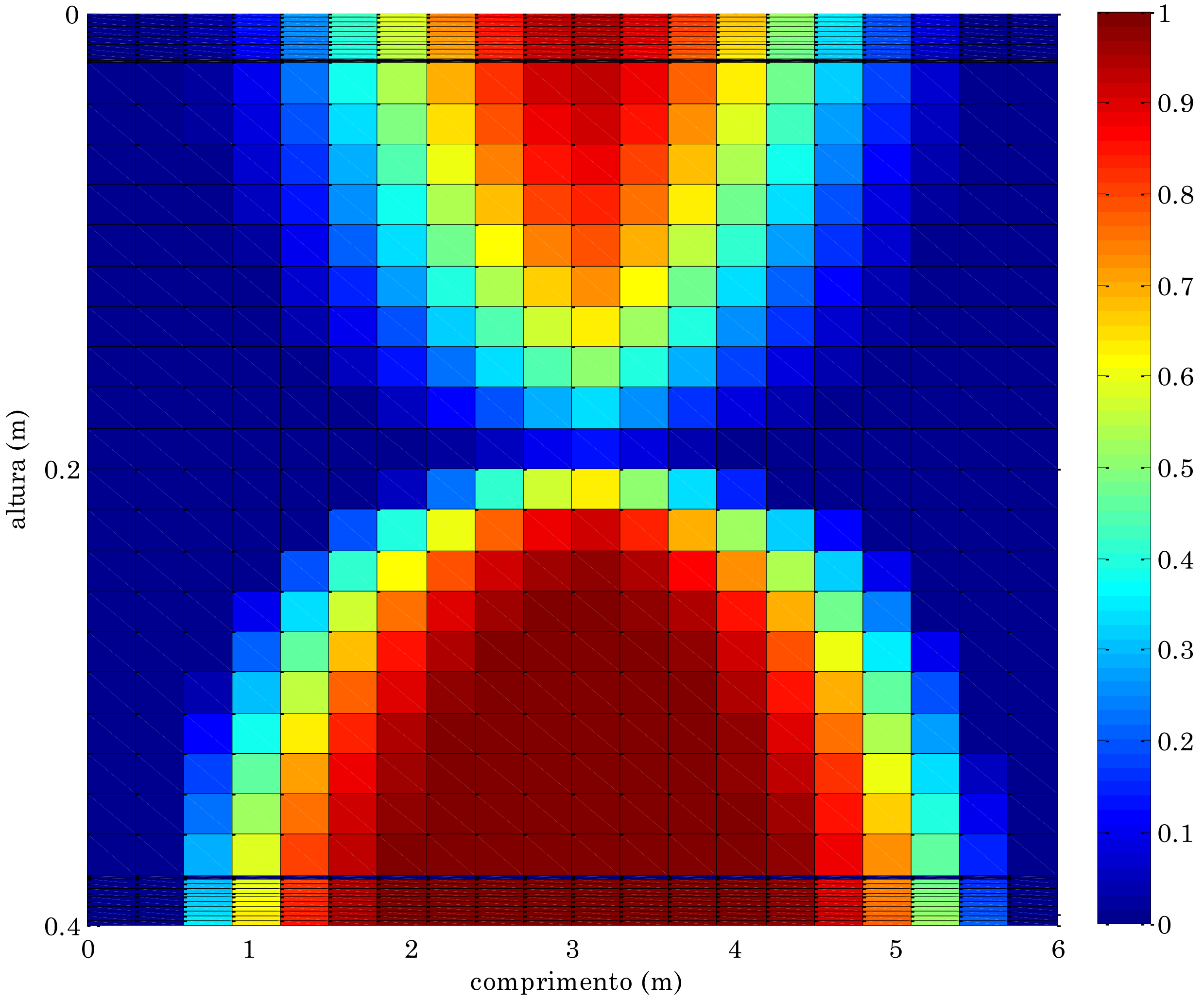
Para melhor entender a distribuição dos danos na viga analisada, a Figura 24 e a Figura 25 apresentam a configuração danificada da viga discretizada em 6 e 60 camadas, respectivamente.

Figura 24 – Danos discretizados em 6 camadas obtidos ao final da análise estática não linear



Fonte: O autor.

Figura 25 – Danos discretizados em 60 camadas obtidos ao final da análise estática não linear



Fonte: O autor.

Nota-se uma melhor distribuição dos danos na discretização em 60 camadas, resultando em uma melhor aproximação da realidade. Para isso, cada uma das 6 camadas discretizadas na Figura 24 foi dividida em outras 10 novas camadas na

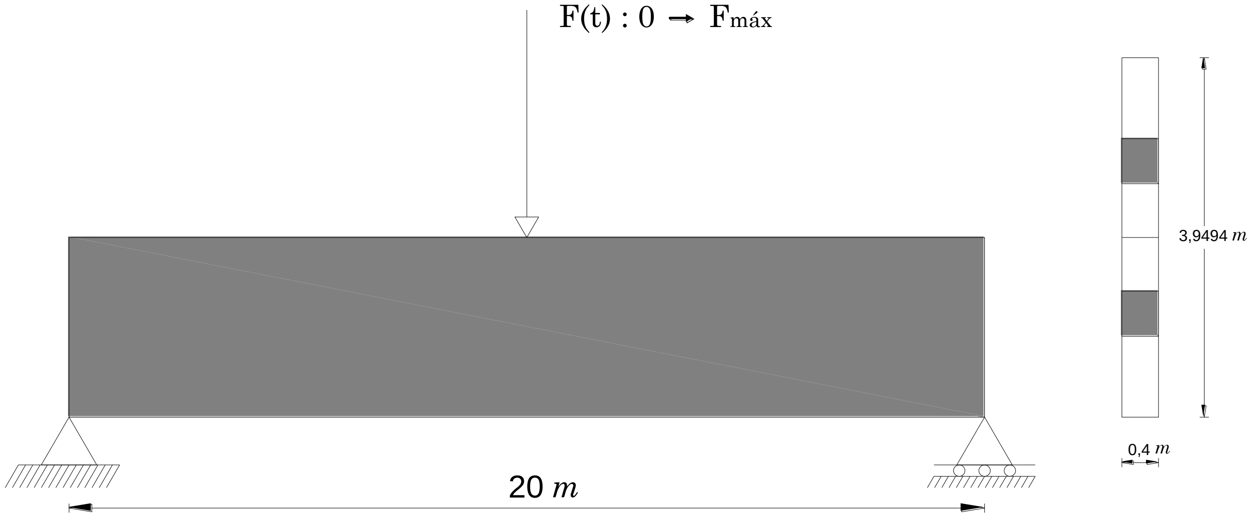
Figura 25. Desse modo, as regiões mais solicitadas, no bordo inferior e superior, mais distantes da minha neutra, têm um melhor refino de camadas o qual melhora a distribuição do dano e consequentemente melhora as respostas estáticas não lineares de deslocamento. Na discretização com 6 camadas, por sua vez, a danificação mais proeminente gerou deslocamentos excessivos.

4.2 EXEMPLO DE PONTE BIAPOIADA COM CARREGAMENTO CRESCENTE AO LONGO DO TEMPO

A sessão 4.1, anterior, comparou as respostas estáticas lineares com as respostas estáticas não lineares através da mecânica do dano de uma viga sujeita a uma carga concentrada crescente aplicada no meio do vão. No intuito de melhor entender o comportamento dinâmico de uma viga perante cargas concentradas crescentes aplicadas no meio do vão, sem, ainda, entrar na questão dinâmica não linear através da mecânica do dano, esta sessão ilustra uma viga em que o carregamento concentrado é aplicado e mantido durante certo período de tempo e tem sua intensidade aumentada em certos passos de tempo. Ou seja, há passos de carga em determinados passos de tempo.

A Figura 26 ilustra o exemplo analisado nesta sessão.

Figura 26 – Ponte biapoiada com carregamento crescente ao longo do tempo



Fonte: O autor.

4.2.1 Dados de entrada do exemplo 4.2

A Tabela 4 apresenta os dados de entrada do exemplo 4.2.

Tabela 4 – Dados de entrada do exemplo 4.2

Dados de Entrada		
Ponte		Força
$L_b = 20\,m$	$E_c = 29.43\,GPa$	$F_{máx} = 40\,kN$
$b = 0.4\,m$	$\nu_c = 0.2$	100 *Passos de Força*
$h = 3.9494\,m$	$E_s = 210\,GPa$	$\Delta F = 0.4\,kN$
$I = 3.81\,m^4$	$\nu_s = 0.3$	10,000 *Passos de Tempo*
$m = 5{,}951.72\,kg/m$	$k_s = 0.85$	100 PT/PF
$\zeta = 0.025$	6 *Camadas*	$dt = 7.2e^{-4}s$
$\omega_{n1} = 46.1537\,rad/s$	50,000 *Passos de Tempo*	
20 *Elementos*	*Newmark* $(0.5\ e\ 0.25)$	Tolerâncias
$2\,gl/nó$	*Biapoiada*	$tol_u = 0.00001$
$c = 88.92\ cm$	$d = 2.812439\ m$	$tol_F = 0.00001$
$\rho = \frac{A_s}{A_c} = 33.496631\%$	$d' = 1.136944\ m$	$tol_E = 0.00001$

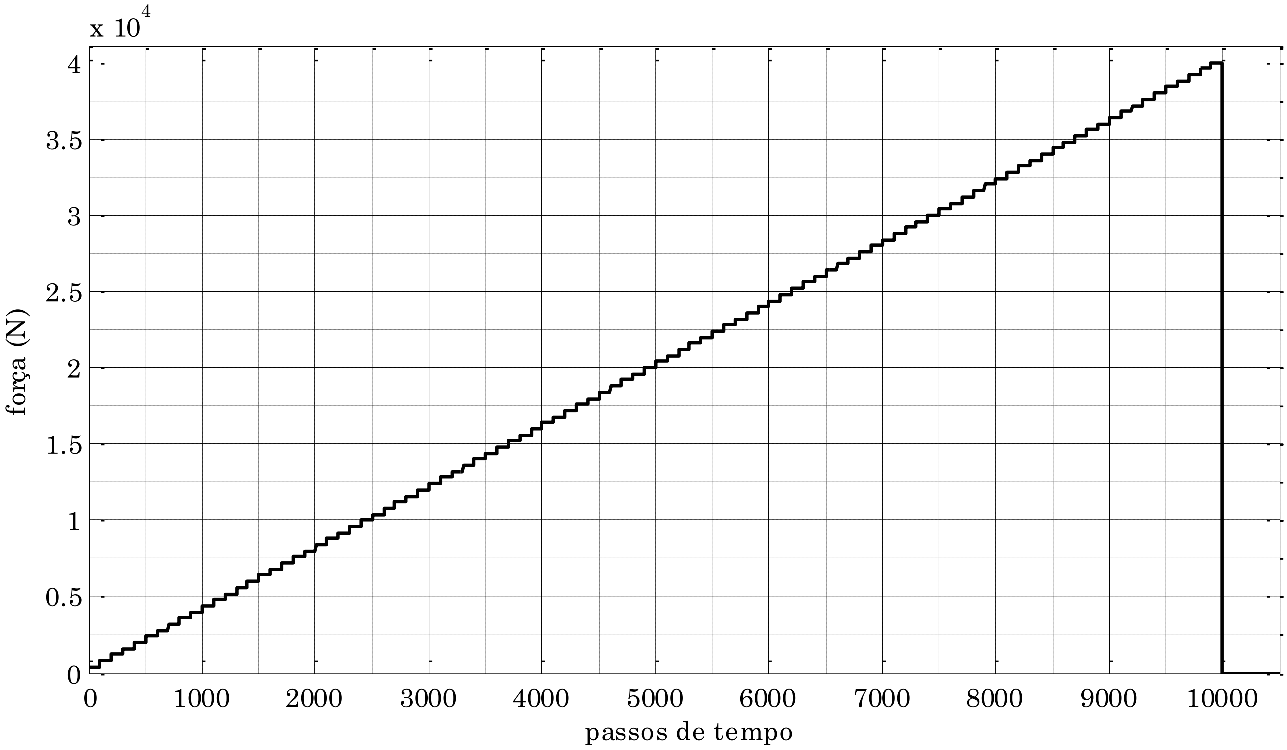
Fonte: O autor.

Embora a força máxima aplicada seja a mesma do exemplo anterior, agora há inclusão de passos de tempo de modo a analisar a estrutura dinamicamente. Além disso, a geometria da ponte é totalmente alterada de modo a evitar a danificação do material, a qual provocaria uma perda de rigidez na estrutura da ponte, para apenas analisar os efeitos dinâmicos provocados pelo carregamento sem influência do dano.

Embora seja a mesma carga final aplicada seja a mesma da sessão anterior, agora ela é dividida em passos de tempo além dos passos de cargas anteriormente abordados. Assim, a variação da força máxima agora leva em consideração os efeitos temporais de duração da carga aplicada. Nesse sentido, pode-se perceber que o carregamento aplicado é um carregamento dinâmico que não varia de posição, mas varia de intensidade, o que poderia ser erroneamente confundindo com um carregamento estático. No entanto, diferentemente da análise estática, na análise dinâmica o período de tempo em que a carga é aplicada tem importância na análise. Assim, na análise dinâmica, a grandeza temporal é introduzida ao problema bem como os efeitos da massa e do amortecimento.

A Figura 27 apresenta o diagrama da força concentrada aplicada ao longo do tempo.

Figura 27 – Diagrama da força concentrada ao longo do tempo

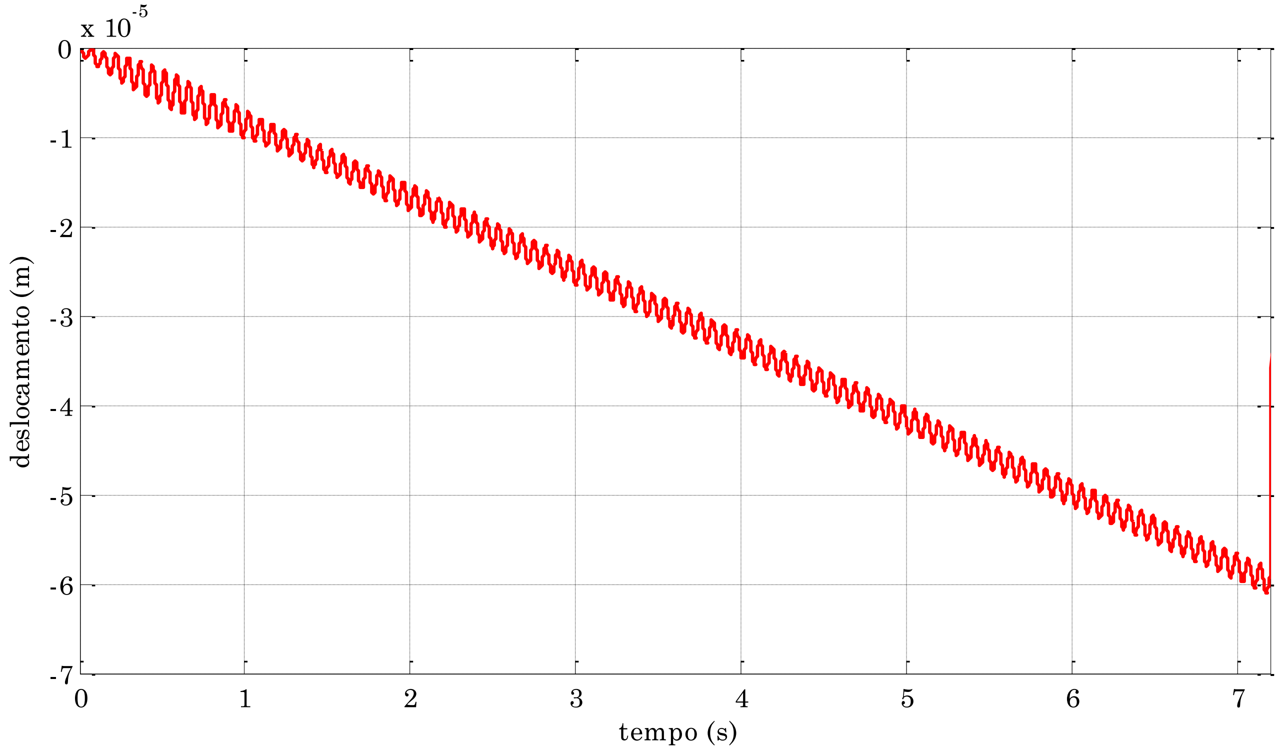


Fonte: O autor.

4.2.2 Análise dinâmica linear da ponte

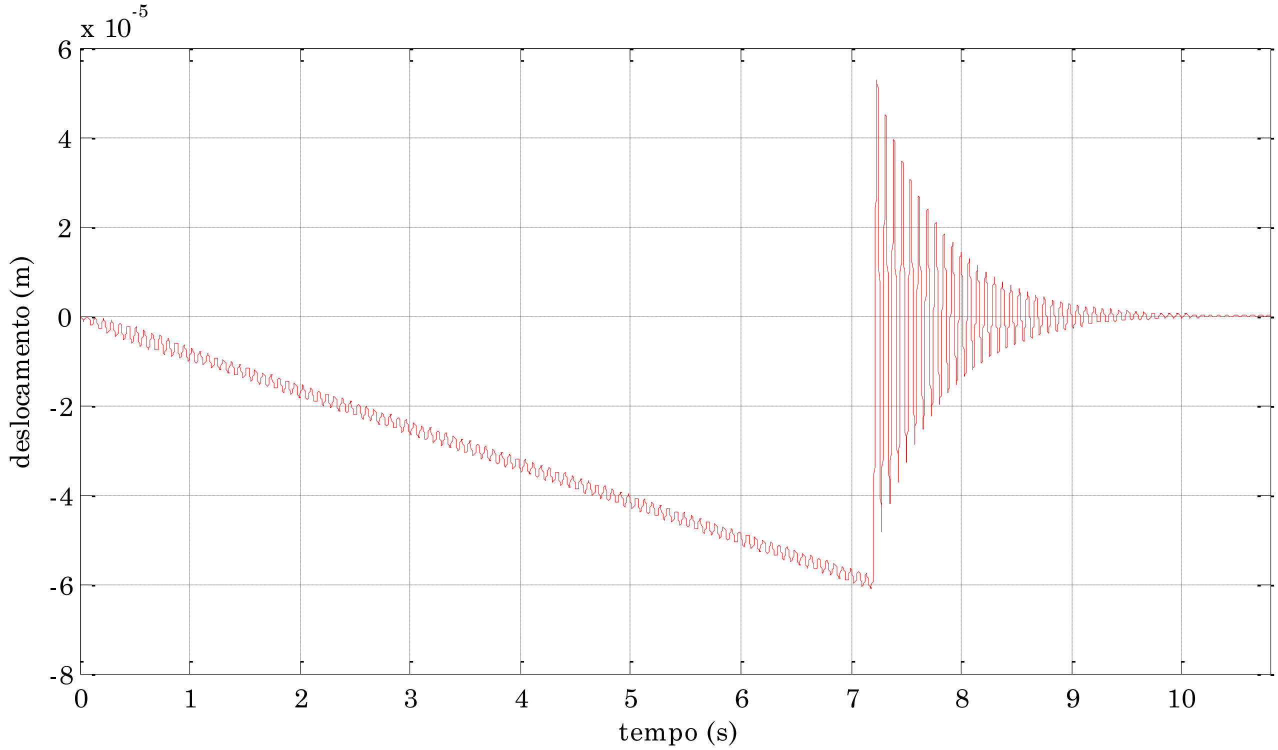
Abaixo são apresentadas as figuras representando os resultados obtidos com a simulação numérica dinâmica linear, considerando a seção transversal da ponte, com a rotina dinâmica não linear que contempla a análise pela mecânica do dano. No entanto, os dados de entrada do exemplo atual foram criteriosamente escolhidos de modo a não permitir danos na análise. Deste modo, ao não haver deformações grandes suficientes para provocar alguma danificação do material, a análise passa a ser dinâmica linear incluindo verificação de deformações. A Figura 28 e a Figura 29 apresentam as respostas dinâmicas de deslocamento, a Figura 30 e a Figura 31 apresentam as respostas dinâmicas de velocidade e a Figura 32, a Figura 33 e a Figura 34 apresentam as respostas dinâmicas de aceleração, todas para diferentes instantes de tempo no meio do vão.

Figura 28 – Resposta dinâmica de deslocamento



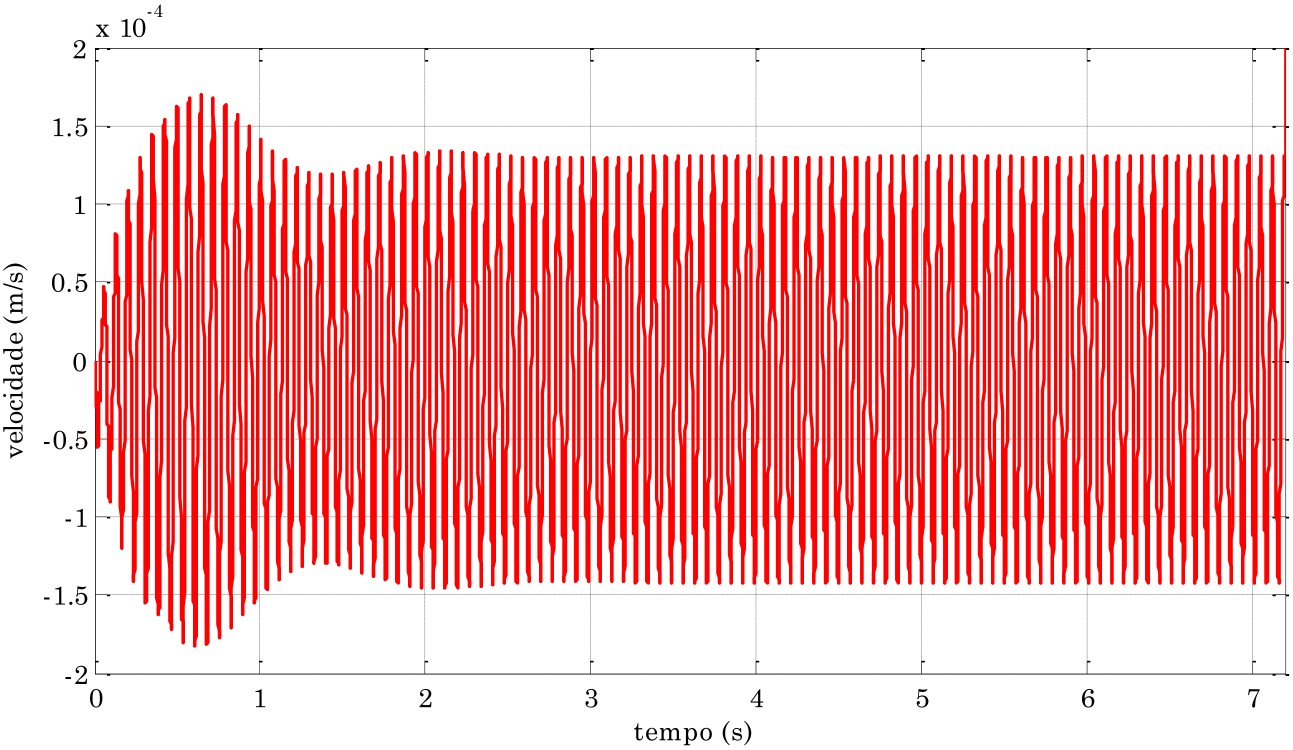
Fonte: O autor.

Figura 29 – Resposta dinâmica de deslocamento até a estabilização da vibração



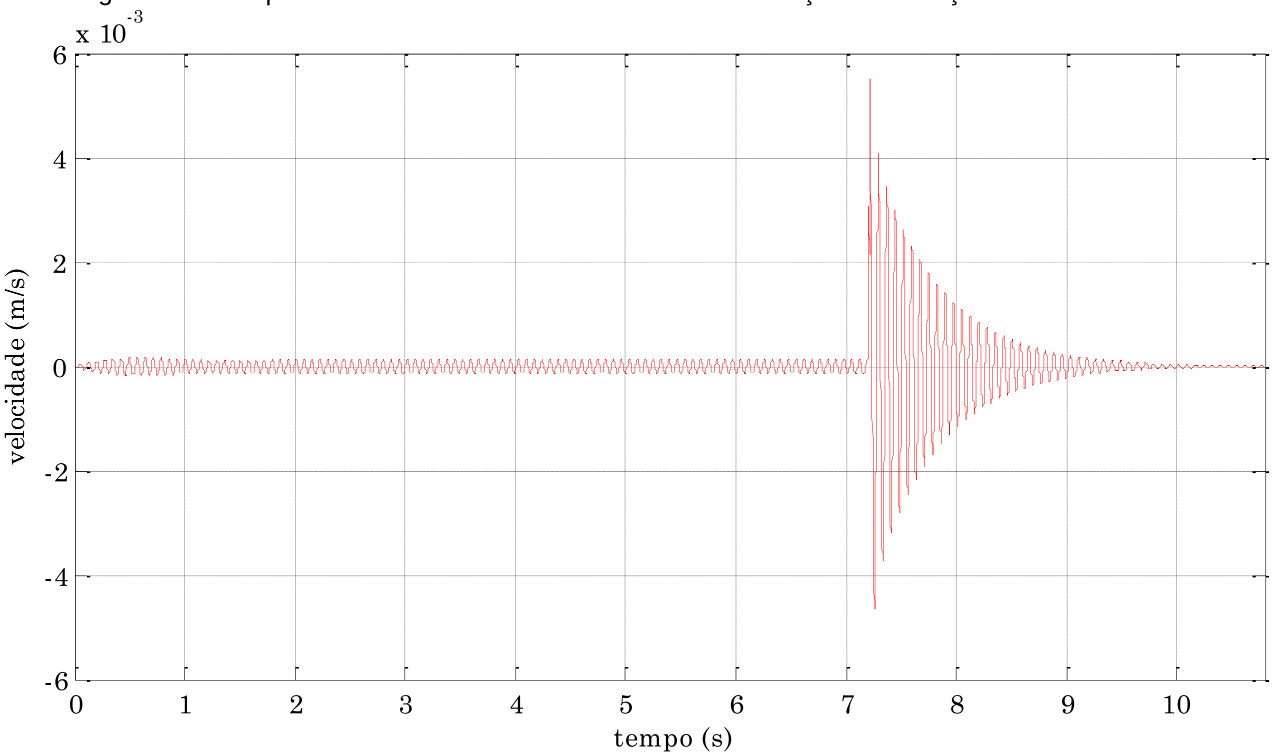
Fonte: O autor.

Figura 30 – Resposta dinâmica de velocidade



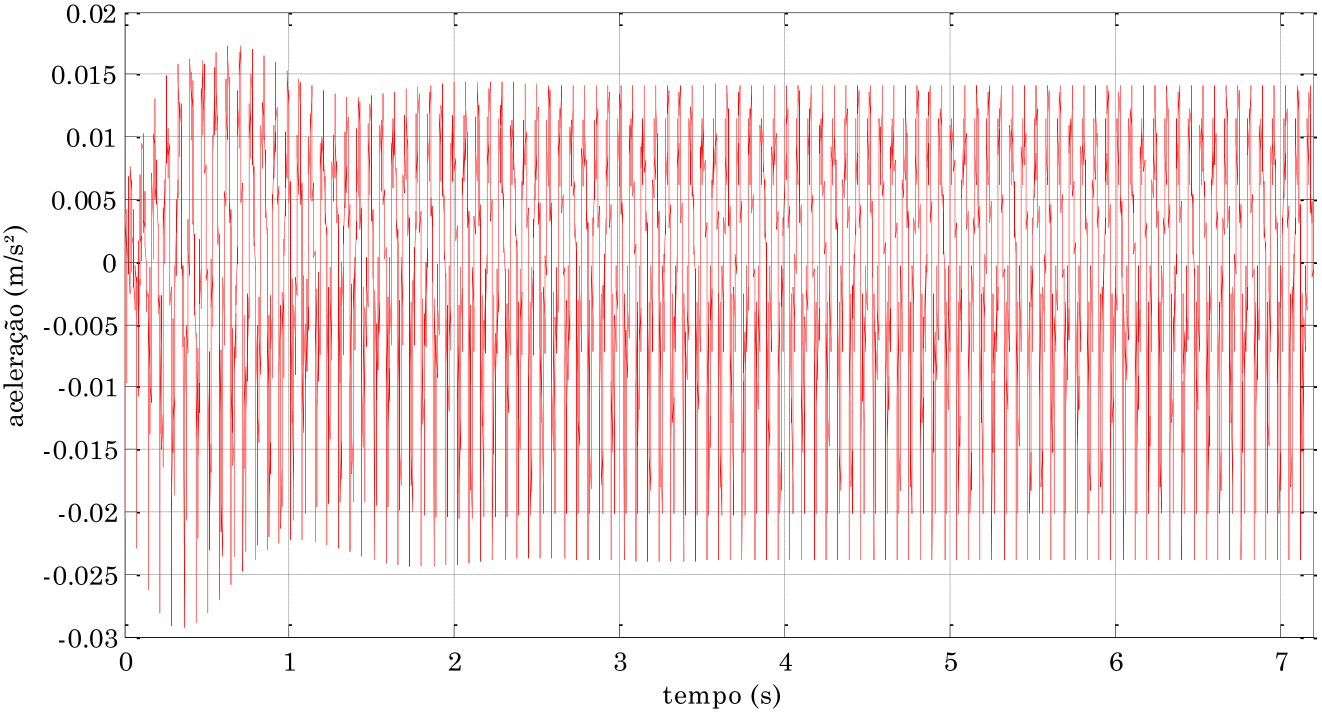
Fonte: O autor.

Figura 31 – Resposta dinâmica de velocidade até a estabilização da vibração



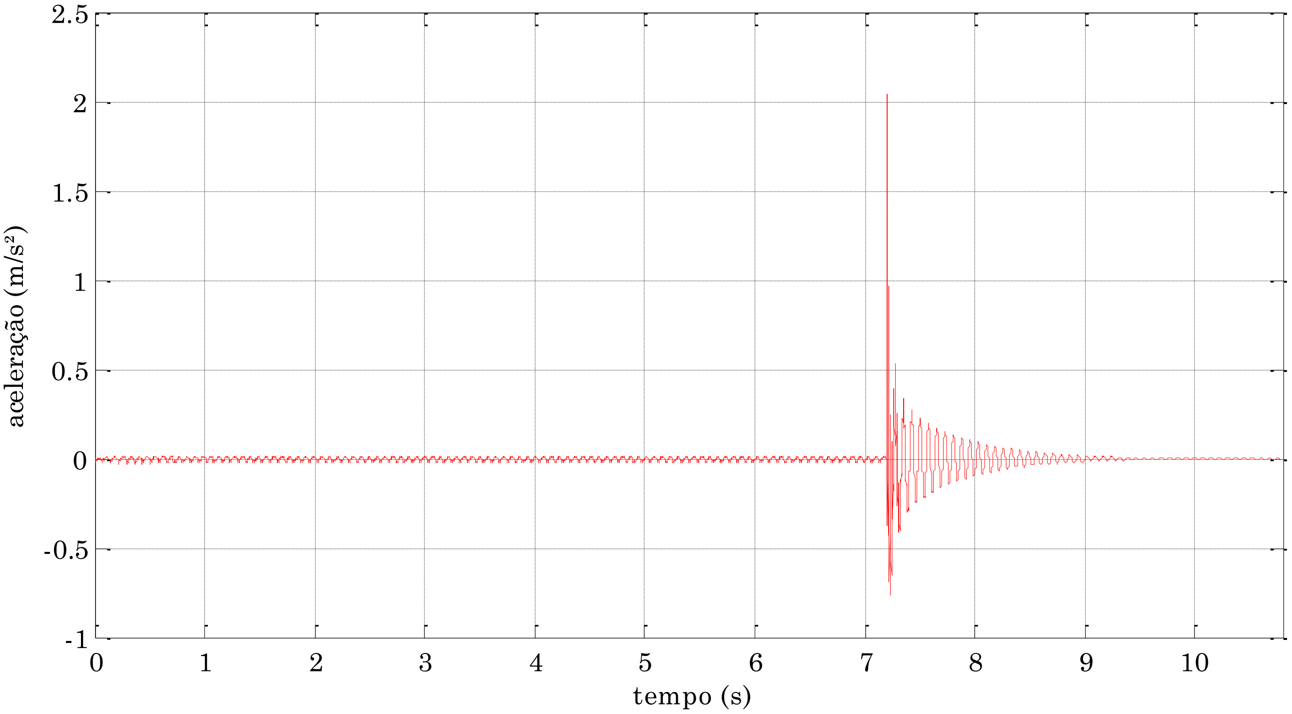
Fonte: O autor.

Figura 32 – Resposta dinâmica de aceleração



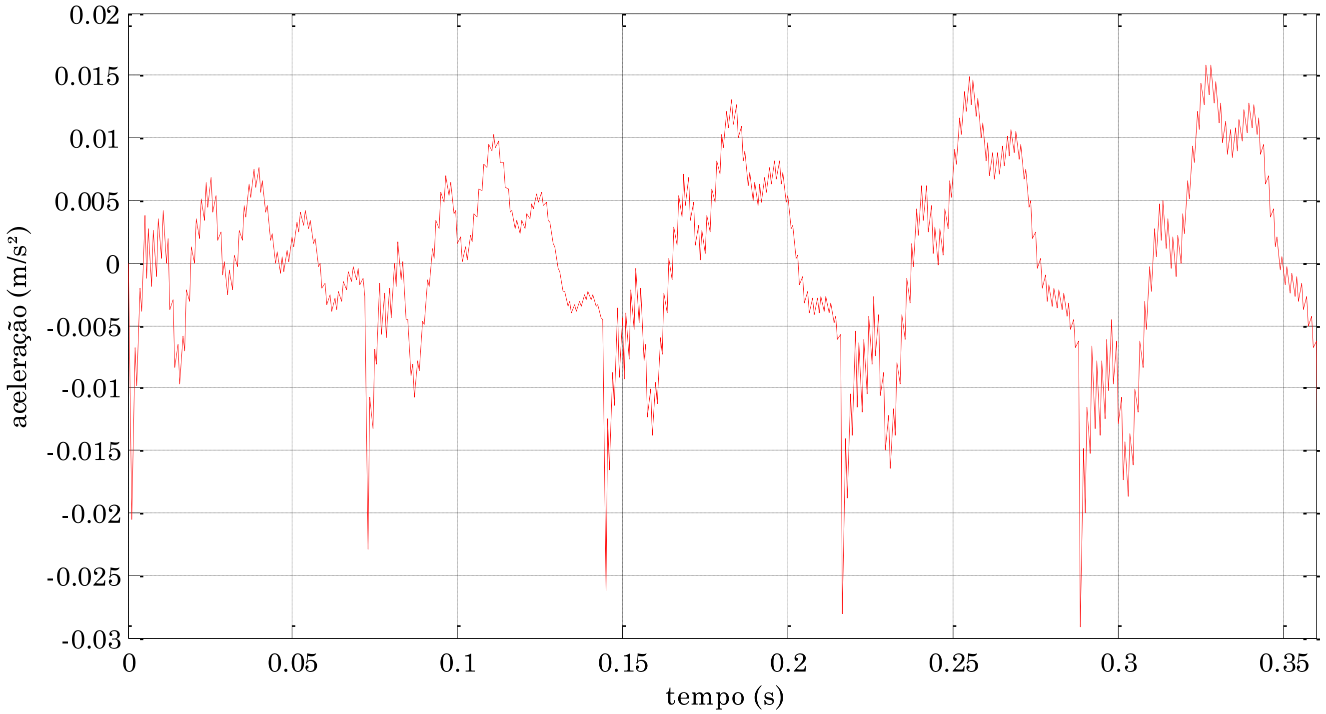
Fonte: O autor.

Figura 33 – Resposta dinâmica de aceleração até a estabilização da vibração



Fonte: O autor.

Figura 34 – Resposta dinâmica de aceleração analisada até 0.36 s



Fonte: O autor.

Nas respostas dinâmicas de deslocamento, apresentadas na Figura 28, observa-se a oscilação da resposta por conta da vibração da estrutura. Por não haver danificação do material, a resposta cresce linearmente com o aumento da carga. Na Figura 29 nota-se a ação do amortecimento estrutural de forma mais nítida, principalmente após a retirada do carregamento. Para tentar estabilizar a estrutura, o amortecimento faz com que a resposta oscile entre valores positivos e negativos de deslocamento no intuito de dissipar a energia do sistema.

Nas respostas dinâmicas de velocidade, apresentadas na Figura 30, há um comportamento transiente, com variações de oscilação, no início da análise e um comportamento harmônico após estabilização da vibração. Novamente, analisando a Figura 31, o amortecimento faz com que a resposta tenha grandes variações de amplitude fazendo com que a energia seja dissipada e estabilizando a estrutura.

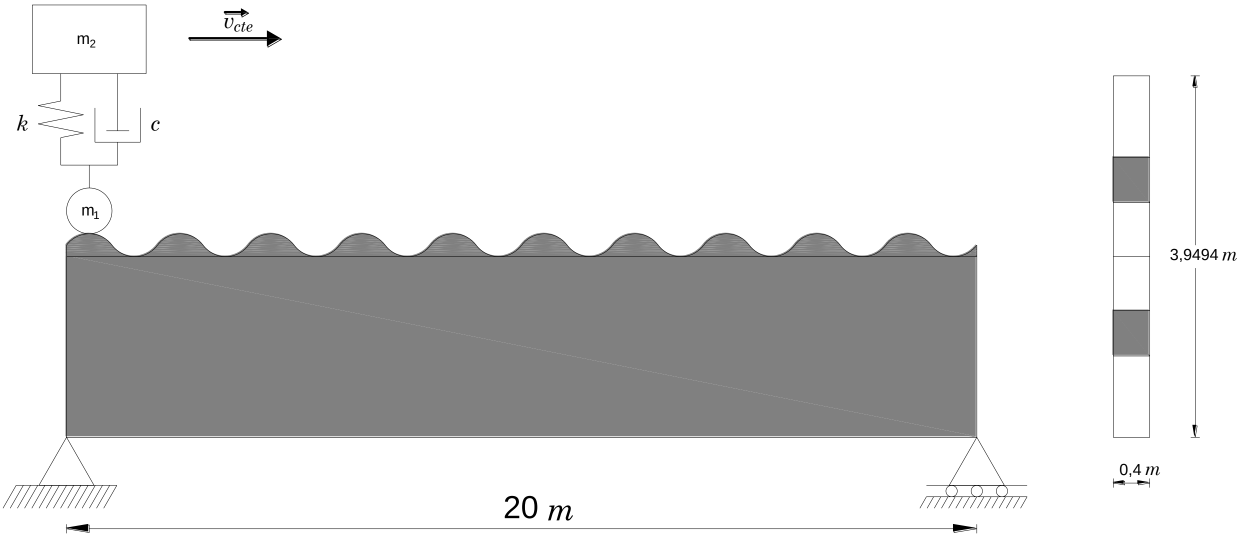
O comportamento transiente pré-estabilização também e o comportamento harmônico pós-estabilização são observados nas acelerações da Figura 32. O amortecimento traz grandes oscilações de amplitude na Figura 33, com grandes picos iniciais para dissipar mais rapidamente a energia. A Figura 34 apresenta com maior clareza o comportamento transiente inicial da estrutura antes da estabilização da vibração. As acelerações têm valores positivos e negativos.

4.3 EXEMPLO DINÂMICO LINEAR DE PONTE COM IRREGULARIDADES SENOIDAIS E VEÍCULO TRANSEUNTE CONSIDERANDO A RIGIDEZ CONSTANTE

Neste exemplo, usa-se o modelo de veículo m.m.a. (massa-mola-amortecedor) que é caraterístico dos modelos de veículos ferroviários, mas que são utilizados, também, em modelos de veículos rodoviários. O veículo passante, ou transeunte, em velocidade constante com uma massa suspensa de 17.6 tf e uma massa não suspensa, da roda, de 4.4 tf, atravessa uma ponte ferroviária de concreto armado com 20 metros de vão que possui irregularidades harmônicas senoidais, em sua pista, de 5 mm de amplitude e 1 m de comprimento de onda. O contato entre os sistemas se da através das irregularidades da via. Não há descolamento do veículo com a superfície das irregularidades ao se verificar a força atuante na roda, sendo esta uma verificação da condição de segurança, estabilidade e até mesmo conforto para o sistema. Na presente análise, toma-se como exemplo uma carga móvel passante suficientemente baixa para não produzir nenhum dano na estrutura da ponte, no intuito de se comparar as respostas estáticas com as respostas dinâmicas lineares.

A Figura 35, a seguir, ilustra o exemplo atual.

Figura 35 – Ilustração da interação dinâmica linear do exemplo 4.3



Fonte: O autor.

4.3.1 Dados de entrada do exemplo 4.3

A Tabela 5 apresenta os dados de entrada da sessão 4.3, diferenciando os dados de entrada do veículo, das irregularidades e da ponte analisada.

Tabela 5 – Dados de entrada do exemplo 4.3

Dados de entrada			
Veículo	Irregularidades	Ponte	
$m_1 = 4{,}400\ kgf$	$y = A\sin(\omega_e t)$	$L_b = 20\ m$	$E_c = 29.43\ GPa$
$m_2 = 17{,}600\ kgf$	$A = 0.005\ m$	$b = 0.4\ m$	$\nu_c = 0.2$
$k = 9{,}120\ kN/m$	$l = 1\ m$	$h = 3.9494\ m$	$E_s = 210\ GPa$
$c = 96\ kNs/m$	$f_I = 13.8889\ Hz$	$I = 3.81\ m^4$	$\nu_s = 0.3$
$v = 50\ km/h$	$\omega_{eI} = 87.2665\ rad/s$	$m = 5{,}951.72\ kg/m$	$k_s = 0.85$
$\omega_{nv} = 20.3604\ rad/s$	$2{,}000\ P.\ de\ Tempo$	$\omega_{n1} = 46.1537\ rad/s$	$6\ Camadas$
$2{,}000\ P.\ de\ Tempo$		$\zeta = 0.025$	$dt = 7.2e^{-4}s$
		$20\ Elementos$	$c = 88.92\ cm$
		$10{,}000\ P.\ de\ Tempo$	$d = 2.812439\ m$
		$Newmark\ (0.5\ e\ 0.25)$	$d' = 1.136944\ m$
		$\rho = \frac{A_s}{A_c} = 33.496631\%$	

Fonte: O autor.

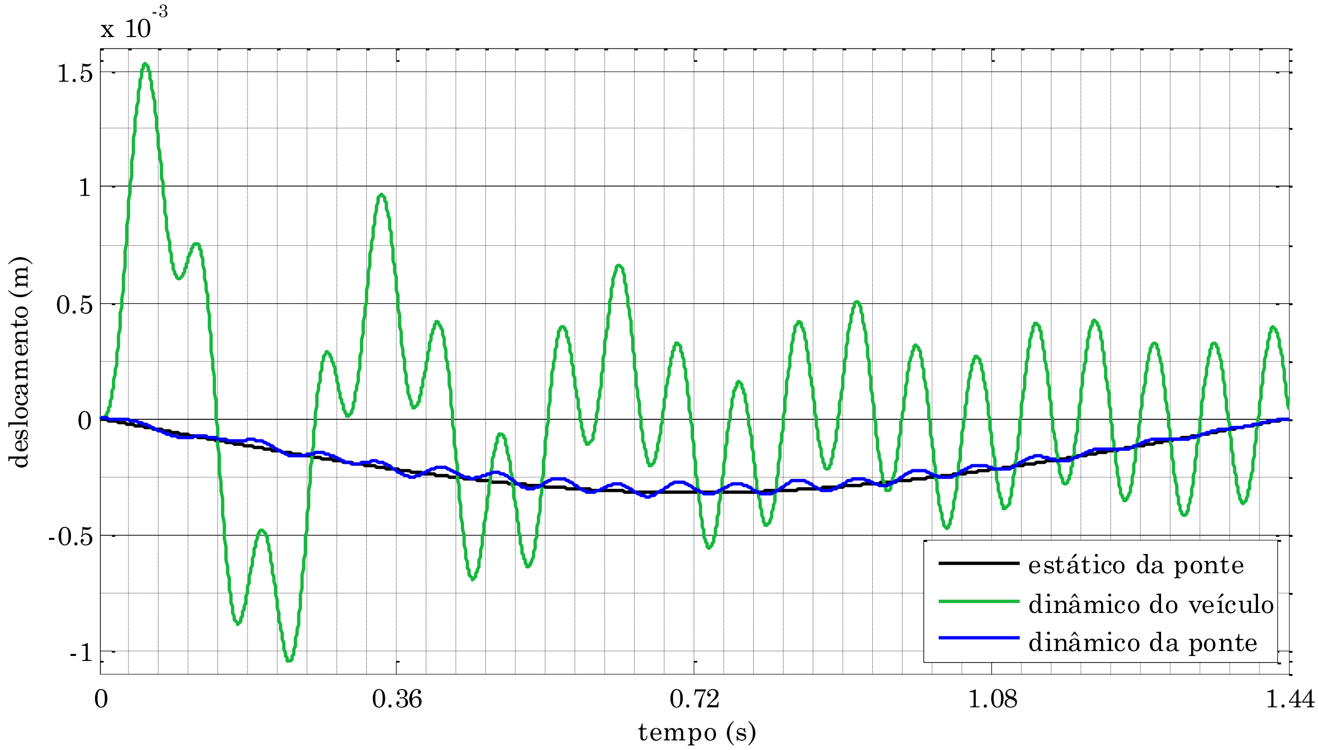
Nota-se que tanto o veículo como as irregularidades da via possuem $2{,}000$ passos de tempo, enquanto a ponte possui $10{,}000$ passos de tempo. Como se trabalha tanto no domínio do tempo como no domínio do espaço, que é a posição, isso representa a duração do veículo passando pela ponte e das irregularidades da mesma. Já os $10{,}000$ passos de tempo utilizados na análise, que incluem os $2{,}000$ passos de tempo, representam a duração dos tempos de análise da ponte durante e após o veículo sair da mesma, em que o efeito do amortecimento tenta estabilizar a estrutura.

Embora a rotina utilizada essa sessão não mostre a geometria da seção transversal da ponte apenas considerando o momento de inércia constante da ponte e o módulo de deformação do material para determinação da rigidez, a geometria foi abordada nos dados de entrada de modo a definir a rigidez equivalente constante na ponte. De qualquer modo, apenas o momento de inércia e o módulo de deformação do material são suficientes para essa análise.

4.3.2 Análise das respostas estáticas e dinâmicas lineares dos sistemas

A Figura 36 apresenta os deslocamentos estáticos e dinâmicos lineares no centro da ponte, bem como os deslocamentos dinâmicos lineares do veículo.

Figura 36 – Deslocamentos dos sistemas do exemplo 4.3

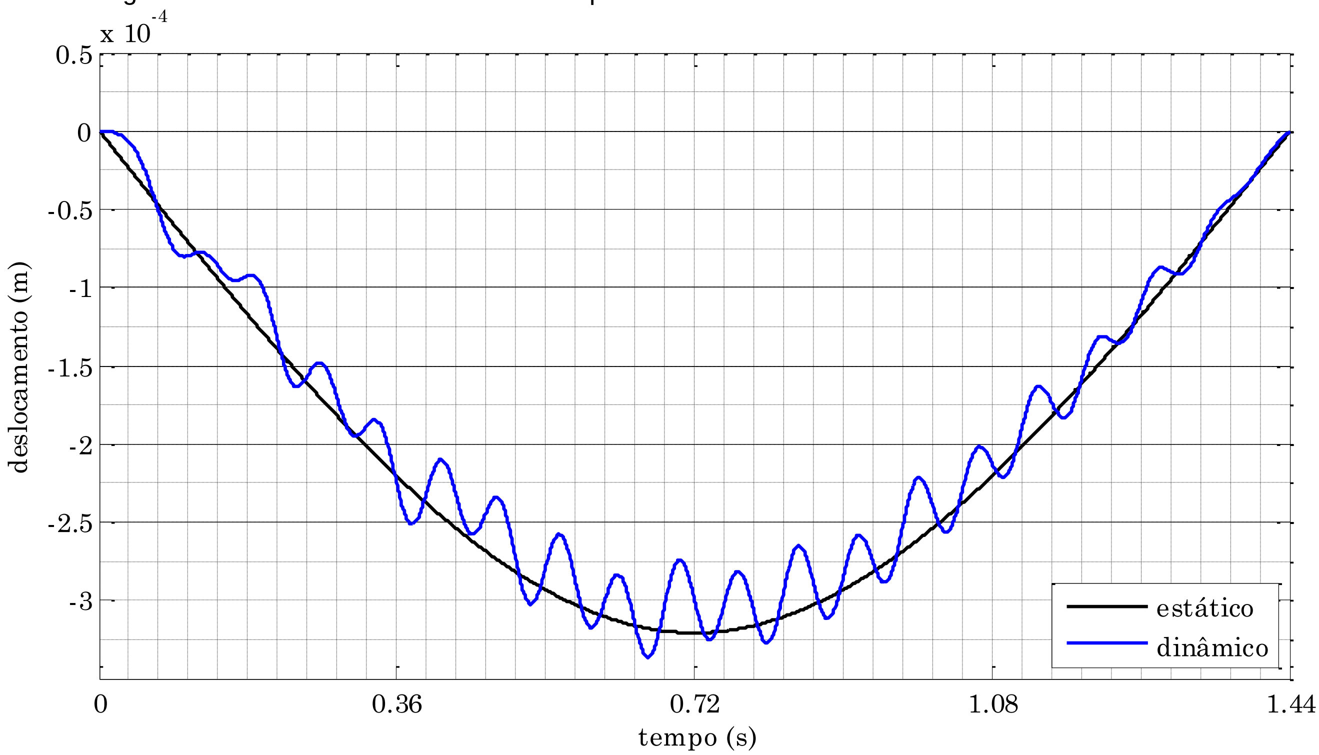


Fonte: O autor.

A Figura 36, representa as deflexões estáticas e dinâmicas da ponte no centro do vão, bem como a deflexão do veículo. É possível perceber as diferentes respostas das estruturas. Observa-se que há uma divisão em duas partes no comportamento da deflexão dinâmica do veículo. A segunda metade possui um comportamento harmônico e a primeira parte um comportamento harmônico e transiente, ou seja, possui variações de oscilação dentro do comportamento harmônico. Os máximos valores no centro da ponte são maiores na análise dinâmica do que na análise estática. As respostas dos deslocamentos na ponte são distintas. A resposta dinâmica é oscilatória e amplificada por conta das irregularidades da via associadas à vibração do veículo. A inversão das solicitações por conta da vibração, hora com valores positivos e hora com valores negativos, ocasionando tração e compressão na estrutura.

Para uma melhor visualização, representam-se os deslocamentos no meio do vão da ponte na Figura 37 com a finalidade de comparar as respostas dinâmicas lineares de deslocamento com as respostas estáticas de deslocamento.

Figura 37 – Deslocamentos no centro da ponte



Fonte: O autor.

Comparando as análises da ponte com maior detalhamento, podem-se confirmar as diferentes respostas estruturais da estática e dinâmica. Devido ao carregamento, a máxima deflexão estática ocorre no meio do vão. Porém ao analisar dinamicamente, os valores no meio do vão diferem do valor estático. Também é possível perceber que a máxima deflexão do grau de liberdade central da ponte, se comparar os dois sistemas, não acontece exatamente no meio do tempo de passagem do veículo, mas próximo ao meio. Observa-se que as respostas estáticas são aproximadamente a média das oscilações dinâmicas obtidas na ponte.

A mecânica estática soluciona parte do problema, pois considera que a parcela dos efeitos elásticos do problema real os quais são representados pela lei de *Hooke* clássica da resistência dos materiais é suficiente para manter o sistema em equilíbrio. Este equilíbrio é conhecido como equilíbrio estático. Na dinâmica, por sua vez, há uma ausência de equilíbrio provocado por uma perturbação, ou seja, um desequilíbrio.

Se um sistema elástico carregado estaticamente é perturbado de modo a deixar sua posição de equilíbrio, as forças internas não mais estarão em equilíbrio com as cargas externas e vibrações ocorrerão (TIMOSHENKO & YOUNG, 1975). Ou seja, haverá forças não equilibrantes e por isso há movimento.

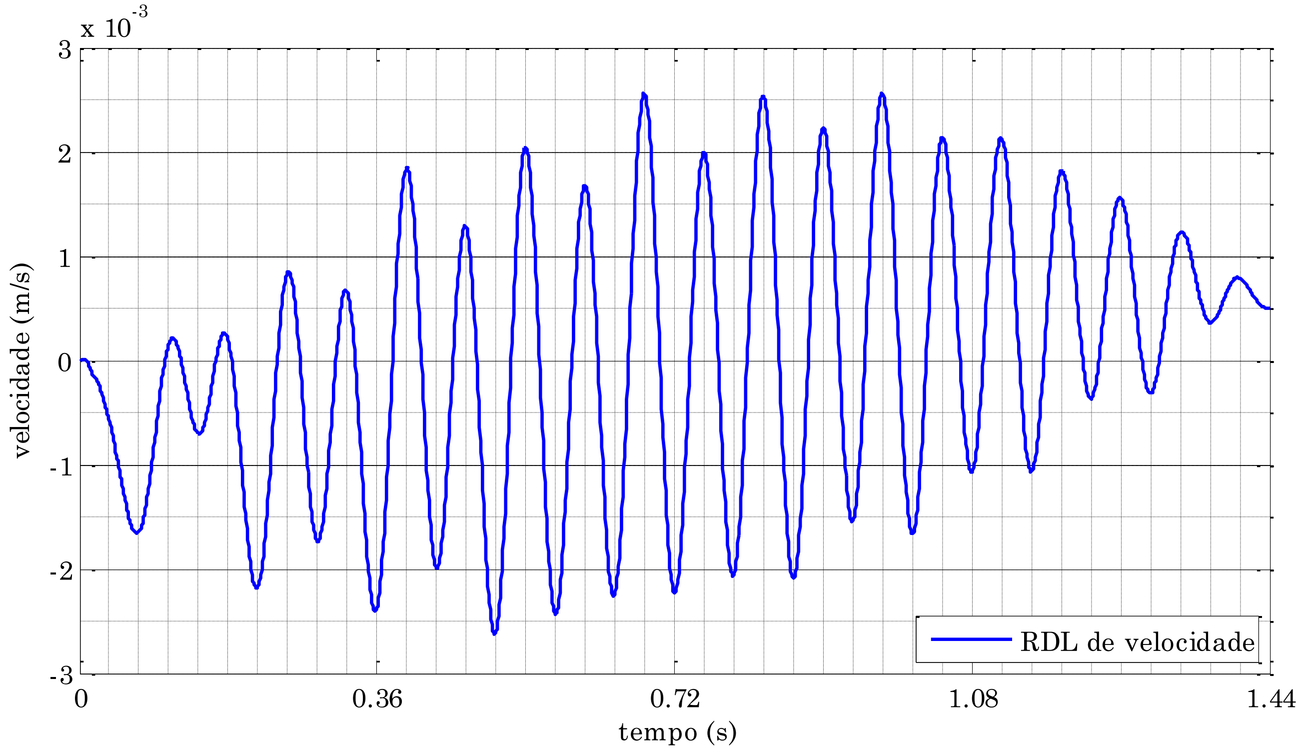
Diferentemente da mecânica estática, ao aplicar-se um carregamento sobre uma estrutura o efeito dinâmico provocado gera deslocamentos, velocidades e acelerações no corpo, associados, respectivamente, com a rigidez, amortecimento e com as forças inerciais, pelo fato do carregamento ter variação temporal, seja em intensidade, posição, orientação ou simplesmente variação do tempo propriamente dito. Além disso, os efeitos dinâmicos ocorrem devido à excitação da massa estrutural, que pode fazer com que a estrutura vibre, ou não, dependendo das suas características estruturais do sistema, seja subamortecido, criticamente amortecido ou superamortecido.

Ao analisar o veículo no problema de interação dinâmica, a parcela dos efeitos inerciais é levada em consideração através da segunda lei de *Newton*. Como o veículo possui uma mola e um amortecedor, também são considerados os efeitos elásticos da rigidez solucionados com a mecânica estática através da lei de *Hooke* e os efeitos da dissipação de energia por conta do amortecimento viscoso de *Coulomb*.

Dessa forma, tanto a equação de equilíbrio dinâmico do veículo quanto a equação de equilíbrio dinâmico da ponte são definidas pela soma de três parcelas: a parcela elástica, a parcela de amortecimento e a parcela inercial. Como se trata de um problema acoplado entre veículo e irregularidade, mas desacoplado entre o sistema veículo-irregularidade e a ponte a equação de equilíbrio dinâmico é dividida em duas equações: uma para o equilíbrio dinâmico do sistema veículo-irregularidade, equação (194), e outra para o equilíbrio dinâmico da ponte, equação (205) por se tratar de um equilíbrio dinâmico linear neste exemplo.

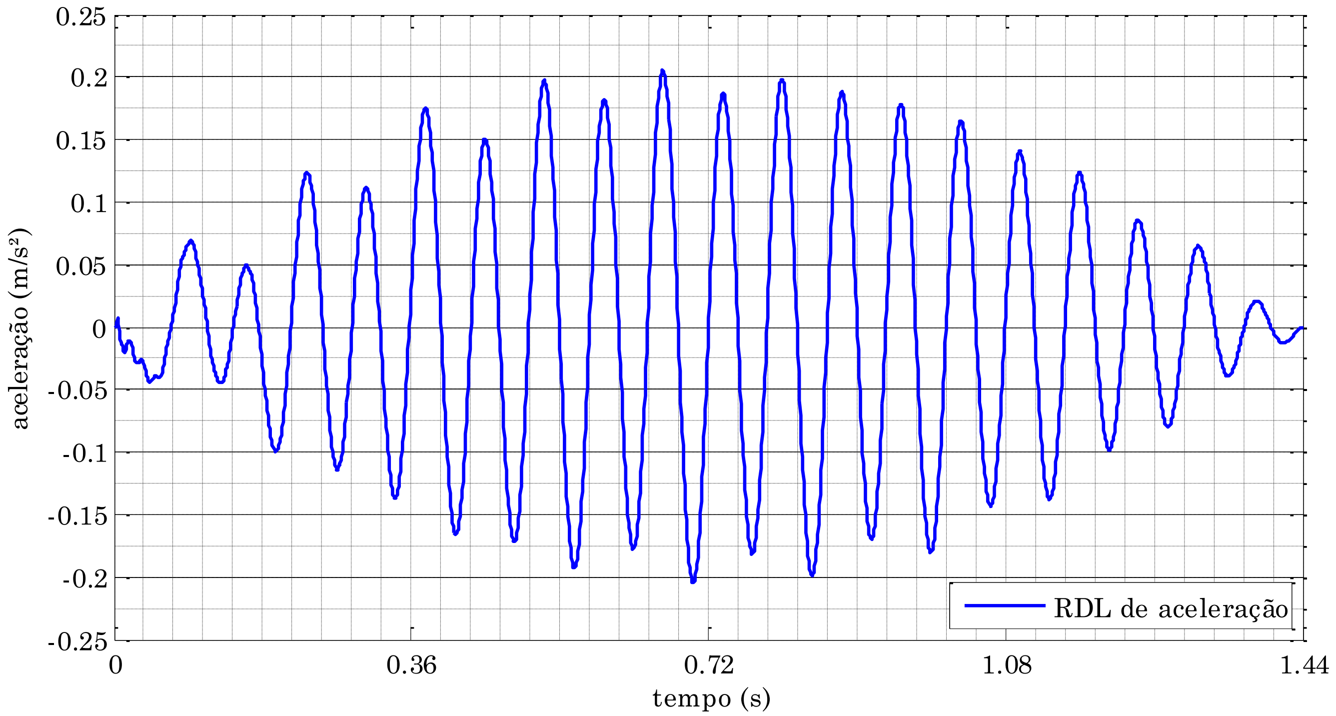
A Figura 38 apresenta as velocidades obtidas no centro da ponte. As acelerações obtidas no centro da ponte são apresentadas na Figura 39.

Figura 38 – Resposta dinâmica linear de velocidade no centro da ponte



Fonte: O autor.

Figura 39 – Resposta dinâmica linear de aceleração no centro da ponte



Fonte: O autor.

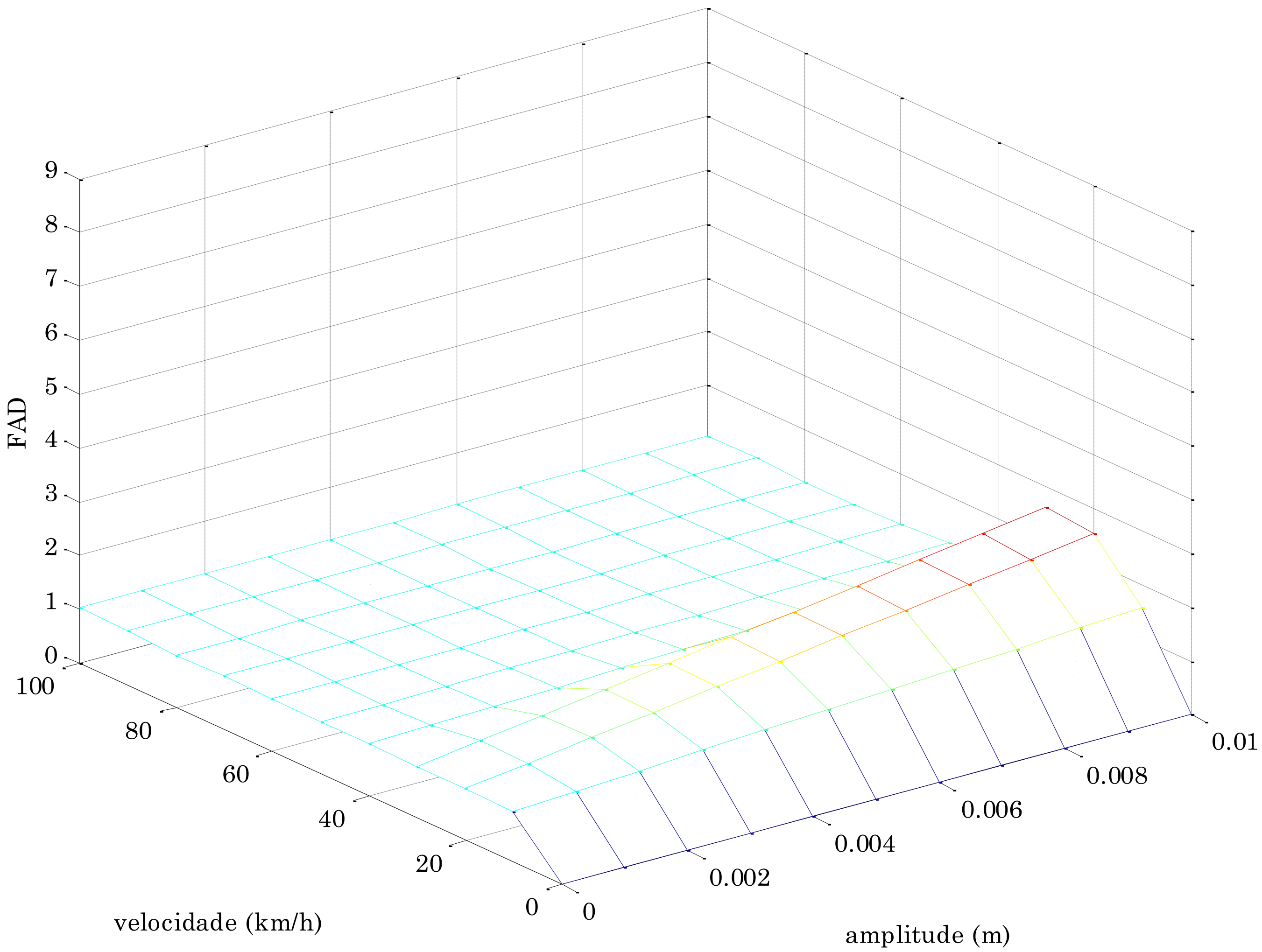
Tanto na Figura 38 como na Figura 39, observa-se a ocorrência de uma rápida oscilação com uma variação baixa de amplitude. Isso pode ser explicado pela superposição de ondas de mesma direção com amplitudes e frequências próximas. Tal fenômeno é conhecido como batimento (INMAN, 1996). Os valores das respostas dinâmicas de aceleração variam entre valores negativos e positivos.

Dando sequência ao estudo do comportamento dinâmico linear da ponte, define-se o fator de amplificação dinâmica como sendo:

$$FAD = \frac{máxima\ deflexão\ dinâmica}{máxima\ deflexão\ estática} \quad (255)$$

A Figura 40 mostra o fator de amplificação dinâmica, FAD, em função dos parâmetros de velocidade v e amplitude das irregularidades A, obtidas no centro do vão da ponte que é onde os deslocamentos são maiores no exemplo atual.

Figura 40 – Fator de amplificação dinâmica no centro da ponte sem danos

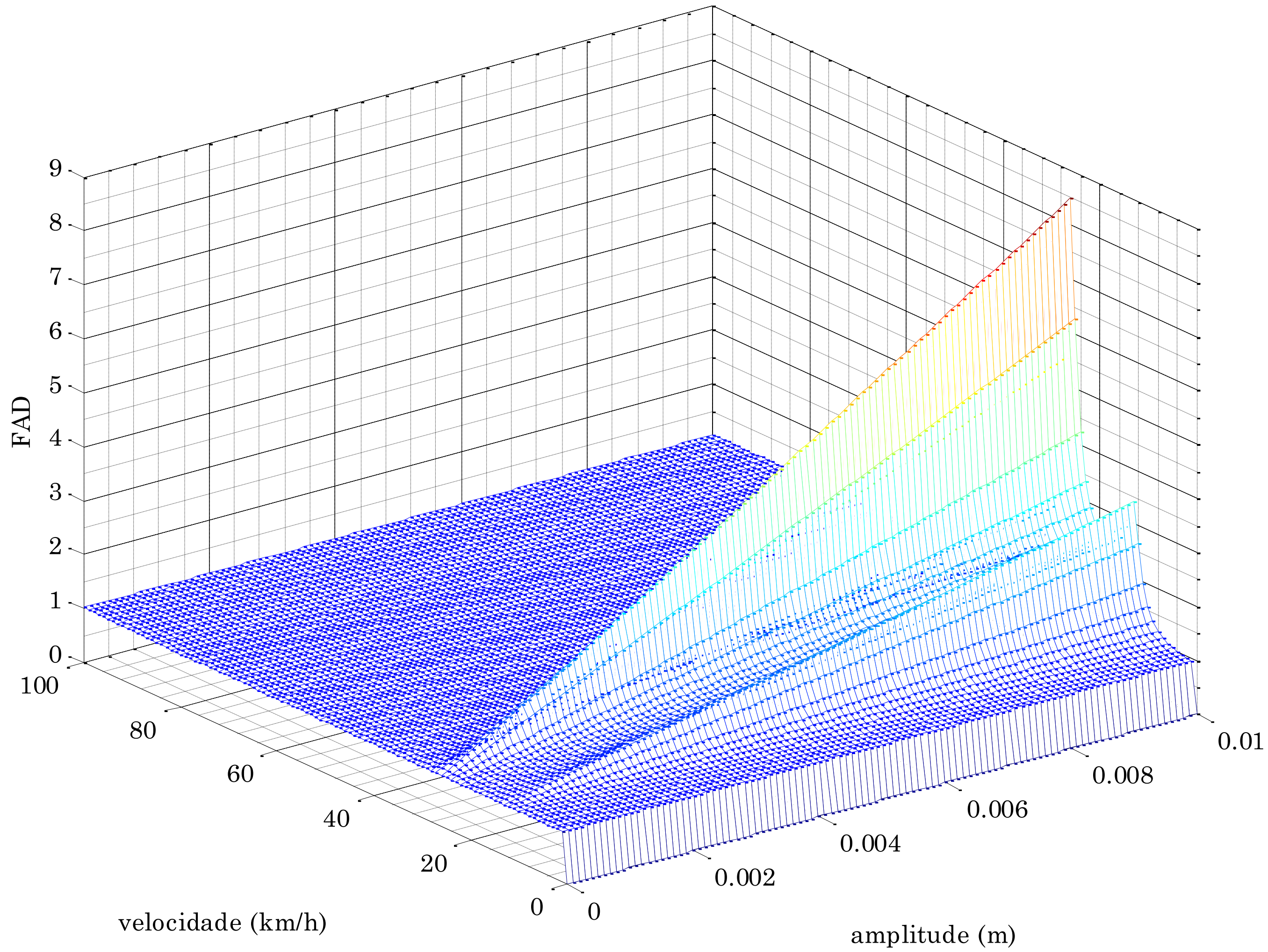


Fonte: O autor.

Para estudar o comportamento dinâmico da ponte perante o comportamento estático apresentado na Figura 40, foram realizadas 121 análises numéricas variando-se os parâmetros de velocidade v e amplitude das irregularidades A. Em cada análise foram calculadas as respostas dinâmicas de deslocamento no meio da ponte, as quais dependem das respostas dinâmicas lineares de velocidade e aceleração, e compararam-se estas com a resposta estática de deslocamento no meio da ponte obtidas da análise estática para se verificar alguma amplificação devido aos efeitos dinâmicos. O comprimento de onda L se manteve constante.

É realizada uma melhoria no grau de refinamento das análises de modo a melhor representar o efeito da amplificação dinâmica. Os resultados da Figura 41 foram obtidos com $10{,}201$ análises variando-se velocidades v e amplitude das irregularidades A.

Figura 41 – Fator de amplificação dinâmica da ponte sem danos com refino de análises



Fonte: O autor.

Ao analisar a Figura 40 e a Figura 41, se observa que o fator de amplificação dinâmica varia linearmente com as amplitudes das irregularidades da via. Para ocorrer o fenômeno da ressonância, bastam que as frequências naturais amortecidas do veículo coincidam com as frequências associadas à velocidade com que o veículo passa pelas irregularidades da via (BEGHETTO, 2006). Isso prova que não são necessárias grandes velocidades para ocorrer a ressonância. Em pequenas velocidades, como nesse exemplo, pode ocorrer o fenômeno de ressonância.

Nitidamente, houve maior precisão de resultados obtidos na Figura 41 em relação à Figura 40 devido à melhoria no grau de refinamento das análises. Assim como no conceito de refinamento de malha, o conceito de refinamento de análises é abordado para demonstrar que após certo número de análises a solução numérica não mais se aproxima da solução analítica com eficácia, tangenciando a mesma. Após esse limite, se houver um aumento ainda maior no número de análises, pode haver um maior esforço computacional e poucos ganhos na aproximação e, em alguns casos, pode-se até mesmo divergir da solução analítica. Deste modo, um maior refino no número de análises não necessariamente traz ganhos significativos para a análise dinâmica linear.

Nesses casos, para ter um ganho maior na solução numérica, faz-se necessário analisar o problema com mais teorias, abrangendo-as de forma a considerar maiores verdades no problema em questão assim como ocorre com a abordagem dinâmica, em que se pode perceber um aumento dos deslocamentos perante os deslocamentos estáticos.

As respostas dos deslocamentos obtidas no modelo dinâmico são nitidamente maiores que as respostas obtidas no modelo estático, já que é considerada a contribuição da massa da viga e, consequentemente, a parcela inercial na equação de movimento. É de grande importância perceber que as respostas dinâmicas dos deslocamentos da ponte nessa sessão 4.3 são analisadas com a estrutura íntegra, ou seja, sem dano, portanto faz-se necessário investigar quais seriam as respostas dinâmicas da estrutura considerando-se o dano.

Todos os gráficos vistos anteriormente, não estão abordando o dano estrutural. Diante disso é empregado, nesse trabalho, a teoria do dano contínuo, visto na revisão bibliográfica, sessão 1.5, e aprofundado na fundamentação teórica, sessão 2.3, segundo o modelo constitutivo de dano de *Mazars* (1984), abordado nos modelos matemáticos, sessão 3.3.

4.4 EXEMPLO DL E DNL DE PONTE COM IRREGULARIDADES HARMÔNICAS SENOIDAIS E VEÍCULO TRANSEUNTE COM GRANDE CARGA

Esta sessão mantém os mesmos dados físicos e geométricos da ponte, como a taxa e posições de armaduras, e das irregularidades, mas aumenta as massas do veículo para provocar uma danificação do material no intuito de comparar as respostas dinâmicas lineares sem a consideração da geometria da ponte com as respostas dinâmicas não lineares através da mecânica do dano.

4.4.1 Dados de entrada do exemplo 4.4

O veículo mantém a mesma velocidade constante do exemplo anterior e as irregularidades permanecem com a mesma forma e mesma amplitude. A Tabela 6 apresenta os dados de entrada do exemplo 4.4.

Tabela 6 – Dados de entrada do exemplo 4.4

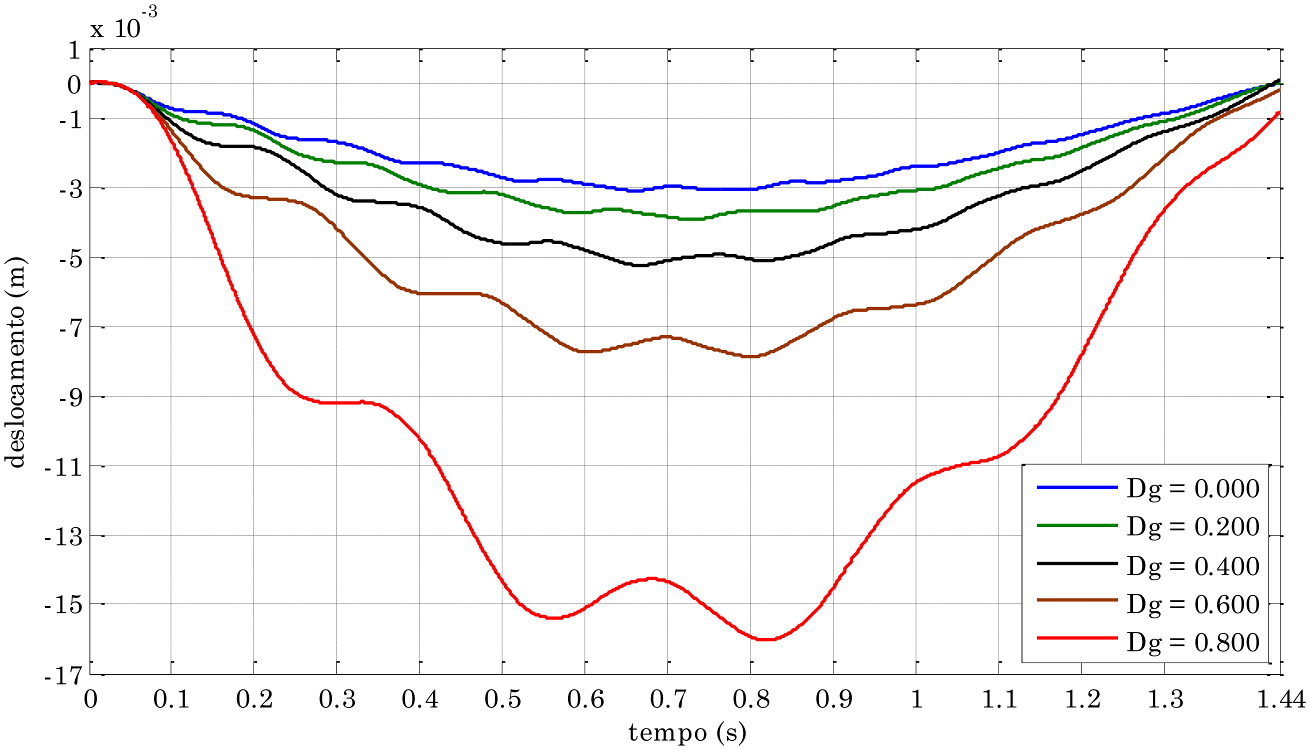
Dados de Entrada			
Veículo	Irregularidades	Ponte	Parâmetros de Dano
$m_1 = 44{,}000\ kgf$	$y = A\sin(\omega_e t)$	$L_b = 20\ m$	$A_T = 0.995$
$m_2 = 176{,}000\ kgf$	$A = 0.005\ m$	$b = 0.4\ m$	$B_T = 30{,}000$
$k = 9{,}120\ kN/m$	$l = 1\ m$	$h = 3.9494\ m$	$A_C = 1.2$
$c = 96\ kNs/m$	$f_I = 13.8889\ Hz$	$I = 3.81\ m^4$	$B_C = 1{,}050$
$v = 50\ km/h$	$\omega_{eI} = 87.2665\ rad/s$	$m = 5{,}951.72\ kg/m$	$\varepsilon_{d0} = 5.10^{-5}$
$\omega_{nv} = 6.4385\ rad/s$	2,000 *Passos de Tempo*	$\omega_{n1} = 46.1537\ rad/s$	
2,000 *Passos de Tempo*		$E_c = 29.43\ GPa$	
		$\nu_c = 0.2$	
		$E_s = 210\ GPa$	
Dados das Armaduras		$\nu_s = 0.3$	Tolerâncias
$c = 88.92\ cm$	$d = 2.812439\ m$	$k_s = 0.85$	$tol_u = 0.00001$
$\rho = 33.496631\%$	$d' = 1.136944\ m$	60 *Camadas*	$tol_F = 0.00001$
		$\zeta = 0.025$	$tol_E = 0.00001$
		20 *Elementos*	
		10,000 *Passos de Tempo*	
		Newmark (0.5 *e* 0.25)	
		$dt = 7.2e^{-4} s$	

Fonte: O autor.

4.4.2 Análise dinâmica linear e não linear da ponte

Seja um caso hipotético de danificação constante ao longo da viga em que um dano provocado afetaria a rigidez da viga como um todo ao invés de afetá-la localmente, ou seja, um dano generalizado objetivando obter uma margem de deslocamentos perante uma perda de rigidez constante de até 80%. A Figura 42 demonstra as respostas dinâmicas de deslocamento conforme essa perda de rigidez progressiva da viga, ou seja, com um aumento do dano generalizado.

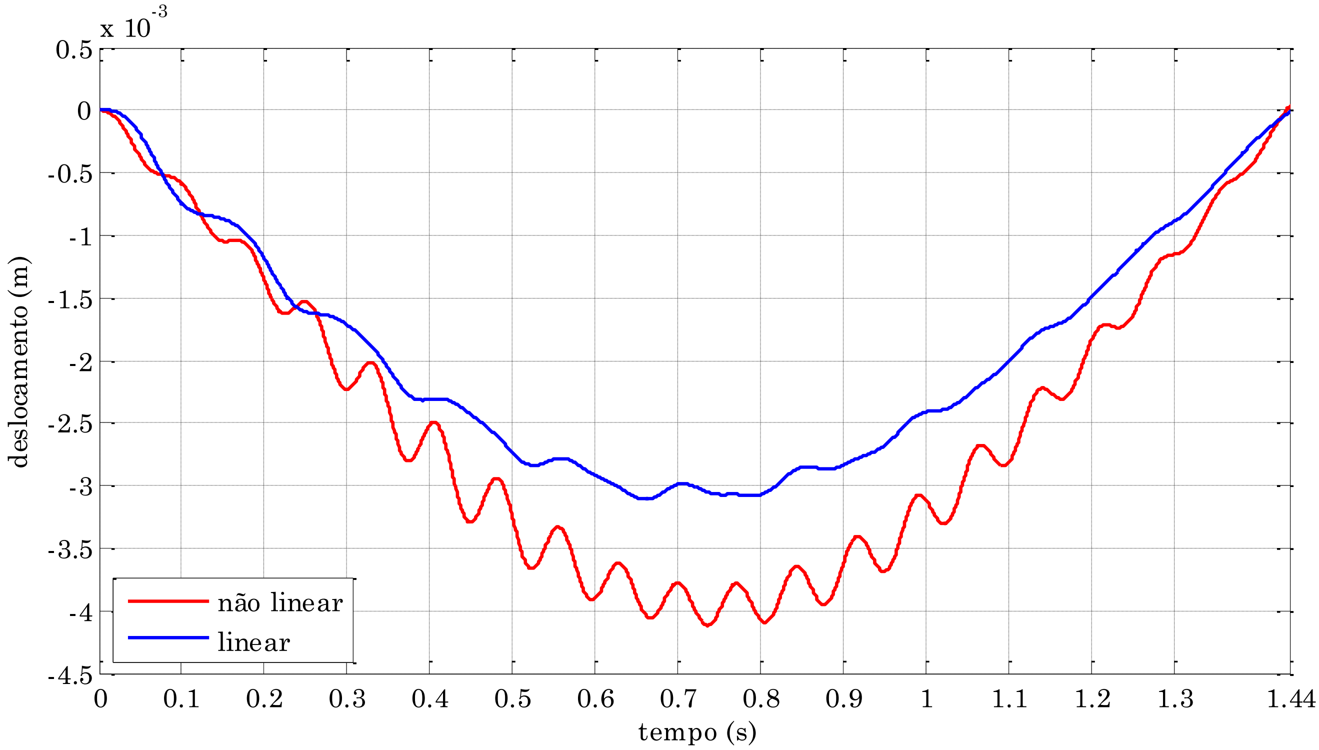
Figura 42 – Respostas dinâmicas de deslocamento no centro da ponte com variação do dano generalizado



Fonte: O autor.

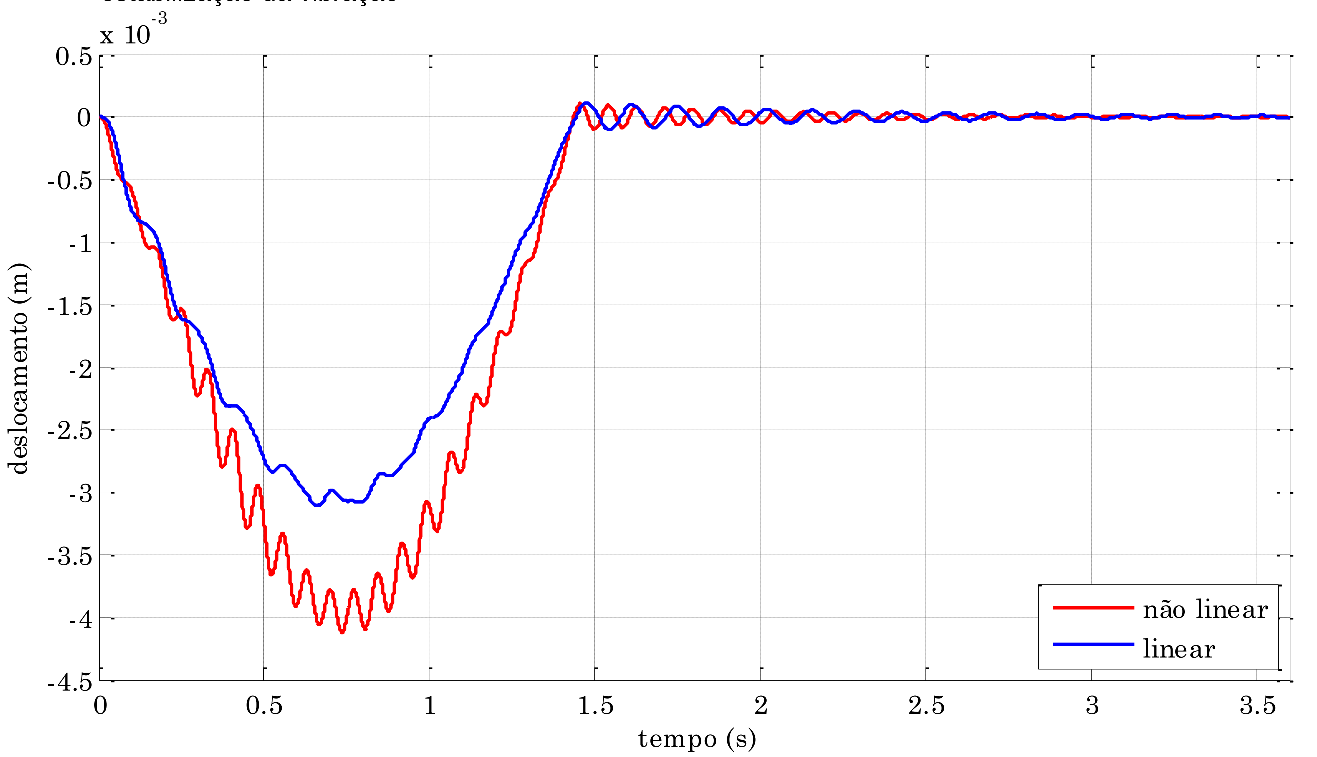
Não há proporcionalidade linear de respostas. Entretanto, a Figura 43 e a Figura 44 comparam a resposta dinâmica de deslocamento obtida com a rotina dinâmica linear sem a consideração da seção transversal com a resposta dinâmica de deslocamento obtida com a rotina dinâmica não linear através da mecânica do dano não mais com uma situação de dano generalizado, mas com uma situação de danificação local mais próxima da realidade com a finalidade de analisar a evolução do dano e sua influência nas respostas dinâmicas da estrutura.

Figura 43 – Comparação entre respostas dinâmicas de deslocamento no centro da ponte



Fonte: O autor.

Figura 44 – Comparação entre respostas dinâmicas de deslocamento no centro da ponte até a estabilização da vibração



Fonte: O autor.

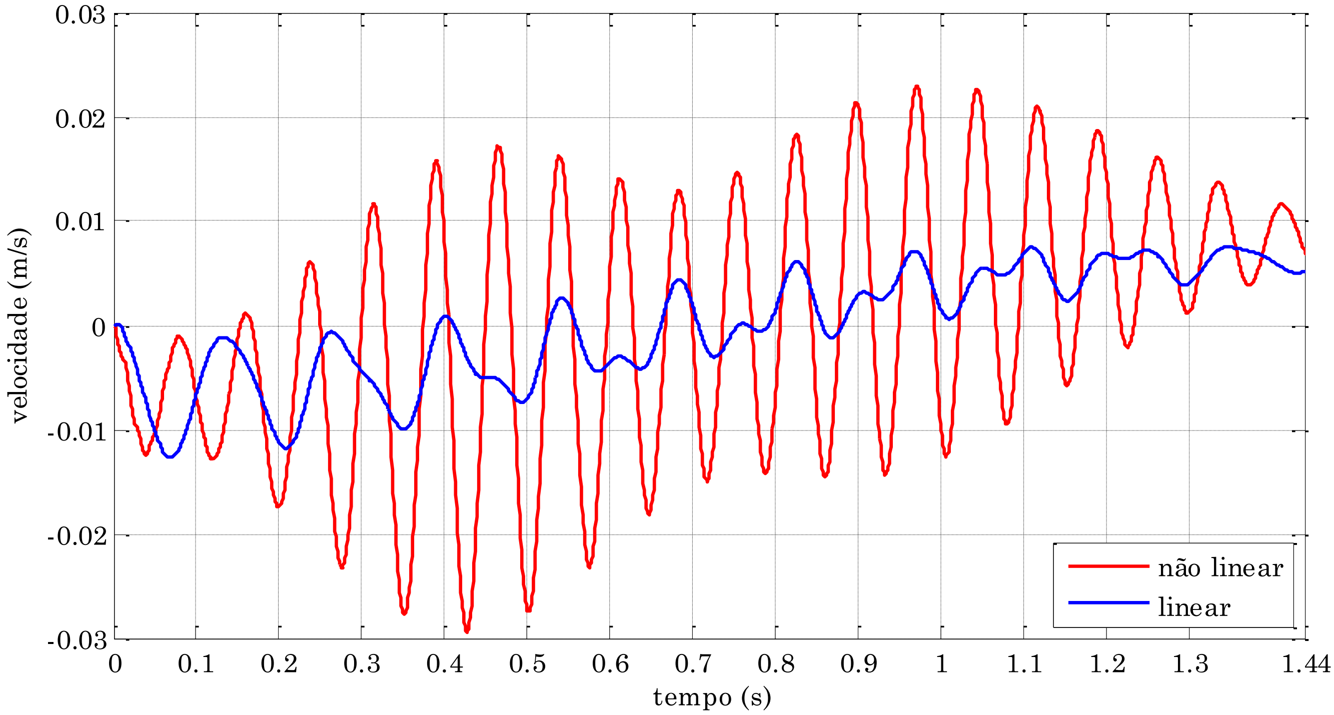
Ao analisar a Figura 43, percebe-se que o dano ocasionou a redução no módulo de deformação e, consequentemente, a carga aplicada passa a ter influência de uma área efetiva menor que a íntegra, devido à perda de resistência da área com defeitos. Nota-se que os deslocamentos dinâmicos ao longo da viga danificada são maiores que os deslocamentos dinâmicos sem a presença do dano. Isso se dá ao fato da perda de área íntegra ocasionar uma tensão efetiva maior. Por isso, as deformações são maiores e, por conseguinte, o fator de amplificação dinâmica, ou seja, a relação entre a máxima deformação dinâmica e a máxima deformação estática, no meio do vão, também será maior. Na Figura 44, nota-se o efeito do amortecimento estrutural em ambas as respostas. O amortecimento faz com que a ponte oscile entre valores positivos e negativos de deslocamento para dissipar a energia gerada e estabilizar o sistema. As respostas obtidas com a rotina dinâmica não linear da ponte danificada oscilam mais e são estabilizadas mais rapidamente do que as obtidas com a rotina dinâmica linear, ou seja, aparentemente as respostas da ponte danificada são estabilizadas antes do que as da ponte íntegra.

Além disso, é possível perceber que a estrutura danificada vibra mais do que a estrutura íntegra para o caso apresentado, ou seja, as respostas dinâmicas de deslocamento obtidas com a rotina dinâmica não linear através da mecânica do dano têm maiores oscilações do que se comparadas às respostas dinâmicas lineares de deslocamento da ponte íntegra sem a consideração da geometria da seção transversal da mesma. Embora seja fisicamente coerente que o dano ocasione uma maior oscilação nas respostas dinâmicas de uma ponte danificada do que se comparada a uma ponte íntegra, as respostas obtidas com a rotina dinâmica linear sem consideração da seção transversal aparentaram ter baixa oscilação neste exemplo, o que levanta a hipótese de não serem ideais para representar todo tipo de estrutura perante qualquer carregamento aplicado. Essa hipótese será analisada e discutida mais à frente no exemplo 4.5.

Nota-se, portanto, que a danificação da estrutura ocasiona um aumento dos deslocamentos. Por se ocupar dos efeitos das respostas materiais de um processo de microfissuração, a mecânica do dano se mostra uma ferramenta capaz de analisar os efeitos da deteriorização do material até mesmo em problemas dinâmicos.

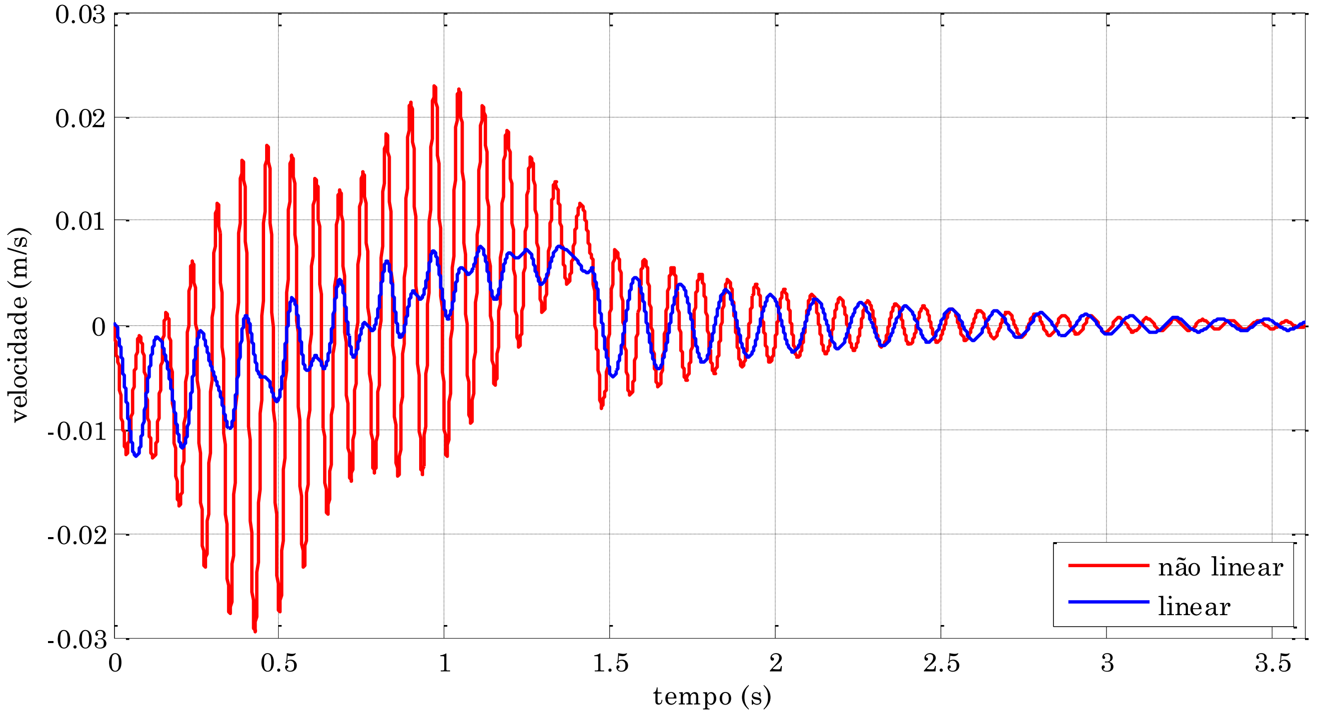
A Figura 45 e a Figura 46 apresentam as respostas dinâmicas de velocidade no centro da ponte obtidas com ambas as rotinas abordadas.

Figura 45 – Comparação entre respostas dinâmicas de velocidade no centro da ponte



Fonte: O autor.

Figura 46 – Comparação entre respostas dinâmicas de velocidade no centro da ponte até a estabilização da vibração



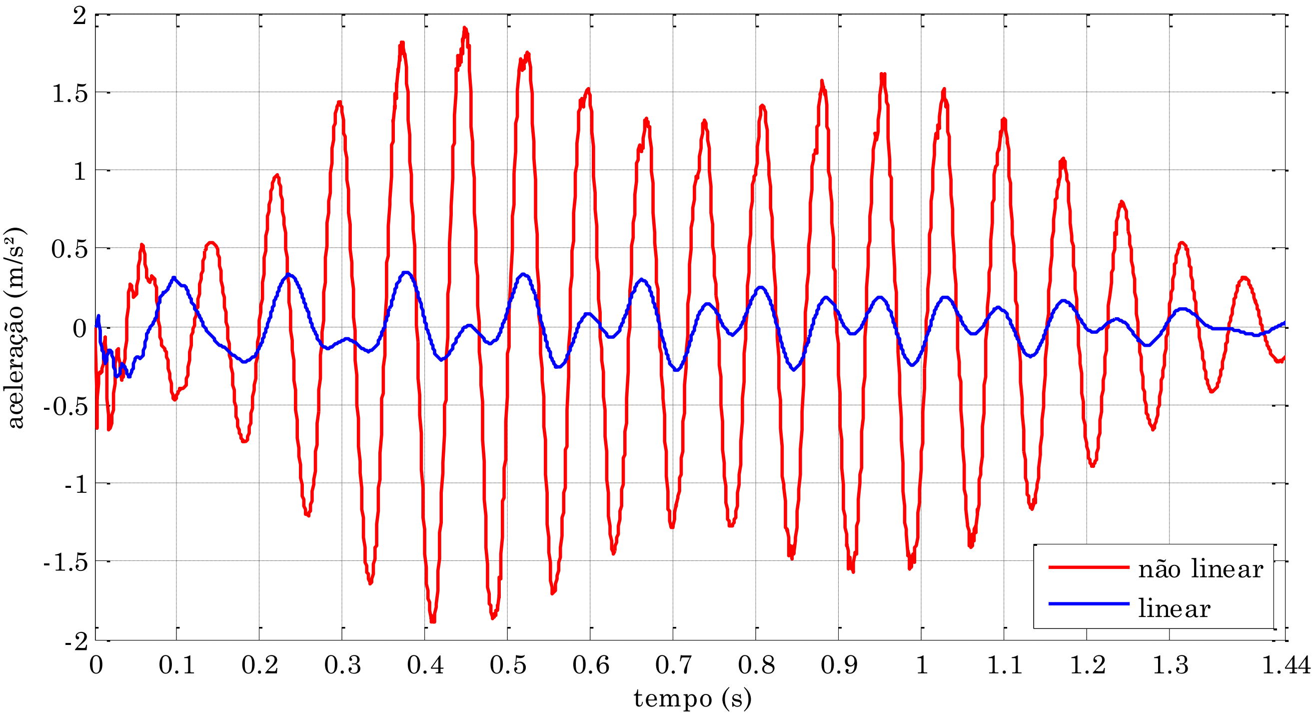
Fonte: O autor.

Ao analisar a Figura 46, observa-se a ocorrência de uma rápida oscilação com uma variação baixa de amplitude. Isso pode ser explicado pela superposição de ondas de mesma direção e amplitudes e frequências próximas. Tal fenômeno é conhecido como batimento (INMAN, 1996). As velocidades com influência do dano possuem maiores variações de amplitude dentro do mesmo intervalo de tempo. A resposta temporal é coincidente porque o evento é coincidente, mas ocorre amplificação em termos de amplitudes e oscilações. Nitidamente, as respostas dinâmicas de velocidade da ponte danificada são maiores do que as da ponte íntegra.

O amortecimento estrutural aparece de forma mais clara ao se analisar a Figura 46. É possível notar uma maior oscilação das respostas dinâmicas de velocidade e uma maior amplitude das respostas dinâmicas não lineares de velocidade após o veículo sair da ponte que por volta do instante de 2.5 s torna-se menor do que as respostas dinâmicas lineares de velocidade. Isso mostra que o amortecimento estrutural dissipa a energia mais rapidamente na ponte danificada do que na ponte íntegra.

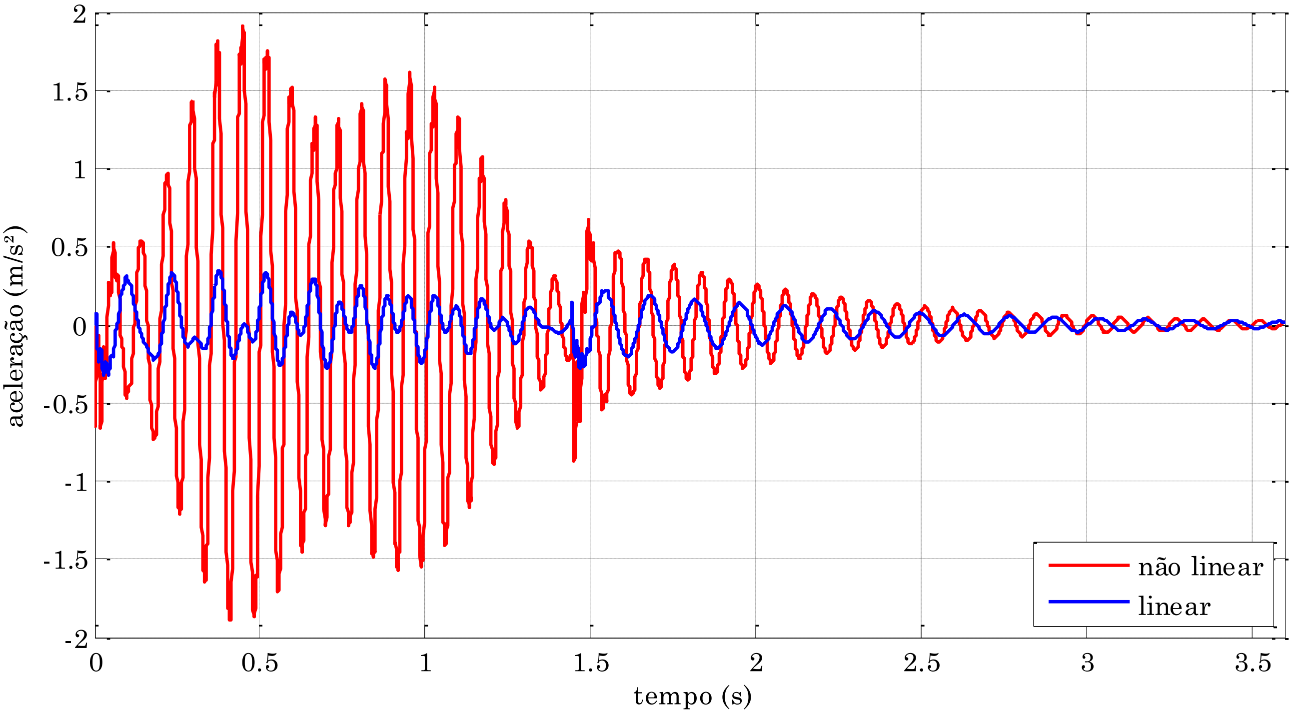
A Figura 47 e a Figura 48 mostram as respostas dinâmicas de aceleração no centro da ponte obtidas com as rotinas lineares e não lineares.

Figura 47 – Comparação entre respostas dinâmicas de aceleração no centro da ponte



Fonte: O autor.

Figura 48 – Comparação entre respostas dinâmicas de aceleração no centro da ponte até a estabilização da vibração

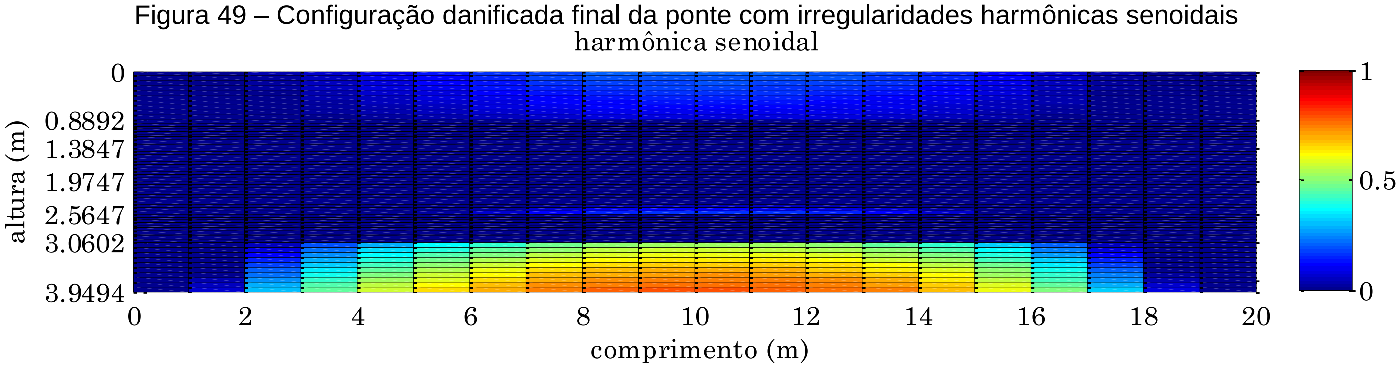


Fonte: O autor.

Similarmente ao observado nas respostas anteriores, ao analisar a Figura 47 e a Figura 48, nota-se que as respostas dinâmicas de aceleração da ponte danificada são maiores do que as da ponte íntegra. Também se observa o fenômeno do batimento nas respostas dinâmicas não lineares da ponte danificada. Analisando o amortecimento, pode-se concluir que para o mesmo instante de tempo as respostas dinâmicas de aceleração são as últimas a serem estabilizadas se comparadas às respostas dinâmicas de velocidade e de deslocamento.

A Figura 49 mostra a configuração danificada da ponte ao final de análise.

Figura 49 – Configuração danificada final da ponte com irregularidades harmônicas senoidais

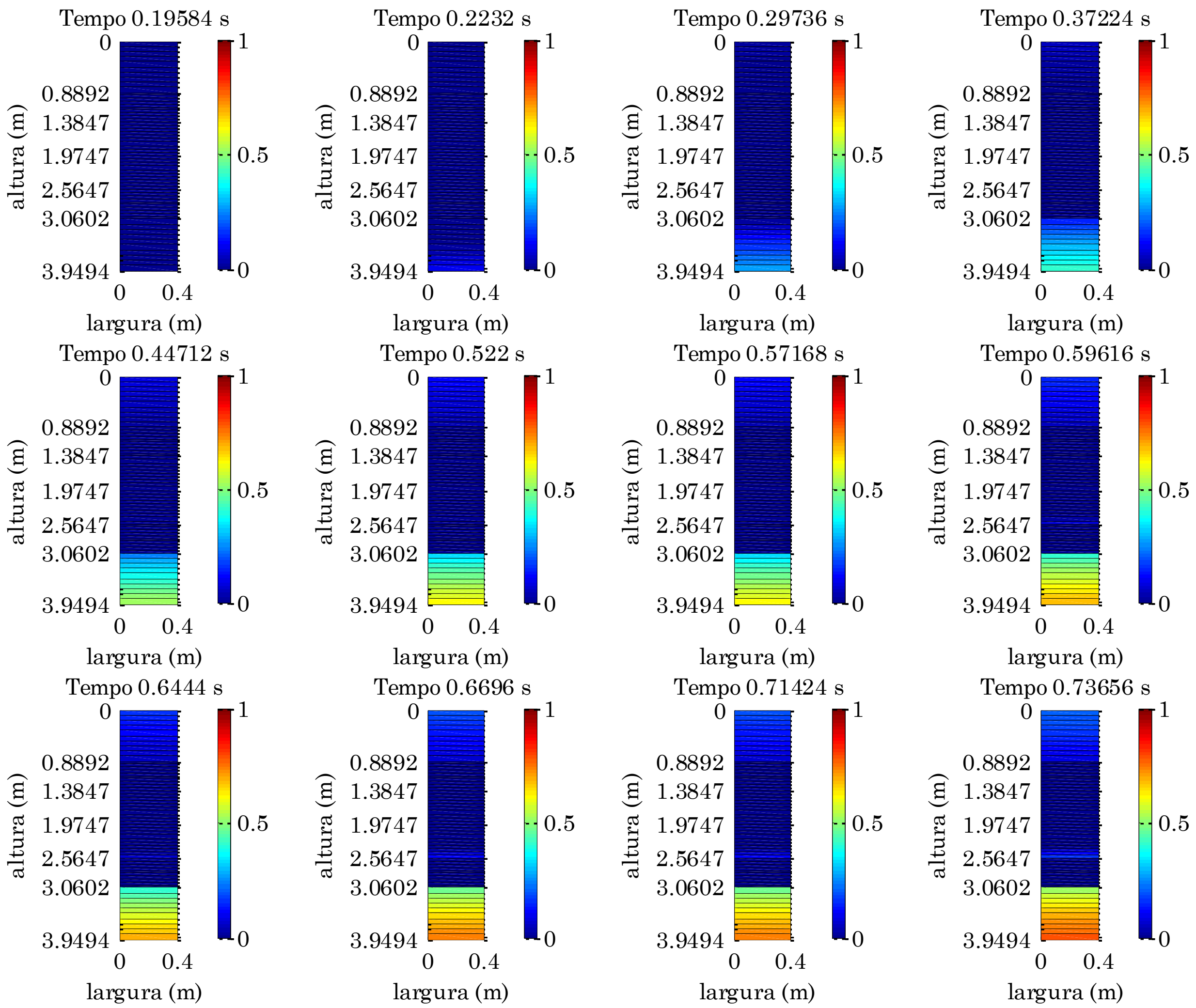


Fonte: O autor.

Analisando a Figura 49, pode-se observar que o décimo elemento, o do meio do vão, foi o mais afetado durante a análise. Notam-se danos tanto na região superior e inferior à metade da viga. Há danos na região inferior entre armaduras. Ocorreram tanto danos por tração como por compressão. Comumente, os danos por tração são os mais frequentes e prejudiciais à estrutura. A região superior da ponte, normalmente comprimida numa análise estática, sofreu danos também por tração também devido à inversão de esforços por conta da vibração.

Ao invés de mostrar a configuração da ponte ao longo do tempo durante o processo de danificação, o que traria a necessidade de demasiados gráficos que ocupariam parte importante do trabalho realizado, a Figura 50 sintetiza a evolução dos danos na seção transversal do décimo elemento, o mais danificado, ao longo do tempo.

Figura 50 – Evolução dos danos na seção transversal do décimo elemento ao longo do tempo



Fonte: O autor.

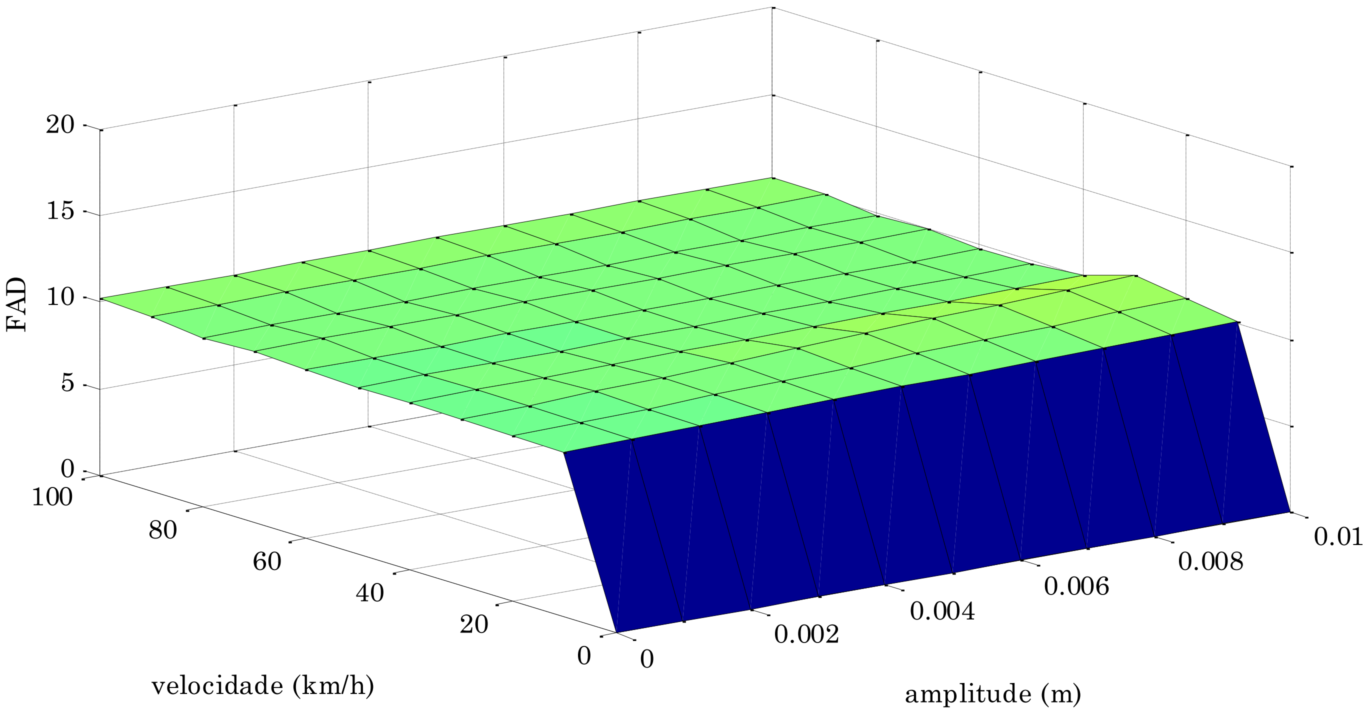
Pode-se observar na Figura 50, a evolução dos danos em cada camada da seção transversal ao longo do tempo do elemento mais danificado. Os maiores danos foram provenientes de quando o veículo passou próximo ao meio do vão da ponte. No entanto os danos são acumulados e irreversíveis, ou seja, houve danificação nos instantes iniciais da passagem do veículo, por volta de 2.72 m, e a evolução dos danos ao longo do tempo que permitiu que os danos do meio do vão atingissem tais níveis. Ainda, uma carga aplicada no meio do vão pode gerar uma danificação em outro elemento distante do ponto de aplicação da carga, como, por exemplo, próximo aos apoios se nestes ocorrerem deformações além da deformação limite ε_{d0}, estabelecida no modelo de *Mazars* (1984). Nesse sentido, o processo de danificação, não só na análise estática não linear, mas principalmente na análise dinâmica não linear através da mecânica do dano, é um processo totalmente não linear que depende do histórico do carregamento, deformações, respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade, aceleração, etc.

Além disso, houve danos tanto por tração como por compressão em ambas as regiões superiores e inferiores da ponte. Essa inversão de esforços só é possível de ser captada por conta da implementação realizada. Se o modelo constitutivo de dano de *Mazars* (1984) for utilizado numa análise dinâmica sem a implementação da inversão de esforços, haverá respostas não condizentes com a realidade do problema e o programa fará confusão entre trações e compressões, inviabilizando a análise.

Conforme abordado na equação (255), uma forma de comparar as respostas dinâmicas de deslocamento obtidas sejam com a rotina dinâmica linear ou com a rotina dinâmica não linear, é compará-las com a maior resposta estática linear de deslocamentos.

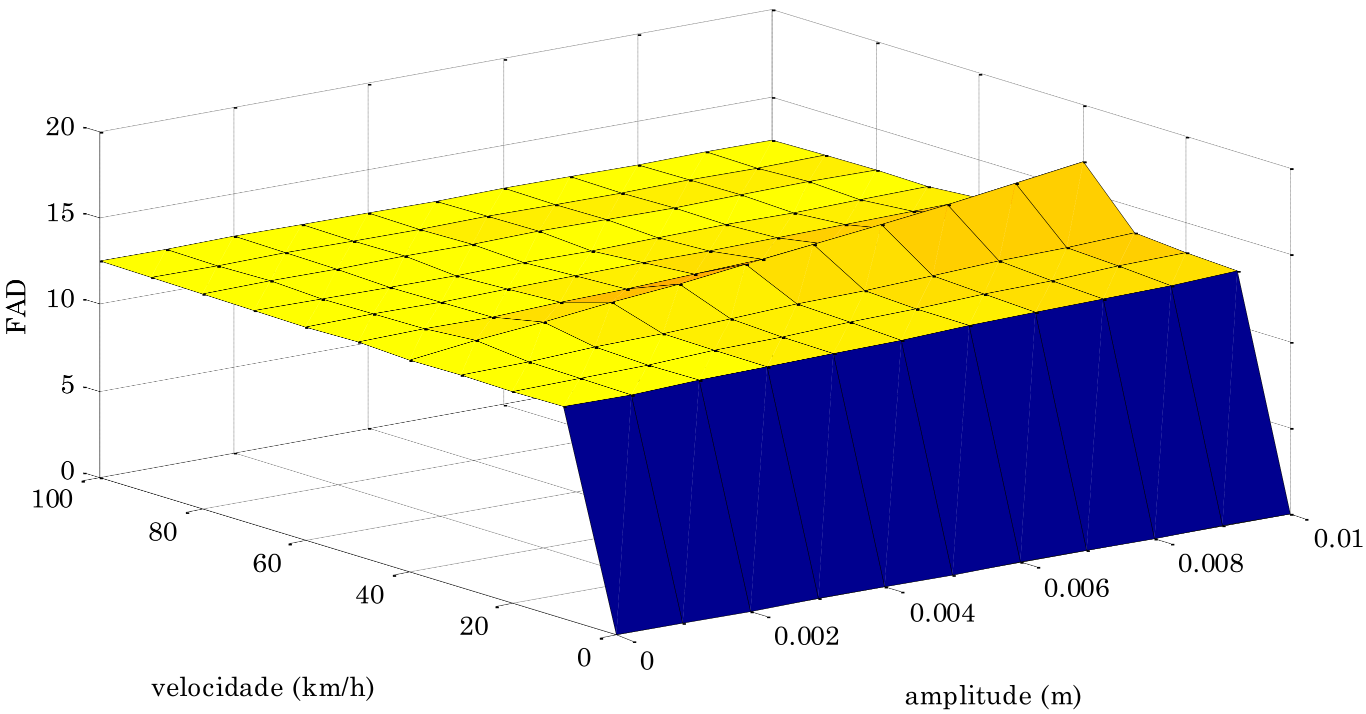
Assim, os fatores de amplificação dinâmica obtidos na análise dinâmica linear sem consideração da seção transversal é apresentado na Figura 51, variando-se os parâmetros de velocidade e de amplitude das irregularidades harmônicas senoidais da via. Analogamente, na Figura 52, são apresentadas os fatores de amplificação dinâmica obtidas com a rotina dinâmica não linear através da mecânica do dano.

Figura 51 – Fator de amplificação dinâmica sem danos, gerado com 121 análises computacionais



Fonte: O autor.

Figura 52 – Fator de amplificação dinâmica com danos, gerado com 121 análises computacionais

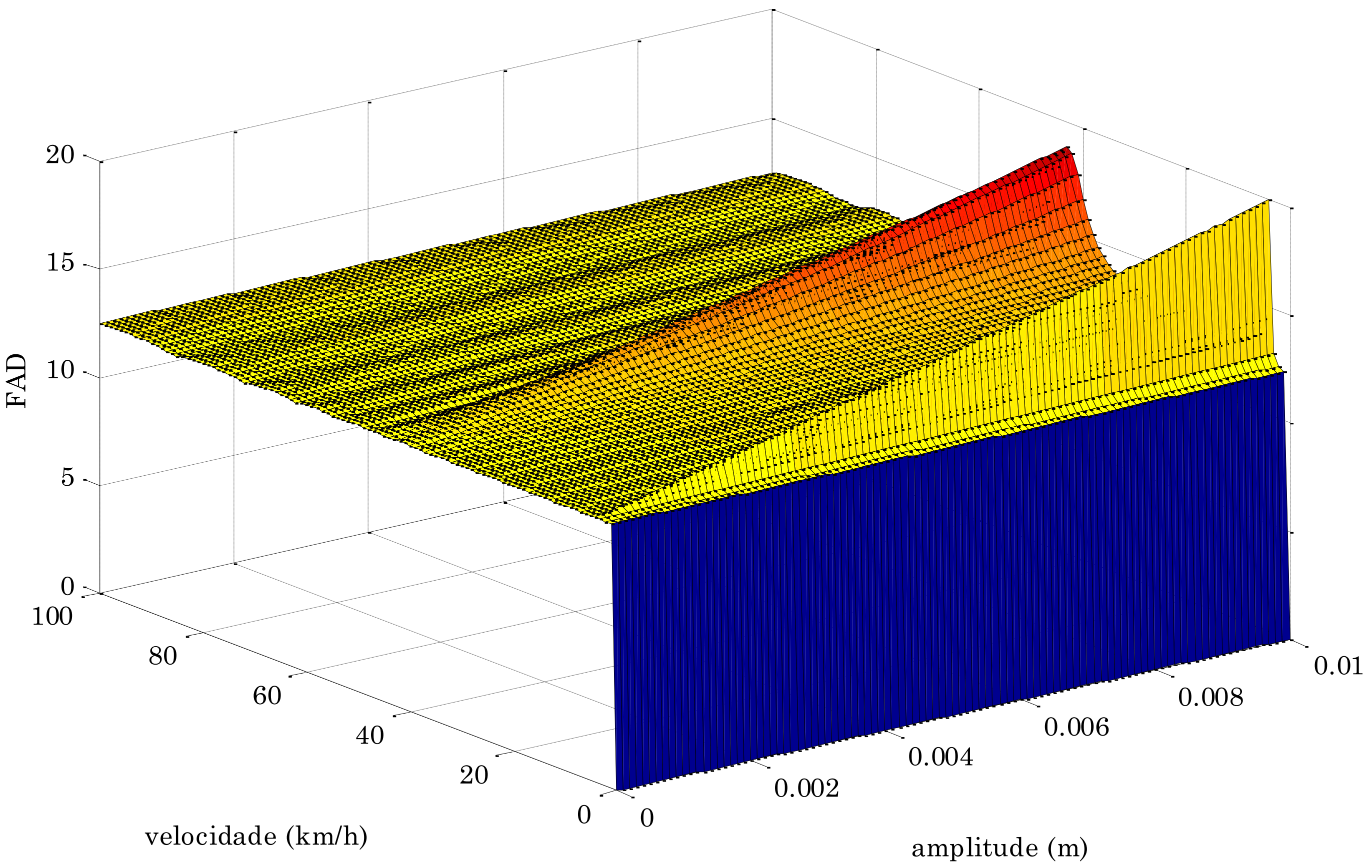


Fonte: O autor.

Para a geração da Figura 51 e da Figura 52, foram necessárias 121 análises completas em cada rotina. Com a rotina dinâmica linear o tempo de análise é muito mais rápido por não haver necessidade de verificação das deformações e atualização das matrizes elementares e globais da estrutura. O tempo de processamento para obtenção dos fatores de amplificação dinâmica com a rotina dinâmica não linear é muito maior pelo fato da verificação das tensões, deformações, possíveis danos, etc., e principalmente pela atualização das matrizes elementares e globais da estrutura e as consequentes inúmeras inversões matriciais para obtenção dos deslocamentos. Além disso, o fato de utilizar um algoritmo de integração no tempo, no caso o método de *Newmark*, com um método iterativo e incremental, no caso o método de *Newton-Raphson*, faz com que a análise dinâmica não linear seja muito mais dispendiosa do que a dinâmica linear que faz uso de um método de integração temporal.

Assim como no exemplo 4.3, uma melhoria no grau de refinamento das análises é realizada de modo a melhor representar o efeito da amplificação dinâmica. Os resultados da Figura 53 foram obtidos com $10{,}201$ análises variando-se velocidades v e amplitude das irregularidades A.

Figura 53 – Fator de amplificação dinâmica com danos, gerado com 10,201 análises computacionais



Fonte: O autor.

Comparando a Figura 51 com a Figura 52, observa-se que os fatores de amplificação dinâmica obtidos com as análises com danos foram maiores do que as obtidas sem danos. Enquanto nas lineares, o fator de amplificação dinâmica ficou próximo de 10 vezes maior que a maior resposta estática, na resposta dinâmica não linear o fator de amplificação dinâmica ficou em torno de 12.5 vezes maior. Também é possível notar o fenômeno da ressonância acontecendo por volta de $30km/h$ nas respostas lineares, enquanto nas respostas não lineares o dano fez com que o fenômeno da ressonância ocorresse em torno de $40km/h$. Isso acontece, dentre outros motivos, porque o dano altera as frequências naturais de vibração da estrutura. As respostas obtidas nos modelos dinâmicos são maiores do que as obtidas no modelo estático já que é considerada a contribuição da massa da viga e, consequentemente, a parcela inercial na equação de movimento.

Comparando a Figura 52 com a Figura 53 obtida com o refino de análises, nota-se que além de uma região de ressonância previamente captada em torno de $40km/h$, há uma segunda região que indica ressonância em torno de $3km/h$.

Assim como nas respostas dinâmicas lineares, nas respostas dinâmicas não linares com e sem refino de malha o fator de amplificação dinâmica com danos também varia linearmente com as amplitudes das irregularidades da via. Em todas as análises o fenômeno da ressonância aconteceu com baixas velocidades.

Como o dano altera as frequências naturais da estrutura, alterando, também, a velocidade crítica com que o veículo possa provocar alguma ressonância, a Tabela 7 relaciona as frequências naturais da ponte íntegra com as da ponte danificada.

Tabela 7 – Comparação entre frequências naturais da ponte íntegra e da ponte danificada

Frequências Naturais de Vibração da Ponte	Análise Dinâmica Linear (rad/s)	Análise Dinâmica Não Linear (rad/s)
1ª	46.1537	41.2336980
2ª	184.7523	168.7635203
3ª	415.9657	382.4134280
4ª	739.9920	681.6277034
5ª	1157.0654	1066.5361361
6ª	1667.5117	1537.2465531
7ª	2271.8007	2094.2810768

Fonte: O autor.

Houve queda em todas as frequências naturais de vibração com dano analisadas.

4.5 EXEMPLO DE PONTE COM DIVERSAS FORMAS DE IRREGULARIDADES SUJEITA A VEÍCULO TRANSEUNTE

Este exemplo tem o objetivo de comparar as respostas dinâmicas da estrutura para diferentes formas de irregularidades, além da harmônica senoidal, e verificar a tendência à danificação das mesmas. O comprimento de onda l foi reduzido de modo a aumentar a quantidade de irregularidades periódicas.

4.5.1 Dados de entrada do exemplo 4.5

A Tabela 8 apresenta os dados de entrada do exemplo 4.5.

Tabela 8 – Dados de entrada do exemplo 4.5

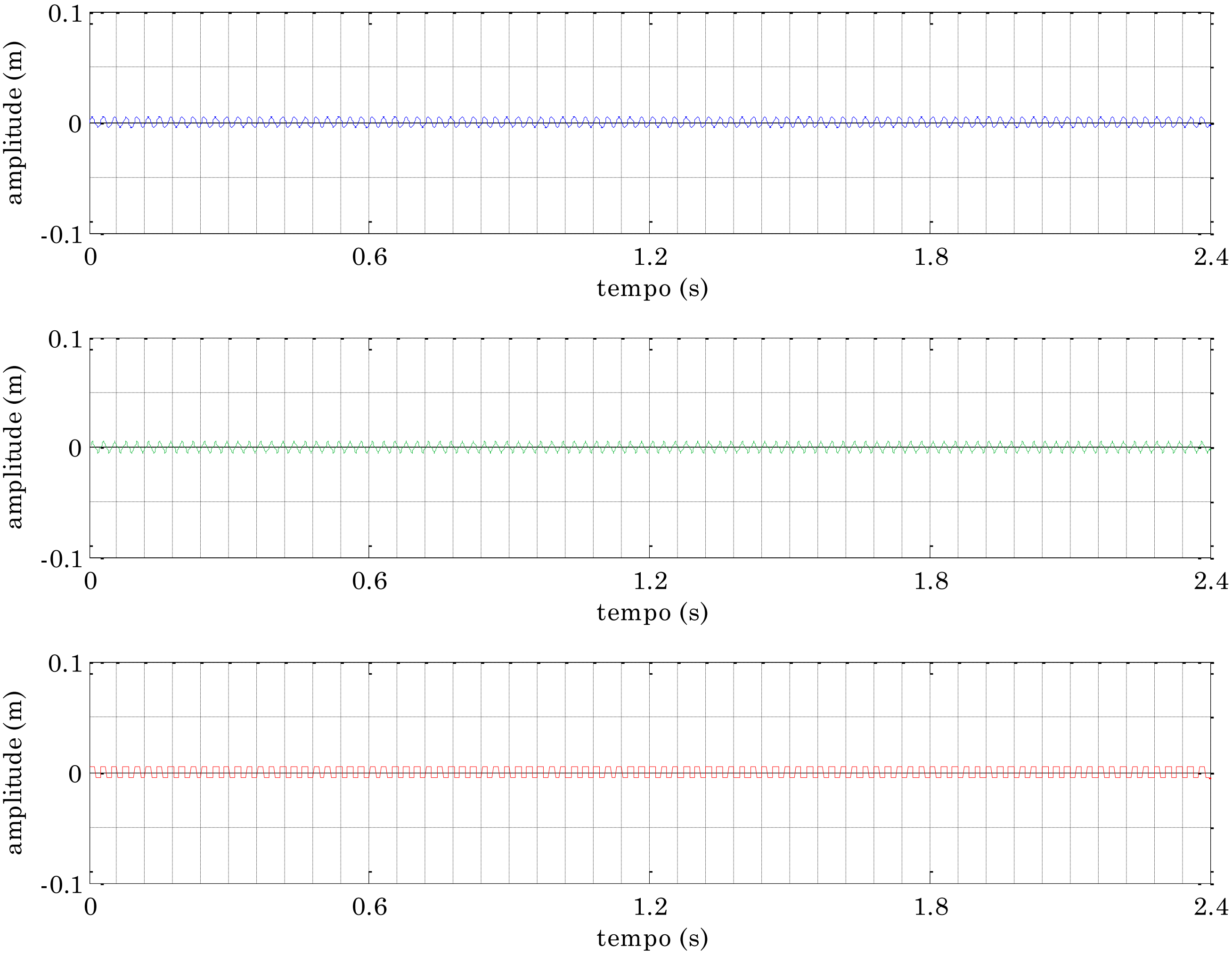
Dados de Entrada			
Veículo	Irregularidade	Ponte	Parâmetros de Dano
$m_1 = 4{,}400\ kgf$	$y_1 = senoidais$	$L_b = 20\ m$	$A_T = 0.995$
$m_2 = 17{,}600\ kgf$	$y_2 = triangulares$	$b = 0.4\ m$	$B_T = 30{,}000$
$k = 9{,}120\ kN/m$	$y_3 = ret\,angulares$	$h = 3.9494\ m$	$A_C = 1.2$
$c = 96\ kNs/m$	$A = 0.005\ m$	$I = 3.81\ m^4$	$B_C = 1{,}050$
$v = 30\ km/h$	$l = 0.2\ m$	$m = 5{,}951.72\ kg/m$	$\varepsilon_{d0} = 5.10^{-5}$
$\omega_{nv} = 20.3604\ rad/s$	$f_I = 41.6667\ Hz$	$\omega_{n1} = 46.1537\ rad/s$	
2,000 *Passos de Tempo*	$\omega_{eI} = 261.7994\ rad/s$	$E_c = 29.43\ GPa$	
	2,000 *Passos de Tempo*	$\nu_c = 0.2$	
		$E_s = 210\ GPa$	
		$\nu_s = 0.3$	
		$k_s = 0.85$	
		6 *Camadas*	Tolerâncias
		$\zeta = 0.025$	$tol_u = 0.00001$
		20 *Elementos*	$tol_F = 0.00001$
		10,000 *Passos de Tempo*	$tol_E = 0.00001$
		Newmark $(0.5\ e\ 0.25)$	
		$dt = 12e^{-4}s$	
		$c = 88.92\ cm$	
		$d = 2.812439\ m$	
		$d' = 1.136944\ m$	
		$\rho = \frac{A_s}{A_c} = 33.5\%$	

Fonte: O autor.

4.5.2 Análise com irregularidades periódicas senoidais, triangulares e retangulares

Primeiramente, a análise das respostas dinâmicas e do dano é feita com irregularidades periódicas. A Figura 54 apresenta a forma das irregularidades ao longo dos $20\ m$ de comprimento da viga que, no domínio do tempo, é equivalente a $2.4\ s$. A origem das irregularidades situam-se no centro de gravidade do pavimento.

Figura 54 – Irregularidades harmônicas senoidais, periódicas triangulares e periódicas retangulares



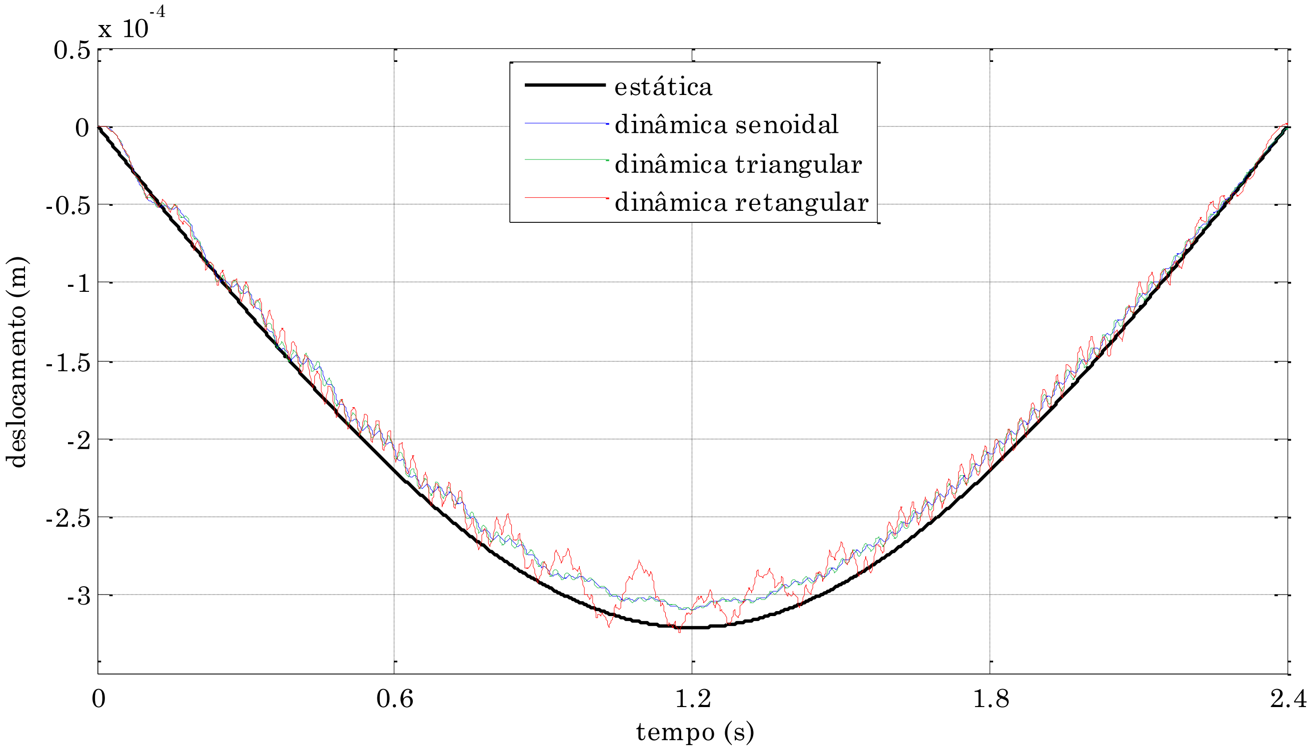
Fonte: O autor.

4.5.2.1 Análise dinâmica linear para as diferentes irregularidades periódicas

Brevemente é feita uma análise sem consideração da seção transversal no intuito de comparar as respostas dinâmicas lineares com a estática no meio do vão.

A Figura 55 mostra as respostas estáticas e dinâmicas de deslocamento para as formas de irregularidades senoidais, triangulares e retangulares obtidas com a rotina dinâmica não linear sem consideração da geometria da seção transversal da ponte, apenas considerando o momento de inércia. Este é considerado constante ao longo do comprimento da ponte, pois, nesse modelo, não há danificação do material.

Figura 55 – Comparação das respostas dinâmicas lineares de deslocamento com a resposta estática



Fonte: O autor.

Nota-se que as respostas dinâmicas obtidas com esta rotina não oscilaram em torno da resposta estática, sendo menores que ela, o que não deveria ocorrer. No entanto, esse modelo é eficaz em inúmeros casos. O comprimento de onda escolhido na análise foi suficientemente pequeno de modo a inviabilizar a rotina na representação das respostas reais da estrutura fora da faixa de ressonância.

Embora não seja o caso, este modelo também poderá não representar as respostas reais da estrutura em caso de cargas extremamente elevadas ou com grandes amplitudes de irregularidades, não abordadas em nenhuma dessas análises, por ser necessário analisar os problemas com mais teorias, como a mecânica do dano, e também pela rotina estar mais direcionada para a análise das respostas dinâmicas lineares perante o fenômeno da ressonância. Para uma boa representação das respostas, nesses casos, é necessário considerar a geometria da seção transversal da ponte mesmo numa análise dinâmica linear. Por esse motivo, não serão mostradas as respostas dinâmicas de velocidades e acelerações para os diferentes tipos de irregularidade com esta rotina nesta sessão 4.5. No entanto, essas respostas podem ser encontradas no apêndice A, ao fim da dissertação.

Se houver variação dos comprimentos das irregularidades, haverá variação das frequências ressonantes e consequentemente variação das velocidades ressonantes para as respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade e aceleração da estrutura da ponte (CHOPRA, 1995). Como neste exemplo o comprimento de onda adotado é de $0.2m$, ou seja, diferente de $1\,m$, há variação das frequências e velocidades ressonantes do sistema. Entretanto, essa rotina está recalculando as novas frequências e velocidades ressonantes em função dessa variação no comprimento de onda, mas não é necessário verificar as respostas apenas para às frequências e velocidades ressonantes. Pode-se, também, realizar as simulações computacionais e analisar as respostas dinâmicas para outras velocidades e frequências que não sejam as ressonantes, ou seja, para qualquer velocidade, comprimento de onda e amplitude das irregularidades.

A Figura 55, portanto, compara as respostas dinâmicas de deslocamento no centro do vão da ponte para a situação de velocidade do veículo igual a $30km/h$, passando pelas diferentes formas de irregularidade da via com comprimento de onda de $0.2m$, diferente de $1\,m$, e amplitude máxima de $5\,mm$, ou seja, diferente da situação de velocidade ressonante.

No caso das análises do fator de amplificação dinâmica, mantém-se o comprimento de onda e variam-se as velocidades do veículo e as amplitudes das irregularidades. Mas pode-se, também, verificar o fator de amplificação dinâmica variando-se os comprimentos de onda.

Além disso, mesmo para as velocidades e frequências ressonantes, se houver um carregamento de excessiva intensidade ou um carregamento de intensidade muito pequena, as respostas dinâmicas também não oscilarão em torno da resposta estática. Na verdade, verificou-se que, como em qualquer rotina, há faixas de velocidade, comprimento de onda, amplitude das irregularidades e intensidade das massas, bem como outros parâmetros, em que o modelo que considera só considera o momento de inércia e a rigidez constantes ao longo da peça, sem levar em consideração a geometria da seção transversal, não representa as reais respostas da estrutura. Mas são apenas algumas exceções, como neste exemplo, e o programa é extremamente eficiente para representar a grande maioria dos casos de interação dinâmica, inclusive necessitando pouco esforço computacional se comparado com modelos similares.

O motivo estudado, discutido e analisado que faz com que as respostas dinâmicas obtidas com esta rotina não oscilem em torno da resposta estática para essas exceções, é pelo fato de não haver consideração da geometria da seção transversal da ponte, apenas considerando o valor absoluto do momento de inércia nos dados de entrada do modelo.

A dúvida pode surgir ao imaginar que pelo modelo considerar o momento de inércia e a consequente rigidez à flexão constante para todos os elementos de viga ao longo da análise, ou seja, sem danos, há consideração da geometria da seção transversal na obtenção dessas grandezas.

Naturalmente, a obtenção do momento de inércia leva em consideração os dados geométricos do sólido analisado. Mas, ao mesmo tempo, nesta rotina bem como na rotina de Yang, Yau e Hsu (1997), se insere apenas com o valor absoluto do momento de inércia, o qual pode ser obtido por uma infinidade de peças de diferentes geometrias, nos dados de entrada do modelo.

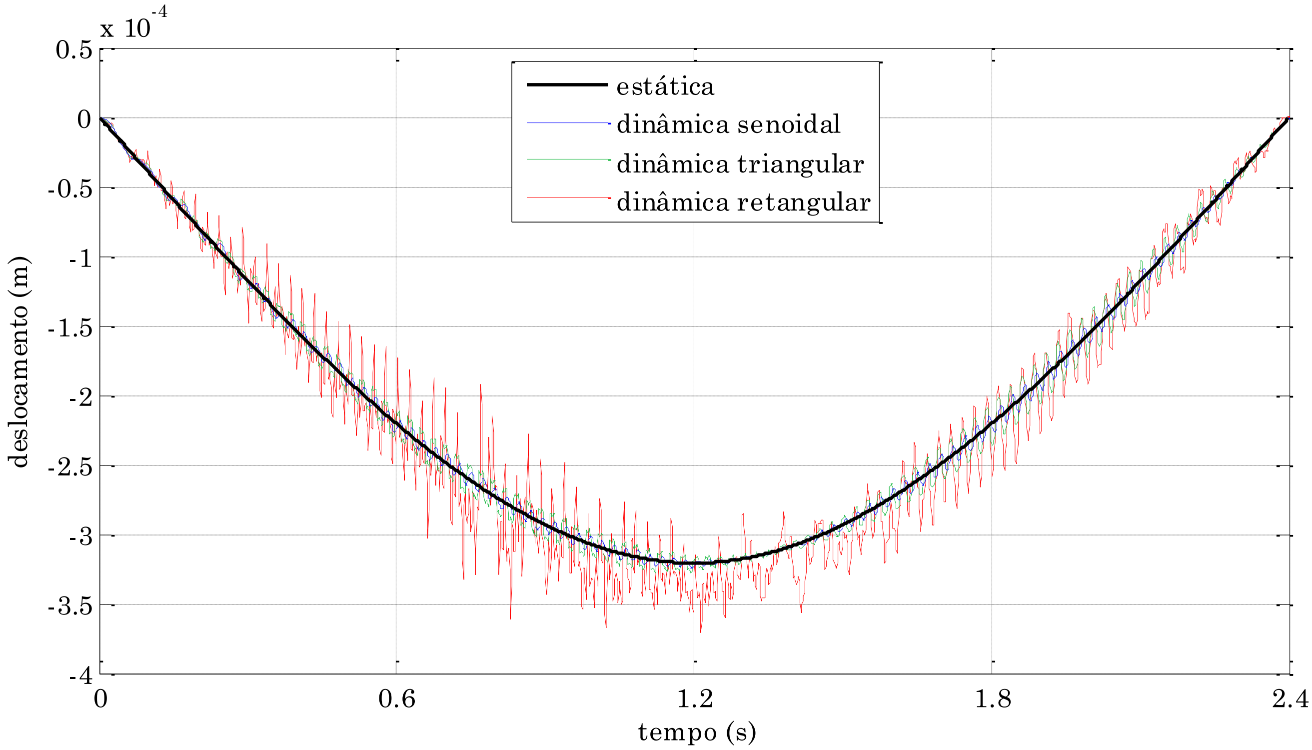
No entanto, é factível haver peças de geometrias totalmente diferentes que tenham o mesmo momento de inércia, mesmo módulo de *Young* e, consequentemente, a mesma rigidez à flexão que, sujeitas a um mesmo carregamento, terão respostas dinâmicas lineares, bem como evoluções de processos de danificação no caso das análises dinâmicas não lineares, completamente diferentes.

Não faz sentido imaginar que duas peças, como, por exemplo, ao comparar uma seção T com uma seção retangular, com distâncias e dados geométricos completamente diferentes, mas que tenham o mesmo valor absoluto do momento de inércia, danifiquem da mesma forma. O dano é pontual e depende, dentre outras questões, da deformação de determinada região local do material. Se duas peças de mesmo momento de inércia têm regiões locais de diferente geometria, o processo de danificação será totalmente diferente, haverá variações no equilíbrio dinâmico não linear do material e a danificação e a rigidez equivalente de cada seção transversal discretizada em cada elemento será diferente. O mesmo ocorre nos casos em que não há danificação do material, ou seja, nas análises dinâmicas lineares. Nesse sentido, peças de mesmo momento de inércia com diferentes geometrias terão pontos diferentes que terão diferentes respostas dinâmicas.

4.5.2.2 Análise dinâmica não linear para as diferentes irregularidades periódicas através da mecânica do dano

Todas as figuras apresentadas nesta sessão 4.5.2.2 são obtidas com a rotina dinâmica não linear através da mecânica do dano, a qual considera a geometria da seção transversal da ponte. Se não houver danos, a resposta se torna dinâmica linear e considera a seção transversal da ponte, ao contrário do modelo apresentado na sessão 3.2. Se houver danificação, o modelo verifica os danos e torna o problema dinâmico não linear com consideração da geometria. A Figura 56 compara as respostas dinâmicas não lineares com a estática no centro do vão.

Figura 56 – Comparação entre respostas dinâmicas não lineares de deslocamento com a resposta estática para diferentes irregularidades

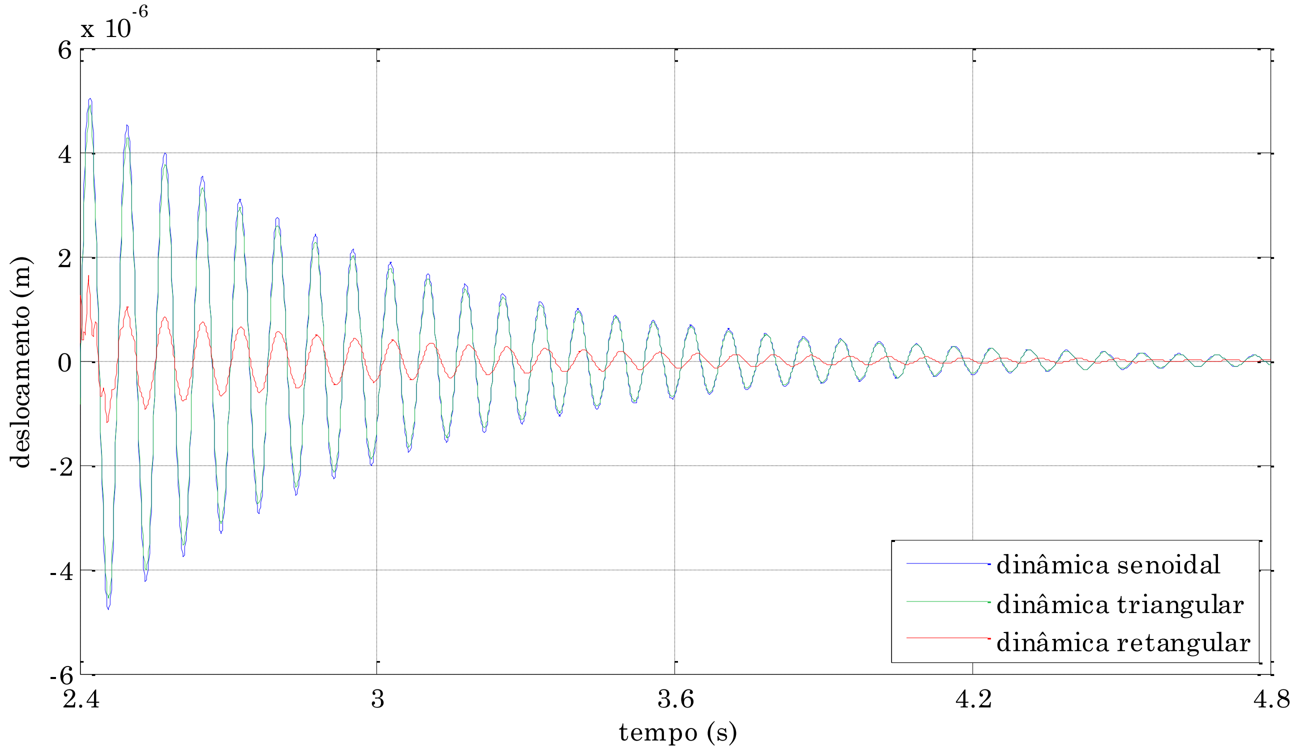


Fonte: O autor.

Pode-se observar que as respostas dinâmicas de deslocamento para os diferentes casos de irregularidades agora oscilam em torno da resposta estática, sendo uma resposta mais coerente se comparada à rotina sem consideração da geometria da seção transversal da ponte. As irregularidades da via associadas à vibração do veículo causaram maiores oscilações nas respostas dinâmicas de deslocamento. Naturalmente, os deslocamentos obtidos na análise com irregularidades periódicas retangulares são maiores do que as demais irregularidades, mas foram muito mais amplificadas por que essas irregularidades retangulares foram capazes de produzir danificação do material. Após as irregularidades retangulares, as periódicas triangulares geraram deslocamentos mais intensos do que as irregularidades harmônicas senoidais.

A Figura 57 mostra o efeito do amortecimento estrutural na resposta dinâmica de deslocamento da estrutura após a passagem do veículo nas diferentes formas de irregularidades.

Figura 57 – Ação do amortecimento estrutural na estabilização da resposta dinâmica não linear de deslocamento



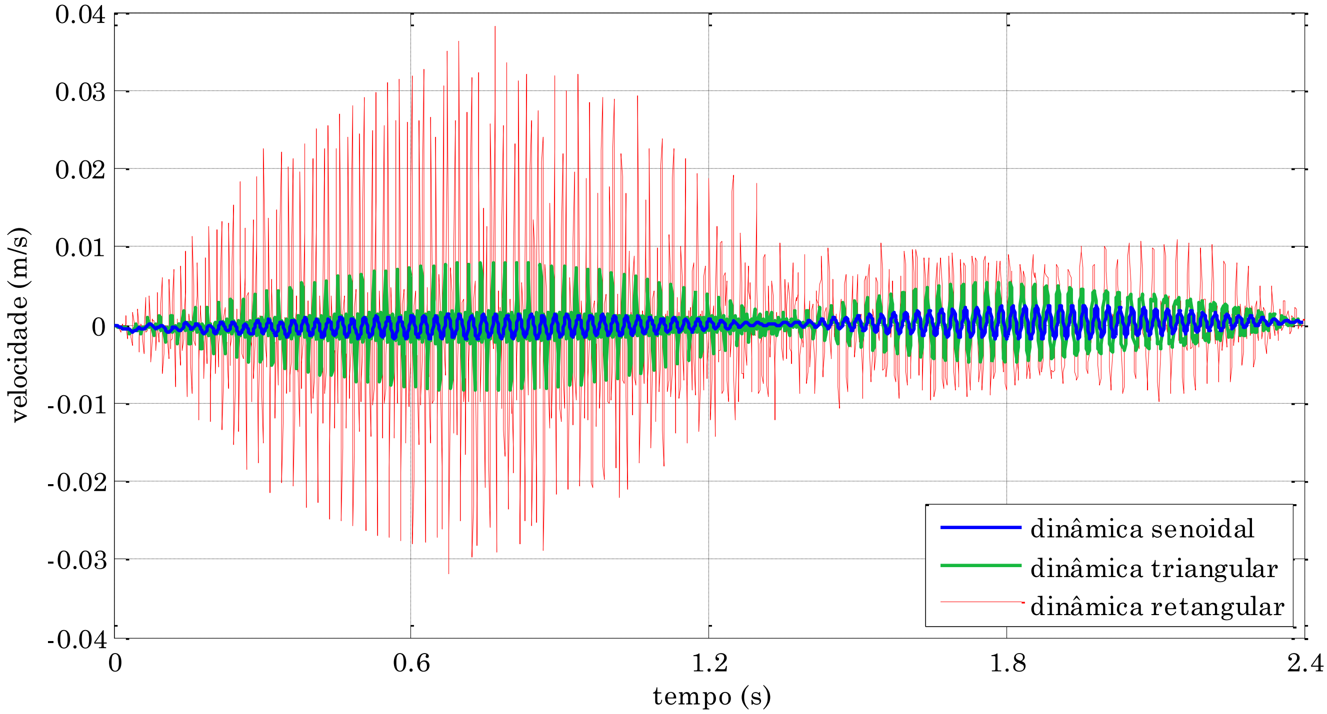
Fonte: O autor.

Pode-se observar que as respostas dinâmicas de deslocamento causadas pelas irregularidades retangulares, as quais são mais prejudiciais à estrutura, são mais facilmente amortecidas do que as demais, seguida pelas triangulares e senoidais. Em outras palavras, as respostas de maior impacto são amortecidas mais facilmente.

Como em qualquer análise dinâmica, a estrutura tem respostas em termos de velocidades e acelerações. A mecânica do dano claramente afeta essas respostas já que o módulo de *Young* é alterado ao longo do tempo.

A Figura 58 apresenta as respostas dinâmicas de velocidade para as formas senoidais, triangulares e retangulares de irregularidades periódicas.

Figura 58 – Respostas dinâmicas não lineares de velocidade para diferentes irregularidades

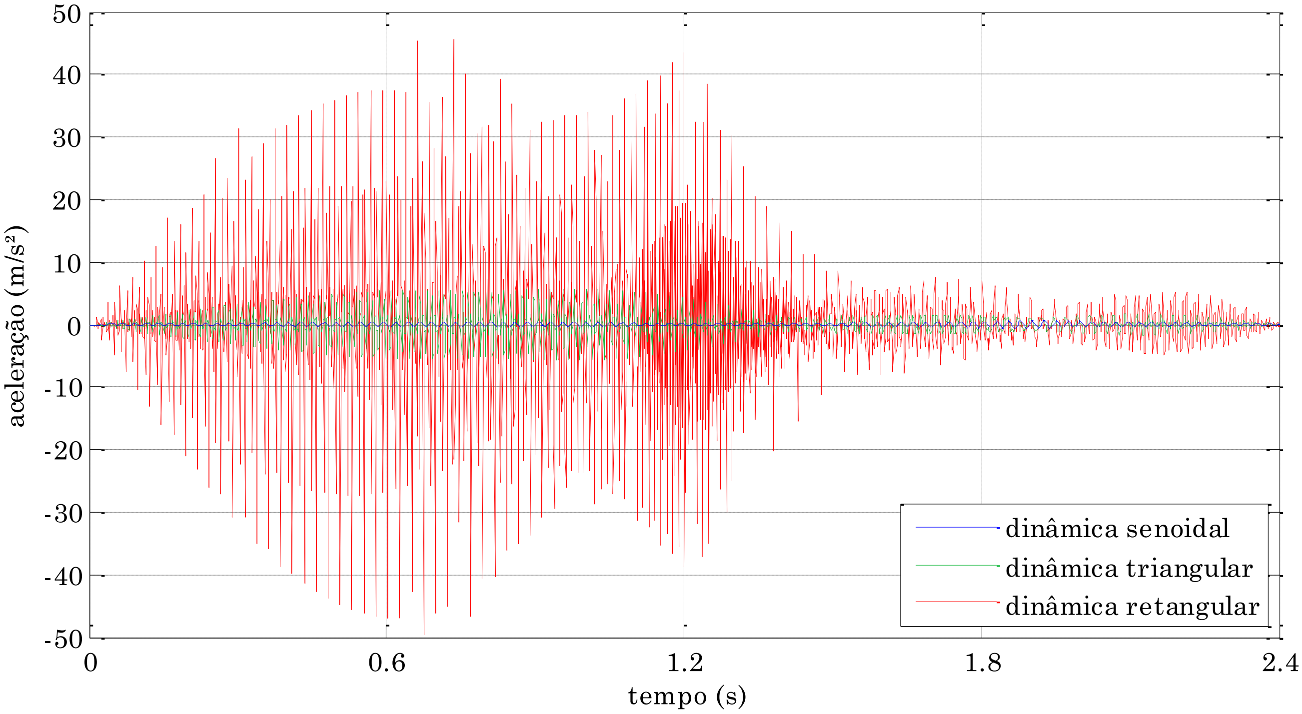


Fonte: O autor.

É possível observar o fenômeno do batimento nas respostas dinâmicas não lineares de velocidade obtidas da forma de irregularidade retangular, caracterizada por uma rápida oscilação com uma baixa variação de amplitude devido à superposição de ondas de mesma direção, mesma amplitude e frequências próximas (INMAN, 1996). Todas as respostas dinâmicas de velocidade variam entre valores positivos e negativos. A resposta dinâmica de velocidade das irregularidades retangulares, influenciada pelo dano, tem grandes variações dentro do mesmo intervalo de tempo e maior amplificação das oscilações.

A Figura 59 mostra as respostas dinâmicas de aceleração no meio da ponte para diferentes irregularidades.

Figura 59 – Respostas dinâmicas não lineares de aceleração para diferentes irregularidades

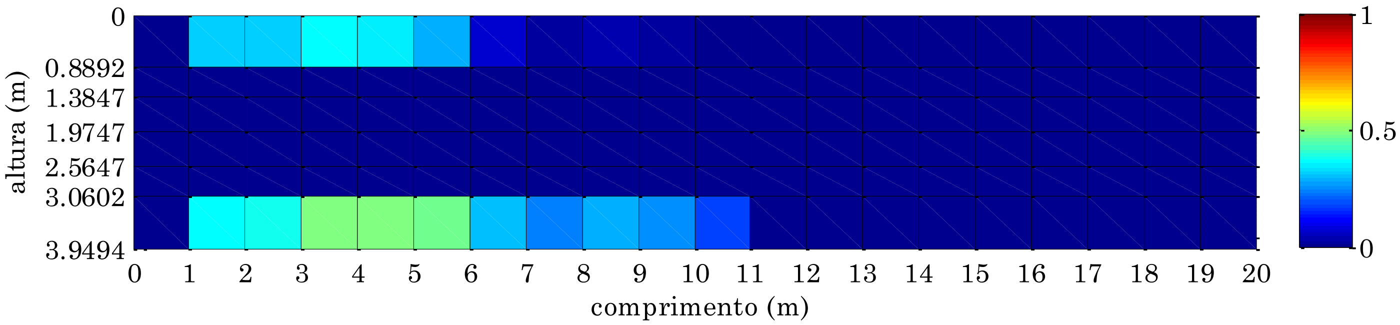


Fonte: O autor.

O fenômeno do batimento também pode ser notado, indicando uma proximidade com a ressonância. As respostas dinâmicas de aceleração também variam entre valores positivos e negativos. A resposta temporal é coincidente por que o evento é coincidente, mas ocorre excessivo aumento na magnitude e nas oscilações dentro do mesmo intervalo de tempo nas respostas dinâmicas não lineares obtidas das irregularidades retangulares por conta do dano. Apesar de não ser enfatizado intencionalmente, é possível observar o amortecimento estrutural do sistema.

A Figura 60 mostra a configuração da ponte danificada para as irregularidades retangulares com a seção transversal da ponte sendo divida em 6 camadas. Como não houve danos nas análises com irregularidades triangulares e senoidais, não serão mostradas as configurações da ponte com essas formas de irregularidades.

Figura 60 – Configuração da ponte com irregularidades retangulares dividida em 6 camadas



Fonte: O autor.

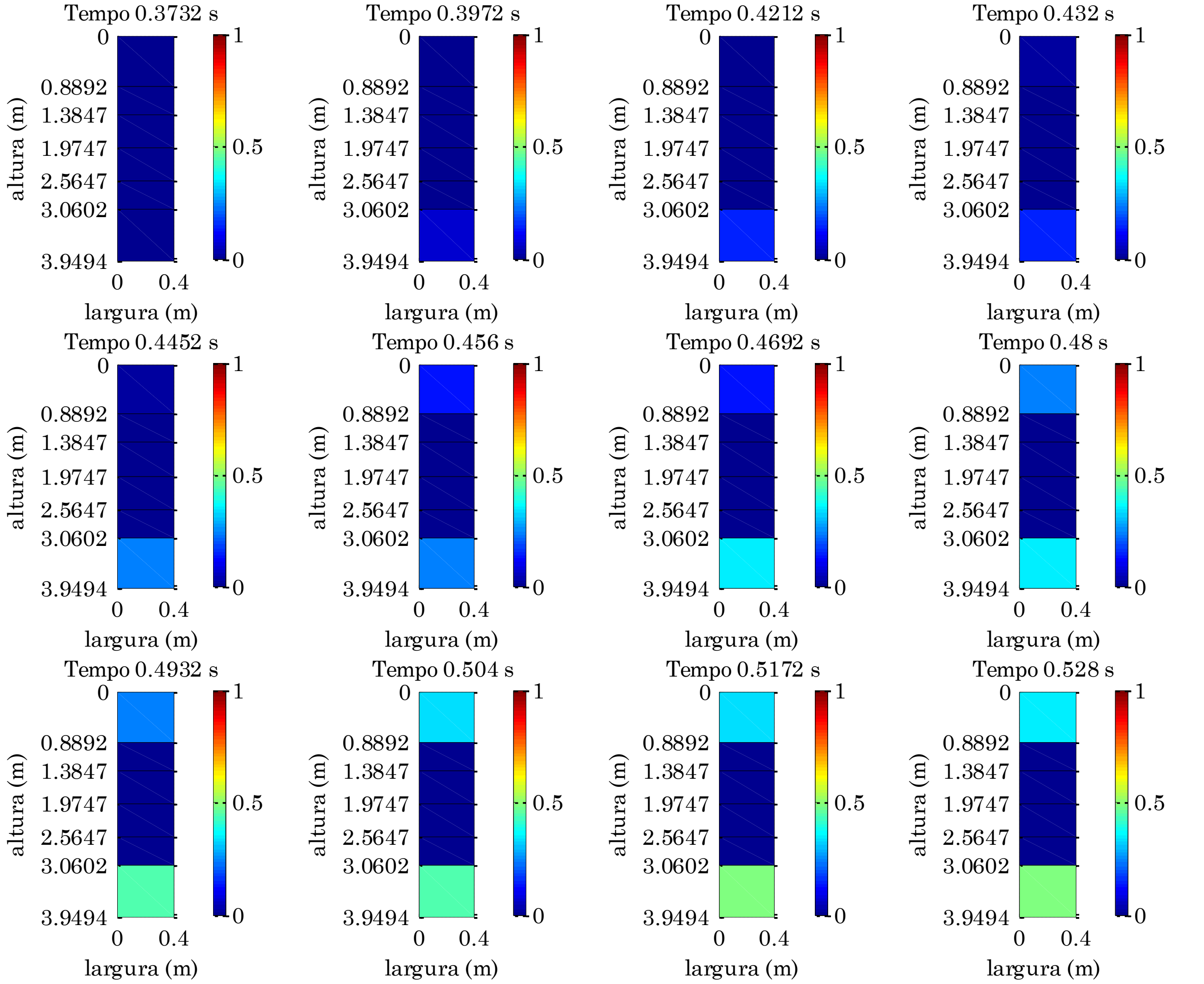
Analisando a Figura 60, pode-se observar que o quinto elemento, sendo que o comprimento de cada elemento é de $1m$, é o mais afetado durante o processo de danificação. A maior duração de amplitude das irregularidades retangulares, para o mesmo período em todas as irregularidades, faz com que os efeitos dinâmicos sejam potencializados resultando em maiores danos para a estrutura da ponte.

Ainda, diferentemente do que ocorreu no exemplo 4.4, em que os maiores danos aconteceram no meio do vão, observa-se que os danos acumulados ocorreram perto do apoio da esquerda. Como a direção do veículo é da esquerda para a direita, os maiores efeitos dinâmicos ocorrem no início da passagem do veículo nas irregularidades da ponte, não havendo tempo suficiente para o amortecimento estrutural estabilizar a vibração da estrutura.

O fato da danificação na ponte com irregularidades periódicas retangulares não ter sido distribuída de forma uniforme no centro do vão prova que o dano não é apenas proveniente de concentração de tensões, mas principalmente proveniente de deformações acumuladas. No caso das irregularidades periódicas retangulares, em vista disso, houve maiores deformações acumuladas próximas ao apoio da esquerda. Para obterem-se os valores de deformações em cada camada da seção transversal de cada elemento a cada iteração ao longo do tempo, como no caso da maioria das análises dinâmicas não lineares, é imprescindível o histórico das ações externas e suas consequentes reações internas ao longo do tempo. Por este fato, uma previsão mais simples da evolução do dano se torna impraticável.

É, portanto, interessante observar a evolução do dano no elemento mais afetado na análise com 6 camadas, como mostra a Figura 61.

Figura 61 – Evolução dos danos no quarto elemento ao longo do tempo dividido em 6 camadas

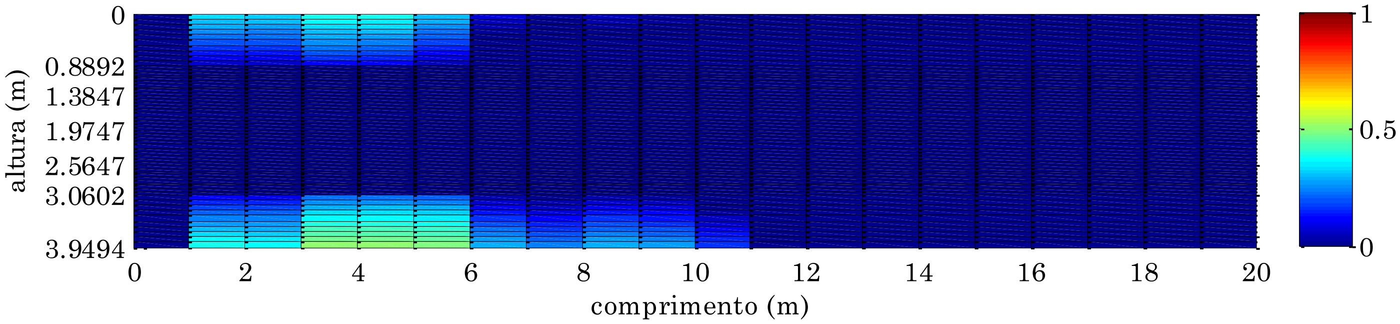


Fonte: O autor.

A evolução do dano ocorreu nos primeiros intervalos de tempo. O dano evoluiu mais significativamente nas camadas mais distantes por conta das grandes deformações que essas camadas tiveram. Os danos nas camadas superiores e inferiores à linha neutra ocorreram tanto por tração como por compressão em ambas as extremidades por conta da inversão de esforços devido à vibração. Em uma análise sem a implementação da inversão de esforços, tal efeito não poderia ser detectado.

Percebe-se que a danificação é muito abrangente na divisão da seção transversal em 6 camadas, de modo que a danificação de um ponto na camada danifica a camada como um todo. Deste modo, a divisão em um maior número de camadas traz uma maior precisão nas respostas. Assim, a Figura 62 mostra a configuração da ponte danificada com um refino de análises em 60 camadas.

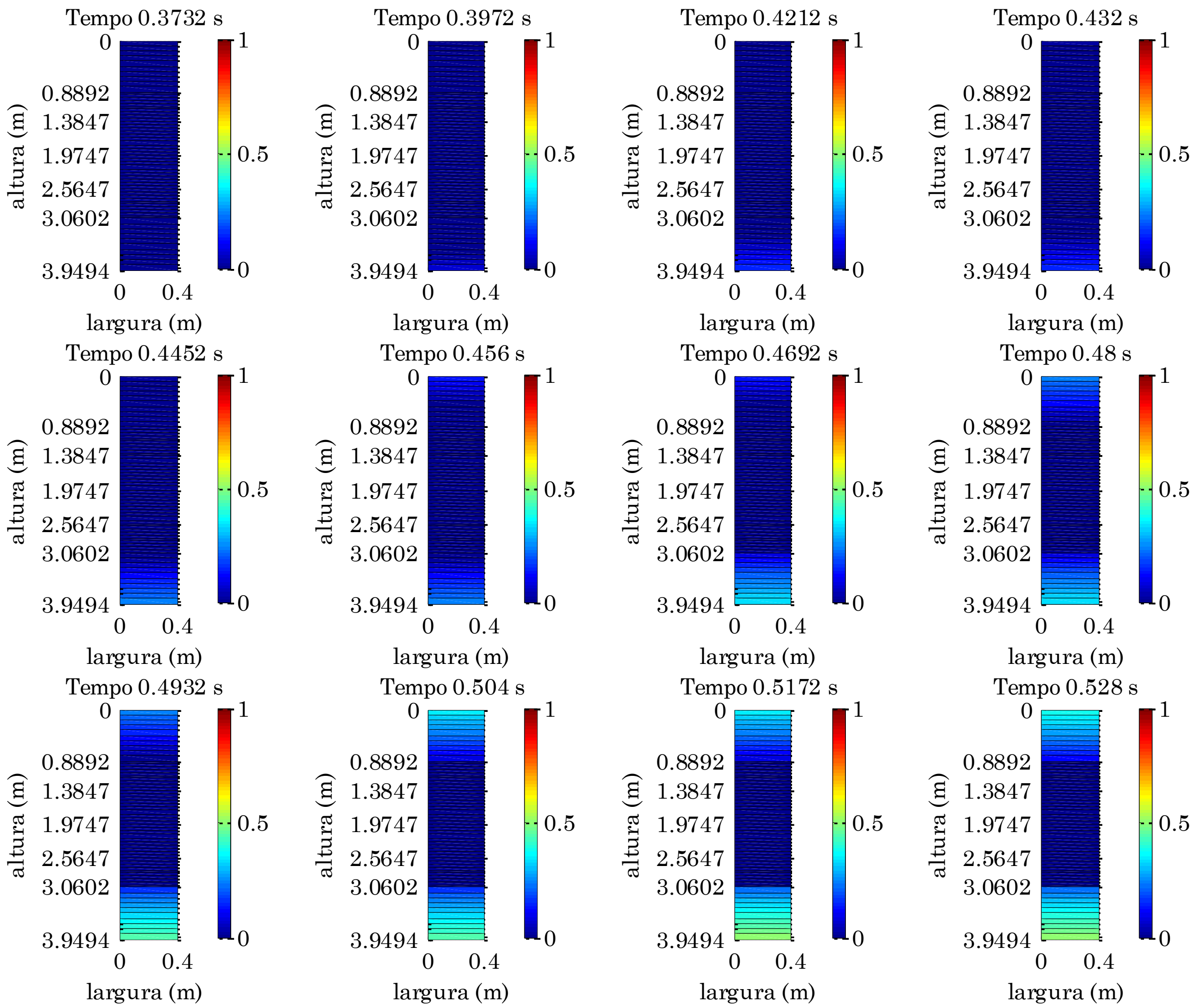
Figura 62 – Configuração da ponte com irregularidades retangulares dividida em 60 camadas



Fonte: O autor.

A Figura 63 mostra a evolução do dano no elemento mais afetado ao longo do tempo.

Figura 63 – Evolução dos danos no quarto elemento ao longo do tempo dividido em 60 camadas



Fonte: O autor.

Analisando a Figura 62 e a Figura 63, observa-se que com o refino nas camadas obtêve-se uma resposta de danificação dinâmica não linear mais minuciosa ao longo do tempo. Enquanto na divisão em 6 camadas a camada inferior mais distante da linha neutra do quarto elemento foi danificada como um todo, na divisão em 60 camadas essa mesma região teve uma danificação mais relevante a medida que se distancia da linha neutra. A respeito dos instantes de tempo mostrados na Figura 61 e na Figura 63, também houve danificações em demais instantes de tempo. No entanto, foram mostrados os mais proeminentes.

Além de mudar as respostas em termos de deslocamentos, velocidades e acelerações, sabe-se que o dano altera as frequências naturais de vibração da estrutura. À medida que a mecânica do dano altera a rigidez de cada elemento da ponte, as frequências naturais de vibração da ponte danificada também são penalizadas por elas serem função da rigidez e da massa da estrutura. A Tabela 9 compara as frequências obtidas com a viga intacta e com a viga danificada.

Tabela 9 – Frequências naturais da ponte com irregularidades periódicas retangulares

Frequências Naturais de Vibração	Análise Dinâmica Linear (rad/s)	Análise Dinâmica Não Linear (rad/s)
1ª	46.1536860	45.4980275
2ª	184.7522534	181.1574457
3ª	415.9657361	407.8897178
4ª	739.9920084	727.3316067
5ª	1157.0654037	1135.0442653
6ª	1667.5116640	1636.5849973
7ª	2271.8006588	2231.7063230

Há redução nas frequências naturais de vibração, como esperado, variando de 1.421% até 1.946% nas acima apresentadas.

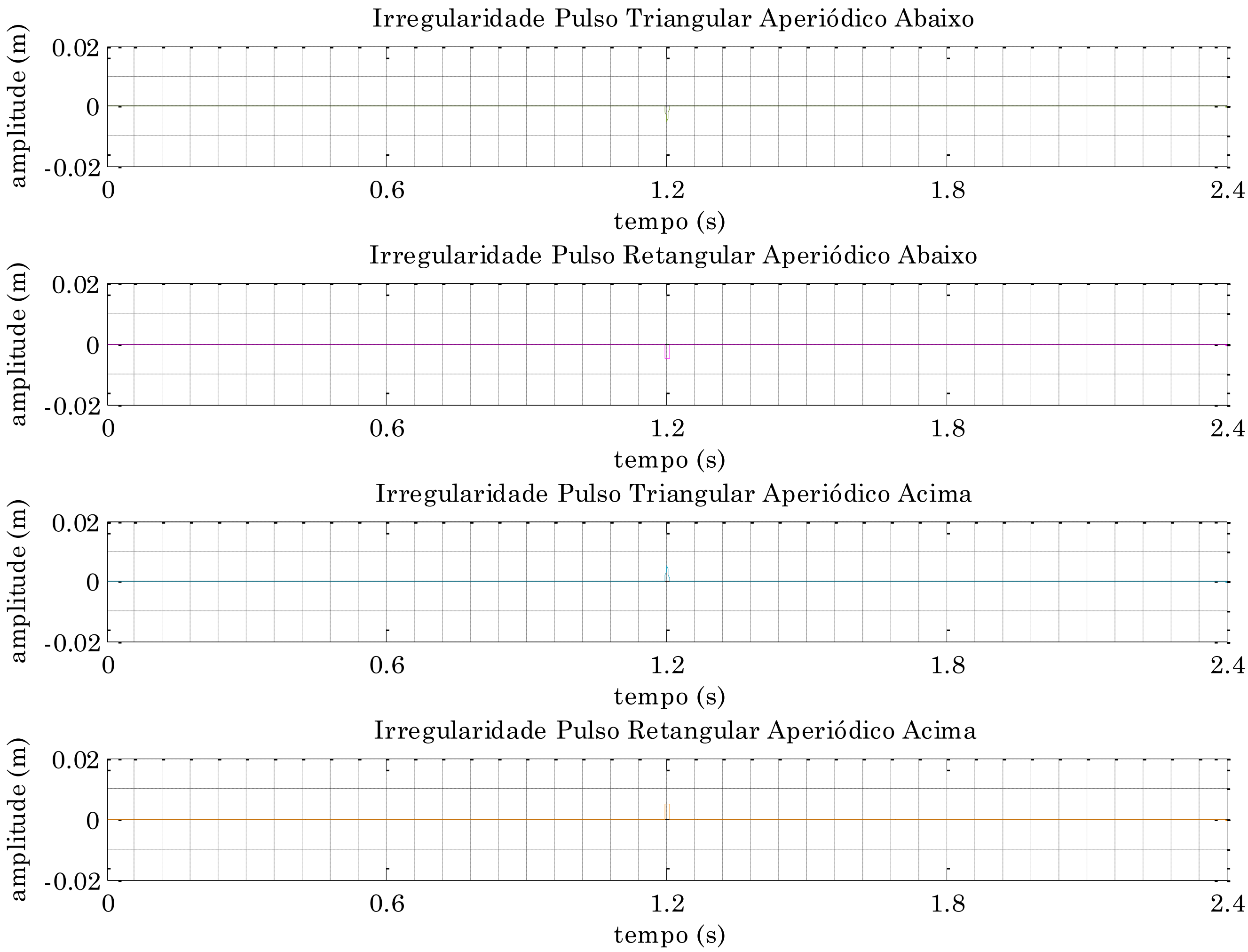
4.5.3 Exemplo com irregularidades na forma de pulsos não periódicos triangulares e retangulares

As irregularidades harmônicas senoidais são muito estudadas em pontes ferroviárias pelo fato de que o trem passante comumente causa um abaulamento do trilho ao longo do tempo, similar a uma forma harmônica senoidal. As irregularidades excitam o trem que, por sua vez, despertam vibrações adicionais na estrutura da ponte além daquelas causadas por seu próprio movimento. No entanto, uma forma muito comum de irregularidades, principalmente em pontes rodoviárias, são as irregularidades não periódicas. É o caso, por exemplo, de uma fissura ou defeitos no pavimento de uma pista.

Nesse sentido, imagine-se o mesmo exemplo, porém ao invés do veículo passar por uma ponte com irregularidades periódicas, o veículo vai trafegando por uma ponte sem irregularidades quando, em determinado instante de tempo, equivalente a região do meio do vão, o veículo se depara com uma única irregularidade bem definida para cima ou para baixo da via que excita o veículo na forma de um pulso.

A Figura 64 apresenta os tipos de irregularidades na forma de pulsos utilizados nesse exemplo.

Figura 64 – Irregularidades na forma de pulsos não periódicos do exemplo 4.3



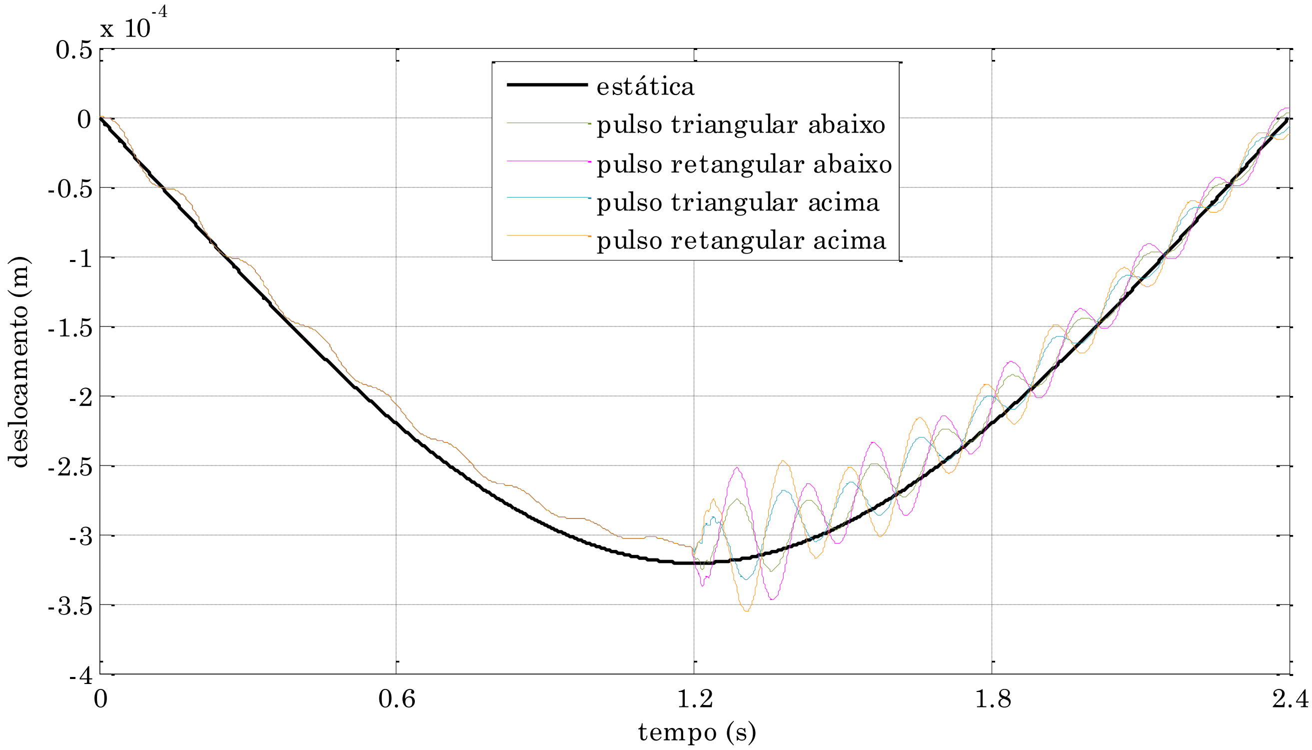
Fonte: O autor.

4.5.3.1 Análise com rotina dinâmica linear considerando apenas o momento de inércia para diferentes irregularidades na forma de pulsos aperiódicos

Inicialmente, faz-se uma análise com a rotina dinâmica linear sem a consideração da geometria da seção transversal da ponte.

A Figura 65 compara as respostas dinâmicas lineares de deslocamento obtidas para as irregularidades na forma de pulso triangular e retangular para baixo ou para cima da via, com a resposta estática de deslocamento no centro do vão da ponte.

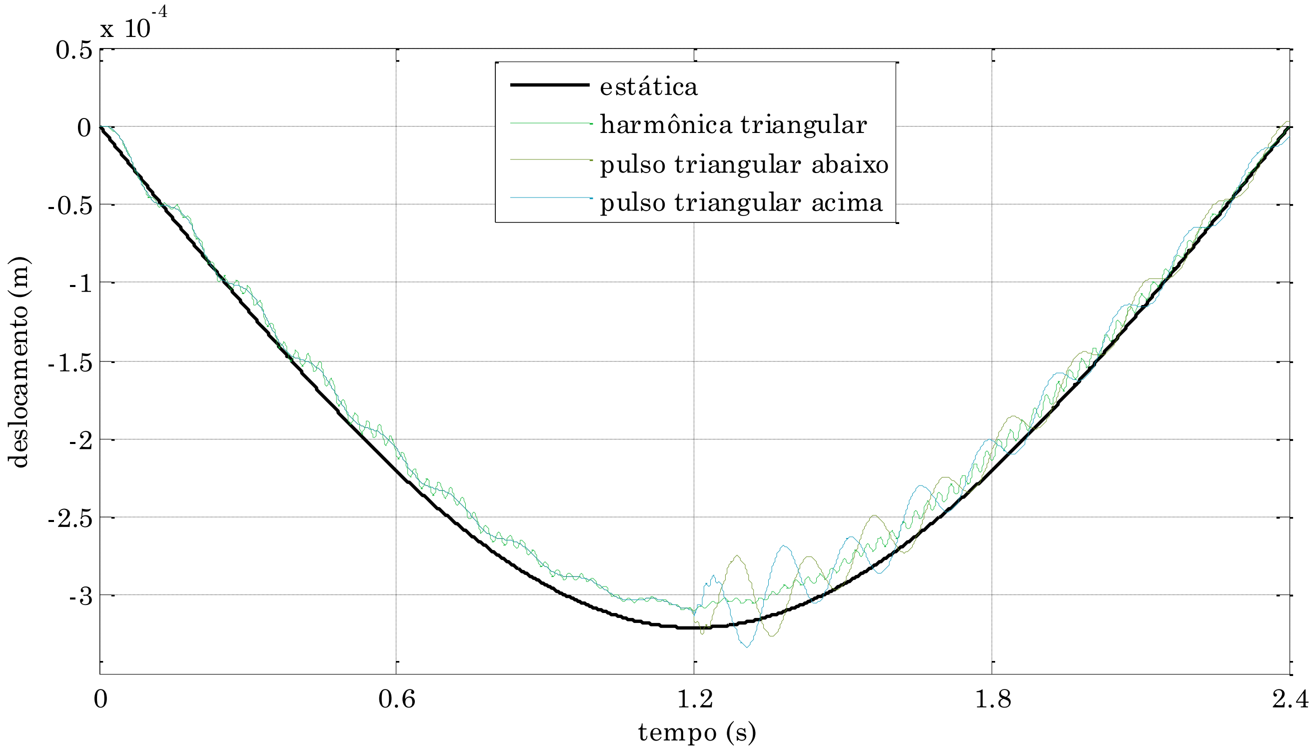
Figura 65 – Comparação das respostas dinâmicas lineares de deslocamento para as diferentes irregularidades na forma de pulsos



Fonte: O autor.

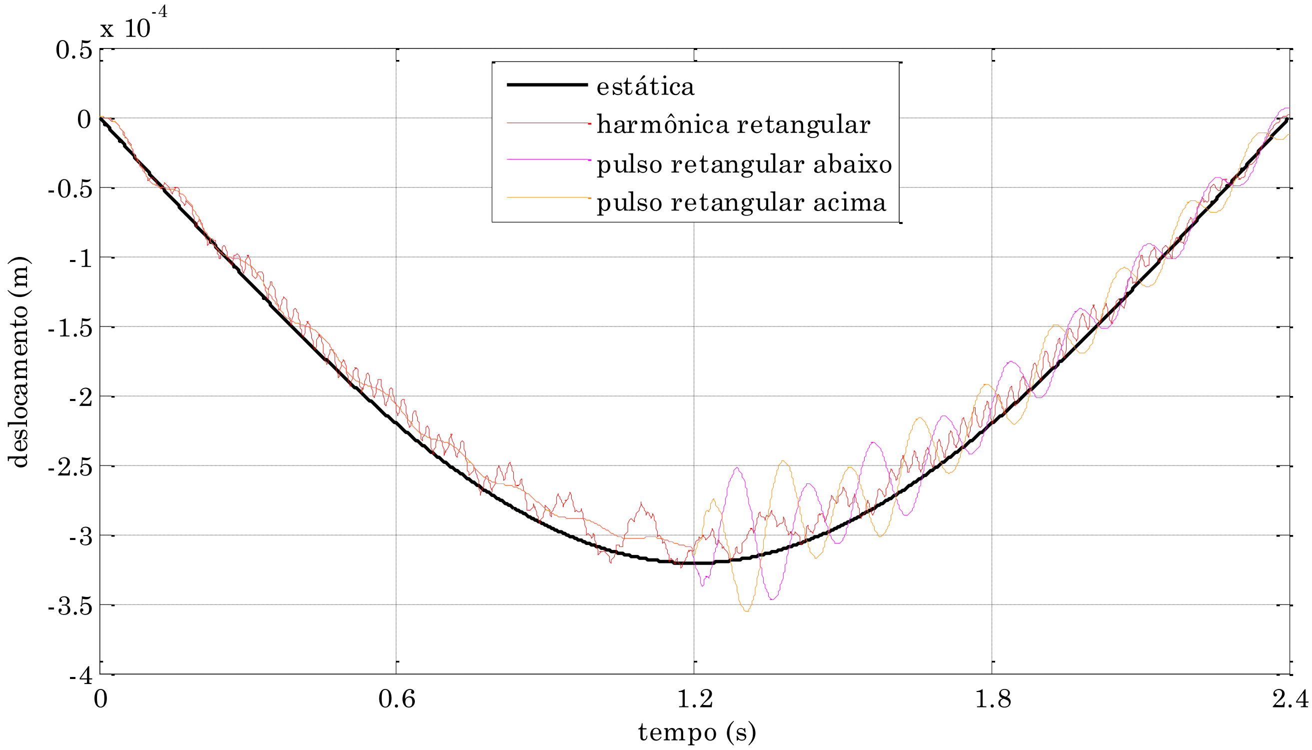
Novamente, com o modelo utilizado, as respostas dinâmicas lineares ficaram abaixo da resposta estática, não representando a realidade do problema. Por esse mesmo motivo, não serão apresentadas, aqui, as respostas dinâmicas de velocidade e aceleração. Mas no intuito de comparação, as respostas dinâmicas lineares obtidas na forma de pulso serão comparadas com as periódicas. A Figura 66 compara os pulsos triangulares com a periódica triangular e a Figura 67 compara os pulsos retangulares com a periódica retangular.

Figura 66 – Comparação entre respostas dinâmicas lineares pulso e periódicas triangulares com a resposta estática



Fonte: O autor.

Figura 67 – Comparação entre respostas dinâmicas lineares pulso e periódicas retangulares com a resposta estática



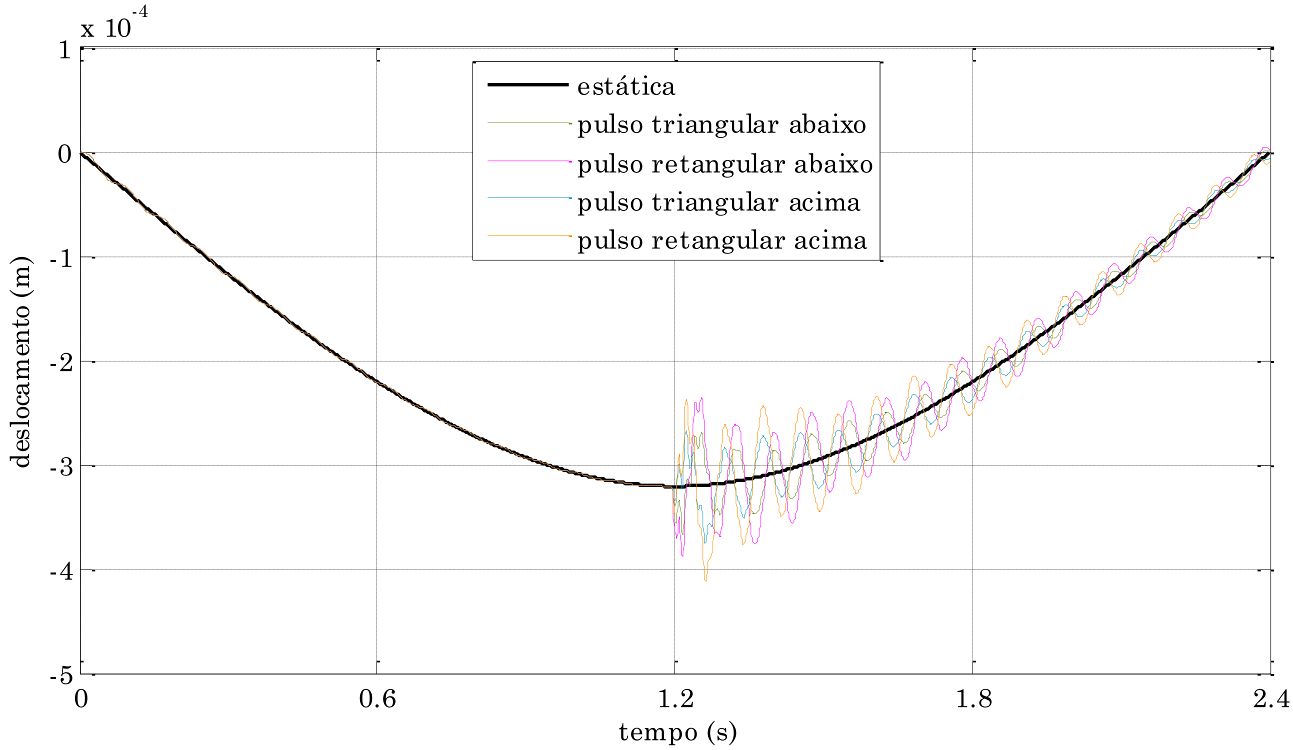
Fonte: O autor.

Ao analisar todas as figuras obtidas com a rotina dinâmica linear da sessão 4.5.3.1, Figura 65, Figura 66 e Figura 67, todas as respostas dinâmicas coincidem até o meio do vão por, até então, não haverem irregularidades na via. Trata-se, até então, da resposta dinâmica linear de deslocamento da ponte sem irregularidades. Nota-se que há oscilações nessa região, mas de baixa amplitude. Ao observar a Figura 66 e a Figura 67, concluí-se que as respostas dinâmicas periódicas oscilam em torno da resposta dinâmica sem irregularidades, trecho da esquerda, tanto para o caso das irregularidades triangulares como para o caso das irregularidades retangulares. Mesmo fora da ressonância, deveria haver oscilação das resposta dinâmicas em torno da estática. Ainda, nota-se maior pico de deslocamentos em todas as respostas na forma de pulsos se comparada com as respostas harmônicas.

4.5.3.2 Análise dinâmica não linear

A Figura 68 compara as respostas dinâmicas de deslocamento para as irregularidades na forma de diferentes pulsos com a resposta estática no meio do vão.

Figura 68 – Comparação entre as respostas dinâmicas de deslocamento para as diferentes irregularidades na forma de pulsos com rotina capaz de captar não linearidades



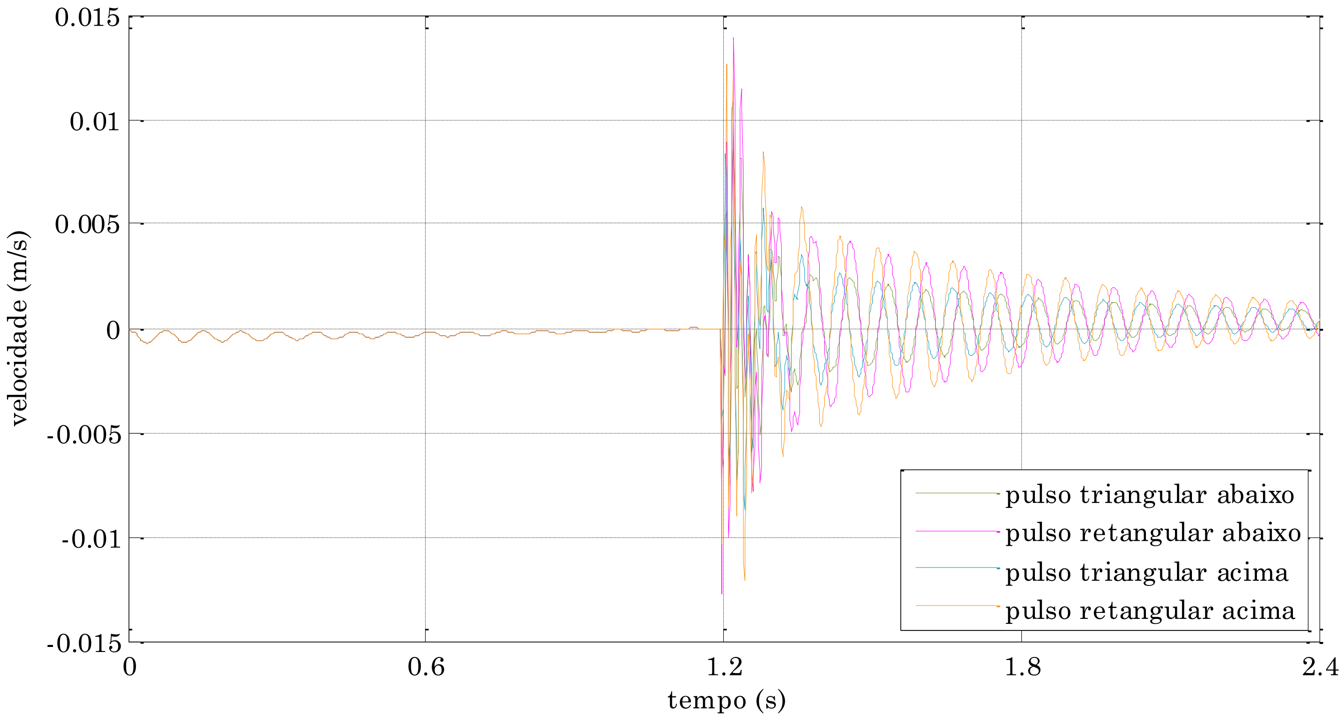
Fonte: O autor.

Com a rotina atual, todas as respostas dinâmicas de deslocamento oscilam em torno da resposta estática. Inclusive, no trecho da esquerda, que representa a resposta dinâmica da ponte sem irregularidades. Deste modo, a rotina dinâmica que considera a geometria da seção transversal, e que se torna dinâmica não linear na presença de danos, representa bem a realidade do problema.

Observa-se que os pulsos retangulares são mais proeminentes nas respostas na forma de pulso retangulares do que as respostas na forma de pulsos triangulares. No entanto, é de suma importância observar que essas respostas não foram capazes de provocar a danificação do material, como será abordado mais a seguir ao analisar a Figura 72 e a Figura 73.

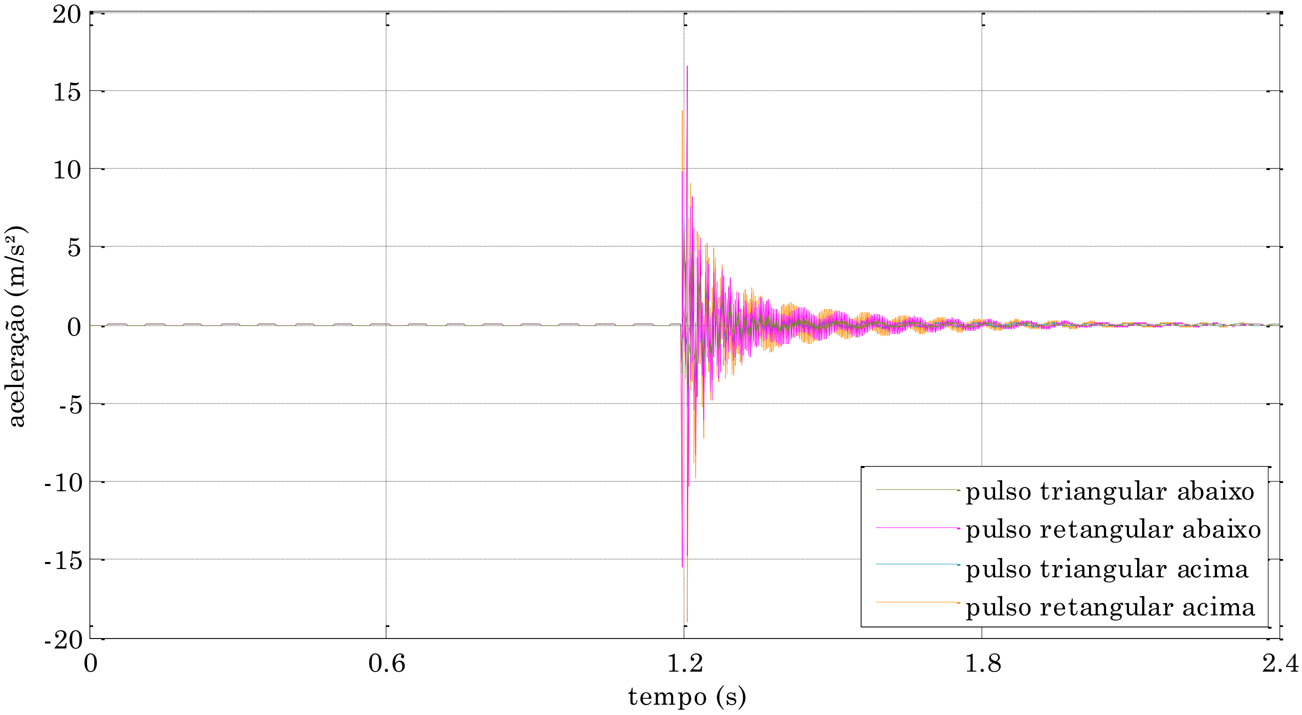
Diferentemente do caso da análise dinâmica linear sem a consideração da seção transversal da ponte, as respostas dinâmicas de deslocamento representaram bem a realidade do problema. Deste modo, serão apresentadas as respostas dinâmicas de velocidade na Figura 69, as respostas dinâmicas de aceleração ao longo da ponte na Figura 70 e a resposta dinâmica de aceleração no trecho de $1.3\ s$ até $1.9\ s$ na Figura 71.

Figura 69 – Respostas dinâmicas de velocidade para diferentes irregularidades na forma de pulsos com rotina capaz de captar não linearidades



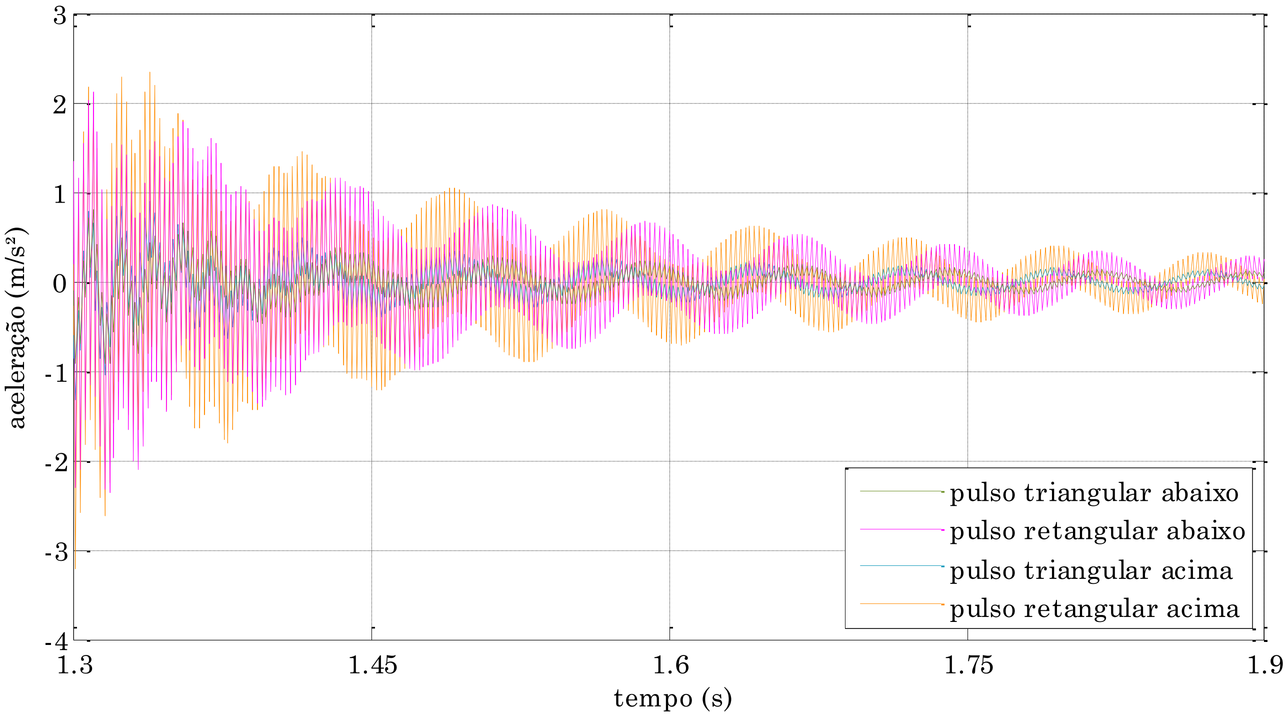
Fonte: O autor.

Figura 70 – Respostas dinâmicas de aceleração para diferentes irregularidades na forma de pulsos com rotina capaz de captar não linearidades



Fonte: O autor.

Figura 71 – Respostas dinâmicas de aceleração para irregularidades na forma de pulsos no trecho de 1,3 s até 1,9 s com rotina capaz de captar não linearidades



Fonte: O autor.

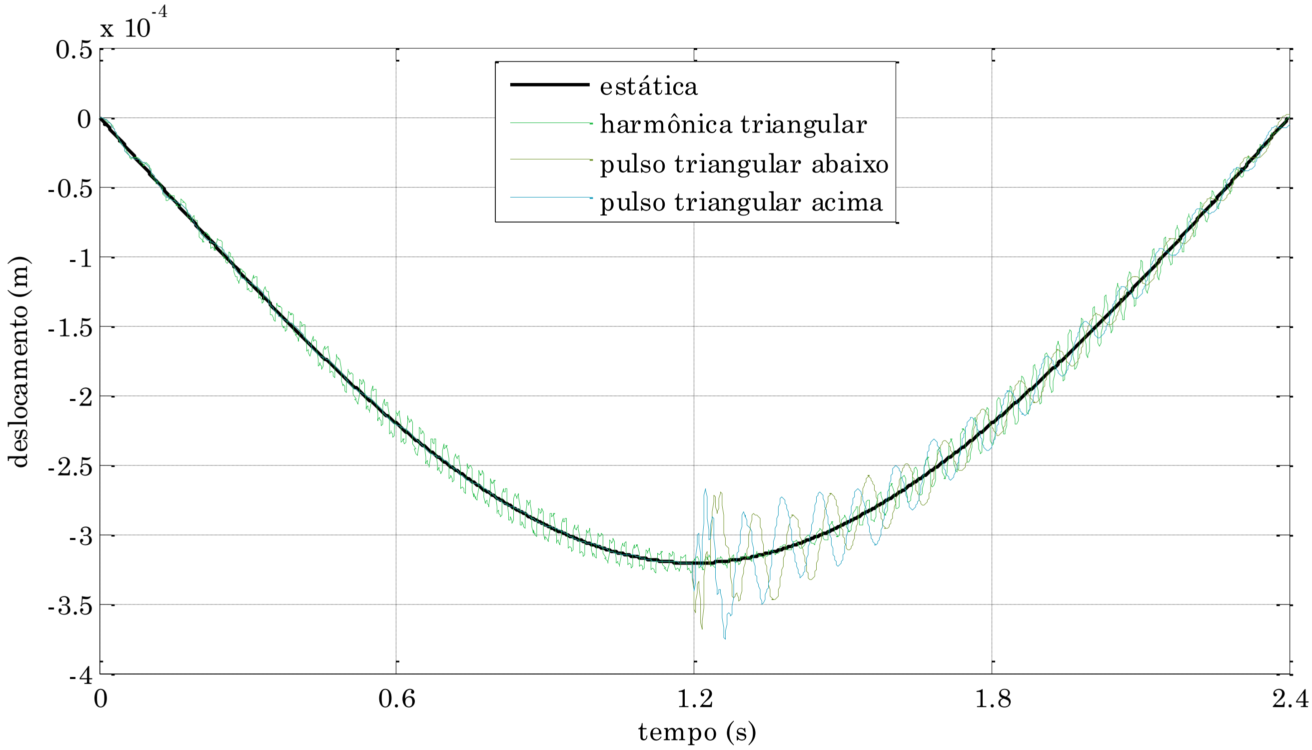
Os pulsos geraram um desequilíbrio no sistema que provocaram picos de velocidade na Figura 69 e picos de aceleração na Figura 70. Nas respostas dinâmicas de velocidade os picos logo foram amortecidos e a resposta dinâmica foi estabilizada de modo mais gradativo. Já nas respostas dinâmicas de aceleração, observam-se grandes oscilações dentro das próprias oscilações em todas as respostas dinâmicas de aceleração obtidas para as irregularidades na forma de pulsos.

Os picos em ambas as respostas dinâmicas de velocidade e de aceleração, apresentados na Figura 69 e na Figura 70 ocorreram em torno de $1.2\,s$, o qual é em torno do tempo de passagem do veículo no centro do vão da ponte.

As velocidades e as acelerações obtidas foram maiores para as irregularidades não periódicas retangulares do que as irregularidades não periódicas triangulares em todas as análises. Há defasagem entre as respostas geradas pelas irregularidades de mesma forma para baixo ou para cima da via, tanto para as respostas dinâmicas de velocidade como nas de aceleração.

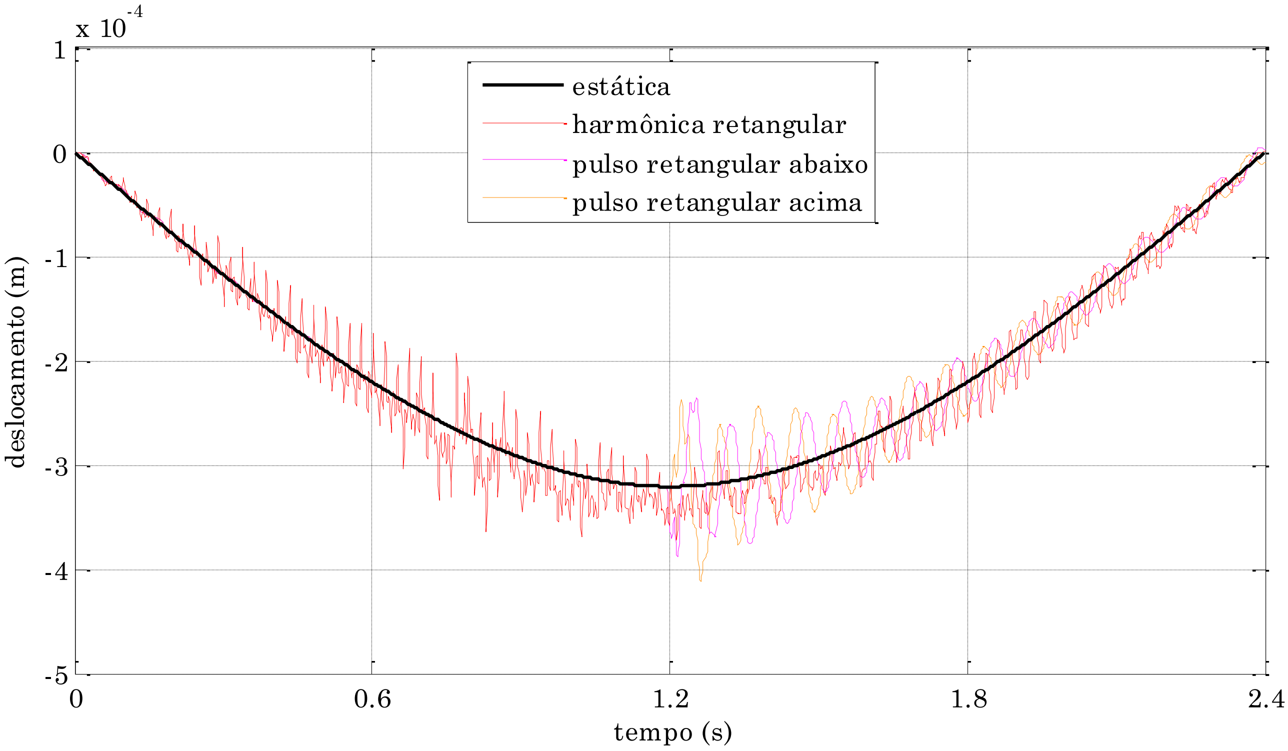
A Figura 72 e a Figura 73 comparam a resposta dinâmica de deslocamentos entre periódicas e pulsos triangulares e retangulares, respectivamente.

Figura 72 – Comparação entre respostas dinâmicas não lineares pulso e harmônicas triangulares com a resposta estática



Fonte: O autor.

Figura 73 – Comparação entre respostas dinâmicas não lineares pulso e harmônicas retangulares com a resposta estática



Fonte: O autor.

Observa-se que apesar das respostas dinâmicas de deslocamento geradas pelas irregularidades na forma de pulsos triangulares e retangulares serem maiores que as periódicas, as irregularidades na forma de pulsos não causaram danos à estrutura da ponte por não terem provocado deformações além da deformação limite estabelecida no modelo de dano de *Mazars* (1984). Se, no entanto, a intensidade da carga fosse aumentada, os pulsos poderiam ser capazes de provocar alguma danificação. No caso das irregularidades periódicas retangulares, houve danificação em torno do quarto elemento por conta de deformações excessivas acumuladas causadas pelas irregularidades desde $5.183\ m$ até $7.333\ m$, conforme observado na Figura 63. Ou seja, irregularidades que ocorreram antes dos $10\ m$ do meio do vão. Também, observa-se que a resposta é amortecida nas irregularidades periódicas porque as irregularidades variam entre valores positivos e negativos em relação ao topo do pavimento.

4.6 EXEMPLO DE PONTE COM DOIS BALANÇOS

Neste exemplo utiliza-se uma ponte com dois balanços com diversas formas de irregularidades, periódicas e não periódicas. Primeiramente, analisa-se a mesma com dois apoios e posteriormente as análises são feitas para a ponte com três apoios. Os exemplos apresentados possuem grandes balanços de modo a produzir certa danificação.

4.6.1 Dados de entrada do exemplo 4.6

A Tabela 10 apresenta os dados de entrada do exemplo 4.6.

Tabela 10 – Dados de entrada do exemplo de ponte com dois balanços

Dados de Entrada			
Veículo	Irregularidade	Ponte	Parâmetros de Dano
$m_1 = 4{,}400\ kgf$	$y_1 = senoidais$	$L_b = 40\ m$	$A_T = 0.995$
$m_2 = 17{,}600\ kgf$	$y_2 = triangulares$	$b = 0.4\ m$	$B_T = 3.10^4$
$k = 9{,}120\ kN/m$	$y_3 = ret\,angulares$	$h = 3.9494\ m$	$A_C = 1.2$
$c = 96\ kNs/m$	$y_4 = P.Triang.Abaixo$	$I = 3.81\ m^4$	$B_C = 1{,}050$
$v = 80\ km/h$	$y_5 = P.Triang.Acima$	$m = 5{,}951.72\ kg/m$	$\varepsilon_{d0} = 5.10^{-5}$
$\omega_{nv} = 20.3604\ rad/s$	$y_6 = P.\ \mathrm{Ret}\,ang.Abaixo$	$\omega_{n1} = 46.1537\ rad/s$	
$2{,}000\ Passos\ de\ Tempo$	$y_7 = P.\mathrm{Ret}\,ang.Acima$	$E_c = 29.43\ GPa$	
	$y_7 = Sem\ \ Irreg.$	$\nu_c = 0.2$	
	$y_8 = Arco\ Abaixo$	$E_s = 210\ GPa$	
	$y_9 = Arco\ Acima$	$\nu_s = 0.3$	
	$A = 0.005\ m$	$k_s = 0.85$	
	$l = 0.2\ m$	$60\ Camadas$	
	$f_I = 111.1111\ Hz$	$\zeta = 0.025$	Tolerâncias
	$\omega_{eI} = 698.1317\ rad/s$	$40\ Elementos$	$tol_u = 1.10^{-5}$
	$2{,}000\ Passos\ de\ Tempo$	$2\ gl/nó$	$tol_F = 1.10^{-5}$
		$82\ graus\ de\ liberdade$	$tol_E = 1.10^{-5}$
		$10{,}000\ Passos\ de\ Tempo$	
		$Newmark\ (0.5\ e\ 0.25)$	
		$dt = 9.0e^{-4}s$	
		$c = 88.92\ cm$	
		$d = 2.812439\ \ m$	
		$d' = 1.136944\ \ m$	
		$\rho = 33.496631\%$	

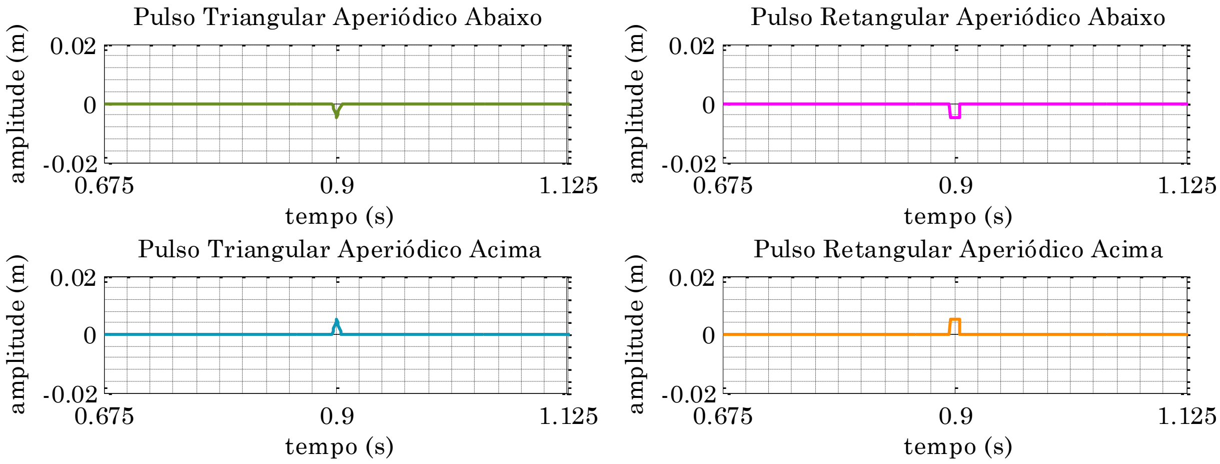
Fonte: O autor.

As irregularidades harmônicas senoidais, periódicas triangulares e periódicas retangulares são similares às apresentadas na Figura 54, por terem o mesmo comprimento de onda das apresentadas no exemplo 4.5. No entanto, devido ao comprimento total da ponte ser de $40\,m$ e a velocidade do veículo no exemplo atual ser de $80\,km/h$, o tempo total de duração da passagem do veículo nas irregularidades periódicas é de 1.8 segundos.

Por motivos óbvios, não está sendo apresentado o gráfico da via plana sem irregularidades.

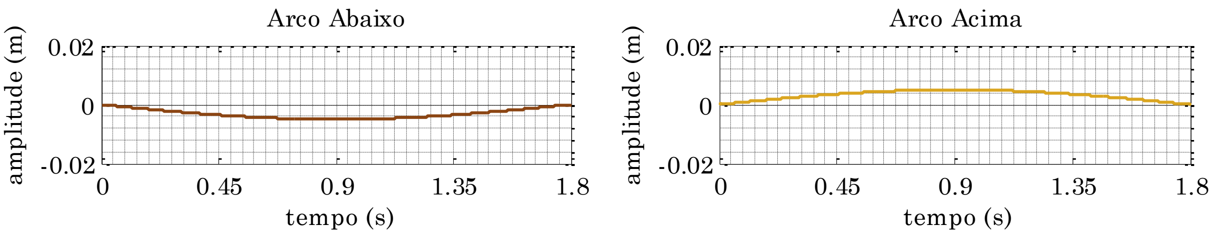
As vias com irregularidades na forma de pulsos aperiódicos e as vias com irregularidades na forma de arcos são mostradas na Figura 74 e na Figura 75, respectivamente.

Figura 74 – Irregularidades na forma de pulsos não periódicos do exemplo 4.6



Fonte: O autor.

Figura 75 – Irregularidades do pavimento na forma de arcos do exemplo 4.6



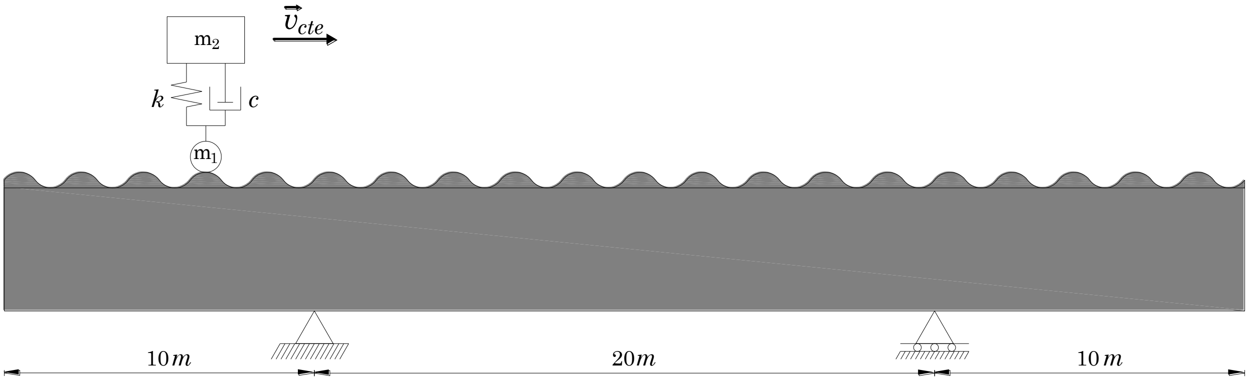
Fonte: O autor.

Todas as formas de irregularidades acima descritas serão usadas nas análises realizadas nos exemplos a seguir.

4.6.2 Ponte com dois balanços biapoiada

Primeiramente as análises das respostas dinâmicas são feitas com a ponte biapoiada. A Figura 76 procura ilustrar o exemplo atual.

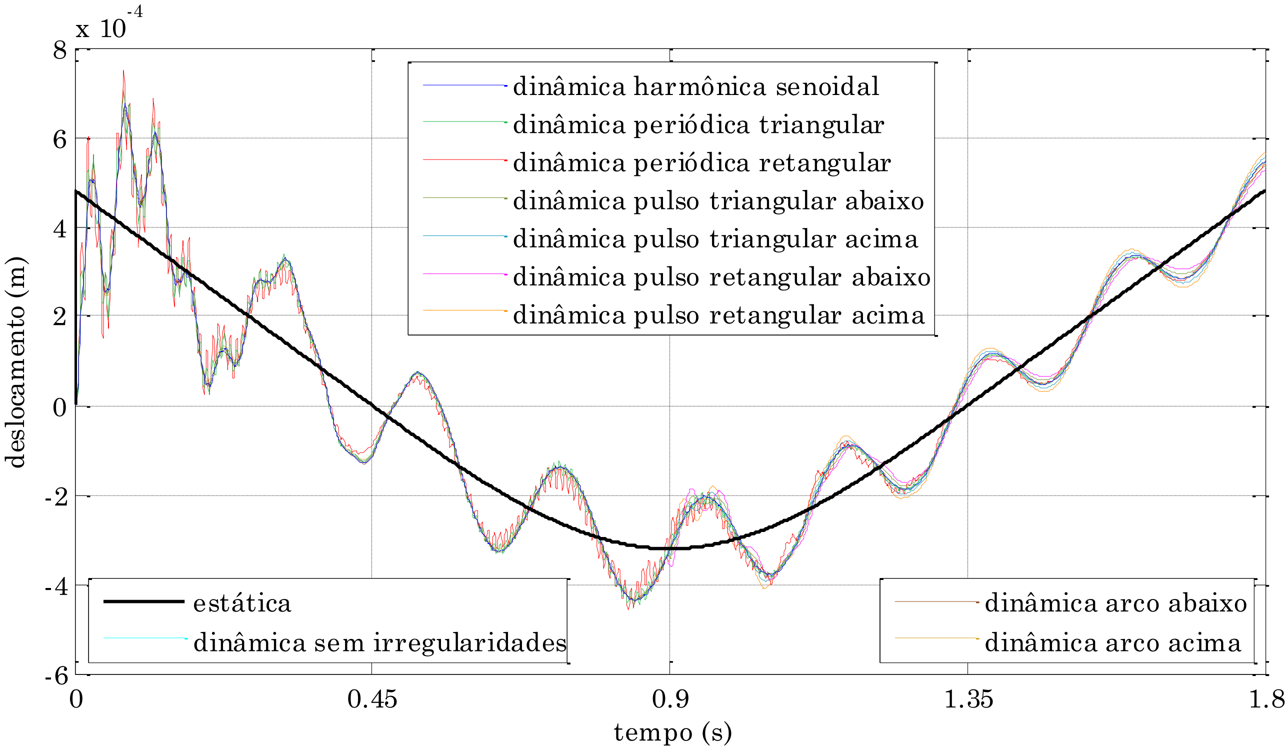
Figura 76 – Interação dinâmica entre veículo, irregularidades e ponte com dois apoios e dois balanços



Fonte: O autor.

A Figura 77 apresenta a resposta dinâmica de deslocamento no meio do vão para diferentes formas de irregularidades.

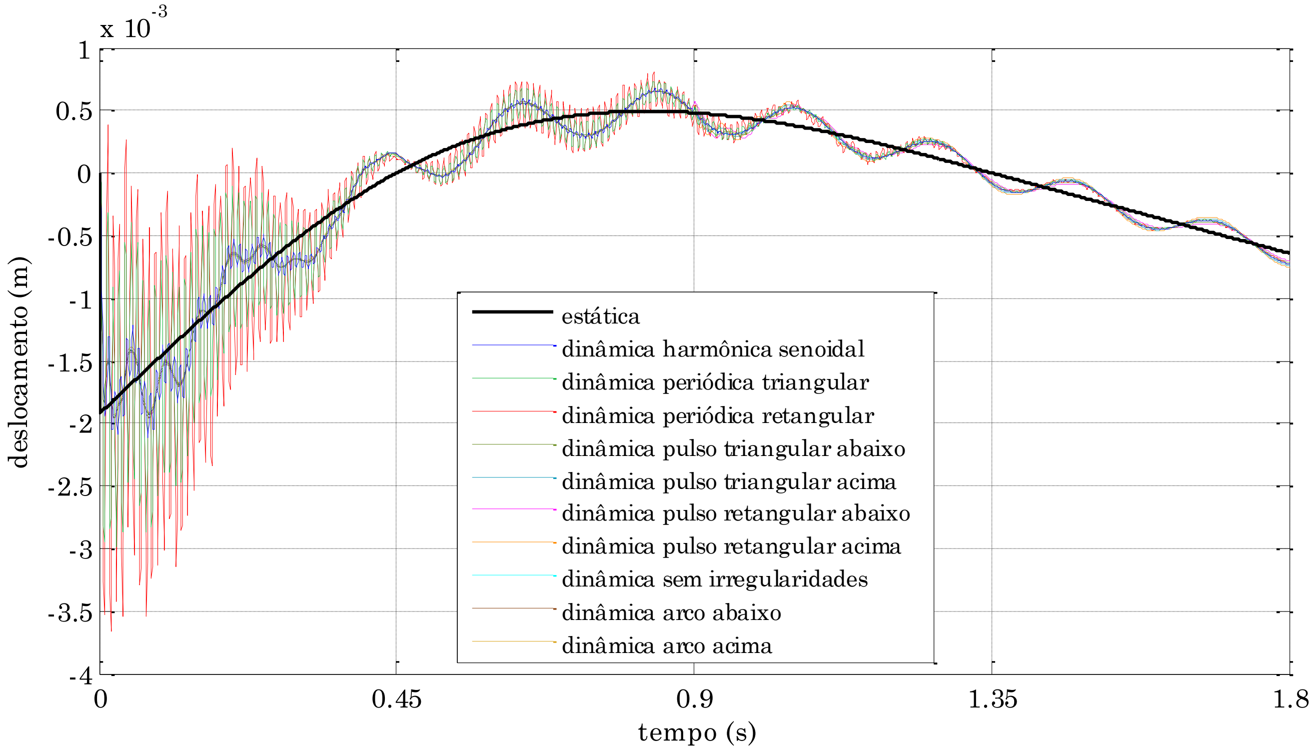
Figura 77 – Deslocamentos no centro da ponte do exemplo 4.6.2



Fonte: O autor.

A Figura 78 apresenta as respostas estáticas e dinâmicas de deslocamentos na extremidade do balanço da esquerda para diferentes formas de irregularidades da via.

Figura 78 – Deslocamentos na extremidade do balanço da esquerda do exemplo 4.6.2



Fonte: O autor.

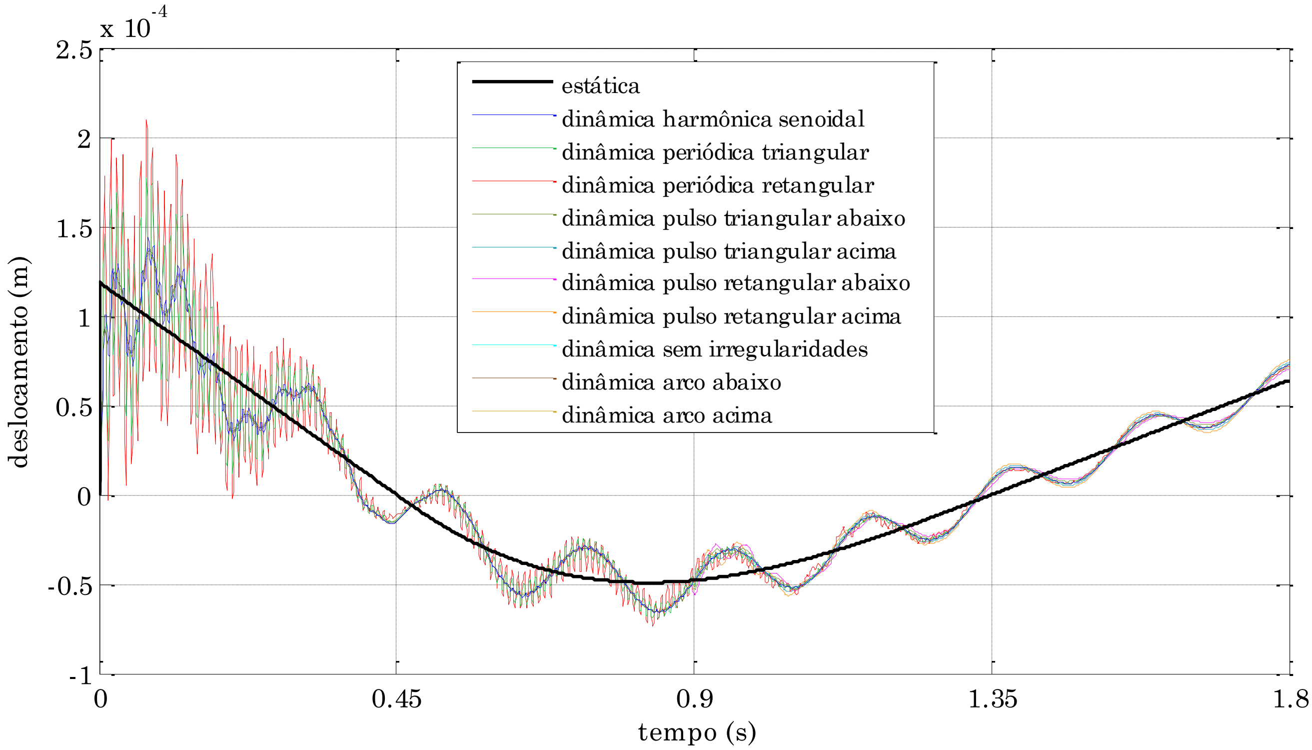
Ao observar a Figura 78, notam-se grandes oscilações de deslocamento nos primeiros instantes de tempo com maiores magnitudes do que nos demais. As maiores respostas foram obtidas na ponte com irregularidades periódicas retangulares, seguidas das irregularidades periódicas triangulares e depois as harmônicas senoidais.

Como os pulsos estão localizados próximos ao centro da ponte, ou seja, próximas à metade do tempo de passagem do veículo pela ponte, as respostas de deslocamento obtidas nas irregularidades na forma de pulsos só começam a ter relevância, se comparada com as demais irregularidades, a partir desse instante. Antes desse ponto, as respostas coincidem com as respostas dinâmicas da ponte com pavimento reto sem irregularidades, as quais possuem relevância se comparadas com a resposta estática.

Comparando a Figura 77 com a Figura 78, percebe-se que os deslocamentos obtidos no grau de liberdade situado no meio do vão foram pequenos se comparados aos obtidos na extremidade esquerda, ou seja, no balanço.

A Figura 79 apresenta as respostas estáticas e dinâmicas de deslocamento no vigésimo terceiro grau de liberdade, o qual é o grau de liberdade não nulo do elemento mais danificado, sendo que no outro grau de liberdade há um apoio, situado à direita do apoio da esquerda.

Figura 79 – Deslocamentos no grau de liberdade 23 do exemplo 4.6.2

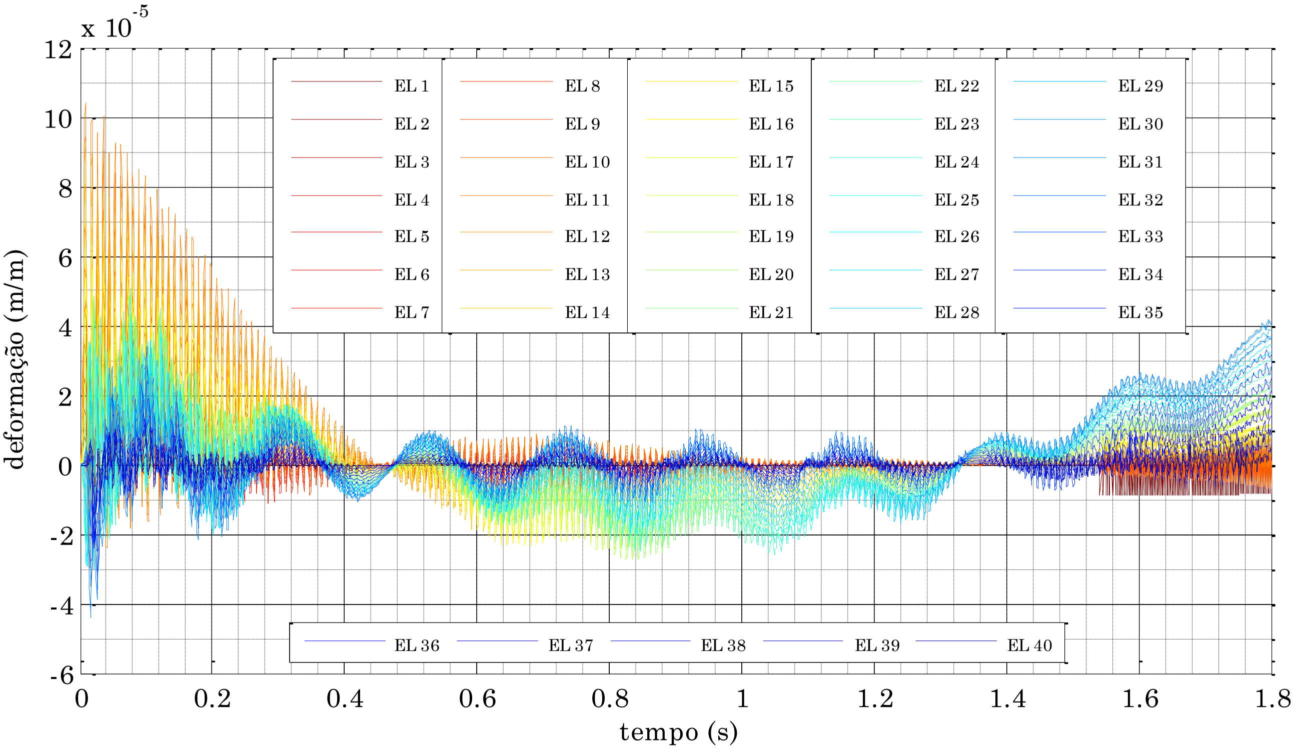


Fonte: O autor.

Embora o grau de liberdade apresentado na Figura 79 possua maiores deslocamentos nos primeiros instantes de tempo se comparadas aos demais, os deslocamentos obtidos são menores do que os da extremidade esquerda da ponte, no balanço, apresentada na Figura 78. No entanto, este foi o grau de liberdade não nulo do elemento mais danificado durante a análise. Isso ocorre pelo fato do dano não depender exclusivamente de tensões e deslocamentos, mas principalmente pelo fato do dano depender de deformações acumuladas. Assim, o elemento mais danificado não necessariamente será o que tiver maiores deslocamentos, mas sim o que tiver maiores deformações acumuladas.

Deste modo, para melhor entender o comportamento dinâmico da evolução do dano, ao longo do tempo de passagem do veículo sobre a ponte, a Figura 80 apresenta as respostas dinâmicas de deformação das camadas superiores mais distantes da linha neutra para cada elemento, obtidas quando o veículo transita pelas irregularidades retangulares da via.

Figura 80 – RD de deformação da camada superior de cada elemento (irregularidades retangulares) do exemplo 4.6.3



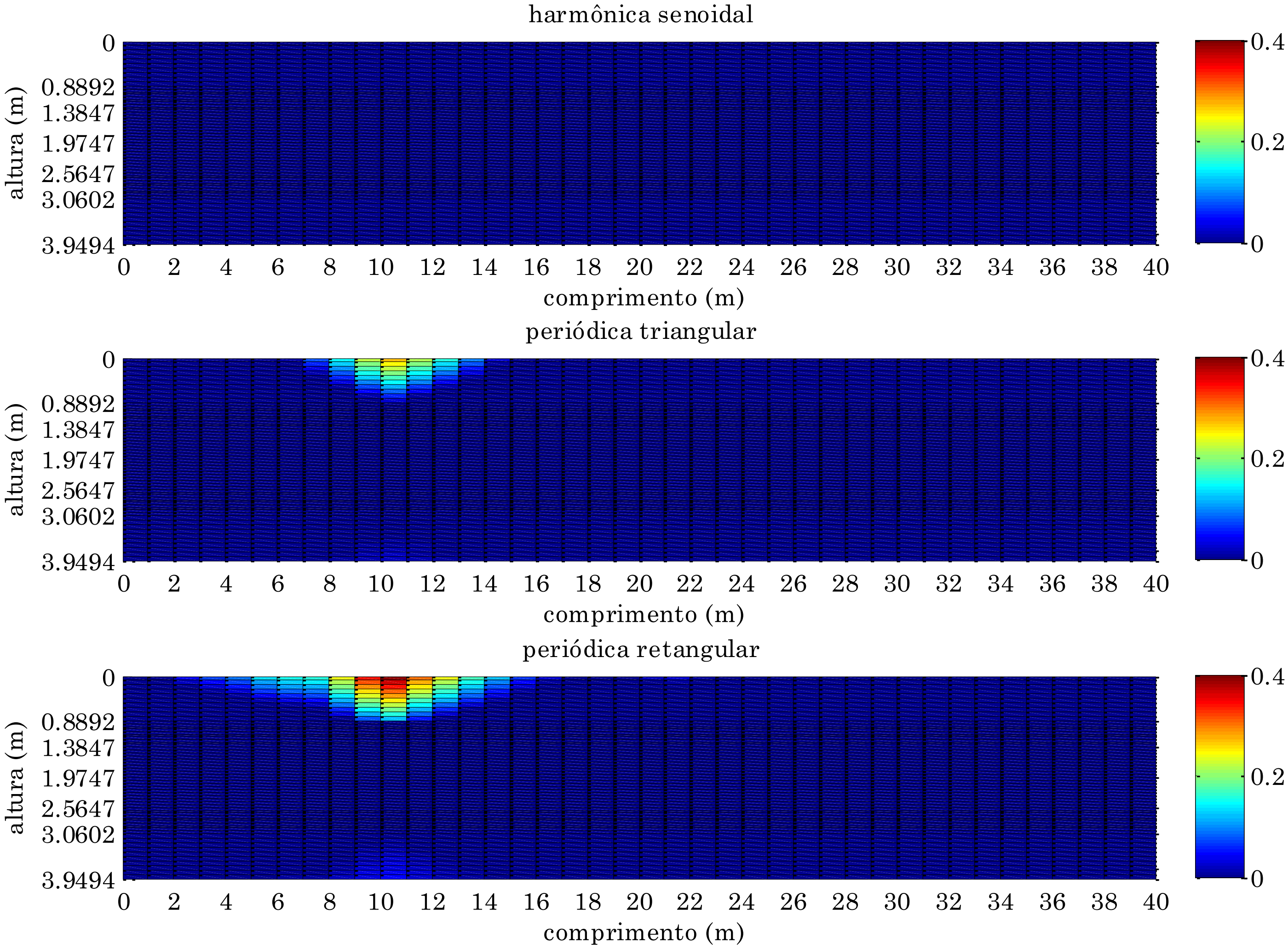
Fonte: O autor.

Observa-se que o décimo primeiro elemento, cujo nó da esquerda possui deslocamento e rotação nulos e cujo grau de liberdade de deslocamentos do nó da direita foram apresentados na Figura 79, mesmo tendo tido menores deslocamentos do que o nó da extremidade esquerda, no balanço, foi o que apresentou maiores deformações ao longo do tempo, atingindo valores acima da deformação limite ε_{d0} do modelo de dano de *Mazars*. Consequentemente, como há excedência de deformações, há danos gerados por estas deformações excessivas.

O sentido positivo das deformações de maior magnitude observados na Figura 80, representa uma deformação por tração, ou seja, um alongamento.

A Figura 81 apresenta a configuração danificada da ponte para as diferentes irregularidades periódicas. Não houve danificação para as demais irregularidades.

Figura 81 – Configuração danificada final da ponte do exemplo 4.6.2 para as diferentes irregularidades periódicas



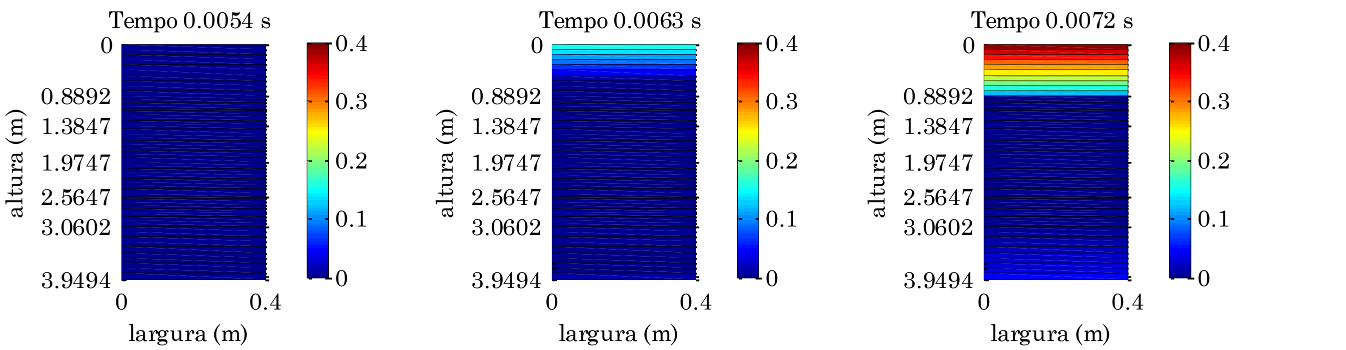
Fonte: O autor.

Ao observar a Figura 81, nota-se que para a mesma amplitude das irregularidades e para a mesma carga aplicada, as maiores danificações aconteceram na ponte com irregularidades periódicas retangulares do que nas periódicas triangulares e senoidais. A ponte se manteve íntegra, sem danos, quando o veículo transitou nas irregularidades harmônicas senoidais. É possível observar que houve maior danificação nas camadas superiores da viga, comumente comprimidas para a situação de carregamento usual, do que nas camadas inferiores, comumente tracionadas. No entanto, a danificação nas camadas superiores ocorreu por tração do concreto devido à inversão de esforços por conta dos balanços e, também, por conta da vibração, em que as camadas superiores comumente comprimidas tornam-se tracionadas, sendo mais prejudicial ao concreto devido sua baixa resistência à tração. Numa análise em que a inversão de esforços não é implementada, o efeito de inversão de esforços não poderia ser captado.

Além disso, analisando especificamente as camadas discretizadas, nota-se que a danificação das camadas superiores, tracionadas, foi mais acentuada para a ponte com irregularidades periódicas retangulares. A maior duração da amplitude das irregularidades periódicas retangulares, para o mesmo período, faz com que os efeitos dinâmicos sejam potencializados, provocando maiores danos à estrutura. Ainda, observa-se que os danos acumulados ocorreram próximos ao primeiro apoio. Como o sentido do veículo é da esquerda para a direita, os maiores efeitos dinâmicos ocorrem no início da passagem do veículo pelas irregularidades da ponte por não haver tempo suficiente para ação do amortecimento estrutural em tentar estabilizar a estrutura. Mas o principal motivo dessa danificação é pelo fato do dano depender, principalmente, de deformações acumuladas.

A Figura 82 mostra a evolução dos danos na seção transversal do elemento mais solicitado da ponte ao longo do tempo.

Figura 82 – Evolução dos danos na seção transversal do elemento mais solicitado ao longo do tempo (exemplo 4.6.2)



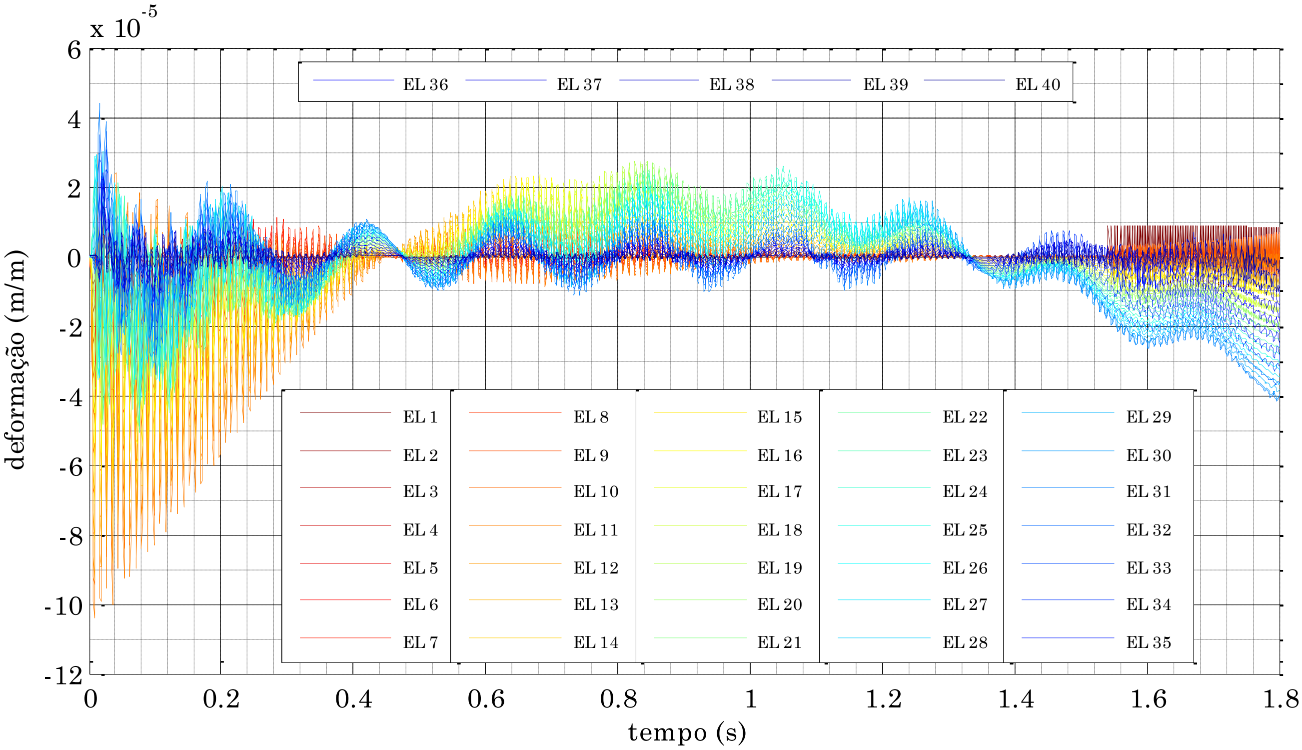
Fonte: O autor.

A evolução dos danos acumulados ocorreu logo nos primeiros instantes de tempo quando o veículo transitava pelo primeiro elemento do balanço, aos $12\,cm$, $14\,cm$ e $16\,cm$ de distância da extremidade esquerda da ponte. No entanto, a ação do veículo nesses pontos da ponte provocou uma danificação de maior magnitude no décimo primeiro elemento, situado entre $10\,m$ e $11\,m$ da extremidade esquerda da ponte, logo à direita do apoio da esquerda. Isso prova que um efeito em certo ponto da ponte pode provocar uma danificação num ponto diferente da ação se neste ponto houver deformações acumuladas que excedam a deformação limite do material.

Observou-se que também houve danos nas camadas inferiores da ponte. Como a Figura 80 demonstrou as respostas dinâmicas de deformação para as camadas superiores da ponte e nestas não houve deformações por encurtamento de magnitude suficiente para provocar uma danificação por compressão, faz-se necessário investigar as respostas dinâmicas de deformação das camadas inferiores, as quais tiveram certa danificação em torno do décimo primeiro elemento, como observado na Figura 81 e na Figura 82, para todos os elementos ao longo do tempo.

Deste modo, a Figura 83 apresenta as respostas dinâmicas de deformação das camadas inferiores para todos os elementos ao longo do tempo obtidas quando o veículo transita na ponte com irregularidades periódicas retangulares, as quais foram capazes de produzir alguma danificação nestas camadas.

Figura 83 – RD de deformação da camada inferior de cada elemento (irregularidades retangulares) do exemplo 4.6.2



Fonte: O autor.

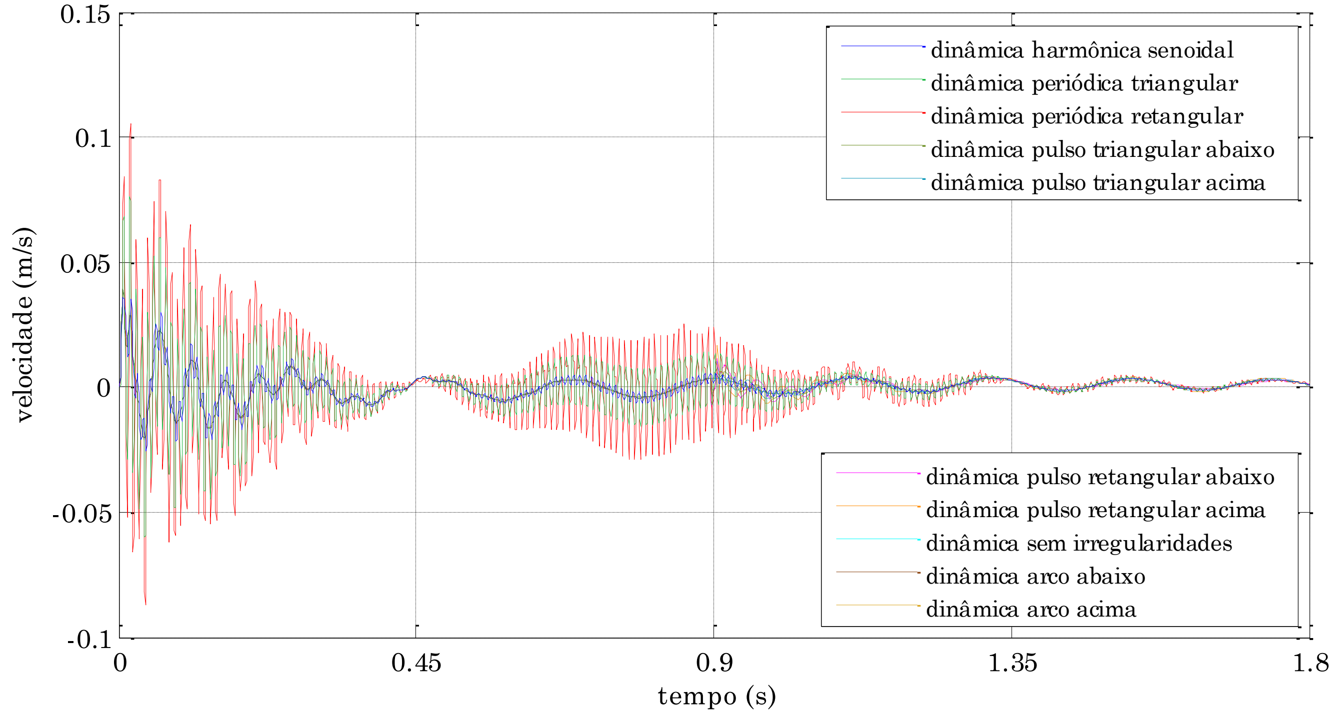
O sentido negativo das deformações, por sua vez, representam uma deformação por encurtamento, ou seja, por compressão. Assim, é possível observar que as maiores deformações nas camadas inferiores de todos os elementos da ponte ocorreram por compressão. Como no décimo primeiro elemento e nos elementos de seu entorno houve deformações superiores em módulo à deformação limite estabelecida no modelo de dano de *Mazars* pode-se concluir que as tais deformações foram as responsáveis por produzir uma danificação por compressão das camadas inferiores de concreto.

Embora na Figura 80 e na Figura 83 houve proximidade de valores de deformações em módulo, a maior danificação nas camadas tracionadas se dá pelo fato da baixa resistência do concreto em regime de tração. Por esse motivo, a perda de rigidez das camadas tracionadas é muito superior à perda de rigidez das camadas comprimidas, o que representa bem o comportamento anisotrópico do concreto.

Por se tratar de uma análise dinâmica, como já visto há respostas de velocidade e aceleração. Embora agora se saiba que os danos que ocorreram próximos ao primeiro apoio da ponte foram provenientes do movimento do veículo no balanço, é interessante analisar como esse processo de danificação influencia nas respostas dinâmicas de uma terceira região da estrutura. No caso, o ponto escolhido para análise foi o centro da ponte, no intuito de verificar a estabilidade estrutural no centro do vão entre apoios.

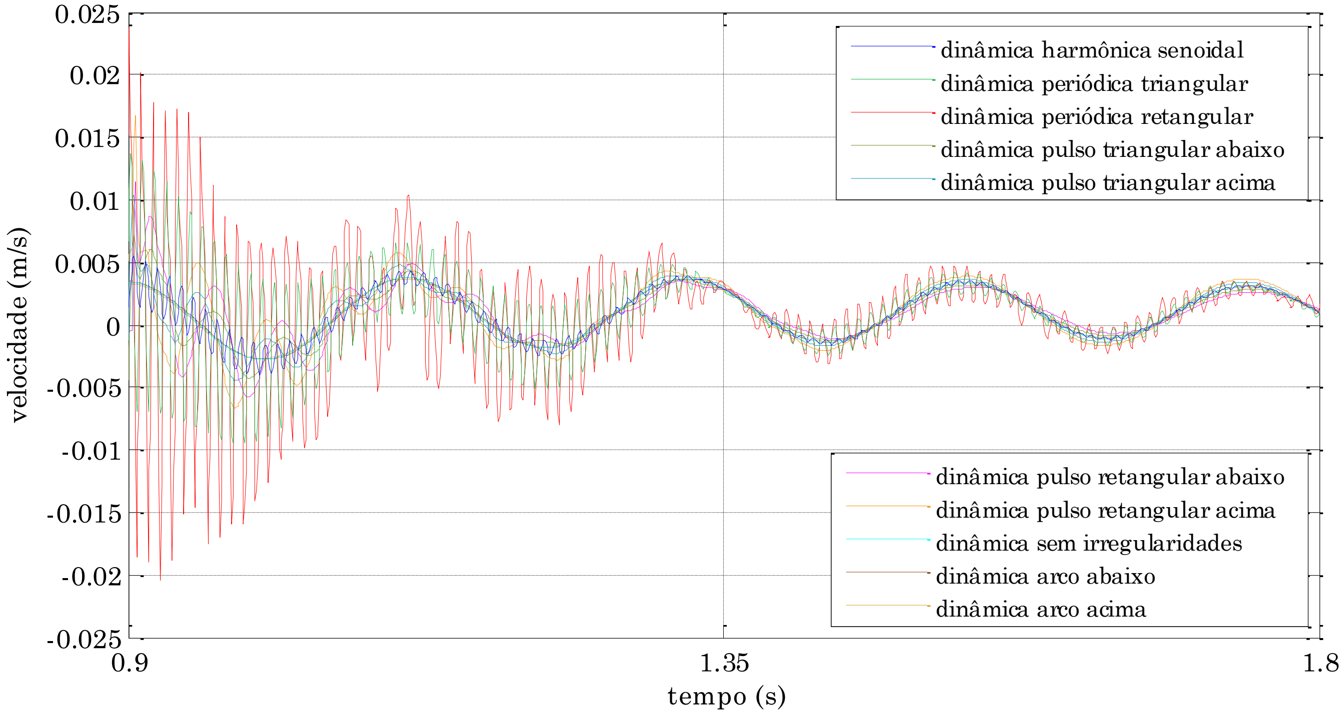
Assim, a Figura 84 e a Figura 85, a seguir, apresentam, respectivamente, as respostas dinâmicas de velocidade durante o tempo de passagem do veículo nas diferentes irregularidades da ponte e as respostas dinâmicas de velocidade durante os instantes de tempo de $0.9s$ até $1.8s$, a qual se inicia a partir do centro do vão da ponte, no intuito de destacar as respostas obtidas nas irregularidades na forma de pulsos. A Figura 86 e a Figura 87 apresentam as respostas dinâmicas de aceleração durante o tempo total de passagem do veículo nas diferentes irregularidades da ponte e as respostas dinâmicas de aceleração apenas paras as irregularidades na forma de pulsos e na forma de arco obtidas entre os instantes de tempo entre $1.08s$ e $1.8s$. Todas as respostas citadas são obtidas para o grau de liberdade situado no centro da ponte, no vão entre apoios.

Figura 84 – Respostas dinâmicas de velocidade obtidas no centro da ponte para diferentes irregularidades (exemplo 4.6.2)



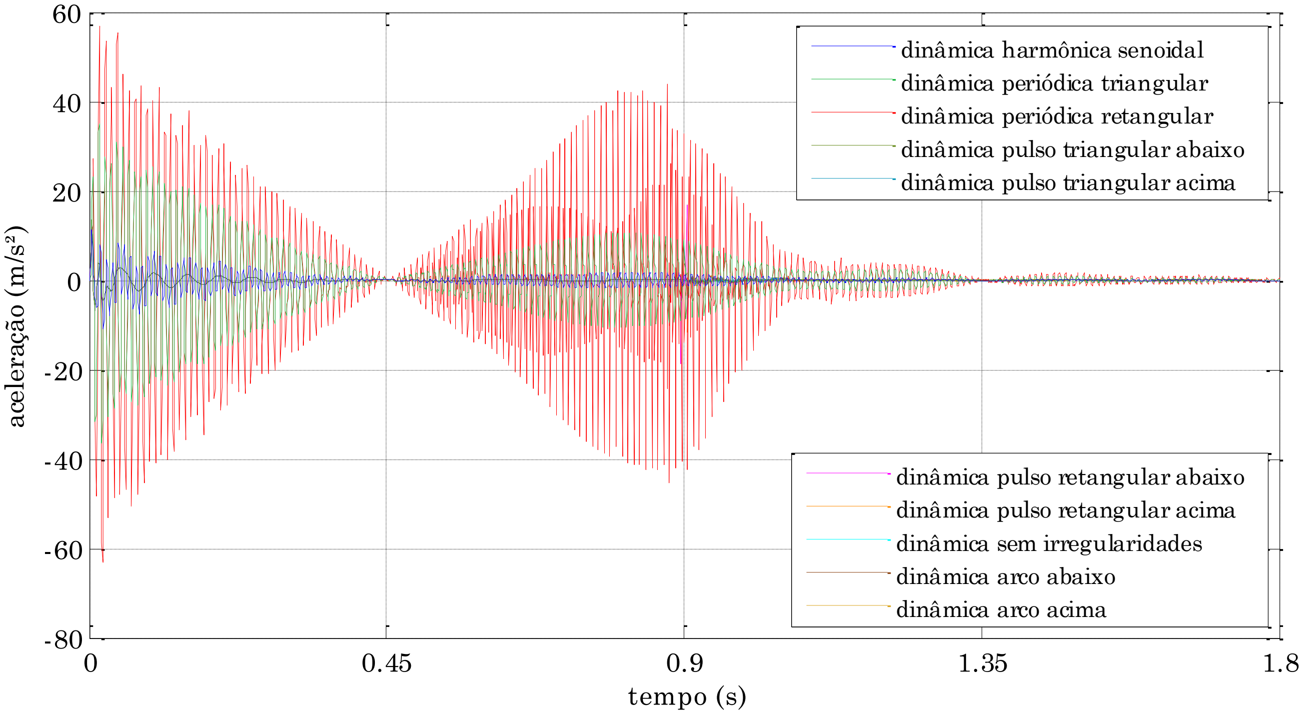
Fonte: O autor.

Figura 85 – Respostas dinâmicas de velocidades obtidas no centro da ponte para as diferentes irregularidades entre o 0.9 s e 1.8 s (exemplo 4.6.2)



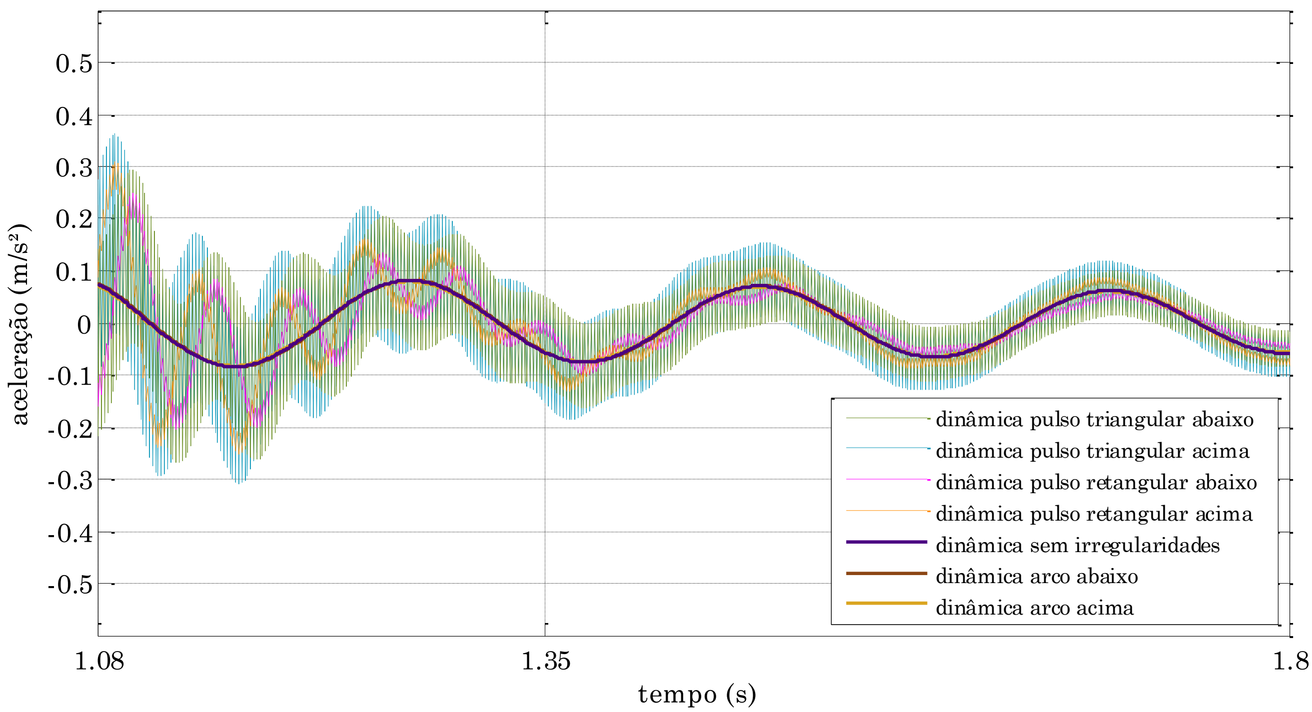
Fonte: O autor.

Figura 86 – Respostas dinâmicas de aceleração obtidas no centro da ponte para diferentes irregularidades (exemplo 4.6.2)



Fonte: O autor.

Figura 87 – Respostas dinâmicas de aceleração obtidas no centro da ponte para diferentes irregularidades entre 1.08 s e 1.8 s (exemplo 4.6.2)

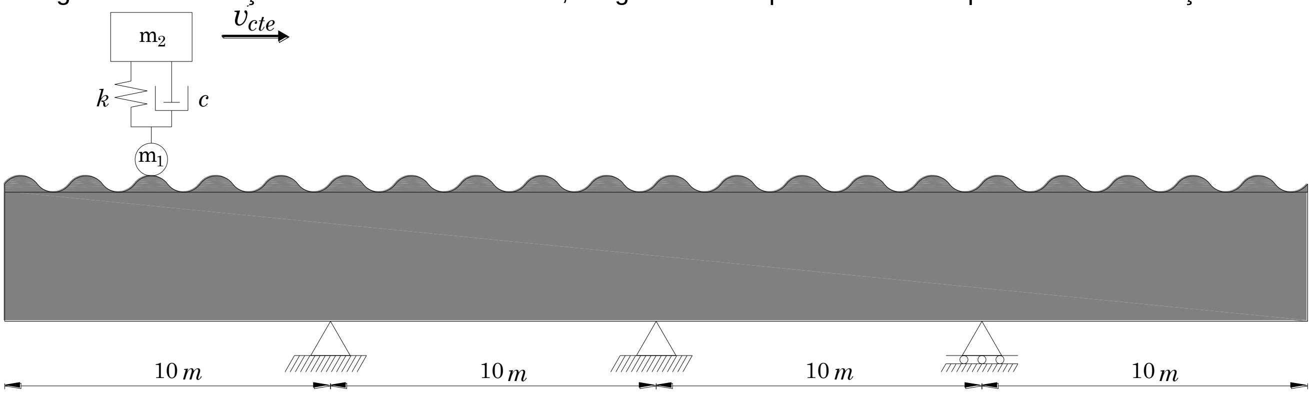


Fonte: O autor.

4.6.3 Ponte com dois balanços e três apoios

Um terceiro apoio é colocado entre os dois apoios anteriores de modo a analisar como essa nova condição de contorno afeta as respostas dinâmicas e o processo de danificação. A Figura 88 ilustra esta situação.

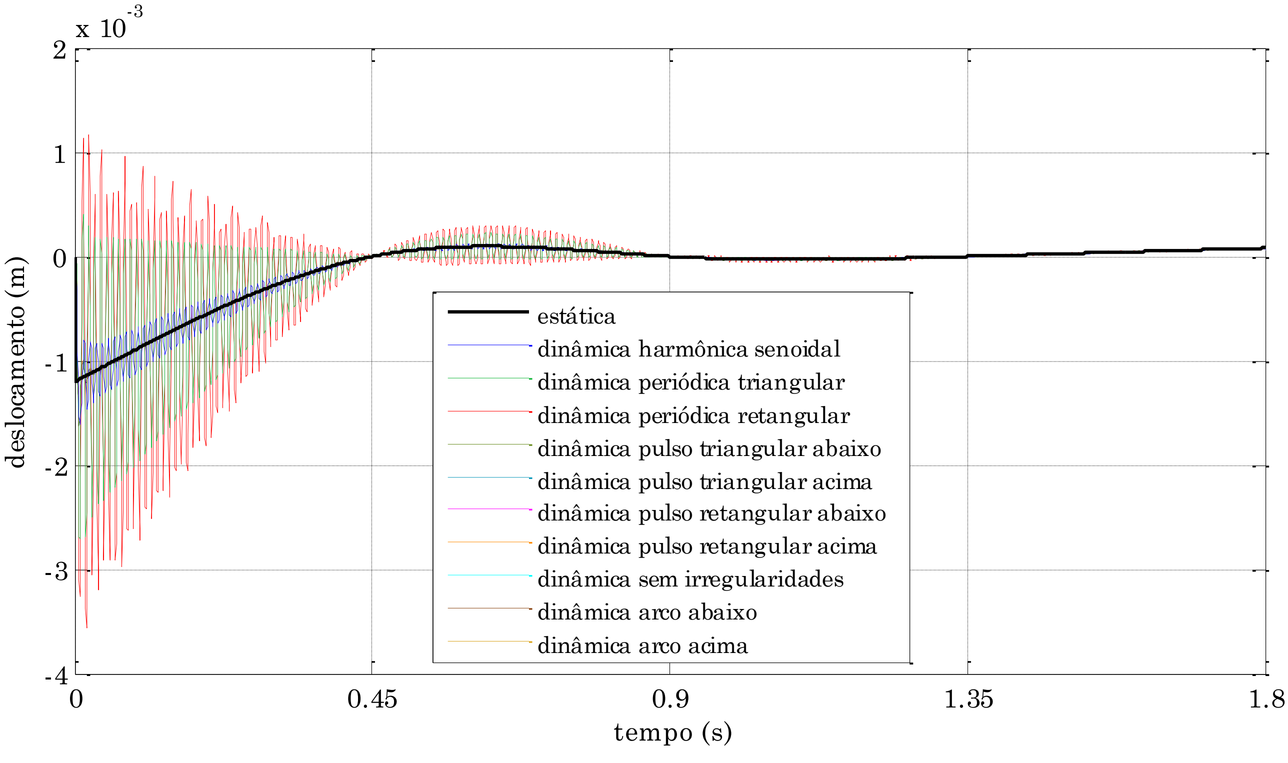
Figura 88 – Interação dinâmica entre veículo, irregularidade e ponte com três apoios e dois balanços



Fonte: O autor.

A Figura 90 mostra as respostas de deslocamento no balanço da esquerda.

Figura 89 – Deslocamentos na extremidade do balanço da esquerda do exemplo 4.6.3



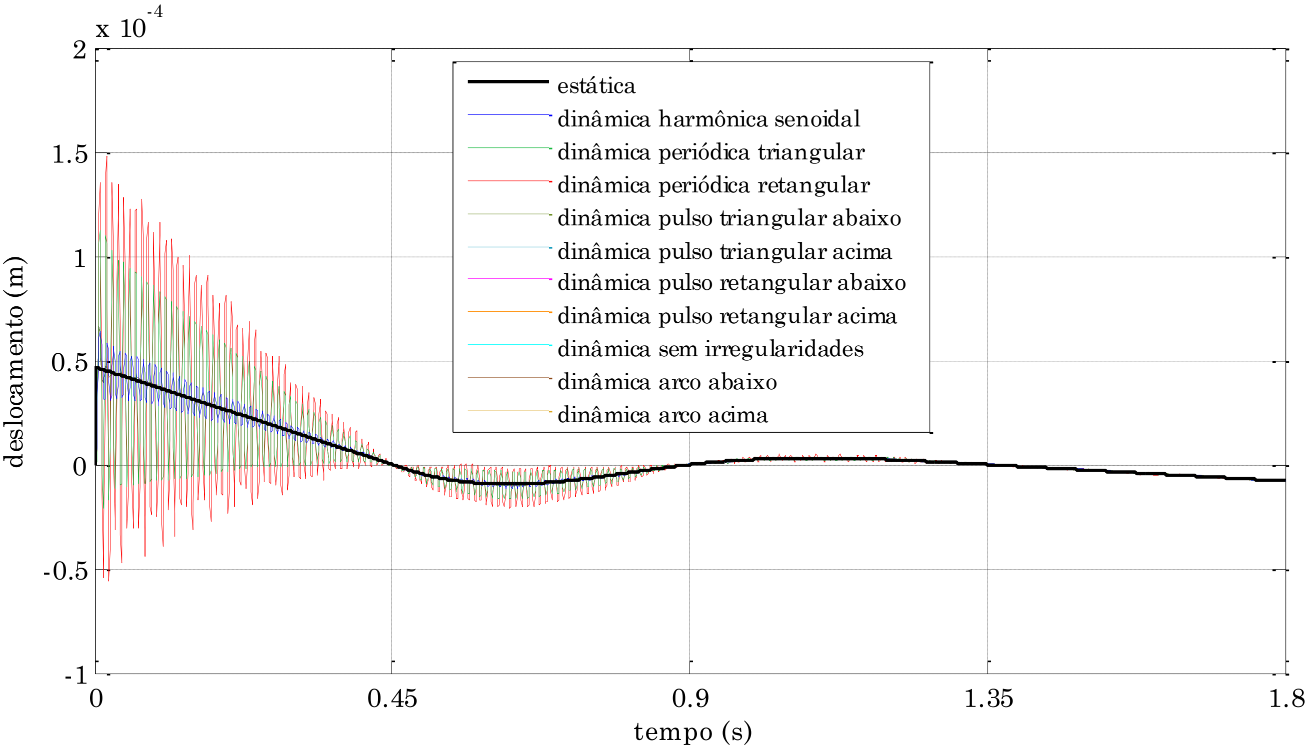
Fonte: O autor.

Assim como ocorre na Figura 78, na Figura 89 houve maior oscilação nos primeiros instantes de tempo e as maiores respostas foram obtidas com as irregularidades periódicas retangulares, seguidas das periódicas triangulares e harmônicas senoidais. No entanto, comparando ambas as figuras citadas observa-se que os maiores deslocamentos no balanço ocorreram quando se aplicou mais uma condição de contorno entre os apoios.

Embora o novo apoio diminua as respostas de deslocamento a partir da metade do tempo de passagem do veículo na ponte, nota-se que houve amplificação nas oscilações dos deslocamentos principalmente no início da análise.

A Figura 90 apresenta as respostas estáticas e dinâmicas de deslocamento no vigésimo terceiro grau de liberdade contado da esquerda para a direita a partir da extremidade esquerda.

Figura 90 – Deslocamentos no grau de liberdade 23 do exemplo 4.6.3

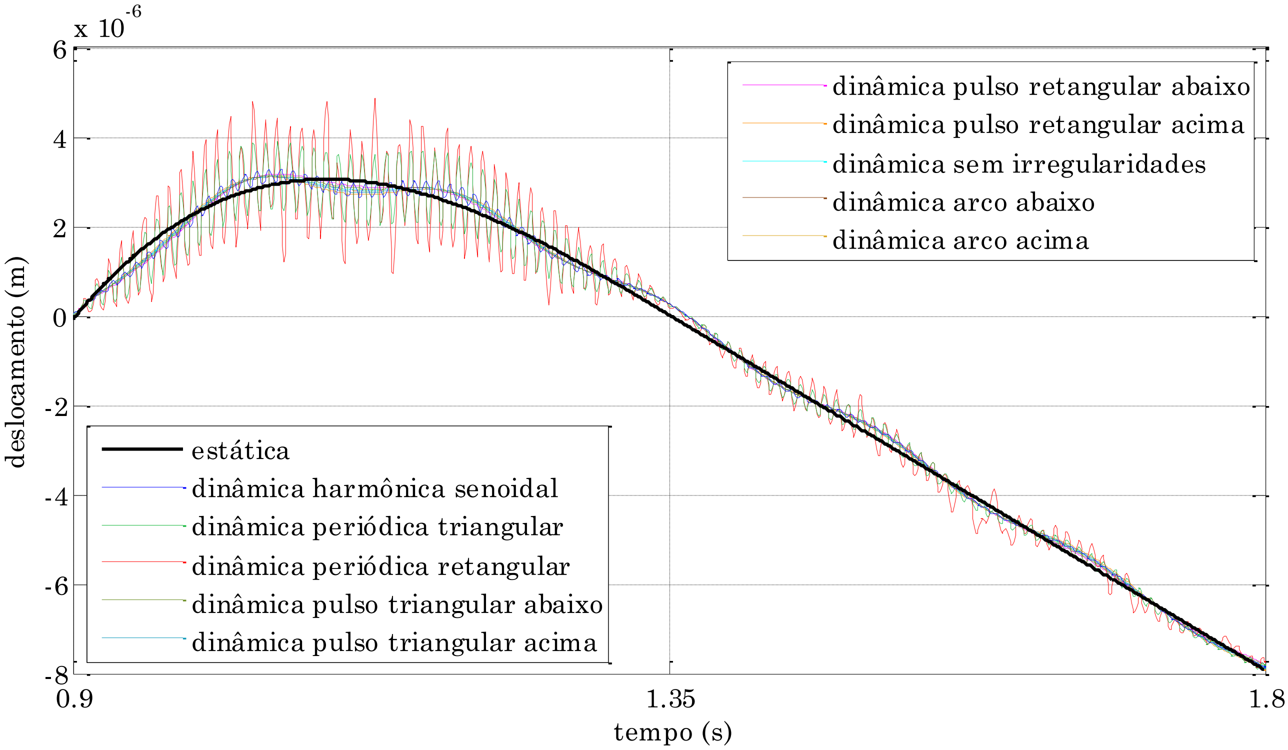


Fonte: O autor.

Embora a amplitude de deslocamentos da Figura 90 esteja próxima das obtidas na Figura 79, houve maiores oscilações para o mesmo período de tempo. Durante o tempo de passagem do veículo nas irregularidades, as maiores respostas foram obtidas nas irregularidades periódicas retangulares, seguidas das periódicas triangulares e harmônicas senoidais. Também nota-se a redução das respostas a partir da metade do tempo de passagem de veículo em todas as irregularidades da ponte.

No intuito de observar o comportamento das respostas de deslocamento do vigésimo terceiro grau de liberdade reduzidas a partir do meio do vão, a Figura 91 as apresenta entre a metade e o final do tempo de passagem do veículo nas diversas irregularidades da ponte.

Figura 91 – Deslocamentos no grau de liberdade 23 entre 0.9 s e 1.8 s do exemplo 4.6.3

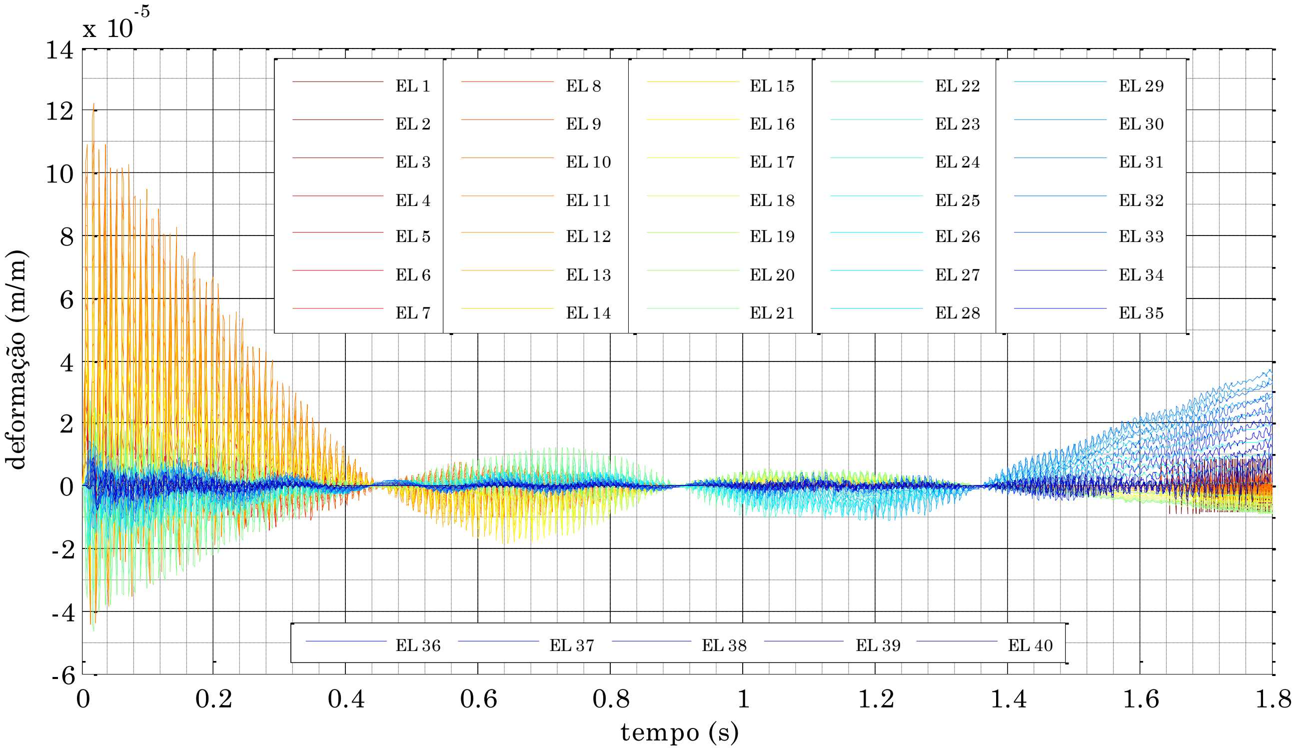


Fonte: O autor.

Observa-se que as respostas dinâmicas oscilam em torno da resposta estática. As maiores respostas são obtidas para as irregularidades periódicas. As respostas dinâmicas de deslocamento obtidas nas irregularidades periódicas oscilam em torno das respostas dinâmicas na forma de pulsos e nas obtidas na via plana ou em arco sem irregularidades. Como o novo apoio foi aplicado próximo da amplitude máxima das irregularidades na forma de pulsos, os efeitos dinâmicos dos pulsos foram contidos.

A Figura 92 apresenta as respostas dinâmicas de deformação das camadas superiores, de cada elemento, para as irregularidades retangulares da via.

Figura 92 – RD de deformação da camada superior de cada elemento (irregularidades retangulares) do exemplo 4.6.3



Fonte: O autor.

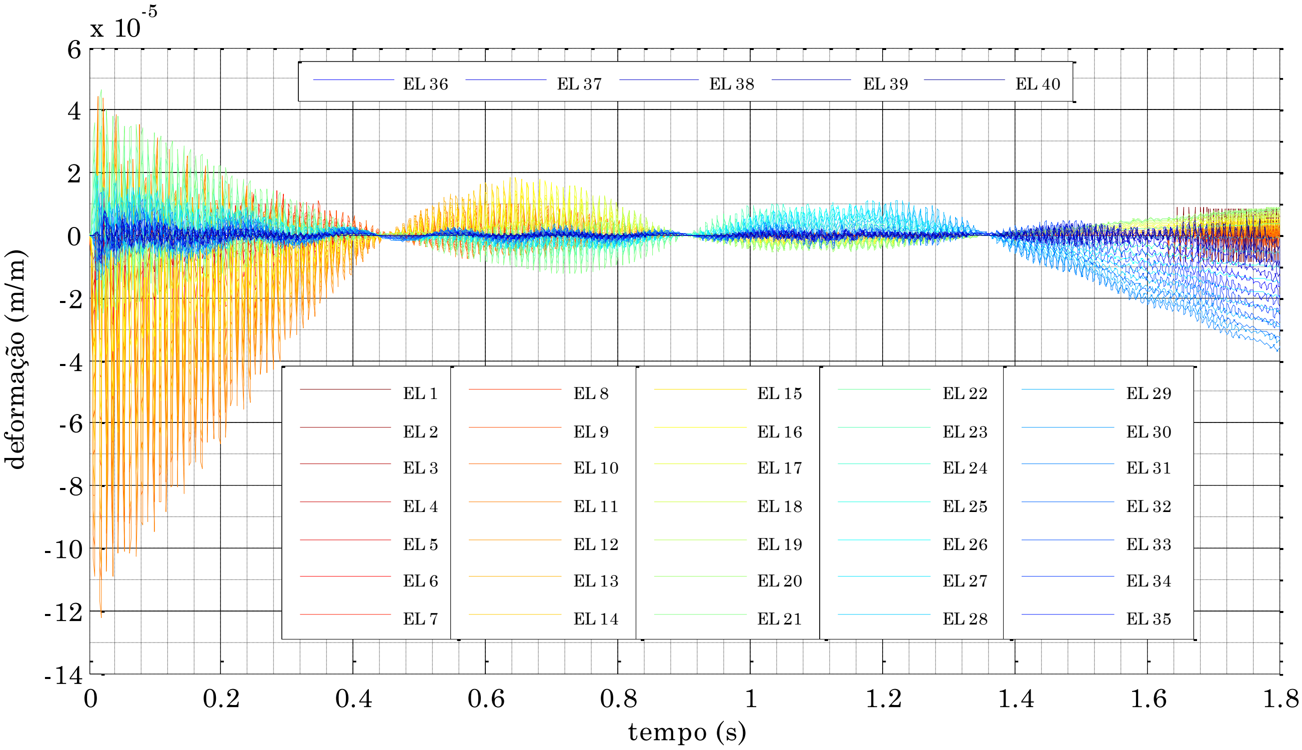
O décimo primeiro elemento teve maiores respostas dinâmicas de deformação na Figura 92 do que na Figura 79 no início da análise até o veículo passar pelo primeiro apoio, ou seja, com a colocação do novo apoio houve maiores deformações iniciais no décimo primeiro elemento. Esse aumento de deformações ocorreu em todos os elementos na análise antes do veículo passar pelo primeiro apoio da ponte. No entanto, após o veículo passar pelo primeiro apoio da ponte as deformações foram menores para todos os elementos.

Por terem tido maiores valores, se comparados com a análise da ponte com apenas dois apoios, o processo de danificação nas camadas superiores desses elementos terá valores mais expressivos de dano.

Como o sentido positivo da deformação representa uma deformação tração, ou seja, por alongamento, notam-se maiores valores de deformação por alongamento nas camadas analisadas. Essas maiores deformações obtidas nos elementos mais próximos ao décimo primeiro elemento, ultrapassaram o valor limite de deformação estabelecido pelo critério de dano de *Mazars*, deste modo haverá danos por tração nas camadas superiores dos elementos em análise. Ainda, observa-se que houve maiores oscilações de deformação no início da análise para a ponte com três apoios e dois balanços do que na mesma ponte com apenas dois apoios. Essa maior oscilação ocasionou valores mais significativos de deformação negativa, ou seja, deformação por compressão ou encurtamento. No entanto, em ambas as análises, as maiores deformações das camadas superiores de todos os elementos analisados ao longo do tempo não foram suficientes para provocar uma danificação por compressão nas camadas superiores. Contudo, faz-se necessário analisar as camadas inferiores de todos os elementos ao longo do tempo de modo a tentar verificar alguma deformação por encurtamento que seja capaz de produzir algum dano por compressão.

Assim, a Figura 93 apresenta as respostas dinâmicas de deformação das camadas inferiores ao longo do tempo, para as irregularidades retangulares da via.

Figura 93 – RD de deformação da camada inferior de cada elemento (irregularidades retangulares) do exemplo 4.6.3

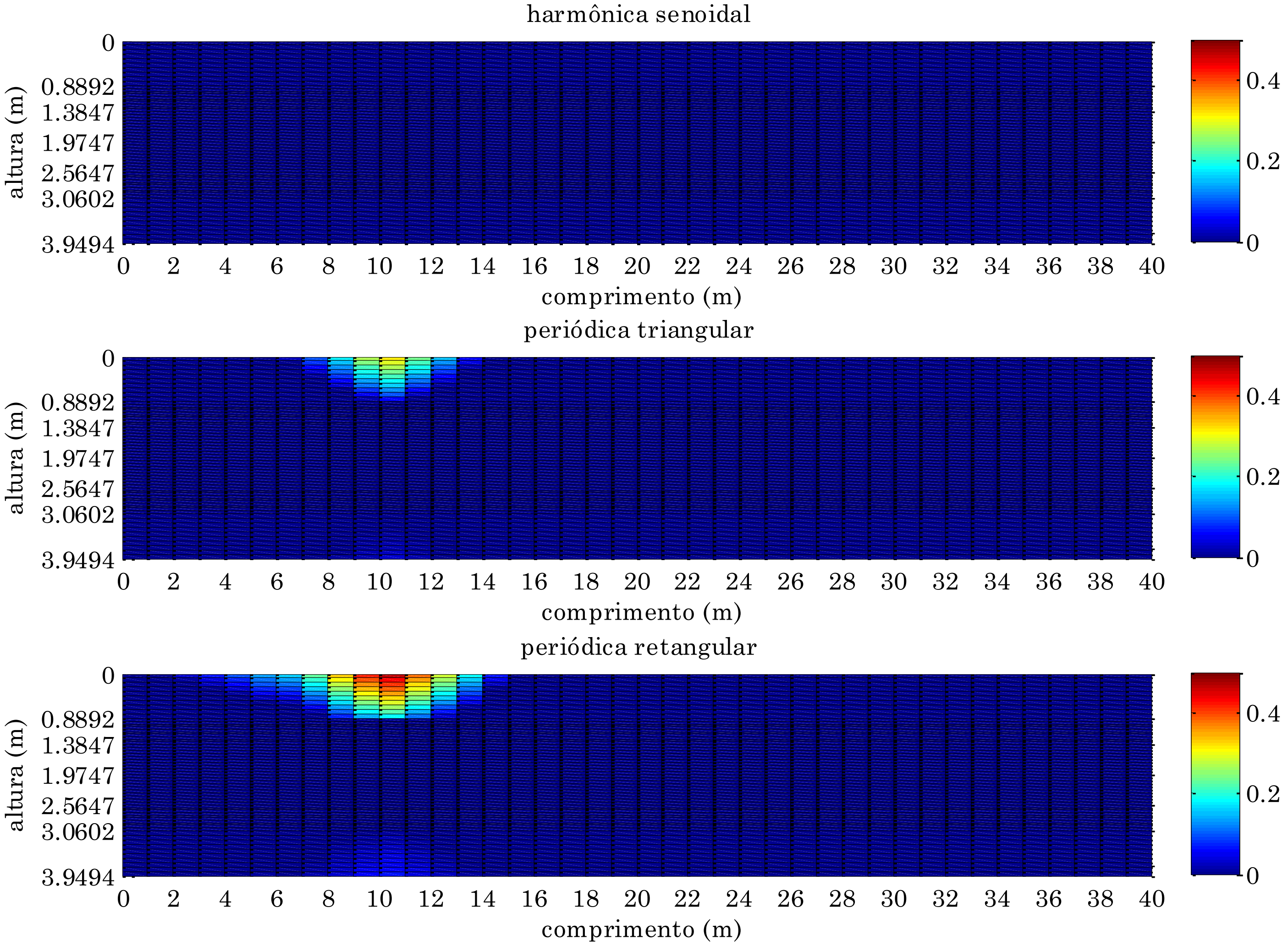


Fonte: O autor.

Ao analisar o gráfico acima, é possível observar que as respostas dinâmicas de deformação das camadas inferiores ao longo do tempo foram maiores no décimo primeiro elemento. As maiores deformações foram negativas, ou seja, por encurtamento e ultrapassaram o valor limite de deformação do modelo de dano de *Mazars*. Consequentemente, haverá danos por compressão nas camadas inferiores que tiveram deformações excessivas.

A Figura 94 mostra a configuração danificada da ponte com dois balanços e três apoios para as diferentes irregularidades periódicas. Assim como na ponte com dois balanços, não houve danificação nas irregularidades harmônicas senoidais.

Figura 94 – Configuração danificada final da ponte do exemplo 4.6.3 para as diferentes irregularidades periódicas

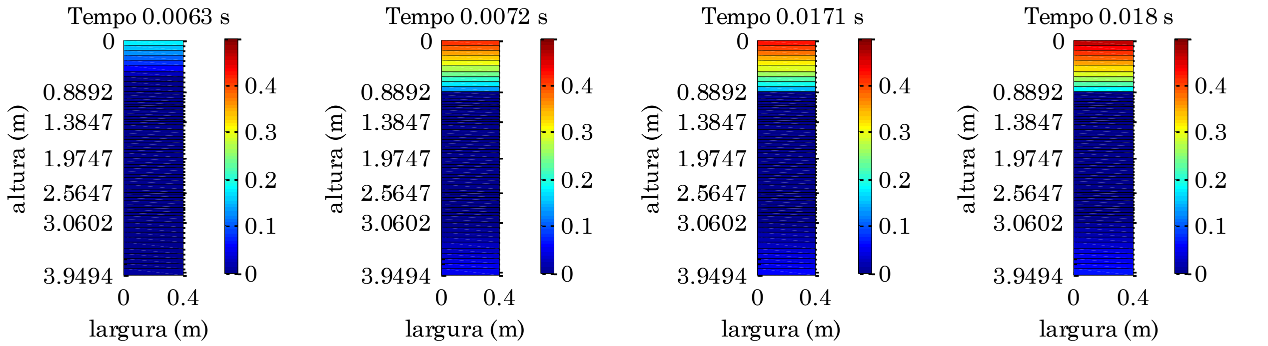


Fonte: O autor.

Embora as deformações das camadas superiores do décimo primeiro elemento tiveram valores muito semelhantes em módulo aos obtidos nas camadas inferiores, nota-se que a danificação foi muito superior nas camadas superiores, as quais sofreram danificação por tração. Isso ocorre pela baixa resistência à tração do concreto, cerca de 10% do valor de sua resistência à compressão. Assim, conclui-se que o modelo de dano de *Mazars*, é capaz de representar bem a estrutura da ponte de concreto armado mesmo numa situação de inversão de esforços, seja por conta dos balanços, seja por conta da vibração.

A Figura 95 apresenta a evolução dos danos na seção transversal do elemento de maior danificação observada na ponte ao longo do tempo de passagem do veículo nas irregularidades periódicas retangulares.

Figura 95 – Evolução dos danos na seção transversal do elemento mais solicitado ao longo do tempo (exemplo 4.6.3)



Fonte: O autor.

A evolução e a estabilização dos danos ocorreram nos primeiros instantes de tempo. Assim, conclui-se que um esforço aplicado em um ponto qualquer pode causar um processo de danificação que ocasiona a perda de rigidez em um ponto igual ou diferente do primeiro se neste houver deformações acumuladas acima do limite de resistência às ações do material. Ainda, conclui-se que a partir do processo de danificação todas as respostas dinâmicas da estrutura sofrem alterações, seja uma alteração considerável ou uma alteração insignificante que poderia ser desprezada, ao longo do tempo analisado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 RESUMO E CONCLUSÕES

Este trabalho tratou do modelo de interação dinâmica entre veículo e ponte, considerando diferentes formas de irregularidades da via, sob condições variadas de velocidade, amplitude e comprimento de onda das irregularidades, bem como o estado de danificação da estrutura e sua influência nas respostas dinâmicas.

Houve uma preocupação com a revisão dos conceitos, histórico e evolução das pesquisas até os dias de hoje, bem como a revisão teórica e os modelos matemáticos.

Foi abordado com maior preocupação o método dos elementos finitos (MEF) de modo a entender os elementos de viga de *Euler-Bernoulli*, a dinâmica das estruturas, já que são mais precisas que as estáticas, os conceitos da teoria do dano contínuo, de modo a permitir o entendimento do modelo constitutivo de *Mazars* (1984) na tentativa de melhor entender os processos físicos, e os sistemas dinâmicos não lineares de modo a entender como o processo de danificação do material influencia nas respostas dinâmicas da estrutura da ponte.

Ao comparar as respostas estáticas lineares com as respostas estáticas não lineares através da mecânica do dano, observam-se maiores deslocamentos nas não lineares para o mesmo carregamento aplicado, conforme apresentado no exemplo 4.1. Numa situação de danificação seria ingenuidade considerar que o material se comporta de modo elástico linear para qualquer carregamento aplicado. Isso justifica as curvas obtidas nas medições laboratoriais do módulo de deformação em ensaios de corpo de prova de concreto, conforme demonstrado na Figura 19.

Investigando as respostas da ponte submetida a carregamentos concentrados crescentes, conforme apresentado no exemplo 4.2, observa-se que ao incluir os efeitos temporais da massa e do amortecimento na análise, tornando o problema dinâmico, há uma oscilação das respostas dinâmicas da estrutura por conta da vibração que no caso dos deslocamentos essa oscilação ocorre em torno da resposta estática. Por conta dessa oscilação, as respostas obtidas na análise dinâmica são maiores que as obtidas na análise estática. Por se tratar de uma análise dinâmica, surgem respostas em termos de velocidades e acelerações na estrutura da ponte.

Avaliou-se a interação dinâmica acoplada entre veículo e irregularidade e aplicaram-se os efeitos resultantes desacopladamente na ponte em diferentes aplicações teóricas. Analisou-se as deformações, as frequências naturais, os deslocamentos, o fator de amplificação dinâmica, as velocidades, as acelereções e a evolução do dano ao longo do tempo de passagem do veículo nas diferentes formas de irregularidades da ponte.

Quando o veículo transita pelas irregularidades harmônicas senoidais da via, há amplificação das respostas por conta das irregularidades. Diferentemente do carregamento concentrado crescente na análise dinâmica, o carregamento gerado pelo veículo em movimento possui variação de posição além da variação temporal. As respostas dinâmicas obtidas neste também possuem oscilações que no caso dos deslocamentos oscilam em torno da resposta estática. Observou-se nitidamente o fenômeno do batimento nas respostas dinâmicas de velocidade e de aceleração obtidas no exemplo 4.3.

Variaram-se a velocidade do veículo e amplitude das irregularidades harmônicas senoidais no exemplo 4.3 para obtenção do fator de amplificação dinâmica. A amplificação dinâmica apresentou valores máximos em torno de 2.7 vezes para o gráfico gerado com 121 análises e em torno de 8.5 vezes maior que a estática com o gráfico gerado com 10,201 análises, comprovando a importância do refino de análises. Nota-se, também, um aumento do fator de amplificação dinâmica conforme se aumenta a amplitude das irregularidades para baixas velocidades do veículo, em torno de 30 km/h, que caracteriza o fenômeno da ressonância. Assim, é de suma importância perceber que mesmo para pequenas velocidades pode ocorrer a condição de ressonância. Ainda, o fator de amplificação dinâmica teve resultados superiores às da análise dinâmica linear já que o dano ocasiona um aumento nas respostas dinâmicas de deslocamento da estrutura.

Como a ressonância pode acontecer para baixas velocidades do veículo e, ainda, como numa situação de danificação mais acentuada, de acordo com o que foi apresentado no exemplo 4.4, o dano proporciona um aumento do fator de amplificação dinâmica, é de suma importância perceber que os efeitos da ressonância em conjunto com os efeitos do dano podem causar o colapso da ponte por intensificarem as respostas dinâmicas, principalmente em termos de deformações e deslocamentos, não podendo ser desprezado em uma análise mais minuciosa.

Observa-se que o dano ocasiona uma redução no módulo de deformação e, por conseguinte, a carga aplicada passa a ter influência de uma área efetiva menor do que a íntegra pela perda de resistência da área com defeitos. Consequentemente, as tensões e, principalmente, as deformações da estrutura são maiores na estrutura danificada. Deste modo, as respostas dinâmicas de deslocamento, velocidade e acelerações são maiores na análise da estrutura danificada do que na análise da estrutura íntegra para o mesmo carregamento aplicado. Também se notam maiores oscilações nas respostas dinâmicas com dano, ou seja, a estrutura danificada vibra mais do que a estrutura íntegra. O amortecimento estrutural produziu variações de deslocamento entre valores positivos e negativos para dissipar a energia do sistema.

Conclui-se que a discretização da geometria da seção transversal da ponte tem suma importância para determinação das respostas dinâmicas em aplicações gerais. Embora o modelo dinâmico linear sem consideração da geometria da seção transversal, apenas considerando o valor do momento de inércia constante, é muito eficiente numa grande gama de casos, inclusive em termos de esforço computacional, há alguns casos em que os resultados dinâmicos obtidos com esse modelo, havendo ou não danificação do material, não oscilaram em torno da resposta estática, estando abaixo da mesma, nas análises fora das frequências e velocidades ressonantes, como no caso de cargas elevadas ou mesmo em casos de pequenos comprimentos de onda, como apresentado no exemplo 4.5.

Ainda que a rotina dinâmica linear recalcule as frequências e velocidades ressonantes, a oscilação das respostas dinâmicas em torno da resposta estática deveria ocorrer para qualquer velocidade, comprimento de onda, amplitude das irregularidades e intensidade das massas. Por apenas entrar com o valor absoluto do momento de inércia nos dados de entrada do modelo, o qual pode ser obtido por infinitas peças de geometrias diferentes, não há consideração dessas variações geométricas nas respostas dinâmicas da estrutura. É factível imaginar que peças com geometrias diferentes com o mesmo momento de inércia que, sujeitas a um mesmo carregamento, terão evoluções do processo de danificação completamente diferentes. O dano depende principalmente da deformação de determinada região local do material. Portanto, se peças de mesmo momento de inércia têm regiões locais de diferentes geometrias, haverá variações no equilíbrio dinâmico não linear do material e a danificação será diferente. O mesmo ocorre nos casos em que não há danificação, isto é, nas análises dinâmicas lineares. Nesse sentido, peças de mesmo momento de inércia com diferentes geometrias terão pontos diferentes com respostas dinâmicas e vibrações diferentes.

Para essas exceções, a resposta obtida com o modelo dinâmico não linear que considera a geometria da seção transversal do sólido ou estrutura analisada, apresentado na sessão 3.6, teve respostas mais coerentes se comparado ao modelo dinâmico linear que considera o valor absoluto do momento de inércia.

Dentre todas as irregularidades apresentadas, as que produziram maiores efeitos dinâmicos foram as irregularidades periódicas retangulares, seguidas das periódicas triangulares e das harmônicas senoidais em todos os casos apresentados, conforme os exemplos 4.5 e 4.6. Além da magnificação das respostas dinâmicas propriamente ditas, as irregularidades periódicas retangulares promoveram maior danificação do material. A maior duração da amplitude das irregularidades periódicas retangulares, para o mesmo período, faz com que os efeitos dinâmicos sejam potencializados, aumentando as deformações e provocando maiores danos à estrutura.

As irregularidades na forma de pulsos, por sua vez, podem gerar maiores deslocamentos na estrutura se comparadas às irregularidades periódicas, conforme apresentado no exemplo 4.5.3. As maiores respostas dinâmicas nas irregularidades na forma de pulsos também são obtidas com as formas retangulares de irregularidades. Por oscilarem entre valores positivos e negativos, as periódicas acabam amortecendo uma pequena parcela dos efeitos dinâmicos gerados por cada pico de irregularidades. Ao mesmo tempo, embora possam ocasionar maiores deslocamentos na região em que a irregularidade na forma de pulso está localizada, um único pulso pode não ser suficiente para causar um dano no material se este não ocasionar deformações acumuladas que excedem o limite de resistência do material, como é a maioria dos casos de pulsos isolados.

Este trabalho teve como objetivo analisar os efeitos dinâmicos obtidos da interação entre veículo, irregularidade e ponte considerando a velocidade do veículo, as irregularidades da via e a mecânica do dano na ponte através de uma análise dinâmica não linear. Os modelos desenvolvidos tiveram como base teórica diversos trabalhos da literatura, conforme apresentado na revisão bibliográfica na sessão 1.5, na fundamentação teórica no capítulo 2 e nos modelos matemáticos no capítulo 3. Nele, comprovou-se que a danificação do material afeta, direta ou indiretamente, todas as respostas dinâmicas da estrutura. Isso foi feito pela implementação do modelo constitutivo de dano de *Mazars* (1984) na rotina computacional, conforme apresentado na sessão 3.4.

As acelerações influenciam as velocidades que, por sua vez, influenciam os deslocamentos, os quais influenciam as deformações acumuladas que, se excederem o limite de resistência do material, influenciam os danos. Estes reduzem o módulo de deformação de cada elemento finito de viga de *Euler-Bernoulli* e, consequentemente, alteram a rigidez global da estrutura, afetando, assim, todas as respostas dinâmicas estruturais num processo não linear dinâmico e multi-iterativo, com o método iterativo de integração no tempo de *Newmark* e o método iterativo de *Newton-Raphson*. Tal procedimento de análise é de grande complexidade matemática e computacional e só foi possível de ser implementada através das teorias abordadas, principalmente as da sessão 2.4, e em especial o trabalho de Machado (1983), Ebecken (1977) e Jacob e Ebecken (1994) para uma abordagem mais detalhada do assunto e o trabalho de Bathe (1996) para uma abordagem mais geral.

Conforme comprometido nos objetivos específicos deste trabalho, a evolução do dano ao longo do tempo de passagem do veículo sobre as diferentes formas de irregularidades da via da ponte apresentada nos resultados dos exemplos comprova a eficiência do programa computacional implementado. Os resultados apresentados mostrou a evolução do dano em diferentes passos de tempo. Em algumas situações o dano evoluiu e já se estabilizou em poucos passos de tempo e em outros houve diversas variações. No entanto, observa-se que o dano é progressivo, cumulativo e irreversível, não podendo ser regenerado. Nesse sentido, a configuração danificada da ponte não pode ter magnitude reduzida.

Observou-se uma danificação mais simétrica da ponte obtida das irregularidades harmônicas periódicas perante um veículo de grande carga, como apresentado no exemplo 4.4. A esse respeito, cabe salientar um aspecto importante que é a danificação assimétrica da viga de ponte em função do sentido do tráfego, conforme pode ser visto no exemplo 4.5.2, 4.6.2 e 4.6.3. Percebe-se que ocorre uma danificação mais pronunciada do lado esquerdo do que do lado direito da ponte por haver um processo que ocasiona o dano acumulado com maior intensidade do lado esquerdo do que do lado direito quando o movimento do veículo é sempre nessa direção e nesse sentido. O fato desta danificação na ponte não ter sido uniformemente distribuída no centro do vão prova que o dano não é somente proveniente de concentração de tensões, mas principalmente proveniente de deformações acumuladas. No caso das irregularidades periódicas retangulares as maiores deformações acumuladas ocorreram próximas ao apoio da esquerda.

Neste sentido, pode-se concluir que um esforço aplicado num ponto qualquer pode causar um processo de danificação, e consequente perda de rigidez, em um ponto igual ou diferente do primeiro se neste houver deformações acumuladas acima do limite de resistência às ações do material.

Além disso, observa-se uma danificação mais proeminente perante os efeitos de tração do que os efeitos de compressão no material. Isso se dá pela baixa resistência do concreto à tração se compara a sua resistência à compressão. Assim, a perda de rigidez das camadas tracionadas é muito superior à perda de rigidez das camadas comprimidas, o que comprova que o modelo de dano de *Mazars* (1984) representa bem o comportamento anisotrópico do concreto.

A inversão de esforços por conta da vibração ou por conta de balanços tem grande importância na análise dinâmica não linear em que se pretendeu avaliar a evolução criteriosa do dano ao longo do tempo de análise. Por conta dessa inversão, os elementos e as camadas comumente comprimidas se tornam tracionadas e vice-versa, modificando totalmente o processo de danificação do material. Tal efeito só foi possível de ser captado devido à implementação da inversão de esforços na rotina computacional. Sem tal implementação, o programa poderia confundir as ações atuantes nos elementos e camadas, produzindo um processo de danificação do material totalmente equivocado.

Como as frequências naturais de vibração são dadas em função dos parâmetros de massa e de rigidez do sistema analisado e como o dano reduz a rigidez global da estrutura por meio da redução da rigidez dos elementos estruturais, as frequências naturais da estrutura danificada terão valores menores do que as da estrutura íntegra. Observou-se redução nas frequências naturais em todos os exemplos que tiveram danificação do material.

5.2 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A equação dinâmica não linear tem as mais diversas aplicações possíveis nas situações físicas e de engenharia e, até mesmo, em muitas outras ciências. Na realidade, nota-se que a grande maioria dos problemas possui uma equação dinâmica não linear do ponto de vista físico e teórico para representar a prática. A própria teoria do caos, que busca uma explicação física para a origem da vida e do universo, tem um embasamento dinâmico não linear. É, portanto, possível adaptar essa implementação tanto para analisar problemas dinâmicos complexos como interação entre ponte, irregularidades e veículos, simulação de lançamento de foguetes e até mesmo aplicar a equação na economia para procurar prever bolsas de valores de modo dinâmico não linear através do método dos elementos finitos ou, ainda, analisar respostas em diversos meios ainda desconhecidos como a bioengenharia que, segundo Bathe (2015), é a grande aposta para o futuro.

Há diversas sugestões para trabalhos futuros propostas abaixo. Algumas estão mais próximas de serem implementadas na rotina atual. Outras, no entanto, necessitam de maior estudo em diferentes áreas, mas podem resultar em grandes benefícios acadêmicos e, da mesma forma, do ponto de vista prático.

Como o modelo atual considera o acoplamento entre o veículo e as irregularidades da via, mas transmite os esforços gerados pelo sistema de modo desacoplado para a ponte, uma sugestão interessante para trabalhos futuros é considerar o acoplamento entre os três sistemas, ou seja, acoplar a equação do movimento da ponte com a equação de movimento do veículo e das irregularidades da via. Deste modo, o veículo influenciaria as respostas dinâmicas da ponte que, por sua vez, alterariam as respostas dinâmicas do veículo. O acoplamento dos sistemas pode trazer uma danificação ainda mais aproximada da realidade.

Obviamente, não há sentido prático na utilização de armadura dupla constante ao longo de todo comprimento da viga de ponte. Neste contexto, uma sugestão mais imediata para trabalhos futuros é simular uma ponte mais realista, levando em consideração a distribuição exata das armaduras na ponte.

Considerar mais graus de liberdade como os axiais, caso de elementos de pórtico, na ponte de modo a analisar a frenagem e deslizamento do veículo na análise do contato e solicitações causadas pelo vento, bem como o efeito da protensão em cabos, durante a passagem do veículo pela ponte.

Aperfeiçoar a rotina considerando os critérios de falha do material e fazer uma estimativa da vida útil da ponte considerando os ciclos de carregamento devido ao tráfego e a fadiga do material.

Modelar o veículo com mais graus de liberdade, procurando captar maiores efeitos não abordados pelo atual modelo de veículo e suas influências na estrutura da ponte, e realizar análises com variações de velocidade e aceleração.

Modelagem de um modelo tridimensional, considerando elementos finitos mais complexos, como elemento finito de barra sujeito à força axial e torção, elemento finito de pórtico, ou até mesmo elementos finitos híbridos.

Considerar outros modelos de irregularidade para o pavimento, no caso das pontes rodoviárias, e para os trilhos, no caso das pontes ferroviárias. Neste, sugere-se a modelagem da mossa das rodas. Além disso, pode-se modelar o modelo estatístico e estocástico probabilístico de irregularidades PSD (*Power Spectral Density*) de modo a analisar irregularidades aleatórias.

Ainda, sugere-se a criação de novos modelos de veículos e de pontes para simular diferentes casos não abordados por este trabalho.

Considerar outros efeitos para simular diversos problemas, como a danificação devido ao efeito de ações térmicas na ponte ou para simular outras estruturas como barragens e edifícios, aplicar o processo de danificação na matriz de massa para simular diversos outros problemas dinâmicos, como o caso de foguetes ou, até mesmo, simular o efeito de explosões em estruturas.

Ainda, é possível utilizar a equação dinâmica não linear para simular processos físicos incógnitos da bioengenharia, como deformação e regeneração dinâmica de ossos, fluxo sanguíneo, impulsos neurais, processos de danificação inflamatória devido à compressão de estruturas biomecânicas, como nervos, estudo de estruturas musculares complexas como o coração, dentre inúmeras outras.

A partir de uma variação nas frequências naturais de vibração, medidas através de acelerômetros, procurar identificar e localizar a posição e a geometria de uma falha, de um dano.

Criar um modelo que, além da mecânica do dano, leve em consideração a propagação de trincas específicas, como, por exemplo, através da mecânica da fratura.

Modelar o sistema considerando a flexibilidade e movimentações dos apoios (terremotos).

Considerar efeitos dinâmicos em novos materiais com grande prospectiva para uso no futuro, como teia de aranha, nanomateriais, ligas com memória de forma e finas fibras mineirais de dente de molusco, material biológico de maior resistência descoberto.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABECHE, T. D. O.; MACHADO, R. D.; BEGHETTO, F. L. M.; de SOUZA, L. A. F. **Computational modeling of vehicle-irregularity-bridge dynamic interaction by damage mechanics.** In: 1st Pan-American Congress on Computational Mechanics in conjunction with the XI Argentine Congress on Computational Mechanics, 2015, Buenos Aires, Argentina. PANACM 2015 1st Pan-American Congress on Computational Mechanics in conjunction with the MECOM 2015 XI Argentine Congress on Computational Mechanics. Barcelona, Spain: International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), 2015. v. 1. p. 485-496.

ÁLVARES, M.S. **Contribuição ao estudo e emprego de modelos simplificados de dano e plasticidade para a análise de estruturas de barras em concreto armado.** Tese (Doutorado) – Departamento de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, 1999.

ARAÚJO, F. A. de. **Contribuição ao emprego da Mecânica do Dano para Ánalise do Comportamento Dinâmico Não-Linear de Vigas em Concreto Armado, 98f.** Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

ARGYRIS, J. H., KELSEY, S. 1960. **Energy Theorems and Structural Analysis.** Butterworth & Co. Ltda.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:** Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, RJ, 2007.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures,** Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

BATHE, K. J. **Some Advances in Finite Element Procedures.** In: 1st Pan-American Congress on Computational Mechanics in conjunction with the XI Argentine Congress on Computational Mechanics, 2015, Buenos Aires, Argentina. PANACM 2015 1st Pan-American Congress on Computational Mechanics in conjunction with the MECOM 2015 XI Argentine Congress on Computational Mechanics. Barcelona, Spain: International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE), 2015. v. 1.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Mecânica Vetorial para Engenheiros: Estática.** 5ª edição, Pearson Makron Books, São Paulo, 2008.

BEER, F. P.; JOHNSTON, E. R. **Resistência dos Materiais.** 4ª edição, McGraw-Hill, São Paulo, 2010.

BEGHETTO, F. L. M. **Efeitos dinâmicos em modelo de veículo e ponte ferroviária diante da variação de velocidade e irregularidades verticais da via,**

105f. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

BEGHETTO, F. L. M. **Modelagem tridimensional da interação dinâmica entre veículo e ponte ferroviária considerando contato roda-trilho, inrregularidades da via e variação da velocidade, 268f.** Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2011.

BERNARDES, V. **Desenvolvimento de um modelo massa-mola-amortecedor móvel acoplado a viga reta para análise dinâmica, 91f.** Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

CHABOCHE, J. L. **Description Phénoménologique de la Viscoplasticité Cyclique avec Endommagement.** Doctorat D'Etat, Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1978.

CHENG, Y. S.; AU, F. T. K.; CHEUNG, Y. K. **Vibration of railway bridges under a moving train by using bridge-track-vehicle element.** Engineering Structures, Great Britain, v. 23, p. 1597–1606, 2001.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering.** Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995.

CHOW, C. L., WANG, J. **An Anisotropic Theory of Continuum Damage Mechanics for Ductile Materials.** *Engineering Fracture Mechanics*, 1987a. v. 27, pp. 547–558.

CHOW, C. L., WANG, J. **An Anisotropic Theory of Elasticity for Continuum Damage Mechanics.** *International Journal of Fracture*, 1987b. v. 33, pp. 3–16.

CLOUGH, R. W., PENZIEN, J. **Dynamics of Structures.** 2nd edition, McGraw-Hill, New York, 1993.

CLOUGH, R. W., PENZIEN, J. **Dynamics of Structures**. 3rd edition, Computers and Structures, Inc., Berkeley, CA, 2003.

COOK, R. D., MALKUS, D. S., PLESHA, M. E., WITT, R. J. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis.** 4th ed, John Wiley & Sons Inc., 2002.

CORREA, W. da. L. **Vibrações em pontes ferroviárias.** 2003. 107 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

CRAIG, R. R. **Structural Dynamics: An introduction to computer methods.** J. Wiley & Sons, New York, 1981.

DELGADO, R. L.; SANTOS, R. C. S. M. dos. **Modeling of railway bridge-vehicle interaction on high speed tracks.** Computers and Structures, Great Britain, 1997. v.63, n.3, pp. 511–523.

DOBLARÉ, M. & GARCIA, J. M., **Anisotropic bone remodeling model based on continuum damage-repair theory.** Journal of Biomechanics, 2002, v. 35, pp. 1–17.

DRIEMEIER, L. **Considerações sobre a fadiga em metais e o comportamento do concreto sob solicitação cíclica.** São Carlos. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 1995.

DVORAK, R., FREISTETTER, F. **Chaos ans Stability in Planetary Systems.** [S.l.]: Birkhäuser, 2005. p. 24. ISBN 3540282084.

EBECKEN, N. F. F. **LORANE-NL – Uma Linguagem Orientada à Análise Estrutural Não-Linear.** Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977.

FERREIRA, A. M. C. **Arte no Pensamento de Heidegger.** In: Fernando Pessoa. (Org.). *Arte no pensamento.* 1ed. Rio de Janeiro: Museu Vale do Rio Doce, 2006, vol. 1, pp. 204–224.

FONSECA, J. **Ferramentas de simulação em mecânica: elementos finitos.** Material compilado para a disciplina de Elementos Finitos para Graduação e Pós-graduação em Engenharia Mecânica. UFRGS, 2002, p. 88.

FRÝBA, L. **A rough assessment of railway bridges for high speed trains.** Engineering Structures, Great Britain, vol. 23, pp. 548–556, 2001.

GALLAGHER, R. H., PADLOG, J. **Discrete Element Approach to Structural Instability Analysis.** AIAA Journal, 1963. vol. 1, n. 6, pp. 1437–1439

GOICOLEA, J. M., DOMÍNGUEZ, J., NAVARRO, J. A., GABALDÓN, F. **New dynamic analysis methods for railway bridges in codes IAPF and EUROCODE 1.** Railway Bridges, Design, Construction and Maintenance, Spanish group of IABSE, Spain, 2002.

GUELLO, G. de. A. **Simulação Computacional de Estruturas de Concreto por Meio da Mecânica do Dano, 130f.** Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

HEIDEGGER, M. **Die Herkunft der Kunst und die Bestimmung des Denkens.** Vortrag in der Akademie der Wissenschaften und Künste in Athen, 4 de abril de 1967. p. 15.

HERRMANN, L. R. **Interpretation of Finite Element Procedure as Stress Error Minimization Procedure.** Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, vol. 98, n. EM5, pp. 1330–1336, 1972.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais.** 5ª edição, Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2009.

HILL, R. **A Theory of the Yielding and Plastic Flow of Anisotropic Metals.** In: Proceedings of the Royal Society of London, Series A, v. 193, pp. 281-297, London, 1948.

HUGHES, T. J. R. **Stability, Convergence and Growth and Decay of Energy of the Average Acceleration Method in Nonlinear Structural Dynamics.** Computer and Structures, Great Britain, Pergamon Press, 1976. Vol. 6, pp. 313–324.

INMAN, D. J. **Engineering Vibration.** Prentice-Hall, New Jersey, 1996.

JACOB, B. P., EBECKEN, N. F. F. **An optimized implementation of the Newmark/Newton-Raphson Algorithm for the Time Integration of Non-Linear Problems.** Communications in Numerical Methods in Engineering, Vol. 10, pp. 983–992, 1994.

JANSON, J.; HULT, J. **Fracture mechanics and damage mechanics a combined approach.** Journal de Méchanique Appliquée, 1977. v. 1, n. 1, pp. 69–84.

JONAS, H. **O Princípio Responsabilidade.** Contraponto Editora, 2006.

KACHANOV, L.M. **Time of rupture process under creep conditions.** Izvestia Akademii Nauk, USSR (em russo), 1958, n. 8, pp. 26–31.

KRAJCINOVIC, D., FONSEKA, G. **The Continuos Damage Theory of Brittle Materials.** *Journal of Applied Mechanics: ASME*, 1981, v. 48, pp. 809–824.

KWON, Y. W.; HYOCHOONG, B. **The Finite Element Method using MATLAB.** London: CRC Press LLC, 1997.

LADEVÈZE, P. **Sur une theorie de l’endommagement anisotrope.** Relatório 34, Laboratoire de Mécanique et Technologie, Cachan, França, 1983.

LAW, S. S., BU, J. Q., ZHU, X. Q., CHAN, S. L. **Vehicle axle loads identification using finite element method.** Engineering Structures, Great Britain, 2004. v. 26, pp. 1143–1153.

LECKIE, F., ÕNATE, E. **Tensorial Nature of Damage Measuring Internal Variables.** In: Proceedings of the IUTAM Symposium on Physical Non-linearities in Structural Analysis, Sens, France. Springer, Berlin, 1981, pp. 140–155.

LEMAITRE, J. **A Course on Damage Mechanics.** Springer-Verlag, Londres, 1992.

LEMAITRE, J., CHABOCHE, J. L. **Mécanique des matériaux solids.** Paris, Dunod-Bordas, 1985.

LEMAITRE, J., DESMORAT, R. **Engineering Damage Mechanics: Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures.** Springer-Verlag, Londres, 2005.

LEONEL, E. D.; RIBEIRO, G. O.; PAULA, F. A. **Simulação Numérica de Estruturas de Concreto Armado por Meio do MEF/ANSYS.** In: V Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, São Paulo, 2003.

LOU, P. **A vehicle-track-bridge interaction element considering vehicle's pitching effect.** Finite Element in Analysis and Design, Great Britain, 2005. v. 41, pp. 397–427.

LUCCIONI, B. M. **Formulación de un modelo constitutivo para materiales ortotropos.** Tese (Doutorado) – Universidad Nacional de Tucumán, Argentina, 1993.

LYNN, P. P., ARYA, S. K. **Use of the Least Squares Criterion in the Finite Element Formulation.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1973. Vol. 6, pp. 75–83.

MACHADO, R. D. **Análise Dinâmica Não-linear de Sistemas Rígido-Flexíveis.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1983.

MASSONNET, C. **Résistance des Matériaux.** Dunod, Paris, 1968.

MAZARS, J. **Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non lineaire et à la rupture du béton de structure.** Thése de Doctorat d'État, Université Paris 6, 1984.

MELO, E. S. de. **Interação dinâmica veículo-estrutura em pequenas pontes rodoviárias, 129p.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

MELOSH, R. J. **Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method.** AIAA Journal, 1963. Vol. 1, n. 7, pp. 1631–1637.

MICHALTSOS, G. T. **Parameters affecting the dynamic response of light (steel) bridges.** The Scientific Journal FACTA UNIVERSITATIS, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, Greece, 2000, v. 2, n. 10, pp. 1203–1218.

MOAVENI, S. **Finite Element Analysis: Theory and Applications with ANSYS.** New Jersey: Prentice Hall, 1999.

MURAKAMI, S. **Effect of Cavity Distribution in Constitutive Equations of Creep and Creep Damage.** In: EUROMECH Colloquium 147 on Damage Mechanics, Cachan, França, 1981.

MUSEROS, P., ROMERO, M. L., POY, A., ALARCÓN, E. **Advances in the analysis of short span railway bridges for high-speed lines.** Computers and Structures, Great Britain, 2002. v. 80, pp. 2121–2132.

NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **J. Eng. Mech. Div., ASCE,** v. 85, n. 3, pp. 67–94, 1959.

PITUBA, J. J. C. **Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo.** 130p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1998.

PITUBA, J. J. C.; PROENÇA, S. P. B. **Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo.** Cadernos de Engenharia de Estruturas, 2005. v. 7, n. 23, pp. 33–60.

REDDY, J. N. **Energy and variational methods in applied mechanics: With an introduction to the finite element method.** J. Wiley & Sons, 1984.

REN, W. X.; ZHAO, T.; HARIK, I. E. **Experimental and analytical modal analysis of steel arch bridge.** Journal of Structural Engineering, American Society of Civil Engineering, July 2004, v. 130, n. 7, pp. 1022–1031.

RABOTNOV, Y. N. **Creep problems in structural members.** Amsterdam, North-Holland, 1969.

SANTOS, E. F. dos. **Análise e Redução de Vibrações em Pontes Rodoviárias, 178p.** Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

SONG, M. K.; NOH, H. C.; CHOI, C. K. **A new three-dimensional finite element analysis model of high-speed train-bridge interactions.** Engineering Structures, Great Britain, 2003. v. 25, p. 1611–1626.

SOPHIANOPOULOS, D. S.; MICHALTSOS, G. T. **Combined torsional-lateral vibration of beams under vehicular loading.** I: Formulation and solution techniques. The Scientific Journal FACTA UNIVERSITATIS, Series: Mechanics, Automatic Control and Robotics, Greece, 1999, v. 2, n. 9, p. 877–886.

SORIANO, H. L. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas.** São Paulo: EDUSP – Editora da Universidade de São Paulo, 2003.

SOUZA, L. A. F. de. **Modelo Numérico Anisotrópico de Remodelação Óssea Interna Fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo, 180f.** Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

SOUZA, L. A. F. de; MACHADO, R. D. **Numerical-computational analysis of reinforced concrete structures considering the damage, fracture and failure criterion.** Revista IBRACON de Estruturas e Materiais, 2013. v. 6, pp. 101–120.

SZABO, B. A., LEE, G. C. **Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1969. Vol. 1, pp. 301–310.

TIAGO, C. M.; LEITÃO, V. M. A.; ROSCA, V. **Análise de Problemas Unidimensionais de Mecânica do Dano com Funções de Base Radial.** J. M. Goicolea, C. Mota Soares, M. Pastor e G. Bugeda, Editor, Métodos Numéricos en Ingeniería V, Artes Gráficas Torres S.A., 2002.

TIMOSHENKO, S., YOUNG, D. H. **Dinâmica: Mecânica Técnica.** Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1975. v.2.

TURNER, M. J., CHOUGH, R. J., MARTIN, H. C. & TOPP, L. J. **Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures.** Journal of Aeronautic Society, 1956. vol. 23, n. 9, pp. 805–823.

VEUBEKE, B. F. **Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method.** Stress Analysis - Recent Developments in Numerical and Experimental Methods, O.C. Zienkiewicz and G. S. Holister (editors), John Wiley & Sons, 1965. pp. 145–197.

WADDUPS, M. E. **Advanced Composite Material Mechanics for the Design and Stress Analysis.** General Dynamics. Fort Worth Division Report FZM-4763, 1987.

XIA, H.; ZHANG, N.; De ROECK, G. **Dynamic analysis of high speed railway bridge under articulated trains.** Computers and Structures, Great Britain, 2003. v. 81, pp. 2467–2478.

YANG, Y. B.; YAU, J. D.; HSU, L. C. **Vibration of simple beams due to trains moving at high speeds.** Engineering Structures, Great Britain, 1997. v. 19, n. 11, pp. 936–944.

YAU, J. D. **Dynamic response analysis of suspended beams subjected to moving vehicles and multiple support excitations.** Journal of Sound and Vibration, 2009. v. 325, pp. 907–922.

YONGHONG, C.; TAN, C. A.; BERGMAN, L. A. **Effects of boundary flexibility on the vibration of a continuum with a moving oscillator.** Journal of Vibration and Acoustics, American Society of Mechanic Engineering, October 2002, v. 124, pp. 552–560.

ZATZKIS, H. In: MENZEL, D. H. **Fundamental formulas of physics.** [S.l.]: Courier Dover, 2ª ed., 1960. Capítulo: § 1.4 *Lagrange equations of the second kind*, p. 160. vol.1. ISBN 0486605957.

ZIENKIEWICZ, O. C. **The Finite Element Method.** 3rd edition, McGraw-Hill, 787 pp., 1977.

ZIENKIEWICZ, O. C., CHEUNG, Y. K. **Finite Element in the Solution of Field Problems.** The Engineer, September 1965, pp. 507–510.

ZIENKIEWICZ, O. C., MAYER, P. & CHEUNG, Y. K. **Solution of Anisotropic Seepage Problems in Finite Elements.** Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, 1966, vol. 92, pp. 111–120.

ZIENKIEWICZ, O. C., CHEUNG, Y. K. **The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics.** McGraw-Hill Publishing Company Ltd, 1967.

ZIENKIEWICZ, O. C., VALLIAPPAN, S. & CHEUNG, Y. K. **Stress Analysis of Rock as a 'No Tension' Material.** Géotechnique, 1968, vol. 18, n. 1, pp. 56–66.

ZIENKIEWICZ, O. C., TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method: Volume 2, Solid Mechanics.** 5th ed, Oxford, Butterworth-Heinemann, 2000.

ANEXOS

ANEXO A MÉTODO DE *NEWMARK* PARA SOLUÇÃO DINÂMICA LINEAR

(A) Cálculos inerciais:

1. Formar as matrizes do sistema $[M]$, $[C]$ e $[K]$.
2. Iniciar os vetores com as condições iniciais $\{U\}_{t=o}$, $\{\dot{U}\}_{t=o}$ e $\{\ddot{U}\}_{t=0}$.
3. Selecionar o passo de tempo (Δt) e os parâmetros (α) e (δ) e calcular as constantes de integração:
   $\delta \geq 0.50; \quad \alpha \geq 0.25(0.5+\delta)^2;$
   $a_0 = \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; \quad a_1 = \frac{\delta}{\alpha \Delta t}; \quad a_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad a_3 = \frac{1}{2\alpha} - 1;$
   $a_4 = \frac{\delta}{\alpha} - 1; \quad a_5 = \frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\delta}{\alpha} - 2\right); \quad a_6 = \Delta t(1-\delta); \quad a_7 = \delta \Delta t;$
4. Formar a matriz de rigidez efetiva $[K_{EF}]$: $[K_{EF}] = [K] + a_0[M] + a_1[C]$

(B) Para cada passo de tempo (Δt):

1. Cálculo da força efetiva no passo de tempo $(t+\Delta t)$:

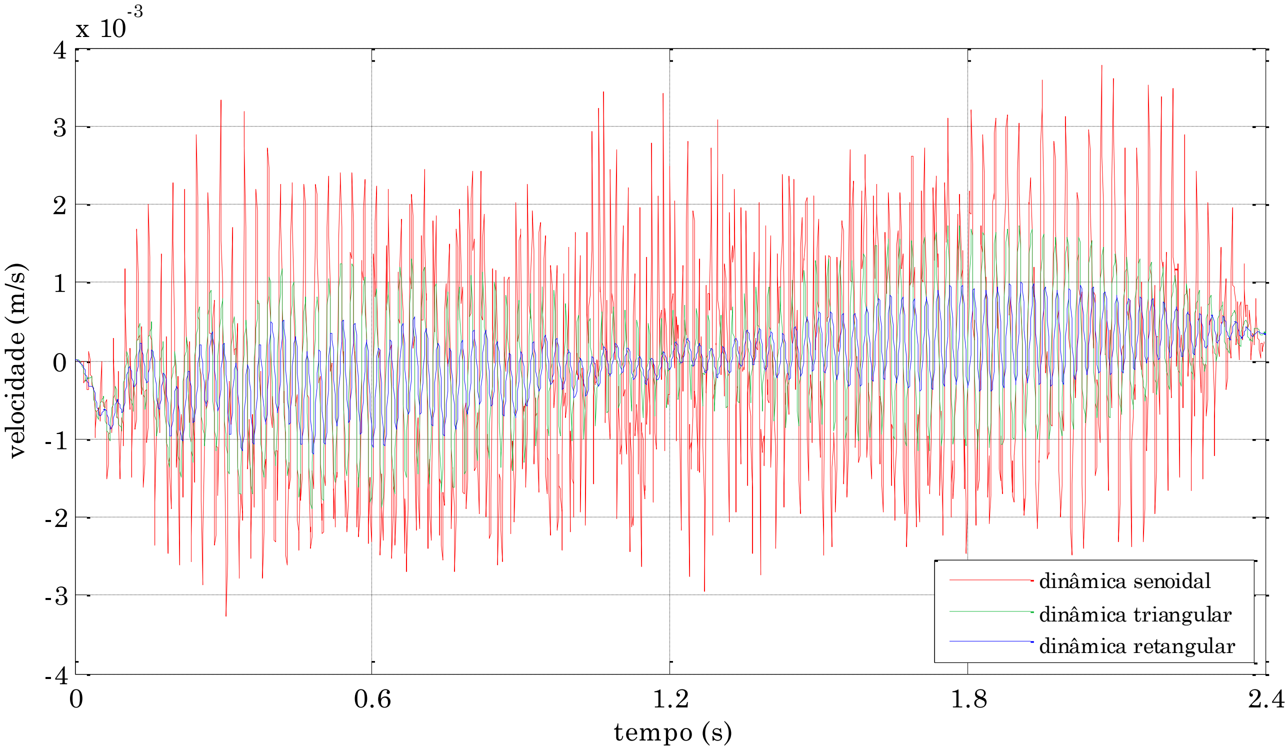
$$\{F_{EF}\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t+\Delta t} + [M]\left(a_0\{U\}_t + a_2\{\dot{U}\}_t + a_3\{\ddot{U}\}_t\right) + [C]\left(a_1\{U\}_t + a_4\{\dot{U}\}_t + a_5\{\ddot{U}\}_t\right)$$

2. Resolução do sistema para os deslocamentos no tempo $(t+\Delta t)$:
   $\{F_{EF}\}_{t+\Delta t} = [K_{EF}]\{U\}_{t+\Delta t}$
3. Cálculo das acelerações e velocidades no tempo $(t+\Delta t)$:
   $\{\ddot{U}\}_{t+\Delta t} = a_0(\{U\}_{t+\Delta t} - \{U\}_t) - a_2\{\dot{U}\}_t - a_3\{\ddot{U}\}_t$
   $\{\dot{U}\}_{t+\Delta t} = \{\dot{U}\}_t + a_6\{\ddot{U}\}_t + a_7\{\ddot{U}\}_{t+\Delta t}$

APÊNDICES

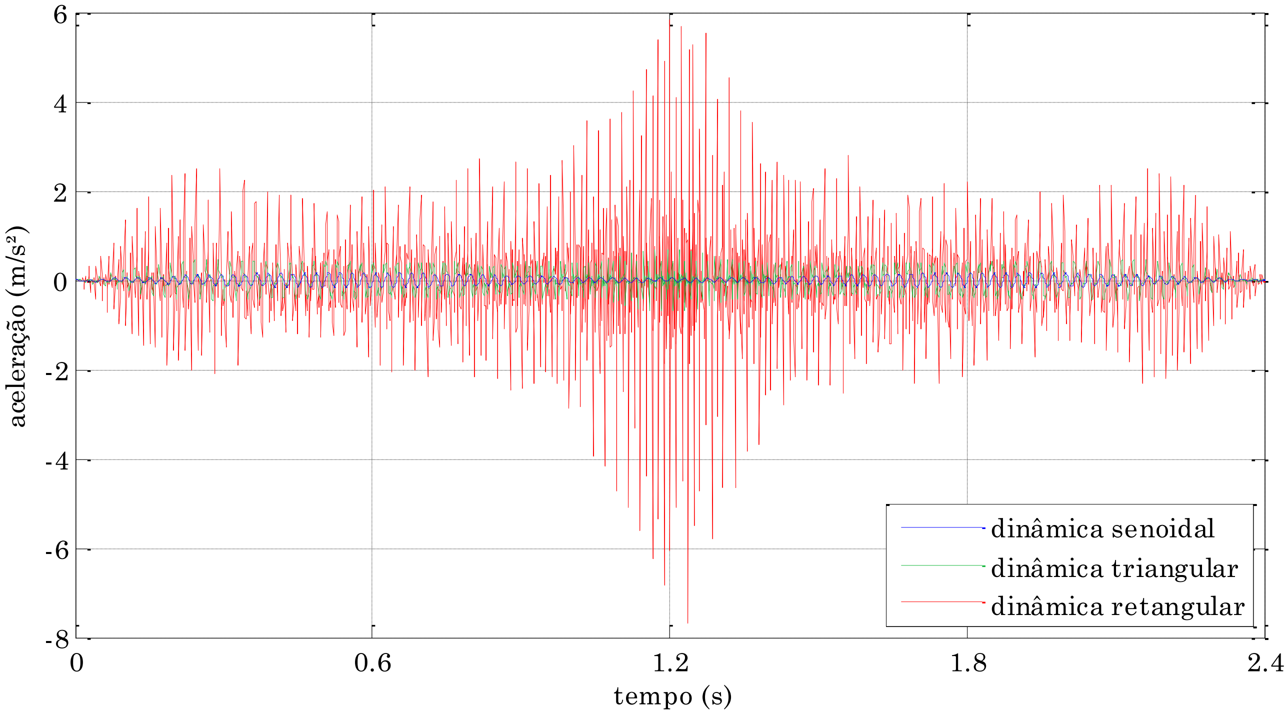
APÊNDICE A RESPOSTAS DINÂMICAS LINEARES DO EXEMPLO 4.5

Figura 96 – RD lineares de velocidade para diferentes irregularidades periódicas do exemplo 4.5



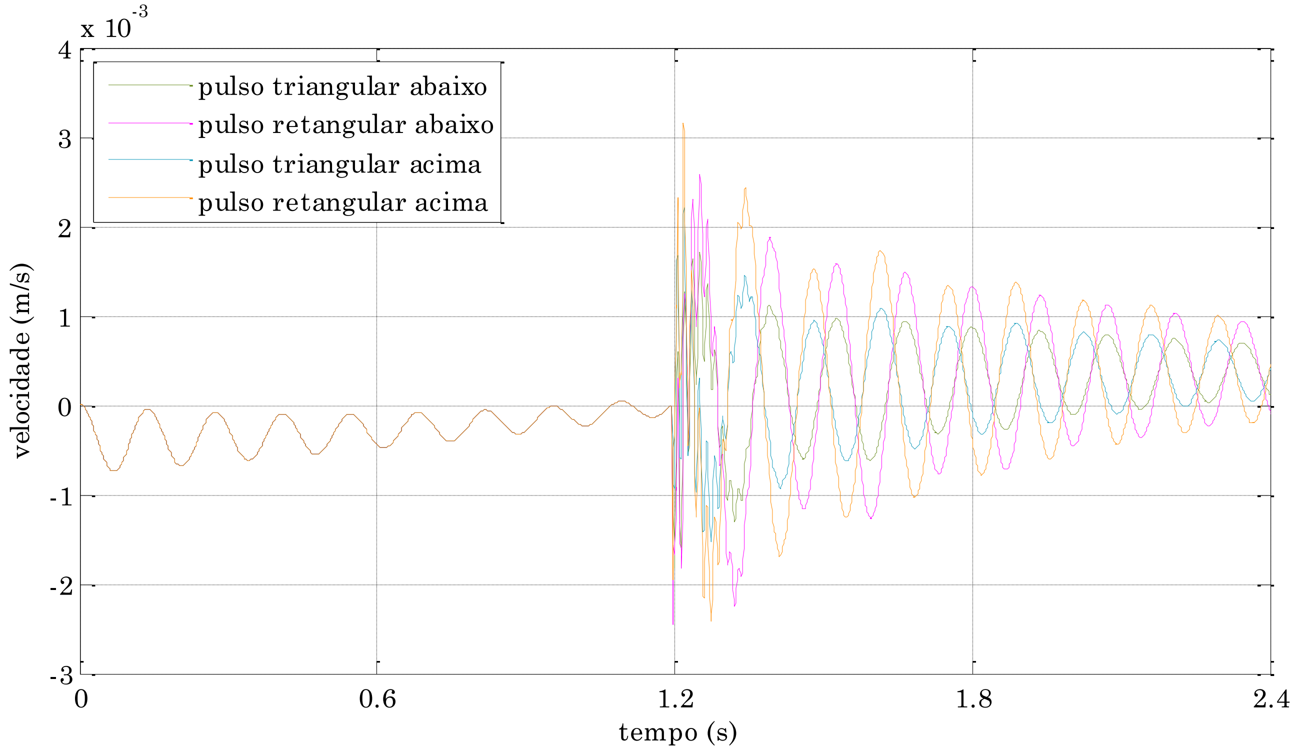
Fonte: O autor.

Figura 97 – RD lineares de aceleração para diferentes irregularidades periódicas do exemplo 4.5



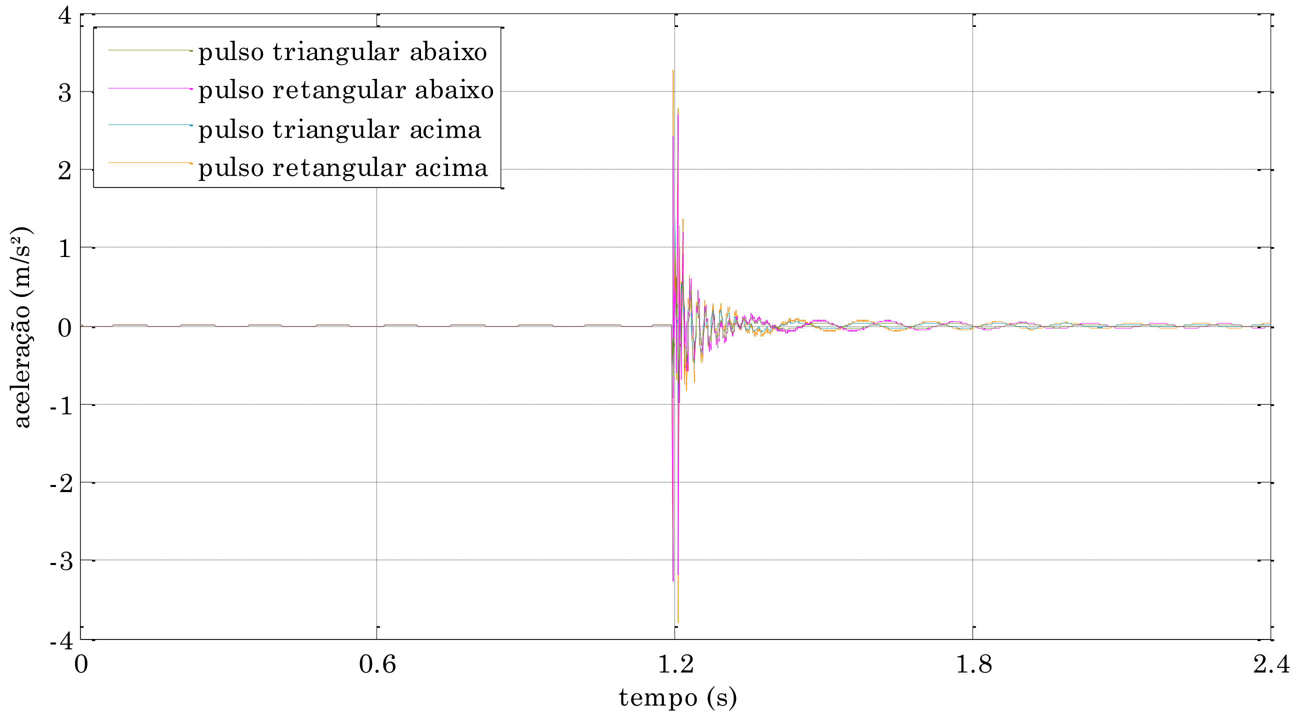
Fonte: O autor.

Figura 98 – Respostas dinâmicas lineares de velocidade para diferentes irregularidades na forma de pulsos do exemplo 4.5



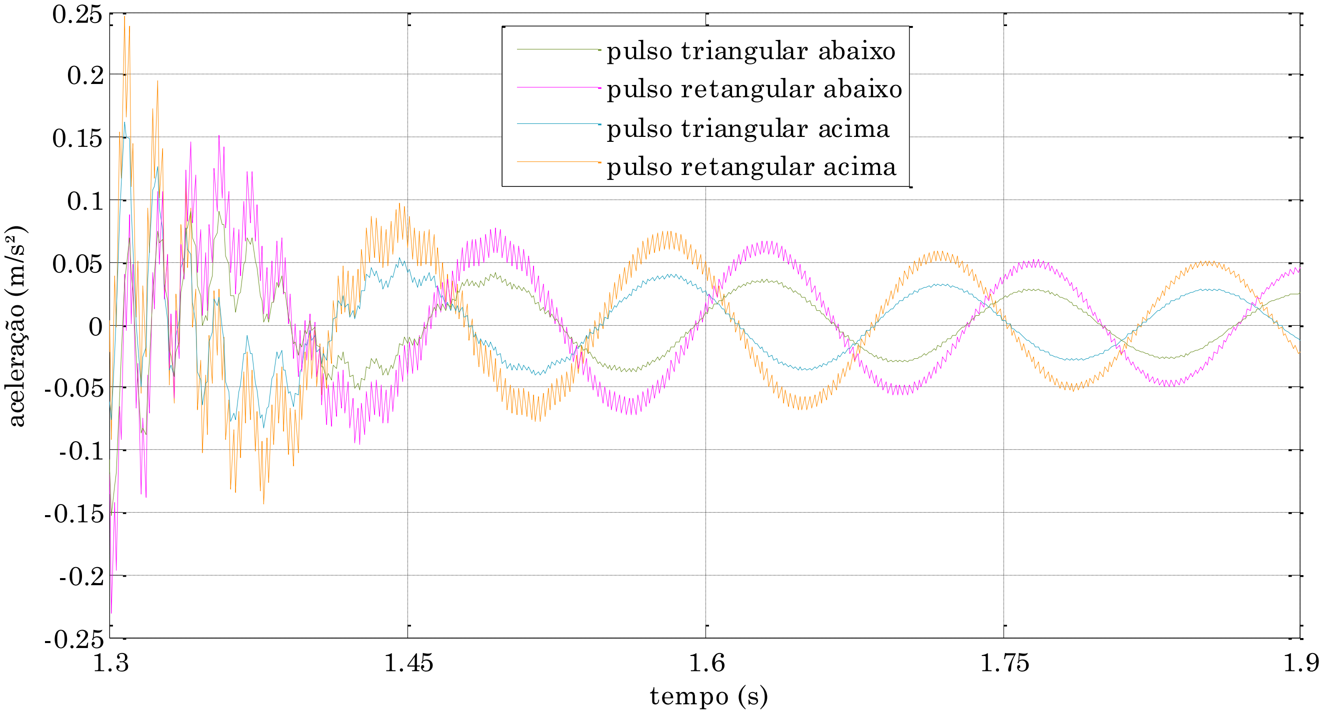
Fonte: O autor.

Figura 99 – Respostas dinâmicas lineares de aceleração para diferentes irregularidades na forma de pulsos do exemplo 4.5



Fonte: O autor.

Figura 100 – Respostas dinâmicas lineares de aceleração para irregularidades na forma de pulsos até 1.9 s do exemplo 4.5



Fonte: O autor.