

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ

MARLON ELIAS MARCHI

**ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO LINEAR DO
AMORTECEDOR *STOCKBRIDGE***

**CURITIBA
Dezembro - 2017**

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ

MARLON ELIAS MARCHI

**ESTUDO DO COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO LINEAR DO
AMORTECEDOR *STOCKBRIDGE***

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Escola Politécnica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Nilson Barbieri

CURITIBA

Dezembro - 2017

Dados da Catalogação na Publicação
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/PUCPR
Biblioteca Central
Edilene de Oliveira dos Santos CRB - 9/1636

M317e
2017 Marchi, Marlon Elias
Estudo do comportamento dinâmico não linear do amortecedor stockbridge /
Marlon Elias Marchi; orientador, Nilson Barbieri. -- 2017
177 f.: il.; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná,
Curitiba, 2017
Bibliografia: f. 167-174

1. Engenharia mecânica. 2. Condutores elétricos. 3. Vibração – Medição. 4.
Modelos matemáticos. 5. Equações diferenciais ordinárias. 6. Teorias não
lineares. I. Barbieri, Nilson. II. Pontifícia Universidade Católica do Paraná.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD 20. ed. – 620.1

À minha esposa Maria e meus pais Elias e Estela,
pelo carinho e amor incondicional ao longo desse caminho.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me concedido forças e sabedoria para chegar até aqui.

Aos meus pais Estela e Elias, pelo apoio, amor e carinho incondicional ao longo desse período. Amo vocês!

A minha esposa Maria, que esteve sempre comigo e com quem eu sempre pude contar. Muito obrigado pelo amor e carinho diário.

Aos professores do Departamento de Engenharia Mecânica, ao coordenador do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica Prof. Fred Lacerda Amorim, ao orientador Prof. Dr. Nilson Barbieri, pela dedicação nas correções e orientações neste período de aprendizado, e ao Prof. Dr. Key Lima pelo incentivo.

Por último, mas não menos especial, à secretária do Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica Jane Marques da Rocha. Muito obrigado pela paciência, ajuda e consideração.

“A lição é a seguinte: nunca desista, nunca, nunca, nunca. Em nada. Grande ou pequeno, importante ou não. Nunca desista. Nunca se renda à força, nunca se renda ao poder aparentemente esmagador do inimigo. ”

(Winston Churchill)

RESUMO

Vibrações eólicas podem ocasionar danos em cabos condutores de energia elétrica, levando-os a ruptura. Para reduzir essas avarias e aumentar a vida útil das linhas, são utilizados amortecedores *Stockbridge*. Esse dispositivo consiste de duas massas inercias fixas na extremidade de um cabo mensageiro e é foco de vários estudos na área de vibrações. Um desses estudos compreende representar o comportamento dinâmico do *Stockbridge* através de modelos numéricos lineares e não lineares. Por isso, este trabalho propôs validar um modelo matemático de vibração não linear para o *Stockbridge* por meio de um procedimento numérico-experimental. O modelo considera o cabo mensageiro como uma viga engastada cujo movimento é descrito pelas equações não lineares de Crespo da Silva e Glynn (1978). Essas equações são simplificadas com base nas considerações de Velázquez (2007) para vibrações não lineares de vigas sujeitas a excitações harmônicas na base. Já as massas inerciais são modeladas como corpos rígidos com movimento no plano. A etapa experimental envolveu dois *Stockbridges*, sendo um inteiro e o outro a metade. Cada dispositivo foi testado em um excitador eletrodinâmico que permitia gerar movimentos harmônicos com amplitudes de aceleração constantes na faixa de 5 a 120 Hz de excitação. Adicionalmente, o estudo foi estendido para um terceiro *Stockbridge* com base em dados experimentais de Geron (2010) e estudos complementares de Barbieri e Barbieri (2012). A etapa numérica consistiu em utilizar o algoritmo numérico, desenvolvido por Velázquez (2007), para gerar amplitudes de vibração do cabo mensageiro. Essas amplitudes numéricas, por sua vez, foram correlacionadas aos dados experimentais através do método de otimização por enxame de partículas, denominado PSO (*Particle Swarm Optimization*). A correlação exigiu a otimização de três parâmetros do modelo matemático: constante de amortecimento proporcional à massa, fator de perda e rigidez a flexão. Por fim, as correlações dos dados numéricos aos experimentais foram satisfatórias para o primeiro modo de vibração de cada *Stockbridge*, o que permitiu validar o modelo matemático apresentado.

Palavras chave: *Stockbridge*. Vibração não linear. Absorvedor dinâmico de vibração.

ABSTRACT

Wind vibrations can cause damage to electrical power conducting cables, causing them to rupture. Stockbridge dampers are used to reduce these faults and increase the life of the lines. This device consists of two inertial masses fixed at the end of a messenger cable and is the focus of several studies in the area of vibrations. One of these studies comprises representing the dynamic behavior of Stockbridge through linear and nonlinear numerical models. Therefore, this work proposed to validate a mathematical model of non-linear vibration for the Stockbridge by means of a numerical-experimental procedure. The model considers the messenger cable as a crimped beam whose movement is described by the nonlinear equations of Crespo da Silva and Glynn (1978). These equations are simplified based on Velázquez's (2007) considerations for non-linear vibrations of beams subjected to harmonic excitations at the base. Already the inertial masses are modeled as rigid bodies with movement on the plane. The experimental stage involved two Stockbridges, one integer and the other half. Each device was tested in an electrodynamic exciter that allowed to generate harmonic movements with constant amplitudes of acceleration in the range of 5 to 120 Hz of excitation. In addition, the study was extended to a third Stockbridge based on experimental data from Geron (2010) and complementary studies by Barbieri and Barbieri (2012). The numerical step was to use the numerical algorithm, developed by Velázquez (2007), to generate vibration amplitudes of the messenger cable. These numerical amplitudes, in turn, were correlated to the experimental data through the particle swarm optimization method, called PSO (Particle Swarm Optimization). The correlation required the optimization of three parameters of the mathematical model: damping constant proportional to mass, loss factor and flexural stiffness. Finally, the correlations of the numerical data to the experimental ones were satisfactory for the first mode of vibration of each Stockbridge, which allowed to validate the presented mathematical model.

Keywords: Stockbridge. Non-linear vibration. Dynamic vibration absorber.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 - Linhas de transmissão elétrica no Brasil.....	25
Figura 2 - Amortecedor Stockbridge.....	26
Figura 3 - Ciclo de Histerese.....	34
Figura 4 - Vibrações eólicas ocasionadas por vórtices.	38
Figura 5 - Cabos elétricos com gelo acumulado.	38
Figura 6 - Vórtices de Karman.....	39
Figura 7 - Número de Strouhal versus Número de Reynolds para cilindros como, por exemplo, o cabo.	40
Figura 8 - Danos nos fios que compõem o cabo condutor.	41
Figura 9 – Fios rompidos de um cabo condutor.	42
Figura 10 - Pontos de fixação de um cabo condutor.	42
Figura 11 - Ponto de ancoragem do cabo condutor e suas superfícies de contato...	43
Figura 12 - Tipos de amortecedores de vibração para cabos de alta tensão.	45
Figura 13 - Sistema massa-mola primário.....	46
Figura 14 - Amplitude do cabo sem amortecedor, com $k_1 = 10 N/m$ e $m_1 = 10 kg$.	47
Figura 15 - Sistema massa-mola secundário.	48
Figura 16 - Sistemas primário e secundário acoplados.....	48
Figura 17 - Amplitudes do cabo e do ADV em relação a variação das frequências de excitação, com $f = 1$ e $\mu = 0,1$	51
Figura 18 - Frequências naturais e banda de operação do sistema em função da razão das massas.	52
Figura 19 – Sistema cabo condutor e ADV com amortecimento.	53
Figura 20 – Influências de f sobre as amplitudes de vibração do cabo com ADV amortecido, $\mu = 0,1$ e $\xi = 0,05$	55
Figura 21 – Influências de ξ sobre as amplitudes de vibração do cabo com ADV amortecido, $\mu = 0,1$ e $f = 1$	55
Figura 22 - Sistema vibratório.	57
Figura 23 - Gráfico força versus deslocamento do sistema vibratório.	58
Figura 24 - Seção transversal do cabo mensageiro.	63
Figura 25 - Emprego do <i>Stockbridge</i> em linhas de transmissão elétrica.....	64
Figura 26 - <i>Stockbridge</i> simétrico.....	65
Figura 27 - Modelos de <i>Stockbridge</i> simétrico <i>Dulmison</i> ES-1 (a) e o <i>Dulmison</i> ES-2 (b).....	65
Figura 28 - <i>Stockbridge</i> simétrico modelo <i>Varispond Dulmison</i>	66
Figura 29 - <i>Stockbridge</i> assimétrico modelo <i>Salvi 4-R</i>	66
Figura 30 - <i>Stockbridge</i> do tipo <i>dogbone</i>	67
Figura 31 - <i>Stockbridge Vibless</i>	67
Figura 32 - <i>Stockbridge Haro</i>	68
Figura 33 - Resposta de um amortecedor <i>Stockbridge</i> e sua faixa de operação.	69
Figura 34 - Influência dos termos inércia, memória e cooperação no movimento da partícula.....	72
Figura 35 - Fluxograma do PSO.....	73

Figura 36 – Modelo do ADV <i>Stockbridge</i> assimétrico utilizado nos ensaios.....	74
Figura 37 – Vistas superior (a) e frontal (b) da metade do ADV <i>Stockbridge</i>	74
Figura 38 – Dinâmica de movimento do conjunto cabo mensageiro e massa inercial.	75
Figura 39 – Sistema dinâmico da viga engastada.....	78
Figura 40 – Rotações de corpo rígido da seção transversal da viga.....	79
Figura 41 - Deformação no eixo axial da viga engastada.	81
Figura 42 - Sistema de referência e deslocamentos admissíveis do corpo rígido.....	97
Figura 43 – Vetores posição do ponto <i>i</i> do corpo rígido.....	99
Figura 44 - Discretização do cabo mensageiro modelado como uma viga de Euler- Bernoulli.	107
Figura 45 – Elemento de viga <i>ev</i>	107
Figura 46 - Discretização no domínio do tempo.	115
Figura 47 - <i>Stockbridge</i> assimétrico utilizado nos ensaios de vibração.	118
Figura 48 - Dimensões do <i>Stockbridge</i> assimétrico ensaiado.....	118
Figura 49 - Unidade seccionada para considerar apenas o lado da massa maior. .	120
Figura 50 - Unidade seccionada para considerar apenas o lado da massa menor.	120
Figura 51 - Amortecedores empregados nos ensaios de vibração: (a) <i>Stockbridge</i> inteiro, (b) <i>Stockbridge</i> lado massa maior, (c) <i>Stockbridge</i> lado massa menor.....	121
Figura 52 - Desenho esquemático da bancada de ensaios.	121
Figura 53 - Conjunto que permite a fixação e movimentação do amortecedor, bem como a medição de sinais gerados.	122
Figura 54 - Conjunto rígido acoplado.	124
Figura 55 - Excitador eletromagnético ou shaker (a) e amplificador de potência (b).	125
Figura 56 – Vista superior (a) e frontal (b) com a disposição dos acelerômetros no amortecedor, bem como a vista (c) com o acelerômetro na base.....	125
Figura 57 - Sistema de aquisição, controle e processamento de dados.	126
Figura 58 – Fluxograma do procedimento experimental empregado.	127
Figura 59 – Algoritmo numérico utilizado na análise não linear do <i>Stockbridge</i>	129
Figura 60 - Vetor deslocamento associado com um nó de tempo.....	131
Figura 61 – Fluxograma do algoritmo que calcula o vetor deslocamento não linear do cabo.	133
Figura 62 - Máquina de came para análise com amplitude controlada.	135
Figura 63 - Dimensões do <i>Stockbridge</i> assimétrico ensaiado por Geron (2010). ...	135
Figura 64 – Desenho esquemático da bancada de ensaios.....	136
Figura 65 - Sistema de deslocamento com amplitude constante e frequência controlada.....	137
Figura 66 - Vista superior da máquina de came.....	138
Figura 67 - Vista lateral da máquina de came.....	138
Figura 68 – Came de disco e seguidor de face plana.	139
Figura 69 - Haste e mola em detalhes.	139
Figura 70 - Acoplamento garra-suporte, denominado de base de deslocamento. ..	139
Figura 71 - Controlador de velocidade E3 mkII da TecQuipment.....	140
Figura 72 - FRFs obtidas no meio do cabo mensageiro com o acelerômetro 5.	141
Figura 73 - FRFs obtidas na extremidade do cabo mensageiro com o acelerômetro 6.	142

Figura 74 - Variações da aceleração com a frequência de excitação, para cada ensaio de came.	143
Figura 75 - Curvas das FRFs obtidas para os sistemas linear e não linear, ajustadas aos dados experimentais.	144
Figura 76 - Curva relativa a variação da rigidez a flexão com o deslocamento da base.	145
Figura 77 - Curva relativa a variação do fator de perda com o deslocamento da base.	146
Figura 78 - FRFs experimentais de ambos os lados do <i>Stockbridges</i> (a).	147
Figura 79 - FRFs experimentais do <i>Stockbridge</i> (b).	148
Figura 80 - Curvas das FRFs do <i>Stockbridge</i> (a) no primeiro modo de vibração.	149
Figura 81 - Curvas das FRFs do <i>Stockbridge</i> (b) no primeiro modo de vibração.	149
Figura 82 – FRFs numéricas ajustadas com base nas FRFs experimentais do ADV (a).	150
Figura 83 - FRFs numéricas ajustadas com base nas FRFs experimentais do ADV (b).	151
Figura 84 – Curvas relativas à variação do fator de perda com a frequência de excitação.	153
Figura 85 – Variação do fator de perda e da rigidez a flexão com a aceleração da base.	153
Figura 86 – Curvas de convergência do PSO para o <i>Stockbridge</i> (a).	154
Figura 87 - Curvas de convergência do PSO para o <i>Stockbridge</i> (b).	154
Figura 88 – FRFs ajustadas para o acelerômetro no ponto médio (a) e na extremidade do cabo (b).	155
Figura 89 – FRFs numéricas ajustadas de acordo com a amplitude de deslocamento da came.	156
Figura 90 - Curva relativa a variação do fator de perda com a frequência de excitação.	158
Figura 91 - Curva relativa a variação do fator de perda com a frequência de excitação.	158
Figura 92 - Curvas de convergência do PSO para os cinco perfis de came.	159
Figura 93 - FRFs ajustadas para o acelerômetro localizado na extremidade do cabo mensageiro.	162
Figura 94 - FRFs ajustadas para o acelerômetro localizado no ponto médio do cabo mensageiro.	162

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Tabela com os dados técnicos do <i>Stockbridge</i> assimétrico.	119
Tabela 2 – Informações técnicas dos acelerômetros utilizados nos ensaios de vibração.....	123
Tabela 3 – Informações técnicas das células piezoelétricas utilizadas nos ensaios de vibração.....	123
Tabela 4 - Parâmetros utilizados no algoritmo numérico do trabalho.....	130
Tabela 5 – Dados técnicos do lado maior do <i>Stockbridge</i> assimétrico de Geron (2010).....	136
Tabela 6 - Parâmetros ajustados do lado maior do <i>Stockbridge</i> assimétrico.	145
Tabela 7 - Frequências naturais do <i>Stockbridge</i> (a), obtidas experimentalmente...	148
Tabela 8 - Frequências naturais do <i>Stockbridge</i> unidade (b), obtidas experimentalmente.....	148
Tabela 9 – Frequências naturais obtidas experimentalmente para os <i>Stockbridges</i> (a) e (b).....	152
Tabela 10 - Parâmetros ajustados de acordo com a amplitude de aceleração da base para o <i>Stockbridge</i> (a).	152
Tabela 11 - Parâmetros ajustados de acordo com a amplitude de aceleração da base para o <i>Stockbridge</i> (b).	152
Tabela 12 - Frequências naturais obtidas experimentalmente para o ADV de Geron (2010).....	155
Tabela 13 - Frequências naturais obtidas numericamente para o ADV de Geron (2010).....	157
Tabela 14 - Parâmetros ajustados e seus respectivos valores para o	157
Tabela 15 – Erro percentual entre as frequências naturais dos <i>Stockbridges</i> unidades (a) e (b).	160

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ADV – Absorvedor Dinâmico de Vibração;
ADVs - Absorvedores Dinâmicos de Vibração;
AG – Algoritmo Genético;
CG – Centro de Gravidade;
cr – Corpo rígido;
ES - *Elastomer Sandwich*;
FO - Função Objetivo;
FRF – Função de Resposta em Frequência;
FRF_{exp} - Função de Resposta em Frequência experimental;
FRF_{num} - Função de Resposta em Frequência numérica;
FRFs – Funções de Resposta em Frequência;
Matlab – Matriz Laboratory;
MEF – Método dos Elementos Finitos;
NC – Non Consevative;
PSO – *Particle Swarm Optimization*;
PUC – Pontifícia Universidade Católica.

LISTA DE SÍMBOLOS

- α : Índice recursivo;
- α_1 : Constante de amortecimento proporcional à massa;
- α_2 : Constante de amortecimento proporcional à rigidez;
- a_b : Amplitude de aceleração da base;
- α' ($\alpha = \Psi, \theta, \phi$): Derivada espacial do ângulo de Euler;
- $\dot{\alpha}$ ($\alpha = u, v, w$): Componente do vetor velocidade;
- $\dot{\alpha}$ ($\alpha = u_n, v_n$): Componente do vetor velocidade no ponto n ;
- $\ddot{\alpha}$ ($\alpha = u, v, w$): Componente do vetor aceleração;
- α' ($\alpha = u, v, w$): Derivada primeira do deslocamento em relação à s ;
- α'' ($\alpha = v, w$): Derivada segunda do deslocamento em relação à s ;
- α''' ($\alpha = v, w$): Derivada terceira do deslocamento em relação à s ;
- α'''' ($\alpha = v, w$): Derivada quarta do deslocamento em relação à s ;
- $\alpha(0, t)$ ($\alpha = u, v, w, \gamma, v', w'$): Condições de contorno no ponto engastado da viga;
- $\alpha(L, t)$ ($\alpha = v'', v''', w'', w''', \gamma'$): Condições de contorno no ponto livre da viga;
- $\alpha_{i/n}$ ($\alpha = x, y, z$): Componentes escalares do vetor $\vec{r}_{i/n}$;
- $[a_{\alpha_{ji}}]$ ($\alpha = 1,2,3$): Matriz não linear de Newmark;
- A : Área da seção transversal da viga;
- $[A_{\alpha_{ji}}]$ ($\alpha = 1,2,3$): Matriz linear de Newmark;
- A_α ($\alpha = u, v, w$): Grupo de termos empregado nas equações de movimento;
- A_{pc} : Área projetada do cilindro perpendicular à direção de v_f ;
- AB : Segmento indeformado do eixo axial da viga;
- A^*B^* : Segmento deformado do eixo axial da viga;
- b_α ($\alpha = 1,2$): Condições de contorno no nó 1 da viga;
- $\{b_n\}$: Vetor com condições de contorno não lineares no último nó da viga;
- $\{b_j^e\}$: Vetor com as condições de contorno do elemento;
- $\{b_j^g\}$: Vetor com as condições de contorno globais;
- β : Constante utilizada na Técnica de Newmark;
- β_α ($\alpha = 1,2$): Parâmetros de ajuste na matriz de rigidez não linear;
- c : Constante de amortecimento viscoso do sistema vibratório;

c_1, c_2 : Parâmetros de confiança;
 c_{a2} : Constante de amortecimento viscoso do ADV;
 c_α ($\alpha = u, v, w$ e ϕ): Coeficiente de amortecimento viscoso;
 c_c : Constante de amortecimento crítico;
 c_{ar} : Coeficiente de arrasto;
 c_{eq} : Constante de amortecimento equivalente;
 c_{heq} : Constante histerética de amortecimento equivalente;
 C : Centróide da seção transversal da viga;
 $[c_{ji}^e]$: Matriz de amortecimento não linear do elemento;
 $[c_{ji}^r]$: Matriz de amortecimento não linear global reduzida;
 $[C]$: Matriz de amortecimento;
 $[C_{ji}^g]$: Matriz de amortecimento não linear global;
 $[Cl_{ji}^r]$: Matriz de amortecimento linear reduzida;
 χ : Coordenada no sistema não inercial ou local;
 (χ, η, ζ) : Sistema de coordenada não inercial ou local;
 d : Índice recursivo;
 d_c : Diâmetro do condutor;
 dm_i : Elemento diferencial de massa do ponto i ;
 ds : Comprimento do segmento indeformado do eixo axial da viga;
 ds^* : Comprimento do segmento deformado do eixo axial da viga;
 $d(\alpha)$ ($\alpha = u, v, w$): Deformação infinitesimal na direção do deslocamento;
 D_χ : Rigidez à torção da viga;
 D_α ($\alpha = \eta, \zeta$): Rigidez à flexão da viga;
 \emptyset : Diâmetro do cabo mensageiro;
 Δt : Intervalo de tempo;
 ΔW : Energia dissipada por ciclo de oscilação;
 Δx_e : Subdivisão do elemento finito;
 $\delta\alpha$ ($\alpha = u, v, w$ e ϕ): Deslocamento virtual;
 $\delta(t)$: Função peso;
 δI : Variação do funcional;
 $\delta \mathcal{L}(t)$: Variação do Lagrangeano;
 $\delta W_{NC}(t)$: Trabalho virtual devido forças não conservativas;

e : Deformação em um ponto;
 ev : Elemento finito de viga;
 \vec{e}_α ($\alpha = x, y, z, \chi, \eta, \zeta, X', Y', Z'$): Vetor unitário ao longo do eixo α ;
 E : Módulo de Young;
 EI : Rigidez a flexão da viga;
 EI_0 : Rigidez a flexão;
 ϵ : Critério de convergência;
 f : Razão entre as frequências naturais do ADV e do cabo condutor;
 f : Frequência de excitação;
 f_1 : Primeira frequência de excitação;
 f_n : Última frequência de excitação;
 f_1 : Função força que leva em conta efeitos não lineares de curvatura da viga;
 f_s : Frequência de formação de vórtices ou frequência de Strouhal;
 $f_b(t)$: Força de excitação da base;
 F : Força de excitação, aplicada ou resultante;
 F_0 : Amplitude de força no cabo condutor;
 F_a : Força de amortecimento;
 F_e : Força de elevação no cabo condutor;
 F_g : Função força associada à gravidade;
 F_{eh} : Função força associada com a excitação harmônica da base;
 F_α : Força generalizada não conservativa;
 FO : Função objetivo;
 FRF_{exp} : Função de resposta em frequência experimental;
 FRF_{num} : Função de resposta em frequência numérica;
 $\{f(t)\}$: Vetor de forças externas;
 $\{f_j^g\}$: Vetor de força global;
 $\{f_j^r\}$: Vetor de força não linear global reduzido;
 $\{f_j\}^h$: h -ésimo vetor de força não linear;
 $\{f_{ms}\}$: Vetor força da massa suspensa devido a aceleração da base \ddot{y}_b ;
 $\{F_j^e\}$: Vetor força de excitação nodal da base;
 $\{F_g^e\}$: Vetor de força gravitacional nodal;
 $\{F_j^g\}$: Vetor de excitação global da base;

$\{F_g^g\}$: Vetor de força gravitacional global;
 $\{F_j^r\}$: Vetor de força linear global reduzido;
 $\{F_j\}^h$: h -ésimo vetor de força linear;
 $\{\mathcal{F}_j\}$: Vetor força não linear discretizado no domínio do tempo;
 $\{\mathcal{F}_j\}$: Vetor força linear discretizado no domínio do tempo;
 \vec{g} : Vetor campo gravitacional terrestre, com módulo $g = 9,8 \text{ m/s}^2$;
 G : Módulo de cisalhamento;
 G_α ($\alpha = u, v, w$): Grupo de termos empregado nas equações de movimento;
 $G(s)$: Função derivada segunda da função de forma $N_i(s)$ em relação à s ;
 γ : Ângulo de torção;
 γ_α ($\alpha = 1,2$): Parâmetro de ajuste da matriz de amortecimento não linear;
 γ_n : Constante utilizada na Técnica de Newmark;
 h : Índice recursivo;
 H_α ($\alpha = u, v, w$): Grupo de termos empregado nas equações de movimento;
 i : Índice recursivo;
 i_c : Número complexo $i = \sqrt{-1}$;
 I : Momento de inércia;
 I_1 : Momento de inércia na extremidade do cabo no lado da massa maior;
 I_2 : Momento de inércia na extremidade do cabo no lado da massa menor;
 I_{1zz} : Momento de inércia no CG da massa maior;
 I_{2zz} : Momento de inércia no CG da massa menor;
 I_f : Funcional do Princípio de Hamilton;
 I_n : Momento polar de inércia em relação à origem O_n ;
 I_{CG} : Momento de inércia no centro de gravidade do corpo rígido;
 j : Partícula;
 j : Índice recursivo;
 $[J]$: Matriz de inércia;
 $[J_\alpha]$ ($\alpha = \chi, \eta, \zeta$): Momento de inércia em relação ao eixo α ;
 k : Rigidez do sistema vibratório;
 k_1 : Rigidez do cabo condutor;
 k_2 : Rigidez do ADV;
 k_n : Ponto nodal;

k_t : Número de tempos nodais;
 $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$: Elementos de rigidez da matriz de rigidez do nó n ;
 $[k_{ji}^e]$: Matriz de rigidez linear do elemento;
 $[kc_{ji}^e]$: Matriz de rigidez não linear do elemento;
 $[k_{ji}^r]$: Matriz de rigidez não linear global reduzida;
 $[K]$: Matriz de rigidez;
 $[K_n]$: Matriz de rigidez do nó n ;
 $[Kc_{ji}^g]$: Matriz de rigidez não linear global;
 $[K_{ji}^g]$: Matriz de rigidez global;
 $[Kl_{ji}^g]$: Matriz de rigidez linear global;
 $[Kl_{ji}^r]$: Matriz de rigidez linear reduzida;
 l : Comprimento do elemento finito de viga;
 L : Comprimento da viga;
 L_1 : Comprimento do cabo mensageiro no lado da massa maior;
 L_2 : Comprimento do cabo mensageiro no lado da massa menor;
 L_G : Comprimento do grampo de fixação do *Stockbridge* assimétrico;
 $\ell(s, t)$: Densidade Lagrangeana associado ao movimento da viga;
 $\mathcal{L}(t)$: Funcional de Lagrange;
 $\lambda(s, t)$: Multiplicador de Lagrange;
 m : Massa da viga por unidade de comprimento;
 m_1 : Massa do cabo condutor;
 m_2 : Massa do ADV;
 m_i : Massa do ponto i ;
 m_{cr} : Massa do corpo rígido;
 m_{s1} : Massa maior do *Stockbridge* assimétrico;
 m_{s2} : Massa menor do *Stockbridge* assimétrico;
 M_I : Momento fletor;
 $[m_{cr}]$: Matriz de massa referente à massa inercial do ADV;
 $[m_{ji}^e]$: Matriz de massa linear do elemento;
 $[M]$: Matriz de massa;
 $[M_{ji}^g]$: Matriz de massa global;
 $[M_{ji}^r]$: Matriz de massa global reduzida;

μ : Razão entre as massas do ADV e do cabo condutor;
 n : Número da Iteração;
 n_e : Número de elementos em cada vetor deslocamento;
 n_n : Número de nós;
 n_q : Número de coordenadas generalizadas ou graus de liberdade;
 η : Coordenada no sistema não inercial ou local;
 η_i : Fator de perda;
 η_p : Fator de perda;
 N : Número de elementos de viga;
 $N_\alpha (\alpha = 1,2,3,4)$: Função de forma para discretização em coordenadas espaciais;
 $N_i(s)$: Função de forma;
 O : Origem do sistema de coordenadas global (x, y, z) ;
 O_n : Origem do sistema de coordenadas local (X', Y', Z') ;
 ω : Frequência angular de excitação;
 ω_1 : Frequência natural do cabo condutor;
 ω_2 : Frequência natural do ADV;
 ω_s : Frequência angular de formação de vórtices;
 $\vec{\omega}(s, t)$: Vetor velocidade angular;
 $\vec{\omega}_{cr}$: Vetor velocidade angular do corpo rígido;
 $\omega_\alpha (\alpha = \chi, \eta, \zeta)$: Componentes do vetor velocidade angular;
 p : Massa específica da viga;
 p^j : Melhor posição encontrada pela partícula j ;
 p_n^s : Melhor posição encontrada entre todas as partículas na iteração n ;
 P : Seção arbitrária e transversal ao eixo axial da viga;
 ϕ : Ângulo de Euler;
 $\phi(s, t)$: Ângulo de torção;
 $\dot{\phi}$: Velocidade angular em relação ao eixo χ ;
 Ψ : Ângulo de Euler;
 $\dot{\Psi}$: Velocidade angular em relação ao eixo z ;
 ψ_h : h -ésima função de forma para discretização no domínio do tempo;
 $q_i(t)$: Deslocamento nodal;
 q_i^h : Vetor deslocamento não linear;
 q_α : Coordenada generalizada do deslocamento;

\dot{q}_α : Coordenada generalizada da velocidade;
 q_1, q_3 : Deslocamento transversal do nó na direção do eixo y ;
 q_2, q_4 : Deslocamento rotatório do nó em torno de um eixo paralelo ao eixo z ;
 Q_α ($\alpha = u, v, w, \phi$): Força generalizada;
 Q_α^* ($\alpha = u, v, w, \phi$): Força generalizada não conservativa;
 $\{q_i\}$: Vetor de deslocamento global;
 $\{q_n\}$: Vetor deslocamento do nó n ;
 $\{q_i\}^h$: h -ésimo vetor de deslocamento não linear;
 $\{Q_i\}$: Vetor de deslocamento global linear;
 $\{Q_i\}^h$: h -ésimo vetor de deslocamento linear;
 r : Frequência de excitação normalizada;
 \vec{r}_i : Vetor posição do ponto i em relação à origem O ;
 \vec{r}_n : Vetor posição do ponto n em relação à origem O ;
 $\vec{r}_{i/n}$: Vetor posição do ponto i em relação à origem O_n no ponto n ;
 $\dot{\vec{r}}_i$: Vetor velocidade do ponto i em relação a O ;
 $\dot{\vec{r}}_n$: Vetor velocidade do ponto n ;
 $\dot{\vec{r}}_{i/n}$: Vetor velocidade linear do ponto i em relação ao ponto n ;
 r_c : Raio da seção circular da viga;
 r_1, r_2 : Frequências naturais normalizadas do cabo condutor;
 r_{n1}, r_{n2} : Números aleatórios do PSO;
 r_A, r_B : Frequências normalizadas da banda de operação do ADV;
 R_x : Valor residual para discretização em coordenadas espaciais;
 R_t : Valor residual para discretização no domínio do tempo;
 Re : Número de Reynolds;
 ρ_c : Massa específica do cabo mensageiro;
 ρ_{ar} : Massa específica do ar;
 ρ_α ($\alpha = \chi, \eta, \zeta$): Componentes do vetor curvatura;
 $\vec{\rho}(s, t)$: Vetor curvatura;
 s : Coordenada ao longo do eixo axial;
 s_{k_n} : Coordenada relacionada com o k -ésimo nó ao longo da viga;
 St : Número de Strouhal;
 t : Tempo;

t_1, t_2 : Pontos fixos quaisquer;

$T(t)$: Energia cinética;

$T_R(t)$: Energia cinética devido à rotação;

$T_T(t)$: Energia cinética devido à translação;

$[T]$: Matriz de transformação;

$[T_\alpha]$ ($\alpha = \Psi, \theta, \phi$): Matriz transformação por meio da rotação do ângulo α ;

θ : Ângulo de Euler;

$\dot{\theta}$: Velocidade angular em relação ao eixo y^* ;

θ_n : Deslocamento rotacional do nó n em torno do eixo Z' ;

$\dot{\theta}_n$: Velocidade angular do nó n em torno do eixo Z' ;

$\ddot{\theta}_n$: Aceleração angular do nó n em torno do eixo Z' ;

u_n : Deslocamento axial do nó n na direção do eixo x ;

\dot{u}_n : Velocidade axial do nó n na direção do eixo x ;

\ddot{u}_n : Aceleração axial do nó n na direção do eixo x ;

$u(s, t)$: Deslocamento axial na direção do eixo x ;

$U(t)$: Energia interna de deformação;

v_f : Velocidade do fluido;

v_v : Velocidade do vento;

v_n : Deslocamento transversal do nó n na direção do eixo y ;

\dot{v}_n : Velocidade transversal do nó n na direção do eixo y ;

\ddot{v}_n : Aceleração transversal do nó n na direção do eixo y ;

$v(s, t)$: Deslocamento transversal na direção do eixo y ;

v_n^j : Velocidade atual da partícula j ;

v_{n+1}^j : Velocidade da partícula j na iteração $n + 1$;

V : Energia potencial;

V_C : Força cortante;

x : Coordenada no sistema inercial ou global;

x^* : Nova posição do eixo x ;

x_1 : Deslocamento do cabo condutor;

x_2 : Deslocamento do ADV;

x_{CG1} : Posição do centro de gravidade da massa inercial maior;

x_{CG2} : Posição do centro de gravidade da massa inercial menor;

x_{st} : Deflexão estática do cabo condutor;

x_n^j : Posição da partícula j na iteração n ;
 x_{n+1}^j : Posição da partícula j na iteração $n + 1$;
 X : Amplitude de deslocamento;
 X' : Coordenada no sistema não inercial ou local;
 X_1 : Amplitude de deslocamento do cabo condutor;
 X_2 : Amplitude de deslocamento do ADV;
 $\{x(t)\}$: Vetor deslocamento;
 \dot{x} : Velocidade;
 \dot{x}_1 : Velocidade do cabo condutor;
 \dot{x}_2 : Velocidade do ADV;
 \ddot{x}_1 : Aceleração do cabo condutor;
 \ddot{x}_2 : Aceleração do ADV;
 $\{\dot{x}(t)\}$: Vetor velocidade;
 $\{\ddot{x}(t)\}$: Vetor aceleração;
 xy : Plano formado pelos eixos x e y ;
 $X'Y'$: Plano formado pelos eixos X e Y ;
 (x, y, z) : Sistema de coordenada inercial ou global;
 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$: Coordenadas do centro de massa em relação à O_n ;
 (X', Y', Z') : Sistema de coordenada não inercial ou local;
 ξ : Fator de amortecimento;
 w_{ip} : Parâmetro referente à inércia da partícula;
 w_n : Deslocamento transversal do nó n na direção do eixo z ;
 $w(s, t)$: Deslocamento transversal na direção do eixo z ;
 W : Energia total do sistema vibratório;
 W_{NC} : Trabalho realizado pelas forças não conservativas;
 y : Coordenada no sistema inercial;
 y^* : Nova posição do eixo y ;
 $y_b(t)$: Deslocamento da base;
 \dot{y}_b : Velocidade da base de excitação;
 \ddot{y}_b : Aceleração da base de excitação na direção do eixo y ;
 Y' : Coordenada no sistema não inercial ou local;
 z : Coordenada no sistema inercial ou global;
 z^{**} : Nova posição do eixo z ;

Z' : Coordenada no sistema não inercial ou local;

ζ : Coordenada no sistema não inercial ou local.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	25
1.1	CONTEXTO	25
1.2	OBJETIVOS	27
1.2.1	Objetivo Geral	27
1.2.2	Objetivos Específicos	27
1.3	JUSTIFICATIVA	28
1.4	CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO	28
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	30
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	33
3.1	VIBRAÇÕES MECÂNICAS: TÓPICOS RELEVANTES	33
3.1.1	Aspectos Gerais	33
3.1.2	Etapas Da Análise De Vibrações	35
3.1.3	Tipos de Não Linearidades	36
3.2	VIBRAÇÕES EM CABOS CONDUTORES	37
3.2.1	Aspectos Gerais	37
3.2.2	Características das Oscilações Eólicas	39
3.3	ABSORVEDORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÃO	43
3.3.1	Aspectos Gerais	43
3.3.2	Funcionamento dos ADVs	45
3.3.3	Mecanismos de Amortecimento	56
3.3.4	Dispositivos Tipo <i>Stockbridge</i>	63
3.4	Ajuste de Modelos Numéricos	70
3.4.1	Aspectos Gerais	70
3.4.2	Fundamentos da Otimização por Enxame de Partículas	70
4	MODELO NUMÉRICO	74
4.1	Aspectos Gerais	74
4.2	Modelo do Cabo Mensageiro	76
4.2.1	Considerações do Modelo	77
4.2.2	Ângulos de Euler	78
4.2.3	Viga Inextensível	81
4.2.4	Equação de Lagrange	82
4.2.5	Princípio de Hamilton	85

4.2.6	Equações de Movimento de Terceira Ordem	90
4.2.7	Equação Resultante do Modelo de Cabo Mensageiro.....	94
4.3	Modelo da Massa Inercial	97
4.3.1	Considerações do Modelo	97
4.3.2	Equações de Movimento.....	98
4.4	Análise Numérica	106
4.4.1	Método dos Resíduos Ponderados de Galerkin	106
4.4.2	Técnica de Newmark	115
5	PROCEDIMENTO METODOLÓGICO	118
5.1	PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL	118
5.1.1	Materiais Utilizados	118
5.1.2	Procedimento de Ensaio.....	126
5.2	Procedimento Numérico	128
5.2.1	Aspectos Gerais	128
5.2.2	Aplicação da Técnica de Newmark	131
5.2.3	Procedimentos Adicionais.....	134
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	147
6.1	Parte I	147
6.1.1	Dados Experimentais	147
6.1.2	Dados Correlacionados	150
6.1.3	Parâmetros Ajustados.....	152
6.2	PARTE II	155
6.2.1	Dados Experimentais	155
6.2.2	Dados Correlacionados	155
6.2.3	Parâmetros Ajustados.....	157
6.3	Discussão dos Resultados	159
7	CONCLUSÕES	166
7.1	Trabalhos Futuros	167
	REFERÊNCIAS	168
	ANEXO A	176

As linhas de transmissão estão constantemente sujeitas à ação de ventos que, por sua vez, induz a ocorrência de vibrações eólicas. De acordo com Labegalini et al. (1992), essas vibrações podem causar danos progressivos e cumulativos devido a fadiga e a abrasão atuantes nos cabos, levando-os à ruptura.

A falha em cabos condutores tem como consequência direta a suspensão na transmissão de energia elétrica o que, por sua vez, aumenta os custos de manutenção, pode resultar em sérios acidentes e gerar prejuízos econômicos e sociais para o país.

Para reduzir as avarias mecânicas causadas pelas vibrações eólicas e assim, aumentar a vida útil dos cabos, torna-se imperativo reduzir as amplitudes de vibrações das linhas a níveis considerados seguros pelas normas (SOUZA JÚNIOR, 2010). Para isso, foram desenvolvidos dispositivos absorvedores, sendo o amortecedor tipo *Stockbridge* um dos mais utilizados (LABEGALINI et al., 1992).

O amortecedor *Stockbridge* (Figura 2) foi desenvolvido em 1925 por George H. Stockbridge. Este dispositivo consiste em duas massas inerciais. Cada massa se encontra fixa na extremidade de um cabo flexível denominado cabo mensageiro, o qual se encontra acoplado a um grampo para fixação no cabo condutor (LABEGALINI et al., 1992).

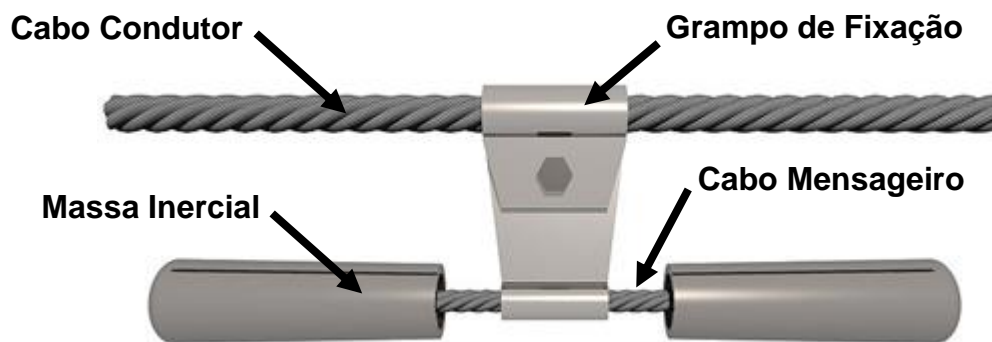


Figura 2 - Amortecedor Stockbridge
Fonte: Melo, 2011 (Modificado).

A função do *Stockbridge* é dissipar energia de vibração, basicamente, por dois mecanismos: pelo amortecimento histerético (devido ao deslizamento interno dos planos cristalinos dos fios que compõem o cabo mensageiro) e pelo amortecimento de Coulomb (devido ao atrito entre os fios do cabo mensageiro) (LABEGALINI et al., 1992).

Dentre as vantagens do *Stockbridge* se destacam as de simples construção, baixo custo e eficiência na redução de vibrações no ponto de fixação e em suas frequências naturais (LABEGALINI et al., 1992). Contudo, para outras frequências, a eficiência desse dispositivo é notavelmente menor (MIRANDA, 2014). Por isso, esse amortecedor é foco de estudos e pesquisas que visam melhorar o seu desempenho frente as necessidades de redução de custos, adequação a diferentes linhas, diminuição das amplitudes de vibração dos cabos, bem como o aumento da vida útil de estruturas, elementos condutores e acessórios das redes de transmissão.

Portanto, o problema das vibrações eólicas em linhas de transmissão ainda é um desafio para a engenharia mecânica, especialmente na área de vibrações, o que motiva o estudo de soluções como o amortecedor *Stockbridge*.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo a validação de um modelo matemático não linear do absorvedor dinâmico de vibração tipo *Stockbridge* assimétrico.

1.2.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos são:

- a) Apresentar um modelo matemático não linear adequado ao modelo físico do amortecedor *Stockbridge* assimétrico;
- b) Avaliar experimentalmente dois amortecedores *Stockbridge* assimétricos de mesmo modelo, mas com configurações físicas distintas;
- c) Estender o estudo com base em dados experimentais de um terceiro *Stockbridge* ensaiado por Geron (2010), bem como através da utilização de curvas de referência desenvolvidas por Barbieri e Barbieri (2012);
- d) Adequar rotinas computacionais para o modelo matemático não linear apresentado;

- e) Modificar o programa de viga não linear, desenvolvido por Velázquez (2007), afim de permitir a análise de vibração do amortecedor e, dessa forma, obter as Funções de Resposta em Frequência (FRFs) numéricas;
- f) Correlacionar as FRFs numéricas às FRFs experimentais, dos três Stockbridges considerados, através da otimização de três parâmetros do modelo matemático: constante de amortecimento proporcional a massa, fator de perda e rigidez a flexão;
- g) Comparar e analisar os três amortecedores a partir das respectivas correlações e parâmetros ajustados.

1.3 JUSTIFICATIVA

As vibrações eólicas provocam danos nos cabos condutores devido a fadiga e a abrasão. Estes danos podem inutilizar os cabos e, conseqüentemente, comprometer a transmissão de energia elétrica. Por isso, foram desenvolvidos absorvedores de vibrações como o *Stockbridge*. Este dispositivo é empregado com o intuito de reduzir as amplitudes de vibrações a níveis seguros, o que permite atenuar os danos nos cabos e, conseqüentemente, aumentar a vida útil dos mesmos.

Portanto, dada a importância do *Stockbridge* para as linhas de transmissão de energia elétrica, justifica-se a necessidade de conhecer o seu comportamento dinâmico por meio do estudo e da validação de modelos, os quais, permitem ajustes de parâmetros do absorvedor.

Este estudo envolve diferentes áreas do conhecimento acadêmico da engenharia mecânica, tais como: mecânica dos sólidos, mecânica dos fluidos, vibração, métodos numéricos e instrumentação. Sendo esse o motivo que despertou o interesse em aplicar e agregar esses diferentes conhecimentos em um tipo específico de aplicação real.

1.4 CONTEÚDO DA DISSERTAÇÃO

Esta dissertação está dividida em 7 capítulos, além das referências e anexo A.

O capítulo 1 contextualiza o presente trabalho, bem como apresenta os objetivos gerais, específicos e as justificativas para a escolha do tema.

No capítulo 2 é descrito um breve relato sobre alguns trabalhos, os quais, estão relacionados com a evolução dos estudos de vibrações em amortecedores tipo *Stockbridge*.

O capítulo 3 contempla a base teórica do trabalho abordando conceitos, aspectos gerais, etapas na análise de vibrações e tipos de não linearidades presentes nas vibrações mecânicas. Além disso, este capítulo discute o problema de vibrações em cabos condutores de energia elétrica e a utilização de dispositivos absorvedores dinâmicos de vibrações. Por fim, são apresentados os conceitos fundamentais sobre o método de otimização PSO (*Particle Swarm Optimization*).

O capítulo 4 apresenta o modelo numérico empregado na análise do dispositivo absorvedor *Stockbridge* assimétrico. A modelagem é composta de duas etapas: uma etapa referente ao cabo mensageiro e a outra relativa à massa inercial do amortecedor. Em seguida, o capítulo aborda a análise numérica utilizada para resolver as equações de movimento não lineares do modelo apresentado.

O capítulo 5 trata dos materiais e métodos empregados para a obtenção dos resultados experimentais e numéricos.

O capítulo 6 apresenta os resultados obtidos e as suas respectivas discussões em duas partes. A primeira é relativa aos dados obtidos nos ensaios. Já a segunda parte trata dos dados experimentais obtidos por Geron (2010), bem como dos resultados alcançados por Barbieri e Barbieri (2012)

No capítulo 7 estão contidas as conclusões do trabalho com sugestões para trabalhos futuros.

Na seção Referências estão indicadas as bibliografias utilizadas ao longo de todo o trabalho.

Finalmente, a seção Anexo A aborda o cálculo dos parâmetros não lineares do modelo numérico.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As estruturas de engenharia, em diversas ocasiões, estão submetidas a esforços de fadiga, decorrentes das vibrações mecânicas. Estas solicitações em excesso podem causar danos que afetam a vida útil da estrutura. Tais vibrações podem ser suprimidas por meio de amortecedores que minimizam ou até mesmo controlam suas amplitudes.

Os primeiros dispositivos de amortecimento apareceram no início do século passado, por Hermann Frahm (BARRY, 2014). Em 1925, George H. Stockbridge inventou o amortecedor tipo *Stockbridge* com a finalidade de eliminar ou reduzir a vibração eólica em cabos condutores (KASAP, 2012).

Tompkins, Merrill e Jones (1956) analisaram o *Stockbridge* simétrico, correlacionando o seu funcionamento com um esquema elétrico equivalente, no qual, o capacitor, indutor e resistor correspondem, respectivamente, ao amortecedor, mola e massa do sistema.

Claren e Diana (1969) investigaram a resposta dinâmica de um dispositivo *Stockbridge* quando submetido a uma excitação harmônica. Os autores modelaram o amortecedor como uma viga engastada com dois graus de liberdade.

Wagner et al. (1973) realizaram uma análise teórica das características de resposta do amortecedor *Stockbridge*, bem como experimentos para validar as previsões teóricas. Os autores constataram que o amortecimento presente no cabo mensageiro é predominantemente histerético.

Arruda (1975) propôs uma metodologia para o ensaio de desempenho do *Stockbridge* em campo e outra em laboratório, obtendo resultados numéricos e experimentais com boa correlação.

Vecchiarelli (1997) testou experimentalmente o amortecedor e observou que a energia dissipada varia muito com a frequência de vibração e amplitude de deslocamento do grampo de fixação. Outra observação importante foi que a energia dissipada pelo amortecedor é significativamente dependente do ponto de fixação no cabo condutor.

López e Venegas (2001) apresentaram um método para determinar a vida útil do *Stockbridge* com base na vibração conhecida. Para isso, os autores estudaram a resposta dinâmica do *Stockbridge* através de ensaios de fadiga e movimento.

Sauter e Hagedorn (2002) formularam equações de movimento para o absorvedor *Stockbridge*, discretizando o cabo mensageiro em equações diferenciais ordinárias não lineares.

Diana et al. (2003a) realizaram testes com o *Stockbridge*, considerando-o acoplado em um cabo ou fixo em um *shaker*. Os ensaios permitiram comparar o comportamento dinâmico do dispositivo em condições distintas de trabalho. Em seguida, Diana et al. (2003b) investiga o efeito dos termos da matriz singular de impedância mecânica na dissipação global de energia.

Krispin, Fuchs e Hagedorn (2007) conduziram um estudo no qual constataram que a redução da massa do grampo de fixação pode melhorar o amortecimento em altas frequências. Além disso, este estudo evidenciou o comportamento não linear do *Stockbridge* em diferentes magnitudes de velocidade.

Canales et al. (2008) otimizaram parâmetros do amortecedor como massa, momento de inércia e comprimento do cabo mensageiro. O objetivo da otimização era determinar parâmetros com base em um custo reduzido e uma atenuação máxima das amplitudes de vibração.

Barry (2010) investigou a resposta de vibração de um condutor associado a um dispositivo *Stockbridge*. Em um primeiro momento, foi constatado a suscetibilidade à fadiga de extensos condutores sem amortecedor. Em seguida, foi analisado os efeitos da presença do absorvedor, constatando-se que o seu posicionamento no condutor reduz significativamente a falha por fadiga.

Barbieri e Barbieri (2012) investigaram o comportamento linear e não linear do amortecedor *Stockbridge*. Foram utilizados resultados oriundos de ensaios conduzidos por Geron (2010) em uma máquina de came, a qual permitia deslocar o *Stockbridge* com amplitudes de deslocamento constantes. Os dados experimentais revelaram que, para amplitudes de deslocamento crescentes, as maiores amplitudes de resposta do amortecedor ocorrem em frequências menores. Além disso, parâmetros dos modelos linear e não linear foram ajustados com base na correlação dos dados numéricos com os experimentais.

Kalombo, Loubser e Moodley (2012) conduziram três tipos de testes de vibração: de fadiga, vibração forçada e livre. Esses testes foram realizados com o *Stockbridge* em um excitador eletrodinâmico. O intuito era de determinar a vida útil remanescente do amortecedor por meio da análise de suas diferentes propriedades mecânicas. Em paralelo, os autores desenvolveram dois modelos: um relacionado

com a previsão de dano e o outro com a estimativa da temperatura do cabo mensageiro.

Foti e Martinelli (2013) modelaram o comportamento histerético do cabo mensageiro. Os parâmetros do modelo foram estimados com testes quase estáticos, gerando resultados condizentes com a literatura avaliada.

Luo, Wang e Zhang (2014) desenvolveram um modelo de elementos finitos não linear e em escala real do amortecedor *Stockbridge*. Esse modelo levou em conta três condições de contato entre os fios do cabo mensageiro: de ligação, sem e com rugosidade. O modelo numérico não linear foi solucionado pelo método da perturbação linear e obteve resultados precisos.

Barry, Zu e Oguamanam (2015) conduziram uma análise dinâmica não linear do amortecedor *Stockbridge*. As simulações numéricas mostraram que a frequência não linear e a amplitude de vibração são, significativamente, afetadas pelas massas inerciais e pela inércia rotacional. Além disso, foi observado que o coeficiente de amortecimento é um importante fator na determinação do alongamento geométrico do cabo mensageiro.

Vaja, Barry e Dejong (2017) examinaram a rigidez à flexão do cabo mensageiro, bem como os seus efeitos sobre as frequências naturais.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 VIBRAÇÕES MECÂNICAS: TÓPICOS RELEVANTES

3.1.1 Aspectos Gerais

A teoria de vibração compreende o estudo de movimentos oscilatórios de objetos em torno de uma posição de equilíbrio, bem como das forças e/ou momentos associados a eles. Esses movimentos são comuns em elementos de máquinas e nas estruturas em geral quando submetidos a ações dinâmicas (SOEIRO, 2008). Por isso, a teoria de vibração é empregada pela engenharia para melhor analisar e controlar as vibrações.

De maneira geral, um sistema vibratório é constituído por três elementos básicos: massa, mola e amortecedor (RAO, 2008). Isto se traduz em um meio (massa) para armazenar energia cinética e energia potencial gravitacional, um meio (mola) para armazenar energia potencial elástica e um meio (amortecedor) para dissipar gradualmente energia sob a forma de calor e/ou som (RAO, 2008).

Dessa forma, a vibração de um sistema envolve um processo de troca de energia mecânica nas formas cinética e potencial, com dissipação de determinada parcela de energia devido ao amortecimento (SOEIRO, 2008).

Através de um sistema de coordenadas referenciais, os elementos massa, mola e amortecedor relacionam forças com deslocamentos, velocidades e acelerações.

Com base neste sistema de coordenadas define-se um número mínimo de coordenadas independentes, denominados de graus de liberdade, os quais são necessários para descrever o movimento (RAO, 2008).

Os sistemas vibratórios podem ser agrupados em discretos e contínuos. Os sistemas discretos contêm um número finito de graus de liberdade, enquanto os sistemas contínuos têm um número infinito de graus de liberdade (RAO, 2008).

As vibrações mecânicas são, usualmente, classificadas quanto ao tipo de:

- a) Excitação: podem ser vibrações livres ou forçadas;
- b) Linearidade: classificadas em vibração linear e não linear;
- c) Previsibilidade de ocorrência: são vibrações determinísticas ou aleatórias;

- d) Amortecimento: são ordenadas em vibrações amortecidas ou não amortecidas.

3.1.1.1 Tipos de Amortecimento

O mecanismo pelo qual a energia de vibração é convertida em calor ou som é conhecido como amortecimento (RAO, 2008).

O amortecimento pode ser considerado de acordo com os seguintes modelos:

- Amortecimento viscoso: consiste do atrito entre um sólido e um fluido interposto entre as peças móveis do sistema (SOEIRO, 2008). A energia dissipada nesse tipo de amortecimento advém de o sistema mecânico vibrar em um meio fluido como ar, gás, água ou óleo (RAO, 2008);
- Amortecimento de Coulomb ou por atrito seco: o amortecimento de Coulomb é resultante do atrito entre superfícies em contato com pouca ou sem lubrificação (RAO, 2008);
- Amortecimento material, sólido ou por histerese: quando um material é deformado, ocorre absorção e dissipação de energia. Esse efeito é devido ao atrito entre os planos internos, os quais, deslizam uns sobre os outros durante a deformação. Se esse material for submetido à vibração, então o diagrama tensão-deformação (Figura 3) mostrará um ciclo de histerese no qual a área deste ciclo corresponde à energia perdida por unidade de volume (RAO, 2008).

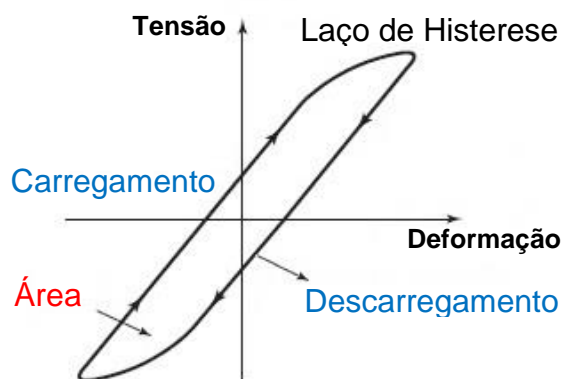


Figura 3 - Ciclo de Histerese.
Fonte: Rao, 2008.

3.1.2 Etapas Da Análise De Vibrações

Em um sistema vibratório há variáveis dinâmicas como as de entrada e as de saída, as quais, podem depender do tempo. Esse sistema, na prática, é complexo do ponto de vista matemático, por isso, essas variáveis são consideradas importantes para prever o comportamento do sistema (RAO, 2008).

De maneira geral, a análise de um sistema vibratório envolve modelagem física, modelagem matemática, solução do modelo matemático e interpretação dos resultados (SOEIRO, 2008).

O propósito da modelagem física é representar, de maneira simplificada, todos os aspectos importantes do sistema tais como inércia, rigidez e amortecimento com o intuito de orientar a determinação das equações que descrevem o comportamento do movimento (SOEIRO, 2008).

A partir do modelo físico são deduzidas as equações diferenciais que constituem o modelo matemático do sistema (SOEIRO, 2008). Estas equações podem ser na forma de equações diferenciais ordinárias para sistemas discretos ou equações diferenciais parciais para sistemas contínuos (RAO, 2008).

Alguns métodos utilizados para determinar as equações do movimento são: 2ª Lei de Newton, o Princípio de D'Alembert, Princípio da Conservação da Energia e as Equações de Lagrange (RAO, 2008).

De acordo com a natureza do problema é possível empregar uma determinada técnica para determinar a solução como: métodos de solução de equações diferenciais, método da Transformada de Laplace, métodos matriciais e métodos numéricos como o Método dos Resíduos Ponderados de Galerkin, Técnica de Newmark e processos iterativos.

A comparação das soluções obtidas teoricamente com dados obtidos a partir da observação experimental permite interpretar os resultados conforme os objetivos do estudo (RAO, 2008). Esta interpretação pode ser facilitada com a simulação numérica computacional, o que permite otimizar o modelo matemático, testá-lo de forma eficiente, alterar os dados de entrada e aumentar o número de graus de liberdade. Além disso, é possível ajustar parâmetros de forma que o erro percentual entre os resultados numéricos e experimentais sejam próximos de zero.

Portanto, se o modelo matemático descreve o movimento com boa aproximação, este pode ser utilizado como referência para o estudo, desenvolvimento e aperfeiçoamento de soluções práticas para o fim a que se destina.

3.1.3 Tipos de Não Linearidades

Durante muito tempo, a análise dinâmica se baseou na teoria linear para compreender as características vibratórias das estruturas projetadas. Entretanto, com a modernização de estruturas, materiais, processos de fabricação, tecnologias e capacidade computacional, tornou-se mais fácil considerar as não linearidades.

Não linearidades podem ocorrer em diversos sistemas dinâmicos, com formas distintas e por várias causas. De acordo com Borges (2008), as não linearidades podem ser causadas pela geometria do sistema, tipo de material, configuração física do problema, bem como pela presença de forças não lineares. Segundo Bathe (1996), o comportamento não linear tem origem:

- a) Cinemática: devido aos deslocamentos, rotações e deformações do sistema;
- b) Constitutiva: quando as deformações ocorrem de maneira inelástica;
- c) Nas condições de contorno: devido ao contato entre materiais que atuam em conjunto.

Nos estudos de vibrações caóticas de Moon (2004), destacam-se as seguintes não linearidades na mecânica estrutural:

- a) Não linearidade de amortecimento: é um exemplo de não linearidade, na qual, é idealizada como linear por meio do amortecimento viscoso;
- b) Não linearidade geométrica: ocorre em sistemas mediante grandes deformações ou deflexões, resultando em relações não lineares de deformação e deslocamento;
- c) Não linearidade de inércia: é resultante de massas concentradas ou distribuídas e derivada de termos não lineares das equações de movimento. A energia cinética do sistema é um exemplo de fonte geradora dessa não linearidade;
- d) Não linearidade de material: presente em sistemas mecânicos que exibem relações não lineares entre tensão e deformação do material.

Conforme Borges (2008), os diferentes tipos de não linearidades afetam as equações de movimento, por meio dos seus termos:

- a) Inerciais;
- b) Dissipativos;
- c) Que descrevem excitações externas;
- d) Que descrevem forças restauradoras elásticas e inelásticas;
- e) Referentes as condições de contorno do sistema.

Adicionalmente, outros tipos de não linearidades incluem sistemas com fluído e sistemas com impacto (BARROS, 2004).

Por fim, as não linearidades podem ser incluídas nas equações do sistema, independentemente, das suas origens. Todavia é muito rara a possibilidade de se deduzir a origem ou razão física da não linearidade a partir de suas representações matemáticas (BARROS, 2004).

3.2 VIBRAÇÕES EM CABOS CONDUTORES

3.2.1 Aspectos Gerais

As linhas de transmissão de energia elétrica estão submetidas a tensões estáticas e dinâmicas. Apesar dos esforços estáticos serem maiores, os esforços dinâmicos podem gerar grandes prejuízos às linhas devido a sua ação alternante (LABEGALINI et al., 1992).

O esforço dinâmico mais comum, natural e atuante sobre as linhas de transmissão é o vento. Sua ação direta e com intensidade variável incita oscilações dos condutores, os quais, podem desenvolver níveis críticos de amplitudes.

Segundo Labegalini et al. (1992), as oscilações em cabos podem ser classificadas em três categorias:

- a) Vibrações eólicas: São geradas por vórtices de ventos fracos a moderados, com frequências de 3 a 120 Hz, cujas amplitudes não excedem o diâmetro do condutor. (CIGRE, 1989). A Figura 4 ilustra a formação dessas vibrações.

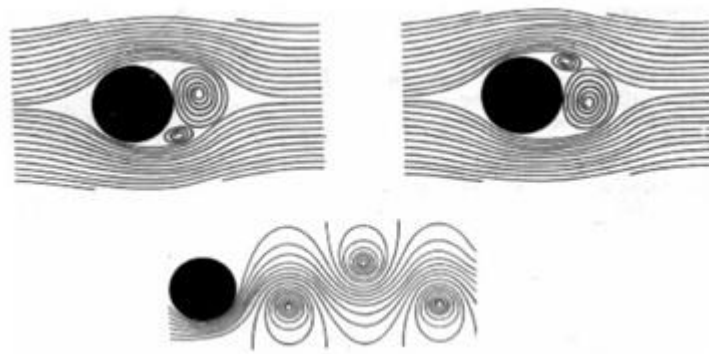


Figura 4 - Vibrações eólicas ocasionadas por vórtices.
Fonte: Henriques, 2006.

- b) Vibrações do tipo galope: O acúmulo de gelo na superfície do condutor (Figura 5) induz, pela passagem de ventos moderados à fortes, o surgimento de oscilações de baixa frequência e de grande amplitude (LABEGALINI et al., 1992).



Figura 5 - Cabos elétricos com gelo acumulado.
Fonte: BBC News, 2011.

- c) Vibrações de rotação: São oscilações provocadas por ventos de alta velocidade como furacões e tufões. Esses ventos provocam curtos-circuitos entre as fases da linha e esforços mecânicos das linhas de transmissão de energia elétrica (LABEGALINI et al., 1992).

No Brasil, as oscilações do tipo galope e de rotação ainda não foram observadas. Por outro lado, a vibração eólica ocorre com maior frequência o que justifica o emprego de sistemas preventivos (LABEGALINI et al., 1992).

3.2.2 Características das Oscilações Eólicas

A passagem do vento pelos cabos condutores promove a formação e alternância de vórtices que, por sua vez, induzem o surgimento de vibrações eólicas (LABEGALINI et al., 1992).

Em determinadas condições, forma-se um padrão de redemoinhos alternados na direção descendente da corrente, como mostra a Figura 6. Esses redemoinhos são denominados vórtices de Karman, em honra ao mecânico de fluidos Theodor Von Karman, que foi o primeiro a prever o espaçamento estável dos vórtices, em 1911 (RAO, 2008).



Figura 6 - Vórtices de Karman.
Fonte: Silva Júnior, 2011.

A frequência de formação de vórtices de Karman pode ser obtida pela seguinte equação (CIGRE, 1989):

$$f_s = \frac{St v_v}{d_c} \quad (1)$$

sendo:

f_s : Frequência de formação de vórtices ou frequência de Strouhal;

St : Número de Strouhal;

v_v : Velocidade do vento;

d_c : Diâmetro do condutor.

O número de Strouhal é um parâmetro adimensional e está relacionado com o tipo de fluxo do fluido por meio do Número de Reynolds (Re), como ilustra a Figura 7.

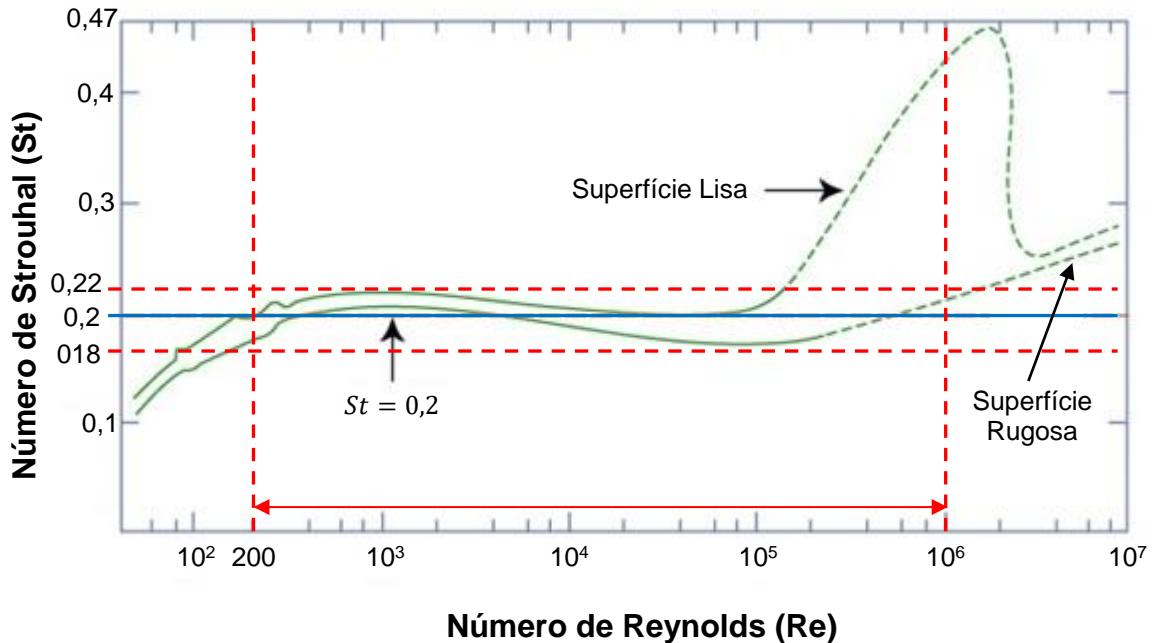


Figura 7 - Número de Strouhal versus Número de Reynolds para cilindros como, por exemplo, o cabo. Fonte: Lienhard, 1969 (Modificado).

De acordo com Cigre (1989), a faixa de valores considerada para o número de Strouhal é de 0,18 a 0,22. De fato, como mostra a Figura 7, a condição na qual envolve a maior parte dos regimes de escoamentos, desde laminares à turbulentos ($200 \leq Re \leq 10^6$), seja para superfície lisa ou rugosa, ocorre quando o número de Strouhal se encontra na faixa de 0,18 a 0,22.

Segundo Labegalini et al. (1992), a maior frequência de formação de vórtices em linhas de transmissão ocorre para $St = 0,2$. Já Souza Júnior (2010) afirma que, normalmente, usa-se $St = 0,19$. Lilien (2013) considerou em seus estudos $St = 0,185$ para cabos de alta tensão.

A frequência de formação de vórtices define uma frequência angular de formação de vórtices (ω_s) que, por sua vez, promove o surgimento de forças de elevação sobre o cabo (RAO, 2008), dada por:

$$F_e(t) = \frac{1}{2} c_{ar} \rho_{ar} v_f^2 A_{pc} \text{sen}(\omega_s t) \quad (2)$$

sendo:

F_e : Força de elevação do cabo condutor;

c_{ar} : Coeficiente de arrasto, no qual, $c_{ar} = 1$ para cilindro (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2004);

ρ_{ar} : Massa específica do ar;

v_f : Velocidade do fluido;

A_{pc} : Área projetada do cilindro perpendicular à direção da v_f ;

ω_s : Frequência angular de formação de vórtices;

t : Tempo.

Segundo Rao (2008), do ponto de vista de projeto de um cabo condutor, deve-se garantir que a frequência de formação de vórtices, ou seja, a frequência de excitação não coincida com a frequência natural dos cabos condutores. Se isso ocorrer, dá-se início ao fenômeno chamado de ressonância, o qual é caracterizado por oscilações de grandes amplitudes. Essas vibrações indesejadas, atuantes por longos períodos, contribuem para o desenvolvimento de danos por fadiga a flexão e por abrasão nos fios dos condutores (LABEGALINI et al., 1992), como ilustra a Figura 8.

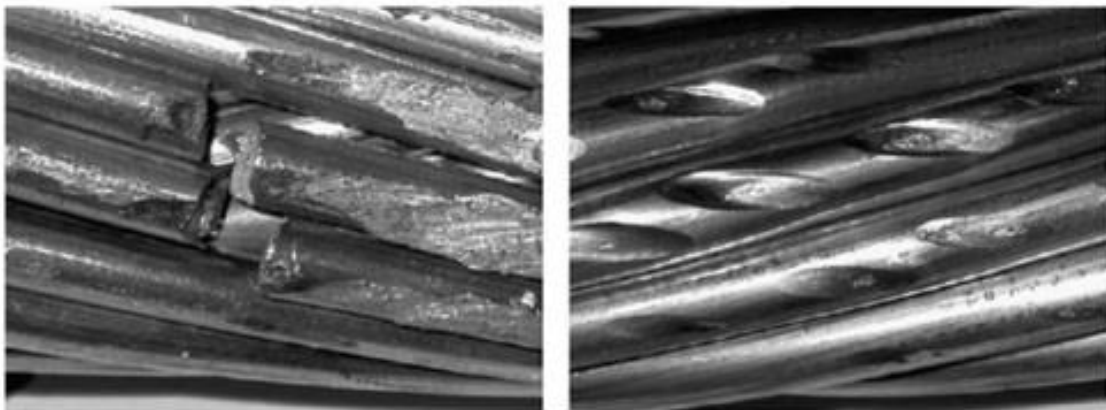


Figura 8 - Danos nos fios que compõem o cabo condutor.
Fonte: Bellorio, 2009.

De acordo com Labegalini et al. (1992), os danos nos cabos são permanentes, progressivos e podem levar à ruptura dos fios que compõem o cabo, como mostra a Figura 9.

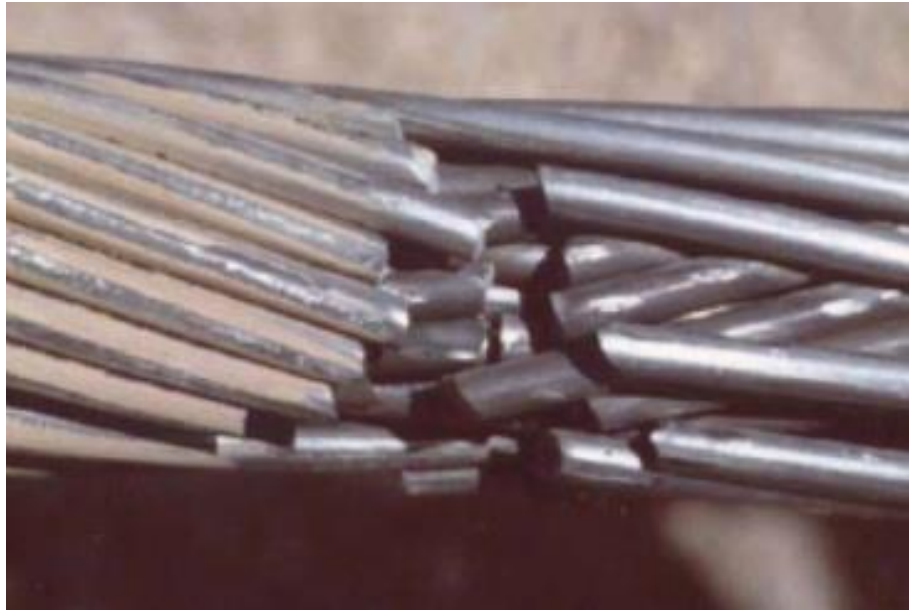


Figura 9 – Fios rompidos de um cabo condutor.
Fonte: Henriques, 2006.

As rupturas dos cabos condutores se localizam nos pontos de fixação dos mesmos. A Figura 10 exemplifica a localização destes pontos.

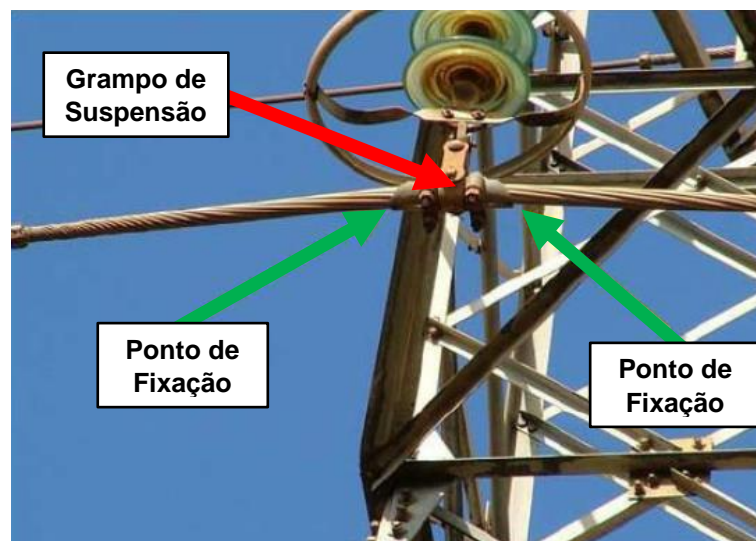


Figura 10 - Pontos de fixação de um cabo condutor.
Fonte: Henriques, 2006 (Modificado).

A Figura 11 ilustra, em um ponto de fixação, as superfícies de contato entre os fios da malha do cabo (índices 1, 2 e 4) e a superfície de contato do fio com o grampo de suspensão (índice 3). Nestes pontos de fixação, formam-se pontos fixos de flexão que, associados às forças de atrito nas superfícies de contato, causam a abrasão. O resultado são danos cumulativos, os quais, devido à fadiga por flexão e por abrasão

geram trincas. As trincas, por sua vez, propagam-se nas superfícies de contato, levando à ruptura dos fios e, conseqüentemente, do condutor (HENRIQUES, 2006).

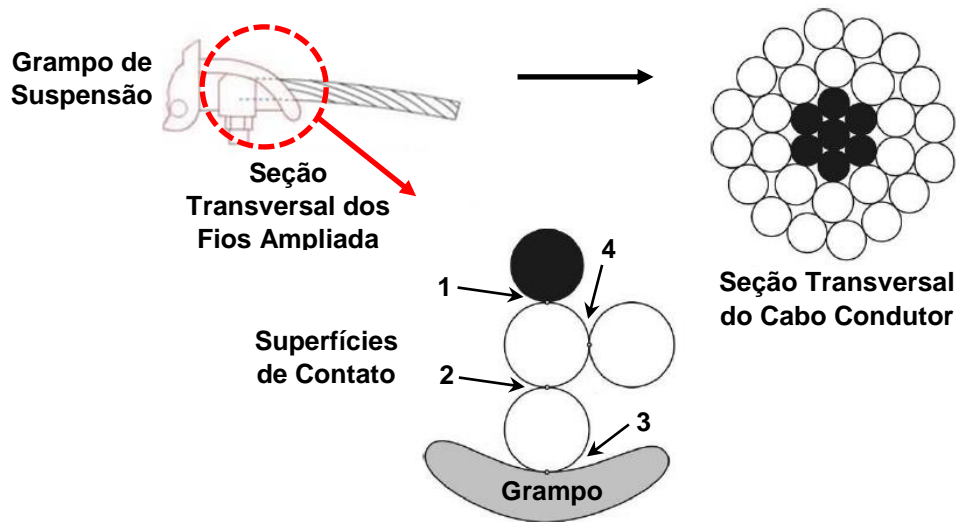


Figura 11 - Ponto de ancoragem do cabo condutor e suas superfícies de contato.
Fonte: O Autor.

Portanto, para minimizar os efeitos danosos das vibrações eólicas nos cabos condutores e, conseqüentemente, aumentar a vida útil dos mesmos, pode-se empregar dispositivos absorvedores dinâmicos de vibrações (LABEGALINI et al., 1992). Esses dispositivos são fixados nos cabos condutores, próximos dos pontos de fixação.

A diminuição das vibrações, além de reduzir os níveis de esforços dinâmicos nos condutores, também proporciona a redução de energia transmitida para a estrutura, acessórios e em vãos adjacentes (LABEGALINI et al., 1992).

3.3 ABSORVEDORES DINÂMICOS DE VIBRAÇÃO

3.3.1 Aspectos Gerais

Sistemas mecânicos estão frequentemente sujeitos a vibrações mecânicas indesejáveis, as quais, podem prejudicar o funcionamento, bem como gerar

incômodos aos usuários. Como consequência, torna-se necessário reduzir os níveis de vibração estrutural afim de garantir condições aceitáveis de segurança e operação.

De acordo com Silva (2005), as principais técnicas utilizadas na atenuação dos níveis de vibração, em sistemas mecânicos, são:

- a) Atenuar a força de excitação por meio da redução de amplitude e/ou frequência;
- b) Variar os parâmetros dinâmicos da estrutura como, por exemplo, massa, rigidez e amortecimento;
- c) Adicionar, ao sistema mecânico principal, sistemas mecânicos secundários denominados de absorvedores dinâmicos de vibração (ADVs).

Ainda segundo Silva (2005), atenuar a excitação é pouco prático e, muitas vezes, impossível. Em parte, modificar a estrutura primária é factível, desde que a sua densidade modal e esforços sejam pequenos. Contudo, alterar a estrutura pode não ser válido e eficaz pois pode comprometer o funcionamento do sistema em face da alteração da função para a qual foi concebida. Desse modo, a opção mais atraente para reduzir as amplitudes de vibração é o emprego de ADVs.

Inventado pelo engenheiro alemão Hermann Frahm, em 1911, os ADVs são soluções de ótimo custo-benefício, foco de inúmeros estudos por engenheiros e pesquisadores. Em função dessas pesquisas, os ADVs podem ser classificados em quatro grupos: passivos, adaptativos ou semiativos, ativos e os passivos multimodais. Entretanto, todos esses dispositivos são sistemas mecânicos secundários que, quando acoplados a uma estrutura mecânica primária, tem o objetivo de reduzir as vibrações em uma banda de frequência.

Segundo Cunha Júnior (1999), os ADVs reduzem as oscilações no sistema primário por meio da absorção de energia vibratória no ponto de conexão. (CUNHA JÚNIOR, 1999). Para isso, os ADVs são projetados, através dos seus parâmetros físicos de massa, rigidez e amortecimento, de modo que as frequências naturais do sistema resultante permaneçam distante da frequência de excitação (RAO, 2008).

Os ADVs empregados em cabos condutores de alta tensão, para a supressão das vibrações eólicas, são do tipo passivos. Como exemplo, pode-se citar os dispositivos tipo Bretelle, festão, de impacto, braço oscilante, Bouche, torcional, Helgra, linear e *Stockbridge* (LABEGALINI et al., 1992), como ilustra a Figura 12.

Os amortecedores da Figura 12 são posicionados próximos dos pontos de fixação (Figura 10) dos cabos condutores, ou seja, próximo dos pontos em que acontecem os danos provocados pelas vibrações eólicas (LABEGALINI et al., 1992).

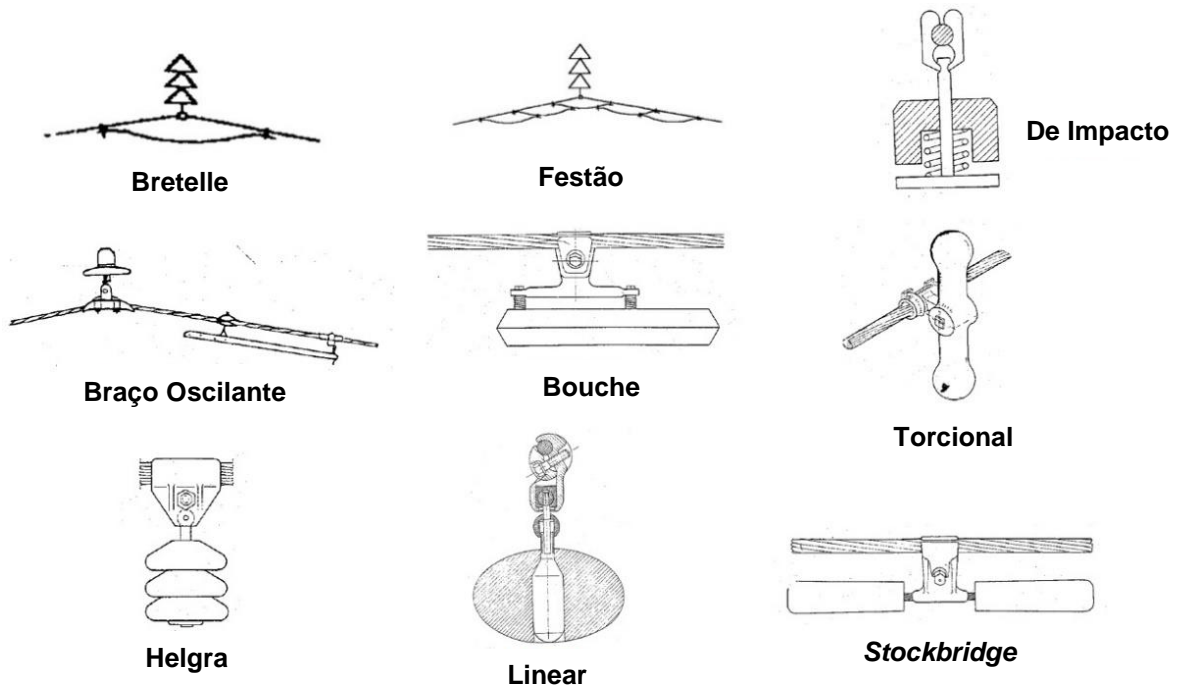


Figura 12 - Tipos de amortecedores de vibração para cabos de alta tensão.
Fonte: Labegalini et al., 1992 (Modificado).

3.3.2 Funcionamento dos ADVs

Um absorvedor dinâmico de vibrações (ADV) possui parâmetros concentrados de massa, rigidez e amortecimento, constituindo um sistema mecânico secundário. Este sistema, quando conectado a um sistema mecânico primário como, por exemplo, um cabo condutor, é capaz de absorver a energia de vibração no ponto de conexão e promover uma redução dos níveis de amplitude do sistema primário (OLIVEIRA, 2011).

Para melhor compreensão será detalhada a teoria que explica o funcionamento dos absorvedores dinâmicos de vibração sem e com amortecimento viscoso.

3.3.2.1 ADV Sem Amortecimento

Considere um sistema primário de massa-mola (m_1, k_1), indicado na Figura 13, como sendo um cabo condutor.

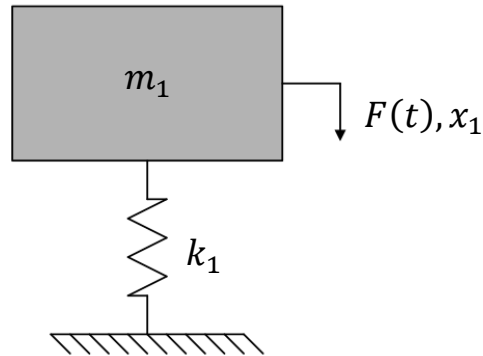


Figura 13 - Sistema massa-mola primário.
Fonte: O Autor.

Este sistema, de um grau de liberdade e sem amortecimento, é submetido a uma excitação harmônica de frequência angular ω e amplitude de força F_0 , cujo deslocamento resultante é dado por x_1 . A força harmônica, aplicada ao cabo condutor, pode ser definida pela seguinte expressão:

$$F(t) = F_0 \text{sen}(\omega t) \quad (3)$$

A equação dinâmica do sistema representado na Figura 13 é dada por:

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 = F_0 \text{sen}(\omega t) \quad (4)$$

Uma possível solução harmônica para a equação (4) é assumida como:

$$x_1(t) = X_1 \text{sen}(\omega t) \quad (5)$$

A equação (5) e sua respectiva derivada quando substituídas na equação (4) permite obter a FRF (Função de Resposta em Frequência) do cabo:

$$\frac{X_1}{F_0} = \frac{1}{k_1 - m_1 \omega^2} \quad (6)$$

O valor absoluto da equação (6) representa a amplitude de vibração por unidade de força do cabo condutor. Essa equação pode, ainda, ser expressa em termos de parâmetros adimensionais, na forma:

$$\frac{X_1}{x_{st}}(\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \quad (7)$$

sendo:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} \quad : \text{ Frequência natural do cabo condutor;}$$

$$x_{st} = \frac{F_0}{k_1} \quad : \text{ Deflexão estática do cabo condutor.}$$

Observa-se, através da equação (7) e da Figura 14, que quando a frequência de excitação atinge a frequência natural do condutor ($\omega = \omega_1$), a amplitude tende ao infinito. Essa ocorrência é característica do fenômeno da ressonância.

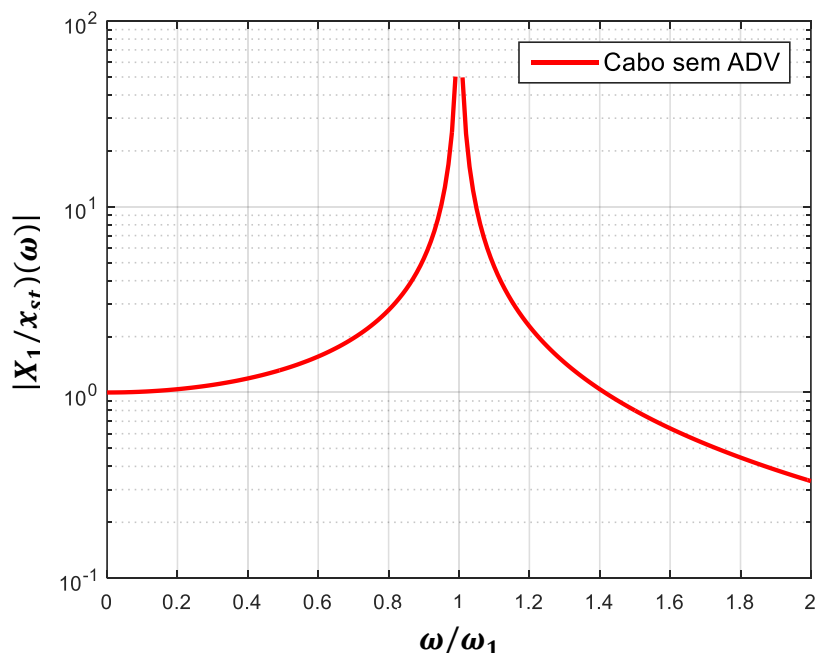


Figura 14 - Amplitude do cabo sem amortecedor, com $k_1 = 10 \text{ N/m}$ e $m_1 = 10 \text{ kg}$.
Fonte: O Autor.

Portanto, em um estado de ressonância, o cabo se encontra na condição mais crítica de esforço mecânico. Para atenuar essas oscilações, acopla-se ao cabo um sistema massa-mola (m_2, k_2) secundário, de um grau de liberdade, como ilustra a Figura 15.

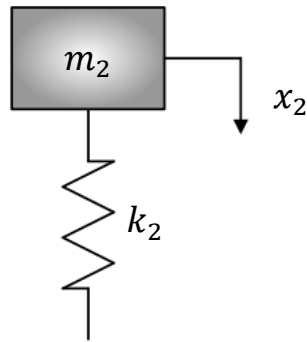


Figura 15 - Sistema massa-mola secundário.
Fonte: O Autor.

O sistema secundário da Figura 15 nada mais é que um absorvedor dinâmico de vibrações não amortecido, o qual, absorve energia de vibração do sistema primário e exerce nele uma força em fase oposta, reduzindo as vibrações (OLIVEIRA, 2011).

A composição dos sistemas cabo condutor e ADV resulta em um sistema com dois graus de liberdade, como ilustra a Figura 16.

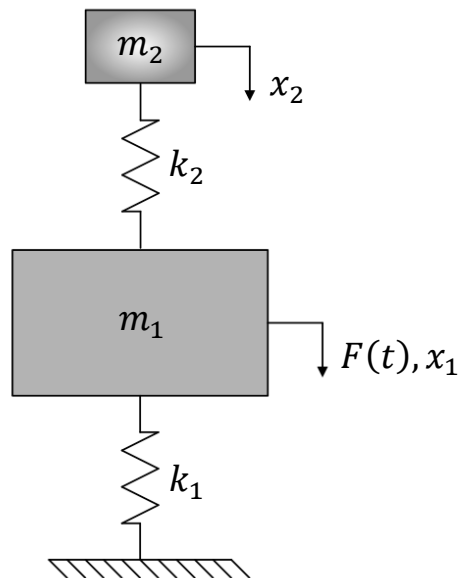


Figura 16 - Sistemas primário e secundário acoplados.
Fonte: O Autor.

As equações dinâmicas que representam o sistema resultante da Figura 16 são:

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = F_0\text{sen}(\omega t) \quad (8)$$

$$m_2\ddot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = 0 \quad (9)$$

As possíveis soluções harmônicas das equações (8) e (9) adotadas são:

$$x_1(t) = X_1\text{sen}(\omega t) \quad (10)$$

$$x_2(t) = X_2\text{sen}(\omega t) \quad (11)$$

As equações (10), (11) e suas respectivas derivadas quando substituídas nas equações (8) e (9) geram as seguintes FRFs do cabo e do ADV:

$$\frac{X_1}{F_0}(\omega) = \frac{(k_2 - m_2\omega^2)}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \quad (12)$$

$$\frac{X_2}{F_0}(\omega) = \frac{k_2}{(k_1 + k_2 - m_1\omega^2)(k_2 - m_2\omega^2) - k_2^2} \quad (13)$$

sendo:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad : \text{Frequência natural do sistema secundário.}$$

Os valores absolutos das equações (12) e (13) constituem, respectivamente, as amplitudes de vibração por unidade de força do cabo e do ADV.

Para reduzir a elevada amplitude de ressonância do cabo, ilustrado na Figura 14, a frequência natural do ADV é sintonizada na mesma frequência natural do condutor. Assim, a frequência de excitação estimula, ao mesmo tempo, o modo de vibrar dos sistemas primário e secundário. Esses modos, por sua vez, combinam-se e, como consequência da defasagem de deslocamento entre as massas m_1 e m_2 , tem-se uma redução nas amplitudes de vibração.

A atenuação das vibrações pode ser constatada na FRF do cabo (equação (12)). Como $\omega = \omega_1 = \omega_2$, verifica-se que ao substituir $\omega = \sqrt{k_2/m_2}$ na equação (12), a amplitude de resposta X_1 do cabo é nula.

O processo de sintonização do ADV ocorre através da manipulação proposital dos seus parâmetros físicos de massa e rigidez, no qual, é válida a seguinte relação:

$$\omega = \omega_1 = \omega_2 \Rightarrow \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} \quad (14)$$

As equações (12) e (13) podem ser analisadas graficamente. Para isso, convém expressar essas equações por meio de parâmetros adimensionais:

$$\frac{X_1}{x_{st}} = \frac{(f^2 - r^2)}{(r^2 - f^2)(r^2 - 1) - r^2\mu} \quad (15)$$

$$\frac{X_2}{x_{st}} = \frac{f^2}{(r^2 - f^2)(r^2 - 1) - r^2\mu} \quad (16)$$

sendo:

$f = \frac{\omega_2}{\omega_1}$: Razão entre as frequências naturais do ADV e do cabo condutor;

$r = \frac{\omega}{\omega_1}$: Frequência de excitação normalizada;

$\mu = \frac{m_2}{m_1}$: Razão entre as massas do ADV e do cabo condutor.

A Figura 17 ilustra como variam as amplitudes de vibração do condutor sozinho e com a adição de um amortecedor passivo sintonizado na frequência natural do sistema primário. A curva do cabo sem ADV é obtida a partir da equação (7), enquanto que a curva com ADV é oriunda da equação (15).

Constata-se na Figura 17 que, ao acoplar o ADV ao cabo, a amplitude de ressonância é anulada, surgindo picos (pontos 1 e 2), os quais, correspondem às duas frequências naturais do sistema de dois graus de liberdade. De acordo com Rao (2008), a frequência de excitação do sistema deve ser mantida longe dessas frequências naturais, cujos valores podem ser encontrados ao igualar a zero o denominador da equação (15) ou (16):

$$(r^2 - f^2)(r^2 - 1) - r^2\mu = 0 \quad (17)$$

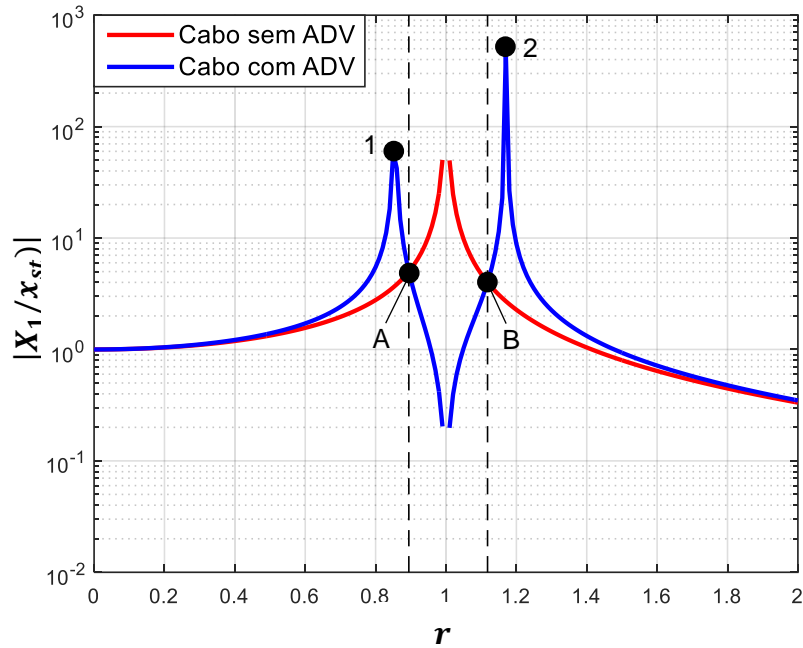


Figura 17 - Amplitudes do cabo e do ADV em relação a variação das frequências de excitação, com $f = 1$ e $\mu = 0,1$.
Fonte: O Autor.

Particularizando a equação (17) para a condição em que o ADV está sintonizado à frequência natural do cabo ($f = 1$), tem-se que:

$$r_{1,2}^2 = \frac{2 + \mu \pm \sqrt{\mu^2 + 4\mu}}{2} \quad (18)$$

O cabo condutor com ADV passivo, quando comparado com a situação sem ADV, experimenta uma redução significativa de vibração no intervalo delimitado pelas linhas pontilhadas que passam pelos pontos A e B da Figura 17 (MARQUES, 2009). As abscissas r_A e r_B dessas linhas pontilhadas podem ser encontradas igualando-se as equações (7) e (15):

$$r_{A,B}^2 = \frac{(2 + 2f^2 + \mu) \pm \sqrt{(2 + 2f^2 + \mu)^2 - 16f^2}}{4} \quad (19)$$

Particularizando a equação (19) para $f = 1$, tem-se que:

$$r_{A,B}^2 = \frac{(4 + \mu) \pm \sqrt{(4 + \mu)^2 - 16}}{4} \quad (20)$$

A Figura 18 ilustra graficamente as equações (18) e (20). Nessa figura, tem-se que para um determinado μ , obtêm-se duas frequências naturais e a banda operacional da frequência de excitação. Por exemplo, com $\mu = 1$, os pontos 1 e 2 são as frequências naturais e as ordenadas entre os pontos A e B correspondem à banda de operação da frequência de excitação.

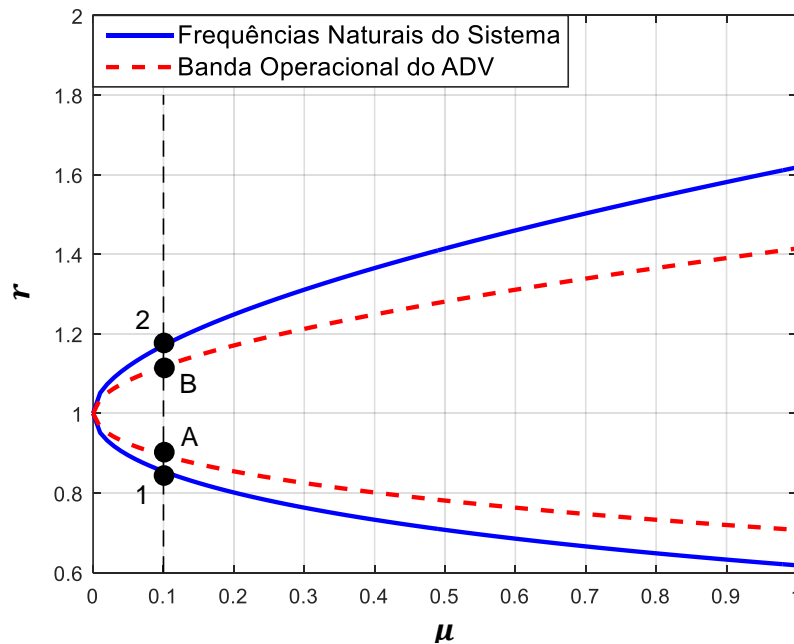


Figura 18 - Frequências naturais e banda de operação do sistema em função da razão das massas.
Fonte: O Autor.

Segundo Marques (2009), a situação em que $f = g = 1$ permite simplificar a equação (16) para a seguinte expressão:

$$X_2 = \frac{x_{st}}{\mu} \quad (21)$$

A equação (21) pressupõe que a diminuição da razão de massas (μ) aumenta as amplitudes de vibração do ADV o que, por sua vez, pode promover a diminuição das amplitudes do cabo. Entretanto, a Figura 18 mostra que a diminuição de μ acarreta um estreitamento da banda operacional, tornando o ADV pouco eficiente. Portanto, com o intuito de ampliar a banda de operação do ADV, considera-se mais um parâmetro físico: o amortecimento (MARQUES, 2009).

O modelo de ADV com amortecimento é abordado na próxima seção.

3.3.2.2 ADV Com Amortecimento

O absorvedor dinâmico amortecido atua de forma semelhante ao não amortecido. No entanto, a energia absorvida é dissipada por mecanismos de amortecimento como, por exemplo, o viscoso. Este tipo de amortecimento promove uma maior redução das amplitudes, especialmente, nas condições de ressonância (OLIVEIRA, 2011).

O absorvedor descrito na seção anterior elimina o pico de ressonância original, mas introduz dois novos picos. Dessa forma, o cabo fica submetido a grandes amplitudes quando a frequência de excitação varia através destes picos. Estas amplitudes podem ser reduzidas se for considerado o amortecimento no sistema secundário (RAO, 2008).

Considere o mesmo sistema primário de massa-mola (m_1, k_1), indicado na Figura 13, como sendo um cabo condutor. Este sistema de um grau de liberdade e sem amortecimento é submetido a mesma excitação harmônica de frequência ω e amplitude F_1 , definida pela equação (3).

Para reduzir as amplitudes de vibrações do cabo, conecta-se um sistema massa-mola-amortecedor (m_2, k_2, c_{a2}) secundário de um grau de liberdade, o qual, representa um absorvedor dinâmico de vibrações com amortecimento viscoso.

A Figura 19 apresenta o sistema com dois graus de liberdade, resultante da composição do cabo com ADV.

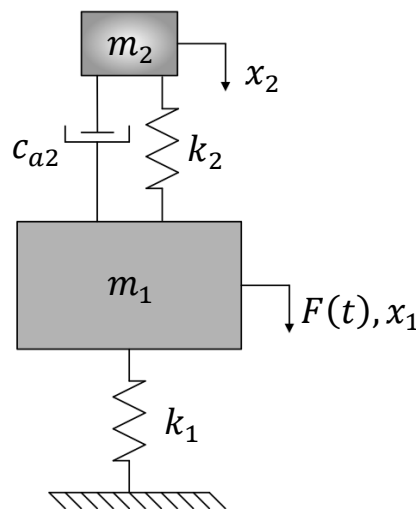


Figura 19 – Sistema cabo condutor e ADV com amortecimento.
Fonte: O Autor.

As equações dinâmicas que representam o sistema resultante da Figura 18 são:

$$m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 + c_{a2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) = F_0 \text{sen}(\omega t) \quad (22)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) + c_{a2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) = 0 \quad (23)$$

Supondo uma solução harmônica (RAO, 2008):

$$x_1(t) = X_1 e^{i\omega t} \quad (24)$$

$$x_2(t) = X_2 e^{i\omega t} \quad (25)$$

Substituindo as equações (24), (25) e suas respectivas derivadas nas equações (22) e (23), obtêm-se as amplitudes X_1 e X_2 das massas m_1 e m_2 , respectivamente:

$$X_1 = \frac{(k_2 - m_2 \omega^2 + i c_{a2} \omega) F_0}{[(k_1 - \omega^2 m_1)(k_2 - m_2 \omega^2) - m_2 k_2 \omega^2] + i \omega c_{a2} (k_1 - \omega^2 m_1 - m_2 \omega^2)} \quad (26)$$

$$X_2 = \frac{X_1 (k_2 + i \omega c_{a2})}{k_2 - \omega^2 m_2 + i \omega c_{a2}} \quad (27)$$

As equações (26) e (27) podem ser expressas por meio de parâmetros adimensionais (RAO, 2008):

$$\frac{X_1}{x_{st}} = \left[\frac{(2\xi r)^2 + (r^2 - f^2)^2}{(2\xi r)^2 (r^2 - 1 + \mu r^2)^2 + [\mu f^2 r^2 - (r^2 - 1)(r^2 - f^2)]^2} \right]^{1/2} \quad (28)$$

$$\frac{X_2}{x_{st}} = \left[\frac{(2\xi r)^2 + (f^2)^4}{(2\xi r)^2 (r^2 - 1 + \mu r^2)^2 + [\mu f^2 r^2 - (r^2 - 1)(r^2 - f^2)]^2} \right]^{1/2} \quad (29)$$

sendo:

$$\xi = \frac{c_{a2}}{c_c} \quad : \text{Fator de amortecimento};$$

$$c_c = 2m_2 \omega_1 \quad : \text{Constante de amortecimento crítico.}$$

Segundo Marques (2009), a sintonização f influencia a amplitude e a posição dos picos de ressonância. A Figura 20, obtida a partir da equação (28), mostra que com o aumento de f , as amplitudes do primeiro pico aumentam e as do segundo pico diminuem.

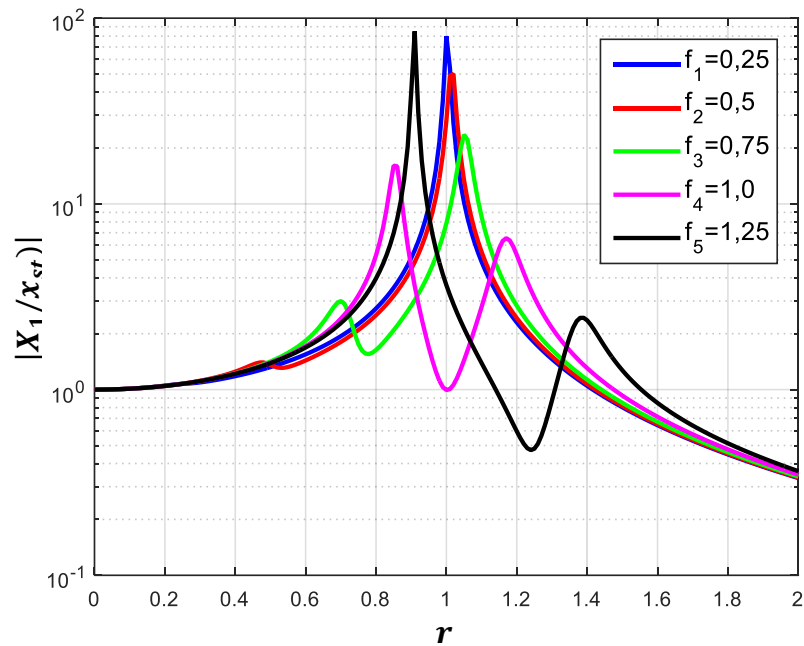


Figura 20 – Influências de f sobre as amplitudes de vibração do cabo com ADV amortecido, $\mu = 0,1$ e $\xi = 0,05$.

Fonte: Marques, 2009 (Modificado).

Adicionalmente, as amplitudes de vibração do cabo condutor também sofrem influência com a variação do fator de amortecimento ξ , como ilustram as FRFs da Figura 21, também obtidas a partir da equação (28).

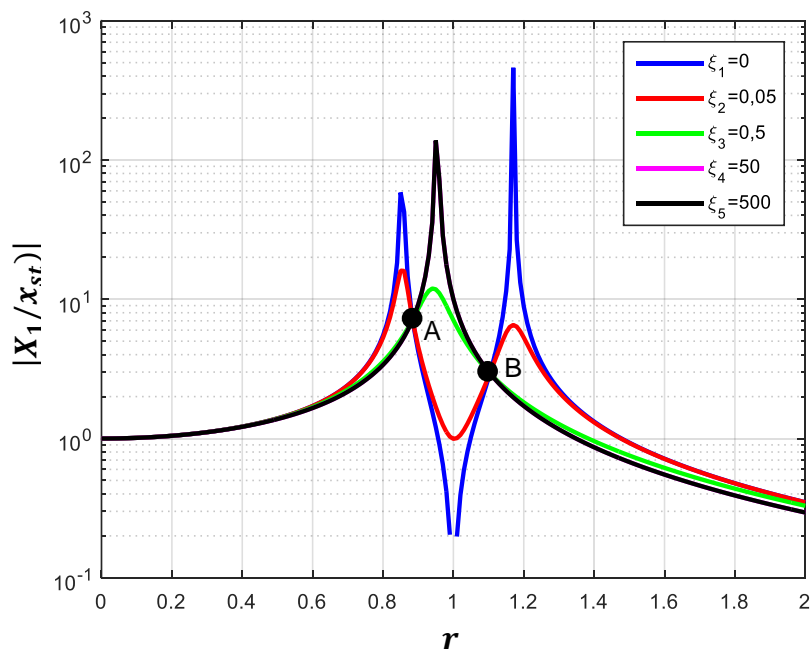


Figura 21 – Influências de ξ sobre as amplitudes de vibração do cabo com ADV amortecido, $\mu = 0,1$ e $f = 1$.

Fonte: Marques, 2009 (Modificado).

Observa-se na Figura 21 a existência de dois pontos invariantes A e B, nos quais, as amplitudes de resposta sempre passam, independentemente do fator de amortecimento (HARTOG, 1972). O comportamento da FRF entre esses pontos é determinado pelo fator de amortecimento. Por exemplo, se o amortecimento for zero ($\xi = 0$), a ressonância ocorre nas duas frequências de ressonância não amortecidas do sistema. Quando o amortecimento é elevado ($\xi = 500$), as duas massas m_1 e m_2 ficam virtualmente presas uma à outra e o sistema se comporta como se tivesse um grau de liberdade. Enquanto que valores intermediários de ξ produzem amplitudes que podem corresponder a sistemas de um ou dois graus de liberdade.

Portanto, como as Figuras 20 e 21 evidenciam, os parâmetros f e ξ influenciam nas amplitudes de resposta do cabo. Assim, estes parâmetros podem ser determinados com o intuito de reduzir as amplitudes de vibração do condutor em uma banda de operação mais eficiente em torno da sua frequência natural (MARQUES, 2009).

Hartog (1972) propôs em seus estudos a otimização de ADVs passivos por meio da determinação dos parâmetros f e ξ . Segundo ele, esses parâmetros são otimizados de modo que a FRF do sistema primário seja uma tangente horizontal nos pontos invariantes A e B da Figura 21.

3.3.3 Mecanismos de Amortecimento

O mecanismo pelo qual a energia de vibração é convertida em calor ou som é conhecido como amortecimento (RAO, 2008). Esse, por sua vez, é um fenômeno físico difícil de ser modelado devido a diversidade e complexidade dos mecanismos de dissipação de energia (ASEKA, 2008).

Segundo Aseka (2008), um modelo matemático que represente bem os efeitos de dissipação de energia não é tão elementar, haja vista que os parâmetros que medem o amortecimento não podem ser aferidos diretamente, mas as respostas das estruturas às cargas sim. Tais respostas dependem da massa que introduz inércia, da rigidez que permite armazenar energia e de um conjunto de fatores (geometria, solda, rebite, apoios, ambiente, entre outros) que causam dissipação de energia. Por isso, na tentativa de representar a dissipação de energia e, ao mesmo tempo, facilitar a

resolução das equações de movimento, costuma-se considerar o amortecimento viscoso na modelagem matemática de sistemas vibratórios reais (SOEIRO, 2008).

3.3.3.1 Modelo de Amortecimento Viscoso

Do ponto de vista prático, o amortecimento viscoso é a forma mais simples de amortecimento haja vista que resulta em equações de movimento lineares, nas quais, a força de amortecimento é proporcional à velocidade do corpo vibratório (RAO, 2008):

$$F_a = c\dot{x} \quad (30)$$

sendo:

F_a : Força de amortecimento;

c : Constante de amortecimento viscoso;

\dot{x} : Velocidade relativa entre sólido e fluido.

Como exemplo, considere o sistema vibratório mola e amortecedor viscoso da Figura 22.

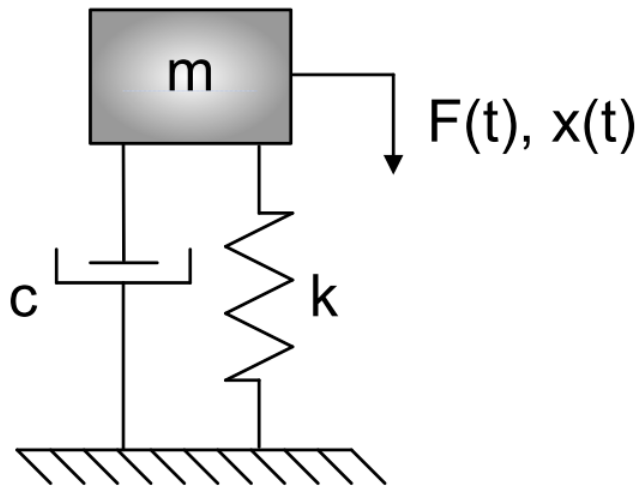


Figura 22 - Sistema vibratório.
Fonte: O Autor.

Para o conjunto vibratório da Figura 22, a análise dinâmica de forças resulta na seguinte equação:

$$F = kx + c\dot{x} \quad (31)$$

Admite-se um movimento harmônico simples com deslocamento definido por (RAO, 2008):

$$x(t) = X\text{sen}(\omega t) \quad (32)$$

sendo:

X : Amplitude do movimento.

Substituindo a equação (32) e sua respectiva derivada \dot{x} na equação (31), tem-se que (RAO, 2008):

$$F = kX\text{sen}(\omega t) \pm c\omega X\text{cos}(\omega t) = kx \pm c\omega\sqrt{X^2 - x^2} \quad (33)$$

A equação (33) representa uma resultante devido à força da mola e do amortecedor que, ao atuarem no sistema, são capazes de realizar trabalho. A Figura 23 ilustra a combinação dessas forças em relação a x e em um laço fechado.

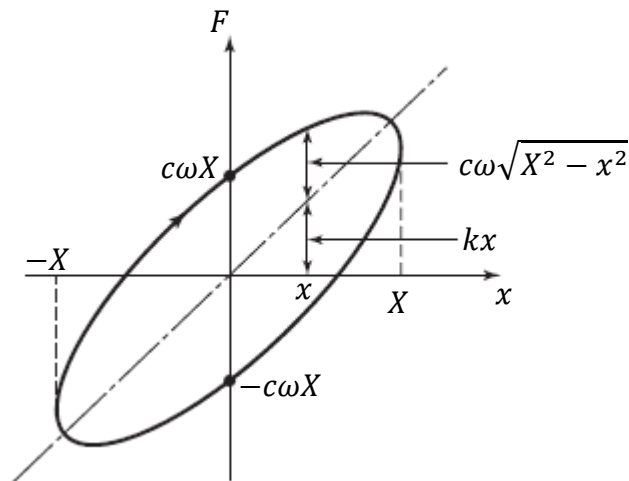


Figura 23 - Gráfico força versus deslocamento do sistema vibratório.
Fonte: Rao, 2008.

A força elástica da mola é conservativa e não realiza trabalho em um ciclo completo de movimento. Já a força de amortecimento é não conservativa e, portanto, dissipa energia durante um ciclo de operação. Essa parcela de energia dissipada define o nível de amortecimento no sistema e pode ser determinada através do cálculo da área interna da elipse da Figura 23, dada por:

$$\Delta W = \oint F dx \quad (34)$$

sendo:

ΔW : Energia dissipada por ciclo de operação.

Substituindo a equação (33) em (34) e integrando para ΔW , tem-se que (RAO, 2008):

$$\Delta W = \int_0^{2\pi/\omega} (kX \sin(\omega t) + c\omega X \cos(\omega t))(\omega X \cos(\omega t)) dt = \pi \omega c X^2 \quad (35)$$

A equação (35) pressupõe que a dissipação de energia por ciclo é proporcional ao quadrado da amplitude e varia com a frequência de excitação. Nesse sentido, de acordo com Soeiro (2008), quando uma estrutura real é colocada em movimento harmônico, constata-se que a energia dissipada depende de alguma forma da frequência, mas não de maneira proporcional. Segundo Floody (2010), os mecanismos de amortecimento de uma estrutura real, além de serem diversos e complexos, em nada se assemelham ao comportamento viscoso. Por isso, o melhor que se pode fazer é modificar o modelo viscoso, gerando modelos de simples manipulação matemática e condizentes com outros mecanismos de dissipação como, por exemplo, o proporcional.

3.3.3.2 Amortecimento Proporcional

Normalmente o amortecimento não pode ser modelado como ocorre com a massa e a rigidez, o que gera dificuldades na análise de sistemas amortecidos com múltiplos graus de liberdade (SANT'ANNA, 2007). Uma análise alternativa é considerar o amortecimento proporcional, o qual foi proposto por Rayleigh em 1845.

Este modelo considera o amortecimento como uma combinação linear entre a massa e a rigidez do sistema, através da seguinte expressão (ADHIKARI, 2000):

$$[C] = \alpha_1 [M] + \alpha_2 [K] \quad (36)$$

sendo:

$[C]$: Matriz amortecimento;

$[M]$: Matriz massa;

$[K]$: Matriz rigidez;

α_1 : Constante de amortecimento proporcional à massa;

α_2 : Constante de amortecimento proporcional à rigidez.

O amortecimento proporcional é utilizado em análises, nas quais, torna-se imperativo incluir o amortecimento e, assim, gerar modelos próximos da realidade. (ADHIKARI, 2000). Por exemplo, considere as seguintes equações diferenciais, representativas de um sistema de vibração com n graus de liberdade e amortecimento viscoso (SCHWARZ e RICHARDSON, 2013):

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [C]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (37)$$

sendo:

$\{f(t)\}$: Vetor de forças externas;

$\{\ddot{x}(t)\}$: Vetor aceleração;

$\{\dot{x}(t)\}$: Vetor velocidade;

$\{x(t)\}$: Vetor deslocamento.

A condição especial que permite o desacoplamento da equação (37), facilitando a sua resolução, é considerar o uso do amortecimento proporcional, indicado pela equação (36). Assim, obtêm-se as seguintes expressões desacopladas:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + (\alpha[M] + \beta[K])\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (38)$$

$$[M](\{\ddot{x}(t)\} + \alpha\{\dot{x}(t)\}) + [K](\beta\{\dot{x}(t)\} + \{x(t)\}) = \{f(t)\} \quad (39)$$

3.3.3.3 Modelo de Amortecimento Histerético

O amortecimento causado pelo atrito entre os planos internos que escorregam ou deslizam à medida que o material se deforma é denominado histerético. Tal amortecimento gera um laço de histerese na curva tensão-deformação (Figura 3), no qual, os caminhos percorridos pelo carregamento e descarregamento são diferentes (RAO, 2008).

Experimentalmente, foi observado que a energia perdida em um ciclo de movimento, devido ao amortecimento histerético, é proporcional a rigidez e ao quadrado da amplitude, na forma (INMAN, 2007):

$$\Delta W = \pi \eta_i k X^2 \quad (40)$$

sendo:

η_i : Fator de perda.

Considerando a similaridade entre as Figuras 3 e 23, bem como as áreas internas das respectivas elipses como sendo a energia dissipada por ciclo de movimento, pode-se chegar a uma constante de amortecimento equivalente (c_{eq}) que leva em conta o amortecimento histerético. Para isso, as equações (35) e (40) são comparadas (INMAN, 2007):

$$c_{eq} = \frac{\eta_i}{\omega} k \quad (41)$$

3.3.3.4 Fator de Perda

O fator de perda é a fração da energia total do sistema vibratório que é dissipada em cada ciclo de movimento. Esse parâmetro é útil para comparar a capacidade de amortecimento dos materiais de engenharia, sendo definido como (RAO, 2008):

$$\eta_i = \frac{\Delta W}{2\pi W} \quad (42)$$

sendo:

W : Energia total do sistema vibratório.

A energia total do sistema pode ser expressa como a máxima energia potencial ou como a máxima energia cinética (RAO, 2008). Considerando a máxima energia potencial, tem-se que:

$$W = \frac{1}{2}kX^2 \quad (43)$$

Substituindo as equações (35) e (43) em (42), resulta:

$$\frac{\eta_i}{\omega} = \frac{c_{eq}}{k} \quad (44)$$

Rearranjando a equação (44), obtêm-se a mesma equação (41):

$$c_{eq} = \frac{\eta_i}{\omega}k \quad (45)$$

A equação (45) indica que uma parcela da energia, empregada na deformação do sistema, é dissipada na forma de amortecimento histerético. Adicionalmente, esta equação pode ser expressa na forma:

$$c_{heq} = \eta_p k \quad (46)$$

sendo:

c_{heq} : Constante de amortecimento histerético equivalente;

η_p : Fator de perda dependente da frequência de excitação do sistema.

Segundo Soeiro (2008), a dependência do fator de perda com a frequência é, em geral, estabelecida experimentalmente. Barbieri e Barbieri (2012), ao simularem o comportamento histerético de um amortecedor *Stockbridge* com amplitudes de deslocamento mantidas constantes ao longo da excitação, consideraram o fator de perda como um parâmetro dependente da frequência através da seguinte expressão:

$$\eta_p = \frac{\eta_i}{\omega} \quad (47)$$

Dessa forma, substituindo a equação (47) em (46), tem-se que:

$$c_{heq} = \frac{\eta_i}{\omega}k \quad (48)$$

3.3.4 Dispositivos Tipo *Stockbridge*

3.3.4.1 Características Gerais

Desenvolvido em 1925 por George H. Stockbridge, o dispositivo *Stockbridge* (Figura 2) é constituído por duas massas inerciais presas por um cabo flexível, denominado de cabo mensageiro, o qual se encontra acoplado a um grampo para fixação no cabo condutor. (LABEGALINI et al., 1992).

As massas são, geralmente, produzidas em aço galvanizado (MELO, 2011). O cabo mensageiro é composto por fios de aço e sem alma, como ilustra a Figura 24. Em dispositivos antigos, o cabo mensageiro era composto por 7 fios, diferentemente dos atuais, os quais, figuram com 19 fios.

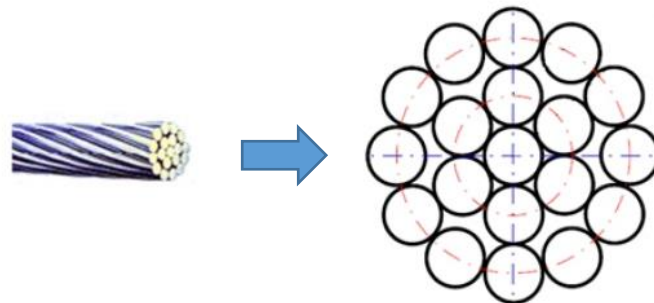


Figura 24 - Seção transversal do cabo mensageiro.
Fonte: O Autor.

O *Stockbridge* é um dispositivo comumente empregado no controle de vibrações eólicas em linhas aéreas de transmissão de energia elétrica (SILVA, 2005). A Figura 25 ilustra o emprego desse ADV em uma linha de transmissão elétrica.

Nesse tipo de amortecedor, a energia mecânica do cabo condutor é dissipada nos fios do cabo mensageiro, através do amortecimento de Coulomb (atrito externo entre os fios da cordoalha) e do amortecimento histerético (atrito interno), ambos gerados pela deformação à flexão (LABEGALINI et al., 1992).

As principais vantagens do *Stockbridge* são: construção simples, baixo custo de produção e instalação, livre de manutenções, ação independente da temperatura e eficiência na redução de vibrações no ponto de fixação, bem como na região entre as suas frequências de ressonância (LABEGALINI et al., 1992). Contudo, essa

eficiência se restringe a uma estreita faixa de frequência operacional (OLIVEIRA, 2011).

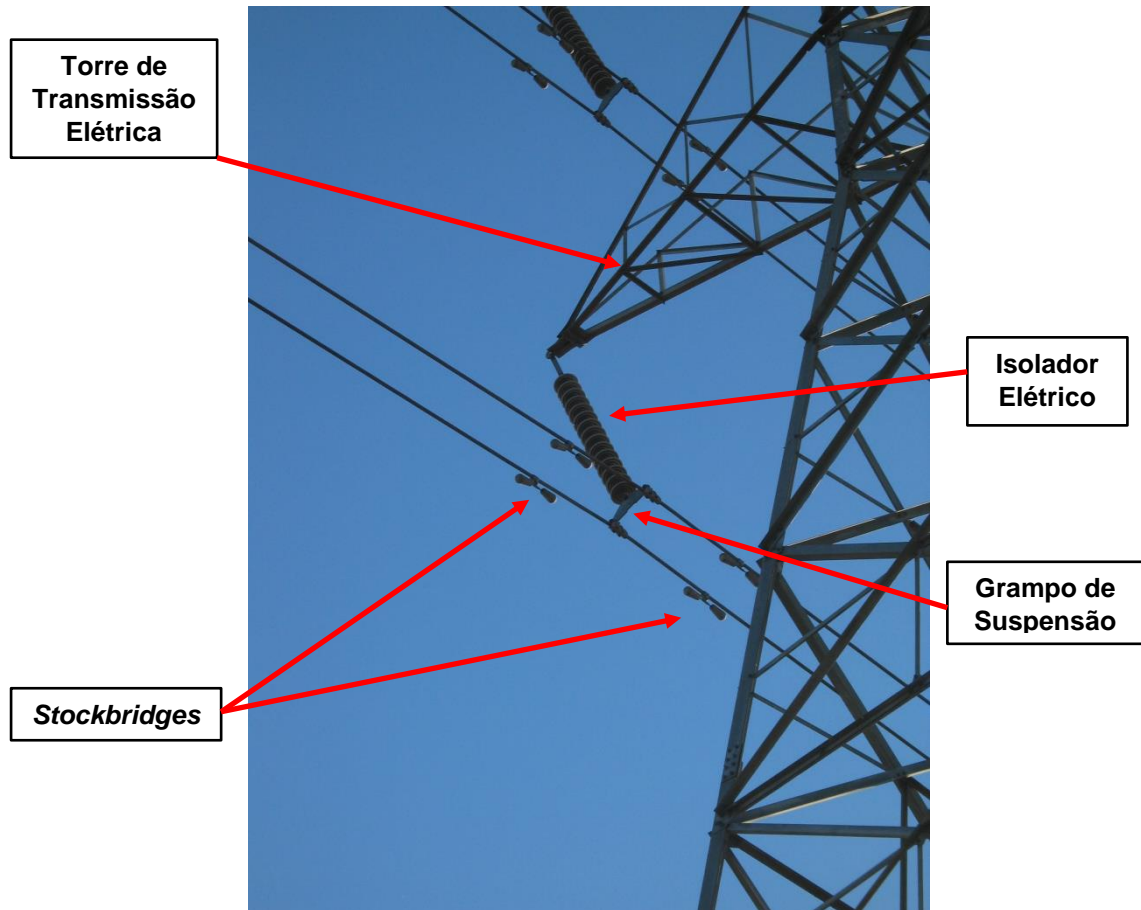


Figura 25 - Emprego do *Stockbridge* em linhas de transmissão elétrica.
Fonte: O Autor.

3.3.4.2 Tipos de *Stockbridges*

Os amortecedores *Stockbridges* podem ser classificados em: simétrico, assimétrico, *dogbone*, *vibless* e *Haro*.

3.3.4.2.1 *Stockbridge* Simétrico

O *Stockbridge* simétrico (Figura 26) consiste em massas inerciais e comprimento de cabos idênticos nos dois lados. Segundo Kasap (2012), esse ADV possui dois modos naturais de vibração no plano vertical. Um modo de vibração está

relacionado com a translação vertical das massas inercias e o outro com a rotação dessas massas.



Figura 26 - *Stockbridge* simétrico.
Fonte: Silva Júnior, 2011.

De acordo com Labegalini et al. (1992), existem alguns modelos de *Stockbridges* simétricos com características específicas como, por exemplo, o ADV Dulmison ES-1 (*Elastomer Sandwich - 1*) e o *Dulmison ES2 (Elastomer Sandwich - 2)*, ilustrados na Figura 27. O cabo mensageiro desses dispositivos apresentam camadas de neoprene, permitindo a dissipação de energia não somente pelo amortecimento de Coulomb e histerético, mas também através do amortecimento viscoso. No caso do modelo *Dulmison ES-2*, o grampo de fixação é substituído por uma armação pré-formada, a qual, acopla o ADV ao cabo sobre uma camada de neoprene (LABEGALINI et al, 1992).

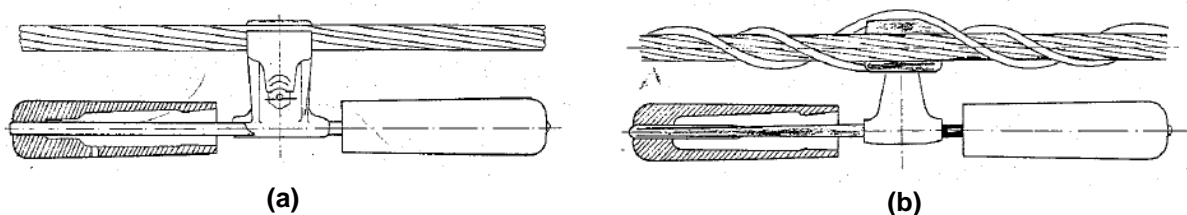


Figura 27 - Modelos de *Stockbridge* simétrico *Dulmison ES-1* (a) e o *Dulmison ES-2* (b).
Fonte: Labegalini et al., 1992.

Outro modelo é o *Varispond Dulmison*, o qual, têm as mesmas características do modelo *Dulmison ES-2*. Entretanto, o ADV *Varispond* possui duas massas toroidais, como ilustra a letras (a) e (b) da Figura 28. Essas massas podem ser ajustadas sobre as massas inerciais principais, permitindo obter mais 4 frequências naturais (Labegalini et al., 1992).

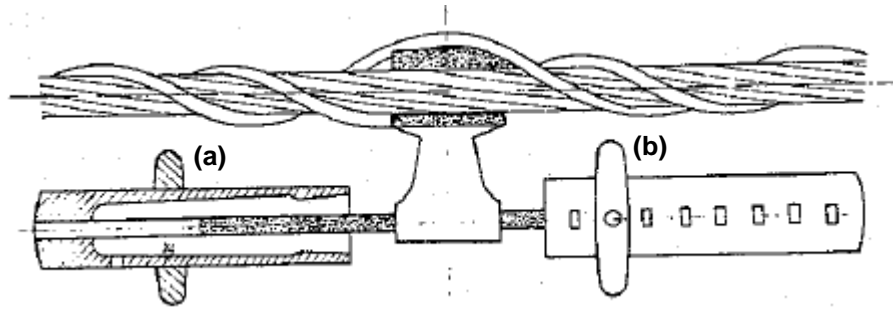


Figura 28 - *Stockbridge* simétrico modelo *Varispond Dulmison*.
Fonte: Labegalini et al., 1992.

3.3.4.2.2 *Stockbridge* Assimétrico

O *Stockbridge* assimétrico (Figura 29) possui massas com geometrias distintas e comprimentos de cabos mensageiros diferentes, em ambos os lados. Esse arranjo físico confere ao ADV quatro frequências naturais de ressonância e, portanto, quatro modos de vibração distintos (LABEGALINI et al., 1992).

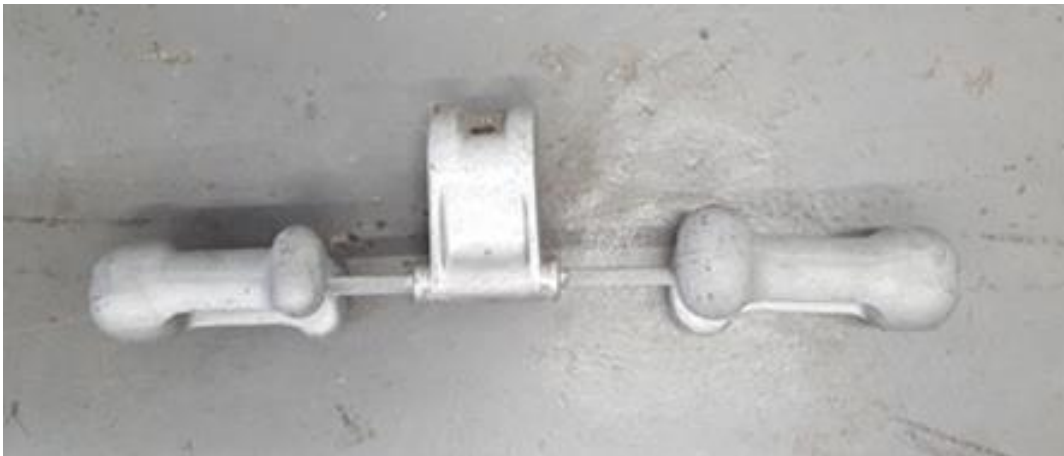


Figura 29 - *Stockbridge* assimétrico modelo *Salvi 4-R*.
Fonte: O Autor.

3.3.4.2.3 *Stockbridge* Dogbone

O *Stockbridge* do tipo *dogbone* (Figura 30) possui massas que estão fora do eixo axial do cabo mensageiro, atribuindo a essa ADV três frequências naturais. (MELO, 2011).



Figura 30 - *Stockbridge* do tipo *dogbone*.
Fonte: Silva Júnior, 2011.

3.3.4.2.4 *Stockbridge Vibless*

Segundo Labegalini et al. (1992), o *Stockbridge Vibless* foi desenvolvido no Japão, pela empresa Furukawa. Esse ADV é um tipo de *Stockbridge* modificado, no qual, as massas inerciais são tubos cilíndricos curvados para baixo, conforme ilustra a Figura 31.

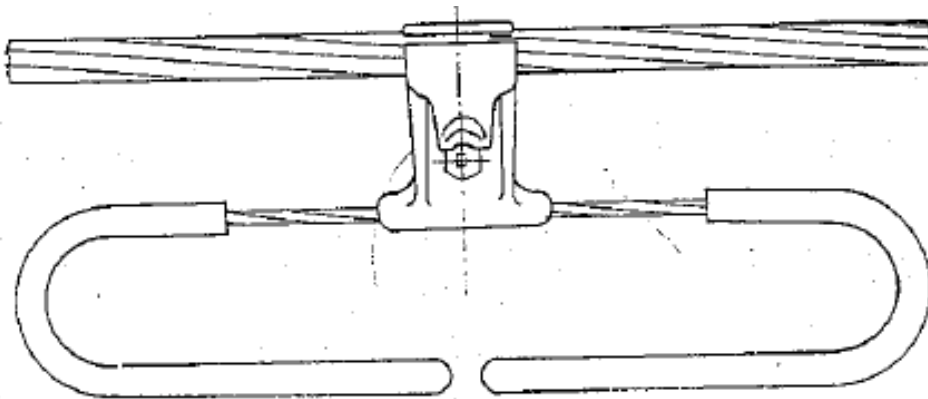


Figura 31 - *Stockbridge Vibless*.
Fonte: Labegalini et al., 1992.

3.3.4.2.5 *Stockbridge Haro*

O ADV *Haro*, conforme ilustra a Figura 32, consiste em três massas unidas por um cabo flexível, sendo que o conjunto é fixado no cabo condutor por duas presilhas (Labegalini et al., 1992).



Figura 32 - *Stockbridge Haro*.
Fonte: Labegalini et al., 1992.

De acordo com Labegalini et al. (1992), o *Stockbridge Haro* possui 5 frequências naturais.

3.3.4.3 Princípio de Funcionamento

A ação dos ventos sobre cabos condutores de eletricidade é direta e constante. Em função da oscilação da velocidade do vento (v_v), tem-se uma variação na frequência de formação de vórtices f_s (equação (1)). Uma vez que o trem de vórtices se forma, os cabos condutores são excitados com frequência $\omega_s = 2\pi f_s$ e, conseqüentemente, deslocados através da força de elevação F_e (equação (2)).

Quando a frequência de excitação alcança a frequência natural do cabo condutor, este entra em ressonância. Nesta condição ou quando a frequência de excitação está próxima da ressonância, as amplitudes de deslocamentos são elevadas e, portanto, críticas em face dos danos e falhas mecânicas que podem ser geradas, como mostram as Figuras (8) e (9).

Contudo, ao adicionar o ADV *Stockbridge*, as vibrações eólicas sobre o cabo passam a ser transmitidas, através do grampo de fixação, para as massas inerciais. O movimento dessas massas, em fase oposta ao do cabo condutor (LABEGALINI et al., 1992), suscita a flexão do cabo mensageiro. Esse movimento flexional desencadeia, nos fios do cabo mensageiro, a absorção de parte da energia de vibração do cabo condutor através dos mecanismos de amortecimento do *Stockbridge* (amortecimento de Coulomb e histerético).

O resultado físico é a redução das amplitudes de oscilação do condutor elétrico, bem como dos esforços mecânicos no sistema como um todo.

3.3.4.4 Eficiência do *Stockbridge*

Segundo Labegalini et al. (1992), a faixa de operação do *Stockbridge* pode variar entre 70% a 130% da frequência natural do cabo condutor, como mostra a Figura 33.

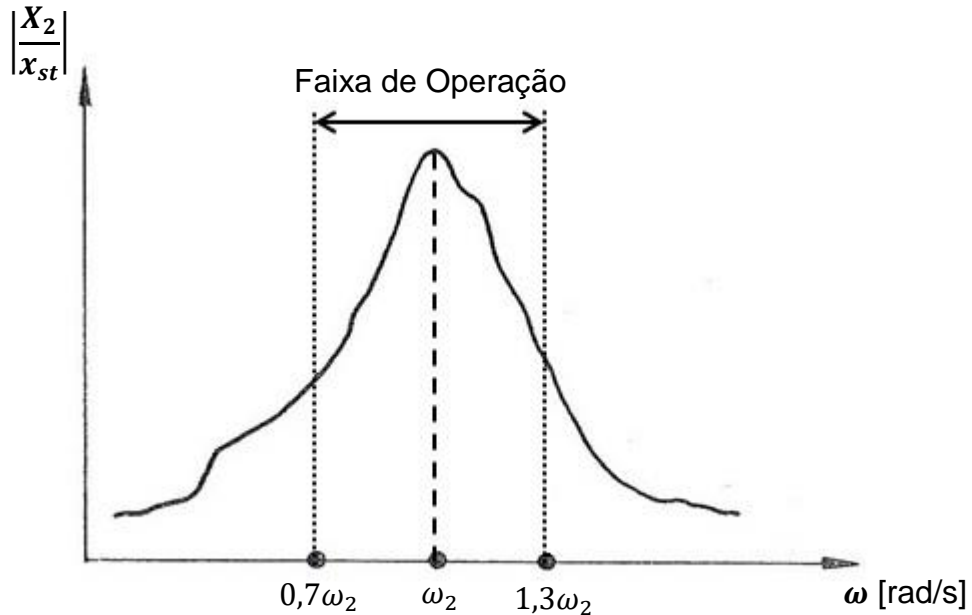


Figura 33 - Resposta de um amortecedor *Stockbridge* e sua faixa de operação.
Fonte: Labegalini et al., 1992 (Modificado).

A eficiência do *Stockbridge* diminui rapidamente fora desta faixa de operação (LABEGALINI et al., 1992). Por isso, para garantir a eficiência do dispositivo é necessário conhecer determinadas características dinâmicas do mesmo.

Segundo Silva Neto (1999), características como rigidez à flexão e fator de perda são de difíceis avaliações quando se consideram seções complexas como, por exemplo, o cabo mensageiro de um ADV *Stockbridge*. Isso porque, a rigidez à flexão é calculada através de fórmulas empíricas, aproximadas e de difícil confirmação. Já o fator de perda, representa o amortecimento devido ao mecanismo histerético de dissipação de energia.

Por outro lado, tais parâmetros podem ser estimados através do ajuste de modelos numéricos. De acordo com Campos (2002), métodos iterativos podem ser empregados para aproximar os dados numéricos dos experimentais através do ajuste de determinados parâmetros das matrizes do modelo analítico.

3.4 AJUSTE DE MODELOS NUMÉRICOS

3.4.1 Aspectos Gerais

O ajuste de modelos numéricos tem como objetivo principal melhorar a correlação entre os dados medidos e os dados previstos no modelo matemático (ARAÚJO, 2007).

Embora os dados medidos contenham erros devido aos métodos práticos, é prática corrente na engenharia tomar esses valores como corretos ou então utilizar fatores que introduzam na formulação teórica a incerteza em relação ao comportamento dinâmico da estrutura em estudo (CAMPOS, 2002).

Segundo Campos (2002), os métodos de ajustes de modelos podem ser agrupados em métodos diretos e iterativos. O primeiro consiste em realizar correções nos parâmetros do modelo como, por exemplo, matrizes de massa, rigidez e amortecimento, afim de minimizar o erro gerado entre os dados numéricos e os medidos. Já o segundo método objetiva correlacionar os dados numéricos com os experimentais através de uma função objetivo, a qual, envolve dados modais (frequências e modos) ou FRFs.

Dentre os métodos iterativos mais utilizados, destaca-se o Algoritmo de Otimização por Enxame de Partículas ou PSO (*Particle Swarm Optimization*).

3.4.2 Fundamentos da Otimização por Enxame de Partículas

PSO é um método iterativo de otimização de funções não lineares, introduzido por Kennedy e Eberhart (1995). Esse método surgiu da observação do comportamento social de determinadas espécies de pássaros e peixes que, para garantir a sobrevivência do grupo, cooperam coletivamente e utilizam o aprendizado próprio ou do bando (TEBALDI; COELHO; LOPES JUNIOR, 2006). Assim, a estratégia do algoritmo PSO é considerar uma determinada população de partículas com comportamento de cooperação, cujo objetivo final é o de encontrar soluções ótimas para o problema.

No modelo matemático adotado para o PSO, uma nuvem de partículas é gerada aleatoriamente em um determinado espaço de busca, no qual, cada partícula representa uma possível solução (SICILIANO, 2007).

A posição da partícula, em cada iteração, é representada por um valor de velocidade e de deslocamento, dado por (MIRANDA; FONSECA, 2004):

$$x_{n+1}^j = x_n^j + v_{n+1}^j \quad (49)$$

sendo:

x_{n+1}^j : Posição da partícula j na iteração $n + 1$;

x_n^j : Posição da partícula j na iteração n ;

v_{n+1}^j : Velocidade da partícula j na iteração $n + 1$.

Na equação (49), a velocidade de cada partícula, em cada iteração, é calculada por (MIRANDA; FONSECA, 2004):

$$v_{n+1}^j = w_{ip} v_n^j + c_1 r_{n1} (p^j - r_n^j) + c_2 r_{n2} (p_n^s - r_n^j) \quad (50)$$

sendo:

w_{ip} : Parâmetro referente à inércia da partícula;

v_n^j : Velocidade atual da partícula j ;

p^j : Melhor posição encontrada pela partícula j ;

p_n^s : Melhor posição encontrada entre todas as partículas na iteração n ;

c_1, c_2 : Parâmetros de confiança;

r_{n1}, r_{n2} : Números aleatórios.

A equação (50) é o resultado da soma vetorial de três termos. O primeiro é a inércia, o qual, determina a continuidade do movimento da partícula na direção em que estava. O segundo é a memória que, por sua vez, atrai a partícula na direção da melhor posição identificada, até o momento, por ela própria. Por fim, o terceiro termo, denominado de cooperação, é responsável por atrair a partícula na direção do melhor

ponto descoberto pelo “enxame” (SICILIANO, 2007). A Figura 34, ilustra a influência desses três termos no movimento da partícula.

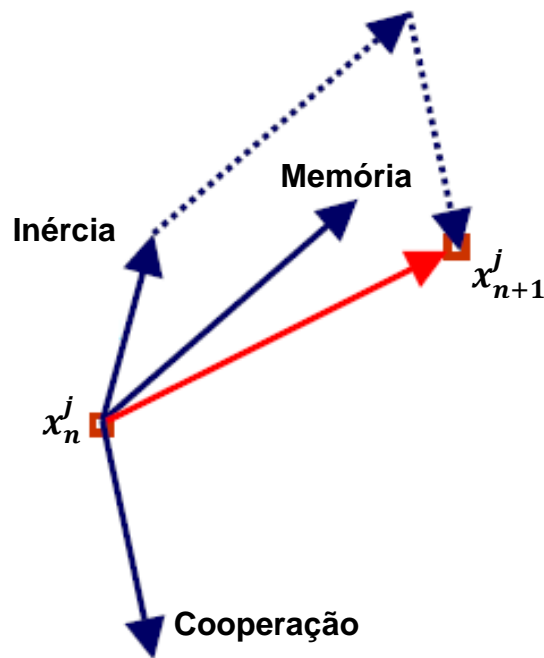


Figura 34 - Influência dos termos inércia, memória e cooperação no movimento da partícula.
Fonte: Miranda e Fonseca, 2004.

Segundo Moura (2013), a equação (50) ajusta a velocidade da partícula com base em dois fatores. O primeiro é o fator da diversificação, o qual, está relacionado com a tendência da partícula ir para determinada direção de acordo com o parâmetro $w_{ip}v_n^j$. O outro é o fator de intensificação que considera a experiência individual da partícula ($p^j - r_n^j$) e a experiência do enxame ($p_n^s - r_n^j$). Além disso, de acordo com Siciliano (2007), o parâmetro w da equação (50) pode assumir um valor elevado quando determina uma busca global e um valor baixo quando estabelece uma busca local. Já os parâmetros de confiança definem o quanto uma partícula confia em si (c_1) ou no enxame (c_2), enquanto r_{n1} e r_{n2} são números aleatórios de uma distribuição uniforme compreendidos entre zero e um.

A Figura 35 ilustra o fluxograma de ações do PSO. Em primeiro lugar, o algoritmo gera a população inicial de partículas que irão compor o enxame. Em seguida, para cada partícula, define-se os respectivos valores de velocidade e deslocamento. Por fim, esses valores são atualizados, por meio de iterações sucessivas, até atingir um determinado critério de parada. Esse critério pode ser um

número máximo de iterações atingido ou uma partícula com determinada característica (SICILIANO, 2007).

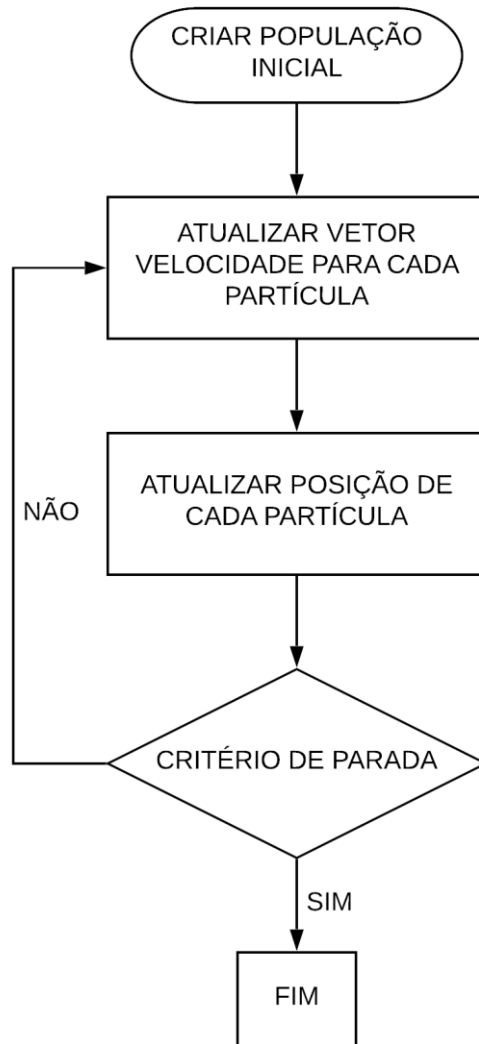


Figura 35 - Fluxograma do PSO.
Fonte: Siciliano, 2007.

4 MODELO NUMÉRICO

4.1 ASPECTOS GERAIS

O modelo de ADV ensaiado foi o *Stockbridge* assimétrico da Figura 36. Desse modo, as equações do equilíbrio dinâmico são apresentadas com base na literatura existente e simplificadas para representar a fixação e o movimento dinâmico do amortecedor.



Figura 36 – Modelo do ADV *Stockbridge* assimétrico utilizado nos ensaios.
Fonte: O Autor.

Considerando a metade do *Stockbridge* da Figura 36, define-se um modelo esquemático e representativo do ADV na Figura 37.

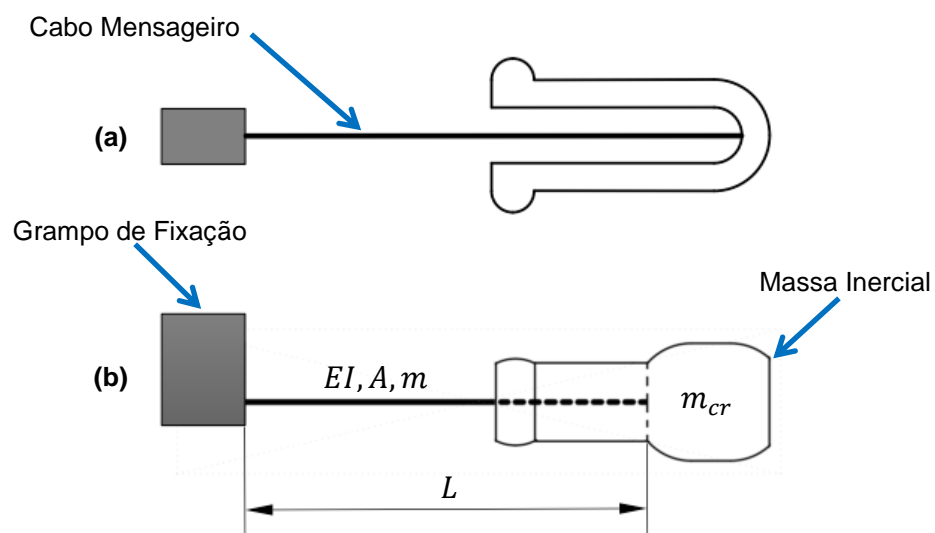


Figura 37 – Vistas superior (a) e frontal (b) da metade do ADV *Stockbridge*.
Fonte: O Autor.

sendo:

EI : Rigidez a flexão da viga;

A : Área da seção transversal da viga;

m : Massa da viga por unidade de comprimento;

L : Comprimento da viga;

m_{cr} : Massa do corpo rígido na extremidade.

Conforme indicado na Figura 37, o respectivo cabo mensageiro é modelado como uma viga, sendo uma extremidade engastada no grampo de fixação e a outra presa em uma massa inercial. Essa massa, por sua vez, está suspensa e é modelada como um corpo rígido. Já o grampo de fixação está rigidamente preso à base de um excitador eletrodinâmico. Esse excitador quando acionado, promove o deslocamento vertical da base e, conseqüentemente, do cabo mensageiro, bem como da massa suspensa. Essa dinâmica de movimento do ADV é ilustrada na Figura 38.

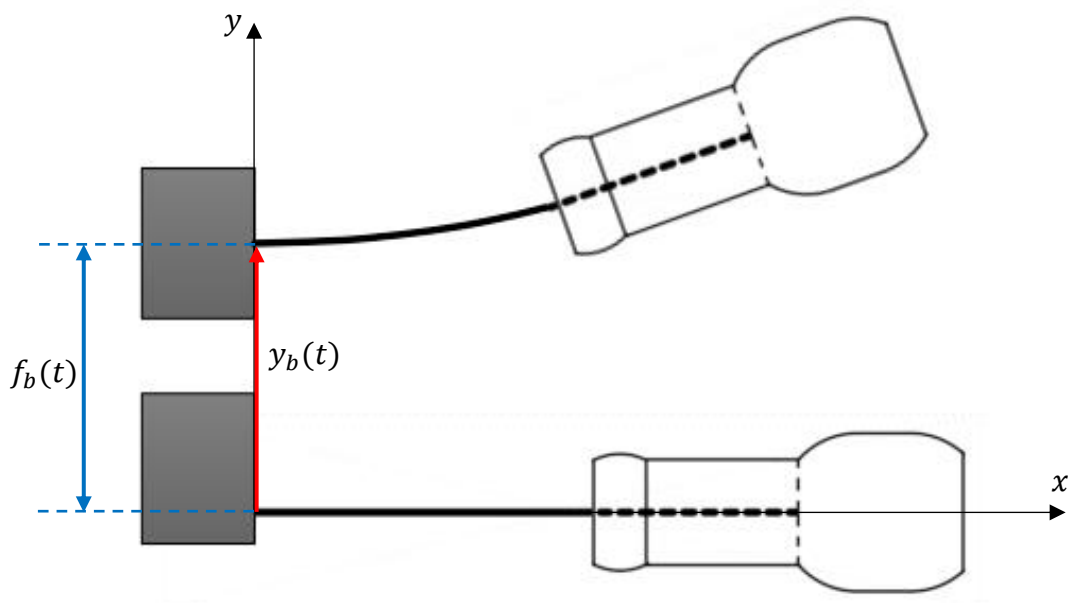


Figura 38 – Dinâmica de movimento do conjunto cabo mensageiro e massa inercial.

Fonte: O Autor.

sendo:

(x, y) : Sistema de coordenadas globais;

$y_b(t)$: Deslocamento da base;

$f_b(t)$: Força de excitação da base.

A análise dinâmica do dispositivo *Stockbridge* envolve primeiro a caracterização de dois modelos distintos: o modelo do cabo mensageiro e o da massa inercial.

Em seguida, a composição das equações do cabo mensageiro e da massa inercial permite definir um modelo de vibração não linear para o amortecedor *Stockbridge*.

A análise continua no intuito de obter as soluções numéricas das equações de movimento. Para isso, são empregados métodos, técnicas e iterações numéricas como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos (MEF) o Método dos Resíduos Ponderados de Galerkin e a Técnica de Newmark.

4.2 MODELO DO CABO MENSAGEIRO

O comportamento dinâmico do cabo mensageiro é modelado como uma viga. Este elemento estrutural, por sua vez, é foco de diversos estudos e pesquisas, em especial, nas áreas de engenharia mecânica e civil. Muitas dessas pesquisas desenvolveram equações de movimento com o intuito de descrever a dinâmica das vigas.

Crespo da Silva e Glynn (1978a e 1978b) obtiveram equações não lineares de movimento de vigas metálicas. Estas equações descrevem vibrações flexionais-flexionais-torcionais, considerando termos não lineares gerados pela curvatura e inércia da viga. Malatkar (2003) utilizou estas equações para analisar vibrações não lineares de vigas engastadas. Já Velázquez (2007) simplificou estas mesmas equações ao considerar o deslocamento, no plano, de uma viga vertical engastada e excitada harmonicamente pela base. Desse modo, utiliza-se a aproximação empregada por Crespo da Silva e Glynn (1978a e 1978b), os desenvolvimentos de Malatkar (2003), bem como as simplificações propostas por Velázquez (2007) para obter as equações de movimento de uma viga engastada.

As equações de movimento são derivadas usando o princípio de Hamilton e a formulação variacional. Em seguida, essas equações são simplificadas para incluir termos não lineares de até terceira ordem. Por fim, a expressão final é obtida ao considerar a dinâmica de movimento do cabo mensageiro, ou seja, uma viga engastada com vibração forçada no plano, como ilustrado na Figura 38.

4.2.1 Considerações do Modelo

Para deduzir as equações de movimento, algumas considerações são adotadas para o modelo de cabo mensageiro, ilustrado na Figura 37:

- a) Seção transversal circular e constante;
- b) Material isotrópico;
- c) Comprimento L ;
- d) Massa por unidade de comprimento m ;
- e) Comportamento elástico não linear: De acordo com Nayfeh e Pai (2004), estruturas que experimentam grandes deformações, mas pequenas tensões podem ser consideradas não lineares. Segundo Malatkar (2003), um exemplo destas estruturas são vigas engastadas submetidas a rotações de corpo rígido.
- f) Comportamento baseado na teoria de viga de Euler-Bernoulli: considera-se que as seções transversais da viga são planas e normais à linha neutra, bem como não sofrem deformação. Segundo Velázquez (2007), para vigas esbeltas é possível adotar algumas simplificações válidas como, por exemplo, desconsiderar deformações por cisalhamento, efeitos de inércia rotacional e de Poisson (medida da deformação transversal);
- g) Viga engastada inextensível: De acordo com Velázquez (2007), viga inextensível é uma idealização que não permite alongamentos da linha neutra. Segundo Nayfeh e Pai (2004), vigas engastadas podem ser consideradas inextensíveis.

A Figura 39 mostra o segmento deformado da viga. Os eixos (x, y, z) formam o sistema de referência global do sistema, cujos vetores unitários ortogonais são: \vec{e}_x , \vec{e}_y e \vec{e}_z . Já os eixos (χ, η, ζ) definem o sistema de referência local, cujos vetores unitários ortogonais são: \vec{e}_χ , \vec{e}_η e \vec{e}_ζ . A origem do sistema de eixos (χ, η, ζ) é no centroide C da seção transversal arbitrária P , a qual, define um arco de comprimento s . Na configuração indeformada, os eixos χ e x são coincidentes e os eixos η e ζ são, respectivamente, paralelos aos eixos y e z .

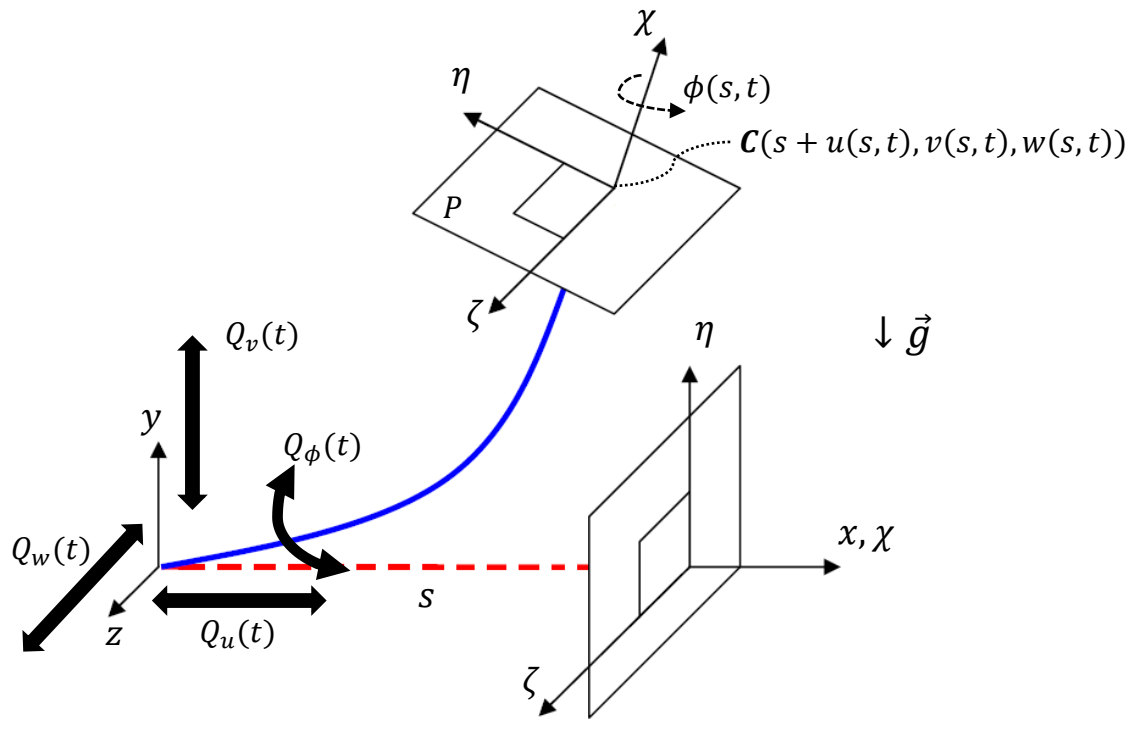


Figura 39 – Sistema dinâmico da viga engastada.
Fonte: Malatkar, 2003 (Modificado).

A viga está sujeita a forças generalizadas Q_u , Q_v , Q_w e Q_ϕ , as quais, promovem deformações sobre o elemento, como ilustra a Figura 39. Além disso, cada seção transversal da viga pode sofrer um deslocamento de translação em relação ao seu centroide C , bem como uma rotação em torno de C . Desse modo, em qualquer instante de tempo t , as componentes do vetor deslocamento podem ser descritas em termos de: $u(s, t)$ (deslocamento axial), $v(s, t)$ e $w(s, t)$ (deslocamentos transversais ou de flexão) e $\phi(s, t)$ (Deslocamento angular de torção) (MALATKAR, 2003).

A orientação dos eixos locais (χ, η, ζ) da seção, com relação aos eixos globais (x, y, z) do sistema, é descrita por três ângulos: $\Psi(s, t)$, $\theta(s, t)$ e $\phi(s, t)$. Essas grandezas angulares são conhecidas como ângulos de Euler.

4.2.2 Ângulos de Euler

Os ângulos de Euler descrevem no espaço tridimensional, mediante um processo sequencial de três rotações, a mudança do referencial (x, y, z) até o referencial (χ, η, ζ) .

A Figura 40 mostra a ordem na qual as rotações foram realizadas. Primeiro, os eixos x e y giram em torno do eixo z de um ângulo $\Psi(s, t) = \Psi$ de forma a atingir a nova posição (x^*, y^*, z) . Em seguida, esse último sistema gira em torno do eixo y^* de um ângulo $\theta(s, t) = \theta$ de modo a atingir o novo sistema (χ, y^*, z^{**}) . Por fim, o sistema (χ, y^*, z^{**}) gira em torno do eixo χ de um ângulo $\phi(s, t) = \phi$, originando o sistema (χ, η, ζ) (MALATKAR, 2003).

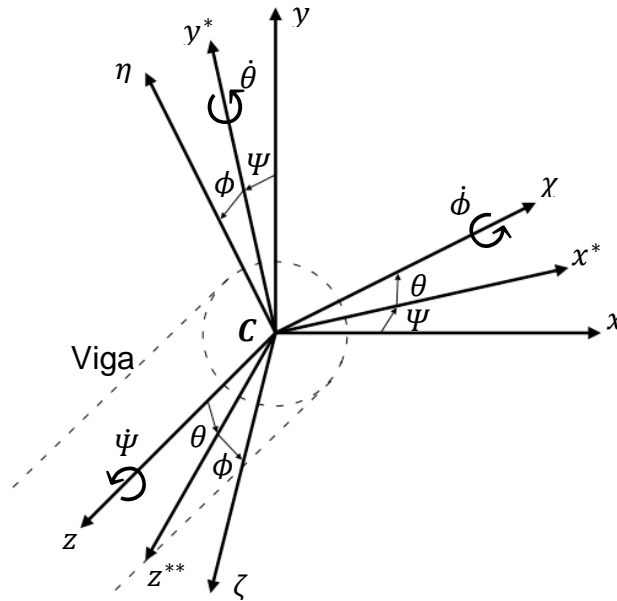


Figura 40 – Rotações de corpo rígido da seção transversal da viga.
Fonte: Malatkar, 2003 (Modificado).

Os vetores unitários do sistema de coordenadas (χ, η, ζ) estão relacionados com os vetores unitários do sistema de coordenadas (x, y, z) por meio de uma matriz de transformação $[T]$. Essa matriz é o resultado do produto de outras três matrizes, sendo cada uma referente a rotação do sistema (MALATKAR, 2003):

$$\begin{bmatrix} \vec{e}_\chi \\ \vec{e}_\eta \\ \vec{e}_\zeta \end{bmatrix} = [T] \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} = [T_\phi][T_\theta][T_\Psi] \begin{bmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{bmatrix} \quad (51)$$

As matrizes de transformação individual $[T_\phi]$, $[T_\theta]$ e $[T_\Psi]$, bem como a matriz de transformação $[T]$, são definidas como (MALATKAR, 2007):

$$[T_\phi] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, [T_\theta] = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}, [T_\Psi] = \begin{bmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\Psi & \cos\theta\sin\Psi & -\sin\theta \\ -\sin\Psi\cos\phi + \sin\phi\sin\theta\cos\Psi & \cos\phi\cos\Psi + \sin\phi\sin\theta\sin\Psi & \sin\phi\cos\theta \\ \sin\phi\sin\Psi + \cos\phi\sin\theta\cos\Psi & -\sin\phi\cos\Psi + \cos\phi\sin\theta\sin\Psi & \cos\phi\cos\theta \end{bmatrix} \quad (53)$$

Estabelecida a relação entre os referenciais e com base na Figura 40, pode-se determinar o vetor velocidade angular $\vec{\omega}(s, t)$ do sistema local (χ, η, ζ) com relação ao sistema global (x, y, z) (MALATKAR, 2003):

$$\vec{\omega}(s, t) = \dot{\Psi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_{y^*} + \dot{\phi}\vec{e}_\chi \quad (54)$$

Na equação (54) e no restante do trabalho, o símbolo ponto simples ($\dot{\quad}$) representa a derivada parcial da grandeza em relação ao tempo t . Dessa maneira, as grandezas $\dot{\Psi}$, $\dot{\theta}$ e $\dot{\phi}$ da equação (54) e da Figura 40 constituem, respectivamente, a velocidade angular em torno do eixo z , y^* e χ .

Na equação (54), nota-se que o vetor velocidade angular $\vec{\omega}(s, t)$ está escrito em termos do eixo global z e auxiliar y^* . Para escrevê-la em termos dos eixos (χ, η, ζ) basta, através das matrizes de transformação das equações (51) e (52), obter os vetores unitários \vec{e}_z e \vec{e}_{y^*} (MALATKAR, 2003):

$$\vec{e}_z = -\sin\theta\vec{e}_\chi + \sin\phi\cos\theta\vec{e}_\eta + \cos\phi\cos\theta\vec{e}_\zeta \quad (55)$$

$$\vec{e}_{y^*} = \cos\phi\vec{e}_\eta - \sin\phi\vec{e}_\zeta \quad (56)$$

Substituindo as equações (55) e (56) em (54), tem-se que:

$$\vec{\omega}(s, t) = (\dot{\phi} - \dot{\Psi}\sin\theta)\vec{e}_\chi + (\dot{\Psi}\sin\phi\cos\theta + \dot{\theta}\cos\phi)\vec{e}_\eta + (\dot{\Psi}\cos\phi\cos\theta - \dot{\theta}\sin\phi)\vec{e}_\zeta \quad (57)$$

Fazendo uso da analogia cinemática de Kirchhoff (LOVE, 1944. CRESPO DA SILVA; GLYNN, 1978a e 1978b), as componentes ρ_χ , ρ_η e ρ_ζ do vetor curvatura $\vec{\rho}(s, t)$ podem ser obtidas diretamente da equação (57), sendo as derivadas no tempo ($\dot{\phi}, \dot{\Psi}, \dot{\theta}$) substituídas por derivadas espaciais (ϕ', Ψ', θ') e $\vec{\omega}(s, t)$ substituído por $\vec{\rho}(s, t)$. Desse modo, tem-se que:

$$\vec{\rho}(s, t) = (\phi' - \Psi'\sin\theta)\vec{e}_\chi + (\Psi'\sin\phi\cos\theta + \theta'\cos\phi)\vec{e}_\eta + (\Psi'\cos\phi\cos\theta - \theta'\sin\phi)\vec{e}_\zeta \quad (58)$$

A equação (58) pode ser reescrita na forma (CRESPO DA SILVA; GLYNN, 1978a):

$$\vec{\rho}(s, t) = \rho_x \vec{e}_x + \rho_\eta \vec{e}_\eta + \rho_\zeta \vec{e}_\zeta \quad (59)$$

sendo ρ_x a mudança de curvatura por torção, enquanto ρ_η e ρ_ζ a mudança de curvatura por flexão da viga na posição s .

Percebe-se que, além das três componentes do vetor de deslocamentos ($u(s, t)$, $v(s, t)$ e $w(s, t)$), três novas variáveis foram introduzidas: ($\Psi(s, t)$, $\theta(s, t)$ e $\phi(s, t)$).

4.2.3 Viga Inextensível

A Figura 41 ilustra um segmento ds do eixo axial da viga engastada. O segmento AB está na configuração indeformada, enquanto A^*B^* se encontra na configuração deformada. A deformação e no ponto A é dada por:

$$e = \frac{ds^* - ds}{ds} = \sqrt{(1 + u')^2 + (v')^2 + (w')^2} - 1 \quad (60)$$

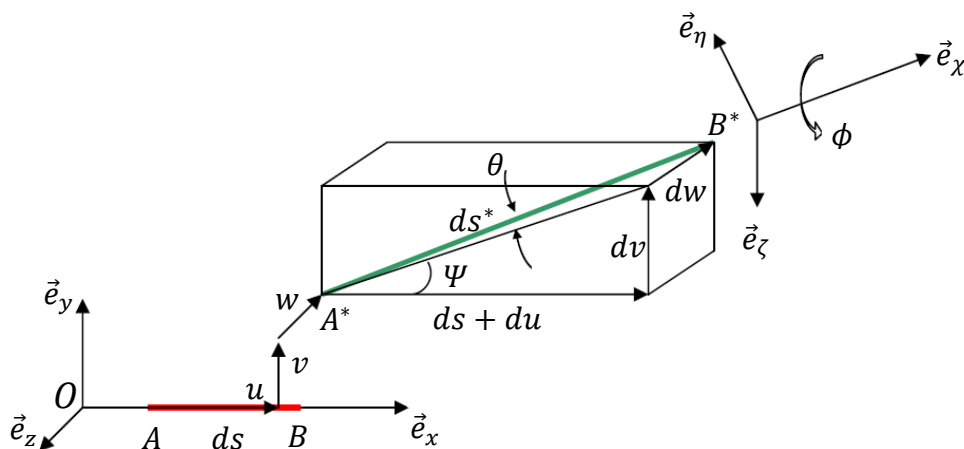


Figura 41 - Deformação no eixo axial da viga engastada.
Fonte: Malatkar, 2003 (Modificado).

Na equação (60) e no restante do trabalho, o símbolo aspa simples (') representa a derivada parcial da grandeza em relação ao comprimento de arco s .

Como a viga é considerada inextensível, a deformação axial e é nula, o que permite a partir da equação (60), obter a seguinte restrição (MALATKAR, 2003):

$$(1 + u')^2 + (v')^2 + (w')^2 = 1 \quad (61)$$

A Figura 41 também permite relacionar os ângulos Ψ e θ com as derivadas espaciais u' , v' e w' , através das seguintes expressões (MALATKAR, 2003):

$$\operatorname{tg}\Psi = \frac{v'}{1 + u'} \quad (62)$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-w'}{\sqrt{(1 + u')^2 + (v')^2}} \quad (63)$$

As equações (62) e (63) indicam que, das seis variáveis mencionadas ($u, v, w, \Psi, \theta, \phi$), apenas quatro são independentes (u, v, w, ϕ) e que, portanto, são as que aparecem nas equações de movimento deduzidas na sequência.

4.2.4 Equação de Lagrange

De acordo com Malatkar (2003) as equações de movimento em termos dos deslocamentos v , w e do ângulo ϕ são obtidas a partir do funcional de Lagrange, o qual, é definido como:

$$\mathcal{L}(t) = T(t) - U(t) = \int_0^L \ell(s, t) ds \quad (64)$$

sendo:

$\mathcal{L}(t)$: Funcional de Lagrange;

$T(t)$: Energia cinética;

$U(t)$: Energia interna de deformação;

$\ell(s, t)$: Densidade Lagrangeana associado ao movimento da viga.

A energia cinética têm duas componentes, uma devido à translação e outra devido à rotação, dadas respectivamente por (MALATKAR, 2003):

$$T_T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) ds \quad (65)$$

$$T_R(t) = \frac{1}{2} \int_0^L [\omega_\chi \quad \omega_\eta \quad \omega_\zeta] [J] [\omega_\chi \quad \omega_\eta \quad \omega_\zeta]^T ds \quad (66)$$

sendo:

$T_T(t)$: Energia cinética devido à translação;

$\dot{\alpha}$ ($\alpha = u, v, w$): Componentes do vetor velocidade;

$T_R(t)$: Energia cinética devido à rotação;

ω_α ($\alpha = \chi, \eta, \zeta$): Componentes do vetor velocidade angular;

$[J]$: Matriz de inércia.

Como o sistema de coordenadas locais coincide com os eixos principais da viga, os produtos de inércia são nulos (CARVALHO, 2013). Desse modo, a matriz de inércia $[J]$ é dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} J_\chi & 0 & 0 \\ 0 & J_\eta & 0 \\ 0 & 0 & J_\zeta \end{bmatrix} \quad (67)$$

Na matriz definida pela equação (67), os elementos da diagonal principal J_χ , J_η e J_ζ constituem os momentos de inércia por unidade de comprimento da viga. Como a área da seção transversal da viga é constante, então os momentos de inércia também são, sendo definidos por (CARVALHO, 2013):

$$J_\chi = \iint_A p(\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta \quad (68)$$

$$J_\eta = \iint_A p\zeta^2 d\eta d\zeta \quad (69)$$

$$J_{\zeta} = \iint_A p\eta^2 d\eta d\zeta \quad (70)$$

sendo p a massa específica da viga.

Substituindo a equação (67) em (66) e, na sequência, somando com a equação (65), obtêm-se a expressão da energia cinética $T(t)$, dada por:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^L m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) ds + \frac{1}{2} \int_0^L (J_{\chi} \omega_{\chi}^2 + J_{\eta} \omega_{\eta}^2 + J_{\zeta} \omega_{\zeta}^2) ds \quad (71)$$

Já a energia interna de deformação, considerando-se o material elástico linear, é dada por (CARVALHO, 2013):

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^L (D_{\chi} \rho_{\chi}^2 + D_{\eta} \rho_{\eta}^2 + D_{\zeta} \rho_{\zeta}^2) ds \quad (72)$$

Na equação (72), D_{χ} é a rigidez à torção, bem como D_{η} e D_{ζ} são parcelas de rigidez à flexão da viga, definidas por (CARVALHO, 2013):

$$D_{\chi} = \iint_A G(\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta \quad (73)$$

$$D_{\eta} = \iint_A E\zeta^2 d\eta d\zeta \quad (74)$$

$$D_{\zeta} = \iint_A E\eta^2 d\eta d\zeta \quad (75)$$

sendo:

E : Módulo de Young;

G : Módulo de cisalhamento.

Substituindo as equações (71) e (72) em (64), obtêm-se a expressão final do Lagrangeano (MALATKAR, 2003):

$$\ell(s, t) = \frac{1}{2}m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_\eta\omega_\eta^2 + J_\zeta\omega_\zeta^2) - \frac{1}{2}(D_x\rho_x^2 + D_\eta\rho_\eta^2 + D_\zeta\rho_\zeta^2) \quad (76)$$

Entretanto, a restrição de viga inextensível deve ser mantida durante o processo variacional. Então, adiciona-se ao Lagrangeano da equação (76) um parâmetro de restrição, definido pela multiplicação da equação (61) com o multiplicador de Lagrange $\lambda(s, t)$ (MALATKAR, 2003). Desse modo, a densidade Lagrangeana pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \ell(s, t) = \frac{1}{2}m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_\eta\omega_\eta^2 + J_\zeta\omega_\zeta^2) \\ - \frac{1}{2}(D_x\rho_x^2 + D_\eta\rho_\eta^2 + D_\zeta\rho_\zeta^2) + \frac{1}{2}\lambda[1 - (1 + u')^2 - (v')^2 - (w')^2] \end{aligned} \quad (77)$$

Da Equação (77) e mediante aplicação do princípio de Hamilton, são obtidas cinco equações diferenciais de movimento. Este procedimento é descrito a seguir.

4.2.5 Princípio de Hamilton

O princípio variacional de Hamilton (MEIROVITCH, 1967) estabelece que o sistema assumirá, dentre infinitos caminhos existentes entre dois pontos fixos t_1 e t_2 , aquele que torna estacionário o seguinte funcional:

$$I_f = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(t) dt \quad (78)$$

A viga engastada está sujeita a forças generalizadas Q_α ($\alpha = u, v, w$ e ϕ) e a forças não conservativas como, por exemplo, devido ao amortecimento viscoso. Desse modo, a inclusão das forças não conservativas na forma de trabalho W_{NC} , na equação (78), define o princípio de Hamilton na sua forma estendida. Usando a primeira variação do funcional I_f , tem-se que (CARVALHO, 2013):

$$\delta I_f = \int_{t_1}^{t_2} [\delta \mathcal{L}(t) + \delta W_{NC}(t)] dt = 0 \quad (79)$$

sendo:

$\delta \mathcal{L}(t)$: Variação do Lagrangeano;

$\delta W_{NC}(t)$: Trabalho virtual devido forças não conservativas.

O trabalho virtual devido as forças não conservativas é dado por (MALATKAR, 2003):

$$\delta W_{NC} = \int_0^L (Q_u^* \delta u + Q_v^* \delta v + Q_w^* \delta w + Q_\phi^* \delta \phi) ds \quad (80)$$

Na equação (80), os termos Q_α^* ($\alpha = u, v, w$ e ϕ) representam as forças generalizadas associadas com os deslocamentos virtuais $\delta \alpha$ ($\alpha = u, v, w$ e ϕ) e são definidas por (VELÁZQUEZ, 2007):

$$Q_\alpha^* = Q_\alpha - c_\alpha \dot{\alpha} \quad (\alpha = u, v, w \text{ e } \phi) \quad (81)$$

Na equação (81), as quantidades c_α ($\alpha = u, v, w$ e ϕ) constituem os coeficientes de amortecimento viscoso nas suas respectivas direções (CARVALHO, 2013).

A variação do Lagrangeano ($\delta \mathcal{L}(t)$), da equação (79), corresponde a uma variação virtual da energia mecânica da viga, dada por (VELÁZQUEZ, 2007):

$$\delta \mathcal{L}(t) = \int_0^L \delta \ell ds \quad (82)$$

Substituindo a equação (77) em (82), tem-se que:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}(t) = \int_0^L \delta \left\{ \frac{1}{2} m (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2) - \frac{1}{2} (D_x \rho_x^2 \right. \\ \left. + D_\eta \rho_\eta^2 + D_\zeta \rho_\zeta^2) + \frac{1}{2} \lambda [1 - (1 + u')^2 - (v')^2 - (w')^2] \right\} ds \end{aligned} \quad (83)$$

Dessa forma, ao substituir as equações (80) e (83) em (79), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\delta I_f = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \left\{ \frac{1}{2} m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2) - \frac{1}{2} (D_x \rho_x^2 \right. \\
+ D_\eta \rho_\eta^2 + D_\zeta \rho_\zeta^2) + \frac{1}{2} \lambda [1 - (1 + u')^2 - (v')^2 - (w')^2] \left. \right\} ds dt \\
+ \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta (Q_u^* \delta u + Q_v^* \delta v + Q_w^* \delta w + Q_\phi^* \delta \phi) ds dt = 0
\end{aligned} \tag{84}$$

$$\delta I_f = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \delta \mathfrak{R} ds dt = 0 \tag{85}$$

sendo:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R} = \left\{ \frac{1}{2} m(\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) + \frac{1}{2} (J_x \omega_x^2 + J_\eta \omega_\eta^2 + J_\zeta \omega_\zeta^2) - \frac{1}{2} (D_x \rho_x^2 + D_\eta \rho_\eta^2 \right. \\
+ D_\zeta \rho_\zeta^2) + \frac{1}{2} \lambda [1 - (1 + u')^2 - (v')^2 - (w')^2] \left. \right\} + (Q_u^* \delta u + Q_v^* \delta v \\
+ Q_w^* \delta w + Q_\phi^* \delta \phi)
\end{aligned} \tag{86}$$

A análise da equação (86) permite concluir que \mathfrak{R} é uma função com 16 variáveis: $\alpha_i = (\Psi, \theta, \phi, \dot{\Psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \Psi', \theta', \phi', \dot{u}, \dot{v}, \dot{w}, u', v', w', \lambda)$, sendo $1 \leq i \leq 16$. Desse modo, o cálculo da variação de \mathfrak{R} ($\delta \mathfrak{R}$) é feito por meio das suas respectivas derivadas parciais, de acordo com a seguinte expressão (CARVALHO, 2013):

$$\delta \mathfrak{R} = \sum_{i=1}^{16} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \alpha_i} \delta \alpha_i \tag{87}$$

As variações das variáveis dependentes Ψ e θ em função de u', v' e w' são determinadas, a partir das equações (62) e (63) (CARVALHO, 2013):

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u'} = - \frac{v'}{(1 + u')^2 + v'^2} \tag{88}$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial v'} = \frac{(1 + u')}{(1 + u')^2 + v'^2} \tag{89}$$

$$\delta\Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial\Psi}{\partial v'}\delta v' = \frac{-v'\delta u' + (1+u')\delta v'}{(1+u')^2 + v'^2} \quad (90)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial u'} = \frac{(1+u')w'}{[(1+u')^2 + v'^2 + w'^2]\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \quad (91)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial v'} = \frac{v'w'}{[(1+u')^2 + v'^2 + w'^2]\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \quad (92)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial w'} = \frac{(1+u')^2 + v'^2}{[(1+u')^2 + v'^2 + w'^2]\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \quad (93)$$

$$\delta\theta = \frac{\partial\theta}{\partial u'}\delta u' + \frac{\partial\theta}{\partial v'}\delta v' + \frac{\partial\theta}{\partial w'}\delta w' = \frac{[(1+u')\delta u' + v'\delta v']w' - [(1+u')^2 + v'^2]\delta w'}{\sqrt{(1+u')^2 + v'^2}} \quad (94)$$

A equação (85) é desenvolvida através da substituição das derivadas parciais requeridas na equação (87), bem como das equações (88) a (94), o que resulta na seguinte expressão (MALATKAR, 2003):

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_0^L (-m\ddot{u} + Q_u^* + G_u')\delta u ds + \int_0^L (-m\ddot{v} + Q_v^* + G_v')\delta v ds \right. \\ & \quad + \int_0^L (-m\ddot{w} + Q_w^* + G_w')\delta w ds + \int_0^L (Q_\phi^* - A_\phi)\delta\phi ds \\ & \quad + \left[\frac{\partial\ell}{\partial\phi'}\delta\phi - G_u\delta u - G_v\delta v - G_w\delta w + \left(H_v - \frac{H_u}{1+u'}v' \right)\delta v' \right. \\ & \quad \left. \left. + \left(H_w - \frac{H_u}{1+u'}w' \right)\delta w' \right]_{s=0}^{s=L} \right\} dt = 0 \end{aligned} \quad (95)$$

sendo:

$$G_u = A_\psi \frac{\partial\Psi}{\partial u'} + A_\theta \frac{\partial\theta}{\partial u'} + \lambda(1+u') \quad (96)$$

$$G_v = A_\psi \frac{\partial \Psi}{\partial v'} + A_\theta \frac{\partial \theta}{\partial v'} + \lambda v' \quad (97)$$

$$G_w = A_\theta \frac{\partial \theta}{\partial w'} + \lambda w' \quad (98)$$

$$A_\alpha = \frac{\partial^2 \ell}{\partial t \partial \dot{\alpha}} + \frac{\partial^2 \ell}{\partial s \partial \alpha'} - \frac{\partial \ell}{\partial \alpha} \quad ; \quad (\alpha = \psi, \theta, \phi) \quad (99)$$

$$H_\alpha = \frac{\partial \ell}{\partial \psi'} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha'} + \frac{\partial \ell}{\partial \theta'} \frac{\partial \theta}{\partial \alpha'} \quad ; \quad (\alpha = u, v, w) \quad (100)$$

Como a equação (95) é válida para qualquer ∂u , ∂v , ∂w e $\partial \phi$, os integrandos contidos nas integrais são iguais à zero (MALATKAR, 2003). Dessa forma, as seguintes equações diferenciais e condições de contorno de uma viga engastada são alcançadas:

$$m_v \ddot{u} - Q_u^* = G'_u \quad (101)$$

$$m_v \ddot{v} - Q_v^* = G'_v \quad (102)$$

$$m_v \ddot{w} - Q_w^* = G'_w \quad (103)$$

$$Q_\phi^* = A_\phi \quad (104)$$

$$\left[\frac{\partial \ell}{\partial \phi'} \delta \phi - G_u \delta u - G_v \delta v - G_w \delta w + \left(H_v - \frac{H_u}{1 + u'} v' \right) \delta v' + \left(H_w - \frac{H_u}{1 + u'} w' \right) \delta w' \right]_{s=0}^{s=L} = 0 \quad (105)$$

O multiplicador de Lagrange λ , presente nas equações (96), (97) e (98), é entendido como uma força tangente ao eixo neutro da viga, sendo necessária para manter a condição de elemento inextensível da equação (61) (CARVALHO, 2013).

As equações (101) a (105) são de difícil resolução haja vista à natureza transcendental da maioria dos seus termos (MALATKAR, 2003). Uma aproximação

coerente envolve expandir os termos polinomiais em séries de Taylor, retendo-os até a terceira ordem (MALATKAR, 2003).

4.2.6 Equações de Movimento de Terceira Ordem

Cada termo das equações (101) a (105) são expandidos em séries de Taylor até termos de terceira ordem.

O processo de simplificação inicia com a obtenção das equações u' , Ψ e θ . Assim, essas equações são expandidas por meio da série de Taylor do $arctg(x)$, dada por (MALATKAR, 2003):

$$arctgx \approx x - \frac{1}{3}x^3 + \dots \quad (106)$$

A equação (106) é combinada com as equações (61), (62) e (63), resultando em (MALATKAR, 2003):

$$u' = [1 - (v')^2 - (w')^2]^{\frac{1}{2}} - 1 = -\frac{1}{2}[(v')^2 - (w')^2] + \dots \quad (107)$$

$$tg\Psi = \frac{v'}{1 + u'} \Rightarrow \Psi = arctg\left(\frac{v'}{\sqrt{1 - v'^2 - w'^2}}\right)$$

$$\Psi \approx v' + \frac{1}{6}v'^3 + \frac{1}{2}v'w'^2 + \frac{1}{40}v'^5 + \dots$$

$$\Psi \approx v' \left(1 + \frac{1}{6}v'^2 + \frac{1}{2}w'^2\right) \quad (108)$$

$$tg\theta = \frac{-w'}{\sqrt{(1 + u')^2 + (v')^2}} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{-w'}{\sqrt{1 - w'^2}}\right)$$

$$\theta \approx -w' - \frac{1}{6}w'^3 - \frac{3}{40}w'^5 + \dots$$

$$\theta \approx w' \left(1 + \frac{1}{6}w'^2\right) \quad (109)$$

As equações (106) e (107) permitem eliminar, das equações finais de movimento, os termos angulares Ψ e θ .

Da mesma forma, tem-se que:

$$\operatorname{sen} \alpha \approx \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \frac{1}{120} \alpha^5 + \dots \approx \alpha \quad ; \quad (\alpha = \Psi, \theta, \phi) \quad (110)$$

$$\operatorname{cos} \alpha \approx 1 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \frac{1}{24} \alpha^4 + \dots \approx 1 \quad ; \quad (\alpha = \Psi, \theta, \phi) \quad (111)$$

Adicionalmente, segundo Malatkar (2003), ϕ não representa fisicamente o ângulo real de torção em relação aos eixos da viga. Por isso, utiliza-se a curvatura de torção ρ_χ , definida a partir das equações (58) e (59) como:

$$\rho_\chi = \phi' - \Psi' \operatorname{sen} \theta \quad (112)$$

Substituindo as equações (108), (109), (110) e (111) em (112), tem-se que:

$$\rho_\chi = \phi' + v'' w' \quad (113)$$

A equação (113) é integrada ao longo de todo comprimento da viga afim de obter a expressão do ângulo de torção (VELÁZQUEZ, 2007):

$$\gamma \equiv \phi + \int_0^s v'' w' ds \quad (114)$$

Comparando as equações (113) e (114), tem-se que $\rho_\chi = \gamma'$.

A análise segue e como a inércia de rotação é considerada muito pequena quando comparada com a inércia de translação, tem-se que o momentos de inércia da viga em torno dos eixos χ , η e ζ são desprezíveis (MALATKAR, 2003):

$$J_\chi \cong 0 ; J_\eta \cong 0 ; J_\zeta \cong 0 \quad (115)$$

Em seguida, usando as equações (107) a (111) e (114) nas equações (101) a (104), considerando $Q_\phi^* = 0$ e aplicando as simplificações da equação (115), bem como retendo termos não lineares até a terceira ordem, obtêm-se (MALATKAR, 2003):

$$m\ddot{u} + c_u\dot{u} - Q_u = \{D_x\gamma'(w''v' - v''w') - (D_\eta - D_\zeta)[w'(v''\gamma)' + v'(w''\gamma)']\} \\ + D_\zeta v'''v' + D_\eta w'''w' + \lambda(1 + u')\}' \quad (116)$$

$$m\ddot{v} + c_v\dot{v} - Q_v = \{-D_x\gamma'w'' + (D_\eta - D_\zeta)\left[(w''\gamma)' - (v''\gamma^2)' + w''' \int_0^s v'w'' ds\right]\} \\ - D_\zeta[v''' + v'(v''^2 + w''^2)] + \lambda v'\}' \quad (117)$$

$$m\ddot{w} + c_w\dot{w} - Q_w = \{D_x\gamma'v'' + (D_\eta - D_\zeta)\left[(v''\gamma)' + (w''\gamma^2)' - v''' \int_0^s w'v'' ds\right]\} \\ - D_\eta[w''' + w'(v''^2 + w''^2)] + \lambda w'\}' \quad (118)$$

$$D_x\gamma'' = (D_\eta - D_\zeta)[\gamma(v''^2 - w''^2) - v''w''] \quad (119)$$

As equações (116) a (119) são as equações de movimento da viga engastada.

As expansões dos termos referentes às condições de contorno da equação (105), resultam em (CARVALHO, 2013):

$$\frac{\partial \ell}{\partial \phi'} \partial \phi = -D_x(\phi' + v''w') \quad (120)$$

$$\left[H_v - \frac{H_u}{1 + u'}v'\right] \approx -D_x(\phi' + v''w') - (D_\eta - D_\zeta)(v''\phi^2 - w''\phi) \\ - D_\zeta[v'' + v'(v'v'' + w'w'')] \quad (121)$$

$$\left[H_w - \frac{H_w}{1 + u'}w'\right] \approx (D_\eta - D_\zeta)(w''\phi^2 - v''\phi) - D_\eta w'' - w'(D_\zeta v'v'' + D_\eta w'w'') \quad (122)$$

As condições de contorno para uma viga engastada, obtidas através das equações (120) a (122), são dadas por (MALATKAR, 2003):

$$\alpha(0, t) = 0 \quad ; \quad (\alpha = u, v, w, \gamma, v', w') \quad (123)$$

$$\alpha(L, t) = 0 \quad ; \quad (\alpha = v'', v''', w'', w''', \gamma') \quad (124)$$

$$G_\alpha(L, t) = 0 \quad ; \quad (u, v, w) \quad (125)$$

As variáveis u, v, w, λ e γ podem ser adequadamente reordenadas, de acordo com as características do problema, afim de simplificar as equações de movimento. Para o presente trabalho, as equações (117) e (118) são simplificadas através da expansão em séries de Taylor das variáveis u, λ e γ . Para isso, primeiro obtêm-se u diretamente da expansão da equação (107), tendo como resultado (VELÁZQUEZ, 2007):

$$u = -\frac{1}{2} \int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \quad (126)$$

Em seguida, o multiplicador de Lagrange (λ) é definido quando são consideradas, na equação (116), as condições de contorno $u(0, t) = 0, \gamma(0, t) = 0, \gamma'(L, t) = 0, G_u(L, t) = 0, c_u \dot{u} \cong 0$, a equação (126), bem como apenas termos de ordem superior a dois (MALATKAR, 2003):

$$\lambda = D_\zeta v'''' v' - D_\eta w'''' w' - \frac{1}{2} m \int_L^s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^s [v'^2 + w'^2] ds \right] ds - \int_L^s Q_u ds \quad (127)$$

O ângulo de torção é encontrado através da integração dupla da equação (119), na qual, são retidos apenas termos de ordem superior a dois, resultando em:

$$\gamma = -\frac{D_\eta - D_\zeta}{D_\chi} \int_0^s \int_L^s v'' w'' ds \quad (128)$$

A equação (127), como já mencionada, é interpretada como uma força axial necessária para manter a condição de viga inextensível. Já a equação (128), indica que a flexão induzida por torção é um fenômeno não linear (MALATKAR, 2003).

Por fim, substituindo as equações (127) e (128) em (117) e (118), obtêm-se equações de movimento que, por sua vez, descrevem vibrações flexionais e consideram termos não lineares gerados pela curvatura e inércia da viga (MALATKAR, 2003):

$$\begin{aligned}
m\ddot{v} + c_v\dot{v} + D_\zeta v'''' &= Q_v \\
&+ \left\{ (D_\eta - D_\zeta) \left[w'' \int_L^s v'' w'' ds - w'''' \int_0^s v'' w' ds \right] \right. \\
&- \left. \frac{(D_\eta - D_\zeta)^2}{D_x} \left(w'' \int_0^s \int_L^s v'' w'' ds ds \right)' \right\} \\
&- D_\zeta \{ v'(v'v'' + w'w'')' \}' \\
&- \frac{1}{2} m \left\{ v' \int_L^s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right] ds \right\}' - \left(v' \int_L^s Q_u ds \right)'
\end{aligned} \tag{129}$$

$$\begin{aligned}
m\ddot{w} + c_w\dot{w} + D_\eta w'''' &= Q_w \\
&- \left\{ (D_\eta - D_\zeta) \left[v'' \int_L^s v'' w'' ds - v'''' \int_0^s w'' v' ds \right] \right. \\
&+ \left. \frac{(D_\eta - D_\zeta)^2}{D_x} \left(v'' \int_0^s \int_L^s v'' w'' ds ds \right)' \right\} \\
&- D_\eta \{ w'(v'v'' + w'w'')' \}' \\
&- \frac{1}{2} m \left\{ w' \int_L^s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^s (v'^2 + w'^2) ds \right] ds \right\}' - \left(w' \int_L^s Q_u ds \right)'
\end{aligned} \tag{130}$$

As condições de contorno para as equações (129) e (130) são dadas por:

$$\alpha(0, t) = 0 \quad ; \quad (\alpha = v, w, v', w') \tag{131}$$

$$\alpha(L, t) = 0 \quad ; \quad (\alpha = v'', v''', w'', w''') \tag{132}$$

4.2.7 Equação Resultante do Modelo de Cabo Mensageiro

Finalmente, as equações (129) e (130) são reduzidas com o intuito de obter a equação final do modelo de cabo mensageiro. Para isso, são realizadas as seguintes simplificações:

- a) De acordo com a Figura 38, o movimento do cabo ocorre no plano (x, y) devido à força de excitação vertical na base. Em função disso, o deslocamento transversal w e a força generalizada na direção z são nulos:

$$w = 0 \ ; \ Q_w = 0 \quad (133)$$

- b) A força generalizada na direção x é zero e na direção y é a composição da força excitadora da base mais a influência da força peso, ambas por unidade de comprimento da viga:

$$Q_u = 0 \quad (134)$$

$$Q_v = ma_b \cos(\omega t) - mg \quad (135)$$

sendo a_b a amplitude de aceleração da base e g a aceleração da gravidade, adotada como $9,8 \text{ m/s}^2$.

- c) Não são considerados os efeitos de inércia, portanto:

$$v' \int_L^s \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[\int_0^s v'^2 ds \right] ds = 0 \quad (136)$$

- d) A rigidez a flexão D_ζ é definida em torno do eixo ζ que, por sua vez, é paralelo ao eixo z . Essa rigidez do cabo em torno do eixo z , de acordo com Timoshenko (1940), pode ser definida como EI , o que permite reescrever D_ζ como:

$$D_\zeta = EI \quad (137)$$

sendo I o momento de inércia de uma viga com seção circular de raio r_c e material isotrópico, dado por $I = \pi r_c^4 / 4$ (HIBBELER, 2010).

e) A massa por unidade de comprimento do cabo é utilizada em sua forma alternativa:

$$m = \rho_c A \quad (138)$$

sendo ρ a massa específica do cabo mensageiro.

Como consequência, a aplicação das equações (133) a (138) simplifica as equações (129) e (130), resultando na equação final do modelo de cabo mensageiro:

$$\rho_c A \ddot{v} + c_v \dot{v} + EI v'''' = \rho_c A a_b \cos(\omega t) - \rho_c A g - EI \{v'(v'v'')'\}' \quad (139)$$

A equação (139) pode ser reescrita na seguinte forma:

$$\rho_c A \ddot{v} + c_v \dot{v} + EI v'''' - F_{eh} - F_g + EI \{v' f_1\}' = 0 \quad (140)$$

sendo:

$$F_{eh} = \rho_c A a_b \cos(\omega t) \quad (141)$$

$$F_g = \rho_c A g \quad (142)$$

$$f_1 = (v'v'')' \quad (143)$$

A equação de movimento (140) corresponde a vibração não linear de uma viga engastada, simplificada e adaptada para representar o comportamento dinâmico do cabo mensageiro. A equação (141) está associada com a excitação harmônica da base. Já as equações (142) e (143) dizem respeito, respectivamente, à força gravitacional e efeitos não lineares de curvatura da viga.

4.3 MODELO DA MASSA INERCIAL

O modelo da massa inercial, adotado neste trabalho, tem como base as pesquisas desenvolvidas por Silva Neto (1999), Pereira Silva (2006), Barbieri e Barbieri (2012). Desse modo, a partir desses estudos é obtido a contribuição inercial da massa suspensa no amortecedor *Stockbridge*.

4.3.1 Considerações do Modelo

A massa suspensa do ADV é modelada como um corpo rígido, cujo movimento dinâmico é ilustrado na Figura 42. Essa movimentação tem como referência um sistema de coordenadas global (x, y, z) , com origem no ponto O .

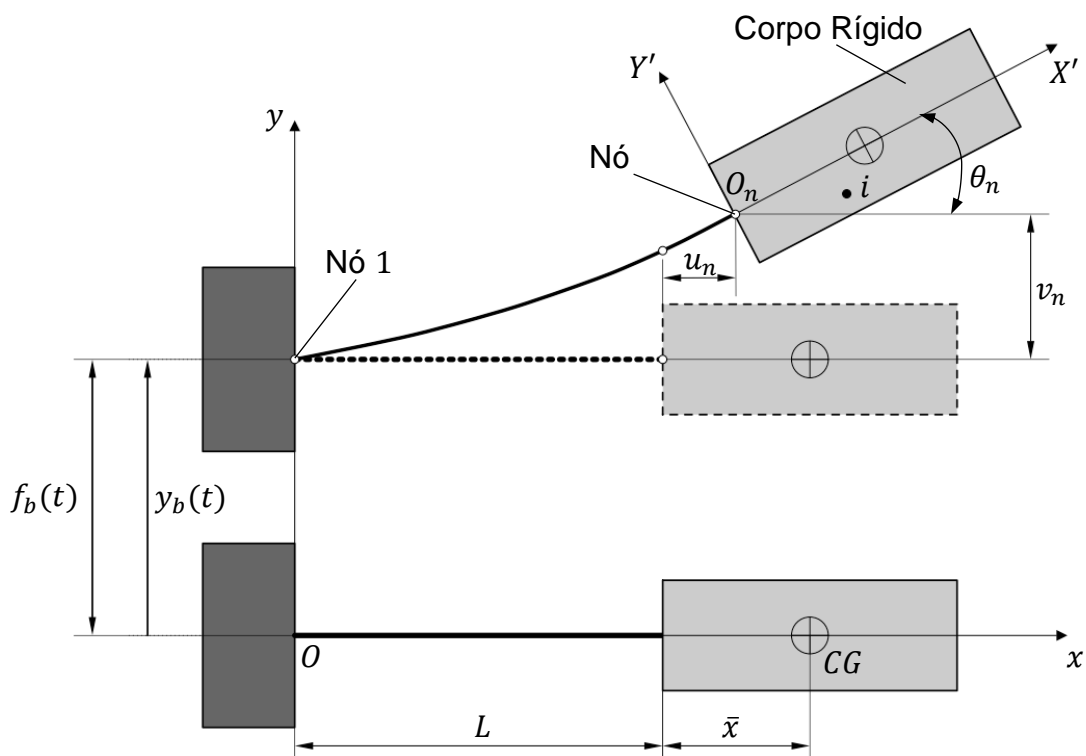


Figura 42 - Sistema de referência e deslocamentos admissíveis do corpo rígido.
Fonte: Barbieri e Barbieri, 2012 (Modificado).

Com base na Figura 42, o modelo de corpo rígido adotado tem as seguintes considerações:

- Sistema local de coordenadas (X', Y', Z') com origem no ponto O_n ;

- b) Os planos xy e $X'Y'$ são coincidentes, bem como os eixos z e Z' são paralelos;
- c) O corpo rígido possui massa m_{cr} e centro de massa CG definido no ponto $(\bar{x}, 0, 0)$ em relação à O_n ;
- d) O acoplamento entre o corpo rígido e o cabo mensageiro ocorre no ponto n (nó n), o qual, está localizado nas coordenadas $O(x_n, y_n, 0)$ em relação à O ;
- e) O ponto n corresponde ao último nó da malha de elementos finitos do cabo mensageiro;
- f) O corpo rígido apresenta movimento no plano xy e está sujeito, por meio do nó n , aos deslocamentos axial (u_n), transversal (v_n) e rotacional (θ_n);

4.3.2 Equações de Movimento

As equações de movimento do corpo rígido em termos dos deslocamentos u_n, v_n e θ_n do nó n , podem ser determinadas a partir das equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_\alpha} + \frac{\partial V}{\partial q_\alpha} = F_\alpha \quad \text{com } \alpha = 1, 2, \dots, n_q \quad (144)$$

sendo:

q_α : Coordenada generalizada do deslocamento;

\dot{q}_α : Coordenada generalizada da velocidade;

V : Energia potencial;

F_α : Força generalizada não conservativa;

n_q : Número de coordenadas generalizadas ou graus de liberdade.

O desenvolvimento da equação (144) inicia com a determinação da energia cinética em um ponto i qualquer do corpo rígido, dada por (HIBBELER, 2010):

$$T_i = \frac{1}{2} m_i (\dot{\vec{r}}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i) \quad (145)$$

sendo:

m_i : Massa do ponto i ;

$\dot{\vec{r}}_i$: Vetor velocidade do ponto i em relação a O .

De acordo com as Figuras 42 e 43, a posição do ponto i está relacionado com o ponto n através da seguinte relação vetorial:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_n + \vec{r}_{i/n} \quad (146)$$

sendo:

\vec{r}_i : Vetor posição do ponto i em relação à origem O ;

\vec{r}_n : Vetor posição do ponto n em relação à origem O ;

$\vec{r}_{i/n}$: Vetor posição do ponto i em relação à origem O_n no ponto n .

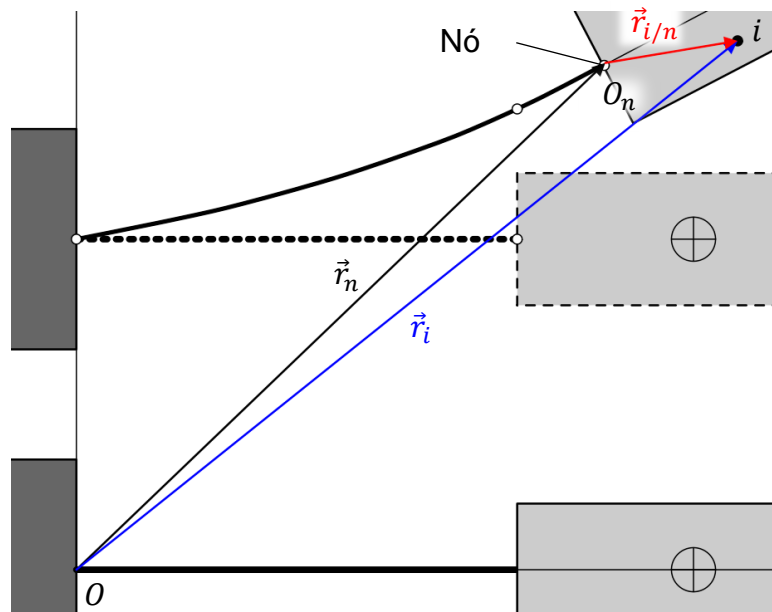


Figura 43 – Vetores posição do ponto i do corpo rígido.
Fonte: O Autor.

A derivada temporal da equação (146) permite obter a velocidade do ponto i :

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_n + \vec{\omega}_{cr} \times \vec{r}_{i/n} + \dot{\vec{r}}_{i/n} \quad (147)$$

sendo:

$\dot{\vec{r}}_n$: Vetor velocidade do ponto n ;

$\vec{\omega}_{cr}$: Vetor velocidade angular do corpo rígido;

$\dot{\vec{r}}_{i/n}$: Vetor velocidade linear do ponto i em relação ao ponto n .

Considerando que os pontos i e n tem a mesma velocidade linear e, portanto, com velocidade relativa igual a zero ($\dot{\vec{r}}_{i/n} = 0$), a equação (147) pode ser simplificada para:

$$\dot{\vec{r}}_i = \dot{\vec{r}}_n + \vec{\omega}_{cr} \times \vec{r}_{i/n} \quad (148)$$

Substituindo a equação (148) em (145), encontra-se a energia cinética para o i -ésimo ponto do corpo rígido:

$$T_i = \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n) m_i + \dot{\vec{r}}_n \cdot (\vec{\omega}_{cr} \times \vec{r}_{i/n}) m_i + \frac{1}{2} (\vec{\omega}_{cr} \times \vec{r}_{i/n}) \cdot (\vec{\omega}_{cr} \times \vec{r}_{i/n}) m_i \quad (149)$$

A energia cinética do corpo rígido é dada pela soma das energias cinéticas de todos os seus pontos. Considerando $m_i \rightarrow dm_{cr}$, ao integrar e simplificar a equação (149), tem-se a energia cinética T total do corpo:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{\vec{r}}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n) m_{cr} + \dot{\vec{r}}_n \cdot \left(\vec{\omega}_{cr} \times \int_{m_{cr}} \vec{r}_{i/n} dm_{cr} \right) + \frac{1}{2} \vec{\omega}_{cr} \cdot \int_{m_{cr}} \vec{r}_{i/n} \times (\vec{\omega}_{cr} \times \vec{r}_{i/n}) dm_{cr} \quad (150)$$

O vetor velocidade $\dot{\vec{r}}_n$ é obtido a partir do vetor \vec{r}_n . Esse vetor posição pode ser expresso em coordenadas vetoriais a partir da Figura 42:

$$\vec{r}_n = (L + u_n) \vec{e}_x + (y_b + v_n) \vec{e}_y + w_n \vec{e}_z \quad (151)$$

$$\dot{\vec{r}}_n = \dot{u}_n \vec{e}_x + (\dot{y}_b + \dot{v}_n) \vec{e}_y \quad (152)$$

sendo:

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$: Vetores unitários do sistema de coordenadas global $O(x, y, z)$;

$\dot{\alpha}$ ($\alpha = u_n, v_n$): Componentes do vetor velocidade no ponto n ;

\dot{y}_b : Velocidade da base de excitação;

$w_n = 0$: Deslocamento nulo do nó n na direção do eixo z .

Substituindo a equação (152) na primeira parcela do lado direito da equação (149), obtêm-se:

$$\frac{1}{2}(\dot{\vec{r}}_n \cdot \dot{\vec{r}}_n)m_{cr} = \frac{1}{2}m_{cr}(\dot{u}_n^2 + \dot{y}_b^2 + 2\dot{y}_b\dot{v}_n + \dot{v}_n^2) \quad (153)$$

Para calcular a segunda parcela do lado direito da equação (150), torna-se necessário desenvolver a integral $\int_{m_{cr}} \vec{r}_{i/n} dm_{cr}$:

$$\int_{m_{cr}} \vec{r}_{i/n} dm_{cr} = \int_{m_{cr}} x_{i/n} \vec{e}_{X'} dm_{cr} + \int_{m_{cr}} y_{i/n} \vec{e}_{Y'} dm_{cr} + \int_{m_{cr}} z_{i/n} \vec{e}_{Z'} dm_{cr} \quad (154)$$

sendo:

$\alpha_{i/n}$ ($\alpha = x, y, z$): Componentes escalares do vetor $\vec{r}_{i/n}$;

$\vec{e}_{X'}, \vec{e}_{Y'}, \vec{e}_{Z'}$: Vetores unitários do sistema de coordenadas local $O_n(X', Y', Z')$.

Em contrapartida, as coordenadas do centro de massa CG do corpo rígido $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, em relação à origem O_n , podem ser calculadas da seguinte maneira:

$$\bar{x} = \frac{1}{m_{cr}} \int_{m_{cr}} x_{i/n} dm_{cr} \quad (155)$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m_{cr}} \int_{m_{cr}} y_{i/n} dm_{cr} \quad (156)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{m_{cr}} \int_{m_{cr}} z_{i/n} dm_{cr} \quad (157)$$

As integrais das equações (155) a (157) são equivalentes às integrais da equação (154), o que permite reescrever essa expressão da seguinte forma:

$$\int_{m_{cr}} \vec{r}_{i/n} dm_{cr} = m_{cr}(\bar{x}\vec{e}_{X'} + \bar{y}\vec{e}_{Y'} + \bar{z}\vec{e}_{Z'}) = m_{cr}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \quad (158)$$

Como o movimento do corpo rígido ocorre no plano xy , conforme mostra a Figura 42, a equação (158) é simplificada para:

$$\int_{m_{cr}} \vec{r}_{i/n} dm_{cr} = m_{cr}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = m_{cr}(\bar{x}, 0, 0) \quad (159)$$

Entretanto, a equação (159) está em termos das coordenadas locais. Em função disso, aplica-se uma transformação de coordenadas locais para coordenadas globais:

$$\int_{m_{cr}} \vec{r}_{i/n} dm_{cr} = m_{cr}(\bar{x}, 0, 0) = m_{cr}\bar{x}\vec{e}_{x'} = m_{cr}\bar{x}(\cos\theta_n\vec{e}_x + \sin\theta_n\vec{e}_y) \quad (160)$$

Considerando θ_n pequeno, tem-se que $\cos\theta_n \cong 1$ e $\sin\theta_n \cong 0$, o que permite simplificar a equação (160), resultando em:

$$\int_{m_{cr}} \vec{r}_{i/n} dm_{cr} = m_{cr}\bar{x}\vec{e}_x \quad (161)$$

Adicionalmente, de acordo com a Figura 42, as coordenadas do vetor velocidade angular são:

$$\vec{\omega}_{cr} = (0, 0, \dot{\theta}_n) = \dot{\theta}_n\vec{e}_z \quad (162)$$

sendo $\dot{\theta}_n$ a derivada temporal do deslocamento angular no ponto n .

Substituindo as equações (152), (161) e (162) na segunda parcela da direita da equação (150), tem-se que:

$$\dot{\vec{r}}_n \cdot \left(\vec{\omega}_{cr} \times \int_{m_{cr}} \vec{r}_{i/n} dm_{cr} \right) = m_{cr}\bar{x}\dot{\theta}_n(\dot{y}_b + \dot{v}_n) \quad (163)$$

Na sequência das deduções, como o eixos z e Z são paralelos, a equação (162) pode ser reescrita na forma:

$$\vec{\omega}_{cr} = (0, 0, \dot{\theta}_n) = \dot{\theta}_n \vec{e}_{Z'} \quad (164)$$

Substituindo a equação (162) e as componentes do vetor $\vec{r}_{i/n}$ na terceira parcela da direita da equação (150), obtêm-se:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \vec{\omega}_{cr} \cdot \int_{m_{cr}} \vec{r}_{i/n} \times (\vec{\omega}_{cr} \times \vec{r}_{i/n}) dm_{cr} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_n \vec{e}_{Z'} \cdot \int_{m_{cr}} (x_{i/n} \vec{e}_{X'} + y_{i/n} \vec{e}_{Y'} + z_{i/n} \vec{e}_{Z'}) \times (\dot{\theta}_n \vec{e}_{Z'} \times (x_{i/n} \vec{e}_{X'} + y_{i/n} \vec{e}_{Y'} + z_{i/n} \vec{e}_{Z'})) dm_{cr} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_n \vec{e}_{Z'} \cdot \int_{m_{cr}} \dot{\theta}_n (x_{i/n}^2 + y_{i/n}^2) \vec{e}_{Z'} dm_{cr} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_n^2 \int_{m_{cr}} r_{i/n}^2 dm_{cr} \\ &= \frac{1}{2} \dot{\theta}_n^2 I_n \\ & \therefore \frac{1}{2} \vec{\omega}_{cr} \cdot \int_{m_{cr}} \vec{r}_{i/n} \times (\vec{\omega}_{cr} \times \vec{r}_{i/n}) dm_{cr} = \frac{1}{2} \dot{\theta}_n^2 I_n \end{aligned} \quad (165)$$

Na equação (165), o termo I_n representa o momento polar de inércia em relação à origem O_n , no ponto n . Pela teoria dos eixos paralelos, o momento de inércia I_n em relação ao nó n pode ser definido como:

$$I_n = I_{CG} + m_{cr} \bar{x}^2 \quad (166)$$

sendo I_{CG} o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa CG do corpo rígido e é perpendicular ao plano XY .

Finalmente, substituindo as equações (153), (163) e (165) na equação (150), obtêm-se a equação final para a energia cinética do corpo rígido da Figura 42 (BARBIERI; BARBIERI, 2012):

$$T = \frac{1}{2} m_{cr} (\dot{u}_n^2 + \dot{y}_b^2 + 2\dot{y}_b \dot{v}_n + \dot{v}_n^2) + m_{cr} \bar{x} \dot{\theta}_n (\dot{y}_b + \dot{v}_n) + \frac{1}{2} \dot{\theta}_n^2 I_n \quad (167)$$

Já a energia potencial do corpo rígido é definida com base nos deslocamentos do nó n , através da seguinte expressão (SILVA NETO, 1999):

$$V = \frac{1}{2} \{q_n\}^T [K_n] \{q_n\} - f_b(t) y_b(t) \quad (168)$$

sendo:

$\{q_n\}$: Vetor deslocamento do nó n ;

$[K_n]$: Matriz rigidez associado ao nó n , devido acoplamento entre corpo rígido e cabo mensageiro.

A equação (168) pode ser expandida e rearranjada na forma matricial:

$$V = \frac{1}{2} \{u_n \quad v_n \quad \theta_n \quad 0\} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} & 0 \\ 0 & K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_n \\ 0 \end{Bmatrix} - \{0 \quad 0 \quad 0 \quad f_b(t)\} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ y_b(t) \end{Bmatrix} \quad (169)$$

Dessa forma, substituindo as equações (167) e (169) nas equações de Lagrange (equação (144)), obtêm-se o seguinte sistema de equações na forma matricial (SILVA NETO, 1999. PEREIRA SILVA, 2006. BARBIERI; BARBIERI, 2012):

$$\begin{bmatrix} m_{cr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{cr} & \bar{x}m_{cr} & m_{cr} \\ 0 & \bar{x}m_{cr} & I_n & \bar{x}m_{cr} \\ 0 & m_{cr} & \bar{x}m_{cr} & m_{cr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_n \\ \ddot{v}_n \\ \ddot{\theta}_n \\ \ddot{y}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} & 0 \\ 0 & K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_n \\ v_n \\ \theta_n \\ y_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_b(t) \end{Bmatrix} \quad (170)$$

Uma vez que o cabo mensageiro é modelado como uma viga de Euler-Bernoulli e inextensível, tem-se que o deslocamento axial (u_n) é nulo. Conseqüentemente, o nó n apresenta dois graus de liberdade, v_n e θ_n , o que permite simplificar a equação (170):

$$\begin{bmatrix} m_{cr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{cr} & \bar{x}m_{cr} & m_{cr} \\ 0 & \bar{x}m_{cr} & I_n & \bar{x}m_{cr} \\ 0 & m_{cr} & \bar{x}m_{cr} & m_{cr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{v}_n \\ \ddot{\theta}_n \\ \ddot{y}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11} & K_{12} & 0 \\ 0 & K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_n \\ \theta_n \\ y_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ f_b(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} m_{cr} & \bar{x}m_{cr} & m_{cr} \\ \bar{x}m_{cr} & I_n & \bar{x}m_{cr} \\ m_{cr} & \bar{x}m_{cr} & m_{cr} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_n \\ \ddot{\theta}_n \\ \ddot{y}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n \\ \theta_n \\ y_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_b(t) \end{Bmatrix} \quad (171)$$

A equação (171) pode ser particionada em outras duas equações (SILVA NETO, 1999):

$$\{m_{cr} \quad \bar{x}m_{cr}\} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_n \\ \ddot{\theta}_n \end{Bmatrix} + m_{cr}\ddot{y}_b = f_b(t) \quad (172)$$

$$\begin{bmatrix} m_{cr} & \bar{x}m_{cr} \\ \bar{x}m_{cr} & I_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{v}_n \\ \ddot{\theta}_n \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_n \\ \theta_n \end{Bmatrix} = -\{m_{cr} \quad \bar{x}m_{cr}\} \ddot{y}_b \quad (173)$$

A equação (172) corresponde ao movimento da base, enquanto que a equação (173) representa o movimento dinâmico da massa suspensa quando acoplado ao cabo mensageiro do absorvedor *Stockbridge*.

A equação (173) é reescrita na forma:

$$[m_{cr}]\{\ddot{q}_n\} + [K_n]\{q_n\} = \{f_{ms}\} \quad (174)$$

sendo:

$[m_{cr}]$: Matriz massa referente à massa inercial do ADV:

$$[m_{cr}] = \begin{bmatrix} m_{cr} & \bar{x}m_{cr} \\ \bar{x}m_{cr} & I_n \end{bmatrix} \quad (175)$$

$\{\ddot{q}_n\}$: Vetor aceleração do nó n :

$$\{\ddot{q}_n\} = \begin{Bmatrix} \ddot{v}_n \\ \ddot{\theta}_n \end{Bmatrix} \quad (176)$$

$\{f_{ms}\}$: Vetor força da massa suspensa devido a aceleração da base \ddot{y}_b :

$$\{f_{ms}\} = -\{m_{cr} \quad \bar{x}m_{cr}\} \ddot{y}_b \quad (177)$$

A base da viga é excitada de acordo com a seguinte expressão:

$$\ddot{y}_b = a_b \cos(\omega t) \quad (178)$$

Desse modo, o vetor força da massa suspensa pode ser reescrito substituindo a equação (178) em (177):

$$\{f_{ms}\} = - \begin{Bmatrix} m_{cr} \\ \bar{x}m_{cr} \end{Bmatrix} a_b \cos(\omega t) \quad (179)$$

4.4 ANÁLISE NUMÉRICA

O caminho adotado para resolver a equação diferencial (140) do cabo mensageiro e adicionar a contribuição da massa inercial, dada pela equação (173), envolveu encontrar uma solução aproximada através da discretização do cabo mensageiro em elementos finitos de viga.

Para isso, em um primeiro momento, a equação (140) é particionada em coordenadas espaciais através do Método dos Resíduos Ponderados de Galerkin. Em seguida, a equação resultante é discretizada no domínio do tempo por meio da Técnica de Newmark.

4.4.1 Método dos Resíduos Ponderados de Galerkin

Este procedimento envolveu as seguintes etapas:

- Criação da malha de nós através do MEF;
- Emprego da função aproximadora;
- Definição da equação do elemento finito de viga;
- Composição dos elementos finitos;
- Implementação das equações da massa inercial no último nó;
- Aplicação das condições de contorno.

4.4.1.1 Concepção da Malha Nodal

Através do MEF, o cabo mensageiro foi discretizado em $n_n - 1$ elementos finitos de viga, considerando n_n o número de nós, conforme ilustra a Figura 44. O nó 1 é engastado com o objetivo de representar adequadamente a condição de ensaio. O nó n corresponde ao ponto no qual o corpo rígido é acoplado.

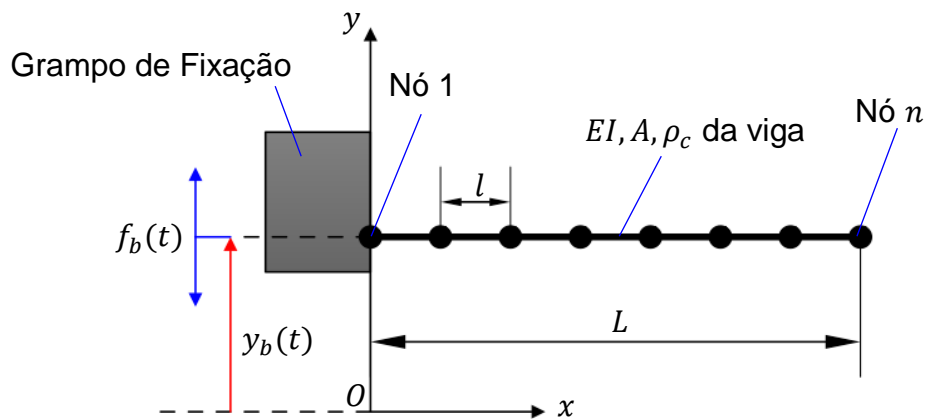


Figura 44 - Discretização do cabo mensageiro modelado como uma viga de Euler-Bernoulli.
Fonte: O Autor.

sendo l o comprimento do elemento finito de viga.

A partir da Figura 44, isola-se um elemento finito de viga ev (Figura 45). Cada nó deste elemento é modelado com dois graus de liberdade, ou seja, apresenta deslocamento transversal q_1 e q_3 , bem como deslocamento rotatório q_2 e q_4 .

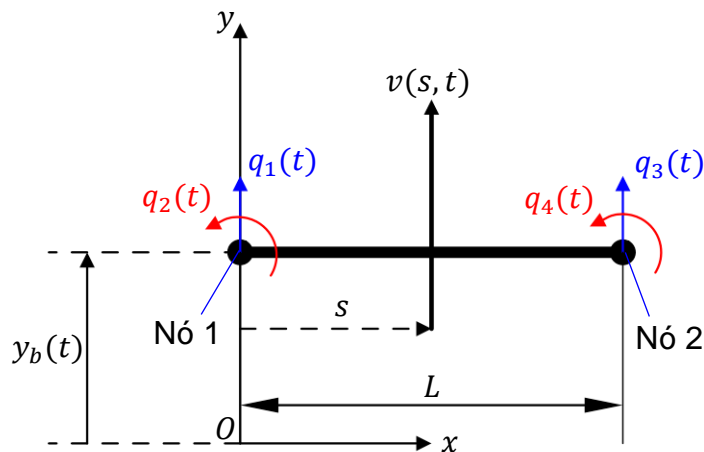


Figura 45 – Elemento de viga ev .
Fonte: O Autor.

De acordo com RAO (2008), o deslocamento $v(s, t)$ pode ser expressado em termos dos deslocamentos $q_i(t)$ não conhecidos dos nós desse elemento:

$$v(s, t) \cong \sum_{i=1}^{2n_n} N_i(s)q_i(t) \quad (180)$$

sendo $N_i(s)$ denominado de função de forma do deslocamento nodal $q_i(t)$.

Na equação (180), $2n_n$ representa o número de deslocamentos nodais e para o elemento finito da Figura 45, $2n_n = 4$.

De acordo com Inman (2007) as funções de forma que descrevem o comportamento transversal de um elemento de viga são:

$$N_1(s) = 1 - 3\left(\frac{s}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{l}\right)^3 \quad (181)$$

$$N_2(s) = s - 2l\left(\frac{s}{l}\right)^2 + l\left(\frac{s}{l}\right)^3 \quad (182)$$

$$N_3(s) = 3\left(\frac{s}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{s}{l}\right)^3 \quad (183)$$

$$N_4(s) = -l\left(\frac{s}{l}\right)^2 + l\left(\frac{s}{l}\right)^3 \quad (184)$$

4.4.1.2 Função Aproximadora

A equação (180) representa uma função deslocamento aproximada, a qual, pode ser empregada na equação (140) com o intuito de obter a equação de movimento do elemento finito de viga:

$$\rho_c A \sum_{i=1}^4 N_i \ddot{q}_i + c_v \sum_{i=1}^4 N_i \dot{q}_i + EI \sum_{i=1}^4 N_i'''' q_i - F_{eh} - F_g + EI \left(\sum_{i=1}^4 N_i' q_i f_1 \right)' = R_x \quad (185)$$

Como resultado, a equação (185) tem um valor residual R_x devido o emprego das funções interpoladoras $N_i(s)$ na equação (140). Com o propósito de minimizar este resíduo, emprega-se o Método dos Resíduos Ponderados de Galerkin através da seguinte expressão:

$$\int_0^l N_j R_x ds = 0 \quad (186)$$

A equação (186) é encontrada em (185) multiplicando a função de forma em ambos os lados da equação e integrando cada termo sobre todo o comprimento do elemento finito, o que resulta em (VELÁZQUEZ, 2007):

$$\begin{aligned} & [\rho_c A \sum_{i=1}^4 \int_0^l N_j N_i ds] \ddot{q}_i + [c_v \sum_{i=1}^4 \int_0^l N_j N_i ds] \dot{q}_i + [EI \sum_{i=1}^4 \int_0^l N_j N_i'''' ds] q_i - \int_0^l N_j F_{eh} ds \\ & - \int_0^l N_j F_g ds + EI \int_0^l N_j \left\{ \left(\sum_{i=1}^4 N_i' q_i \right) f_1 \right\}' ds = 0 \end{aligned} \quad (187)$$

Integrando por partes a equação (187), obtêm-se a seguinte equação geral do elemento finito (VELÁZQUEZ, 2007):

$$\begin{aligned} & [\rho_c A \sum_i \int_0^l N_j N_i ds] \ddot{q}_i + [c_v \sum_i \int_0^l N_j N_i ds] \dot{q}_i + [EI \sum_i \int_0^l N_j' N_i'' ds] q_i \\ & - \int_0^l N_j F_{eh} ds - \int_0^l N_j F_g ds - \left[EI \sum_i \int_0^l N_j' N_i' f_1 ds \right] q_i \\ & + [N_j \sum_i N_i' q_i EI f_1]_0^l + [N_j EI \sum_i N_i'''' q_i - N_j' EI \sum_i N_i'' q_i]_0^l = 0 \end{aligned} \quad (188)$$

sendo $i, j = 1, 2, 3$ e 4 expressas na forma de notação indicial.

A partir da equação (188), obtêm-se as seguintes expressões do elemento de viga (VELÁZQUEZ, 2007):

Matriz de massa linear do elemento:

$$[m_{ji}^e] = \rho_c A \int_0^l N_j N_i ds \quad (189)$$

Matriz de amortecimento não linear do elemento:

$$[c_{ji}^e] = c_v \int_0^l N_j N_i ds \quad (190)$$

Matriz de rigidez linear do elemento:

$$[k_{ji}^e] = EI \int_0^l N_j'' N_i'' ds \quad (191)$$

Matriz de rigidez derivada do efeito não linear de curvatura da viga:

$$[kc_{ji}^e] = EI \int_0^l N_j' N_i' f_1 ds \quad (192)$$

Vetor força de excitação da base:

$$\{F_j^e\} = \int_0^l N_j F_{eh} ds = \rho_c A a_b \cos(\omega t) \int_0^l N_j ds \quad (193)$$

Vetor de força gravitacional:

$$\{F_g^e\} = \int_0^l N_j F_g ds = \rho_c A g \int_0^l N_j ds \quad (194)$$

Vetor com as condições de contorno do elemento:

$$\{b_j^e\} = [N_j \sum_i N_i' q_i EI f_1]_0^l + [N_j EI \sum_i N_i''' q_i - N_j' EI \sum_i N_i'' q_i]_0^l$$

$$\{b_j^e\} = [N_j v' EI f_1]_0^l + [N_j EI v''' - N_j' EI v'']_0^l \quad (195)$$

4.4.1.3 Equação do Elemento Finito de Viga

Com base nas equações (189) a (195), a equação (188) pode ser reescrita como:

$$[m_{ji}^e] \ddot{q}_i + [c_{ji}^e] \dot{q}_i + [k_{ji}^e] q_i - [kc_{ji}^e] - \{F_j^e\} - \{F_g^e\} + \{b_j^e\} \quad (196)$$

De acordo com Inman (2007), substituindo as funções de forma (equações (181) a (184)) em (189) e (191), obtêm-se as matrizes de massa e rigidez de um elemento finito de viga:

$$[m_{ji}^e] = \frac{\rho_c A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (197)$$

$$[k_{ji}^e] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (198)$$

4.4.1.4 Composição dos Elementos Finitos

Quando todos os elementos finitos do cabo mensageiro e da massa inercial são combinados, obtêm-se um sistema com $2(N + 1)$ equações diferenciais ordinárias:

$$[M_{ji}^g]\{\ddot{q}_i\} + [C_{ji}^g]\{\dot{q}_i\} + [K_{ji}^g]\{q_i\} = \{f_j^g\} + \{b_j^g\} \quad (199)$$

sendo:

$[M_{ji}^g]$: Matriz de massa global;

$[C_{ji}^g]$: Matriz de amortecimento global;

$[K_{ji}^g]$: Matriz de rigidez global;

$\{f_j^g\}$: Vetor de força global;

$\{b_j^g\}$: Vetor com as condições de contorno globais;

$\{q_i\}$: Vetor de deslocamento global;

N : Número de elementos de viga considerados.

A matriz de massa global $[M_{ji}^g]$ da equação (199) é composta por duas matrizes. Uma é da massa do elemento (equação (197)). A outra é a matriz referente à massa inercial do absorvedor (equação 175), a qual, é adicionada no último nó do cabo (nó n da Figura 44).

As matrizes de rigidez linear de cada elemento ($[k_{ji}^e]$) (equação 198) quando combinadas, originam uma matriz de rigidez linear global $[Kl_{ji}^g]$. O mesmo ocorre para as matrizes de rigidez não linear $[kc_{ji}^e]$, a qual, gera a matriz de rigidez não linear global $[Kc_{ji}^g]$. Desse modo, a partir da equação (196), essas matrizes de rigidez podem ser combinadas em uma matriz de rigidez global $[K_{ji}^g]$, indicada na equação (199):

$$[K_{ji}^g] = [Kl_{ji}^g] - [Kc_{ji}^g] \quad (200)$$

A matriz amortecimento $[C_{ji}^g]$ é obtida através do amortecimento proporcional (equação (36)), o qual, considera a combinação linear das matrizes de massa e rigidez da equação (199):

$$[C_{ji}^g] = \alpha_1[M_{ji}^g] + \alpha_2[K_{ji}^g] \quad (201)$$

Na equação (201) α_1 e α_2 são constantes de amortecimento proporcionais, respectivamente, à massa e à rigidez do cabo mensageiro. A constante α_2 , de acordo

com as equações (36) e (48), também pode ser definida como um fator de perda da estrutura.

O vetor de força global $\{f_j^g\}$ da equação (199) é a composição dos vetores de excitação global da base $\{F_j^g\}$ e da força gravitacional $\{F_{g_j}^g\}$, obtidos a partir da contribuição de forças nodais ($\{F_j^e\}, \{F_{g_j}^e\}$) de cada elemento. Adicionalmente, o último nó sofre um acréscimo devido a força da massa inercial (equação (177)), originada com os deslocamentos harmônicos da base.

4.4.1.5 Condições de Contorno

De acordo com Velázquez (2007), as reações internas como força cisalhante, axial e momento fletor se cancelam quando os elementos finitos de viga são combinados. Desse modo, o vetor com as condições de contorno globais $\{b_j^g\}$, da equação (199), é composto por elementos nulos, exceto o primeiro e o último nó (VELÁZQUEZ, 2007). O primeiro nó representa a região de engastamento da viga, enquanto o último constitui o ponto de ligação com a massa inercial (Figura 44). Desse modo, o vetor de condições de contorno global se resume as condições de contorno atuantes nas coordenadas do primeiro e último nó.

Para aplicar as condições de contorno, utiliza-se a equação (195). Esta equação é reescrita com base no momento fletor M_I e força cortante V_C de uma viga isotrópica (RAO, 2008):

$$M_I = EIv'' \quad (202)$$

$$V_C = EIv''' \quad (203)$$

Substituindo as equações (153), (202) e (203) em (195), tem-se que:

$$\{b_j^e\} = [N_j v'^2 V_C + N_j v' v'' M_I]_0^l + [N_j V_C - N_j' M_I]_0^l \quad (204)$$

No primeiro nó não há deslocamentos de translação ($v(0, t) = 0$) e rotação ($v'(0, t) = 0$), entretanto, o momento fletor e a força cortante não são nulos. Aplicando estas considerações na equação (204), obtêm-se a expressão para as condições de contorno no primeiro nó do cabo mensageiro:

$$\begin{aligned} b_1 &= N_1 V_C - N'_1 M_I \\ b_2 &= N_2 V_C - N'_2 M_I \end{aligned} \quad (205)$$

A aplicação das condições de contorno da equação (205) não é usual haja vista que os valores de momento fletor e força cortante no primeiro nó (Figura 44) não estão disponíveis. Apesar disso, os deslocamentos deste nó são conhecidos. Isso permite suprimir as duas primeiras equações relativas ao deslocamento de translação e rotação do primeiro nó, permitindo a obtenção dos demais deslocamentos nodais.

No último nó, os deslocamentos de translação e rotação são ocasionados por forças oriundas da movimentação dinâmica da massa inercial. Estes elementos de força estão presentes no vetor força da equação (179). Assim, define-se que o momento fletor e força cortante atuantes no último nó do cabo mensageiro é:

$$M_I = -\bar{x} m_{cr} a_b \cos(\omega t) \quad (206)$$

$$V_C = -m_{cr} a_{cr} \cos(\omega t) \quad (207)$$

Substituindo as equações (206) e (207) em (204), bem como fazendo algumas simplificações, obtêm-se a expressão para as condições de contorno no último nó do cabo mensageiro:

$$\{b_n\} = \begin{Bmatrix} b_{2(N+1)-1} \\ b_{2(N+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m_{cr} a_b \cos(\omega t) [(v')^2 + 1 + \bar{x} v' v''] \\ \bar{x} m_{cr} a_b \cos(\omega t) \end{Bmatrix} \quad (208)$$

Finalmente, a equação (199) é alimentada com as condições de contorno (205) e (208), de modo que as duas primeiras equações são suprimidas com vistas a resolução dos deslocamentos nodais, resultando em:

$$[M_{ji}^r] \{\ddot{q}_i\} + [C_{ji}^r] \{\dot{q}_i\} + [K_{ji}^r] \{q_i\} = \{f_j^r\} + \{b_n\} \quad (209)$$

4.4.2 Técnica de Newmark

A técnica de Newmark é empregada com o intuito de discretizar a equação (209) no domínio do tempo e, assim, obter os deslocamentos nodais. Em uma primeira aproximação, os termos não lineares de rigidez, de contorno não lineares no último nó de amortecimento não linear são omitidos da equação (209), resultando em uma segunda equação reduzida do sistema:

$$[M_{ji}^r]\{\ddot{Q}_i\} + [C_{ji}^r]\{\dot{Q}_i\} + [K_{ji}^r]\{Q_i\} = \{F_j^r\} \quad (210)$$

sendo:

$[M_{ji}^r]$: Matriz de massa global reduzida;

$[K_{ji}^r]$: Matriz de rigidez linear reduzida;

$[C_{ji}^r]$: Matriz de amortecimento linear reduzida;

$\{Q_i\}$: Vetor de deslocamento global linear;

$\{F_j^r\}$: Vetor de força linear global reduzido.

De acordo com Velázquez (2007), a equação (210) é discretizada em um intervalo de tempo $[-\Delta t; \Delta t]$. O objetivo é gerar segmentos com comprimento Δt e pontos nodais de tempo, conforme ilustra a Figura 46.

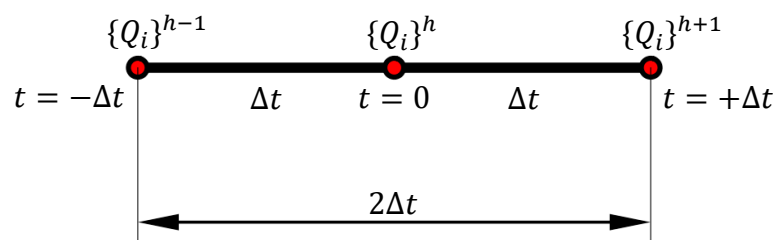


Figura 46 - Discretização no domínio do tempo.
Fonte: Velázquez, 2007.

Cada nó de tempo tem associado um vetor deslocamento: $\{Q_i\}^{h-1}$ em $t = -\Delta t$, $\{Q_i\}^h$ em $t = 0$ e $\{Q_i\}^{h+1}$ em $t = +\Delta t$.

Segundo Velázquez (2007), dentro do intervalo de tempo definido ($[-\Delta t; \Delta t]$), o vetor deslocamento linear $\{Q_i\}$ pode ser aproximado pela seguinte expressão:

$$\{Q_i\} = \psi_{h-1}\{Q_i\}^{h-1} + \psi_h\{Q_i\}^h + \psi_{h+1}\{Q_i\}^{h+1} \quad (211)$$

A equação (211) está escrita em notação indicial. Além disso, ψ_{h-1} , ψ_h e ψ_{h+1} são funções de forma definidos como (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 1994):

$$\psi_{h-1} = -\frac{t}{2\Delta t} \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) \quad (212)$$

$$\psi_h = \left(1 - \frac{t}{\Delta t}\right) \left(1 + \frac{t}{\Delta t}\right) \quad (213)$$

$$\psi_{h+1} = \frac{t}{2\Delta t} \left(1 + \frac{t}{\Delta t}\right) \quad (214)$$

Similarmente ao deslocamento $\{Q_i\}$, a força $\{F_j^r\}$ pode ser aproximada, dentro do intervalo de tempo já definido, como (VELÁZQUEZ, 2007):

$$\{F_j^r\} = \psi_{h-1}\{F_j\}^{h-1} + \psi_h\{F_j\}^h + \psi_{h+1}\{F_j\}^{h+1} \quad (215)$$

Substituindo as equações (211) e (215) em (210), obtêm-se a seguinte expressão residual (R_t):

$$[M_{ji}^r]\ddot{\psi}_d\{Q_i\}^d + [C_{ji}^r]\dot{\psi}_d\{Q_i\}^d + [K_{ji}^r]\psi_d\{Q_i\}^d - \psi_d\{F_j^r\}^d = R_t \quad (216)$$

Com d variando de $h - 1$ a $h + 1$.

A equação (216) é minimizada através da multiplicação de uma função peso $\delta(t)$, seguida de um processo de integração entre os intervalos de tempo $-\Delta t$ e $+\Delta t$ (VELÁZQUEZ, 2007):

$$\int_{-\Delta t}^{+\Delta t} \delta(t) [[M_{ji}^r]\ddot{\psi}_d\{Q_i\}^d + [C_{ji}^r]\dot{\psi}_d\{Q_i\}^d + [K_{ji}^r]\psi_d\{Q_i\}^d - \psi_d\{F_j^r\}^d] dt = 0 \quad (217)$$

Aplicando as equações de forma (212) a (214) em (216), têm-se a seguinte equação resultante:

$$\begin{aligned}
& ([M_{ji}^r] + \gamma_n \Delta t [C_{ji}^r] + \beta \Delta t^2 [K_{ji}^r]) \{Q_i\}^{h+1} \\
& + (-2[M_{ji}^r] + (1 - 2\gamma_n) \Delta t [C_{ji}^r] + (0,5 - 2\beta + \gamma_n) \Delta t^2 [K_{ji}^r]) \{Q_i\}^h \\
& + ([M_{ji}^r] - (1 - \gamma_n) \Delta t [C_{ji}^r] + (0,5 + \beta - \gamma_n) \Delta t^2 [K_{ji}^r]) \{Q_i\}^{h-1} \\
& - \Delta t^2 (\beta \{F_j\}^{h+1} + (0,5 - 2\beta + \gamma_n) \{F_j\}^h + (0,5 + \beta - \gamma_n) \{F_j\}^{h-1}) = 0
\end{aligned} \tag{218}$$

sendo γ_n e β constantes que dependem do método de aceleração adotado (LLERENA, 2009).

Reescrevendo a equação (218) de um modo mais simples, chega-se a seguinte expressão:

$$[A_{1ji}] \{Q_i\}^{h+1} + [A_{2ji}] \{Q_i\}^h + [A_{3ji}] \{Q_i\}^{h-1} - \{F_j\} = 0 \tag{219}$$

sendo:

$$[A_{1ji}] = [M_{ji}^r] + \gamma_n \Delta t [C_{ji}^r] + \beta \Delta t^2 [K_{ji}^r] \tag{220}$$

$$[A_{2ji}] = -2[M_{ji}^r] + (1 - 2\gamma_n) \Delta t [C_{ji}^r] + (0,5 - 2\beta + \gamma_n) \Delta t^2 [K_{ji}^r] \tag{221}$$

$$[A_{3ji}] = [M_{ji}^r] - (1 - \gamma_n) \Delta t [C_{ji}^r] + (0,5 + \beta - \gamma_n) \Delta t^2 [K_{ji}^r] \tag{222}$$

$$\{F_j\} = \Delta t^2 (\beta \{F_j\}^{h+1} + (0,5 - 2\beta + \gamma_n) \{F_j\}^h + (0,5 + \beta - \gamma_n) \{F_j\}^{h-1}) \tag{223}$$

Portanto, a partir da equação (219) é possível determinar o vetor deslocamento $\{Q_i\}^{h+1}$ a partir dos deslocamentos nodais em ($\{Q_i\}^{h-1}$ e $\{Q_i\}^h$). Para isso, basta isolar o termo $\{Q_i\}^{h+1}$, gerando, através da Técnica de Newmark, a seguinte equação iterativa:

$$\{Q_i\}^{h+1} = [A_{1ji}]^{-1} [A_{2ji}] \{Q_i\}^h - [A_{1ji}]^{-1} [A_{3ji}] \{Q_i\}^{h-1} + \Delta t^2 [A_{1ji}]^{-1} \{F_j\} = 0 \tag{224}$$

5 PROCEDIMENTO METODOLÓGICO

5.1 PROCEDIMENTO EXPERIMENTAL

Neste capítulo são apresentados os materiais e o procedimento experimental empregado na realização dos ensaios mecânicos de vibração do ADV *Stockbridge*.

5.1.1 Materiais Utilizados

5.1.1.1 Corpo de Prova

O amortecedor utilizado nos ensaios de vibração foi o *Stockbridge* assimétrico, como ilustra a Figura 47.



Figura 47 - *Stockbridge* assimétrico utilizado nos ensaios de vibração.
Fonte: O Autor.

As propriedades do absorvedor analisado estão contidas na Tabela 1, com suas respectivas dimensões indicadas na Figura 48.

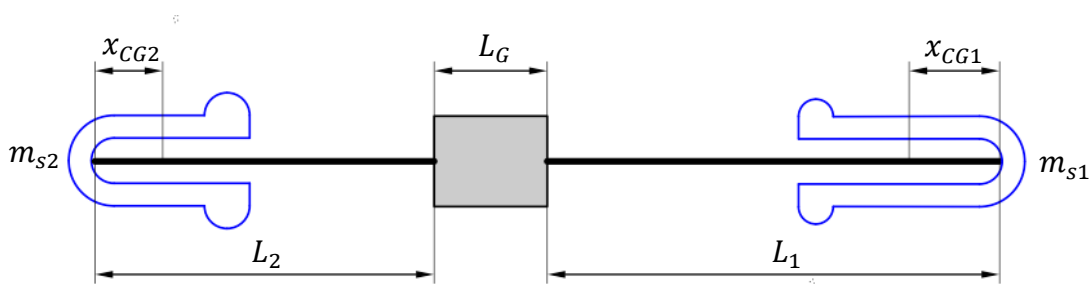


Figura 48 - Dimensões do *Stockbridge* assimétrico ensaiado.
Fonte: O Autor.

Tabela 1 - Tabela com os dados técnicos do *Stockbridge* assimétrico.

Dados Técnicos do <i>Stockbridge</i>	
Modelo	TDM210R-SG9
Fabricante	BURNDY
Distância da massa ao grampo [mm]	$L_1 = 190$
	$L_2 = 139$
Largura do Grampo [mm]	$L_G = 67$
Material do Grampo	Alumínio
Massa Inercial Maior	
Tipo do Material	Aço forjado
Posição do CG [mm]	$x_{CG1} = -39,22$
Momento de Inércia no CG [$kg \cdot m^2$]	$I_{1zz} = 0,01310$
Massa [kg]	$m_{s1} = 2,676$
Momento de Inércia na extremidade do cabo [$kg \cdot m^2$]	$I_1 = 0,01722$
Massa Inercial Menor	
Tipo do Material	Aço forjado
Posição do CG [mm]	$x_{CG2} = 16,44$
Momento de Inércia no CG [$kg \cdot m^2$]	$I_{2zz} = 0,00456$
Massa [kg]	$m_{s2} = 1,870$
Momento de Inércia na extremidade do cabo [$kg \cdot m^2$]	$I_2 = 0,0051$
Cabo Mensageiro	
Tipo do Material	Aço Galvanizado
Número de Fios	19
Diâmetro do cabo mensageiro [mm]	$\emptyset = 12,32$
Massa Específica [kg/m^3]	$\rho_c = 5804,9$
Massa/Comprimento [kg/m]	$\rho_c A = 0,6920$

Fonte: O autor.

Na Tabela 1, as grandezas referentes a distâncias, larguras, diâmetros, número de fios e massas foram obtidas a partir da aferição direta do corpo de prova em laboratório. As medidas de massa específica e massa por unidade de comprimento do cabo mensageiro foram mensuradas indiretamente. Os valores relativos a posição

do Centro de Gravidade (CG) e momento de inércia no CG foram obtidos após um escaneamento 3D das massas inerciais, seguido de um pós-processamento no software *SolidWorks*. Finalmente, as informações do tipo de material do grampo, das massas inercias e do cabo mensageiro foram extraídas com base nos estudos de Barry (2010).

Foram ensaiadas três unidades do mesmo modelo de *Stockbridge* assimétrico. Entretanto, cada unidade foi diferenciada pela forma como o sistema foi considerado. Assim, uma unidade foi mantida inteira, enquanto as outras duas foram seccionadas no ponto de junção entre o cabo mensageiro e o grampo, de modo, a considerar o lado de interesse. As Figuras 49 e 50 ilustram esse processo.

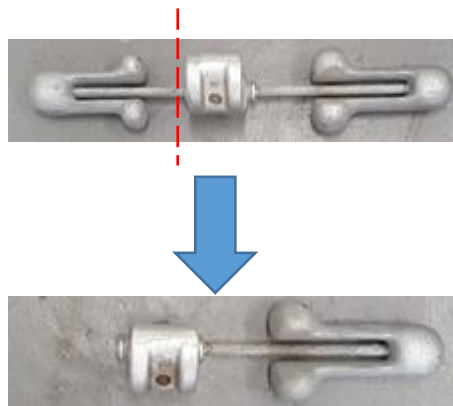


Figura 49 - Unidade seccionada para considerar apenas o lado da massa maior.
Fonte: O Autor.

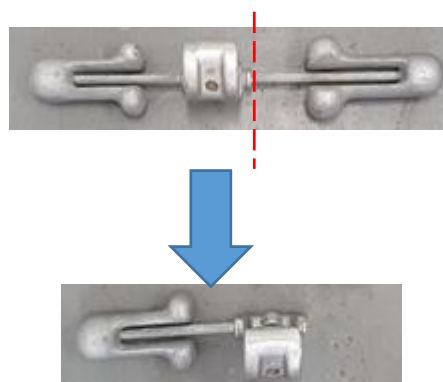


Figura 50 - Unidade seccionada para considerar apenas o lado da massa menor.
Fonte: O Autor.

A Figura 51 ilustra resumidamente as três unidades de amortecedores *Stockbridge* utilizadas nos ensaios de vibração.

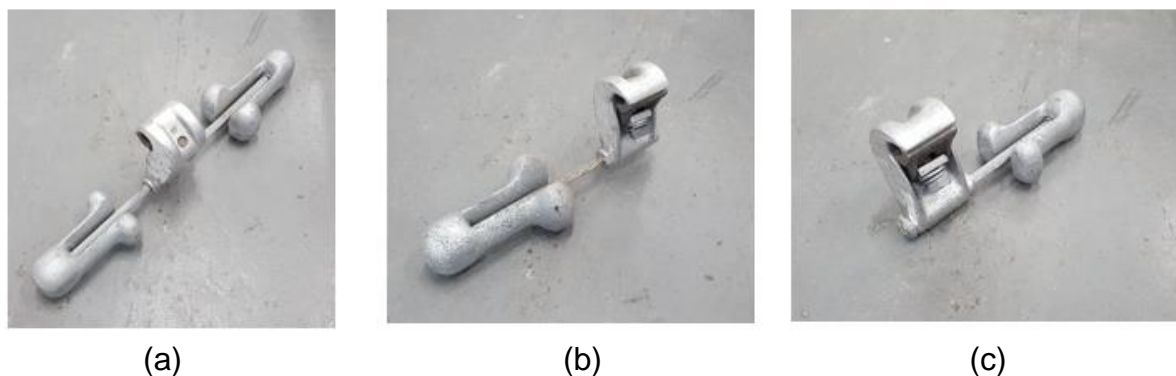


Figura 51 - Amortecedores empregados nos ensaios de vibração: (a) *Stockbridge* inteiro, (b) *Stockbridge* lado massa maior, (c) *Stockbridge* lado massa menor.

Fonte: O Autor.

Para as otimizações numéricas, somente foram consideradas os resultados experimentais das unidades (a) e (b) da Figura 51.

5.1.1.2 Bancada de Ensaio

A Figura 52 mostra o desenho esquemático da bancada experimental empregada nos ensaios de vibração do amortecedor *Stockbridge* assimétrico.

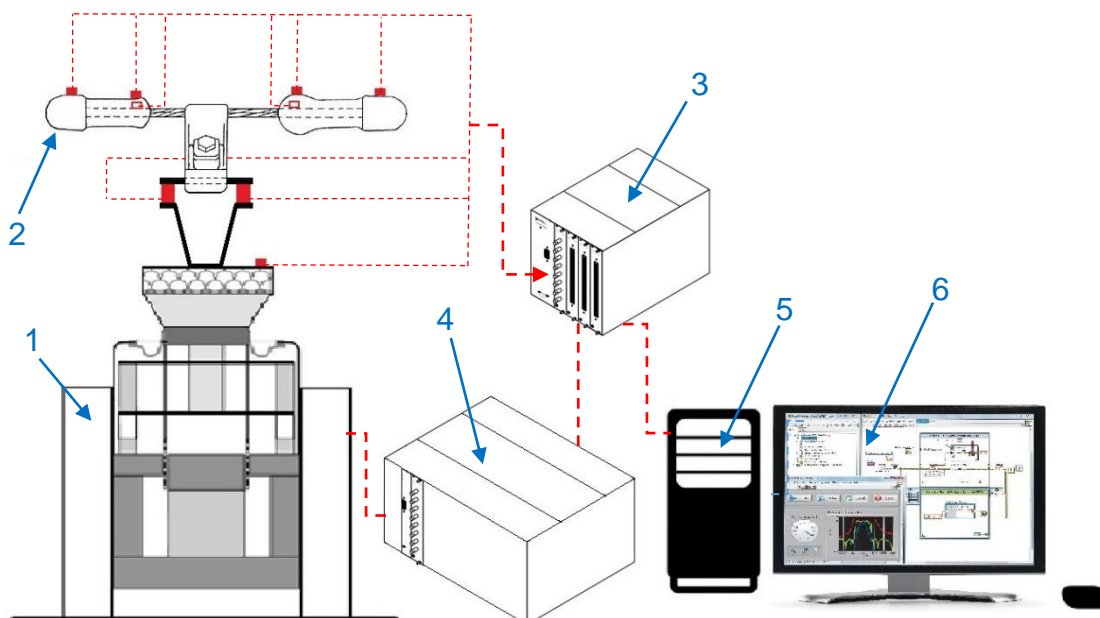


Figura 52 - Desenho esquemático da bancada de ensaios.

Fonte: O Autor.

Os principais equipamentos e recursos da bancada, indicados na Figura 52 pela respectiva numeração, são: (1) excitador eletrodinâmico ou *shaker*; (2)

amortecedor tipo *Stockbridge* assimétrico e acelerômetros do tipo ICP; (3) condicionador de sinal com módulos de aquisição de sinais dos acelerômetros e das células piezoelétricas; (4) amplificador de potência do *shaker*; (5) computador desktop com placa condicionadora de sinais; (6) programa *LabView*.

Na Figura 53 estão detalhados os componentes do conjunto que permite a fixação e movimentação do amortecedor, bem como a medição de sinais gerados na faixa de 5 a 120 Hz de excitação do sistema:

- (6) e (11): Acelerômetros do tipo ICP (saída em tensão);
- (7): Base de acoplamento;
- (8) e (9): Células piezoelétricas;
- (10): Base de fixação.

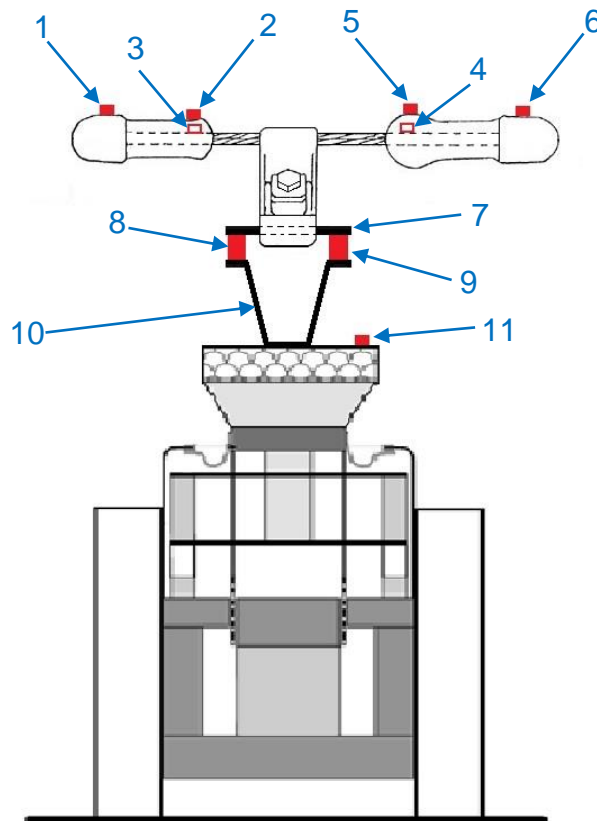


Figura 53 - Conjunto que permite a fixação e movimentação do amortecedor, bem como a medição de sinais gerados.
Fonte: O Autor.

As principais especificações técnicas dos acelerômetros, ilustrados na Figura 53, estão organizadas na Tabela 2 como, por exemplo, sensibilidade, faixa de frequência e massa. Já as informações das células piezoelétricas estão resumidas na Tabela 3.

Tabela 2 – Informações técnicas dos acelerômetros utilizados nos ensaios de vibração.

Acelerômetro	Sensibilidade [$mV/m/s^2$]	Faixa de Frequência [Hz]	Massa [kg]
1	10,20	0,5 a $10 \cdot 10^3$	$5,8 \cdot 10^{-3}$
2	10,23	0,5 a $10 \cdot 10^3$	$5,8 \cdot 10^{-3}$
3	10,33	0,5 a $10 \cdot 10^3$	$5,8 \cdot 10^{-3}$
4	10,22	0,5 a $10 \cdot 10^3$	$5,8 \cdot 10^{-3}$
5	10,55	0,5 a $10 \cdot 10^3$	$5,8 \cdot 10^{-3}$
6	10,02	0,5 a $10 \cdot 10^3$	$5,8 \cdot 10^{-3}$
11	106,8	2 a $10 \cdot 10^3$	$25 \cdot 10^{-3}$

Fonte: PCB PIEZOTRONICS, (2016a).

Tabela 3 – Informações técnicas das células piezoelétricas utilizadas nos ensaios de vibração.

Célula Piezoelétrica	Sensibilidade [$mV/m/s^2$]	Capacidade de Medição [$N \text{ pico}$]	Massa [kg]
8	11,02	450	$22,7 \cdot 10^{-3}$
9	11,37	450	$22,7 \cdot 10^{-3}$

Fonte: PCB PIEZOTRONICS, (2016b).

A bancada de ensaios, ilustrada nas Figuras 52 e 53, permite gerar um movimento harmônico com amplitude de aceleração controlada. Assim para uma determinada aceleração da base de excitação do *shaker*, obtêm-se a resposta do *Stockbridge* em uma dada faixa de frequência. Este sistema de ensaios pode ser descrito pela composição das seguintes partes:

- Conjunto rígido acoplado;
- Sistema de deslocamento;
- Sistema de aquisição, controle e processamento de dados.

5.1.1.2.1 Conjunto Rígido Acoplado

O conjunto rígido acoplado é composto pela base de acoplamento, duas células piezoelétricas e pela base de fixação, como mostra a Figura 54. Este conjunto permite a rígida fixação do amortecedor *Stockbridge* à base de deslocamento do *shaker*, bem como a medição de força em ambos os lados do amortecedor.

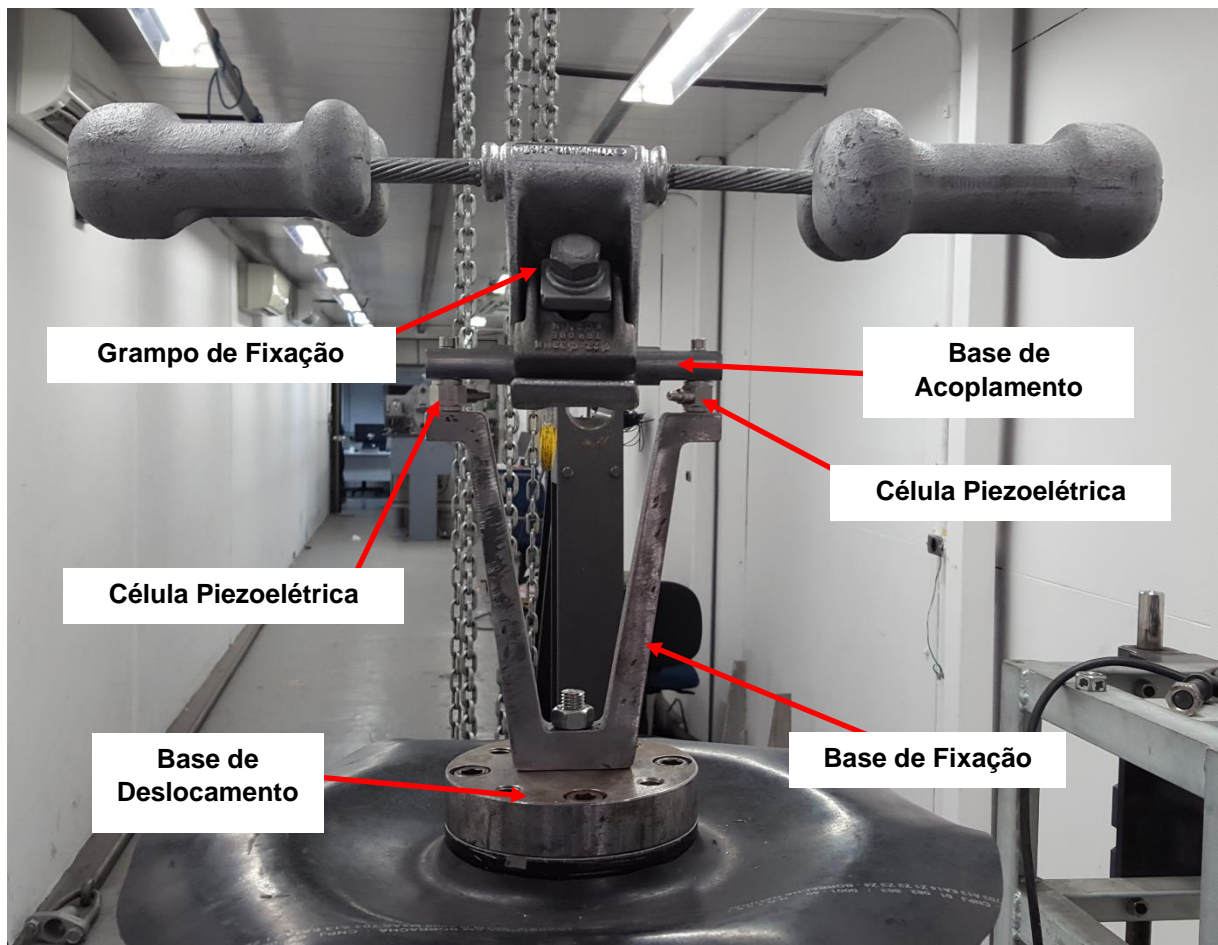


Figura 54 - Conjunto rígido acoplado.
Fonte: O Autor.

5.1.1.2.2 Sistema de Deslocamento

Este sistema é composto basicamente pelo *shaker* (Figura 55) que, controlado pelo amplificador de potência, desempenha a função de deslocar verticalmente o conjunto rígido acoplado.

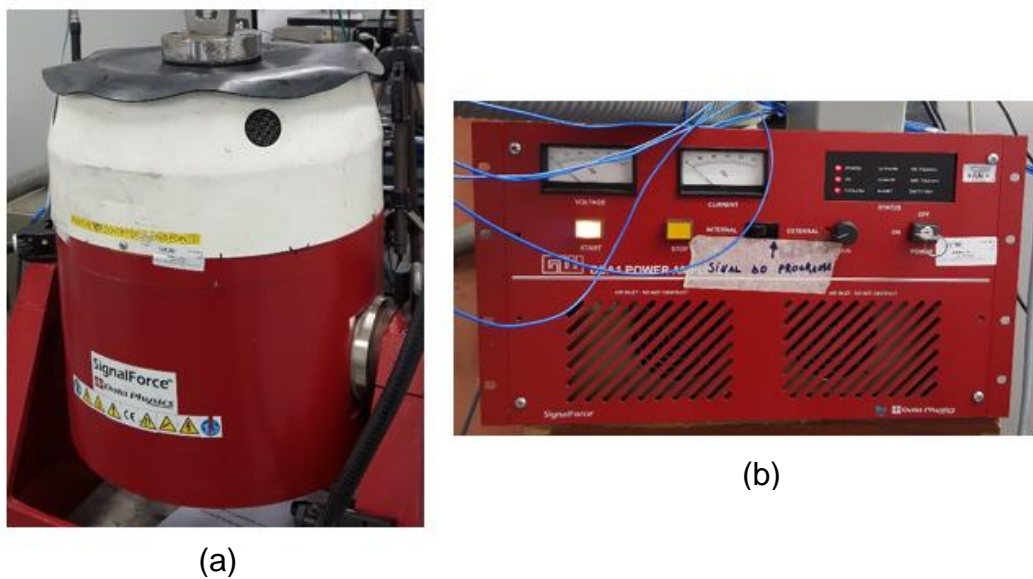


Figura 55 - Excitador eletromagnético ou shaker (a) e amplificador de potência (b).
Fonte: O Autor.

5.1.1.2.3 Sistema de Aquisição, Controle e Processamento de Dados

Este sistema permite obter dados de amplitudes de aceleração através de sete acelerômetros, sendo seis fixados ao longo do *Stockbridge* e um afixado na base de deslocamento do *shaker*, como mostra a Figura 56.

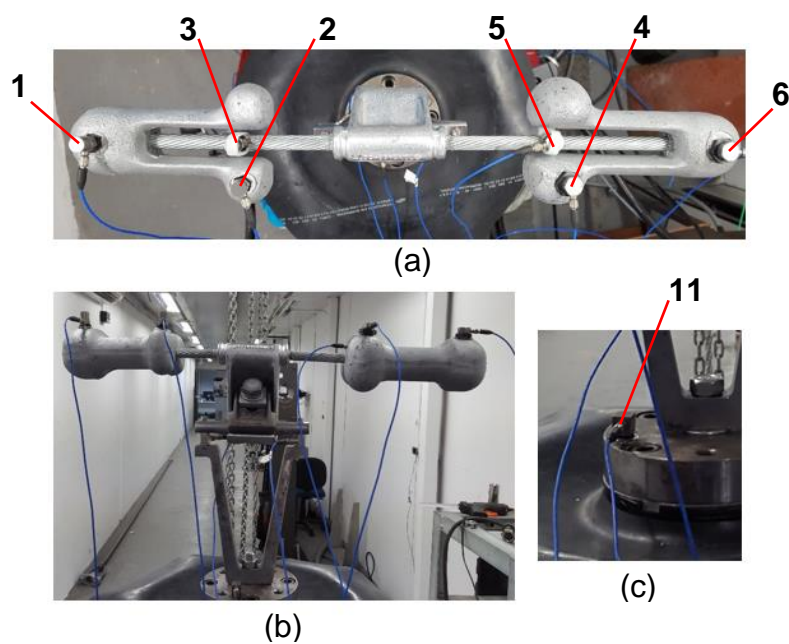


Figura 56 – Vista superior (a) e frontal (b) com a disposição dos acelerômetros no amortecedor, bem como a vista (c) com o acelerômetro na base.
Fonte: O Autor.

A numeração 1 a 6 e 11 dos acelerômetros, na Figura 56, é a mesma da Figura 53.

Os sinais obtidos pelos acelerômetros, o controle da frequência de excitação e da amplitude de aceleração do *shaker*, bem como o processamento dos dados são realizados por um condicionador de sinal. Este, por sua vez, é controlado por uma placa condicionadora de sinais através de um computador *desktop* e do programa *LabView*. A Figura 57 ilustra esse sistema.

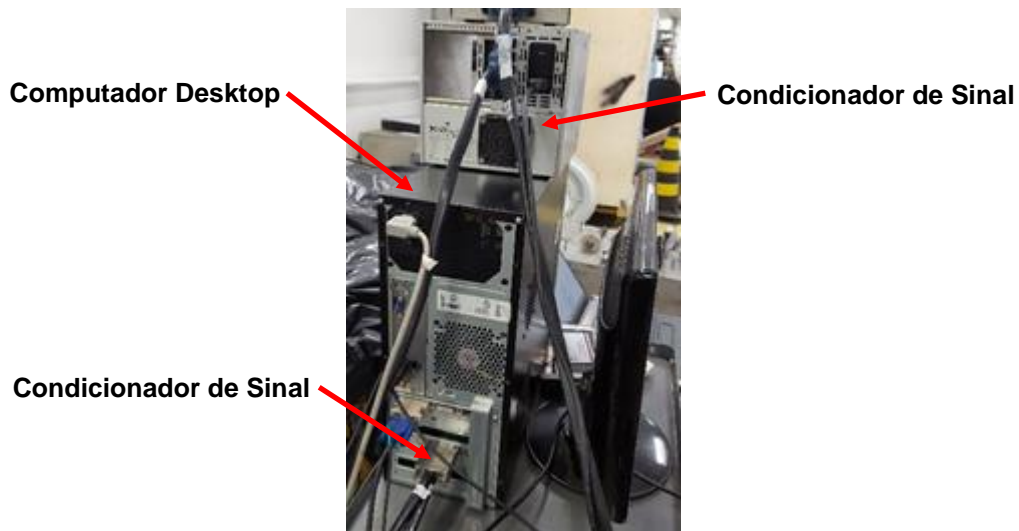


Figura 57 - Sistema de aquisição, controle e processamento de dados.
Fonte: O Autor.

5.1.2 Procedimento de Ensaio

Os ensaios em laboratório consistiram em deslocar, verticalmente e com amplitude de aceleração constante, a base de excitação onde o *Stockbridge* se encontrava rigidamente fixo. O fluxograma da Figura 58 resume o procedimento experimental empregado.

As unidades de *Stockbridge* (a), (b) e (c), ilustradas na Figura 51, foram ensaiadas em quinze diferentes amplitudes de aceleração da base: de $0,2$ a $3,0 \text{ m/s}^2$, com incrementos de $0,2 \text{ m/s}^2$.

Desse modo, para cada amplitude de aceleração da base, mantida como constante, o *shaker* promoveu a excitação do amortecedor na faixa de 5 a 120 Hz. Concomitantemente, a resposta vibracional em pontos distintos do *Stockbridge* foi

processada e registrada pelo sistema de aquisição, controle e processamento de dados.

Os dados experimentais foram armazenados e convertidos em arquivos com extensão .txt. Em seguida, estes dados foram manipulados através do programa *Matlab* com o intuito de gerar curvas das FRFs de cada amortecedor ensaiado.

Optou-se em utilizar as amplitudes de aceleração provenientes dos acelerômetros afixados no ponto médio do cabo mensageiro, localizados entre o grampo de fixação e a massa inercial de cada lado do *Stockbridge*, bem como as seis primeiras amplitudes de aceleração: de $0,2 \text{ m/s}^2$ a $1,2 \text{ m/s}^2$, com incrementos de $0,2 \text{ m/s}^2$.

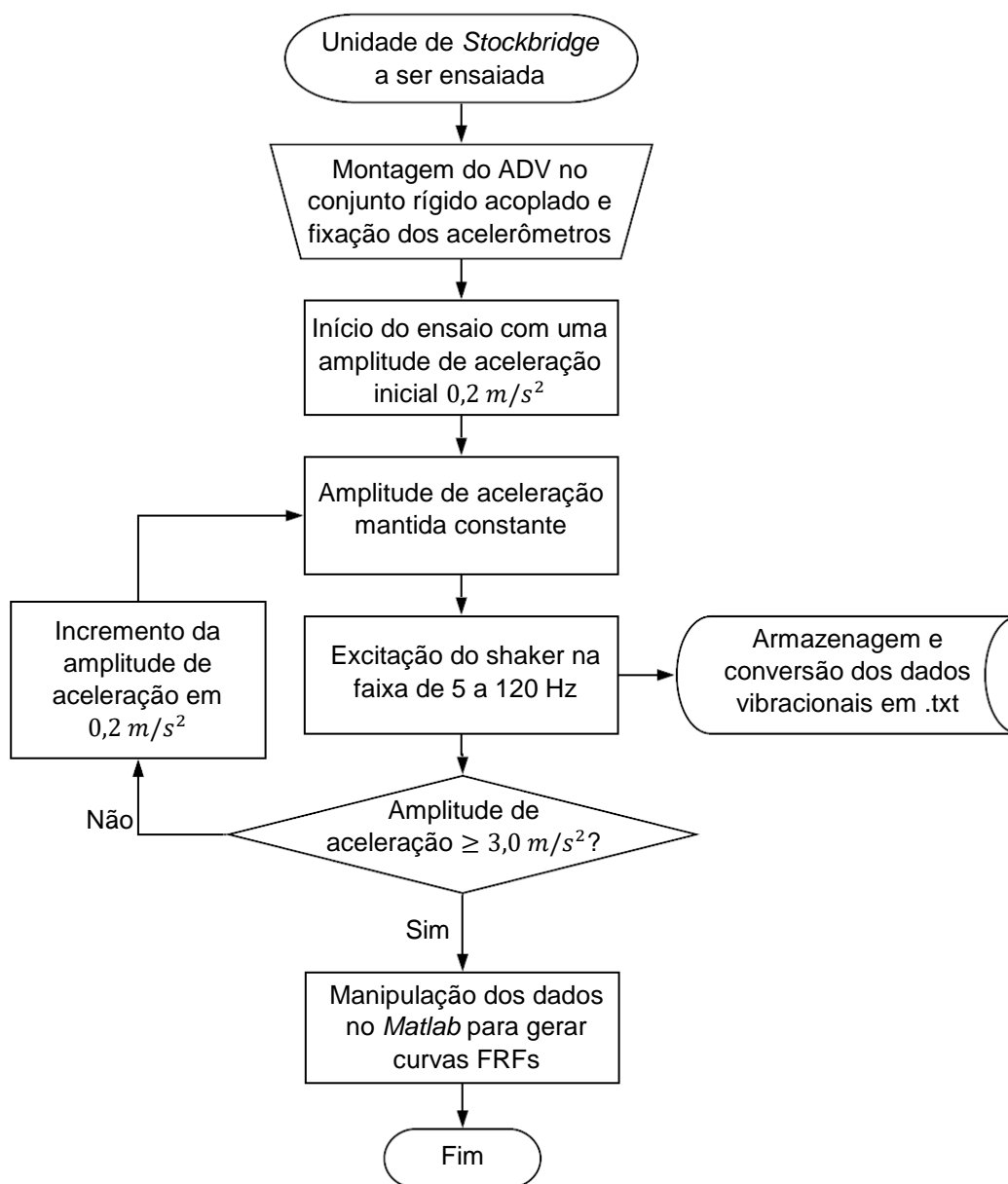


Figura 58 – Fluxograma do procedimento experimental empregado.
Fonte: O Autor.

5.2 PROCEDIMENTO NUMÉRICO

5.2.1 Aspectos Gerais

O objetivo da implementação numérica é o de propiciar a otimização de três grandezas do modelo numérico não linear apresentado no Capítulo 4:

- Constante de amortecimento proporcional à massa (α_1);
- Constante de amortecimento proporcional à rigidez ou fator de perda (α_2);
- Rigidez à flexão (EI).

Segundo Silva Neto (1999), grandezas como fator de perda e rigidez à flexão são de difíceis avaliações quando se consideram seções complexas como as do cabo mensageiro. De acordo com Schwarz e Richardson (2013), constantes como α_1 e α_2 podem ser estimados através da correlação de curvas FRFs geradas por um modelo analítico e aproximadas para FRFs obtidas experimentalmente. Nesse sentido, foi adaptada um algoritmo numérico com o intuito de determinar os parâmetros α_1 , α_2 e EI , bem como o de propiciar a análise e comparação entre dados numéricos e experimentais. Esse algoritmo consiste em rotinas computacionais que, quando executadas no software *Matlab*, segue processos interdependentes e iterativos de cálculo. O fluxograma do algoritmo numérico utilizado é ilustrado na Figura 59.

O primeiro processo que inicia as etapas do algoritmo, bem como retorna os parâmetros ajustados, é o PSO. Esse método, de forma recursiva, cria um universo de possíveis soluções para os parâmetros α_1 , α_2 e EI . Em seguida, esses parâmetros são conduzidos para uma segunda rotina que, por sua vez, têm duas atribuições. A primeira é recorrer ao algoritmo desenvolvido por Velázquez (2007), o qual, emprega uma série de rotinas numéricas e iterativas como, por exemplo, o Método de Newmark para calcular deslocamentos lineares e não lineares de uma viga engastada. Desse modo, esse algoritmo utiliza os parâmetros repassados para determinar as amplitudes de deslocamento do cabo mensageiro. Esses deslocamentos permitem calcular as amplitudes de aceleração nos pontos de fixação dos acelerômetros. A segunda atribuição é comparar os valores numéricos e experimentais das amplitudes de acelerações numéricas e experimentais por meio da seguinte função objetivo (FO):

$$FO(\alpha_1, \alpha_2, EI) = \sum_{f_1}^{f_n} \left| |FRF_{exp}| - |FRF_{num}| \right| \quad (225)$$

Na equação (225), a função de resposta em frequência experimental (FRF_{exp}) é proveniente dos dados de aceleração obtidos nos ensaios da respectiva unidade amortecedora. Já a função de resposta em frequência numérica (FRF_{num}) é oriunda dos dados de aceleração calculados para o mesmo ADV. Além disso, essa equação representa o somatório dos erros relativos entre as FRFs experimental e numérica no intervalo de frequência mais relevante ($f_1 \leq f \leq f_n$), isto é, àquele em que as amplitudes são as mais elevadas devido a condição de ressonância.

A função objetivo da equação (225) retorna um determinado valor, cujo resultado direciona os processos iterativos do PSO até atingir um mínimo aceitável. Para esse valor mínimo, obtêm-se os parâmetros α_1 , α_2 e EI ajustados, os quais, permitem ao modelo numérico gerar resultados próximos ao da realidade.

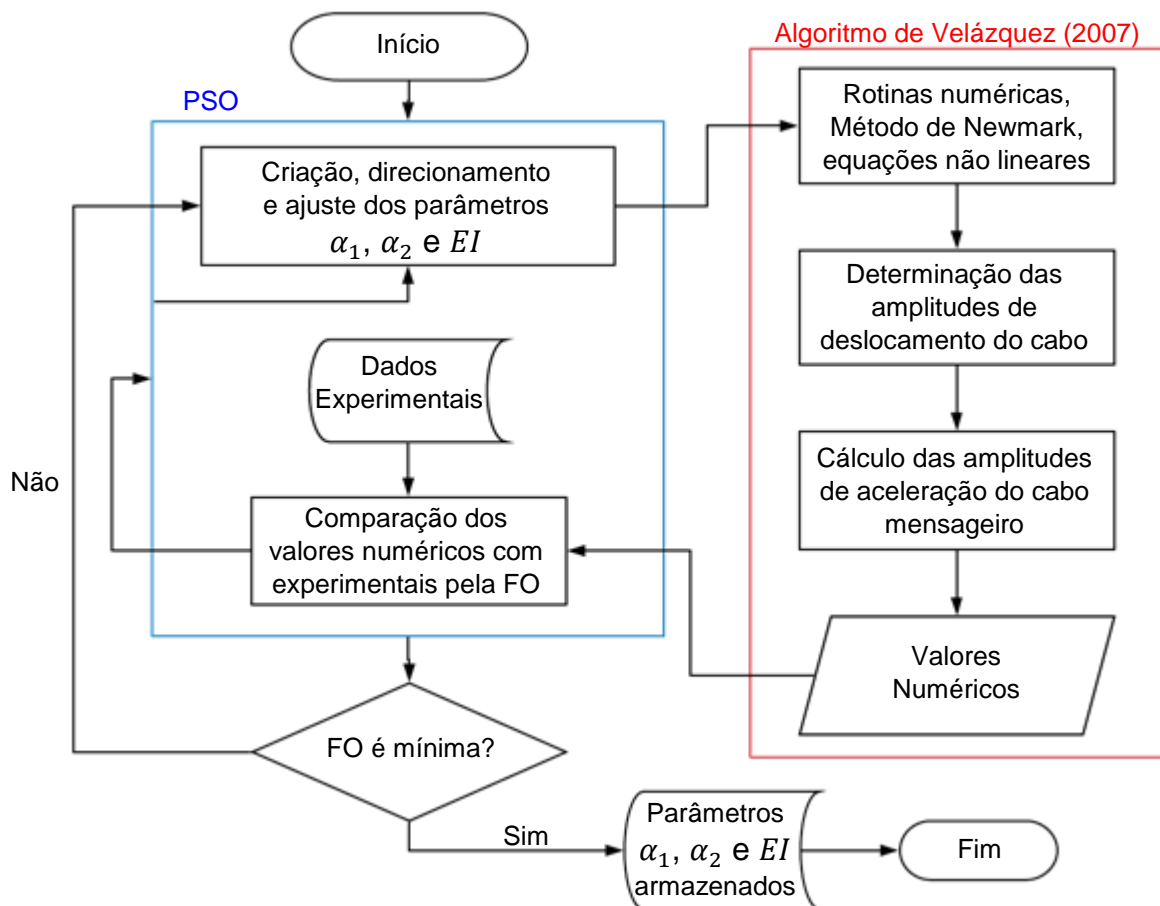


Figura 59 – Algoritmo numérico utilizado na análise não linear do *Stockbridge*.
Fonte: O Autor.

A Tabela 4 resume os parâmetros do MEF, PSO e da Técnica de Newmark empregados no algoritmo numérico deste trabalho.

Tabela 4 - Parâmetros utilizados no algoritmo numérico do trabalho.

Parâmetros do MEF	
Número de elementos (N)	20
Número de subelementos finitos	20
Parâmetros do PSO	
Número de Partículas	25
Processo de criação de partículas	Randômico
Número máximo de iterações	15
w_{ip}	[0,4;0,9]
c_1	2
c_2	2
r_{n1}	[0;1]
r_{n2}	[0;1]
Parâmetros da Técnica de Newmark	
Condição de aceleração média constante	
Tolerância	0,01
Δt	0,0078125 s
Tempo final (t_f)	3,9921875 s
Número de pontos nodais de tempo	512
γ_n	0,5
β	0,25

Fonte: O Autor.

Em seguida, a análise envolveu procedimentos adicionais provenientes de experimentos conduzidos por Geron (2010) e estudos desenvolvidos por Barbieri e Barbieri (2012). Essas análises foram utilizadas como referência na obtenção de parâmetros de um terceiro *Stockbridge* assimétrico. A seção 5.3 traz mais detalhes do procedimento experimental de Geron (2010), bem como dos estudos de Barbieri e Barbieri (2012).

No caso deste trabalho, os parâmetros α_1 , α_2 e EI foram ajustados no ponto médio do cabo mensageiro para cada amplitude de excitação da base. Além disso, considerou-se a faixa de frequência relativa ao primeiro modo de vibrar do *Stockbridge*, tanto para as unidades (a) e (b) da Figura (51), quanto para os dados oriundos do experimento de Geron (2010) e estudos de Barbieri e Barbieri (2012).

5.2.2 Aplicação da Técnica de Newmark

O algoritmo numérico, desenvolvido por Velázquez (2007) e adaptado para a análise do amortecedor *Stockbridge*, envolveu a aplicação da Técnica de Newmark. O emprego desta técnica exigiu definir um intervalo de tempo $[0; t_f]$, subdividido por variações de Δt e definido por um número $k_t + 1$ de tempos nodais, sendo $k_t = t_f / \Delta t$. Desse modo, cada tempo nodal h está associado a um vetor deslocamento $\{Q_i\}^h$, como ilustra a Figura 60.

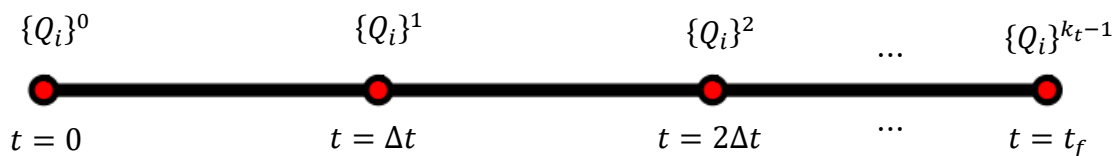


Figura 60 - Vetor deslocamento associado com um nó de tempo.
Fonte: Velázquez, 2007.

A Técnica de Newmark emprega processos iterativos no tempo para determinar o vetor deslocamento linear $\{Q_i\}^h$ e não linear $\{q_i\}^h$. Estes processos consistem em determinar para cada frequência de excitação, os deslocamentos nodais de todos os elementos finitos ao longo de um intervalo de tempo. Para isso, a técnica se divide, basicamente, em duas partes semelhantes e iterativas.

A primeira parte calcula o vetor deslocamento linear $\{Q_i\}^{h+1}$ com base em elementos lineares da equação (224). Estes elementos são os vetores de deslocamento lineares $\{Q_i\}^h$ e $\{Q_i\}^{h-1}$, vetores de força lineares $\{F_i\}^{h+1}$, $\{F_i\}^h$ e $\{F_i\}^{h-1}$, bem como as matrizes lineares de Newmark $[A_{1ji}]$, $[A_{2ji}]$ e $[A_{3ji}]$ que, por sua vez, exigem o cálculo das matrizes de massa global reduzida $[M_{ji}^r]$, de rigidez linear reduzida $[Kl_{ji}^r]$ e de amortecimento linear reduzida $[Cl_{ji}^r]$.

Na segunda parte são levadas em consideração os efeitos não lineares nos parâmetros matriz de rigidez não linear global $[Kc_{ji}^g]$, matriz de amortecimento não linear global $[C_{ji}^g]$ e o vetor condições de contorno não lineares no último nó $\{b_n\}$. A maneira como os efeitos não lineares são contabilizados nesses parâmetros estão indicados no Anexo A.

Uma vez definido os parâmetros não lineares de rigidez e amortecimento, obtêm-se pelas equações (200) e (201), respectivamente, as novas matrizes não lineares globais reduzidas $[k_{ji}^r]$ e $[c_{ji}^r]$. Essas matrizes, por sua vez, permitem calcular as matrizes não lineares de Newmark $[a_{1ji}]$, $[a_{2ji}]$ e $[a_{3ji}]$, através das seguintes equações:

$$[a_{1ji}] = [M_{ji}^r] + \gamma_n \Delta t [c_{ji}^r] + \beta \Delta t^2 [k_{ji}^r] \quad (226)$$

$$[a_{2ji}] = -2[M_{ji}^r] + (1 - 2\gamma_n) \Delta t [c_{ji}^r] + (0,5 - 2\beta + \gamma_n) \Delta t^2 [k_{ji}^r] \quad (227)$$

$$[a_{3ji}] = [M_{ji}^r] - (1 - \gamma_n) \Delta t [c_{ji}^r] + (0,5 + \beta - \gamma_n) \Delta t^2 [k_{ji}^r] \quad (228)$$

A contribuição do vetor com as condições de contorno no último nó resulta em um novo vetor força não linear global reduzido $\{f_j^r\}$ que, por sua vez, é aproximado pelos vetores de força não lineares $\{f_j\}^{h+1}$, $\{f_j\}^h$ e $\{f_j\}^{h-1}$.

Assim, a segunda parte calcula o vetor deslocamento não linear $\{q_i\}^{h+1}$ a partir do uso de elementos não lineares $\{q_i\}^h$, $\{q_i\}^{h-1}$, $[a_{1ji}]$, $[a_{2ji}]$, $[a_{3ji}]$ e $\{f_j\}$ em uma expressão semelhante à equação (224):

$$\{q_i\}^{h+1} = [a_{1ji}]^{-1} [a_{2ji}] \{q_i\}^h - [a_{1ji}]^{-1} [a_{3ji}] \{q_i\}^{h-1} + \Delta t^2 [a_{1ji}]^{-1} \{f_j\} = 0 \quad (229)$$

sendo $\{q_i\}^h$ e $\{q_i\}^{h-1}$ os vetores deslocamentos não lineares, respectivamente, em um tempo $t - \Delta t$ e $t - 2\Delta t$.

O fluxograma da Figura 61 ilustra o processo, o qual, utiliza a Técnica de Newmark para calcular o vetor deslocamento não linear $\{q_i\}^{h+1}$ no tempo t .

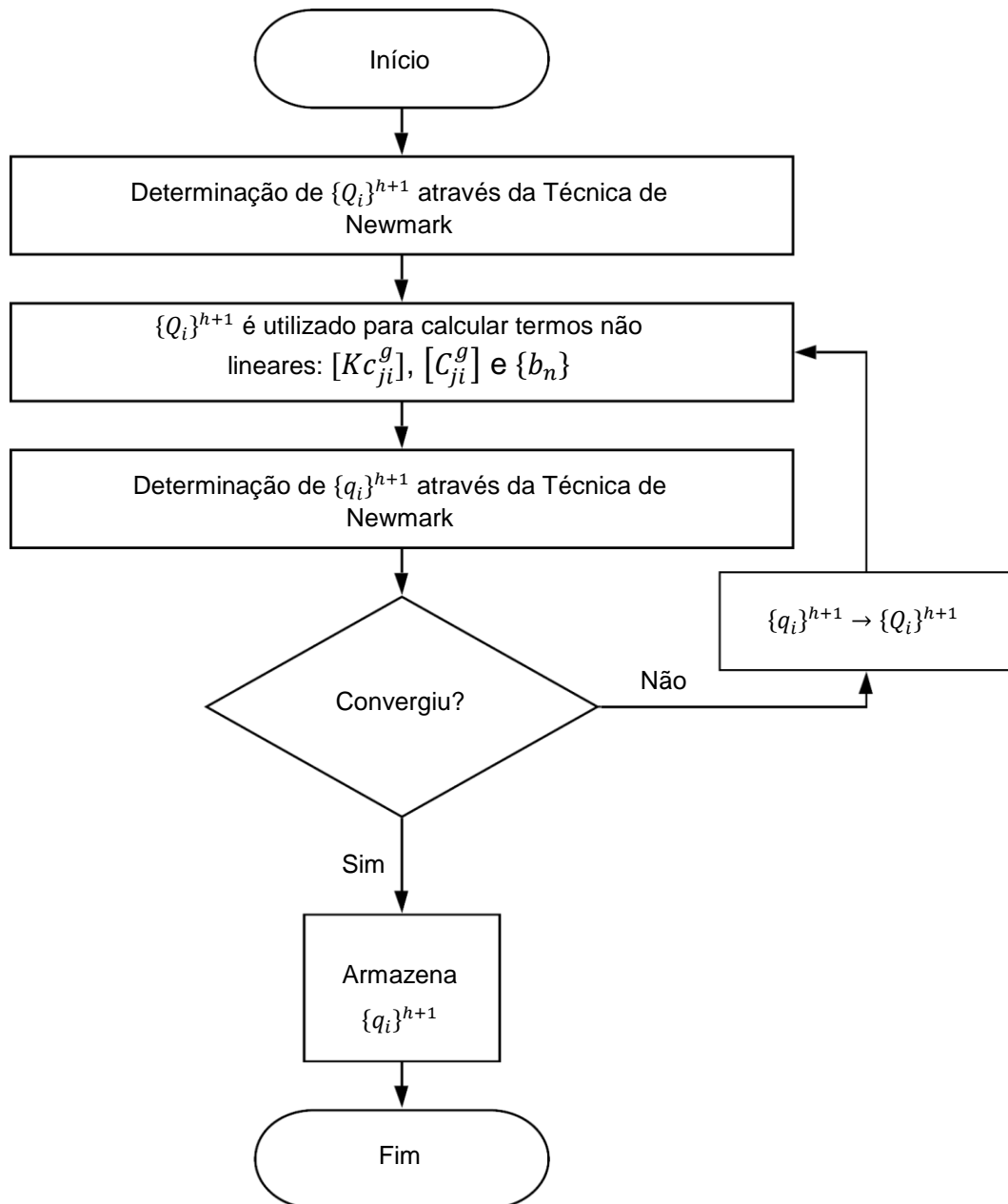


Figura 61 – Fluxograma do algoritmo que calcula o vetor deslocamento não linear do cabo.
Fonte: Velázquez, 2007 (Modificado).

O vetor deslocamento não linear continua sendo calculado até o momento em que um determinado critério de convergência é atingido. A equação (230) é utilizada como critério de convergência:

$$\epsilon = \sum_{\alpha=1}^{n_e} |q_j^\alpha - Q_j^\alpha| \quad (230)$$

sendo:

ϵ : Critério de convergência;

n_e : Número de elementos em cada vetor deslocamento.

A equação (230) calcula, em cada iteração, o erro entre os vetores deslocamentos não linear e linear. Esse erro é usado como parâmetro de convergência quando comparado com a tolerância considerada. Desse modo, se o parâmetro ϵ é menor ou igual à tolerância admissível, então a solução converge. Caso ϵ seja maior que a tolerância, significa que não há convergência. Neste caso, o vetor $\{q_i\}^{h+1}$ passa a ser $\{Q_i\}^{h+1}$ e um novo vetor deslocamento $\{q_i\}^{h+1}$ é calculado, como ilustra a Figura 61.

5.2.3 Procedimentos Adicionais

O estudo do comportamento não linear do *Stockbridge*, através de um modelo numérico não linear, foi estendido de modo a utilizar resultados experimentais conduzidos por Geron (2010) e análises desenvolvidos por Barbieri e Barbieri (2012). Essas pesquisas foram utilizadas como referência na obtenção de parâmetros de um terceiro *Stockbridge* assimétrico. O intuito foi correlacionar os dados gerados pelo modelo não linear com dados práticos de metodologias de ensaios diferentes. No caso deste trabalho, os ensaios foram realizados com amplitudes de aceleração constantes. Já os ensaios de Geron (2010) foram efetivados com amplitudes de deslocamento constantes ao longo da frequência de excitação.

A metodologia experimental e os dados obtidos por Geron (2010), bem como os estudos e resultados de Barbieri e Barbieri (2010), são descritos a seguir para prévio conhecimento.

5.2.3.1 Ensaio de Geron (2010)

5.2.3.1.1 Aspectos Gerais

Geron (2010) submeteu um *Stockbridge* assimétrico (Figura 65) a ensaios com amplitudes de deslocamento controladas. Para isso, foi utilizado uma máquina de came, conforme ilustra a Figura 62.



Figura 62 - Máquina de came para análise com amplitude controlada.
Fonte: Marchi e Merino, 2014.

A máquina de came foi adaptada para fixar, rigidamente, um amortecedor *Stockbridge* do tipo assimétrico.

As propriedades do absorvedor analisado estão contidas na Tabela 5, com as dimensões, do lado analisado, indicadas na Figura 63.

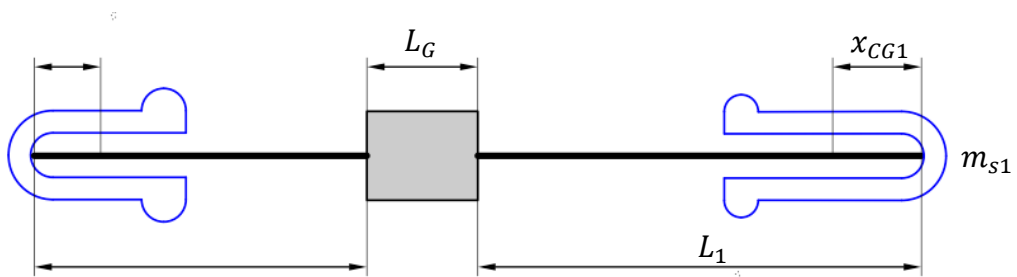


Figura 63 - Dimensões do *Stockbridge* assimétrico ensaiado por Geron (2010).
Fonte: O Autor.

Tabela 5 – Dados técnicos do lado maior do *Stockbridge* assimétrico de Geron (2010)

Dados Gerais	
Modelo	TDM177R-SG9
Fabricante	BURNDY
Distância da massa ao grampo [mm]	$L_1 = 120$
Largura do Grampo [mm]	$L_G = 50$
Material do Grampo	Alumínio
Massa Inercial Maior	
Tipo do Material	Aço forjado
Posição do CG [mm]	$x_{CG1} = -15$
Momento de Inércia no CG [$kg.m^2$]	$I_{1zz} = 0,0031$
Massa [kg]	$m_{s1} = 1,4$
Cabo Mensageiro	
Tipo do Material	Aço Galvanizado
Número de Fios	19
Massa/Comprimento [kg/m]	$\rho_c A = 0,555469$

Fonte: Geron (2010).

5.2.3.1.2 Bancada de Ensaios

A Figura 64 mostra o desenho esquemático da bancada empregada nos ensaios do amortecedor *Stockbridge* assimétrico.

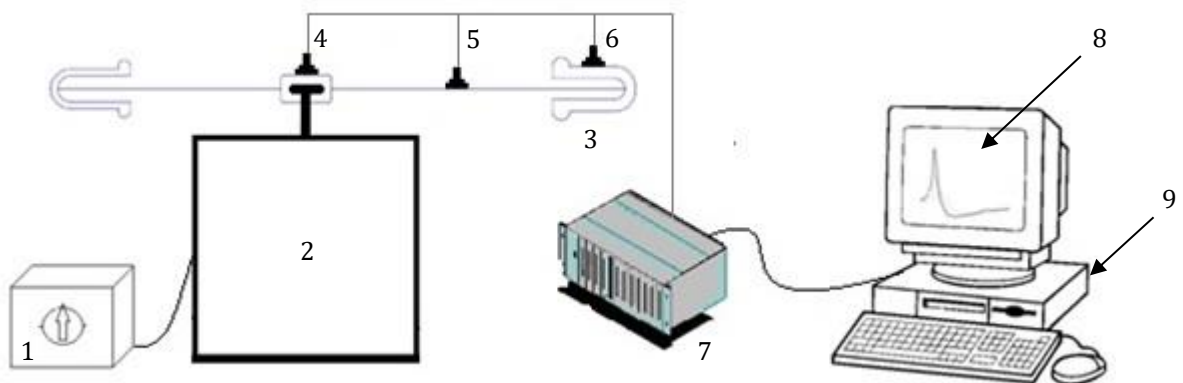


Figura 64 – Desenho esquemático da bancada de ensaios.
Fonte: Marchi e Merino, 2014.

Os equipamentos e acessórios da bancada, indicados na Figura 64 pela respectiva numeração, são:

1. Controlador de velocidade E3 mkII – TecQuipment;
2. Máquina de came TM21 – TecQuipment;
3. Stockbridge assimétrico;
4. Acelerômetro 1 fixado na base do shaker;
5. Acelerômetro 2 fixado no meio do cabo mensageiro;
6. Acelerômetro 3 fixado na extremidade do cabo mensageiro;
7. Analisador de Sinais HP 3565S;
8. Software para análise de sinais HP 3566A/67A;
9. Computador desktop COMPAQ com processador Intel Pentium.

O principal equipamento da bancada de ensaios é a máquina de cames TM21, ilustrada na Figura 65. Este mecanismo permitiu deslocar o *Stockbridge* assimétrico com amplitudes constantes, ao longo de uma determinada faixa de excitação.

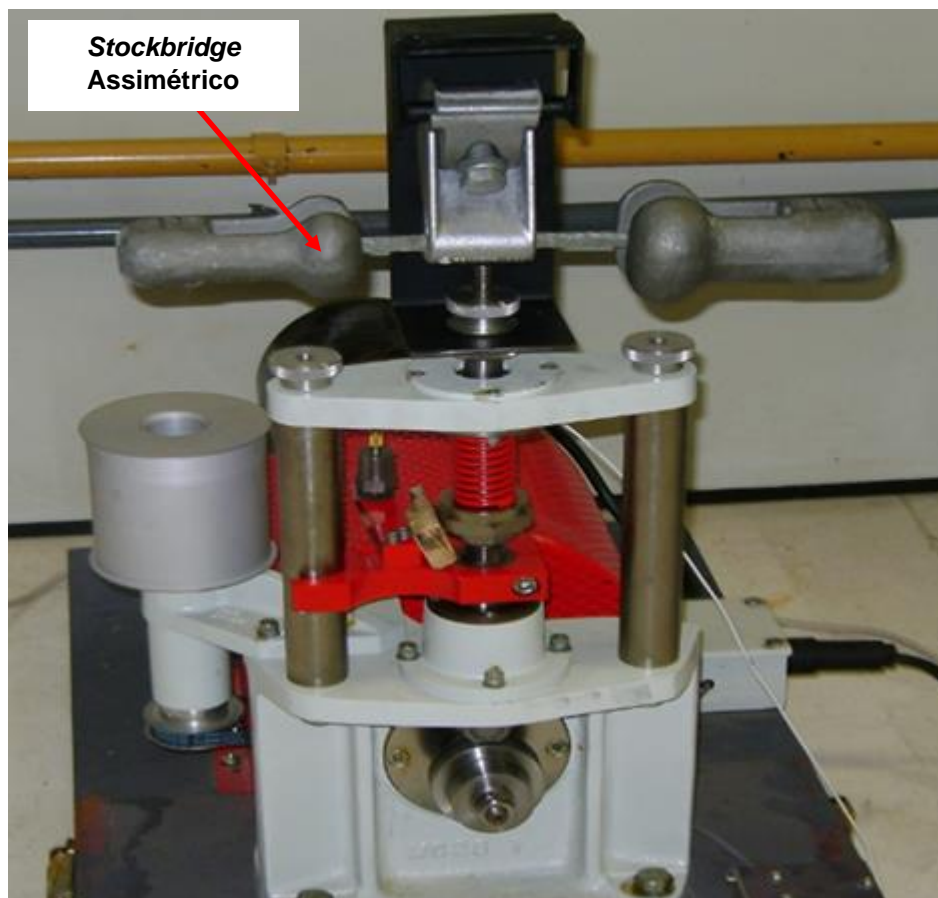


Figura 65 - Sistema de deslocamento com amplitude constante e frequência controlada.
Fonte: Marchi e Merino, 2014.

Os principais componentes da máquina de came são indicados nas respectivas figuras abaixo:

- Motor elétrico (Figura 66);
- Eixo (Figura 67);
- Came (Figura 68);
- Seguidor de face plana (Figura 68);
- Mola (Figura 69);
- Haste (Figura 69);
- Suporte de fixação (Figura 70);
- Base de deslocamento (Figura 70).

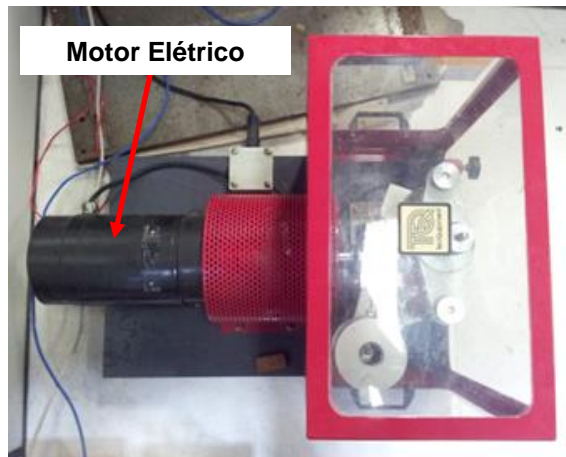


Figura 66 - Vista superior da máquina de came.
Fonte: Marchi e Merino, 2014.



Figura 67 - Vista lateral da máquina de came.
Fonte: Marchi e Merino, 2014.

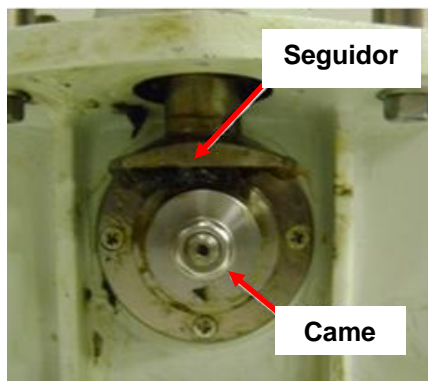


Figura 68 – Came de disco e seguidor de face plana.
Fonte: Marchi e Merino, 2014.

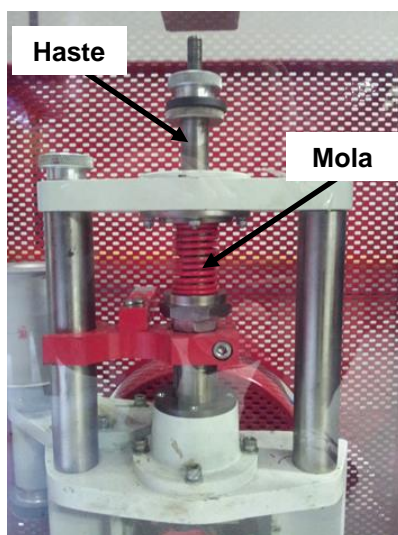


Figura 69 - Haste e mola em detalhes.
Fonte: Marchi e Merino, 2014.

Na extremidade superior da haste o amortecedor *Stockbridge* foi rigidamente acoplado, por meio da sua garra de fixação, a um suporte, como ilustra a Figura 70.

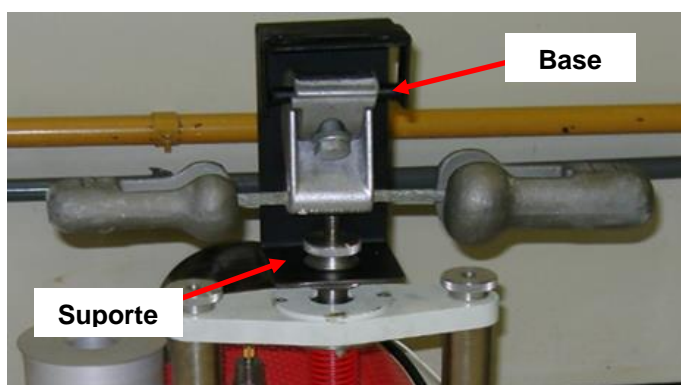


Figura 70 - Acoplamento garra-suporte, denominado de base de deslocamento.
Fonte: Marchi e Merino, 2014.

5.2.3.1.3 Princípio de Funcionamento

O funcionamento da máquina ocorre quando o motor elétrico aciona o eixo no qual está fixado a came de determinada excentricidade. A excentricidade da came, através do movimento rotativo, desloca o seguidor de face plana que, por sua vez, promove a translação vertical da haste. Devido a ação da mola a haste retorna para a posição inicial. Desse modo, a base, solidária à haste, têm deslocamentos ascendentes e descendentes, com amplitudes constantes e definidas pelo uso de seis comes de disco, com excentricidades de: 0,25 ; 0,5 ; 0,75 ; 1,25 ; 1,5 e 1,75 mm.

Para variar a frequência de excitação durante o ensaio, foi utilizado um controlador de velocidade ilustrado na Figura 71. Dessa forma, a frequência de excitação foi variada de 5 a 17 Hz, com incrementos de 0,25 Hz.



Figura 71 - Controlador de velocidade E3 mkII da TecQuiment.
Fonte: Marchi e Merino, 2014.

5.2.3.1.4 Aquisição de Dados

Os dados foram obtidos através de três acelerômetros: dois fixos no cabo mensageiro e um no centro do suporte de fixação. Desse modo, foram transmitidos para o computador valores como frequência, deslocamento e amplitude do movimento do *Stockbridge* acoplado à máquina de came.

5.2.3.1.5 Resultados Obtidos

Geron (2010) obteve as curvas das Funções de Resposta em Frequência (FRFs) para cada uma das seis cames com excentricidades diferentes, ao longo da faixa de 5 a 17 Hz (Figuras 72 e 73). Essas FRFs correspondem a sinais normalizados dos acelerômetros 5 (ponto médio do cabo mensageiro) e 6 (extremidade do cabo) em relação ao acelerômetro 5 (base de deslocamento), indicados na Figura 64.

A partir das Figuras 72 e 73, constatou-se que com o aumento das excentricidades das cames, as amplitudes máximas das curvas ocorrem em frequências menores, exceto para a came com excentricidade de 1,75 mm. Esta exceção ocorreu devido a problemas de fabricação da came, o que motivou desconsiderar essa excentricidade. Por fim, ainda nas Figuras 72 e 73, foi observado que as amplitudes máximas são maiores para o acelerômetro colocado na extremidade do cabo mensageiro.

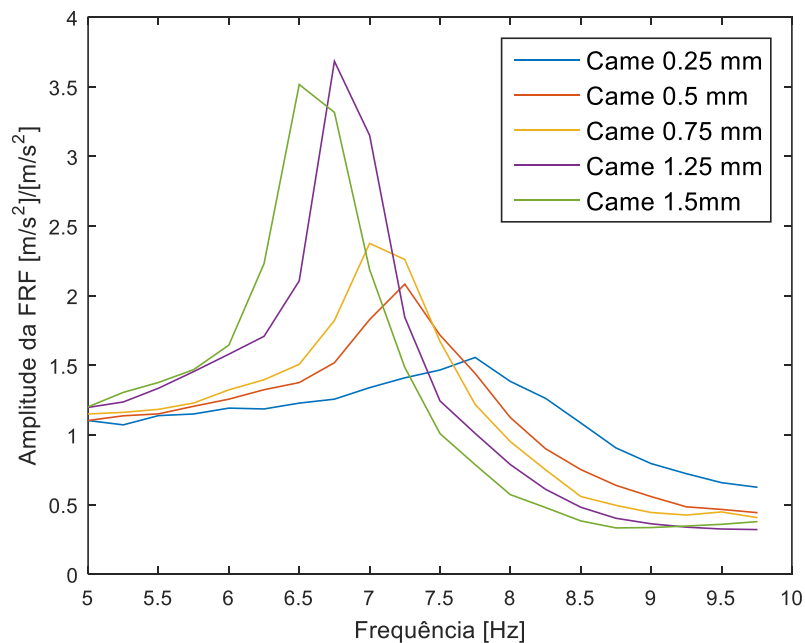


Figura 72 - FRFs obtidas no meio do cabo mensageiro com o acelerômetro 5.
Fonte: Geron, 2010.

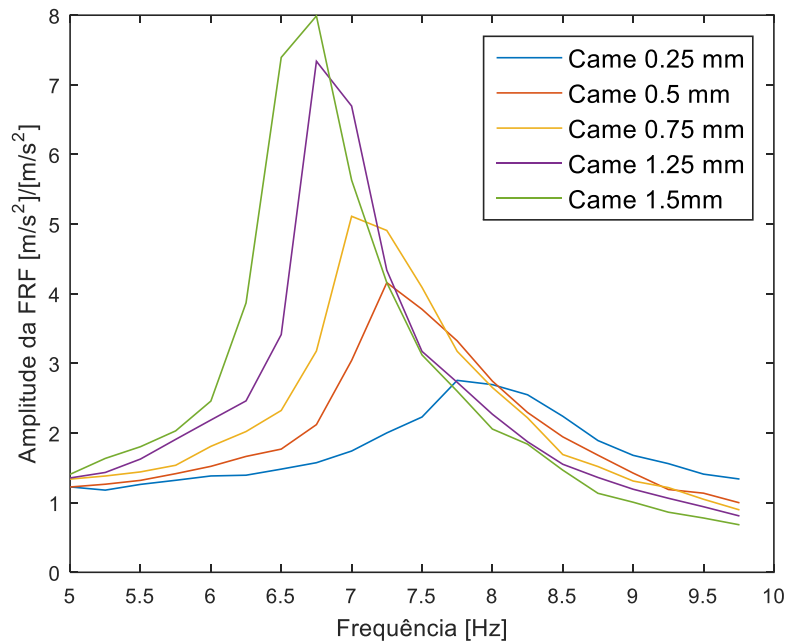


Figura 73 - FRFs obtidas na extremidade do cabo mensageiro com o acelerômetro 6.
Fonte: Geron, 2010.

A correlação de dados numéricos, referentes ao *Stockbridge* ensaiado por Geron (2010), é com base nos dados experimentais da Figura 72. Essas correlações, por sua vez, são comparadas com as obtidas para os ADVs (a) e (b) da Figura 51.

5.2.3.2 Estudos de Barbieri e Barbieri (2012)

5.2.3.2.1 Aspectos Gerais

Com base nos dados experimentais obtidos por Geron (2010), Barbieri e Barbieri (2012) conduziram estudos no sentido de ajustar parâmetros de um sistema linear e de um sistema não-linear do amortecedor. Para cada sistema, foram considerados ensaios de cinco comes com excentricidades de: 0,25 / 0,5 / 0,75 / 1,25 e 1,5 mm.

O trabalho desenvolvido por Barbieri e Barbieri (2012) correlacionou FRFs numéricas às FRFs experimentais do primeiro modo de vibração do *Stockbridge*. Desse modo, a comparação entre dados numéricos e experimentais, permitiu ajustar o modelo numérico através da determinação de alguns parâmetros. No caso do sistema linear, os parâmetros foram:

- Rigidez a flexão;
- Fator de perda.

A rigidez a flexão considerada foi na forma complexa:

$$EI = EI_o(1 + i_c\eta) \quad (231)$$

Na equação (231) η é a parte imaginária representativa do amortecimento do sistema e considerado como dependente da frequência de excitação (equação (47)), de modo a simular o comportamento histerético do sistema.

Para o sistema não linear, além dos parâmetros rigidez a flexão e fator de perda, também foram ajustados outros quatro parâmetros:

- β_1 e β_2 : Para ajuste da matriz de rigidez não linear;
- γ_1 e γ_2 : Para ajuste da matriz de amortecimento não linear.

Para a obtenção das amplitudes de resposta do *Stockbridge* ensaiado, Barbieri e Barbieri (2012) consideraram as variações reais da aceleração com a frequência. A Figura 74 ilustra essas variações de acordo com cada excentricidade de came utilizada.

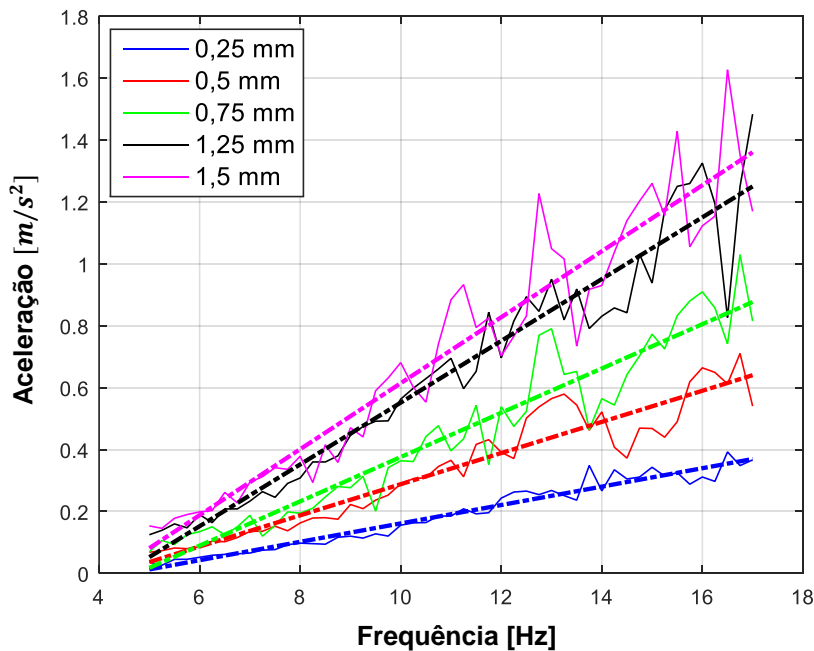


Figura 74 - Variações da aceleração com a frequência de excitação, para cada ensaio de came. Fonte: Barbieri e Barbieri (2012).

5.2.3.2.2 Resultados Obtidos

A Figura 75 ilustra as curvas das FRFs relativas ao ensaio de came com excentricidade de 1,25 mm, em três condições consideradas: dados experimentais, dados do sistema linear e dados do sistema não linear. Nota-se que as curvas do sistema linear e não-linear estão praticamente sobrepostas, bem como ajustadas à curva experimental.

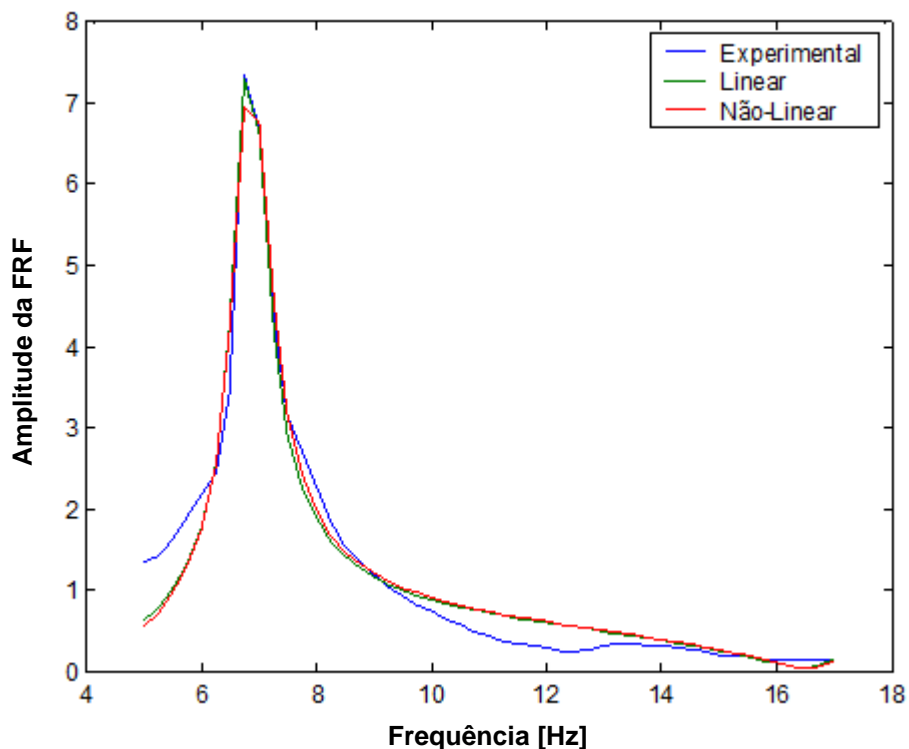


Figura 75 - Curvas das FRFs obtidas para os sistemas linear e não linear, ajustadas aos dados experimentais.

Fonte: Barbieri e Barbieri (2012).

De acordo com Barbieri e Barbieri (2012), para os demais ensaios com cames de diferentes excentricidades, os resultados foram semelhantes aos apresentados na Figura 75.

A Tabela 6 resume os parâmetros ajustados por Barbieri e Barbieri (2012), de acordo com a excentricidade da came e do respectivo sistema considerado.

Por fim, Barbieri e Barbieri (2012) apresentaram curvas de referência para ajuste de parâmetros do *Stockbridge* quando este é ensaiado em excitadores eletromecânicos (Figuras 76 e 77).

Tabela 6 - Parâmetros ajustados do lado maior do Stockbridge assimétrico.

Excentricidade (mm)	Erro Absoluto	EI (Nm^2)	η_i	β_1 (N/m^3)	β_2 (N/m^3)	γ_1 (N)	γ_2 (N)
0,25	Linear	0,589	1,90	9,82			
	Não Linear	0,600	1,98	11,46	-7,9e9	-0,0036	-0,0264
0,5	Linear	0,454	1,74	6,21			
	Não Linear	0,480	1,69	7,68	9,59e8	-0,0308	-0,0416
0,75	Linear	0,496	1,65	4,40			
	Não Linear	0,464	1,67	6,57	-4,59e7	-0,0077	-0,0445
1,25	Linear	0,568	1,52	2,94			
	Não Linear	0,569	1,54	3,72	-1,67e8	-0,0182	-0,0490
1,5	Linear	0,828	1,43	2,56			
	Não Linear	0,797	1,08	11,24	5,20e8	-0,1601	-0,0147

Fonte: Barbieri e Barbieri (2012).

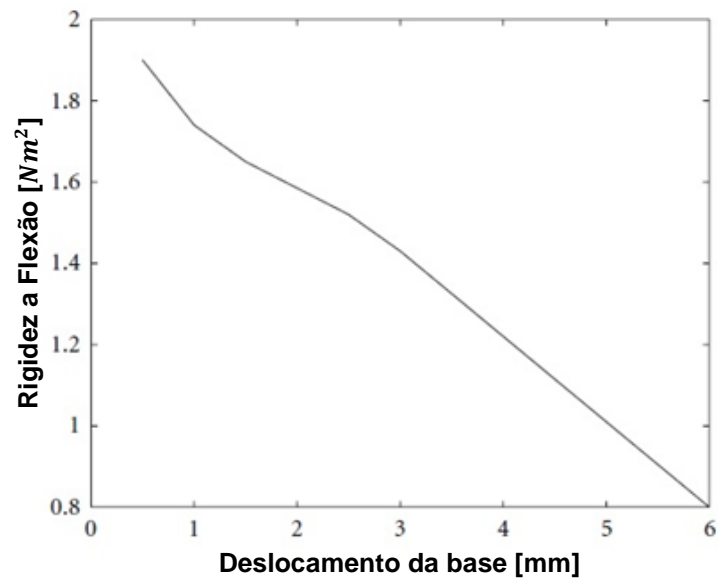


Figura 76 - Curva relativa a variação da rigidez a flexão com o deslocamento da base.
Fonte: Barbieri e Barbieri (2012).

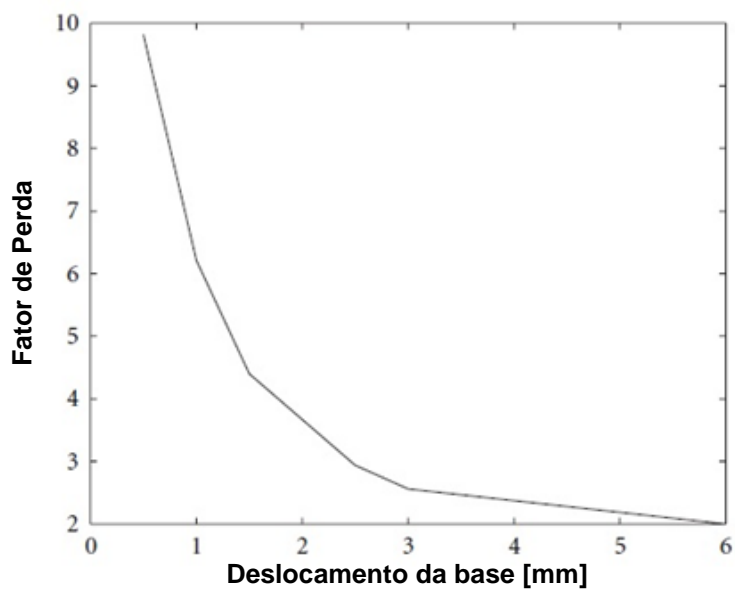


Figura 77 - Curva relativa a variação do fator de perda com o deslocamento da base.
Fonte: Barbieri e Barbieri (2012).

6 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A apresentação dos resultados é dividida em duas partes. A primeira é referente aos *Stockbridges* (a) e (b) da Figura 51. Já a segunda parte trata dos resultados obtidos com os dados de Geron (2010), bem como dos estudos de Barbieri e Barbieri (2012).

6.1 PARTE I

6.1.1 Dados Experimentais

Os resultados experimentais são apresentados nas Figuras 78, 79 e 80, bem como nas Tabelas 7 e 8 de acordo com o amortecedor considerado.

A Figura 78 mostra as FRFs experimentais do ponto médio do cabo em ambos os lados do *Stockbridge* (a), na faixa de frequência considerada (5 a 120 Hz).

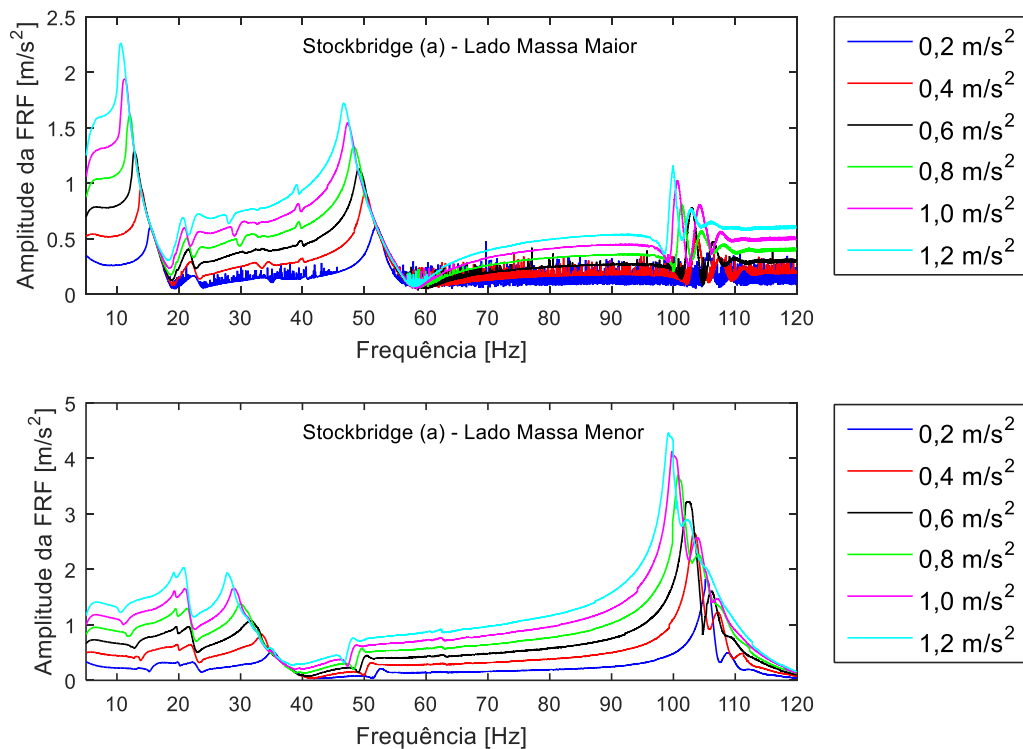


Figura 78 - FRFs experimentais de ambos os lados do *Stockbridges* (a).
Fonte: O Autor.

A Tabela 7 resume as frequências naturais dos quatro modos de vibração do *Stockbridge* (a), obtidas experimentalmente a partir da Figura 78.

Tabela 7 - Frequências naturais do *Stockbridge* (a), obtidas experimentalmente.

Frequências Naturais [Hz]	Amplitude de Aceleração da Base a_b [m/s^2]					
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
1	15,41	14,02	12,77	12,08	11,29	10,6
2	35,07	33,44	31,74	30,12	28,97	27,83
3	52,01	50,19	49,16	48,33	47,35	46,64
4	105,4	103,4	102,5	100,7	99,77	99,19

Fonte: O Autor.

A Figura 79 e a Tabela 8 correspondem, respectivamente, às FRFs e às frequências naturais do lado cortado do *Stockbridge* (b), ou seja, apenas do lado da massa maior do ADV.

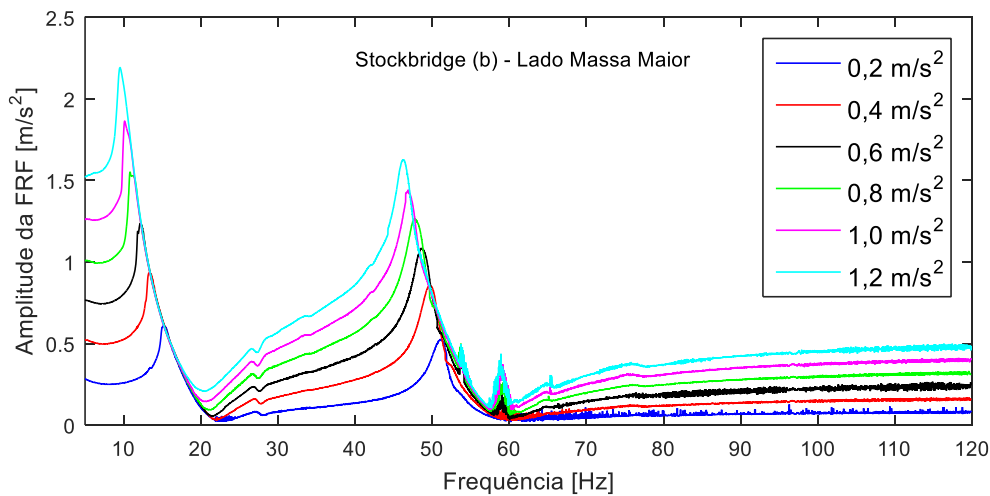


Figura 79 - FRFs experimentais do *Stockbridge* (b).

Fonte: O Autor.

Tabela 8 - Frequências naturais do *Stockbridge* unidade (b), obtidas experimentalmente.

Frequências Naturais [Hz]	Amplitude de Aceleração da Base a_b [m/s^2]					
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
1	15,22	13,41	12,16	10,84	10,14	9,53
3	51,24	49,87	48,72	47,79	47,05	46,23

Fonte: O Autor.

A partir das Figuras 78 e 79, foram isoladas as amplitudes de aceleração correspondentes ao primeiro modo de vibração, bem como do lado da massa maior dos *Stockbridges* (a) e (b). As Figuras 80 e 81 destacam essas amplitudes de acordo com a respectiva amplitude de aceleração da base.

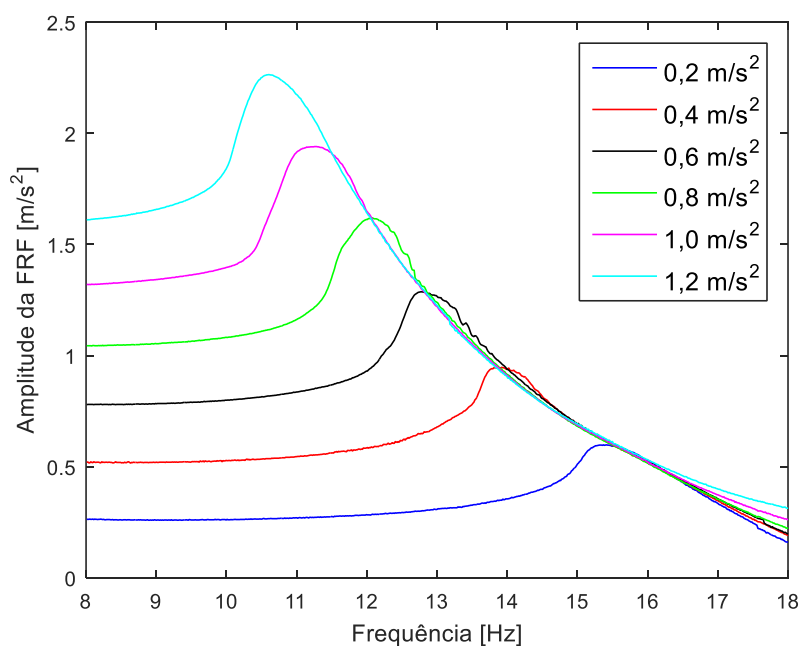


Figura 80 - Curvas das FRFs do *Stockbridge* (a) no primeiro modo de vibração.
Fonte: O Autor.

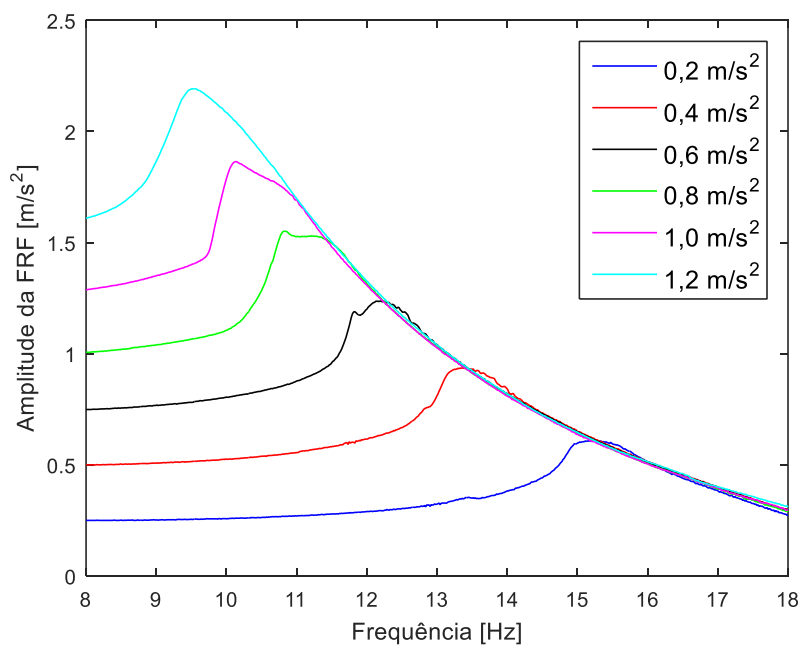


Figura 81 - Curvas das FRFs do *Stockbridge* (b) no primeiro modo de vibração.
Fonte: O Autor.

6.1.2 Dados Correlacionados

A Figura 82 exibe os resultados numéricos do *Stockbridge* (a), correlacionados com base nos dados experimentais da Figura 80.

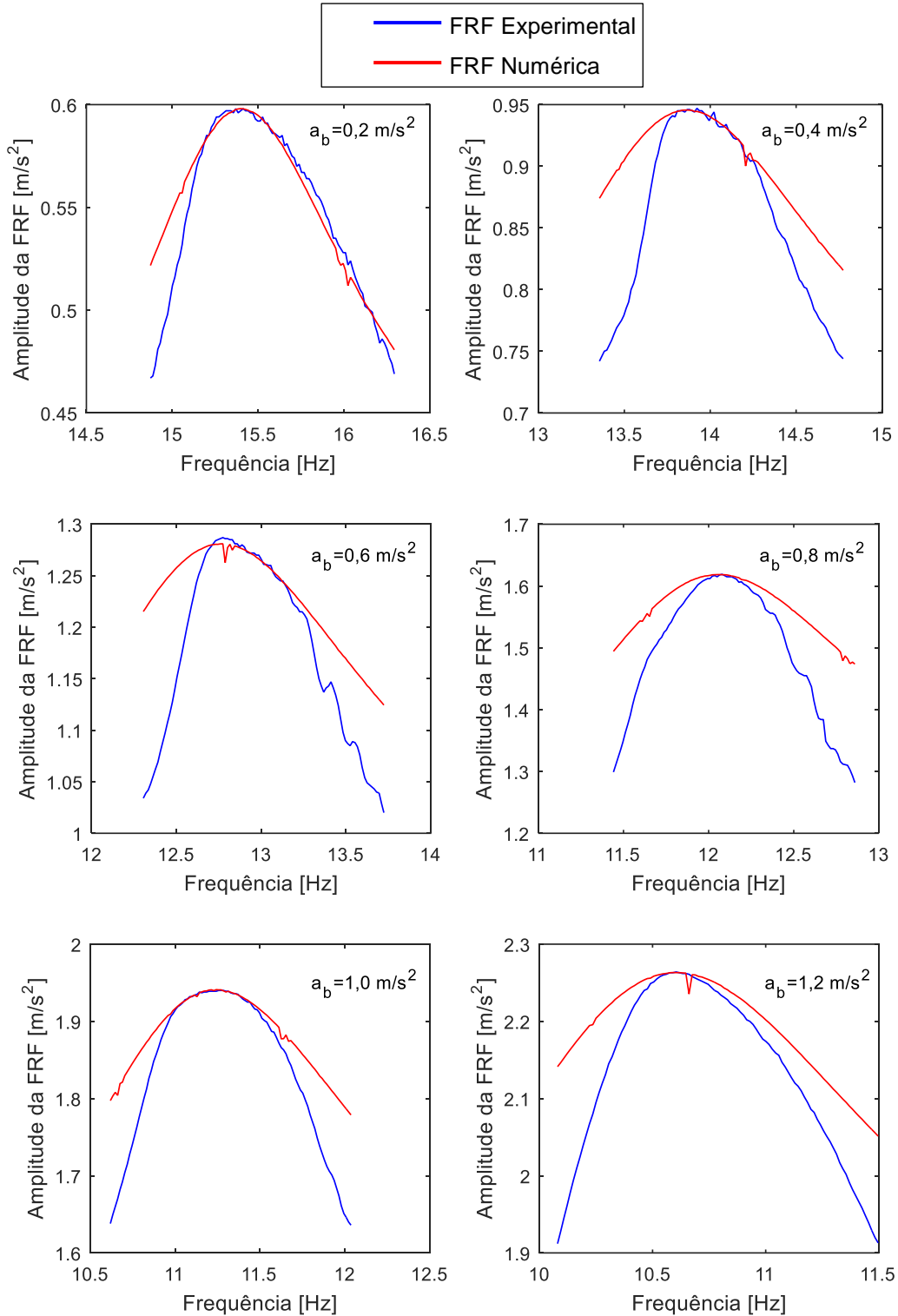


Figura 82 – FRFs numéricas ajustadas com base nas FRFs experimentais do ADV (a).
Fonte: O Autor.

A Figura 83 exibe os resultados numéricos do *Stockbridge* (b), correlacionados a partir dos dados experimentais da Figura 81.

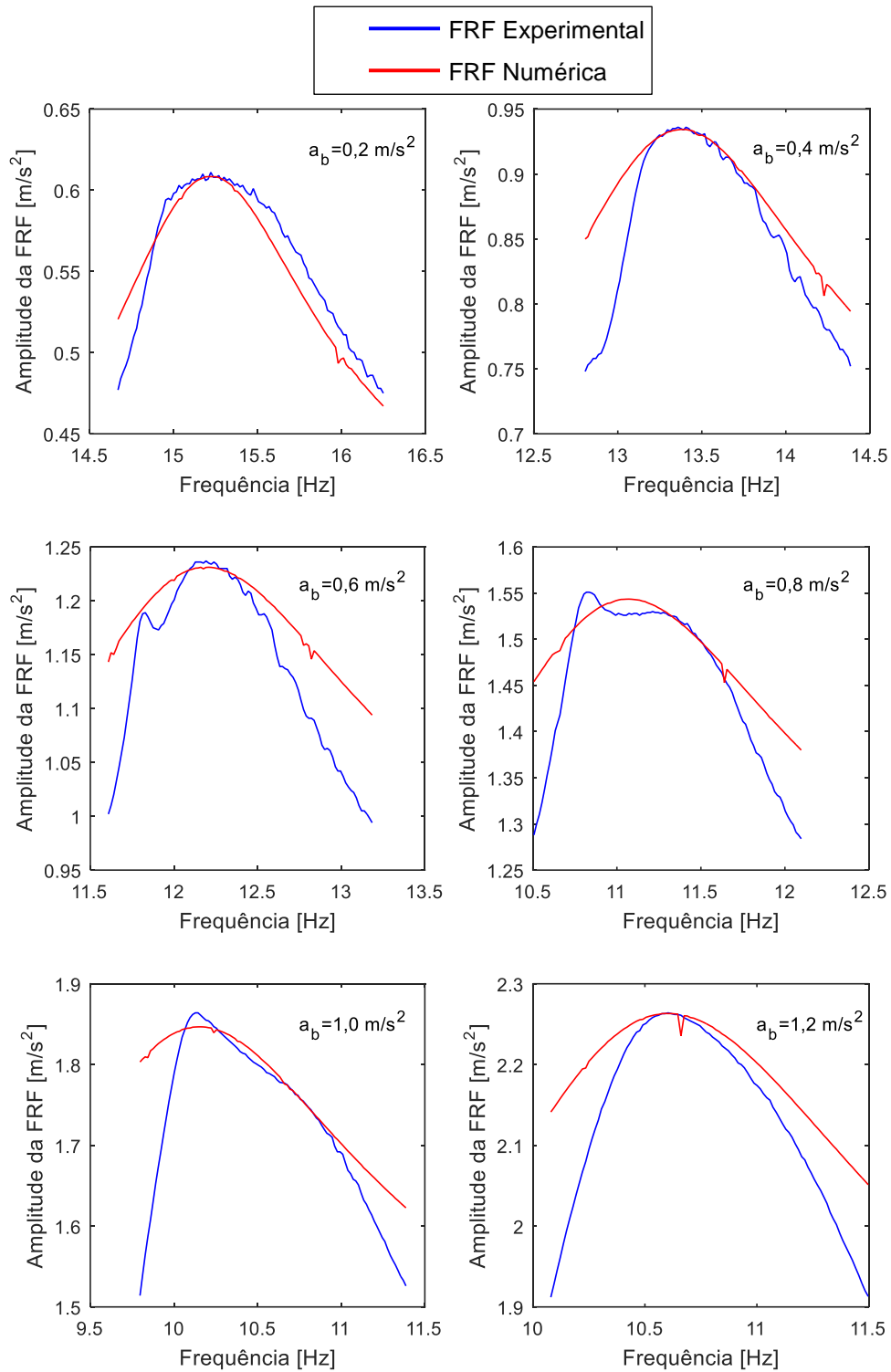


Figura 83 - FRFs numéricas ajustadas com base nas FRFs experimentais do ADV (b).
Fonte: O Autor.

A partir das correlações numéricas das FRFs das Figuras 82 e 83, foram obtidas as frequências naturais referentes ao primeiro modo de vibração dos *Stockbridges* (a) e (b). Essas frequências estão relacionadas na Tabela 9, de acordo com as amplitudes de aceleração de cada ADV.

Tabela 9 – Frequências naturais obtidas experimentalmente para os *Stockbridges* (a) e (b).
Frequências Naturais do Primeiro Modo de Vibração [Hz]

ADV	Amplitude de Aceleração da Base a_b [m/					
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
Stockbridge (a)	15,4	13,87	12,77	12,07	11,24	10,59
Stockbridge (b)	15,24	13,41	12,19	11,07	10,18	9,54

Fonte: O Autor.

6.1.3 Parâmetros Ajustados

As Tabelas 10 e 11 mostram os parâmetros α_1 , α_2 e EI ajustados, com seus respectivos valores de erro relativo da função objetivo (FO), otimizada via PSO.

Tabela 10 - Parâmetros ajustados de acordo com a amplitude de aceleração da base para o *Stockbridge* (a).

a_b [m/s ²]	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
α_1 [Ns/m]	0,1525	0,3525	0,4417	0,4105	0,4113	0,5113
α_2	0,0898	0,1265	0,1503	0,1663	0,1813	0,1913
EI [Nm ²]	50,01	39,47	32,85	28,97	24,86	21,93
FO	0,99	4,34	5,26	7,29	4,63	5,93

Fonte: O Autor.

Tabela 11 - Parâmetros ajustados de acordo com a amplitude de aceleração da base para o *Stockbridge* (b).

a_b [m/s ²]	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
α_1 [Ns/m]	0,1418	0,3518	0,4235	0,5112	0,4557	0,5233
α_2	0,0873	0,1309	0,1665	0,1877	0,2076	0,2097
EI [Nm ²]	48,75	36,50	29,63	23,98	19,88	17,50
FO	1,34	2,76	4,48	3,63	4,12	5,79

Fonte: O Autor.

A Figura 84 ilustra a variação do fator de perda (α_2) com relação à frequência de excitação. Já a Figura 85 exibe a variação do fator de perda e da rigidez a flexão com a amplitude de variação da base do *shaker*.

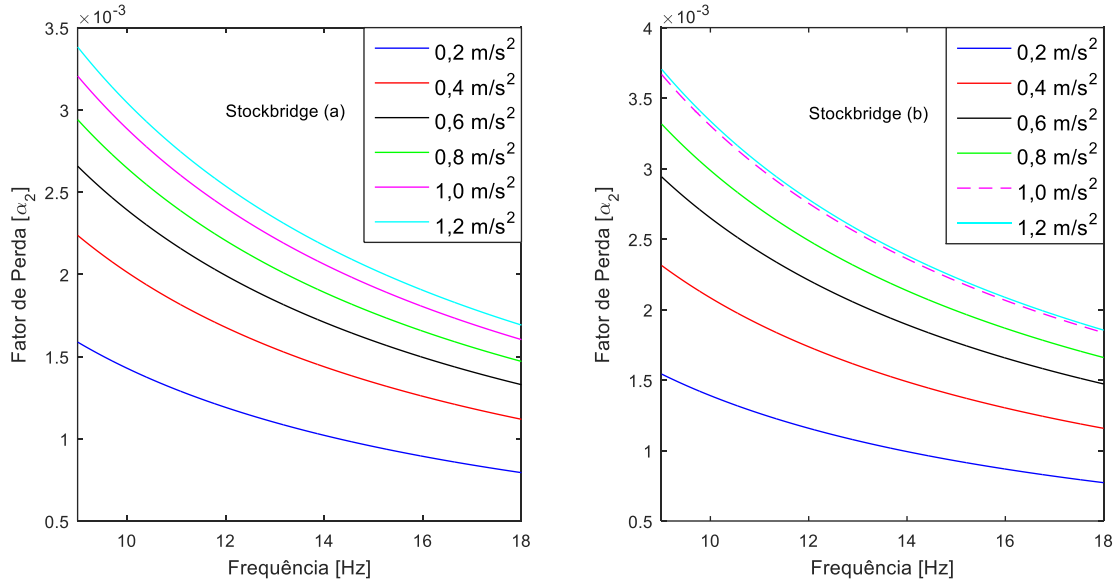


Figura 84 – Curvas relativas à variação do fator de perda com a frequência de excitação. Fonte: O Autor.

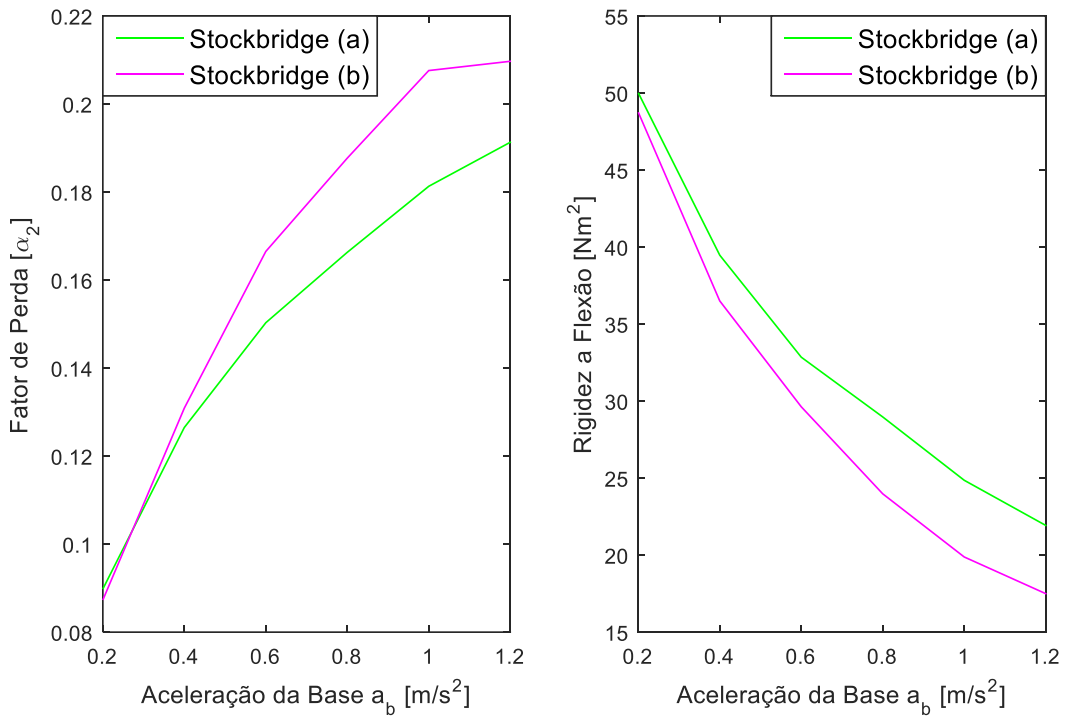


Figura 85 – Variação do fator de perda e da rigidez a flexão com a aceleração da base. Fonte: O Autor.

As Figuras 86 e 87 revelam as curvas de convergência do PSO. Tanto para o *Stockbridge* (a), quanto para o (b), essas curvas variam com o número de iterações, para cada amplitude de aceleração da base.

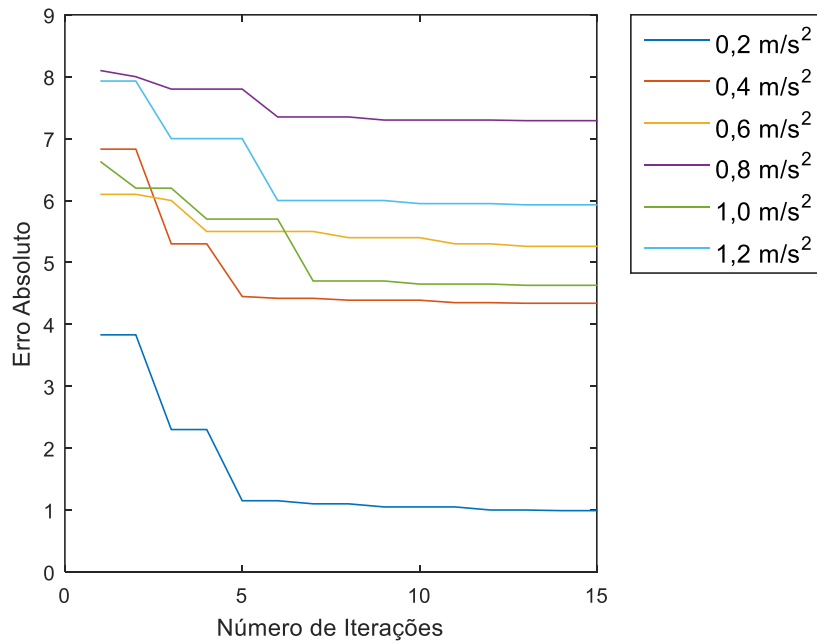


Figura 86 – Curvas de convergência do PSO para o *Stockbridge* (a).
Fonte: O Autor.

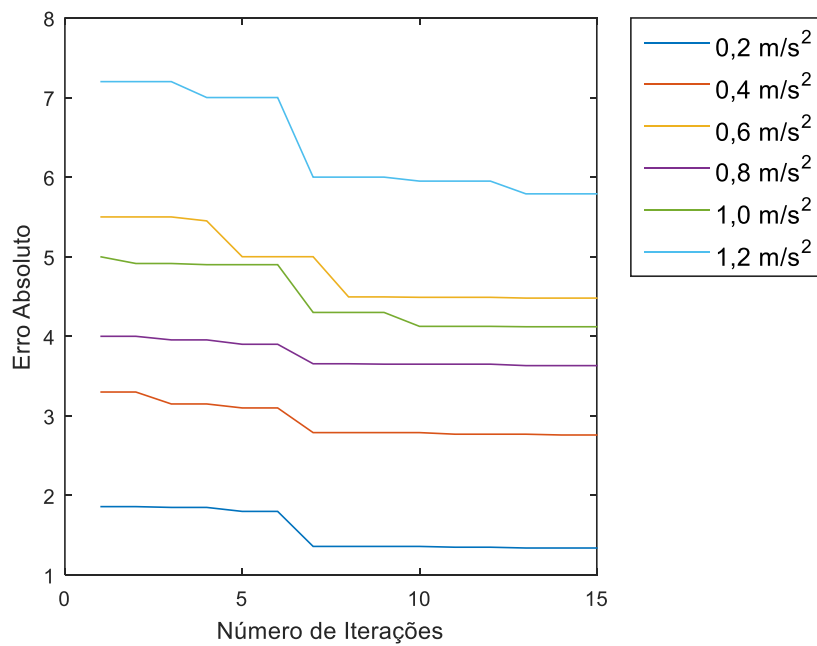


Figura 87 - Curvas de convergência do PSO para o *Stockbridge* (b).
Fonte: O Autor.

6.2 PARTE II

6.2.1 Dados Experimentais

A Tabela 12, a partir das Figuras 72 e 73, define as frequências naturais do primeiro modo de vibração do *Stockbridge* ensaiado por Geron (2010), para cada amplitude de deslocamento da came e posição no cabo mensageiro.

Tabela 12 - Frequências naturais obtidas experimentalmente para o ADV de Geron (2010).

Posição no Cabo Mensageiro	Amplitude de Deslocamento [mm]				
	0,25	0,50	0,75	1,25	1,5
Ponto Médio (acelerômetro 5)	7,75	7,25	7,0	6,75	6,5
Extremidade (acelerômetro 6)	7,75	7,25	7,0	6,75	6,75

Fonte: O Autor.

6.2.2 Dados Correlacionados

As Figuras 88 mostra as FRFs numéricas ajustadas com base nas FRFs experimentais (Figuras 72 e 73). As Figuras 89 exibem as correlações na forma particularizada.

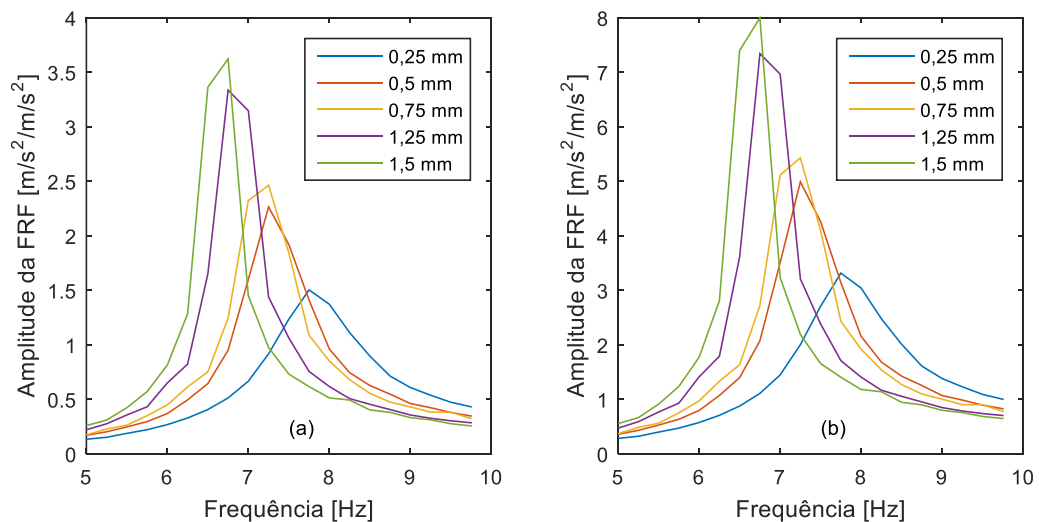


Figura 88 – FRFs ajustadas para o acelerômetro no ponto médio (a) e na extremidade do cabo (b).

Fonte: O Autor.

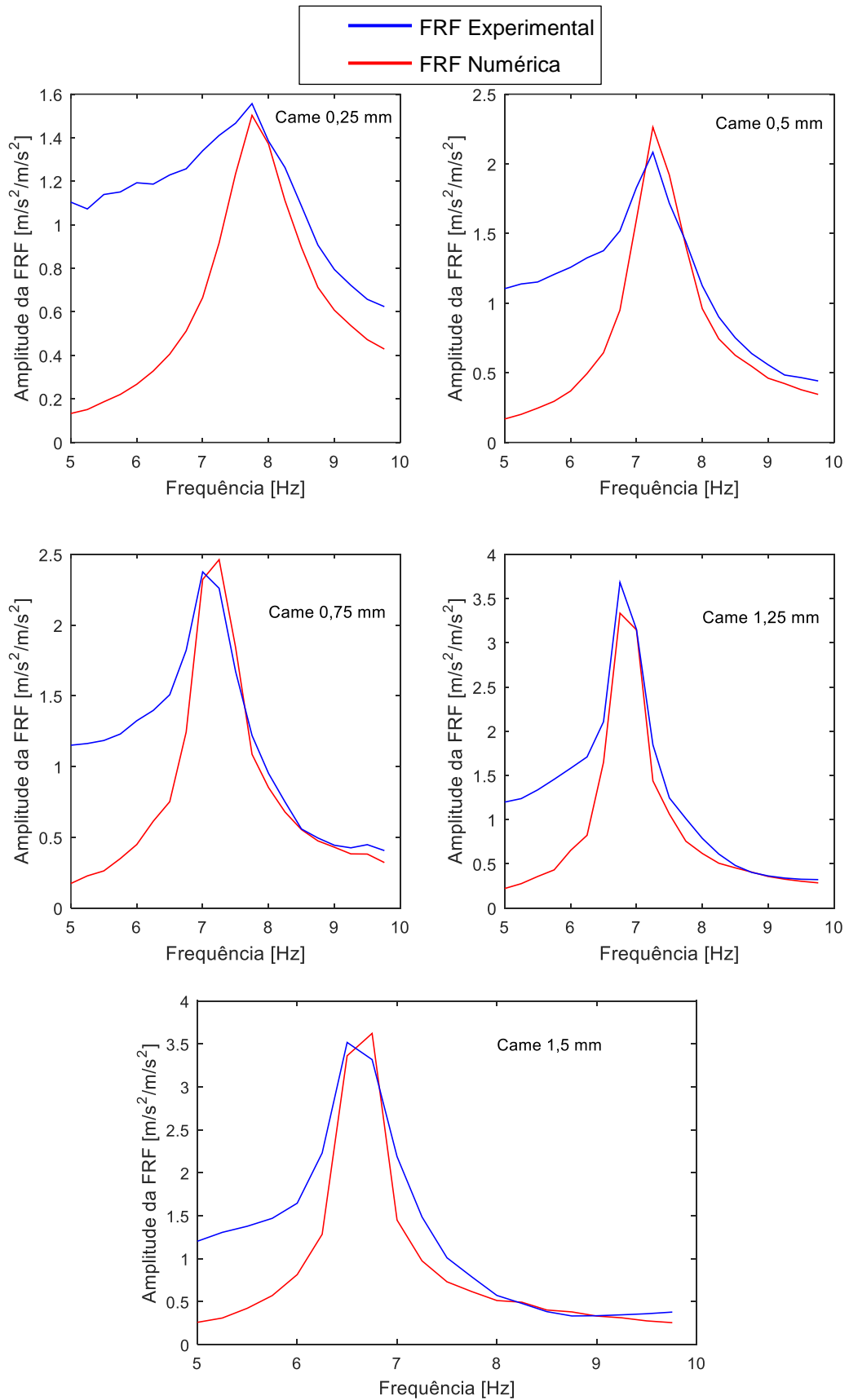


Figura 89 – FRFs numéricas ajustadas de acordo com a amplitude de deslocamento da came.
 Fonte: O autor.

A partir da Figura 89 se extrai as frequências naturais do ADV de Geron (2010). A Tabela 13 resume essas frequências, as quais, correspondem ao primeiro modo de vibração no ponto médio do cabo mensageiro.

Tabela 13 - Frequências naturais obtidas numericamente para o ADV de Geron (2010).
Frequências Naturais do Primeiro Modo de Vibração [Hz]

Posição no Cabo Mensageiro	Amplitude de Deslocamento [mm]				
	0,25	0,50	0,75	1,25	1,5
Ponto Médio (acelerômetro 5)	7,75	7,25	7,25	6,75	6,75

Fonte: O Autor.

6.2.3 Parâmetros Ajustados

A partir das curvas reais de aceleração (Figura 74), foram obtidos os deslocamentos da base. Desse modo, com base nestes deslocamentos, foram ajustados os parâmetros rigidez a flexão e o fator de perda através de curvas de referência (Figuras 76 e 77), desenvolvidas por Barbieri e Barbieri (2012). Em seguida, estes parâmetros foram inseridos no modelo numérico não linear adaptado de Velázquez (2007). Os dados numéricos gerados pelo modelo foram correlacionados com os dados experimentais de Geron (2010). A correlação foi otimizada via PSO que, por sua vez, implicou no ajuste do modelo numérico através dos parâmetros α_1 , α_2 e EI na faixa de 5 a 9,75 Hz.

A Tabela 14 mostram os parâmetros α_1 , α_2 e EI ajustados, com seus respectivos valores de erro relativo da função objetivo (FO), otimizada via PSO.

Tabela 14 - Parâmetros ajustados e seus respectivos valores para o *Stockbridge* ensaiado por Geron (2010).

a_b [m/s^2]	0,25	0,5	0,75	1,25	1,5
α_1 [Ns/m]	0,2047	0,1307	0,0616	0,0342	0,0303
α_2	0,1028	0,0609	0,0558	0,0265	0,0292
EI [Nm^2]	1,0429	0,9650	0,9531	0,9122	0,8759
FO	6,43	5,67	6,3162	8,6560	13,6583

Fonte: O Autor.

As Figuras 90 e 91 denotam, respectivamente, a variação do fator de perda (α_2) e da rigidez a flexão com a frequência de excitação.

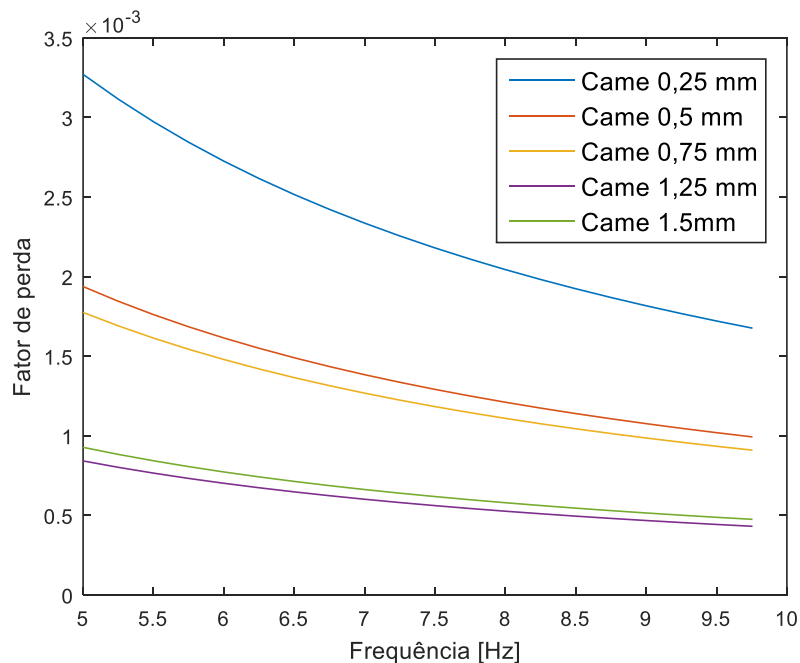


Figura 90 - Curva relativa a variação do fator de perda com a frequência de excitação.
Fonte: O Autor.

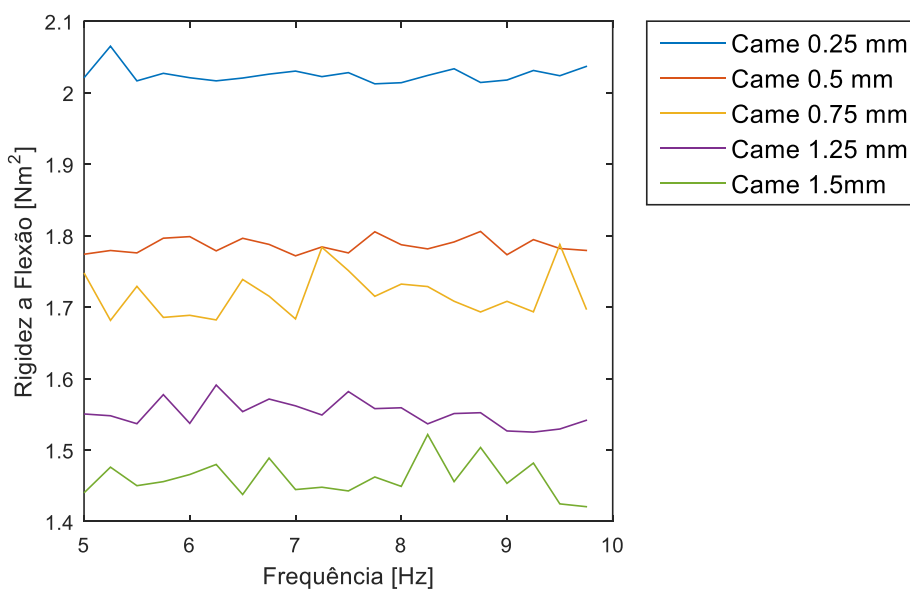


Figura 91 - Curva relativa a variação do fator de perda com a frequência de excitação.
Fonte: O Autor.

As Figura 92 mostra a variação das curvas de convergência do PSO. Para o *Stockbridge* de Geron (2010), essas curvas variam de acordo com o número de iterações, para cada amplitude de deslocamento da came.

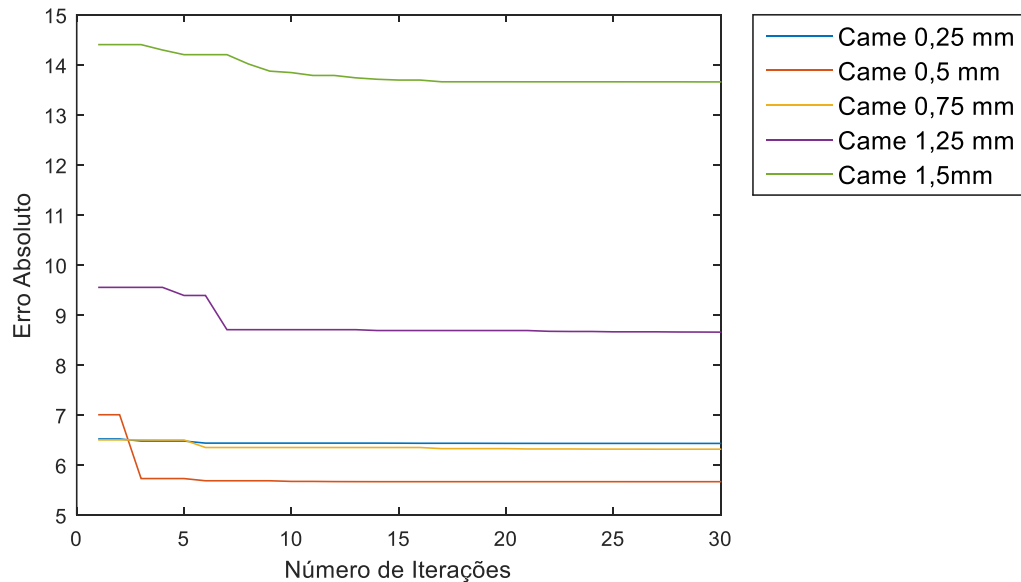


Figura 92 - Curvas de convergência do PSO para os cinco perfis de came.
Fonte: O Autor.

6.3 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os dados experimentais e numéricos apresentados na Parte I e II deste capítulo, permitem elencar as seguintes constatações:

- Na Figura 78 o *Stockbridge* assimétrico inteiro possui quatro frequências naturais. Duas frequências correspondem ao lado da massa inercial maior e as outras duas na massa inercial menor. Além disso, nota-se que as frequências naturais ocorrem de modo alternado entre as massas inerciais do ADV;
- Nas Figuras 78 e 79 o primeiro modo de vibração inicia no lado da maior massa inercial. Adicionalmente, percebe-se que a massa inercial menor acaba por influenciar a atitude vibracional da massa maior. Isso porque a unidade cortada mostra que a ausência da outra massa se reflete em uma banda de vibração mais definida e sem picos adjacentes em pontos fora das frequências naturais previstas;

- A excitação da massa inercial maior em pequenas amplitudes de aceleração como, por exemplo, $0,2 \text{ m/s}^2$ e $0,4 \text{ m/s}^2$ são difíceis de serem controladas pela automatização do sistema. Isso gera vibrações indesejáveis e, conseqüentemente, leituras imprecisas das amplitudes de aceleração;
- As frequências naturais exibidas nas Tabelas 7 e 8 dos ADVs inteiro (unidade (a)) e cortado (unidade (b)) são muito próximas. Contudo, percebe-se pelo erro percentual da Tabela 15 que a maior variação ocorre para o primeiro modo de vibração. Já para o terceiro modo, o erro percentual é baixo, sendo o maior erro de 1,48 % para a amplitude de $0,2 \text{ m/s}^2$. Isso demonstra a dificuldade em controlar e medir vibrações com baixas amplitudes em corpos de elevada inércia. Apesar disso, a semelhança entre as frequências naturais demonstra a predominância de vibração do primeiro e terceiro modos na massa inercial maior;

Tabela 15 – Erro percentual entre as frequências naturais dos *Stockbridges* unidades (a) e (b).

Erro Percentual						
Frequências Naturais [Hz]	Amplitude de Aceleração da Base [m/s^2]					
	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2
1	1,23 %	4,35 %	4,78 %	10,26 %	10,19 %	10,09 %
3	1,48 %	0,64 %	0,90 %	1,12 %	0,63 %	0,88 %

Fonte: O Autor.

- Os dados experimentais das Figuras 78, 79, 80 e 81 evidenciam que com o aumento das amplitudes de aceleração, as amplitudes máximas das curvas ocorrem em frequências menores. Nas Figuras 72 e 73, com o aumento das amplitudes de deslocamento, o resultado é semelhante. Essas evidências demonstram o elevado comportamento não linear do *Stockbridge* assimétrico;
- Outro ponto importante a ser observado nas Figuras 78, 79, 80 e 81 é que com o aumento das amplitudes, as faixas de frequência em torno das frequências naturais se tornam mais estreitas, diminuindo a eficiência do *Stockbridge*. Na Figura 81, referente ao *Stockbridge* cortado, identifica-se que essa tendência é mais promissora haja vista que não há influência da massa inercial do outro lado do dispositivo absorvedor;

- Apesar dos valores da função objetivo (Tabelas 10, 11 e 14) não convergirem de maneira uníssona para um mínimo ideal e tenderem a aumentar com as amplitudes de aceleração ou deslocamento, as correlações numéricas das Figuras 82, 83 e 89 são promissoras para o primeiro modo de vibração. O fato que corrobora essa afirmação é a de que as frequências naturais dos três ADVs, obtidas numericamente das Figuras 82, 83, 89 e resumidas nas Tabelas 9 e 13, são próximas, com erro percentual máximo de 2%;
- Percebe-se na Figura 82 que para a menor amplitude, $0,2 \text{ m/s}^2$, o *Stockbridge* (a) obteve a melhor correlação haja vista o menor valor da função objetivo ($FO = 0,99$). Na Figura 83, a melhor correlação do *Stockbridge* (b) também ocorre para a menor amplitude de aceleração do ensaio, mas com um erro maior da função objetivo ($FO = 1,34$);
- Na Figura 89, apesar da correlação dos dados numéricos aos dados experimentais de Geron (2010) se mostrar condizente, os valores da função objetivo indicam uma tendência de aumento e, portanto, de difícil correlação para amplitudes mais elevadas de deslocamento;
- As correlações das Figuras 82, 83 e 89 são mais favoráveis em baixas amplitudes de aceleração e deslocamento. Isso acontece porque nessas amplitudes o cabo mensageiro experimenta baixos níveis de energia, deformação e amortecimento. Desse modo, os efeitos não lineares do comportamento dinâmico do *Stockbridge* não são desencadeados com a mesma intensidade de amplitudes maiores;
- Nota-se que os parâmetros ajustados para o ADV de Geron (2010) em uma determinada correlação (Figura 93), não proporcionam a mesma convergência em outro ponto do cabo mensageiro como, por exemplo, no ponto médio (Figura 94). Essa correlação ineficiente é evidenciada pelo elevado erro relativo da função objetivo;
- Apesar de os absorvedores (a) e (b) serem do mesmo tipo, ambos foram ensaiados em configurações físicas distintas. Desse modo, essa configuração impõe ao amortecedor (b) uma condição de menor rigidez a flexão haja vista que outros elementos de rigidez e massa, do lado oposto, estão ausentes. Os valores de EI da Tabela 11 denotam essa redução em relação aos respectivos valores da Tabela 10;

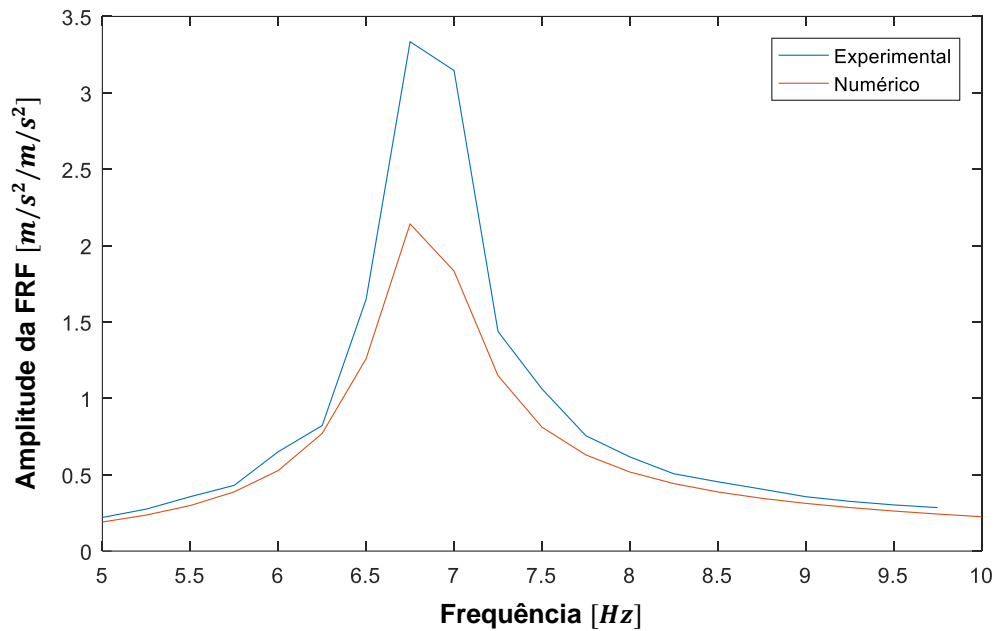


Figura 93 - FRFs ajustadas para o acelerômetro localizado na extremidade do cabo mensageiro.
Fonte: O Autor.

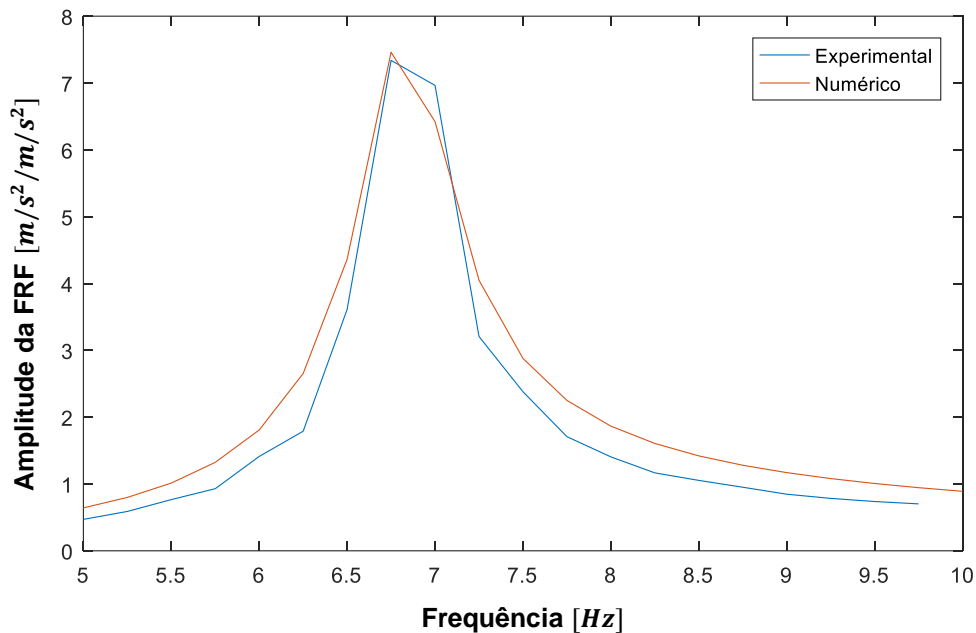


Figura 94 - FRFs ajustadas para o acelerômetro localizado no ponto médio do cabo mensageiro.
Fonte: O Autor.

- Nas Tabelas 10 e 11, bem como na Figura 85, à medida que a amplitude de aceleração aumenta, os parâmetros de amortecimento proporcional tendem a crescer, enquanto o de rigidez a flexão tende a diminuir. Uma possível explicação é que, com maiores amplitudes de aceleração, a estrutura experimenta maiores deflexões e, por consequência, maiores deformações.

Nesse sentido, a presença mais significativa da deformação reflete em uma menor resistência ao movimento, ou seja, na redução da rigidez a flexão. Assim, ao mesmo tempo que a estrutura se deforma, mecanismos de amortecimento proporcional (simbolizado pelos parâmetros α_1 e α_2) são ativados e absorvem parte da energia de deformação, o que justificaria o aumento de tais parâmetros. Em contrapartida, na Tabela 13, à medida que a excentricidade aumenta, os três parâmetros ajustados diminuem. Uma hipótese que justifica o comportamento desses parâmetros é o método de ensaio. Na metodologia empregada por Geron (2010), o deslocamento era mantido constante. Já no método de ensaio utilizado nos dispositivos (a) e (b), a aceleração foi constante. Na Figura 74, obtida por Barbieri e Barbieri (2012) com base nos ensaios de Geron (2010), observa-se que a aceleração tem uma tendência de variar linearmente com a frequência de excitação. Assim, como as amplitudes máximas de resposta do amortecedor ocorrem em frequências menores, conclui-se pela Figura 74 que estas amplitudes máximas ocorrem em condições de menor aceleração. Nessas circunstâncias, o amortecedor é menos suscetível aos mecanismos de amortecimento, ou seja, a dissipação de energia é menor o que justifica a redução dos parâmetros α_1 e α_2 ;

- Ainda analisando as Tabelas 10 e 11, percebe-se que apesar da diferença na rigidez a flexão dos dispositivos (a) e (b), a dissipação de energia pelo amortecimento proporcional é semelhante em ambos. Isso ocorre porque, no primeiro modo de vibração do *Stockbridge*, o deslocamento predominante é no lado da massa inercial maior, ou seja, do lado analisado;
- Os erros relativos da função objetivo foram maiores para o *Stockbridge* ensaiado por Geron (2010). Já para os outros dois dispositivos, notou-se que o amortecedor inteiro apresentou maiores erros relativos na correlação das FRFs experimentais. Uma possível razão é a de que o outro lado do *Stockbridge* inteiro exerce influência, dificultando a correlação.
- Na Figura 84, o fator de perda diminuiu com o aumento da frequência de excitação, porém cresce com o aumento da amplitude de aceleração. Além disso, percebe-se que à medida que essas amplitudes crescem o fator de perda tende para um valor limite. Já na Figura 90, o comportamento é semelhante quando se considera a diminuição do fator de perda com a

excitação. Contudo, o aumento do deslocamento proporciona uma redução desse fator, exceto para a came com excentricidade de 1,5 mm;

- A Figura 85 indica que, para os *Stockbridges* testados com amplitudes de aceleração constantes, os parâmetros fator de perda e rigidez a flexão tendem a uma assíntota limite. Essa observação permite elencar a hipótese de que a partir de uma certa aceleração da base, o fator de perda atingiria um valor limite máximo, enquanto a rigidez a flexão alcançaria um patamar mínimo possível. Isso se refletiria no comportamento mecânico do cabo mensageiro, no qual, consistiria em defletir o máximo possível com uma resistência a flexão mínima, permitindo ao ADV dissipar a maior quantidade de energia tangível. De modo similar, na Figura 91, a rigidez a flexão do *Stockbridge* de Geron (2010) também diminui com o aumento da amplitude de deslocamento, porém esse parâmetro tende a permanecer constante ao longo da faixa de excitação considerada;
- Outro ponto a ser destacado na Figura 85 é que os *Stockbridges* (a) e (b) apresentam fatores de perda e rigidez a flexão próximos em baixas amplitudes de aceleração. À medida que essas amplitudes crescem o *Stockbridge* (b) apresenta, ao mesmo tempo, maior fator de perda e menor rigidez a flexão em relação ao *Stockbridge* (a). Novamente, essas constatações se devem à ausência da massa inercial menor no ADV (b). Essa condição física determina uma menor rigidez e inércia do sistema, cuja resposta vibracional se reflete em deflexões e deformações mais significativas. Essas deformações ocorrem mediante o consumo de energia do sistema, o que justifica o aumento no fator de perda.
- Nas Figuras 86, 87 e 92, tem-se que a otimização via PSO procurou minimizar a função objetivo ao buscar o menor erro absoluto possível. No caso dos *Stockbridges* (a) e (b), foram efetivadas 15 iterações que convergiram para os respectivos valores de FO das Tabelas 10 e 11. De forma similar, a otimização para o ADV de Geron (2010) envolveu 30 iterações, as quais, convergiram para os correspondentes valores de FO da Tabela 14. Adicionalmente, constata-se nas Figuras 86, 87 e 92 que o erro absoluto cresce com o aumento da amplitude de aceleração ou de deslocamento. Isso indica que o modelo matemático não linear, adaptado de Velázquez (2007), é ainda uma aproximação simples, a qual, precisa ser

revista para prever as complexidades dinâmicas não lineares do *Stockbridge*, em especial, do cabo mensageiro.

7 CONCLUSÕES

As diversas etapas de desenvolvimento e execução deste trabalho forneceram subsídios teóricos e práticos, os quais, permitiram o estudo do comportamento dinâmico não linear do *Stockbridge* assimétrico. Esse estudo envolveu os seguintes objetivos específicos:

- A apresentação de um modelo matemático não linear adequado ao modelo físico do *Stockbridge* assimétrico;
- A avaliação experimental de dois amortecedores assimétricos de mesmo modelo, mas com configurações físicas distintas;
- A extensão do estudo com base em dados experimentais de um terceiro *Stockbridge* ensaiado por Geron (2010), bem como através da utilização de curvas de referência desenvolvidas por Barbieri e Barbieri (2012);
- A adequação de rotinas computacionais para o modelo matemático não linear apresentado;
- A modificação do programa de viga não linear, desenvolvido por Velázquez (2007), afim de obter as FRFs numéricas;
- A correlação das FRFs numéricas às FRFs experimentais, para os três ADVs considerados, através da otimização de três parâmetros do modelo matemático: constante de amortecimento proporcional à massa, fator de perda e rigidez a flexão;
- A comparação e análise dos três ADVs a partir das respectivas correlações e parâmetros ajustados.

As correlações dos dados numéricos aos experimentais, para os três ADVs, foram promissoras para o primeiro modo de vibração. Isso permitiu auferir o objetivo geral deste trabalho, isto é, o modelo matemático não linear do *Stockbridge* assimétrico demonstrou ser válido. Entretanto, as correlações apresentaram elevados valores de erro absoluto da função objetivo, indicando uma diferença considerável entre as FRFs experimental e numérica. Adicionalmente, de acordo com as informações provenientes de ferramentas de tempo e processamento do *Matlab*, o consumo computacional gasto nas correlações foram na ordem de 20 horas para cada amplitude de aceleração ou de deslocamento considerada. Tais óbices remetem à uma revisão do modelo matemático, com o intuito de torná-lo mais preciso, otimizado

e rápido. Por exemplo, aperfeiçoar a obtenção dos termos não lineares do modelo com vistas a gerar menos erros numéricos e reduzir o processamento computacional de dados. Essas mudanças permitiriam diminuir o tempo de geração dos dados numéricos, bem como das respectivas otimizações. Outra opção é implementar o modelo numérico em linguagens alternativas de programação, cuja arquitetura de implementação algorítmica é mais eficiente como, por exemplo, a linguagem Python.

Portanto, em face dos elevados valores de erro absoluto da função objetivo, da correlação apenas no primeiro modo de vibração e o elevado tempo computacional, conclui-se que o modelo estudado é interessante do ponto de vista analítico, mas ainda limitado no sentido de tentar simular todo o comportamento não linear do amortecedor *Stockbridge* assimétrico.

7.1 TRABALHOS FUTUROS

Os possíveis trabalhos futuros são:

- Aperfeiçoar o modelo matemático não linear, de modo a considerar outros efeitos não lineares do cabo messageiro;
- Implementar o algoritmo do modelo em linguagem Python com vistas a sua potencialização computacional;
- Substituir a regra de Simpson, indicada no Anexo A, por outros métodos numéricos de resolução de integrais, os quais, gerem menos erros de aproximação.

REFERÊNCIAS

ADHIKARI, Sondipon. **Damping Models for Structural Vibration**. 2000. 204 f. Tese (Doutorado) - Curso de Mechanical Engineering, Engineering Department, Cambridge University, Cambridge, 2000.

ARAÚJO, Aldecir Alves de. **Ajuste de modelos numéricos de elementos finitos usando métodos de otimização**. 2007. 90 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2007.

ARRUDA, Antonio Celso Fonseca de. **Análise de Amortecedores para Linhas de Transmissão de Energia Elétrica**. 1975. 96 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Materiais e Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia de Campinas, Campinas, 1975.

ASEKA, Edson Hikaro. **Sistemas concentrados e distribuídos com amortecimento viscoelástico, utilizando a base gerada pela resposta impulso**. 2008. 116 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

BADIBANGA, Kalombo Remy. **Life Prediction of Power Line Damper**. 2012. 122 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mechanical Engineering, University Of Kwazulu-natal, Durban, 2012.

BARBIERI, Nilson; BARBIERI, Renato. Dynamic Analysis of Stockbridge Damper. **Advances in Acoustics and Vibration**, Curitiba, v. 2012, p.1-8, Hindawi Limited. <http://dx.doi.org/10.1155/2012/659398>, 2012.

BARROS, Everaldo de. **Interações Modais Não Ressonantes em Vigas Cantilever Flexíveis**. 2004. 117 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2004.

BARRY, O.; ZU, J. W.; OGUAMANAM, D. C. D. Nonlinear Dynamics of Stockbridge Dampers. **Transactions Of The Asme, Series G. Journal Of Dynamic Systems, Measurement, And Control**. Toronto, p. 1-7. 9 fev. 2015.

BARRY, Oumar Rafiou. **Vibration Modeling and Analysis of a Single Conductor With Stockbridge Dampers**. 2014. 103 f. Tese (Doutorado) - Curso de Mechanical Engineering, Department Of Mechanical And Industrial Engineering, University Of Toronto, Toronto, 2014.

BARRY, Oumar. **Finite Element Analysis of a Single Conductor with a Stockbridge Damper Under Aeolian Vibration**. 2010. 117 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mechanical Engineering, Ryerson University, Toronto, 2010.

BATHE, Klaus-jürgen. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice Hall, p. 1037, 1996.

BBC NEWS (Irlanda do Norte). **NIE Repairs Iced Over Power Line**. 2011. Disponível em: <<https://www.nienetworks.co.uk/news/article/2011/nie-engineers-repair-ice-hit-line>>. Acesso em: 14 nov. 2016.

BELLORIO, Marcos Bruno. **Revisão sobre critérios de fadiga para cabos condutores de energia e uso de metodologia para estimativa de sua vida remanescente**. 2009. 86 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, 2009.

BRASIL. Portal Brasil. **Fontes hidráulicas geram a maior parte da energia elétrica**. 2014a. Disponível em: <<http://www.brasil.gov.br/infraestrutura/2011/12/fontes-hidraulicas-geram-a-maior-parte-da-energia-el>>. Acesso em: 13 jun. 2017.

BRASIL. Portal Brasil. Site do Governo Federal. Governo Federal. **Rede de transmissão supera 107 mil quilômetros**. 2014b. Disponível em: <<http://www.brasil.gov.br/infraestrutura/2011/12/rede-de-transmissao-supera-107-mil-quilometros>>. Acesso em: 13 jun. 2017.

BRASIL. Portal Brasil. Site do Governo Federal. Operador Nacional do Sistema Elétrico. **Sistema de Transmissão: Horizonte 2017**. 2017c. Disponível em: <http://ons.org.br/PublishingImages/paginas/sobre_sin/mapas/SistemadeTransmissao_Horizonte2017.jpg>. Acesso em: 13 jun. 2017.

BORGES, Romes Antonio. **Contribuição ao Estudo dos Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Não-Lineares**. 2008. 130 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2008.

CAMPOS, Nivaldo Benedito Ferreira. **Ajuste de Modelos Usando Funções de Resposta em Frequência**. 2002. 98 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

CANALES, Celia Navarro et al. Optimal Design of Stockbridge Dampers. **SciELO Analytics**, Guanajuato, v. 2, n. 6, p.193-199, mar. 2008.

CARVALHO, Eulher Chaves. **Vibrações Não Lineares e Não Planares e Instabilidade Dinâmica de Barras Esbeltas**. 2013. 228 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2013.

CIGRE, **Report on Aeolian Vibration**. WG 01 – Committee 22 (Overhead lines), 1989.

CLAREN, R.; DIANA, G. Mathematical analysis of transmission line vibration. **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems**. Volume PAS-88, n. 12, pp.1741-1771, 1969.

CRESPO DA SILVA, M. R. M.; GLYNN, C. C. Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams. I. Equations of Motion. **Journal Of Structural Mechanics**, [s.l.], v. 6, n. 4, p.437-448, jan. 1978a. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.1080/03601217808907348>.

CRESPO DA SILVA, M. R. M.; GLYNN, C. C. Nonlinear Flexural-Flexural-Torsional Dynamics of Inextensional Beams. II. Forced Motions. **Journal Of Structural Mechanics**, [s.l.], v. 6, n. 4, p.449-461, jan. 1978b. Informa UK Limited. <http://dx.doi.org/10.1080/03601217808907349>.

CUNHA JÚNIOR, S. S. **Estudo Teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações**. 1999. 1 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 1999.

DIANA, G. et al. Stockbridge-type damper effectiveness evaluation: Part I - Comparison between tests on span and on the shaker. **IEEE Transactions on Power Delivery**. Volume 18, n.4, pp. 1462–1469, 2003a.

DIANA, G. et al. Stockbridge-type damper effectiveness evaluation: Part II - The influence of the impedance matrix terms on the energy dissipated. **IEEE Transactions on Power Delivery**. Volume 18, pp. 1470–1477, 2003b.

FLOODY, Sergio Edgardo. **Dinâmica de Estruturas Compostas Metal/Elastômero: Uma Abordagem Generalizada**. 2010. 99 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2010.

FOTI, Francesco; MARTINELLI, Luca. Modeling of the hysteretic dynamic behavior of the Stockbridge messenger cables. In: CONFERENCE: XXI CONGRESSO AIMETA, Torino. **Conference Paper**. p. 1-9, 2013.

FOX, Robert W.; MCDONALD, Alan T.; PRITCHARD, Philip J. **Introduction to Fluid Mechanics**. 6. ed. Danvers: John Wiley & Sons, p. 787, 2004.

GERON, Giancarlo. **Ajuste de Parâmetros Não-Lineares Para Um Absorvedor de Vibrações Tipo Stockbridge**. 2010. 1 v. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2010.

HENRIQUES, Antonio Manoel Dias. **Bancada de Ensaio Mecânicos à Fadiga de Cabos Condutores de Energia**. 2006. 162 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, 2006.

HIBBELER, Russel Charles. **Resistência dos Materiais**. 7. ed. Pearson Prentice Hall, 2010.

INMAN, D. J. **Engineering Vibration**. 3. ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2007.

KALOMBO, R.; LOUBSER, R.; MOODLEY, P. **Bending Stress of Stockbridge Damper Messenger Cable: Experimental Data and Modelling**. In: 18th World Conference on Nondestructive Testing, Durban, South Africa, 2012.

KASAP, Hüseyin. **Investigation of Stockbridge Dampers for Vibration Control of Overhead Transmission Lines**. 2012. 92 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mechanical Engineering, Middle East Technical University, Ankara, 2012.

KENNEDY, J; EBERHART, R. **Particle Swarm Optimization**. IEEE International Conference on Neural Network. Perth, Australia, pp. 1942-1948, 1995.

KRISPIN, H. J.; FUCHS, S.; HAGEDORN, P. Optimization of the Efficiency of Aeolian Vibration Dampers. In: 2007 IEEE Power Engineering Society Conference and Exposition in Africa - PowerAfrica, 07, 2007, Johannesburg. **IEEE PES PowerAfrica 2007 Conference and Exposition**. Johannesburg: IEEE, p. 1-3, 2007.

LABEGALINI, Paulo Roberto et al. **Projetos Mecânicos das Linhas Aéreas de Transmissão**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1992.

LIENHARD, John H. **Synopsis of Lift, Drag, and Vortex Frequency Data for Rigid Circular Cylinders**. Pullman: Technical Extension Service, p. 32, 1966.

LILLEN, J. L. **Power Line Aeolian Vibrations**. Liège: University Of Liège, p. 26, 2013.

LLERENA, César Alfredo Espezúa. **ANÁLISE DE EDIFÍCIOS ALTOS SUBMETIDOS A TERREMOTOS PELA TÉCNICA DO MEIO CONTÍNUO**. 2009. 111 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia de Estruturas, Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009.

LÓPEZ, A. Lara; VENEGAS, J. Colín. Endurance of Dampers for Electric Conductors. **International Journal Of Fatigue**. Guanajuato, p. 21-28. jan. 2001.

LOVE, A. E. H. **A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity**. Dover Publications, New York, 1944.

LUO, Xiaoyu; WANG, Liang; ZHANG, Yisheng. Nonlinear numerical model with contact for Stockbridge vibration damper and experimental validation. **Journal Of Vibration And Control**. Wuhan, p. 1217-1227. 19 maio 2014.

MALATKAR, Pramod. **Nonlinear Vibrations of Cantilever Beams and Plates**. 2003. 145 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, Instituto Politécnico da Virginia, Virginia, 2003.

MARCHI, Marlon Elias; MERINO, Vinícius José Zortéa. **Análise Dinâmica de Amortecedores Tipo Stockbridge**. 2014. 135 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

MARQUES, Rodrigo França Alves. **Estudo Teórico e Numérico de Absorvedores Dinâmicos de Vibrações Ativos e Adaptativos**. 2009. 106 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2010.

MELO, Fábio Bruno Neiva. **Desenvolvimento de um Dispositivo de Fixação para Caracterização Mecânica das Ligas NiTi**. 2011. 65 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, 2011.

MIRANDA, Thiago Barbosa de. **Levantamento da Potência Dissipada de Stockbridges Tipos Dogbone e Assimétrico**. 2014. 38 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, 2014.

MIRANDA, Vladimiro; FONSECA, Nuno. **EPSO - Evolutionary Particle Swarm Optimization, a New Algorithm with Applications in Power Systems**. 2004. Disponível em: <<https://web.fe.up.pt/~ee03007/artigo152.pdf>>. Acesso em: 09 set. 2017.

MOON, Francis C. **Chaotic Vibrations: An Introduction for Applied Scientists and Engineers**. Hoboken: Wiley Interscience, 2004.

MOURA, Fábio Ferreira de. **Evoluindo inteligências múltiplas pelo método da espiral de aprendizagem utilizando Particle Swarm Optimization**. 2013. 129 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ciência da Computação, Faculdade de Computação, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2013.

NAYFEH, A. H.; PAI, P. F. **Linear and Nonlinear Structural Mechanics**. Wiley-VCH, 2004.

OLIVEIRA, Hugo de Souza. **Análise Dinâmico de um Stockbridge Pseudoelástico**. 2011. 63 f. TCC (Graduação) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, 2011.

PCB PIEZOTRONICS. **General Operating Guide**. Piezoelectric Charge Mode Accelerometers: Specification sheet, installation drawing and Calibration Information Enclosed. Models: 352B, 352C33, 2016a.

PCB PIEZOTRONICS. **General Operating Guide**. Piezoelectric Cells: Specification sheet, installation drawing and Calibration Information Enclosed. Models 208C02, 2016b.

PEREIRA SILVA, Vinícius. **Estudo Numérico e Experimental em Amortecedores Tipo Stockbridge Para Linhas de Transmissão Aéreas**. 2006. 102 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

RAO, Singiresu S. **Mechanical Vibrations**. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

SANT'ANNA, Ricardo. **Análise de Acidente com Rotor**. 2007. 143 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

SAUTER, D.; HAGEDORN, P. On the hysteresis of wire cables in Stockbridge dampers. **International Journal Of Non-linear Mechanics**. Darmstadt, p. 1453-1459. dez. 2002.

SCHWARZ, Brian; RICHARDSON, Mark. Proportional Damping from Experimental Data. **Sound & Vibration**. Scotts Valley, p. 14-17. jun. 2013.

SICILIANO, Alexandre de Vasconcelos. **Algoritmos Genéticos e Particle Swarm Optimization e suas aplicações problemas de Guerra Eletrônica**. 2007. Disponível em: <http://www.sige.ita.br/anais/IXSIGE/Artigos/GE_56.pdf>. Acesso em: 12 set. 2017.

SILVA JÚNIOR, Antonio José da. **Caracterização Dinâmica de um Protótipo de Stockbridge Pseudoelástico**. 2011. 98 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade de Brasília, Brasília, 2011.

SILVA NETO, João Morais da. **Identificação de Parâmetros Materiais e Estruturais no Domínio da Frequência**. 1999. 150 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999.

SILVA, Cláudio Tavares da. **Projeto e Localização Ótimos de Sistemas de Neutralizadores Dinâmicos Viscoelásticos Usando Algoritmos Genéticos**. 2005. 150 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Pesquisa e Pós-graduação, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2005.

SOEIRO, Newton Sure. **Curso de Fundamentos de Vibrações e Balanceamento de Rotores**. Belém: Centrais Elétricas do Norte do Brasil S/A, 2008.

SOUZA JÚNIOR, Oswaldo Honorato de. **Vibrações em Cabos Aéreos de Linhas de Transmissão: Estudo Teórico e Experimental Por Meio de Modelos Lineares e Não Lineares**. 2010. 211 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Ciências Exatas e de Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2010.

TEBALDI, Adriano; COELHO, Leandro dos Santos; LOPES JUNIOR, Vicente. Detecção de Falhas em Estruturas Inteligentes Usando Otimização Por Nuvem de Partículas: Fundamentos e Estudo de Casos. **Revista Controle & Automação**, Campinas, v. 17, n. 3, p.312-330, ago. 2006.

TIMOSHENKO, S. **Strength of Materials: Part I: Elementary Theory and Problems.** 2. ed.: D. van Nostrand Company, 1940.

TOMPKINS, J. S.; MERRILL, L.; JONES, B. L. Quantitative Relationships in Conductor Vibration Damping. **Transactions Of The American Institute Of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus And System**, v. 75, n. 3, p.879-896, jan. 1956.

VAJA, Nitish Kumar; BARRY, Oumar; DEJONG, Brian. Finite Element Modeling of Stockbridge Damper and Vibration Analysis: Equivalent Cable Stiffness. In: Conference on Mechanical Vibration and Noise, 2017, Cleveland. **ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference.** Cleveland: Asme, p. 1-6, 2017.

VECCHIARELLI, Jack. **Aeolian Vibration of a Conductor With a Stockbridge-Type Damper.** 1997. 261 f. Tese (Doutorado) - Curso de Mechanical Engineering, Department Of Mechanical And Industrial Engineering, University Of Toronto, Toronto, 1997.

VELÁZQUEZ, Iván Delgado. **Nonlinear Vibration of a Cantilever Beam.** 2007. 91 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mechanical Engineering, Department Of Mechanical Engineering, Rochester Institute Of Technology, Henrietta, 2007.

WAGNER, H. et al. Dynamics of Stockbridge Dampers. **Journal Of Sound And Vibration.** Madras, p. 207-220. 15 fev. 1973.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **El Método de Los Elementos Finitos.** 4. ed.: McGraw-hill, 1994.

ANEXO A

A.1 CÁLCULO DOS PARÂMETROS NÃO LINEARES

Tem-se três parâmetros não lineares a definir em cada iteração: matriz de rigidez não linear global $[Kc_{ji}^g]$, matriz de amortecimento não linear global $[C_{ji}^g]$ e o vetor condições de contorno não lineares devido à massa inercial no último nó do cabo mensageiro $[b_n]$.

A.1.1 Rigidez Não Linear

Uma vez definido o deslocamento $\{Q_i\}$, pode-se encontrar o valor da função f_1 (equação (143)) através do desenvolvimento das respectivas derivadas parciais, bem como da substituição das funções de forma N_i :

$$\begin{aligned} f_1 &= (v'v'')' \\ f_1 &= v''v'' + v'v''' \end{aligned}$$

$$f_1 = \left(\sum_i N_i'' q_i \right)^2 + \sum_i N_i' q_i \sum_i N_i''' q_i \quad (232)$$

O valor de f_1 pode ser substituído na equação (192) para determinar a rigidez não linear do elemento ($[kc_{ji}^e]$). Quando os elementos finitos do cabo e da massa inercial são combinados, a matriz $[kc_{ji}^e]$ origina uma matriz de rigidez não linear global do sistema ($[Kc_{ji}^g]$). Essa matriz, através da equação (200), é subtraída da matriz de rigidez linear global ($[Kl_{ji}^g]$), originando a matriz de rigidez global do sistema ($[K_{ji}^g]$).

A.1.2 Amortecimento Não Linear

A matriz de amortecimento não linear global $[C_{ji}^g]$ é definida com base nas matrizes de massa global $[M_{ji}^g]$ e de rigidez global $[K_{ji}^g]$ do sistema, de acordo com a

expressão de amortecimento proporcional (equação (201)). A não linearidade de $[C_{ji}^g]$ se deve aos termos não lineares presentes na matriz de rigidez não linear global ($[Kc_{ji}^g]$), como prevê a equação (200).

A.1.3 Condições de Contorno Não Lineares

O valor de f_1 também permite determinar as condições de contorno não lineares no último nó do cabo:

$$f_1 = (v'v'')'$$

$$\{b_n\} = \left\{ \begin{array}{l} -m_{cr}a_b \cos(\omega t) \left(\sum_i N_i' q_i \right)^2 + 1 + \bar{x} \sum_i N_i' q_i \sum_i N_i'' q_i \\ \bar{x}m_{cr}a_b \cos(\omega t) \end{array} \right\} \quad (233)$$

A.2 REGRA DE SIMPSON

A regra de Simpson permite propor uma solução numérica aproximada para as integrais das equações (192), (193) e (194). O método consiste em aplicar a seguinte expressão (Velázquez, 2007):

$$\int_0^{s_{k_n}} G(s) ds = \frac{\Delta x_e}{3} [G(0) + 4 \sum_{\substack{i=2 \\ \text{par}}}^{k_n-1} G(s_i) + 2 \sum_{\substack{i=3 \\ \text{impar}}}^{k_n-2} G(s_i) + G(s_{k_n})] \quad (234)$$

sendo:

s_{k_n} : Coordenada relacionada com o k -ésimo nó ao longo da viga;

$G(s)$: Função derivada segunda da função de forma $N_i(s)$ em relação à s ;

Δx_e : Subdivisão do elemento finito;

k_n : Ponto nodal.