

**PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ
ESCOLA POLITECNICA**

**ANÁLISE DINÂMICA ELASTOPLÁSTICA DE PROBLEMAS DA
MECÂNICA DE SÓLIDOS VIA MÉTODOS ENRIQUECIDOS DE
ELEMENTOS FINITOS**

**Curitiba
2014**

HSU YANG SHANG

**ANÁLISE DINÂMICA ELASTOPLÁSTICA DE PROBLEMAS DA
MECÂNICA DE SÓLIDOS VIA MÉTODOS ENRIQUECIDOS DE
ELEMENTOS FINITOS**

Tese apresentada como requisito parcial
para obtenção do grau de Doutor em
Engenharia, Curso de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica, Escola Politécnica,
Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Orientador: Roberto Dalledone Machado,
D. Eng

Curitiba

2014

RESUMO

Análise dinâmica elastoplástica envolvendo propagação de ondas é um dos tópicos de interesse em diversas áreas de engenharia. A propagação de ondas mecânicas em alta magnitude pode levar sólidos ao regime plástico e assim, alterar permanentemente suas propriedades mecânicas. Nos problemas de elastodinâmica com plasticidade, existem diversos algoritmos para avanço do tempo, envolvendo processo incremental do tempo e processo iterativo para plasticidade. Os algoritmos apresentam diferentes características de estabilidade que podem afetar o processo elastoplástico de solução numérica. A abordagem matemática para este tipo de análise envolve diversas dificuldades, dentre elas, descontinuidades matemáticas em respostas de deslocamentos, velocidades e acelerações de ondas mecânicas, assim como descontinuidade em propriedades mecânicas em função da mudança dessas propriedades num processo de plastificação. Em função dessas dificuldades, várias inovações foram introduzidas em métodos numéricos tradicionais, como por exemplo, o Método dos Elementos Finitos (MEF). Nas últimas duas décadas, as formulações do MEF foram aprimoradas para admitir funções de enriquecimento, sem alterar a formulação convencional. Entre as diversas formulações enriquecidas, existe a técnica baseada no Método de Partição de Unidade e método das nuvens hp , o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Outra alternativa é a técnica de enriquecimento hierárquico, que emprega polinômios hierárquicos, designada por Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH). Essas formulações enriquecidas foram implementadas no presente trabalho para elementos de barras, vigas e Estado Plano de Tensões. Os elementos foram aplicados para análises de problemas de propagação de ondas. Para verificar a robustez das formulações enriquecidas, foram determinados pares de autovalores e autovetores, com diferentes metodologias de refino de malha, refino h e refino p de níveis de enriquecimento. Além disso, relações entre integrações numéricas, formulações enriquecidas para EPT também foram analisadas. As influências dessas relações em análises dinâmicas elastoplásticas também foram estudadas neste trabalho. O MEFG se mostra estável numericamente na determinação de curvas de deslocamentos, velocidades e acelerações, diante de qualquer algoritmo de avanço do tempo. Isso ocorre não somente para elementos unidirecionais, também ocorre para elementos quadriláteros. O refino p de níveis de enriquecimento do MEFG de elementos quadriláteros se mostra eficiente na determinação de pares de autovalores e autovetores, para malha uniforme. Por outro lado, para malha distorcida, para as formulações enriquecidas, o MEFG do elemento quadrilátero de quatro nós e de oito nós, é necessária elevada quantidade de pontos de integração numérica, obtida pela integração por subintervalo.

Palavras chaves: Método dos Elementos Finitos Generalizado, Método dos Elementos Finitos Hierárquicos, análise dinâmica elastoplástica, propagação de ondas mecânicas, integração numérica, descontinuidade matemática.

ABSTRACT

Elastoplastic dynamic analysis involving wave propagation is one of the topics of interest in several fields of engineering. The propagation of mechanical waves with high intensity can lead the solids to the plastic regime and permanently change its mechanical properties. In elastodynamics problems with plasticity, there are many algorithms for time stepping, which involves incremental process and iterative process for plasticity. The algorithms present different stability characteristics, which may affect the process of elastoplastic numerical solution. The mathematical approach for this type of analysis involves several difficulties, among them, the mathematical discontinuities in responses of displacements, velocities and accelerations in mechanical waves, and the physics discontinuities, produced by change of mechanical properties, during the process of material yielding. Due to these difficulties, several innovations were introduced into traditional numerical methods, such as the Finite Element Method (FEM). In the last two decades, the formulations of the FEM have been enhanced to incorporate enrichment functions, without changing the conventional shape function. Among the several enrichment formulations, there is a technique based on the Partition of Unity Method and hp cloud method, or GFEM. Another alternative is the hierarchical enrichment technique that employs hierarchical polynomials. This technique is known as HFEM. These enrichment formulations were implemented in this work for elements such as bar, beams and Plane Stress. The elements were applied for analysis of wave propagation problems. In order to verify the robustness of enriched formulations, the pairs of eigenvalues and eigenvectors were evaluated with different mesh refining methodologies, such refining h and refining p of levels of enrichment. In addition, relationships between numerical integrations, enriched formulations in Plane Stress were also analyzed. The influences of these relations in elastoplastic dynamic analysis were also studied in this work. The GFEM has shown to be more numerically stable and accurate in determining displacements, velocities and accelerations curves, independent on employment of algorithm in time stepping. This occurs not only with unidirectional elements, but also occurs with quadrilateral elements. The refining p of levels of enrichment in GFEM, for quadrilateral elements, shows to be efficient in determining pairs of eigenvalues and eigenvectors for uniform mesh. By the other hand, for non-uniform mesh, it is necessary to employ high quantity of numerical integration points.

Key words: Generalized Finite Element Method, Hierarchical Finite Element Method, elastoplastic dynamics analysis, mechanical wave propagation, numerical integration, mathematical discontinuity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Modelo matemático do sólido elástico linear.....	28
Figura 2.2 Esquemático de propagação de onda num barra.....	31
Figura 2.3. Propagação de onda dada pela expressão $f(x - ct)$	33
Figura 2.4. Passagem de onda de tensão ao longo do eixo longitudinal.....	36
Figura 2.5. Relação de tensão deformação.....	37
Figura 2.6 Propagação de frente de onda de tensão ao longo do eixo longitudinal em relação ao tempo.....	38
Figura 2.7 Superfície de escoamento após carregamento no material que apresenta endurecimento isotrópico.....	39
Figura 2.8. Curva de tensão – deformação mostrando efeito de Bauschinger.....	40
Figura 4.1. Esquema de partição de unidade.....	63
Figura 4.2. Superfície de MEFH de funções de Lobatto.....	69
Figura 4.3. Superfícies de MefG, primeiro nível de enriquecimento.....	71
Figura 4.4. Superfícies de MefG, enriquecimento de campo.....	72
Figura 4.5. Superfícies de MefHs, primeiro nível de enriquecimento.....	73
Figura 4.6. Superfícies de MefGs, primeiro nível de enriquecimento.....	75
Figura 5.1. Representação esquemática do problema.....	82
Figura 5.2. Erro relativo em cada modo para MefQ.....	84
Figura 5.3. Erro relativo em cada modo para MefS.....	84
Figura 5.4(a). Erro relativo em cada modo para MefHs (1 nível de enriquecimento)	85
Figura 5.4(b). Erro relativo em cada modo para MefHs (2 níveis de enriquecimento)	86
Figura 5.5(a). Erro relativo em cada modo para MefGs (1 nível de enriquecimento)	87
Figura 5.5(b). Erro relativo em cada modo para MefGs (2 níveis de enriquecimento)	87
Figura 5.6. Representação esquemática de malha uniforme e distorcida.....	88
Figura 5.7. Erro relativo em cada modo para malhas 2x2 uniforme e distorcida (MefGs x MefQ).....	88

Figura 5.8. Representação esquemática da malha distorcida de 4x4 elementos	90
Figura 5.9(a). Erro relativo em cada modo para MEFs para situações diferentes	90
Figura 5.9(b). Erro relativo determinado da malha severamente distorcida pelo MEFs, MEFs1 (1 nível de enriquecimento) e MEFs2 (2 níveis de enriquecimento)	91
Figura 5.10 (a). Erro relativo versus graus de liberdade, modo 4.....	92
Figura 5.10 (b). Erro relativo versus graus de liberdade, modo 7.....	93
Figura 5.10 (c). Erro relativo versus graus de liberdade, modo 12.....	94
Figura 5.10 (d). Erro relativo versus graus de liberdade, modo 16.....	94
Figura 5.10 (e). Erro relativo versus graus de liberdade, modo 18.....	95
Figura 5.11 (a). Erro relativo versus o número de graus de liberdade, modo 10, MEFs refino p e h	98
Figura 5.11 (b). Erro relativo versus o número de graus de liberdade, modo 12, MEFs refino p e h	99
Figura 5.11 (c). Erro relativo versus o número de graus de liberdade, modo 19, MEFs refino p e h	100
Figura 5.11 (d). Erro relativo versus o número de graus de liberdade, modo 20, MEFs refino p e h	100
Figura 6.1.1. Barra engastada – livre com força de tipo Heaviside aplicada na extremidade livre.....	102
Figura 6.1.2. Aceleração do exemplo 1, resultado obtido por diversas formulações	104
Figura 6.1.3. Velocidade do exemplo 1, resultado obtido por diversas formulações	105
Figura 6.1.4(a). Deslocamento do exemplo 1, resultado obtido por diversas formulações	105
Figura 6.1.4(b). Ampliação da figura 6.1.4(a).....	106
Figura 6.1.5. Deformação do exemplo 1, resultado obtido por diferentes métodos	107
Figura 6.1.6. Aceleração do exemplo 1, resultado obtido por HHT.....	108
Figura 6.1.7. Ampliação da curva de velocidade obtida por HHT.....	108

Figura 6.1.8. Ampliação da figura 6.1.4(a), somente resultado HHT.....	109
Figura 6.1.9. Perfil de deslocamento em instante diferentes.....	110
Figura 6.1.10. Erros estimados por formulações convencionais e enriquecidas, exemplo 1.....	111
Figura 6.2.1. Aceleração do exemplo 2, resultado obtido por diversos métodos..	113
Figura 6.2.2(a). Velocidade do exemplo 2, resultado obtido por diversas formulações	113
Figura 6.2.2(b). Ampliação da figura 6.2.2(a).....	113
Figura 6.2.3(a). Deslocamentos do exemplo 6.2, resultados obtidos por diversos métodos.....	114
Figura 6.2.3(b). Ampliação da figura 6.2.3(a).....	115
Figura 6.2.4. Perfil de deslocamento do exemplo 6.2 em instantes diferentes.....	116
Figura 6.3.1. Esquemático de barra biengastada, submetido ao deslocamento inicial.....	116
Figura 6.3.2(a). Deslocamento do exemplo 3, Newmark.....	117
Figura 6.3.2(b). Deslocamento do exemplo 3, HHT.....	117
Figura 6.3.2(c). Velocidade do exemplo 3, Newmark.....	117
Figura 6.3.2(d). Velocidade do exemplo 3, HHT.....	117
Figura 6.3.3(a). Ampliação da figura 6.3.2(d).....	118
Figura 6.3.3(b). Ampliação da figura 6.3.2(c).....	118
Figura 6.4.1 Esquemático da viga fixa – apoiada submetida à força do impacto..	120
Figura 6.4.2. Aceleração do exemplo 4, resultado obtido por diversas formulações	121
Figura 6.4.3. Velocidade do exemplo 4, resultado obtido por diversas formulações	122
Figura 6.4.4. Deslocamento do exemplo 4, resultado obtido por diversas formulações	123
Figura 6.4.5. Perfil deformado da viga do exemplo 4, em instantes diferentes.....	124
Figura 6.4.6. Deformação do exemplo 4, medida calculada no ponto situado no meio da viga.....	125
Figura 6.5.1. Aceleração do exemplo 5, resultados obtidos por diversas formulações	126

Figura 6.5.2. Velocidade do exemplo 5, resultados obtidos por diversas formulações	126
Figura 6.5.3. Deslocamento do exemplo 5, resultados obtidos por diversas formulações	127
Figura 6.6.1. Curva tensão deformação do exemplo 6.....	128
Figura 6.6.2. Aceleração do exemplo 6, resultado obtido por diversas formulações	129
Figura 6.6.3(a). Deslocamento do exemplo 6, resultado obtido por diversas formulações	130
Figura 6.6.3(b). Ampliação da figura 6.6.3(a).....	130
Figura 6.6.4. Curva deformação do exemplo 6, resultado obtido por diversas formulações	132
Figura 6.6.5. Curva tensão – deformação do exemplo 6, obtida por diversas formulações	132
Figura 6.7.1. Aceleração do exemplo 7, resultado obtido por diversas formulações	133
Figura 6.7.2. Curvas de deslocamento do exemplo 7, resultado obtido por diversas formulações	134
Figura 6.7.3. Curvas de deformação do exemplo 7, obtida por diversas formulações	135
Figura 6.7.4. Curvas de tensão do exemplo 7, obtida por diversas formulações .	135
Figura 6.7.5(a). Curvas histerese de tensão – deformação do exemplo 7.....	136
Figura 6.7.5(b). Ampliação da figura 6.7.5(a).....	137
Figura 6.7.6. A configuração deformada da viga do exemplo 7 em instantes de tempo diferentes.....	138
Figura 6.7.7. Perfis de tensões ao longo da viga do exemplo 7 nos instantes de tempo diferentes.....	139
Figura 6.8.1(a). Deslocamento do exemplo 6.8, resultado obtido por MEFn, MEFQ e MEFs.....	141
Figura 6.8.1(b). Ampliação da figura 6.8.1(a).....	141
Figura 6.8.2(a). Velocidade do exemplo 6.8, resultados obtidos pelas formulações MEFn, MEFQ e MEFs.....	142

Figura 6.8.2(b). Ampliação da figura 6.8.2(a).....	142
Figura 6.8.3(a). Deslocamento do exemplo 6.8, resultado obtido por MEFn, MEFG e MEFH.....	143
Figura 6.8.3(b). Ampliação da figura 6.8.3(a).....	143
Figura 6.8.4(a). Velocidade do exemplo 6.8, resultado obtido pelo MEFn, MEFG e MEFH.....	144
Figura 6.8.4(b). Ampliação da figura 6.8.4(a).....	144
Figura 6.8.5(a). Deslocamento do exemplo 6.8, resultado obtido pelo MEFs, MEFGs e MEFHs.....	145
Figura 6.8.5(b). Ampliação da figura 6.8.5(a).....	145
Figura 6.8.6(a). Velocidade do exemplo 6.8, resultado obtido pelo MEFs, MEFGs e MEFHs.....	146
Figura 6.8.6(b). Velocidade do exemplo 6.9, resultado obtido pelo MEFs, MEFGs e MEFHs.....	146
Figura 6.9.1(a). Deslocamento do exemplo 9, resultado obtido por diversas formulações	148
Figura 6.9.1(b). Ampliação da figura 6.9.1(a).....	149
Figura 6.9.2(a). Configuração deformada no instante 0,003s.....	149
Figura 6.9.2(b) Configuração deformada no instante 0,005s.....	150
Figura 6.9.3(a). Onda da tensão no instante 0,003s.....	150
Figura 6.9.3(b). Onda da tensão no instante 0,005s.....	151
Figura 6.9.4. Configurações de tensões longitudinais na barra em instantes diferentes de tempo do exemplo 9.....	152
Figura 6.10.1. Representação esquemática do exemplo 10.....	153
Figura 6.10.2. Curvas de deslocamento do exemplo 10, obtidas por MEFH e MEFG.....	155
Figura 6.10.3(a). Configuração deformada do exemplo 10 no instante 0,001s.....	156
Figura 6.10.3(b). Configuração deformada do exemplo 10 no instante 0,002s.....	156
Figura 6.10.3(c). Configuração deformada do exemplo 10 no instante 0,004s.....	157
Figura 6.10.4(a). Onda tensão do exemplo 10 no instante 0,001s.....	157
Figura 6.10.4(b). Onda tensão do exemplo 10 no instante 0,003s.....	158
Figura 6.10.5. Tensão longitudinal em instante diferentes do exemplo 10.....	158

Figura 6.11.1 Representação esquemática da viga biapoiada.....	160
Figura 6.11.2. Deslocamento do nó situado no meio da viga, ponto A.....	161
Figura 6.11.3. Tensão axial no ponto situado no ponto B.....	162
Figura 6.11.4. Distribuição de tensão longitudinal ao longo de x em instante diferentes, exemplo 11.....	163
Figura 6.11.5. Distribuição da tensão longitudinal do exemplo 11.....	164
Figura 6.11.6. Representação esquemática de malha não uniforme.....	165
Figura 6.11.7. Deslocamento do ponto A da malha não uniforme.....	165

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1. Algoritmos para solução temporal.....	52
Tabela 5.1. Erro relativo em porcentagem obtido por elemento convencional e enriquecido para os 20 primeiros modos.....	83
Tabela 6.10.1. Quantidade de elemento e grau de liberdade.....	154

LISTA DE SIGLAS

- MEF - Método dos Elementos Finitos.
- MEFG - Método dos Elementos Finitos Generalizado.
- MEFH - Método dos Elementos Finitos Hierárquico.
- MEFGs - Método dos Elementos Finitos Generalizado *serendipity*.
- MEFHs - Método dos Elementos Finitos Hierárquico *serendipity*.
- MEFX - Método dos Elementos Finitos estendido.
- MEFn - Sigla utilizada para representar elemento unidirecional de dois nós, ou elemento quadrilateral de quatro nós.
- MEFs - Sigla utilizada para representar elemento quadrilateral *serendipity*.
- MEFQ - Sigla utilizada para representar elemento unidirecional de três nós, ou elemento quadrilateral quadrático.
- PU - Partição de Unidade.
- MPU - Método de Partição de Unidade.
- EPT - Estado Plano de Tensões

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	- Domínio.
R^n	- Espaço de números reais de ordem n.
Γ	- Contorno.
Γ_u	- Contorno essencial.
Γ_h	- Contorno natural.
σ	- Tensor de tensões.
ρ	- Densidade do meio.
\ddot{u}	- Vetor de derivada segunda no tempo do vetor u .
u	- Vetor de deslocamento na coordenada global.
f	- Vetor de força de volume.
\mathbf{E}	- Tensor de deformação Green - Lagrange
B	- Matriz deformação - deslocamento
\mathbf{u}	- Vetor deslocamento na coordenada local
ε_{ij}	- Componentes de tensor de deformação Green – Lagrange.
σ_{ij}	- Componentes de tensor de tensões.
δ_{ij}	- Delta de Kronecker.
\mathbf{D}	- Matriz constitutiva.
λ	- Constante de Lamé.
μ	- Constante de Lamé.
E	- Módulo de Young
ν	- Coeficiente de Poisson.
A	- Área
x	- Coordenada Espacial
c_0	- Velocidade de propagação de onda.
t	- Variável tempo.
ξ	- Variável no método de integração de D'Alemberts.
η	- Variável no método de integração de D'Alemberts.
v	- Vetor velocidades.
w	- Função que representa deslocamento vertical
I	- Momento de inércia.
ω	- Frequência.
Λ	- Comprimento da onda.
n	- Inverso de comprimento da onda.

- c - Velocidade de uma onda harmônica de flexão.
- $\sigma_{PK} 2ij$ - Componentes de segundo tensor de Piola-Kirchhoff
- P - Pressão hidrostática.
- S_{ij} - Componentes de tensor de tensões desviatorio.
- ε_p - Deformação plástica.
- $\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t} \mathbf{s}$ - Vetor de tensões desviatorio no tempo $t + \Delta t$.
- $\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t} \mathbf{e}'$ - Vetor de deformação desviatória no tempo $t + \Delta t$
- $\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t} \mathbf{e}^p$ - Vetor de deformação plástica no tempo $t + \Delta t$.
- $\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t} \sigma_m$ - Tensão média no tempo $t + \Delta t$.
- $\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t} e_m$ - Deformação média no tempo $t + \Delta t$.
- $\mathbf{t}+\Delta\mathbf{t} \sigma_{esc}$ - Tensão de escoamento no tempo $t + \Delta t$.
- β_N - Parâmetro de Newkmark.
- γ_N - Parâmetro de Newmark.
- $[M]$ - Matriz de massa determinada pelo MEF.
- $[K]$ - Matriz de rigidez determinada pelo MEF.
- $[C]$ - Matriz de amortecimento determinada pelo MEF.
- Δt - Intervalo de tempo.
- $\{u_o\}$ - Vetor de deslocamento na coordenada global no tempo inicial.
- $\{\ddot{u}_o\}$ - Vetor de aceleração na coordenada global no tempo inicial.
- $\{\dot{u}_o\}$ - Vetor de velocidade na coordenada global no tempo inicial.
- $\{u_i\}$ - Vetor de deslocamento na coordenada global no tempo i.
- $\{\ddot{u}_i\}$ - Vetor de aceleração na coordenada global no tempo i.
- $\{\dot{u}_i\}$ - Vetor de velocidade na coordenada global no tempo i.
- α - Parâmetro do método HHT.
- $\{X\}_n$ - Vetor de variáveis a serem determinadas num algoritmo de marcha temporal.
- $[A]$ - Matriz de ampliação para um algoritmo de marcha temporal.
- $[I]$ - Matriz identidade.
- ρ_∞ - Raio espectral.
- λ_i - Autovalores.
- α_m - Parâmetro do método de alfa generalizado.
- α_f - Parâmetro do método de alfa generalizado.
- φ_i - Funções de compõem um PU.

- $diam$ - Diâmetro de um conjunto.
- V_i - Espaço de base.
- H^m - Espaço de Sobolev de funções com derivada até ordem m que sejam quadraticamente integráveis no sentido Lebesgue.
- L^m - Espaço das funções integráveis no sentido Lebesgue.
- ϕ_i - Funções partição de unidade.
- γ_{ji} - Funções de base, ou funções enriquecedoras para MEFG.
- $\tilde{u}(\bar{x})$ - Função de aproximação no espaço.
- u_j - Variáveis nodais.
- b_{ji} - Variáveis de domínio.
- qj - Ordem do enriquecimento.
- κ_q - Domínio de elemento quadrilátero de ordem arbitrária.
- r, s - Coordenadas naturais de elemento quadrilátero.
- ϕ_q^{vj} - Funções de interpolação nos vértices de elemento quadrilátero.
- l_i - Funções de enriquecimento hierárquico.
- p^{ei} - Ordem polinomial das funções de enriquecimento do contorno.
- $p^{b,j}$ - Ordem polinomial das funções de enriquecimento do campo.
- $\phi_{k,q}^{ei}$ - Funções de enriquecimento hierárquico nos contornos de ordem k .
- $\phi_{n_1, n_2, q}^b$ - Funções de enriquecimento hierárquico nos contornos de ordem n_1 e n_2 .
- h_i - Funções de forma de elementos finitos.
- β_j - Parâmetro utilizado para alterar as funções de MPU do MEFG.
- \bar{x} - Vetor espacial.
- $\tilde{u}_e(r, s)$ - Funções de aproximação de elemento quadrilátero na coordenada local.
- \tilde{u}_e^v - Funções de aproximação de vértices de elemento quadrilátero.
- \tilde{u}_e^c - Funções de aproximação nos contornos de elemento quadrilátero.
- \tilde{u}_e^b - Funções de aproximação de bolha (campo) de elemento quadrilátero.
- $b_{k,q}^{ej}$ - Variáveis de funções enriquecedoras associadas em contornos.
- $b_{n_1, n_2, q}^b$ - Variáveis de funções enriquecedoras associadas em contornos.
- $erro$ - Erro determinado pelo estimador de erro
- $u_{analitica}^{(i)}$ - Solução analítica determinada no tempo i .

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Justificativas	4
1.2 Objetivos	5
1.2.1 Objetivo Geral	5
1.2.2 Objetivos específicos	5
1.3 Estrutura do trabalho	6
1.4 Revisão bibliográfica	7
1.4.1 Algoritmo para solução temporal	7
1.4.2 Métodos de Enriquecimento	12
1.4.3 Plasticidade	21
1.4.4 Integração numérica, estudo sobre modos espúrios e travamento	24
2. ELASTOPLASTICIDADE COM PROPAGAÇÃO DE ONDAS	27
2.1 Propagação de onda unidirecional na barra	30
2.2. Onda de deslocamentos e tensões gerada por flexão	34
2.3. Ondas plásticas na direção longitudinal	35
2.4 Plasticidade	38
3. ALGORITMOS PARA SOLUÇÃO TEMPORAL: NEWMARK, HHT E ALFA GENERALIZADO	45
3.1 Método de Newmark	45
3.2 Método de Hilbert Hughes Taylor (HHT)	47
3.3 Método de alfa generalizado	50
4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS E HIERARQUICOS	54
4.1 Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH)	54
4.2 Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG)	58
4.3 Enriquecimentos dos elementos quadriláteros	66
4.4 Estimador de erro para análise dinâmica	76
5. DETERMINAÇÃO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES NAS VIBRAÇÕES LIVRES PELO ELEMENTO ENRIQUECIDO	78
5.1. Integração numérica no elemento enriquecido	78

5.2. Chapa quadrada com malha uniforme	81
5.3 <i>Patch test</i> do elemento enriquecido	88
5.4 Formulações enriquecidas com refino <i>h</i> e com refino <i>p</i>	96
6. APLICAÇÕES	101
6.1. Análise elástica de barra engastada – livre submetida à força do tipo <i>Heaviside</i>	102
6.2. Barra engastada – livre submetida à força de impulso	111
6.3 Análise elástica de barra biengastada com deslocamento inicial	116
6.4. Viga bi-apoiada submetida à força impulsiva do tipo <i>Heaviside</i>	120
6.5. Análise elástica de viga engastada – livre submetida à força vertical de impulso	125
6.6. Plastificação de viga bi- apoiada submetida à força harmônica	127
6.7. Plastificação de viga bi–apoiada submetida à força impulsiva do tipo <i>Heaviside</i>	133
6.8. Problema de EPT usando elemento quadrilátero e submetido à força do tipo <i>Heaviside</i>	139
6.9. Problema de EPT usando-se elemento quadrilátero e submetido à força impulsiva	147
6.10. Viga fixa - fixa usando-se elemento quadrilátero, submetida à força do tipo <i>Heaviside</i> em EPT	153
6.11. Viga biapoiada em EPT submetida à força de <i>Heaviside</i> utilizando-se elemento quadrilátero e análise dinâmica elastoplástica	159
7. CONCLUSÕES	166
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	170

1. INTRODUÇÃO

Nos diversos ramos da Engenharia, a propagação de ondas, embora seja um fenômeno bastante comum, ocupa um papel fundamental no estudo de parâmetros físicos. Há diferentes tipos de ondas - sonora, eletromagnética, de calor, de tensão, de deslocamento, entre outros, sendo representadas matematicamente por equações de propagação de ondas, com os respectivos parâmetros físicos do meio onde se encontra a propagação.

Na Mecânica dos Sólidos é interessante conhecer particularmente a propagação de ondas mecânicas, dado que os sólidos são submetidos a carregamentos e, por consequência, podem produzir também ondas de tensões ou de pressão. A avaliação da forma de propagação das ondas permite conhecer o comportamento de um sólido. Entretanto, como a velocidade de propagação da onda, em geral, é bastante elevada, a avaliação da resposta estrutural é, as vezes, de difícil realização. A alta velocidade de propagação faz com que as ondas viagem em curto intervalo de tempo, de um ponto de onde o carregamento é aplicado, até outro no domínio ou no contorno do problema. Muitas vezes, essas ondas são refletidas e condicionadas a viajarem em sentido contrário, gerando superposições sucessivas. Do ponto de vista microscópico, a passagem das ondas transmite energia que excita os átomos do material por onde passam. Desse modo, altera o posicionamento atômico dos diferentes pontos, gerando deformações. Caso a energia transportada pela onda seja elevada, as tensões geradas podem exceder o limite de elasticidade do material e, então, inicia-se o processo de plastificação ou de escoamento, que pode ser entendido como uma alteração permanente do posicionamento atômico de diferentes pontos do material devido ao elevado nível de energia da onda.

A fim de delimitar o escopo deste trabalho, considera-se somente o caso de propagação de ondas mecânicas em sólidos - mais especificamente, ondas de deslocamentos e de tensões, não se tratando aqui da propagação de ondas acústicas ou sonoras.

O estudo de propagação de ondas pode ser feito por meio de duas abordagens: a experimental e a numérica, sendo a última o foco deste trabalho. A passagem de uma onda produz tensões, deformações e deslocamentos que são

funções que variam com o espaço (posição) e com o tempo. Entretanto, quando um sólido é submetido a um carregamento qualquer, alguns pontos se deslocam gerando deformação. Como as deformações são determinadas a partir das derivadas dos deslocamentos em relação as coordenadas espaciais, algumas descontinuidades matemáticas podem surgir, conforme a forma de variação dos deslocamentos. Os métodos numéricos empregados para solucionar esses problemas devem ser capazes de prever e determinar, com precisão, as ondas de deslocamentos e de tensões, mesmo que hajam descontinuidades matemáticas. O presente estudo procurou desenvolver métodos numéricos que apresentem eficiência e precisão, em especial, quando se consideram descontinuidades numéricas decorrentes do campo de deslocamentos.

Entre os métodos numéricos consagrados, o Método dos Elementos Finitos (MEF) é um dos mais utilizados e conhecidos. A formulação convencional de elementos finitos apresenta limitações e, para alcançar boa precisão, necessita de aumento do número de graus de liberdade. Para tanto, duas alternativas são bastante conhecidas: aumento do número de elementos (refino h) e aumento do grau dos polinômios interpoladores (refino p). No caso do refino p , ao se elevar a ordem da função de forma, é necessário gerar as novas funções, sem possibilidade de aproveitamento daquelas da ordem anterior. Isso representa uma dificuldade de implementação, pois não há características hierárquicas no método.

Do ponto de vista computacional, é vantajosa a solução que permite aumentar o número de graus de liberdade do problema sem a necessidade de se refazer todas as matrizes geradas em etapas anteriores. Os métodos com características hierárquicas apresentam essa propriedade. Ao se elevar o nível das funções de interpolação, aumenta-se o número de graus de liberdade do problema, mas não há necessidade de se reconstruírem as matrizes dos níveis anteriores. As novas funções aumentam o tamanho das matrizes, mas aproveitam integralmente os termos gerados nas etapas anteriores.

No contexto das formulações enriquecidas de elementos finitos, o presente trabalho implementou e explorou o Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH) e o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) em problemas da elastodinâmica.

Um aspecto relevante para a estabilidade dos métodos numéricos em problemas da dinâmica é o condicionamento das matrizes de massa e de rigidez

que depende de um parâmetro conhecido como número de condicionamento. O número de condicionamento é dado pela razão entre o maior e o menor autovalor de uma matriz, e fornece o grau de dificuldade para a inversão da matriz. Quanto mais próximo da unidade, maior a estabilidade do método. No caso de análises elastodinâmicas, os pares de autovalores e autovetores são conhecidos como frequências naturais e modos de vibrar, respectivamente. Um dos aspectos abordados no presente estudo é a influência do grau de enriquecimento nas condições de estabilidade numérica.

Outro aspecto importante nos métodos aproximados é a integração numérica para a determinação de matrizes. Caso essas forem mal geradas, existe o risco de surgirem resultados incoerentes nas análises. Especialmente para os elementos enriquecidos, em que a quantidade de pontos de integração desempenha um papel fundamental na precisão do resultado, porém não foi encontrada na literatura que define claramente a quantidade mínima de pontos de integração numérica, diferentemente de elementos convencionais.

Este trabalho adota algoritmos de solução temporal, que consistem em processos incrementais do tempo. Esses algoritmos são o método de Newmark, o método Hilbert - Hughes – Taylor (HHT), e o método alfa generalizado. Nesses algoritmos, as respostas do estágio atual, tais como curvas de deslocamentos, velocidades e acelerações, são determinadas a partir das respostas do estágio anterior. Os algoritmos que empregam este tipo de estratégia de solução apresentam dependências no intervalo de tempo adotado para garantir a estabilidade na solução numérica. Quando menor o intervalo do tempo adotado na solução, maior esforço computacional, especialmente para solução de problemas da dinâmica elastoplástica. Um dos métodos que apresenta essa dependência é o método de Newmark com aceleração linear. A fim de reduzir o esforço computacional e proporcionar respostas incondicionalmente estáveis, os algoritmos de solução temporal foram modificados, tais como o método Newmark de aceleração média, o método HHT e o método alfa generalizado. As influências que esses algoritmos exercem sobre as formulações enriquecidas e convencionais do MEF é um dos tópicos de análise no presente trabalho.

O presente trabalho visa contribuir para desenvolvimento da formulação enriquecida de elementos finitos, tanto no MEFH quanto no MEFG, aplicados em problemas de propagação de ondas em regime elastoplástico. Estuda-se a relação

entre as funções de enriquecimento com os problemas que apresentam descontinuidades matemáticas, assim como a quantidade necessária de pontos de integração numérica para os elementos enriquecidos. Estuda-se também o desempenho das formulações enriquecidas frente ao uso de algoritmos para solução temporal em problemas elastodinâmicos. A abordagem aqui tratada não foi, até o momento, encontrada em nenhum trabalho da literatura.

1.1 Justificativas

Nos trabalhos de Arndt (2009) e Torii (2012), os autores apresentaram formulações enriquecidas que contribuíram na análise dinâmica. No trabalho de Arndt (2009), o autor propôs funções generalizadas de enriquecimento que utilizam funções trigonométricas. Para verificar versatilidade e robustez da nova formulação, o autor desenvolveu várias análises de determinação de pares de autovalores e autovetores, assim como metodologias adaptativas de refino h ou refino p . As funções generalizadas de enriquecimento contribuíram significativamente na redução da taxa do erro relativo na determinação de pares de autovalores e autovetores, especialmente para modos mais elevados. Essa característica é essencial na análise numérica da propagação de ondas. Posteriormente, Torii (2012) desenvolveu formulações enriquecidas para elemento quadrilateral e aplicou essas formulações para a propagação de ondas, e para a determinação de pares de autovalores e autovetores. Pela observação dos resultados apresentados pelos autores, é possível concluir que as funções generalizadas construídas na base de funções trigonométricas contribuem de forma eficiente em análises de vibrações livres.

Na análise numérica da propagação de ondas elastoplásticas, é frequente se deparar com descontinuidades matemáticas nas curvas de deslocamentos, velocidades e acelerações. Para melhorar a solução com descontinuidades matemáticas, as formulações enriquecidas são empregadas para realizar as análises numéricas, pois, as funções trigonométricas nas funções generalizadas apresentam características de continuidade mesmo nas derivadas de ordem elevada.

Pela observação dos resultados apresentados por Arndt (2009) e Torii (2012), as formulações enriquecidas se mostraram como uma solução eficiente para as

dificuldades numéricas presentes na análise dinâmica elastoplástica na propagação de ondas. Por isso, este trabalho visa propor soluções para essas dificuldades, utilizando-se formulações enriquecidas de elementos finitos.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é contribuir para a análise de problemas dinâmicos da propagação de ondas elastoplásticas, usando os métodos enriquecidos de elementos finitos, em particular o MEFG e o MEFH.

O presente trabalho visa analisar diversos aspectos, entre eles a influência da formulação enriquecida na determinação dos pares de autovalores e autovetores, em problemas de barras, vigas e estado plano de tensão, assim como a relação entre a formulação enriquecida e a quantidade mínima dos pontos de integração numérica para elementos quadrilaterais. Outro aspecto é o comportamento da formulação enriquecida na obtenção da propagação de ondas de deslocamentos e de tensões diante de diferentes algoritmos da solução temporal, assim como seu comportamento em lidar com descontinuidade matemática. Além disso, o desempenho da formulação enriquecida na análise dinâmica elastoplástica. Esses últimos tópicos também têm pouca referência na literatura.

Para realizar análises numéricas neste trabalho, códigos computacionais foram desenvolvidos em linguagem *Fortran*.

1.2.2 Objetivos específicos

- Aplicar e comparar o MEF convencional, com o MEFG e o MEFH para análise de propagação de ondas com elementos de barra, viga e estado plano de tensão, em problemas lineares e não lineares.
- Aplicar os algoritmos de Newmark, HHT e Alfa-generalizado para solução temporal da equação do movimento e analisar suas influências no desempenho do MEF convencional, MEFG e MEFH em problemas da elastodinâmica.

- Desenvolver no contexto da dinâmica elastoplástica, as formulações enriquecidas, baseadas nas funções de enriquecimento propostas por Arndt (2009), Torii (2012) e Oliveira (1993) para elementos de barras, vigas, e elementos planos quadrilaterais de quatro nós e de oito nós.
- Verificar a estabilidade dos métodos enriquecidos via determinação dos pares de autovalores e autovetores.
- Investigar a quantidade mínima de pontos de integração numérica para formulações enriquecidas, empregando-se das técnicas sugeridas no MEF convencional.

1.3 Estrutura do trabalho

O capítulo 1 deste trabalho consiste em uma introdução a assuntos a serem abordados ao longo do texto. Para tanto, faz-se uma breve revisão de artigos e trabalhos relacionados. No capítulo 2 expõem-se as equações governantes de propagação de ondas elástica e elastoplástica. No capítulo 3 apresentam-se os algoritmos para a solução temporal do problema elastodinâmico, incluindo o método de Newmark, HHT (Hilbert Hughes Taylor) e alfa generalizado. No capítulo 4 descrevem-se os elementos enriquecidos utilizados, viga e quadrilátero, bem como os fundamentos teóricos associados. No capítulo 5 faz-se um estudo da formulação enriquecida proposta neste trabalho bem como uma avaliação do condicionamento da matriz de rigidez, através do cálculo de autovalor e autovetor. Vários aspectos da formulação enriquecida são descritos, especialmente a estratégia da integração numérica. No capítulo 6 apresenta-se a aplicação da formulação enriquecida para análise elastodinâmica e plástica, numa viga, em que se vale das hipóteses de formulação Euler - Bernoulli. Além disso, é apresentado também o resultado obtido pelo enriquecimento de elemento quadrilateral no estado plano de tensão. No capítulo 7 encontram-se as conclusões deste trabalho e as sugestões para futuras pesquisas.

1.4 Revisão bibliográfica

Na seção da revisão bibliográfica, são referenciadas diversas pesquisas de tópicos diferentes. Na seção 1.4.1, são apresentadas as pesquisas relacionadas ao algoritmo para solução temporal. Nesta parte, consideram-se os estudos sobre a estabilidade numérica do algoritmo para análise dinâmica elastoplástica. No item 1.4.2, apresentam-se algumas pesquisas sobre os métodos enriquecidos e, na seção 1.4.3, sobre plasticidade. Por último, no item 1.4.4, descrevem-se as pesquisas sobre integração numérica para obtenção de matrizes a serem utilizadas na solução.

1.4.1 Algoritmo para solução temporal

Nesta seção procura-se apresentar na ordem cronológica as publicações sobre algoritmos de solução temporal.

Em 1972, um dos trabalhos pioneiros na área de elastodinâmica foi apresentado por Goudreau e Taylor. Nesse trabalho foram analisados vários aspectos da equação diferencial governante do comportamento dinâmico; diferentes métodos de solução, entre eles os métodos do tipo Newmark e Houbolt. Um dos méritos desse estudo foi a análise de erro inerente aos métodos numéricos envolvidos, relativos a discretização no tempo e a discretização no espaço. A condição de estabilidade foi intensamente investigada e testada nos exemplos contidos no trabalho. Os métodos utilizados pelos autores, permitiram capturar a passagem de onda no sólido utilizando-se de elemento de viga. O perfil de onda foi avaliado utilizando-se diferentes métodos de solução.

Em 1977, Hilbert *et. al.* desenvolveram um método, mais tarde conhecido como HHT, baseado no método implícito de Newmark que visa introduzir um parâmetro ajustável para controlar a dissipação numérica. O método foi desenvolvido com o propósito de fornecer estabilidade incondicional para a solução da equação de equilíbrio dinâmico e linear. Segundo o autor, o método de Newmark apresenta oscilação numérica para baixos modos de vibração. Nesse caso, seria conveniente desenvolver outro método com o objetivo de reduzir a oscilação, porém sem afetar modos mais baixos de vibração. Por outro lado, o método HHT introduz

amortecimento numérico artificial na solução numérica. Do ponto de vista da formulação do elementos finitos, tal amortecimento artificial faz com que o erro numérico inerente da formulação de elementos finitos seja escondido. O método HHT é simples de programar quando já se tem o algoritmo de Newmark implementado, pelo fato de que apenas um parâmetro é introduzido para calcular gama e beta de Newmark. Segundo os autores, esse parâmetro varia entre 0 e $-1/3$.

Posteriormente, em 1981, Mikkola *et. al.* analisaram a precisão de diversos métodos de solução em análise dinâmica com o comportamento do material elastoplástico, e viscoplástico. Entre os métodos analisados estão o de Newmark de regra trapezoidal, o de Houbt, o de Wilson - θ e o método explícito do tipo diferença central. Os métodos implícitos se mostraram mais eficientes com menor custo computacional pelo fato de que conseguem garantir estabilidade numérica mesmo diante de passo de tempo significativamente grande.

Anos mais tarde, em 1988, Hoff e Pahl desenvolveram novo algoritmo generalizado que pertence à família de métodos implícitos, de passo único na marcha do tempo. O objetivo do trabalho foi elaborar um algoritmo incondicionalmente estável e que proporciona precisão de segunda ordem na análise dinâmica não linear e dissipação numérica controlável. Para atingir esses objetivos, novos parâmetros foram introduzidos. Além dos parâmetros inerentes ao método de Newmark, outros quatro parâmetros foram introduzidos, sendo que um deles é independente e varia de 0.95 a 1.0. O último parâmetro foi de fato o que determinou a convergência do algoritmo. Para comprovar a aplicabilidade do método, fez-se análise do raio espectral e comparação entre este novo algoritmo e outros já conhecidos. O novo algoritmo se mostrou eficaz na análise dinâmica linear; entretanto, o trabalho não contempla exemplos de análise dinâmica não linear, o que deixa dúvida sobre sua aplicabilidade e sua precisão quando o material sofre encruamento. Além disso, foram muitos os parâmetros introduzidos no algoritmo, e cada um pode influenciar na sua convergência, de modo que o resultado de uma determinada análise acaba sendo influenciado por diversos fatores de difícil ajuste. Isso não comprometeu o método de Newmark, cujos parâmetros são somente dois, o que permite maior e mais fácil controle.

Em 1992, Simo e Tarnow desenvolveram um método para solucionar problemas do tipo da elastodinâmica não linear. O novo método procurava preservar

a quantidade de momento linear e angular durante a solução da equação do equilíbrio.

No ano seguinte, Chung e Hulbert desenvolveram outro método, o alfa generalizado, baseado no método implícito de Newmark. O novo método visa controlar a dissipação nas frequências de vibração mais elevadas e minimizar a dissipação indesejada nas frequências mais baixas. A diferença entre esse método e o HHT está no número de parâmetros ajustáveis que foram introduzidos para determinar os parâmetros gama e beta de Newmark. O método alfa generalizado possui dois parâmetros ajustáveis, cujos valores são fornecidos pelo próprio usuário do método. A vantagem desse método está na sua abrangência. Dependendo dos valores dos parâmetros, o método alfa generalizado pode se tornar Newmark, ou HHT, ou WBZ.

Em 1997, Fung publicou um estudo sobre modificação do método Newmark. O autor desenvolveu diversas formas de marcha do tempo envolvendo termos de derivada temporal de ordem superior a dois. Em algumas delas, o método chega à quarta ou à quinta ordem, tendo número complexo na sua formulação. Isso foi uma tentativa de encontrar um método não dissipativo e ao mesmo tempo incondicionalmente estável. Entretanto, as modificações apresentadas por Fung, apesar de proporcionarem resultado satisfatório em alguns casos de aplicação, requerem, em seu processamento, mais tempo do que muitos outros métodos já conhecidos, como por exemplo, o HHT.

No ano seguinte, Barthold *et. al.* desenvolveram estudo comparativo de indicador de erro, baseado no refino da malha e passo de tempo. O foco era analisar erro numérico apresentado diante da plastificação quando a estrutura é submetida à carga cíclica. Diferentes modelos de material, a saber, Hencky e Prandtl-Reuss, com endurecimento não linear e sem endurecimento não linear, foram utilizados e comparados os erros. Diversas malhas foram testadas num exemplo de placa com furo. Entretanto, o foco da análise era voltado para o método da solução, e não para a nova formulação do elemento. Por isso, o elemento quadrilateral utilizado foi o convencional sem enriquecimento.

Em 1999, Kuhl e Crisfield desenvolveram um método para análises não lineares, envolvendo combinação de um método implícito com método de conservação de energia. Naquele mesmo ano, Han desenvolveu uma metodologia para avaliar o erro em um problema de plasticidade cíclica. Em 2001, Xue e Meek

estudaram a resposta dinâmica e a estabilidade numérica de pórticos com formulação geometricamente não linear. O método empregado na solução foi o implícito de Newmark de aceleração média, junto com o algoritmo de Newton-Raphson para processo iterativo. A combinação dos dois algoritmos forneceu estabilidade incondicional e dissipação numérica. Os resultados apresentados foram satisfatórios.

Em 2003, Armero e Romero, após observarem as limitações contidas nos métodos explícitos, desenvolveram um algoritmo baseado em conservação de momento e dissipação de energia para análise dinâmica não linear de barra do tipo de Cosserat. A maior crítica dos autores volta-se aos métodos explícitos, do tipo Newmark e HHT. Segundo eles, há instabilidade numérica quando a estrutura entra no regime não linear, mesmo que os mesmos métodos apresentem estabilidade incondicional no regime linear do material. Durante o encruamento, os métodos explícitos acusam aumento súbito de energia dada a transição do material do regime linear para não linear. Por esse motivo, os autores desenvolveram novo esquema de solução, levando-se em consideração algumas características importantes, como garantir a precisão de segunda ordem, a dissipação numérica de energia controlável, através de parâmetros introduzidos no esquema, e a competitividade, em termo de custo computacional, em comparação aos métodos explícitos.

No ano seguinte, Zhou *et. al.* desenvolveram novo algoritmo para analisar a estrutura submetida à carga dinâmica com comportamento de material hipoeelástico e hipoeelasto-plástico. O novo algoritmo foi capaz de incorporar deformação finita com precisão de segunda ordem. O algoritmo que serviu de referência para comparação foi o método de Newmark em combinação com processo iterativo de Newton-Raphson. O novo algoritmo batizado de EL consiste em uma integral da razão constitutiva do material. Ao mesmo tempo, apresenta as seguintes características: incondicionalmente estável, precisão de segunda ordem, dissipação na alta frequência, sendo isento de iteração não linear.

Em 2006, Corbani apresentou estudo sobre análise dinâmica elastoplástica em estrutura metálica submetida à excitação aleatória de sismo. O modelo foi baseado na teoria de viga de Euler-Bernoulli e se utilizou o método de Newmark para solução. Os efeitos causados por rótulas plásticas foram considerados na plastificação. O mérito desse trabalho foi incorporar a simulação de Monte Carlo para representar uma força exercida pelo abalo sísmico.

No ano seguinte, Menin *et. al.* analisaram os métodos implícitos que provocam dissipação numérica, tais como Newmark, HHT, WBZ e alfa generalizado. Esses métodos foram comparados em termos de comportamento e desempenho numérico na análise de uma estrutura não linear. Durante a análise, diversos valores de raio espectral foram utilizados e os autores obtiveram resultados específicos de cada método. Segundo os autores, os quatro métodos citados anteriormente não garantem a estabilidade numérica e não têm capacidade de dissipar altas frequências quando o raio espectral for igual a um. O método de Newmark apresentou, por exemplo, dissipação numérica excessiva nas baixas frequências quando o raio espectral varia entre 0.6 a 0.8, enquanto os outros três métodos permitiram dissipação numérica até um determinado tempo com raio espectral 0.8. A partir de então ocorreu um crescimento da velocidade acompanhado por um aumento da energia. Porém, quando o raio espectral foi igual a 0.6, o método alfa generalizado foi o que apresentou a menor dissipação numérica.

No mesmo ano, Silva desenvolveu um esquema de integração implícito-composto, baseado na formulação de aceleração linear de Newmark para análise dinâmica não linear. Nesse esquema, o processo de Newton-Raphson foi incorporado. Além disso, foi utilizado o método backward Euler de três pontos, o que fez acrescentar dois processos iterativos ao esquema. A vantagem é sua fácil implementação computacional, que permite tratamento de efeito de grande translação e de rotação de corpo rígido. Entretanto, não é incondicionalmente estável, e o custo computacional é muito maior que a regra trapezoidal.

Ainda no mesmo ano, Kirsch e Bogomolni desenvolveram novo algoritmo para solução de problema de dinâmica não linear, que inclui tanto não linearidade física quanto geométrica. Esse algoritmo foi desenvolvido inicialmente para análise linear de estrutura. Posteriormente, os autores perceberam seu potencial em termos de eficiência e flexibilidade, assim como facilidade na implementação. Estenderam o método, desse modo, para outras áreas de análise não linear. O algoritmo consiste basicamente na combinação de diversos métodos já conhecidos.

Em 2009, Monteiro desenvolveu um novo operador de captura para inserir no Método dos Elementos Finitos descontínuos no tempo a fim de capturar a passagem de onda em um sólido. O método descontínuo no tempo se mostrou eficiente para determinar passagem de onda, mesmo quando a função de deslocamento ou de velocidade assume perfil da função de degrau. No ponto singular, os resultados

apresentaram oscilação numérica para o Método dos Elementos Finitos convencional, mesmo diante de método implícito mais eficiente. Entretanto, para método dos elementos finitos descontínuo, essa oscilação numérica não foi observada tanto no elemento de viga quanto no elemento quadrilateral 2D. No mesmo ano, Shishvan *et. al.* desenvolveram outro método da família de marcha do tempo, passo a passo, que é direcionado para solução de problema parabólico e hiperbólico. Diferentemente de outros métodos, o algoritmo desenvolvido adota função de Kernel para fazer interpolação do tempo inicial até tempo final. Essa aplicação tornou o método estável com intervalos de tempo relativamente altos, em problemas que envolvem equação parabólica, como por exemplo, condução e escoamento de fluidos. Outra contribuição importante é a sua capacidade em reduzir efeito de amortecimento artificial (numérico), inerente em diversos métodos de solução.

No ano seguinte, Chang desenvolveu uma nova família de métodos implícitos para a solução dinâmica de sistemas estruturais lineares. O novo método, inspirado na família do método de Newmark, objetiva introduzir parâmetros de ajuste nas equações de equilíbrio e ao mesmo tempo atingir precisão de segunda ordem e estabilidade de forma incondicional na solução que envolve não linearidade. A partir dessas condições, é possível utilizar um passo de tempo maior para poupar esforço computacional e evitar processo iterativo de solução do tipo Newton-Raphson. Essa nova família de métodos possui os parâmetros de solução em função de condições iniciais, além de envolver os parâmetros gama e beta, tradicionalmente conhecidos do método Newmark. Outras variáveis introduzidas para determinar esses parâmetros são a razão de amortecimento, a frequência natural da estrutura e um fator ômega que está em função da frequência natural.

Como se percebe nesta breve revisão, o assunto da estabilidade numérica em problemas da dinâmica não linear ainda é bastante atual, o que sinaliza cuidadosa escolha dos métodos de solução no presente estudo.

1.4.2 Métodos de Enriquecimento

Esta seção apresenta uma breve revisão de pesquisas sobre métodos enriquecidos. A apresentação procura seguir uma ordem cronológica, com o intuito

de mostrar a evolução do assunto, assim como mostrar dificuldades que já foram superadas ou ainda a serem superadas.

Em 1983, Zienkiewicz *et. al.* apresentaram um método alternativo de solução de elementos finitos, que, mais tarde, ficou conhecido como elementos finitos hierárquicos. A ideia se baseia no fato de que não há necessidade de alterar as funções de interpolação nodal já existentes, deduzidas a partir do polinômio de Lagrange, basta acrescentar como funções de enriquecimento os polinômios hierárquicos.

Anos mais tarde, 1989, Deuhlhard *et. al.* apresentaram um dos trabalhos pioneiros sobre malhas adaptativas de elementos finitos hierárquicos. A metodologia buscou a solução de equações diferenciais parciais bidimensionais em problemas elípticos. Dada a limitação computacional da época, o trabalho preocupou-se em mostrar como a malha hierárquica adaptativa é eficiente no cálculo computacional e como o tempo de solução foi reduzido. Os autores elaboraram estimador de erro na malha e apresentaram conceitos básicos que serviram de referência para trabalhos futuros.

No ano seguinte, Leung e Au sugeriram outras funções de forma para o caso de elementos de viga e de placa. Os autores utilizaram uma função B_3 spline como função de interpolação para deslocamentos no lugar de funções convencionais conhecidas. Os resultados foram satisfatórios, tanto no tempo de processamento quanto na redução do número de grau de liberdade.

Em 1992, Ganesan e Engels apresentaram estudo sobre o MEFH para análise dinâmica de viga de Euler - Bernoulli, utilizando funções trigonométricas. Os resultados mostraram-se satisfatórios.

No ano seguinte, Oliveira propôs funções hierárquicas para refino p adaptativo aplicado a elementos hierárquicos. O estudo concentrou-se na solução do problema de autovalores e autovetores. Os exemplos 1D, 2D e 3D foram analisados e estudados. Uma das contribuições do trabalho foi na elaboração de um estimador de erro eficiente.

Em 1995, Belytschko *et. al.* propuseram novo método para análise de propagação de trinca. O novo método foi denominado pelos autores como Método Sem Malha de Galerkin, um dos pioneiros no estudo dos métodos sem malha e na aplicação em propagação de trinca. A questão de propagação de trinca vinha sendo analisada pelo Método dos Elementos de Contorno ou por meio de malhas

adaptativas de elementos finitos. No mesmo ano, Cho e Youn apresentaram um estudo sobre malhas adaptativas hierárquicas para problemas elastodinâmicos. A proposta foi centrada na adaptatividade de tipo p , e não a do tipo h . Os autores afirmaram que malhas adaptativas tipo p em conjunto com métodos de integração direta elevam o custo computacional do processamento.

No ano seguinte, Han e Pety apresentaram dois artigos sobre vibrações livres em uma placa retangular utilizando MEFH, com funções de enriquecimento Bardell (1991). Os resultados do cálculo das frequências naturais mostraram que o MEFH é eficiente quando utiliza polinômios de ordens mais elevadas. Isso permite reduzir o número de graus de liberdade necessário, sem comprometer a precisão nos resultados. Mesmo no caso de propagação de ondas, provocadas por vibrações forçadas ou harmônicas, o MEFH comportou-se de forma eficiente, com boa precisão nos resultados.

Ainda no mesmo ano, Melenk e Babuska apresentaram uma nova formulação, conhecida como "*Partition of Unity Finite Element Method*" (PUFEM). Este é um dos trabalhos pioneiros a introduzir conceitos de Método Sem Malha na formulação de elementos finitos. Essa formulação permite incorporar as funções conhecidas *a priori* como funções locais na formulação enriquecida, e apresenta versatilidade em gerar domínio de elementos finitos com o grau de refino desejado, sem a complicação de gerar novamente a malha.

Em 1998, Taylor *et. al.*, baseados na técnica de partição de unidade, deduziram funções de enriquecimento hierárquico, que foram aplicadas para elementos unidimensionais e bidimensionais, no caso, elementos quadriláteros e triangulares. No mesmo ano, Leung e Chan apresentaram estudo sobre enriquecimento de elementos finitos utilizando séries de Fourier. Os autores do trabalho alegaram que a utilização de função de enriquecimento do tipo polinomial acarreta numa matriz mal condicionada quando a análise é para vigas ou placas. Diferentemente, a utilização de séries de Fourier pode evitar este tipo de problema quando a matriz de rigidez é calculada analiticamente, e não numericamente.

No ano seguinte, Cramer *et. al.* desenvolveram uma estratégia de malha adaptativa para análise de problemas elastoplásticos. A estratégia é baseada em enriquecimento dos elementos com funções hierárquicas, e ao mesmo tempo, refinamentos de malha nas regiões de interesse. A região onde se faz o refino é sinalizada

por indicador de erro, determinado, por sua vez, por algoritmo baseado na comparação de energia de tensão e deformação.

No mesmo ano, Ribeiro e Petyt desenvolveram formulação de MEFH, utilizando funções de Legendre para o enriquecimento de uma placa, submetida à vibração geometricamente não linear. Mais uma vez, o MEFH mostrou-se eficiente com resultados relativamente precisos em relação aos resultados de referência. Ainda no mesmo ano, os autores publicaram outro trabalho sobre a formulação desenvolvida para o caso de placa de material composto submetida à vibração harmônica.

Em 2000, Strouboulis, Babuska e Copps desenvolveram estudos sobre combinação do Método de Partição de Unidade e Método convencional dos Elementos Finitos. Essa combinação foi denominada pelos autores como Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). A diferença entre o MEFG e outros métodos baseados no Método de Partição de Unidade é que ele tem suas funções de enriquecimento anuladas nos pontos nodais. Outro aspecto é que a precisão da integração numérica para matriz de rigidez é controlada de acordo com tipo de função introduzida. Por último, a dependência linear do sistema de equações pode ser resolvida empregando-se métodos numéricos já conhecidos.

Em 2001, Duarte *et. al.* aplicaram a técnica de partição de unidade para análises tridimensionais do problema dinâmico de propagação de trincas. Nesse trabalho, os autores utilizaram diversas funções de enriquecimento, nos elementos por onde passa a trinca. Essas funções podem ser polinomiais ou outras já conhecidas, como, por exemplo, a equação para cálculo de fator de intensidade de tensões. O estudo em questão constata que a técnica de partição de unidade é eficiente na aproximação de campo singular em volta da trinca.

Em 2002, Barros estudou a aplicação do Método Sem Malha e do MEFG para análise não linear física em estruturas. Foram diversas as funções de enriquecimento adotadas, principalmente as conhecidas *a priori* na solução teórica. Apresentou também, o desenvolvimento de formulação enriquecida com Mecânica do Dano. Além disso, foi desenvolvido o estimador de erro para essa aplicação. Uma das sugestões do trabalho foi aprimorar esse estimador de erro e estendê-lo para a dinâmica elastoplástica.

No mesmo ano, Babuska *et. al.* publicaram um trabalho analisando os princípios para seleção das funções de forma para o MEFG. É um dos primeiros

estudos publicados que discute e mostra teoremas relacionados à seleção de funções de forma. Os autores desenvolveram teoremas a partir de princípios matemáticos do espaço de Sobolev e mostraram exemplos para o caso unidimensional.

Em 2003, Torres desenvolveu elementos tridimensionais hexaédricos e tetraédricos para análise de sólidos com comportamento não linear físico, incorporando, ao mesmo tempo, modelos de dano, como o de Mazars ou de Lemaitre. Algumas vantagens do MEFG foram observadas, entre elas a facilidade de obter resultados mais precisos na região - apenas com enriquecimento de função -, de alta gradiente de tensões e deformações; sem necessidade de refino na malha.

Em 2004, Oliveira realizou um estudo comparativo voltado para a determinação das frequências naturais de vigas biapoiada com modelos de Timoshenko e Vlasov. Em suas análises, empregou o Método dos Elementos Finitos Hierárquicos e os resultados obtidos foram comparados ao Método dos Elementos Finitos convencional. Na análise utilizou-se do elemento quadrilateral. No caso de MEF convencional, considerou-se elemento da família *Serendipity*. As primeiras seis frequências foram determinadas, e o MEFH se mostrou mais próximo ao resultado teórico em comparação ao MEF convencional.

No mesmo ano, Solin *et. al* publicaram um livro tratando do MEFH que utiliza diversas categorias de funções hierárquicas, como funções de enriquecimento na solução. Entre elas, as funções de Legendre, as de Lobatto, as de Kernel e outras.

Ainda em 2004, Góis apresentou um trabalho direcionado para a determinação de tensões e deslocamentos, empregando-se elementos quadrilaterais, utilizando o MEFG. A formulação para obter tensões no domínio do elemento é conhecida como formulação híbrida mista de tensão (FHMT). Essa formulação possibilita o cálculo de tensões de forma precisa. Um dos exemplos apresentados no seu trabalho trata de determinação de tensões numa trinca, em um exemplo clássico na mecânica de fratura. Para essa análise, diversas categorias de funções de enriquecimento foram utilizadas e analisadas. Entre elas, as funções polinomiais e as funções trigonométricas.

No mesmo ano, Pereira realizou um estudo sobre método de extração de fatores de intensidade de tensões, utilizando MEFG. No seu trabalho, vários métodos da mecânica de fratura, como a integral de contorno, a função *cutoff* e a integral "J", foram abordados no contexto de MEFG. As funções de enriquecimento

tratadas foram de ordem polinomial. Observou-se que, com a utilização de MEFG, a taxa de convergência e robustez do algoritmo depende das funções de enriquecimento, enquanto a malha pode ser reduzida a fim de diminuir o esforço computacional.

Leung *et. al.* propuseram, em 2004, nova formulação de enriquecimento, fazendo uso de séries de Fourier, empregando elementos quadrilaterais e aplicando em problemas de vibrações livres. Essa formulação se mostrou mais eficiente para cálculo de frequência natural em comparação ao MEFH com função de Legendre. Os autores também comentaram que o enriquecimento com a série de Fourier facilita a obtenção de solução analítica, revelando-se mais eficaz que a solução via integral numérica.

Em 2004, Romkes e Oden, apresentaram metodologia para análise de sólido elástico submetido à propagação de ondas de tensão. O sólido estudado em questão é de material heterogêneo, e empregou-se formulação hierárquica. Os resultados apresentados mostraram-se satisfatórios.

Em 2005, Nirschl estudando o MEFG, adotou funções polinomiais e funções trigonométricas como funções de enriquecimento, para análise de tubos cilíndricos e cascas esféricas. Entretanto, não se fez análise de estabilidade da matriz de rigidez, nem estudo de convergência ou erro.

No mesmo ano, Law e Lu apresentaram uma formulação para identificação de trincas em vigas de Euler - Bernoulli em análises dinâmicas. A proposta era representar trincas pela função Delta de Dirac. O processo é equivalente a enriquecer a formulação convencional de viga na região de trinca com essa função matemática. Os resultados mostraram-se satisfatórios.

Também em 2004, De Bel *et. al.* estudaram a vibração forçada numa placa, típico problema de natureza elastodinâmica, analisada pelo método de partição de unidade. O objetivo era observar a propagação de onda acústica de média frequência na placa. Os resultados apresentados revelaram que o método era promissor na análise de ondas acústicas.

Independentemente das formulações do MEFG e MEFH, Hughes *et al.*, publicaram, nesse mesmo ano, nova formulação, também fundamentada no MEF convencional, em que se valeram das funções isogeométricas, ou funções *B-Splines*, também conhecidas como NURBS. Trata-se de um dos trabalhos pioneiros nessa nova formulação, que foi aplicada em problemas de mecânica linear. Além disso, os

autores também desenvolveram nova estratégia de refino de malha, chamada de refino k , além do refino h e do refino p . A formulação isogeométrica foi aplicada em diversos exemplos, com resultados satisfatórios e, diga-se, mais eficientes em comparação a outros métodos.

Em 2006, Mangini desenvolveu elemento de casca de revolução utilizando o MEFG. As funções de enriquecimento consideradas foram as polinomiais.

No mesmo ano, Strouboulis *et. al.* desenvolveram metodologia para estimar erro *a posteriori* do MEFG. Essa metodologia exerce um papel fundamental por permitir determinar erro numérico da malha, comparando-o com o valor de referência, e, a partir disso, gerar outra malha mais adequada. O algoritmo proposto mostrou-se eficiente como uma estratégia de malhas adaptativas. Vários exemplos foram apresentados envolvendo plastificação ou não linearidade geométrica, ou para determinar frequências naturais. E a metodologia proposta mostrou-se eficiente.

No mesmo ano, Cottrell *et. al.* desenvolveram o MEF com base na formulação isogeométrica para análise estrutural. O trabalho dos autores constitui-se na primeira investigação da análise isogeométrica para problemas de vibração estrutural. Os autores observaram que as NURBS são eficientes para determinar frequências naturais, inclusive sendo capazes de eliminar frequências espúrias.

Em 2008, Duarte e Kim apresentaram trabalho relacionado à aplicação de MEFG para análise de trincas, com atenção especial voltada para funções de enriquecimento locais e globais. Funções de enriquecimento locais foram utilizadas para a região próxima da trinca, ou até mesmo na fronteira da trinca, enquanto funções de enriquecimento globais foram aplicadas para o restante do sólido. Os autores observaram que essa combinação provocou uma melhoria bastante significativa em termos de resultado, além de economizar tempo de processamento. Outra observação feita foi que funções de enriquecimento globais praticamente não interferem no efeito gerado pelas funções de enriquecimento locais.

Ainda no mesmo ano, Strouboulis *et. al.* publicaram um trabalho sobre MEFG aplicado para solução de equação de Helmholtz. A equação Helmholtz é utilizada para problemas físicos que envolvem variáveis dependentes no espaço e no tempo, como os problemas acústicos, eletromagnéticos, entre outros. Os autores apresentaram funções de enriquecimento que envolvem funções exponenciais e funções trigonométricas para a propagação de ondas bidimensionais. A escolha

dessas funções, além de respeitar critérios previamente estabelecidos pelo MEFG, considerou as soluções já consagradas e estudadas na literatura.

Em 2009, Arndt desenvolveu o MEFG em análises dinâmicas de estrutura reticuladas, especificamente para a determinação de frequências naturais de estruturas. Em seu trabalho, os métodos de refino h , p e adaptativo foram analisados e comparados. O autor inicia suas pesquisas com a análise de diferentes funções de enriquecimento para barra, que posteriormente estendeu-se para a viga de Euler-Bernoulli. Foram feitas análises de formulações enriquecidas para problemas de dinâmica de vibrações livres, assim como uma detalhada análise de convergência empregando-se refino p e refino h . Além disso, o autor desenvolveu métodos adaptativos para aprimorar determinação de pares de autovalor e autovetor, utilizando refino p e refino h .

No mesmo ano, Belytschko *et. al.* apresentaram estudo sobre o MEFG e MEFe (Método dos Elementos Finitos estendido) num trabalho de revisão e verificaram a aplicação desses métodos na engenharia. Segundo esses autores, MEFG e MEFe já são utilizados para análise de propagação de trinca, inclusive alguns softwares comerciais já incorporam esses métodos no seu pacote. Porém em outras áreas, como contornos de grãos e deslocamentos de discordância, ainda requerem estudos mais aprofundados.

Em 2010, Yu *et. al.* estudaram outra possibilidade de elementos finitos hierárquicos de funções de Legendre numa viga. A função de enriquecimento é adicionada à formulação convencional de elemento de viga. No seu trabalho, vários casos de análises estáticas foram considerados, e os resultados se mostraram satisfatórios. A análise dinâmica, por sua vez, é uma questão ainda aberta.

Em 2010, Arndt *et. al.* apresentaram estratégias de refino adaptativo com elementos finitos com funções de enriquecimento generalizados, para barras, em problemas de vibrações livres.

Posteriormente, em 2011, Babuska e Banerjee observaram que há uma deficiência inerente ao MEFG, que é a matriz de rigidez mal condicionada devido à introdução de funções de enriquecimento. Para superar esse problema, os autores apresentaram um pequeno ajuste no MEFG de modo a tornar o método ainda mais robusto, tanto quanto o MEF convencional. Essa modificação introduzida recebeu o nome de MEFG estável (Stable Generalized Finite Element). A nova modificação,

cujo resultado se mostrou satisfatório, preserva as características de MEFG, porém introduz modificação e critério de seleção para função de enriquecimento.

No mesmo ano, Yang *et. al.* desenvolveram outra estratégia de malha adaptativa hierárquica com base na formulação de elementos finitos e elementos de contorno. Segundo os autores, essa formulação mista, eficiente para determinar tensões e velocidades em análises elastodinâmicas, utiliza funções semianalíticas.

Ainda no mesmo ano, Arndt *et. al.* apresentaram aplicações do MEFG para pórticos, em que a taxa de convergência para frequências naturais de referência foi examinada, em comparação com certa situação de referência. No estudo, o MEFG se mostrou eficiente para determinar frequências naturais de ordens mais elevadas em comparação aos outros métodos.

No mesmo ano, Loureiro desenvolveu, em sua tese de doutorado, outra formulação, utilizando a função de Green para solucionar equações parabólicas e hiperbólicas. A nova formulação, denominada de *LExGa*, trata de forma independente a discretização no tempo e no espaço da equação de onda e da condução térmica. Ao mesmo tempo, faz um enriquecimento do domínio do elemento. Esse enriquecimento define um subdomínio para solução do problema.

Em 2012, Torii desenvolveu estudo aplicado a análise dinâmica transiente de barras, vigas de Euler – Bernoulli, bem como na propagação de ondas bidimensionais no estado plano de tensões. Para tanto, valeu-se do MEFG e MEFH e do MEF com função de interpolação lagrangeana quadrática. Esses métodos foram comparados para a determinação de pares de autorvalores e autovetores, e o MEFG se mostrou mais preciso que os outros dois.

Também no mesmo ano, Gupta *et. al.* propuseram uma melhoria no enriquecimento global-local utilizando MEFG para solução de problemas de propagação de trincas. Depois de se obter a solução global, os resultados servem como condições de contorno para função de enriquecimento local, em torno da trinca. Após obter a solução localmente, os resultados voltam a enriquecer a solução global.

Ainda no mesmo ano, Torii e Machado apresentaram estudos da aplicação do MEFG para deslocamentos axiais de barra e de viga. Este trabalho empregou método de Newmark e método de superposição modal como algoritmos para solução. É um dos trabalhos pioneiros a aplicar o MEFG para análise dinâmica

transiente. Os resultados obtidos se mostraram satisfatórios em comparação com os que foram obtidos pelo MEFH, da ordem mais elevada.

Em 2013, Murotani *et. al.* elaboraram uma estratégia de malha adaptativa aplicada para análise de propagação de trincas. Para tanto usaram elementos finitos hierárquicos. Como outras estratégias, os autores apresentaram estimador de erro como primeiro passo e, em seguida, o método de Zienkiewicz – Zhu (Wu *et. al.*; 1990, *ap ud* Murotani *et. al.* 2013), que consiste em estimar o valor do erro utilizando as deformações e, a partir de então, refinar a malha onde houver necessidade.

A partir das revisões bibliográficas apresentadas, é possível perceber que ainda existem muitos tópicos a serem pesquisados e aprofundados para métodos enriquecidos de elementos finitos.

1.4.3 Plasticidade

Esta seção apresenta uma breve revisão sobre de plasticidade. A apresentação procura seguir uma ordem cronológica, com o intuito de mostrar a evolução do assunto.

Em 1978, Costa desenvolveu algoritmo de solução para análise dinâmica elastoplástica de estruturas. Nesse trabalho, vários critérios de plastificação foram comparados, tais como os de Von Mises e Mohr-Coulomb, para modelar o comportamento dos materiais durante o encruamento e a plastificação, ao mesmo tempo em que esse material estava submetido ao carregamento dinâmico. O autor fez análises de vários casos comparando diferentes algoritmos de solução. Em alguns casos, foi incorporado processo iterativo ao método explícito da diferença central. Os resultados desses dois esquemas foram semelhantes para um passo de carga relativamente grande. O método explícito, ou de diferença central, é considerado incondicionalmente estável, e sua implementação para solução não linear do sistema é aplicada de forma relativamente simples. Outro mérito do trabalho foi o desenvolvimento do elemento de interface e a análise de propagação de ondas em meios fluidos.

Em 1993, Lai *et. al.* apresentaram estudos com abordagem matemática da Mecânica do Meio Contínuo. Os autores apresentaram os conceitos fundamentais para análise matemática de meio contínuo, sólidos e fluidos.

Em 1995, Kwan e Huang apresentaram estudos sobre conceitos físicos e matemáticos de plasticidade de materiais diversos.

No mesmo ano, Abbasnia e Kassimali apresentaram estudo de estrutura com grandes deformações e empregaram o conceito da rótula plástica. Fenômenos como grandes rotações e translações foram incorporados. O comportamento do material é considerado um elastoplástico perfeito. No trabalho em questão, porém, não se apresentaram claramente os detalhes sobre a formulação de grandes deformações. Também não se comentou sobre a condição de estabilidade da estrutura sujeita à flambagem, assim como o cálculo de fronteira de estabilidade. Os autores apresentaram outra metodologia para proceder à análise de material elastoplástico perfeito. A formulação utilizada no trabalho foi desenvolvida a partir da função de escoamento via esforços internos que, por sua vez, são calculados através de deslocamentos nodais e função de estabilidade.

Anos mais tarde, em 1997, Bonet e Wood publicaram estudos voltados para tratamento matemáticos para análise não linear, empregando Método dos Elementos Finitos.

Em 2000, Rodrigues desenvolveu metodologia computacional para análise não linear geométrica e física de plataformas de exploração de petróleo. No seu trabalho, foi adotada uma formulação co-rotacional com elementos de pórtico tridimensionais - que levam em consideração uma rotação finita, além dos outros fenômenos, como grandes deslocamentos e pequenas deformações. Diferentes técnicas de solução foram utilizadas, tais como: controle de deslocamento, controle de deslocamentos generalizados e comprimento de arco constante. Uma ênfase particular foi dada ao problema de não linearidade física; os efeitos de imperfeições geométricas e de tensões residuais foram tratados de maneira simples.

Em 2001, Kim *et al.* desenvolveram outra metodologia, baseada em MEF convencional, para análise de não linearidade física e geométrica de pórticos metálicos tridimensionais. A formulação de não linearidade física incluiu o efeito de rótulas plásticas. O algoritmo de solução adotado é o método dos deslocamentos incrementais modificado.

No mesmo ano, Magdi apresentou uma dedução da superfície de escoamento pelo critério de Von Mises, para combinação de carregamento em duto. A partir desse critério, as fórmulas foram utilizadas para tratar casos de interação entre torção-cortante e flexão-axial. Nos dois casos, equações analíticas foram deduzidas

e verificadas em comparação com os dados experimentais. No mesmo trabalho, o autor estendeu a dedução para o comportamento elastoplástico, em que considerou rótulas plásticas nos nós.

Em 2005, Zienkiewicz e Taylor apresentaram trabalhos sobre tratamento matemático via elementos finitos nos problemas que envolvem não linearidade física e geométrica.

Anos mais tarde, em 2007, Andreaus *et. al.* desenvolveram análise de uma viga com fissura e submetida à excitação harmônica. O estudo incluiu análise não linear dinâmica, não linearidade geométrica e modelo de contato. O elemento quadrilateral foi utilizado para simular a situação. A não linearidade do problema foi solucionada usando-se o método Newmark, de aceleração média, juntamente com o processo iterativo de Newton-Raphson. Diferentes situações de carregamentos foram consideradas, incluindo cargas impulsivas e cargas harmônicas. Os resultados se mostraram satisfatórios: a combinação de Newmark, de aceleração média, com Newton-Raphson obteve resultados efetivos. Por meio desse estudo, apesar de não ter sido o foco dos autores, foi observado que a combinação de Newmark e Newton-Raphson, embora tenha apresentado deficiências em termos de estabilidade numérica, fornece resultados coerentes.

Em 2007, Almeida e Lavalí apresentaram estudo de plasticidade distribuída em elemento de pórtico. Os autores formularam matriz de rigidez para a plasticidade distribuída de comprimento diferente de zero ao longo do elemento. Empregou-se formulação co-rotacional, com plasticidade distribuída.

No mesmo ano, Forti *et al.* desenvolveram uma formulação de viga 3D para análise não linear física. Foi adotada a teoria de viga de *Euler-Bernoulli* e foram desprezados os efeitos de cisalhamento devido à força cortante e à torção. Nesse estudo, um perfil tubular foi utilizado e os autores consideraram elementos infinitesimais na seção transversal para integração numérica. O comportamento do material foi elastoplástico perfeito. O elemento empregado foi de dois nós e foi introduzido na equação de energia virtual. Essa equação foi resolvida pelo método de Galerkin. Para solucionar as equações não lineares, os autores utilizaram o método Newton-Raphson modificado.

Como é possível perceber, a pesquisa sobre plasticidade ainda é bastante atual, especialmente quando se trata de algoritmo de solução. Até o momento, não há muitas publicações envolvendo plasticidade e métodos enriquecidos de

elementos finitos, o que indica a necessidade de estudos aprofundados neste aspecto.

1.4.4 Integração numérica.

Nesta seção, são apresentadas algumas referências sobre o estudo da integração numérica de elementos finitos convencionais assim como alguns fenômenos associados, tais como modos espúrios e travamento numérico.

Em 1978, Hughes *et. al.* publicaram um estudo sobre o desempenho de integração numérica reduzida e seletiva na análise de placas. Os autores mostraram a eficiência em aplicar integração reduzida e/ou seletiva para alguns casos. Entretanto, os modos espúrios não são controlados. Os autores comentaram sobre a possibilidade de se criar uma metodologia de controle desses modos espúrios e sobre a integração reduzida uniforme, que seria ainda mais preferível para evitar travamento artificial no elemento.

Em 1983, Park e Flaggs apresentaram uma análise de modos espúrios e do problema de travamento em elemento de barra e de viga de Timoshenko. O estudo é baseado na análise dinâmica dos elementos e conhecimento de uma solução analítica, na forma trigonométrica. A partir da solução analítica conhecida a priori, foi desenvolvida uma metodologia de filtro dos modos espúrios e do travamento, para ser acoplada na solução do Método dos Elementos Finitos.

Em 1984, Belytschko *et. al.* apresentaram um estudo sobre metodologia de controle de modos espúrios que surgem na integração numérica de elementos lagrangeanos de 9 nós. Esse método foi estendido para fazer controle na equação de Laplace e equações de placa de Mindlin.

Em 1985, Belytschko *et al.* também apresentaram um trabalho sobre a implementação de elemento lagrangeano de casca de nove nós, com controle de modos espúrios. Os resultados obtidos considerando 2x2 e 3x3 pontos de integração foram comparados e observou-se que a integração numérica de 3x3 pontos, apresenta maior porcentagem de erro relativo em relação à integração numérica de 2x2 pontos, integração uniformemente reduzida. Além disso, os autores desenvolveram um método de controle de modos espúrios com o esquema de integração uniformemente reduzida. Esse método é denominado método gama, e

consiste em adicionar na matriz de rigidez convencional outra matriz de estabilização. No ano seguinte, os autores estenderam a formulação para elementos quadriláteros de nove nós. O método gama também foi utilizado e se mostrou eficiente.

Em 1988, Briassoulis apresentou análise do problema de modos espúrios com elementos lagrangeanos de casca de nove nós. Neste trabalho, o problema de integração numérica foi discutido e analisado. O estudo apresentou metodologia simplificada para eliminar modos espúrios. Trata-se de enrijecer artificialmente a matriz de rigidez. Na integração reduzida, para algumas condições de contorno, pode aparecer singularidade na matriz de rigidez, tornando assim a matriz mal condicionada, com modos espúrios. Na análise dinâmica, tais modos podem provocar instabilidade na solução.

Em 1989, White e Abel apresentaram um estudo da análise de eficiência de um elemento de casca, de nove nós, aplicado a problemas não lineares, envolvendo controle de modos espúrios. Neste trabalho, os autores introduziram artificialmente um vetor de operador na determinação de pares de autovalor e autovetor. Adotaram também a integração numérica com 2x2 pontos de quadratura de Gauss. A escolha por esses pontos de integração se deu para evitar travamento e ao mesmo tempo, modos espúrios. O fenômeno de travamento surge quando a energia contribuída pela técnica de integração numérica for muito grande nos modos de deformação mais elevada. Entretanto, os modos espúrios de energia zero do elemento ficam difíceis de controlar quando a energia é pequena. Na análise não linear física, a metodologia de controle de modos espúrios se mostrou eficiente.

Em 1992, Zhiliang e Qigen publicaram uma nota técnica discutindo sobre ocorrência de modos espúrios não comunicáveis nos elementos quadriláteros de 9 nós e *serendipity*. Nessa nota, os autores apresentaram a diferença de modos com diferentes pontos de integração numérica, total e reduzida. Nos casos apresentados, o elemento *serendipity* apresenta modos coerentes com integração total, enquanto a integração reduzida pode excitar modos espúrios nas frequências de baixa energia.

Em 1992, Abdalla apresentou um estudo para eliminar os termos causadores de travamento artificial nos elementos de placa, empregando notação *strain gradient*. Essa técnica permite identificar e remover *a priori* os termos que geram travamento, e foi aplicada pelo autor na análise de placa de compósito laminado. Os resultados obtidos mostraram que a técnica é eficiente.

Em 1993, Kim e Min apresentaram um estudo sobre integração inteira e reduzida para elementos quadrilaterais de quatro, oito e nove nós. O foco do estudo é analisar a influência do método de integração numérica nos elementos quando são aplicados para o caso de estado plano de tensões e deformações. Ao mesmo tempo, analisar a relação entre os modos espúrios e travamento com os métodos de integração numérica, entre elas, a integração inteira, seletiva reduzida e uniformemente reduzida.

Em 2004, Pereira desenvolveu modelo de elementos finitos de placa incorporando formulação de compósito laminado. A teoria do modelo desenvolvido está baseada em deformação de cisalhamento de primeira ordem da hipótese de lamina equivalente. Neste trabalho, o autor empregou técnica de *strain gradient* para identificar e eliminar os termos geradores de travamento artificial. Os resultados obtidos mostraram que a técnica é eficiente.

Em 2012, Madeo *et. al.* publicaram desenvolvimento de elemento quadrilateral do tipo membrana, livre de modos espúrios. Diferente do elemento convencional conhecido, o elemento proposto conta com três graus de liberdade por nó, dois deslocamentos e um grau de liberdade correspondente à rotação. De acordo com os autores, o elemento proposto apresenta menos sensibilidade em relação à malha distorcida e desempenha um comportamento eficiente na obtenção do resultado preciso no *patch test*.

Conforme a breve revisão feita, percebe-se que existe uma relação entre a técnica da integração numérica dos elementos e efeitos indesejáveis, tais como modos espúrios e travamento artificial. Além disso, várias técnicas foram desenvolvidas a fim de eliminar e controlar esses efeitos indesejáveis. Entretanto, não há literatura até o momento que defina claramente o critério para definição da quantidade mínima necessária na integração numérica para as formulações enriquecidas, tal como para formulações convencionais.

2. ELASTOPLASTICIDADE COM PROPAGAÇÃO DE ONDAS

Este capítulo apresenta uma breve revisão de alguns conceitos fundamentais, tais como a Mecânica do Contínuo (LAI, 1993), o fenômeno elastodinâmico e a propagação de ondas elastoplásticas [(VOLTERRA, 1965); (ERINGEN, 1974); (MONTEIRO, 2009)], e plasticidade [(LUBLINER, 2008); (KHAN & HUANG, 1995); (BONET & WOOD, 1997); (ZIENKIEWICZ & TAYLOR, 2005)].

A propagação de onda de tensão é provocada pela propagação de onda de deslocamento. Quando um sólido é submetido à onda de tensão elástica, a configuração de arranjo atômico é deformada durante a passagem. Logo após, retorna-se a configuração original. O tratamento matemático é visto neste capítulo para diferentes situações, tais como tensões produzidas por tração ou por flexão. Em seguida, a física de passagem de onda elastoplástica será apresentada e discutida brevemente, assim como os conceitos de plasticidade e tratamento matemático.

O modelo matemático para o problema elastodinâmico pode ser visto pela Mecânica do Contínuo, e os conceitos básicos são apresentados por Monteiro (2009) e Lai (1993).

Considere inicialmente um problema de Estado Plano de Tensão, no regime elástico linear. Dado um sólido de material homogêneo e isotrópico, representado pelo domínio do problema $\Omega \subset R^2$ e limitado por seu contorno $\Gamma = \partial\Omega = \Gamma_u \cup \Gamma_h$, onde Γ_u e Γ_h representam, respectivamente, as partes do contorno essencial e natural, com vetor normal unitário \vec{n} , como mostra a Figura 2.1, e sujeito a um carregamento no domínio Ω , sendo a variável temporal designada por t .

A equação diferencial que descreve a propagação de ondas elásticas no sólido é a equação de equilíbrio, apresentada na forma tensorial:

$$\sigma - \rho\ddot{u} - f = 0 \quad (2.1)$$

onde σ representa o tensor de tensões, ρ é a densidade do meio, admitida constante; \ddot{u} e f representam, respectivamente, as componentes da derivada

segunda no tempo do campo de deslocamentos do vetor u e as componentes das forças de volume do vetor f .

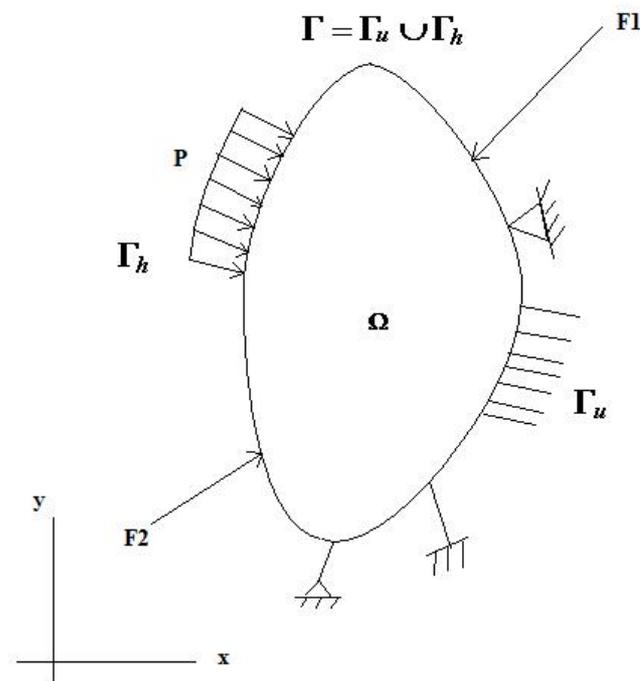


Figura 2.1 Modelo matemático do sólido elástico linear.

As relações deformação-deslocamento para a hipótese de pequenas deformações são dadas, respectivamente, em sua forma indicial:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

ou, na forma matricial:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

As equações constitutivas para materiais linearmente elásticos, homogêneos e isotrópicos, podem ser representadas pelas seguintes expressões:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.4)$$

ou

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.5)$$

sendo

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

A matriz \mathbf{D} representa a matriz constitutiva do material, δ_{ij} é o delta de Kronecker, ε_{ij} são as componentes do tensor de deformações; e $\boldsymbol{\varepsilon}$ é a representação vetorial das deformações. Nas expressões (2.4) e (2.6), λ e μ representam as constantes de Lamé, definidas em função do módulo de Young E , e do coeficiente de Poisson ν , como:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (2.7)$$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.8)$$

O fenômeno físico descrito pela equação (2.1) é conhecido como problema elastodinâmico de um meio contínuo. Esse tipo de fenômeno frequentemente apresenta solução temporal descontínua, que, em geral, é provocada pela aplicação instantânea de uma força externa durante um intervalo de tempo curto. Os métodos numéricos tradicionais procuram discretizar espaço do domínio de forma independente do tempo. Muitas vezes, o algoritmo utilizado para marcha do tempo apresenta oscilação numérica excessiva, ou excesso de dissipação, não presente na solução real do problema. Portanto se torna impreciso na determinação de ondas de tensões. Por um lado, problemas elastodinâmicos precisam de métodos robustos de discretização do espaço para obter resultados precisos, por outro lado, também precisam de algoritmos estáveis para solução temporal. A solução espacial e a

solução temporal são variáveis que interferem na precisão de resultados do problema. Como o presente trabalho emprega formulações enriquecidas para discretização espacial, por este motivo, existem diversas questões ainda abertas, como por exemplo, uma investigação detalhada sobre a influência exercida pelo método de discretização do espaço sobre algoritmo de marcha do tempo, e vice versa.

Em outras palavras, a questão que se coloca é a seguinte: na busca pela melhor solução para problema elastodinâmico, qual seria a metodologia mais conveniente, uma formulação que acopla discretização no espaço e tempo simultaneamente, ou uma forma independente? Este trabalho assumiu como ponto de partida um tratamento separado de discretização no espaço e no tempo, com o objetivo de estudar a influência de uma sobre a outra.

2.1 Propagação de onda unidirecional na barra

Para melhor compreender o fenômeno de propagação de onda, considere-se um caso simples de propagação de onda unidirecional numa barra. A equação de propagação de onda em barras é aqui apresentada [(VOLTERRA, 1965); (ERINGEN, 1974)], assim como é determinada a relação entre tensões e velocidades, associadas à propagação das ondas resultantes de um carregamento súbito.

A figura 2.2 mostra a propagação de uma onda de deformação elástica representada como um elemento infinitesimal numa barra linear. Nesta análise não são considerados os deslocamentos verticais e radiais, assim como seus efeitos associados, a saber: deformação, tensão, inercial, amortecimento, entre outros.

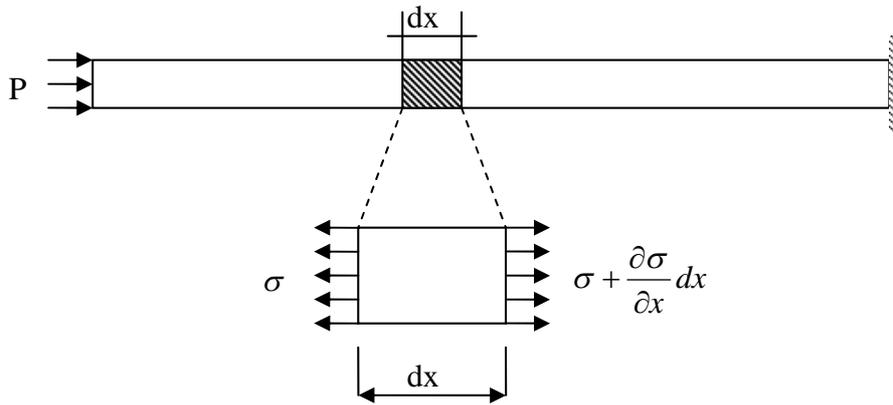


Figura 2.2 Esquemático de propagação de onda numa barra.

A coordenada x coincide com eixo longitudinal da barra, e na seção transversal, a área da barra é A . O deslocamento longitudinal dessa seção é descrito pela variável $u(x,t)$. Admite-se que a barra está sujeita a um campo de tensão dinâmico $\sigma(x,t)$, e um elemento infinitesimal tem diferencial de tensão. Pela equação de equilíbrio, tem-se:

$$-\sigma A + \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) A = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \quad (2.9)$$

Para o caso particular em que a área A não varia ao longo da barra, e o comportamento do material seja elástico, a lei de Hooke, para um estado uniaxial de tensão, fornece:

$$\sigma = E \varepsilon$$

e

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Introduzem-se essas expressões na equação (2.9), para se obter:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.10)$$

Supondo um material homogêneo, e que E e ρ não variam com x , resulta:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.11)$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (2.12)$$

com $c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. O parâmetro c_0 é a velocidade de propagação de onda na direção longitudinal. Nesse caso, u representa deslocamento longitudinal de uma seção transversal da barra situada no ponto x no tempo t , e velocidade de propagação de ondas $c = c_0 = \sqrt{E/\rho}$. A fim de obter a solução da equação geral (2.12), foi utilizado o método D'Alembert de integração (VOLTERRA, 1965), em que se introduzem duas novas variáveis independentes:

$$\xi = x - ct \quad (2.13a)$$

$$\eta = x + ct \quad (2.13b)$$

Sendo assim, a equação (2.12) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad (2.14)$$

A integração da equação (2.14) em relação a η fornece:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f'(\xi) \quad (2.15)$$

em que $f'(\xi)$ é uma função arbitrária de ξ . A integração da equação (2.15) em relação a ξ fornece:

$$u = \int f'(\xi)d\xi + F(\eta) \quad (2.16)$$

ou,

$$u = f(\xi) + F(\eta) \quad (2.17)$$

A equação (2.17) pode ser representada pela figura 2.3. Suponha que no tempo $t = 0$, a função $f(x - ct)$ representa o perfil da onda, e o pico do perfil ocorre quando o valor de x é igual à zero. No instante t , o pico da função $f(x - ct)$ ocorre novamente com o valor do argumento $x - ct$ igual a zero, ou quando $x = ct$. Isso indica que a onda se propaga no sentido x positivo com velocidade constante c . Logo, a função $f(x - ct)$ representa uma onda que se propaga sem distorções na direção positiva de x com velocidade c . De maneira similar, a função $F(x + ct)$ pode ser analisada.

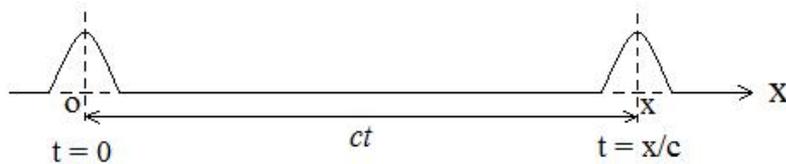


Figura 2.3. Propagação de onda dada pela expressão $f(x - ct)$.

Para interpretar a propagação de tensões, convém considerar que a onda desloca-se no sentido negativo de x , e o seu perfil é dada pela:

$$u = F(x + c_0 t) \quad (2.18)$$

A deformação longitudinal na barra é:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = F'(x + c_0 t) \quad (2.19)$$

Neste caso, F' indica a derivada do F em relação a x . Assim, a tensão longitudinal correspondente é:

$$\sigma = EF'(x + c_0 t) \quad (2.20)$$

e a velocidade da seção transversal cujo deslocamento na direção longitudinal é:

$$v = \frac{\partial u}{\partial t} = c_0 F'(x + c_0 t) \quad (2.21)$$

A partir das equações (2.20) e (2.21), demonstra-se que a tensão longitudinal é proporcional à velocidade do elemento infinitesimal, o que dá:

$$\sigma = \frac{E}{c_0} v \quad \left(\begin{array}{c} c_0 \\ \leftarrow \end{array} \right) \quad (2.22)$$

Da mesma forma, para a propagação de ondas na direção positiva de x , dada por:

$$u = f(x - c_0 t) \quad (2.23)$$

A relação entre a tensão longitudinal e a velocidade da seção transversal é:

$$\sigma = -\frac{E}{c_0} v \quad \left(\begin{array}{c} c_0 \\ \rightarrow \end{array} \right) \quad (2.24)$$

As expressões anteriores descrevem a propagação de onda unidirecional de tensão e deformação em função da velocidade, que variam no tempo numa barra.

2.2. Onda de deslocamentos e tensões gerada por flexão

A onda de deslocamentos numa viga na direção vertical é expressa pela equação diferencial (VOLTERRA, 1965),

$$-c_0^2 z^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.25)$$

em que $w = w(x, t)$ é a função que representa deslocamento vertical de um ponto no eixo da viga localizado na coordenada x e no tempo t , e,

$$c_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad \text{e} \quad z = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (2.26)$$

De modo geral, a expressão $w = a \cos[2\pi(\omega t \mp nx)]$ satisfaz a equação diferencial e estabelece que $\omega/n = 2\pi c_0 z n$. Portanto, a velocidade $c = \omega/n = \omega\Lambda$ de uma onda harmônica de flexão, de frequência ω , e comprimento da onda Λ , é dada por:

$$c = \frac{2\pi c_0 z}{\Lambda} \quad (2.27)$$

2.3. Ondas plásticas na direção longitudinal

Esta seção apresenta conceitos básicos sobre propagação de ondas plásticas na direção longitudinal. As expressões matemáticas [(VOLTERRA, 1965); (LUBLINER, 2008)] para abordagem desse assunto são aqui apresentadas.

Considere-se agora uma barra de material uniforme, isotrópico, engastada – livre, e por simplicidade a relação de tensão – deformação é bilinear, em que a tangente das duas retas é o módulo de Young do material. Aplica-se uma tensão de compressão ou de tração de magnitude σ_1 na extremidade livre da barra. Quando submetida a uma carga de impacto, a onda de tensão de magnitude σ_1 viaja ao longo da barra com velocidade constante $c_1 = \sqrt{E_1/\rho}$. Caso tiver outra onda de tensão, seja de compressão ou de tração, de magnitude σ_2 sobrepondo-se à tensão σ_1 na extremidade da barra, então uma parte do material que já estava submetida à tensão σ_1 , poderá entrar em regime plástico e mudar sua propriedade mecânica para módulo tangente E_2 , desse modo, a nova onda de tensão de magnitude σ_2 viaja ao longo da barra com velocidade $c_2 = \sqrt{E_2/\rho}$.

O fenômeno explicado pode ser entendido como sobreposição de tensões, que pode ser aplicada para interpretar quando uma situação em que uma tensão de magnitude σ_1 e outra de magnitude σ_2 são aplicadas simultaneamente na extremidade livre da barra. O efeito provocado é o mesmo e a onda de tensão pode ser vista na figura 2.4. A onda resultante consiste de duas ondas diferentes, de magnitude σ_1 e σ_2 , respectivamente. A distância entre as duas frentes de onda pode ser determinada como:

$$(c_1 - c_2)t = \frac{t}{\sqrt{\rho}} (\sqrt{E_1} - \sqrt{E_2}) \quad (2.28)$$

No caso do material que apresenta relação de tensão – deformação como sendo elastoplástico perfeito, o módulo tangente no segundo trecho é zero, $E_2 = 0$. Uma vez que uma tensão de tração ou compressão, aplicada na extremidade livre da barra, tem o valor de tensão acima do escoamento, então, a onda se propaga ao longo da barra com valor de tensão de escoamento. Enquanto que o restante da energia exercida pela carga é absorvida pelo material no ponto de aplicação.

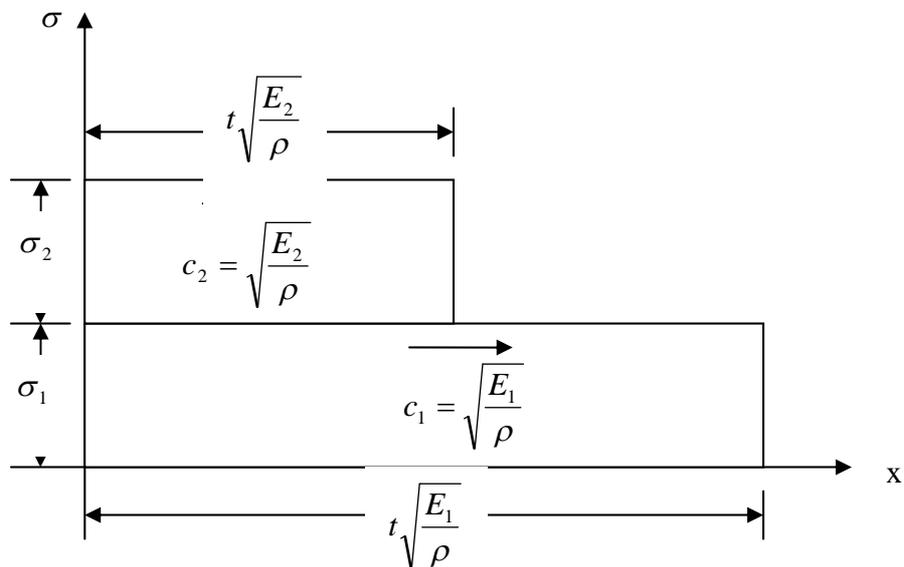


Figura 2.4. Passagem de onda de tensão ao longo do eixo longitudinal.

Pode-se pressupor que a relação de tensão – deformação do material apresente um decréscimo gradual de módulo tangente conforme a tensão aumenta,

o qual caracteriza um material de relação tensão – deformação multilinear. Pode-se pressupor que a tensão de tração ou compressão de magnitude σ_n gere uma deformação ε_n na extremidade livre da barra, a relação de tensão – deformação é mostrada a figura 2.5. Logo, quando se dividir a deformação total ε_n em frações infinitesimais $d\varepsilon$, então é possível determinar a velocidade de propagação de cada fração como sendo:

$$c_i = \sqrt{\frac{E(\varepsilon_i)}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma(\varepsilon_i)}{d\varepsilon}}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \quad (2.29)$$

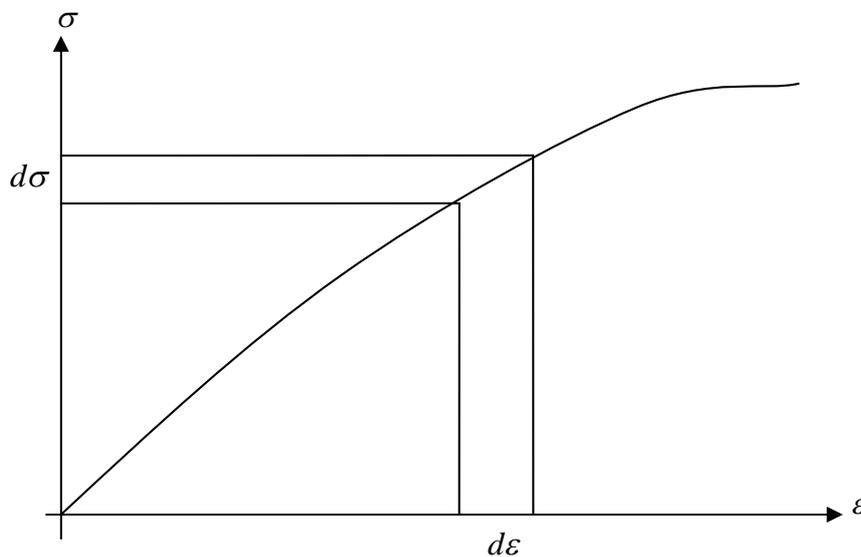


Figura 2.5. Relação de tensão deformação.

em que $d\sigma/d\varepsilon$ representa o módulo tangente da curva tensão – deformação, correspondente à deformação ε , i representa a parcela infinitesimal da divisão e ρ é a densidade da barra. A distância percorrida por cada uma dessas ondas infinitesimais no tempo t é:

$$x_i = tc_i = \frac{t}{\sqrt{\rho}} \sqrt{\frac{d\sigma(\varepsilon_i)}{d\varepsilon}} \quad (2.30)$$

Logo, a frente da onda de tensão muda constantemente, como mostra na figura 2.6. E a equação

$$c(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{\rho} \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon}} \quad (2.31)$$

expressa a velocidade de propagação de onda plástica. Para caso particular em que material é elástico, onde:

$$\frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} = E = \text{constante}$$

a equação (2.31) reduz a $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, conforme visto anteriormente.

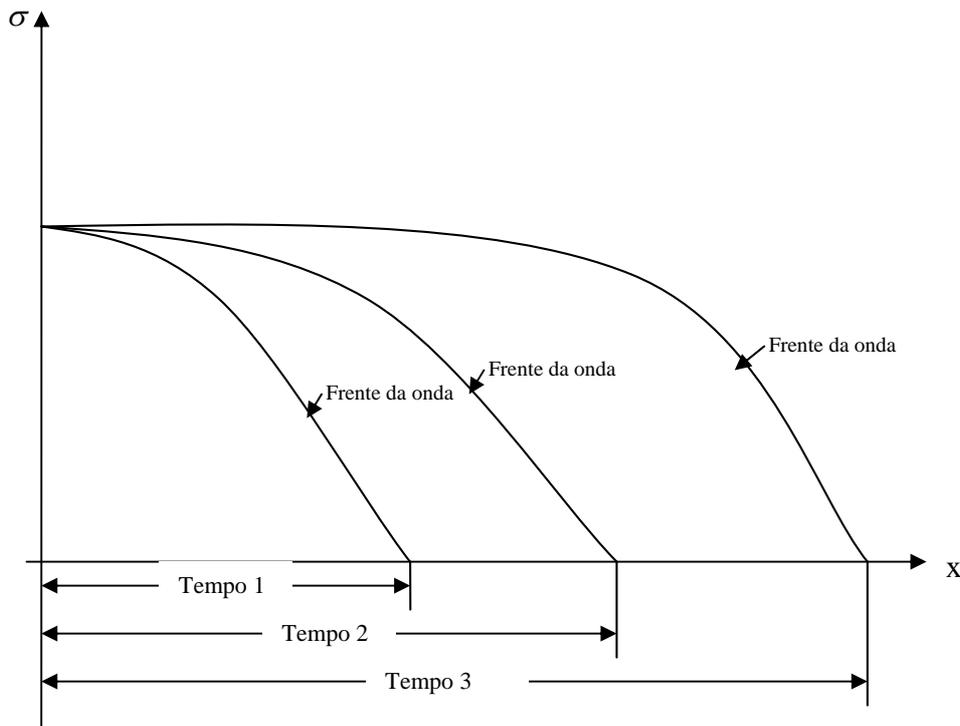


Figura 2.6 Propagação de frente de onda de tensão plástica ao longo do eixo longitudinal em relação ao tempo.

2.4 Plasticidade

Em muitos problemas de engenharia, a Teoria de Elasticidade nem sempre descreve o comportamento real dos materiais. Especialmente em circunstâncias em

que o material admite relação não linear entre tensão e deformação, ou ainda, quando ocorre plastificação. Neste caso, a tensão sofrida pelo material ultrapassa a tensão de escoamento, e quando o carregamento é removido da peça, a mesma não retornará à sua configuração original. Esse fenômeno exige tratamento matemático mais complexo que o da elasticidade. No presente trabalho, o tratamento matemático da plasticidade restringe-se aos materiais com endurecimento isotrópico, mais especificamente o modelo de Von Mises. [(ZIENKIEWICZ, 2005); (LUBLINER, 2008); (SOUZA, 2005)].

Neste trabalho, é considerado apenas o material metálico que apresenta comportamento não linear físico, de acordo com critério de escoamento de Von Mises, e endurecimento isotrópico.

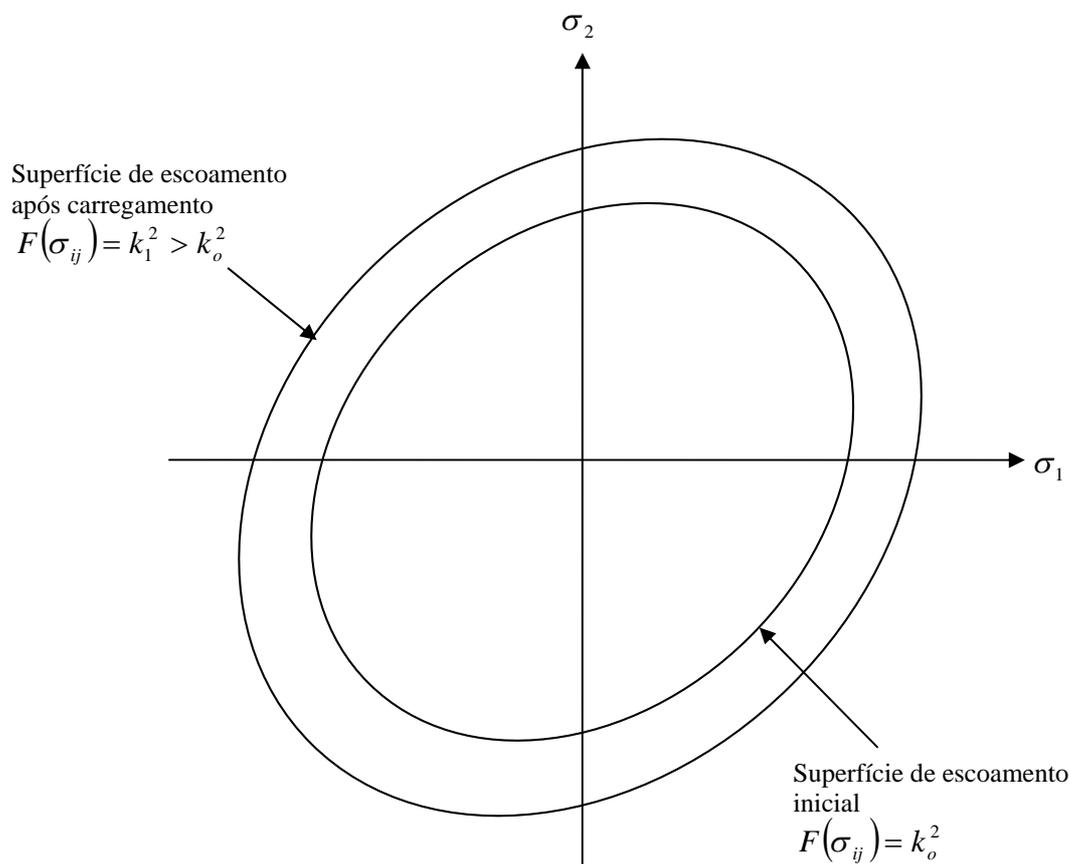


Figura 2.7 Superfície de escoamento após carregamento no material que apresenta endurecimento isotrópico.

Materiais com encruamento isotrópico são aqueles em que, durante o processo de escoamento plástico, a superfície de escoamento do material se

expande sem distorção ou translação, como se pode observar na figura 2.7. Outros tipos de materiais podem apresentar comportamentos diferentes, especialmente por conta do efeito de Bauschinger. Para exemplificar esse efeito, considere-se um corpo de prova solicitado por alguma força de tração ou compressão até o regime plástico. O carregamento é removido e o corpo de prova é recarregado novamente na direção contrária até escoamento. E como pode observar, a tensão de escoamento no recarregamento é menor que a tensão de escoamento na direção original, como mostra a figura 2.8. Esse efeito de Bauschinger foi observado em metais policristalinos [(LUBLINER, 2008), (KHAN & HUANG, 1995)].

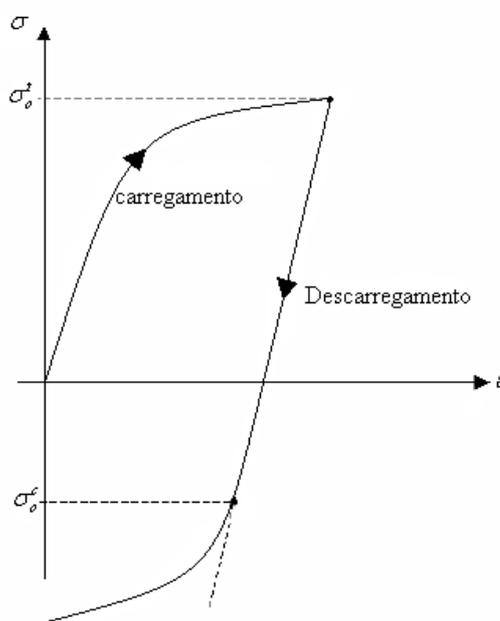


Figura 2.8. Curva de tensão – deformação mostrando efeito de Bauschinger.

Na teoria da Mecânica do Contínuo, é de costume decompor o segundo tensor de Piola-Kirchhoff em duas partes:

$$\sigma_{PK2ij} = p\delta_{ij} + S_{ij} \quad (2.32)$$

sendo p é a pressão hidrostática dada por:

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (2.33)$$

Onde σ_1 , σ_2 e σ_3 são tensões principais, e $p\delta_{ij}$ é o tensor de tensões hidrostáticas.

A segunda parte S_{ij} é calculada como:

$$S_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (2.34)$$

e é designada componentes de tensor de tensão desviatório.

As tensões desviatórias principais podem ser relacionadas com tensões principais por meio da seguinte expressão:

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \\ S_2 &= \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} \\ S_3 &= \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{aligned} \quad (2.35)$$

ou

$$S_i = \sigma_i - p \quad (2.36)$$

Para metais dúcteis, a plastificação dos materiais é comandada principalmente pelas tensões desviatórias, mas não pela tensão hidrostática. Desse modo, para calcular a expansão da superfície de escoamento para um material com endurecimento isotrópico, é necessário primeiramente calcular as tensões desviatórias [(LUBLINER, 2008), (KHAN & HUANG, 1995)].

Considere-se uma função de escoamento que depende do estado de tensões e de parâmetros do material. O escoamento do material ocorre quando a superfície de escoamento do material alcançar o limite de regime elástico dado pela expressão $F(\sigma_{ij}) = k^2(\varepsilon_p)$ [(LUBLINER, 2008), (KHAN & HUANG, 1995)]. Neste caso, para modelo de Von Mises, F representa a superfície do escoamento do material definida pelo parâmetro k , que está relacionado com a deformação plástica medida por meio de um ensaio uniaxial. No desenvolvimento da teoria de plasticidade para material isotrópico com endurecimento, as seguintes condições são necessárias:

1. Existência de uma superfície inicial de escoamento que define o limite elástico do material para um estado multiaxial das tensões.
2. Lei de endurecimento que descreva a evolução da superfície de escoamento, durante o processo de carregamento.
3. Lei de escoamento, que relacione a função de potencial plástico com a direção e o valor da deformação plástica no espaço de tensões, como mostra a equação (2.37) [(LUBLINER, 2008), (KHAN & HUANG, 1995)]:

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) = F(\sigma_{ij}) - k^2(\varepsilon_p) \quad (2.37)$$

O comportamento do material é elástico quando:

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) < 0 \quad (2.38)$$

E o material inicia o regime plástico quando:

$$f(\sigma_{ij}, \kappa) = 0 \quad (2.39)$$

Porém, a condição $f(\sigma_{ij}, \kappa) > 0$, é inadmissível. Portanto, a equação (2.39) deve ser atendida apenas durante expansão da superfície definida pela equação (2.37).

Considere-se que a lei de escoamento de Von Mises é aplicável durante a resposta plástica, então a função $f(\sigma_{ij}, \kappa)$ é utilizada na lei de escoamento para determinar-se incremento de deformação plástica [(LUBLINER, 2008), (KHAN & HUANG, 1995)]:

$$de_{ij}^p = da \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.40)$$

sendo da um escalar a ser determinado. A lei de endurecimento, que também depende do tipo do material, muda as variáveis na função $f(\sigma_{ij}, \kappa)$ como efeito de

escoamento plástico e, por conseguinte, muda as condições de escoamento durante o regime plástico.

Em seguida é apresentada uma metodologia de solução conhecida como *método de retorno radial*. Os parâmetros como as tensões desviatórias e as deformações são consideradas sempre nas direções principais.

Durante a plastificação, que segue o modelo de Von Mises, as deformações plásticas volumétricas são nulas. Então é conveniente expressar a relação geral de tensão – deformação no tempo $t + \Delta t$ na forma:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{s} = \frac{E}{1+\nu} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}' + {}^{t+\Delta t}\mathbf{e}^p \right) \quad (2.41)$$

$${}^{t+\Delta t}\sigma_m = \frac{E}{1-2\nu} {}^{t+\Delta t}e_m \quad (2.42)$$

onde \mathbf{S} é o vetor de tensões desviatórias com os componentes:

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = {}^{t+\Delta t}\sigma_{ij} - {}^{t+\Delta t}\sigma_m \delta_{ij} \quad (2.43)$$

${}^{t+\Delta t}\sigma_m$ é a tensão média ou tensão hidrostática.

$${}^{t+\Delta t}\sigma_m = \frac{{}^{t+\Delta t}\sigma_{ii}}{3} \quad (2.44)$$

${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}'$ é o vetor de deformações desviatórias com os componentes:

$${}^{t+\Delta t}e'_{ij} = {}^{t+\Delta t}e_{ij} - {}^{t+\Delta t}e_m \delta_{ij} \quad (2.45)$$

${}^{t+\Delta t}e_m$ é a deformação média.

$${}^{t+\Delta t}e_m = \frac{{}^{t+\Delta t}e_{ii}}{3} \quad (2.46)$$

A partir das equações (2.41)-(2.46), somente é desconhecida a deformação plástica, ${}^{t+\Delta t}e_{ij}^p$, e tensão desviatória, ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$.

Considerando que os componentes de tensão e deformação são conhecidos no tempo t , a equação (2.41) pode ser escrita pela seguinte forma:

$${}^{t+\Delta t}S_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left({}^{t+\Delta t}e_{ij}'' - \Delta e_{ij}^p \right) \quad (2.47)$$

em que

$${}^{t+\Delta t}e_{ij}'' = {}^{t+\Delta t}e_{ij}' - e_{ij}^p \quad (2.48)$$

O passo seguinte é calcular as tensões desviatórias e o incremento de deformações plásticas sujeitas às condições de escoamento, à lei de endurecimento e à lei de escoamento.

Pelo critério de Von Mises, a condição de escoamento no tempo $t + \Delta t$ é [(LUBLINER, 2008), (KHAN & HUANG, 1995)]:

$${}^{t+\Delta t}f^{vm} = \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \cdot {}^{t+\Delta t}S_{ij} - \frac{1}{3} \left({}^{t+\Delta t}\sigma_{esc} \right)^2 = 0 \quad (2.49)$$

onde ${}^{t+\Delta t}\sigma_{esc}$ é a tensão de escoamento no tempo $t + \Delta t$.

Este capítulo apresentou conceitos relacionados a propagação de ondas, assim como a formulação matemática a ser trabalhada nos capítulos seguintes. Além disso, conceitos de plasticidade também foram revisados, com o intuito de fundamentar o desenvolvimento do trabalho. Tais conceitos foram empregados para desenvolver os algoritmos iterativos de solução numérica implementados no presente trabalho.

3. ALGORITMOS PARA SOLUÇÃO TEMPORAL: NEWMARK, HHT E ALFA GENERALIZADO

Este capítulo apresenta uma breve revisão conceitual de algoritmos utilizados neste trabalho. Os conceitos que serão apresentados encontram-se nas referências. [(CHOPRA, 1995); (HILBERT ET. AL., 1977); (MENIN ET. AL., 2007); (WOOD, 1981); (SOUZA, 2005); (CHUNG & HULBERT, 1993)].

Existem diversos algoritmos para marcha do tempo em análises dinâmicas elastoplásticas, nos quais a solução do problema é determinada em cada passo de tempo. Basicamente, são dois procedimentos a serem considerados. O primeiro é o procedimento incremental do tempo propriamente dito. Em cada passo, a função de plastificação é verificada. Caso o nível de tensões determinado em certo passo de tempo ultrapassar o limite de escoamento do material, então inicia-se outro procedimento iterativo para adequar o material em análise às condições de equilíbrio. Neste trabalho, adota-se o método de Newton-Raphson para procedimento iterativo de plastificação. Os detalhes sobre algoritmo para o método de Newton-Raphson para expansão da superfície de Von Mises encontram-se na referência LUBLINER (2008) e KHAN & HUANG (1995).

Entre os algoritmos para processo incremental do tempo, os mais conhecidos e utilizados são os métodos de Newmark (CHOPRA, 1995), de Hilbert Hughes Taylor, ou HHT (HILBERT et. al. 1977), e o método de alfa generalizado (CHUNG & HULBERT, 1993).

3.1 Método de Newmark

O método de Newmark é amplamente empregado na solução de problemas elastodinâmicos devido a sua facilidade de implementação e precisão fornecida. É considerado um dos métodos que apresenta dissipação numérica, diferente de outros métodos de solução que trabalham com conservação de momento ou energia. Este algoritmo de solução trabalha com um passo de tempo e, durante esse passo, três vetores são atualizados – os de deslocamentos, velocidades e acelerações. O método também possibilita ao usuário optar pelo esquema explícito ou implícito,

através da escolha de parâmetros independentes, β e γ . Essa facilidade inspirou muitos trabalhos cujo objetivo foi buscar parâmetros que fornecessem solução mais estável e precisa.

O próprio método de Newmark implícito trabalha com duas possibilidades de parâmetros, aceleração média, que fornece a estabilidade incondicional, e aceleração linear, que é condicionalmente estável e requer um intervalo de tempo suficientemente pequeno em cada passo para fornecer convergência. Entretanto, o último é o mais indicado para problemas de não linearidade física e exige que seja incorporada, ao longo da marcha do tempo, atualização da matriz de rigidez e sua propriedade mecânica. Mais especificamente, durante a plastificação do material, a superfície de escoamento se expande e o próprio método Newmark não prevê isso no seu algoritmo. Por isso, muitos pesquisadores utilizam uma combinação dos métodos, Newmark e Newton-Raphson para contornar esse problema.

No quadro a seguir, é apresentado algoritmo do método de Newmark com o algoritmo de Newton-Raphson, que é o adotado neste trabalho. Essa sequência foi desenvolvida e testada pelo próprio autor, baseada na referência Chopra (2005) e Souza (2005).

Método de Newmark e algoritmo de Newton-Raphson:

1) Aceleração média ($\gamma = 1/2, \beta = 1/4$)

2) Aceleração linear ($\gamma = 1/2, \beta = 1/6$)

(u_o : deslocamento inicial, \dot{u}_o : velocidade inicial, \ddot{u}_o : aceleração inicial)

1.0 Condições iniciais

$$1.1 \{\ddot{u}_o\} = \frac{\{p_o\} - [C]\{\dot{u}_o\} - [K]\{u_o\}}{[M]}$$

1.2 Selecionar Δt

$$1.3 [C]_{newmark} = \frac{[M]}{\beta \Delta t} + \frac{\gamma [C]}{\beta}$$

$$[M]_{newmark} = \frac{[M]}{2\beta} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) [C]$$

2.0 Cálculo para cada passo de tempo, i

$$2.1 \{\Delta \hat{p}\}_i = \{\Delta p\}_i + [C]_{newmark} \{\dot{u}\}_i + [M]_{newmark} \{\ddot{u}\}_i$$

2.2 Iniciar Newton-Raphson

2.2.1 Dados iniciais

$$\{u\}_{i+1}^0 = \{u\}_i \quad \{f\}_{\text{int}}^0 = \{f\}_{\text{int}}^i \quad \{\Delta R\}^1 = \{\Delta \hat{p}\}_i$$

2.2.2 Cálculo de cada iteração, $j=1,2,3,\dots$

$$2.2.2.1 \quad [\hat{K}]_j = [K]_i + \frac{\gamma[C]}{\beta \Delta t} + \frac{[M]}{\beta(\Delta t)^2}$$

$$2.2.2.2 \quad \text{Resolve } [\hat{K}]_j \{\Delta u\}^j = \{\Delta R\}^j \quad \Rightarrow \{\Delta u\}^j$$

$$2.2.2.3 \quad \{u\}_{i+1}^j = \{u\}_{i+1}^{j-1} + \{\Delta u\}^j \quad \text{e} \quad \{\Delta u\}_{i+1} = \{\Delta u\}_{i+1} + \{\Delta u\}^j$$

$$2.2.2.4 \quad \text{Calcular } \varepsilon_{i+1}^j$$

$$2.2.2.5 \quad \text{Calcular } \Delta \varepsilon = \varepsilon_{i+1}^j - \varepsilon_{i+1}^{j-1}$$

$$2.2.2.6 \quad \text{Calcular segundo tensor de Piola – Kirchoff } \Delta \sigma = C^{EP} \Delta \varepsilon$$

$$2.2.2.7 \quad \sigma_{i+1}^j = \sigma_{i+1}^{j-1} + \Delta \sigma$$

$$2.2.2.8 \quad \int_A \sigma_{i+1}^j dA = \{f\}_{\text{int}}^j$$

$$2.2.2.9 \quad \{\Delta f\}_{\text{int}} = \{f\}_{\text{int}}^j - \{f\}_{\text{int}}^{j-1}$$

$$2.2.2.10 \quad \{\Delta R\}^{j+1} = \{\Delta p\}_i - \{\Delta f\}_{\text{int}} - [M]\{\ddot{u}\}_i - [C]\{\dot{u}\}_i$$

2.2.2.11 Caso não atender ao critério de convergência definida *a priori*, então retorna para passo 2.2.2.1 para 2.2.2.10.

$$2.3 \quad \{\Delta \dot{u}\}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \{\Delta u\}_i - \frac{\gamma}{\beta} \{\dot{u}\}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right) \{\ddot{u}\}_i$$

$$2.4 \quad \{\Delta \ddot{u}\}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} \{\Delta u\}_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \{\dot{u}\}_i - \frac{1}{2\beta} \{\ddot{u}\}_i$$

$$2.5 \quad \{\dot{u}\}_{i+1} = \{\dot{u}\}_i + \{\Delta \dot{u}\}_i; \quad \{\ddot{u}\}_{i+1} = \{\ddot{u}\}_i + \{\Delta \ddot{u}\}_i$$

3.0 Repetir o próximo passo de tempo. Substituir i por $i+1$ e seguir passo 2.1 até 2.5 para próximo passo de tempo.

3.2 Método de Hilbert Hughes Taylor (HHT)

Em busca de um método que fornecesse estabilidade numérica de forma incondicional e que possibilitasse ao usuário controlar a dissipação numérica, Hilbert *et. al.* (1977) desenvolveram ajustes no método de Newmark pela introdução de

parâmetros novos. Essa nova metodologia foi denominada HHT. Seu desenvolvimento é apresentado em seguida.

Considere-se inicialmente a equação de vibrações livres, em que um parâmetro alfa é introduzido na equação de tal forma a não alterar a condição de equilíbrio da equação:

$$[M]\{\ddot{u}\}_{n+1} + (1-\alpha)[K]\{u\}_{n+1} + \alpha[K]\{u\}_{n+1} = F(t_{n+1}) \quad (3.1)$$

onde os vetores de deslocamentos e de velocidades são calculados de acordo com a equação original de Newmark, assim como as condições iniciais, como mostram as equações (3.2) – (3.6)

$$\{u\}_{n+1} = \{u\}_n + \Delta t \{\dot{u}\}_n + \Delta t^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \{\ddot{u}\}_n + \beta \{\ddot{u}\}_{n+1} \right) \quad (3.2)$$

$$\{\dot{u}\}_{n+1} = \{\dot{u}\}_n + \Delta t \left((1-\gamma)\{\ddot{u}\}_n + \gamma \{\ddot{u}\}_{n+1} \right) \quad (3.3)$$

$$\{u\}_0 = \{u\} \quad (3.4)$$

$$\{\dot{u}\}_0 = \{\dot{u}\} \quad (3.5)$$

$$\{\ddot{u}\}_0 = [M]^{-1} (F_0 - [K]\{u_0\}) \quad (3.6)$$

As características dissipativas do algoritmo podem ser avaliadas de acordo com propriedade dinâmicas da estrutura, considerando-se a força externa igual a zero. Logo, as equações podem ser reescritas na forma matricial:

$$\{X\}_{n+1} = [A]\{X\}_n \quad (3.7)$$

sendo que

$$\{X\}_n = (u_n, \dot{u}_n \Delta t, \ddot{u}_n \Delta t)^T$$

e matriz $[A]$ é chamada de matriz de amplificação. A estabilidade e a precisão de um algoritmo dependem dos autovalores dessa matriz. Logo, a equação característica da matriz $[A]$ é:

$$\det([A] - \lambda[I]) = \lambda^3 - 2A_1\lambda^2 + A_2\lambda - A_3 = 0 \quad (3.8)$$

onde,

$[I]$ é a matriz de identidade, e λ_i são autovalores. Os invariantes de matriz A são:

$$A_1 = \frac{1}{2} \text{trace}[A]$$

A_2 = soma dos principais menores de $[A]$

$$A_3 = \det(A).$$

Os autovalores da matriz de amplificação são utilizados para a determinação do raio espectral de operador do algoritmo (HILBERT *et. al.*; 1977). Esse raio espectral é o que realmente controla a estabilidade numérica do algoritmo e a dissipação numérica: $\rho_\infty = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|)$, em que λ_i são autovalores da matriz de amplificação.

A definição da matriz de amplificação é dada por (HILBERT *et. al.*; 1977):

$$[A] = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} 1 + \alpha\beta\Pi^2 & 1 & \frac{1}{2} - \beta \\ -\gamma\Pi^2 & 1 - (1 + \alpha)(\gamma - \beta)\Pi^2 & 1 - \gamma - (1 + \alpha)\left(\frac{1}{2}\gamma - \beta\right)\Pi^2 \\ -\Pi^2 & -(1 + \alpha)\Pi^2 & -(1 + \alpha)\left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Pi^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

onde,

$$D = 1 + (1 + \alpha)\beta\Pi^2 \quad (3.10)$$

$$\Pi = \omega\Delta t \quad (3.11)$$

$$\omega = \sqrt{k/m} \quad (3.12)$$

Logo, ao substituir equações (3.10)-(3.12), na matriz $[A]$, e resolver equação (3.8), as invariantes da matriz de amplificação podem ser assim representadas:

$$A_1 = 1 - \Pi^2 [(1 + \alpha)(\gamma + 1/2) - \alpha\beta] / 2D \quad (3.13a)$$

$$A_2 = 1 - \Pi^2 [\gamma - 1/2 + 2\alpha(\gamma - \beta)] / D \quad (3.13b)$$

$$A_3 = \alpha \Pi^2 (\beta - \gamma + 1/2) / D \quad (3.13c)$$

De acordo com estudo de Hilbert et. al. (1977), quando α assume valor positivo, a dissipação numérica não se revela eficiente, seu comportamento é semelhante ao amortecimento viscoso linear. Por esse motivo, foi sugerido o uso de valor negativo, para o α no intervalo entre 0 e -1/3. Segundo os autores, α nessa faixa de valor apresenta estabilidade e dissipação numérica. Quando α é introduzido nos parâmetros independentes de Newmark, assim se apresenta:

$$\beta = (1 - \alpha)^2 / 4 \text{ e } \gamma = 1/2 - \alpha \quad (3.14)$$

que, ao ser introduzido nas invariantes da matriz de amplificação, se mostra como:

$$A_1 = 1 - \Pi^2 / 2D + A_3 / 2 \quad (3.15a)$$

$$A_2 = 1 + 2A_3 \quad (3.15b)$$

$$A_3 = \alpha(1 + \alpha)^2 \Pi^2 / 4D \quad (3.15c)$$

Convém observar que, com a utilização da equação (3.14), não há necessidade de se alterar o algoritmo de Newmark; basta utilizar o mesmo e alterar apenas os valores de parâmetros, γ e β .

3.3 Método alfa generalizado

Segundo o estudo de Chung e Hulbert (1993), um novo algoritmo de integração para a dinâmica de estruturas foi desenvolvido, utilizando-se como base o método Newmark, WBZ (WOOD et. al., 1981) e HHT. O novo método, conhecido como alfa generalizado, é desenvolvido com base em dois parâmetros, α_m e α_f . O desenvolvimento do método é apresentado a seguir.

As equações típicas do método de Newmark (3.2) e (3.3), são utilizadas pela equação (3.16) a seguir.

$$[M]\{\ddot{u}\}_{n+1-\alpha_m} + [C]\{\dot{u}\}_{n+1-\alpha_f} + [K]\{u\}_{n+1-\alpha_f} = F(t_{n+1-\alpha_f}) \quad (3.16)$$

em que,

$$u_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)u_{n+1} + \alpha_f u_n \quad (3.17a)$$

$$\dot{u}_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\dot{u}_{n+1} + \alpha_f \dot{u}_n \quad (3.17b)$$

$$\ddot{u}_{n+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m)\ddot{u}_{n+1} + \alpha_m \ddot{u}_n \quad (3.17c)$$

$$t_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)t_{n+1} + \alpha_f t_n \quad (3.17d)$$

são interpolações feitas utilizando-se parâmetros independentes propostos. Segundo os estudos realizados, os parâmetros de Newmark podem ser representados em função dos parâmetros independentes α_m e α_f . Logo:

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad (3.18a)$$

$$\beta = \frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 \quad (3.18b)$$

A estabilidade, a dissipação e a dispersão numéricas de um algoritmo dependem dos autovalores da matriz de amplificação $[A]$, que são o raio espectral do algoritmo. No caso de estabilidade incondicional, o método alfa generalizada estabelece que:

$$\alpha_m \leq \alpha_f \leq \frac{1}{2}, \quad \beta \geq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}(\alpha_f - \alpha_m) \quad (3.19)$$

e os parâmetros independentes podem ser representados em termo de raio espectral, ρ_∞ , como sendo:

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad (3.20)$$

Conforme os valores de ρ_∞ , é possível optar por diferentes métodos de solução. As expressões para determinarem os parâmetros a serem utilizados no algoritmo estão apresentadas na tabela a seguir.

Tabela 3.1. Algoritmos para solução temporal.

Algoritmo	α_m	α_f	β	γ
Newmark	0	0	$\frac{1}{(\rho_\infty + 1)^2}$	$\frac{3 - \rho_\infty}{(2\rho_\infty + 2)}$
WBZ- α (Wood et. al. 1981)	$\frac{\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$	0	$\frac{1}{4}(1 - \alpha_m)^2$	$\frac{1}{2} - \alpha_m$
HHT- α (Hilbert et. al. 1977)	0	$\frac{\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$	$\frac{1}{4}(1 + \alpha_f)^2$	$\frac{1}{2} + \alpha_f$
α - generalizado (Chung e Hulbert, 1993)	$\frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1}$	$\frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}$	$\frac{1}{4}(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2$	$\frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f$

Para uma análise dinâmica não linear, o valor de raio espectral ocupa um papel fundamental, uma vez que ele interfere na estabilidade numérica ao longo da análise. Por esse motivo, Menin *et. al.* (2007) desenvolveram estudo em relação a esse tema. Suas conclusões são reproduzidas parcialmente aqui:

- Quando o raio espectral for igual a 1,0, os métodos de Newmark, WBZ, HHT e alfa generalizado não garantem a estabilidade numérica e não têm capacidade de dissipar altas frequências.
- O método de Newmark apresenta dissipação numérica excessiva nas baixas frequências quando o raio espectral vale 0,6 ou 0,8. Outros métodos, WBZ, HHT e alfa generalizado, apresentam, por sua vez, dissipação numérica até determinado período de tempo com raio espectral igual a 0,8.
- Para o raio espectral 0,6, todos os métodos apresentaram estabilidade e precisão razoável, dos quais o alfa generalizado se mostrou o mais estável.

Este capítulo apresentou as opções de algoritmo para marcha do tempo, que serão utilizadas e testadas em combinação com diferentes formulações enriquecidas e formulações convencionais de elementos finitos. Além disso, conforme a breve revisão sobre conceitos dos algoritmos, os valores de parâmetros serão definidos.

Esses valores serão apresentados no capítulo que apresenta aplicações. Em função do amortecimento artificial introduzido pelos algoritmos de dissipação numérica, HHT e alfa generalizado, os resultados dos deslocamentos e das velocidades podem apresentar maior estabilidade numérica, entretanto os erros numéricos inerentes do MEF convencional e enriquecido podem ser mascarados.

4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS E HIERARQUICOS

Este capítulo apresenta conceitos matemáticos envolvidos no Método dos Elementos Finitos Enriquecidos [(MELENK & BABUSKA, 1996); (ARNDT, 2009); (TORII, 2012); (BARROS, 2002)]. Mais especificamente, a formulação generalizada e a formulação hierárquica. Posteriormente, os conceitos serão aplicados para desenvolver funções de enriquecimento para elemento quadrilateral de quatro nós, elemento quadrilateral *serendipity*, e elemento lagrangeano quadrilateral de nove nós.

4.1 Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH)

Esta seção apresenta conceitos fundamentais da formulação hierárquica (Solin et al, 2004), e esses conceitos já foram apresentados anteriormente por Arndt (2009) e Torii (2012).

A formulação convencional de MEF permite, a partir das funções polinomiais, definir funções de interpolação para um campo de variáveis desconhecidas, de tal modo que essas variáveis incógnitas sejam definidas a partir dos valores nodais da variável. Esse tipo de formulação traz desvantagens quando se deseja aumentar a ordem da aproximação do elemento, pois requer que as funções de interpolação sejam modificadas completamente. Do ponto de vista de implementação computacional, esse aumento da ordem da aproximação implica em alterar a estrutura de subrotinas. Para evitar esse tipo de problema, é possível definir funções de interpolação de ordem arbitrária que, quando introduzidas na aproximação, não alteram as funções de interpolação anteriormente definidas, da formulação convencional.

Por apresentarem essa importante característica, essas funções de interpolação de ordem arbitrária, que alteram a ordem do polinômio de forma hierárquica, são chamadas de funções de interpolação hierárquicas. Essas funções apresentam valor nulo nos pontos nodais e assumem valores diferentes de zero nos outros pontos. Dessa forma, para funções hierárquicas de ordem superior que a

ordem da função convencional, suas incógnitas correspondentes deixarão de ter o significado de variável física nodal da função convencional.

A formulação hierárquica do método dos elementos finitos (MEFH) difere da formulação convencional, devido ao emprego de funções de interpolação hierárquicas de grau arbitrário (ZIENKIEWICZ et. al., 1983). Essas funções são introduzidas nos elementos principalmente com o objetivo de permitir refino na solução obtida pelo método convencional dos elementos finitos, sem causar modificações na matriz de rigidez gerada pela formulação convencional. Em problemas de elasticidade, a formulação hierárquica consiste na introdução de novos modos de deformação, através do aumento do número de parâmetros hierárquicos, usados na interpolação da variável física (ZIENKIEWICZ et. al., 1983).

O MEF na sua forma mais tradicional utiliza polinômios como funções de aproximação, como por exemplo polinômio de Lagrange. Isso porque esses polinômios são relativamente fáceis de construir e respeitam a condição do MEF, que facilita a aplicação de condições de contorno e o processamento de quantidades nodais. Entretanto, os polinômios de Lagrange de ordem inferior são diferentes dos polinômios de Lagrange de ordem superior, fato que dificulta a implementação, exigindo que todos os polinômios sejam obtidos novamente.

A ideia do MEFH é fazer uso dos espaços de aproximação que sejam hierárquicos. Em outras palavras, ao se aumentar a ordem da aproximação de n para $n+1$, as funções consideradas no nível n não se alteram.

A construção de espaços de aproximação hierárquicos polinomiais foi descrita em detalhes por Solín *et al.* (2004). Nesse caso, são empregados os polinômios de Lobatto, ou de Kernel, ou de Legendre, em vez dos polinômios de Lagrange como funções de aproximação locais. Assim, construir espaços de aproximação hierárquicos, passa a ser uma forma eficaz.

Para os problemas que envolvem flexão (vigas de Euler-Bernoulli e placas submetidas à flexão) existem três abordagens distintas. A primeira abordagem consiste em gerar espaços de aproximação hierárquicos que sejam polinomiais. Essa abordagem é descrita por Bardell (1991).

Outra possibilidade, descrita por Beslin e Nicolas (1997), consiste em utilizar funções trigonométricas, por ocasionarem menores erros de truncamento e serem mais fáceis de obter, que sejam semelhantes às funções polinomiais, mas que possuam melhores características para a manipulação numérica.

A terceira possibilidade (HOUMAT, 1997 e RIBEIRO, 2001) combina funções polinomiais com funções trigonométricas. Os resultados obtidos por Beslin e Nicolas (1997) e Houmat (1997) mostram que, quando são utilizadas aproximações de ordem alta, a aplicação de funções trigonométricas é vantajosa. Porém, os estimadores de erros obtidos para o MEF polinomial não são válidos nesse caso, o que torna a abordagem menos formal do ponto de vista matemático, sujeito, portanto, a novas investigações científicas.

Na formulação convencional do MEF, utilizam-se como funções de interpolação os polinômios de Lagrange para problemas de segunda ordem, e os polinômios de Hermite para problemas de quarta ordem. Portanto, as funções de enriquecimento devem atender a essa necessidade de serem contínuas nas derivadas de alta ordem para terem efeito de enriquecimento. As funções de Lobatto e de Bardell, ambas utilizadas neste trabalho, são descritas a seguir. As funções de Lobatto, obtidas a partir da integral do polinômio de Legendre, são adotadas para o enriquecimento de deslocamentos em barras, problemas de segunda ordem, enquanto as funções de Bardell são utilizadas para vigas de Euler – Bernoulli, problema de quarta ordem, que apresentam, graus de liberdade, de deslocamentos transversais e rotação [(ARNDT, 2009); (TORII, 2012)].

Para efeito de enriquecimento na captura da passagem de ondas de deslocamentos, é necessário adotar função de enriquecimento com grau superior em relação às funções de interpolações convencionais. Entretanto, esse contexto não é suficiente para a captura com precisão da passagem de ondas de tensões dado que a formulação de MEF adotada neste trabalho é de deslocamento, a menos que uma malha refina é adotada. Isso porque a deformação é determinada pela derivada de deslocamento. As funções de interpolação linear do MEF convencional são utilizadas para determinar deslocamentos, entretanto, muitas vezes não apresentam continuidade na determinação de deformações. No caso do elemento quadrático, as funções de interpolação já geram tensões contínuas. Para aprimorar os resultados do elemento com funções de interpolação linear, de tal modo que não se degradem resultados de deslocamentos, e ao mesmo tempo, proporcionem enriquecimento na determinação de deformações, é necessário adotar funções de enriquecimento capazes de satisfazer essa consideração.

Em seguida, funções de enriquecimento hierárquicas adotadas neste trabalho serão apresentadas.

Funções de Lobatto no domínio $x = [-1, 1]$ (SOLIN et. al. 2004) são:

$$l_0(x) = \frac{1-x}{2} \quad (4.1a)$$

$$l_1(x) = \frac{x+1}{2} \quad (4.1b)$$

$$l_2(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{2}} (x^2 - 1) \quad (4.1c)$$

$$l_3(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} (x^2 - 1)x \quad (4.1d)$$

$$l_4(x) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{7}{2}} (x^2 - 1)(5x^2 - 1) \quad (4.1e)$$

$$l_5(x) = \frac{1}{8} \sqrt{\frac{9}{2}} (x^2 - 1)(7x^2 - 3)x \quad (4.1f)$$

$$l_6(x) = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{11}{2}} (x^2 - 1)(21x^4 - 14x^2 + 1) \quad (4.1g)$$

$$l_7(x) = \frac{1}{16} \sqrt{\frac{13}{2}} (x^2 - 1)(33x^4 - 30x^2 + 5)x \quad (4.1h)$$

$$l_8(x) = \frac{1}{128} \sqrt{\frac{15}{2}} (x^2 - 1)(429x^6 - 495x^4 + 135x^2 - 5) \quad (4.1i)$$

$$l_9(x) = \frac{1}{128} \sqrt{\frac{17}{2}} (x^2 - 1)(715x^6 - 1001x^4 + 385x^2 - 35)x \quad (4.1j)$$

$$l_{10}(x) = \frac{1}{256} \sqrt{\frac{19}{2}} (x^2 - 1)(2431x^8 - 4004x^6 + 2002x^4 - 308x^2 + 7) \quad (4.1k)$$

Todas as funções de Lobatto assumem valores nulos nos pontos nodais. Por isso, são utilizadas tanto para formulação de barra quanto para elemento quadrilateral. Para formulação do elemento de barra, as funções (4.1a) e (4.1b) são funções conhecidas de interpolação do MEF convencional. A partir disso, as funções (4.1c) - (4.1k) são funções de enriquecimento.

Polinômio de Bardell no domínio $x = [-1, 1]$ (BARDELL, 1991) são:

$$l_1 = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \quad (4.2a)$$

$$l_2 = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} \quad (4.2b)$$

$$l_3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x + \frac{1}{8} \quad (4.2c)$$

$$l_4 = \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{8}x - \frac{1}{8} \quad (4.2d)$$

$$l_5 = \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8} \quad (4.2e)$$

$$l_6 = \frac{1}{8}x^5 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{8}x \quad (4.2f)$$

$$l_7 = \frac{7}{48}x^6 - \frac{5}{16}x^4 + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{48} \quad (4.2g)$$

$$l_8 = \frac{3}{16}x^7 - \frac{7}{16}x^5 + \frac{5}{16}x^3 - \frac{1}{16}x \quad (4.2h)$$

$$l_9 = \frac{33}{128}x^8 - \frac{21}{32}x^6 + \frac{35}{64}x^4 - \frac{5}{32}x^2 + \frac{1}{128} \quad (4.2i)$$

$$l_{10} = \frac{143}{384}x^9 - \frac{33}{32}x^7 + \frac{63}{64}x^5 - \frac{35}{96}x^3 + \frac{5}{128}x \quad (4.2j)$$

$$l_{11} = \frac{143}{256}x^{10} - \frac{429}{256}x^8 + \frac{231}{128}x^6 - \frac{105}{128}x^4 + \frac{35}{256}x^2 - \frac{1}{256} \quad (4.2k)$$

$$l_{12} = \frac{221}{256}x^{11} - \frac{715}{256}x^9 + \frac{429}{128}x^7 - \frac{231}{128}x^5 + \frac{105}{256}x^3 - \frac{7}{256}x \quad (4.2l)$$

As funções hierárquicas apresentadas por Bardell (1991) foram obtidas a partir dos polinômios de Legendre. As funções (4.2a- d) apresentam valores não nulos nos pontos nodais, -1 e 1. Além disso, são polinômios de terceiro grau. Para o caso de viga de Euler – Bernoulli, que necessita da derivada de ordem elevada na sua formulação matemática para obter matriz de rigidez, as funções (4.2a-d) são da formulação convencional, funções de Hermite, e foram adotadas como funções convencionais. Apesar de nulas nos pontos nodais, são funções lineares após a segunda derivada. Neste trabalho, para garantir um enriquecimento com polinômio de grau mínimo de segunda ordem, utilizam-se, portanto, funções de (4.2e) adiante.

4.2 Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG)

Esta seção apresenta conceitos fundamentais para o desenvolvimento de formulações enriquecidas. Os conceitos foram apresentados inicialmente por Melenk

e Babuska (1996a) como Método dos Elementos Finitos de Partição de Unidade, posteriormente por Barros (2002), Arndt (2009) e Torii (2012).

O Método dos Elementos Finitos de Partição de Unidade (MPU) apresentado por Melenk e Babuska (1996a) serviu como fundamento para o desenvolvimento dos métodos de solução de problema de valor de contorno, mais especificamente o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). O MEFG, segundo Barros (2002), foi proposto de forma independente por:

- Babuska e colegas (1997), sob a denominação de método dos elementos finitos especiais, e como Método Partição de Unidade.
- Duarte e Oden (1996), como Método de nuvens hp , e por Oden et al. (1998), como nova opção de método de nuvens hp .

Seu emprego sob a denominação atual de Método dos Elementos Finitos Generalizados surge, contudo, pela primeira vez em Melenk (1995, *apud* BARROS, 2002).

A estratégia utilizada no MEFG consiste em empregar as funções na forma do MEF como PU. Para os problemas de elasticidade plana, por exemplo, o MEF convencional emprega as funções Lagrangianas bilineares. O domínio original do elemento é então enriquecido pelo método das nuvens hp [(BARROS, 2002); (TORII, 2012)].

Neste trabalho, optou-se por denominar como MPU a metodologia de obtenção de funções de enriquecimentos locais a partir de uma PU e funções de base que representem o fenômeno estudado. Já o termo MEFG é reservado para o caso em que as funções obtidas com o MPU são acrescentadas naquelas obtidas com o MEF polinomial padrão. O MPU pode ser visto como um método alternativo ao MEF para gerar espaços de aproximação com propriedades de conformidade e regularidade quaisquer.

A formulação do MPU é apresentada brevemente abaixo, de acordo com Babuska e Melenk (1997):

Definição 4.1 (Partição de unidade): Seja $\Omega \subset R^n$ um conjunto aberto, $\{\Omega_i\}$ uma cobertura aberta de Ω satisfazendo uma condição de sobreposição ponto a ponto.

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \Omega \quad \text{card}\{i \mid x \in \Omega_i\} \leq M \quad (4.3)$$

Seja $\{\varphi_i\}$ uma partição da unidade Lipschitziana subordinada à cobertura $\{\Omega_i\}$ satisfazendo:

$$\text{Suporte}(\varphi_i) \subset \text{fechamento}(\Omega_i) \quad \forall_i, \quad (4.4)$$

$$\sum_i \varphi_i = 1 \text{ em } \Omega, \quad (4.5)$$

$$\|\varphi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_\infty, \quad (4.6)$$

$$\|\nabla \varphi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C_g}{\text{diam}\Omega_i}, \quad (4.7)$$

onde C_∞ e C_g são duas constantes. Então $\{\varphi_i\}$ é chamada uma PU (M, C_∞, C_g) subordinada a uma cobertura $\{\Omega_i\}$. A PU $\{\varphi_i\}$ possui grau $m \in \mathbb{N}_0$ se $\{\varphi_i\} \subset C^m(\mathbb{R}^N)$. Os subdomínios $\{\Omega_i\}$ são chamados subcoberturas (Melenk & Babuska, 1996a).

Na Definição (4.1), a constante M da equação (4.3) controla o numero de subcoberturas que podem se sobreporem em um mesmo ponto dentro do domínio do problema Ω . A equação (4.4) indica que as funções φ_i devem ser não nulas apenas dentro da subcobertura às quais estão vinculadas. A equação (4.5) evidencia a característica mais marcante da PU, o fato de que as funções φ_i que a compõem devem resultar na unidade quando somadas. Por fim, a equação (4.6) e a equação (4.7) indicam que as funções φ_i devem ser contínuas e possuir derivadas contínuas.

Com essas definições de PU, é possível apresentar a definição do espaço de aproximação do MPU.

Definição 4.2 (Espaço MPU). Seja $\{\Omega_i\}$ uma cobertura aberta de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e seja $\{\varphi_i\}$ uma partição da unidade (M, C_∞, C_g) subordinada a $\{\Omega_i\}$. Seja um dado espaço $V_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega)$. Então o espaço

$$V_{MPU} = \sum_i \varphi_i V_i = \left\{ \sum_i \varphi_i v_i \mid v_i \in V_i \right\} \subset H^1(\Omega) \quad (4.8)$$

é chamado de espaço do MPU. O espaço do MPU possui grau m se $V_{MPU} \subset C^m(\Omega)$. Os espaços V_i são chamados aqui de espaços de base (TORII, 2012).

O seguinte teorema, de Melenk e Babuska (1996), apresenta as propriedades de aproximação de um espaço MPU (TORII, 2012).

Teorema 4.1 (Aproximação utilizando o espaço MPU). Seja um dado $\Omega \subset R^n$. Sejam $\{\Omega_i\}$, $\{\varphi_i\}$ e $\{V_i\}$ como nas Definições 4.1 e 4.2. Seja $u \in H^1(\Omega)$ a função a ser aproximada. Assumindo que os espaços de aproximação locais V_i tenham as seguintes propriedades: em cada subcobertura $\Omega_i \cap \Omega$, u pode ser aproximado por uma função $v_i \in V_i$ tal que:

$$\|u - v_i\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \epsilon_1(i), \quad (4.9)$$

$$\|\nabla(u - v_i)\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \epsilon_2(i) \quad (4.10)$$

Então a função

$$u_{ap} = \sum_i \varphi_i v_i \in V \subset H^1(\Omega) \quad (4.11)$$

satisfaz

$$\|u - u_{ap}\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{M} C_\infty \left(\sum_i \epsilon_1^2(i) \right)^{1/2}, \quad (4.12)$$

$$\|\nabla(u - u_{ap})\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2M} \left(\sum_i \left(\frac{C_s}{diam\Omega_i} \right)^2 \epsilon_1^2(i) + C_\infty^2 \epsilon_2^2(i) \right)^{1/2} \quad (4.13)$$

O teorema 4.1 mostra que na verdade o espaço MPU é semelhante aos espaços de base V_i . Da equação (4.12) pode-se notar que a diferença entre a função u_{ap} e a função original u será delimitada pelas diferenças individuais das funções $v_i \in V_i$ utilizadas. O mesmo ocorre para a gradiente da função aproximada,

como mostrado na equação (4.13). Consequentemente, é de se esperar que a utilização do espaço MPU seja capaz de obter resultados semelhantes aos que seriam obtidos ao se utilizar o espaço de aproximação local V_i , desde que $v_i \in V_i$ sejam boas aproximações para u (BARROS, 2002).

A vantagem de se utilizar o espaço MPU está nas funções $v_i \in V_i$ não polinomiais que sejam representativas para o fenômeno a ser estudado. No caso de fratura, a função poderia ser previamente conhecida com teoria. Ou, no caso de análise dinâmica, a função pode ser adotada como a função de deslocamento no tempo. Isto permite que uma gama maior de espaços de aproximação locais possa ser utilizada sem alterar as premissas básicas do MEF.

Um exemplo de uma PU são as funções de forma utilizadas no MEF Lagrangeano, em que nuvens são formadas por conjunto de elementos finitos que concorrem nos pontos nodais (Barros, 2002). Isso pode ser visto ao se analisar essas funções para polinômios de Lagrange de ordem $n=1$. Neste caso, cada função de aproximação global ϕ_i é na verdade uma partição da unidade φ_i da definição 4.1. Percebe-se que a condição imposta pela equação (4.5) é respeitada, pois realmente a soma de todas as funções ϕ_i resulta na unidade em todo o domínio. Além disso, as condições impostas pela equação (4.6) e pela equação (4.7) também são respeitadas, uma vez que tanto as funções ϕ_i como suas derivadas de primeira ordem são contínuas. Basta verificar a condição imposta pela equação (4.4) e definir as subcoberturas Ω_i .

Na figura 4.1 é possível observar que cada função ϕ_i é definida dentro de dois elementos finitos adjacentes, a não ser no caso da função ϕ_1 e da função ϕ_{N_e+1} . A função ϕ_2 , por exemplo, é definida na união do primeiro com o segundo elemento finito da figura 4.1. Portanto, de forma geral, cada subcobertura como apresentada na definição 4.1 é dada pela união de dois elementos finitos vizinhos. Consequentemente, a PU dada pelas funções lineares do MEF Lagrangiano é como a mostrada na figura 4.1, em que cada elemento finito é definido na interseção de duas subcoberturas $\{\Omega_i\}$. O número de subcoberturas que se sobrepõem em cada elemento finito é 2 e, portanto, nesse caso tem-se M como definido na equação (4.3) igual a 2. Ainda na figura 4.1, é possível observar que a PU dada pelas funções lineares do MEF respeita também a equação (4.4). Isso porque o suporte de cada

PU φ_i está contido no fechamento de cada subcobertura Ω_i , ou seja, φ_i é diferente de zero apenas dentro de Ω_i . É possível também construir uma PU baseada em polinômios de Lagrange de ordem n maior que 1, o que caracteriza elemento convencional de ordem superior no MEF [(BARROS, 2002); (TORII, 2012)].

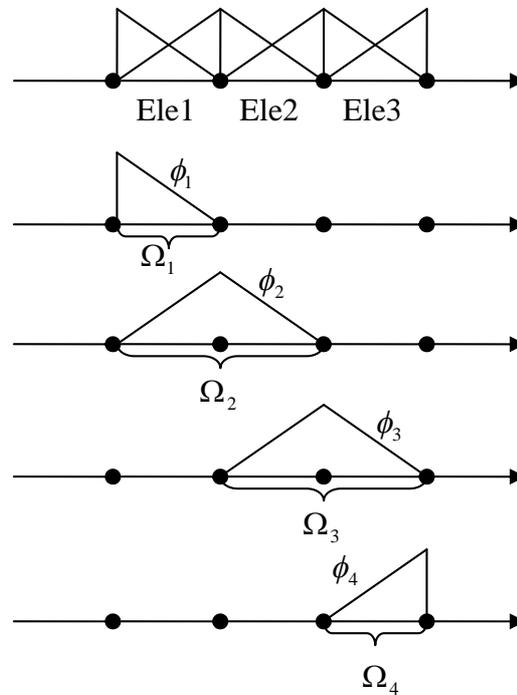


Figura 4.1. Esquema de partição de unidade.

O enriquecimento feito de acordo com o método das nuvens hp permite que espaço do domínio do elemento seja enriquecido, como, por exemplo, pela multiplicação da função base de cada nó, pertencente ao elemento, por um novo conjunto de funções linearmente independentes.

As funções γ_{ji} , ou funções base, podem ser quaisquer, desde que atendam às condições estabelecidas pelas definições 4.1 e 4.2. Ou, até mesmo, podem ser definidas a partir de solução analítica conhecida *a priori*. São aproximações locais que devem representar bem a solução sobre o suporte a elas associado. Assim, é possível utilizar a PU para gerar espaços de aproximação local, em que funções podem ser reproduzidas em cada elemento como parte da aproximação global (BARROS, 2002).

A generalização dessa formulação para R^2 pode ser entendida como sendo uma combinação de função de base e função de PU. Sendo que a PU é de ordem 1 (função bilinear), geradora de uma aproximação C^0 , e a função base é uma função especial arbitrária. A combinação dessas duas funções, de base e de PU, proporciona a função de enriquecimento. Essa combinação apresenta as características aproximadoras da função especial, ao mesmo tempo em que incorpora o suporte compacto da PU. Assim, a aproximação global, obtida em um dado elemento pela combinação das funções de enriquecimento com as funções convencionais do MEF, relativas a cada nó, é construída sem penalizar a continuidade (no caso do tipo C^0) entre os elementos, que, portanto, se mantêm conformes (BARROS, 2002).

Assim,

$$\tilde{u}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^N \phi_j(\vec{x}) \left\{ u_j + \sum_{i=1}^{q_j} \gamma_{ji}(\vec{x}) b_{ji} \right\} = \Phi^T U \quad (4.14)$$

em que:

$$U^T \stackrel{def}{=} [u_1 \quad b_{11} \quad \dots \quad b_{1q_1} \quad \dots \quad u_N \quad b_{N1} \quad \dots \quad b_{Nq_N}] \quad (4.15)$$

$$\Phi^T \stackrel{def}{=} [\phi_1 \quad \gamma_{11}\phi_1 \quad \dots \quad \gamma_{1q_1}\phi_1 \quad \dots \quad \phi_N \quad \gamma_{N1}\phi_N \quad \dots \quad \gamma_{Nq_N}\phi_N] \quad (4.16)$$

sendo ϕ_j as funções de partição de unidade, u_j o deslocamento nodal, q_j representa o número de funções de enriquecimento utilizadas, γ_{ji} as funções de enriquecimento, ou funções base, e b_{ji} o grau de liberdade do campo.

Um problema inerente dessa estratégia de enriquecimento é a possibilidade de se formar um conjunto de funções linearmente dependentes (DUARTE *et. al.*, 2000). Isso ocorre quando se enriquece com monômios de PU polinomial. O mesmo não acontece para o Método das nuvens *hp*, em que a PU é construída por funções não polinomiais ou polinomiais por setores.

A obtenção de uma matriz de rigidez singular é um risco inerente do MEFG. Entretanto, o MEFG proporciona a possibilidade de se empregarem funções

analíticas, já conhecidas na solução, como sendo funções de enriquecimento. Uma vez introduzidas na aproximação, conforme o tipo de aplicação desejada pode fornecer resultados precisos. Desse modo surge a possibilidade de se empregar o MEFG, de maneira eficiente, em problemas em que o campo de tensões apresente singularidades, como no caso de meios com presença de descontinuidades ou propagação de trincas.

Neste trabalho, são consideradas - tanto para análise de barras e vigas quanto para enriquecimento de elementos quadrilaterais para problema de Estado Plano de Tensão. Algumas das funções de enriquecimento propostas por Torii (2012).

Função de Torii (2012), adaptada de Arndt (2009) para deslocamento longitudinal:

$$v_{1j} = \text{sen}\left(\frac{\beta_j(x+1)}{2}\right) \quad (4.17a)$$

$$v_{2j} = \cos\left(\frac{\beta_j(x+1)}{2}\right) - 1 \quad (4.17b)$$

$$v_{3j} = \text{sen}\left(\frac{\beta_j(x-1)}{2}\right) \quad (4.17c)$$

$$v_{4j} = \cos\left(\frac{\beta_j(x-1)}{2}\right) - 1 \quad (4.17d)$$

As funções (4.17a-d) relacionam-se ao enriquecimento de primeiro nível.

Para o enriquecimento de problema viga, Torii (2012) propôs as seguintes funções:

$$v_{1j} = \cos\left(\beta_j \frac{\xi+1}{2}\right) - 1 \quad (4.18a)$$

$$v_{2j} = \cos\left(\beta_j \frac{\xi-1}{2}\right) - 1 \quad (4.18b)$$

4.3 Enriquecimentos dos elementos quadrilaterais

De acordo com Solin *et. al.* (2004), para enriquecimento hierárquico de um elemento quadrilateral de ordem arbitrária κ_q tem seu domínio definido como:

$$\kappa_q = \{r, s \in R^2 ; -1 < r, s < 1\}$$

em que r , e s representam coordenadas naturais do elemento, e q indica elemento quadrilateral.

Para atender à condição de continuidade e definir a função de forma no espaço H^1 , é necessária a condição de continuidade para funções de aproximação, entre elas as funções de MEF convencional e as funções de enriquecimento. Essa condição estabelece um critério a ser atendido na seleção das funções de enriquecimento. Em outras palavras, existe um grau mínimo necessário de aproximação tanto nos vértices quanto nos contornos. Somente as funções que assumem inteiramente valores nulos nos contornos estão livres dessa imposição. Portanto, a base hierárquica para funções de interpolação é composta pelas funções de vértices, de contorno e de campo.

Para os vértices de 1 até 4, essas funções devem assumir valores unitários no seu respectivo vértice bem como valores nulos nos outros. As equações (4.19a-d) estabelecem as funções de interpolação bilinear.

$$\phi_q^{v1}(r, s) = l_0(r) l_0(s) \quad (4.19a)$$

$$\phi_q^{v2}(r, s) = l_1(r) l_0(s) \quad (4.19b)$$

$$\phi_q^{v3}(r, s) = l_1(r) l_1(s) \quad (4.19c)$$

$$\phi_q^{v4}(r, s) = l_0(r) l_1(s) \quad (4.19d)$$

em que a função l_1 e l_0 são definidas pelas equações (4.1a) e (4.1b).

De acordo com Solin *et. al.* (2004), para compor função de enriquecimento, o grau de polinômio de funções de contorno e de campo deve obedecer à regra mínima do espaço H^1 , tal que a ordem polinomial da função de enriquecimento do

contorno deve ser menor ou igual à ordem polinomial da função de enriquecimento do campo. Portanto,

$$p^{e1}, p^{e2} \leq p^{b,2} \text{ e } p^{e3}, p^{e4} \leq p^{b,1}$$

em que p^{e1} , p^{e2} , p^{e3} e p^{e4} dizem respeito à ordem polinomial das funções de enriquecimento do contorno, enquanto $p^{b,1}$ e $p^{b,2}$ são das funções do campo.

Assim, as funções de contorno são dadas pelas equações (4.20a) – (4.20d):

$$\phi_{k,q}^{e1}(r, s) = l_0(r)l_k(s), \quad 2 \leq k \leq p^{e1} \quad (4.20a)$$

$$\phi_{k,q}^{e2}(r, s) = l_1(r)l_k(s), \quad 2 \leq k \leq p^{e2} \quad (4.20b)$$

$$\phi_{k,q}^{e3}(r, s) = l_k(r)l_0(s), \quad 2 \leq k \leq p^{e3} \quad (4.20c)$$

$$\phi_{k,q}^{e4}(r, s) = l_k(r)l_1(s), \quad 2 \leq k \leq p^{e4} \quad (4.20d)$$

e para função de enriquecimento no campo:

$$\phi_{n_1, n_2, q}^b(r, s) = l_{n_1}(r)l_{n_2}(s), \quad 2 \leq n_1 \leq p^{b,1}, \quad 2 \leq n_2 \leq p^{b,2} \quad (4.21)$$

As equações (4.20) – (4.21) passam a gerar as funções de interpolação para os elementos – tanto para o MEFH. Essa estratégia é válida para enriquecimento hierárquico e generalizado a partir do elemento quadrilateral de quatro nós. MEFHs e MEFGs são, por sua vez, utilizadas para denominar formulações enriquecidas feitas a partir do elemento *Serendipity*. Este trabalho procurou utilizar o menor grau de enriquecimento para explorar a capacidade de solução dos métodos. As funções de interpolação e superfícies geradas são apresentadas logo abaixo.

Para o MEFH, as funções de interpolação (4.22a) – (4.22d) são as funções do MEF convencional; (4.22e) – (4.22h) são funções de enriquecimento de contorno; e (4.22i) é a função de enriquecimento do campo. As figuras 4.2(a) – (i) mostram as superfícies geradas por essas equações.

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) \quad (4.22a)$$

$$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) \quad (4.22b)$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) \quad (4.22c)$$

$$h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \quad (4.22d)$$

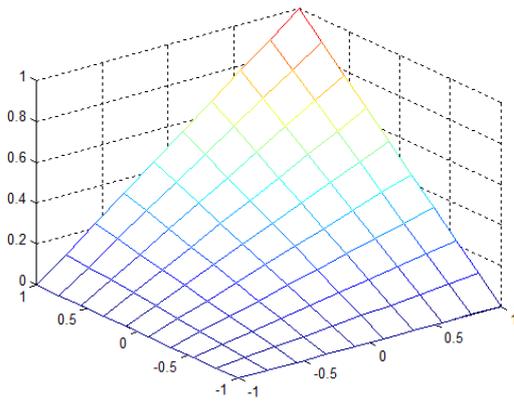
$$h_5 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}(r^2-1)(1+s) \quad (4.22e)$$

$$h_6 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}(s^2-1)(1-r) \quad (4.22f)$$

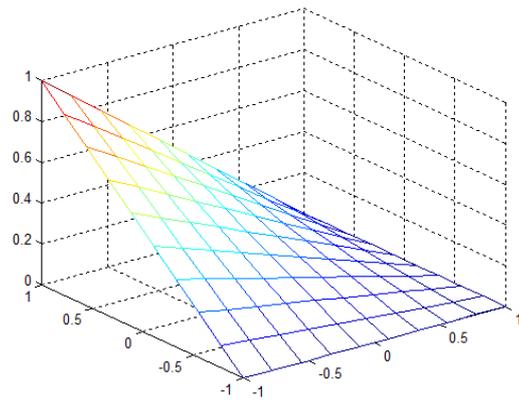
$$h_7 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}(r^2-1)(1-s) \quad (4.22g)$$

$$h_8 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}}(r^2-1)(1+r) \quad (4.22h)$$

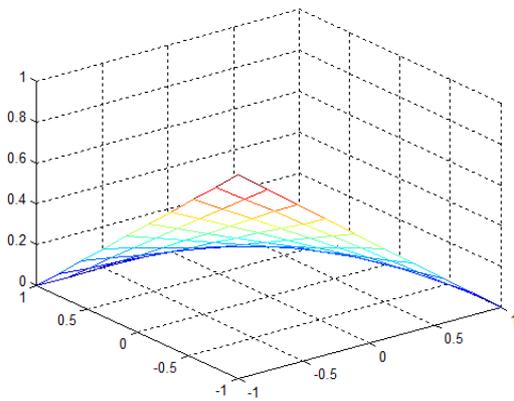
$$h_9 = \frac{3}{8}(r^2-1)(s^2-1) \quad (4.22i)$$



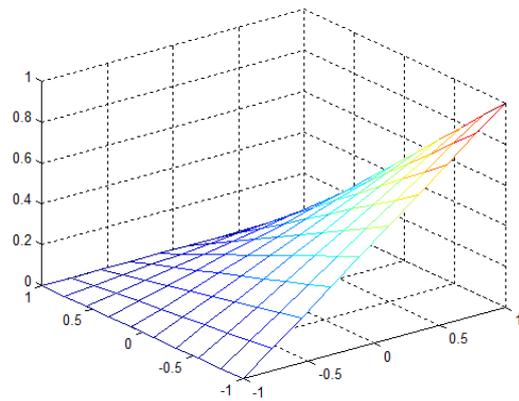
(a). Superfície de MEFH h_1 .



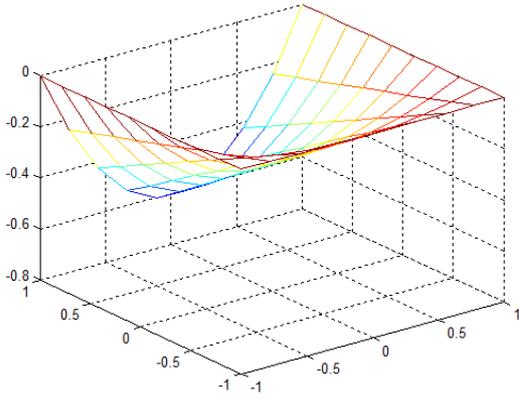
(b). Superfície de MEFH h_2 .



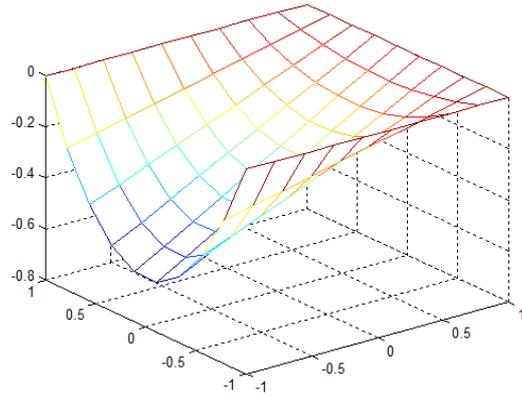
(c). Superfície de MEFH h_3 .



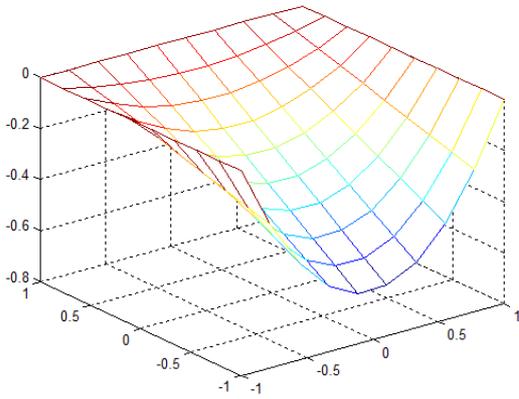
(d). Superfície de MEFH h_4 .



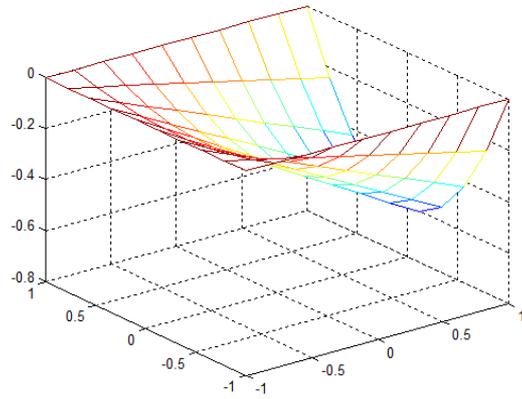
(e). Superfície de MEFH h_5 .



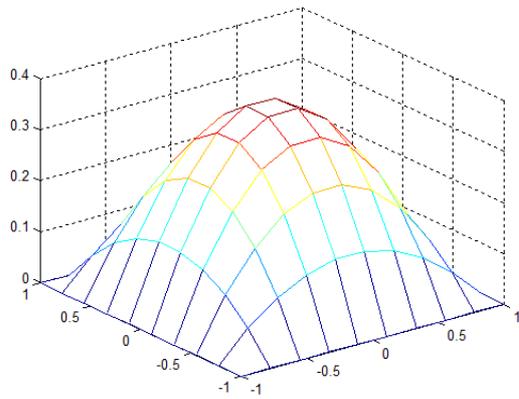
(f). Superfície de MEFH h_6 .



(g). Superfície de MEFH h_7 .



(h). Superfície de MEFH h_8 .

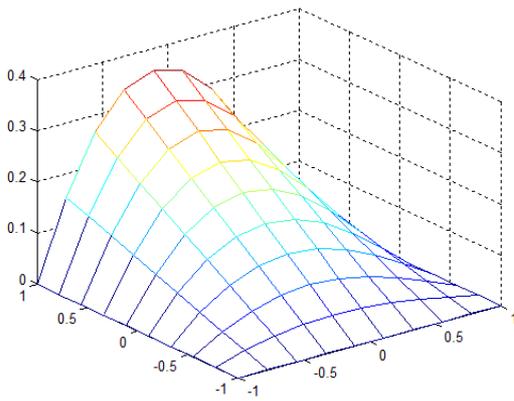


(i). Superfície de MEFH h_9 .

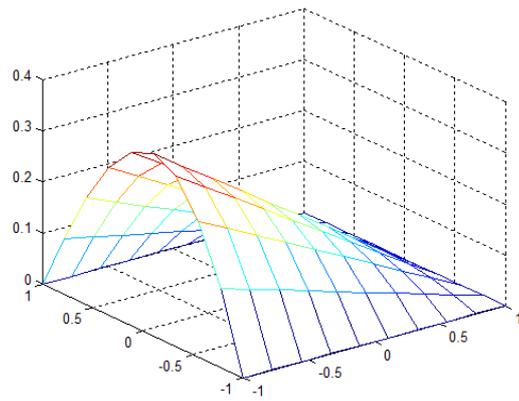
Figura 4.2. Superfície de MEFH de funções de Lobatto.

Um aspecto importante a ser atendido pelas funções de enriquecimento de contorno diz respeito à continuidade na fronteira onde ocorre coincidência de funções matemáticas de dois elementos vizinhos, como mostram as figuras 4.2 (e) e 4.2 (g).

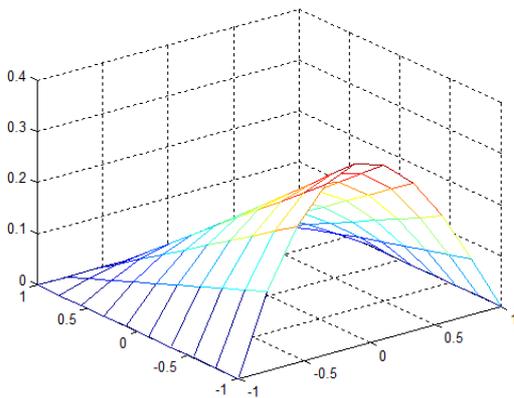
Para o enriquecimento de elementos finitos generalizados, são adotadas duas estratégias de enriquecimento. A primeira estratégia emprega-se o mesmo desenvolvimento da formulação hierárquica, e consiste no enriquecimento pelo contorno e pelo campo, que precisa atender à condição de continuidade na fronteira entre elementos vizinhos, conforme trabalho apresentado por Torii (2012). Com esta estratégia, segundo Torii (2012), é necessário empregar valores de $\beta_j \geq \pi/2$ para evitar sistemas de equações mal condicionados. Porém, também foi observado pelo mesmo autor que o refino do tipo p, quando as funções foram geradas para diversos valores de β_j , ocasionou sistemas mal condicionados. A segunda estratégia se faz pelo enriquecimento apenas do campo. Tanto a primeira quanto a segunda estratégia seguem a equação (4.14). Os resultados de análise com base nas duas formas são apresentados no próximo capítulo.



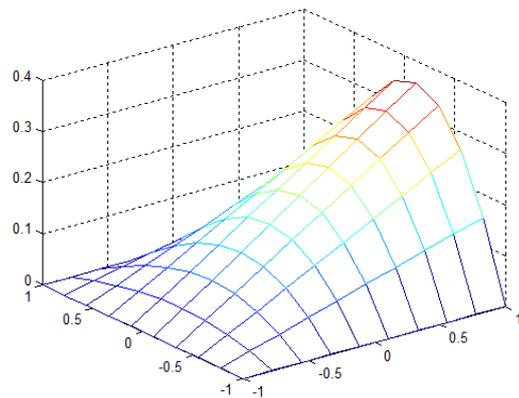
(a). Superfície de MEFG h_5 .



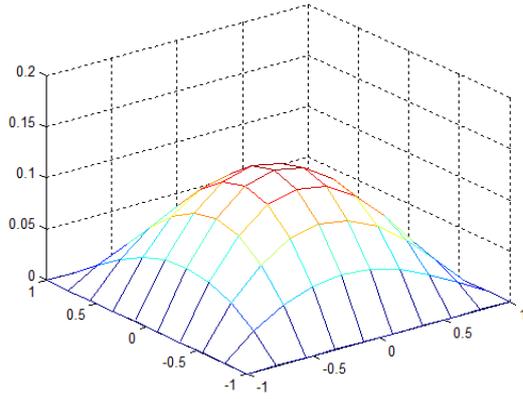
(b). Superfície de MEFG h_6 .



(c). Superfície de MEFG h_7 .



(d). Superfície de MEFG h_8 .



(e). Superfície de MEFG h_9 .

Figura 4.3. Superfícies de MEFG, primeiro nível de enriquecimento.

As funções de interpolação nos vértices são as mesmas das equações (4.22a) – (4.22d). Para efeito de apresentação, apenas funções de enriquecimento de alguns níveis são mostradas. O enriquecimento pelo contorno é apresentado pelas equações (4.23a) – (4.23d) e pelo campo é a equação (4.23e), de acordo com Torii (2012). Com valor de β_j igual a π , as figuras 4.3(a) – (e) mostram as superfícies geradas pelas equações (4.23a) – (4.23e):

$$h_5 = -\frac{1}{4}(r-1)(1+s)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+r)\right) \quad (4.23a)$$

$$h_6 = \frac{1}{4}(r-1)(s-1)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+s)\right) \quad (4.23b)$$

$$h_7 = \frac{1}{4}(r-1)(s-1)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+r)\right) \quad (4.23c)$$

$$h_8 = -\frac{1}{4}(1+r)(s-1)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+s)\right) \quad (4.23d)$$

$$h_9 = \frac{1}{4}(r-1)(s-1)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+r)\right)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+s)\right) \quad (4.23e)$$

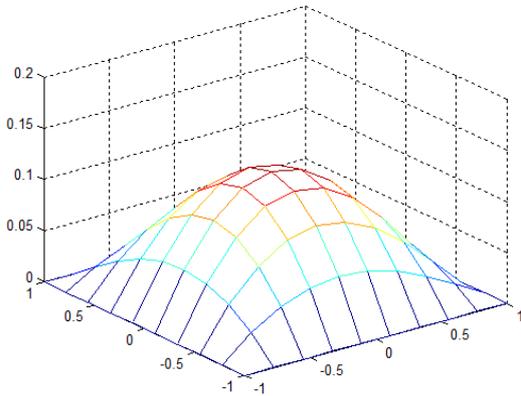
O enriquecimento pelo campo é feito a partir das funções (4.24a) – (4.24d), também propostas por Torii (2012). As figuras 4.4(a) – (d) mostram as superfícies dessas funções com valor de β_j igual a π e dadas por:

$$h_5 = \frac{1}{4}(r-1)(s-1)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+r)\right)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+s)\right) \quad (4.24a)$$

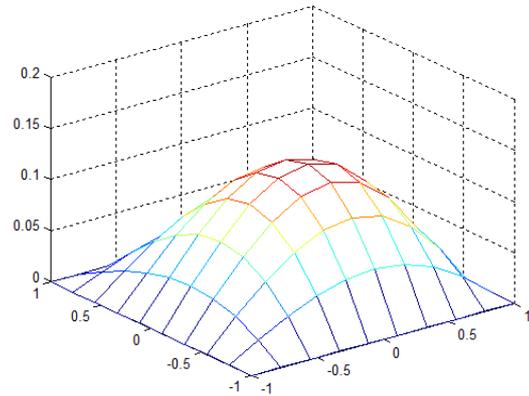
$$h_6 = \frac{1}{4}(1+r)(s-1)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(r-1)\right)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+s)\right) \quad (4.24b)$$

$$h_7 = \frac{1}{4}(r-1)(s+1)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(1+r)\right)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(s-1)\right) \quad (4.24c)$$

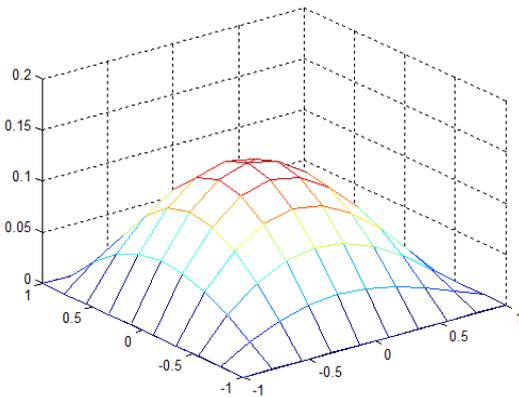
$$h_8 = \frac{1}{4}(1+r)(s+1)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(r-1)\right)\text{sen}\left(\frac{\beta_j}{2}(s-1)\right) \quad (4.24d)$$



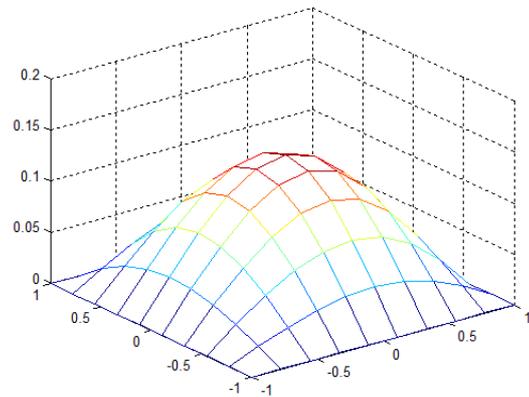
(a). Superfície de MEFG h_5 .



(b). Superfície de MEFG h_6 .



(c). Superfície de MEFG h_7 .



(d). Superfície de MEFG h_8 .

Figura 4.4. Superfícies de MEFG, enriquecimento de campo.

Para fazer enriquecimento hierárquico de um elemento *Serendipity*, o trabalho de Oliveira (1993) é adotado. Em seu estudo, Oliveira (1993) desenvolveu funções hierárquicas para enriquecimento de contorno, uma função em cada lado, como sendo o primeiro nível de enriquecimento. No segundo nível, é acrescentada mais

uma função no contorno, portanto, duas funções em cada lado, mais ainda uma função de enriquecimento no campo. As funções utilizadas por Oliveira (1993) são reproduzidas a seguir. O presente trabalho tese adotou essas mesmas funções para proceder ao enriquecimento hierárquico, MEFHs, que serve como comparação para o enriquecimento generalizado.

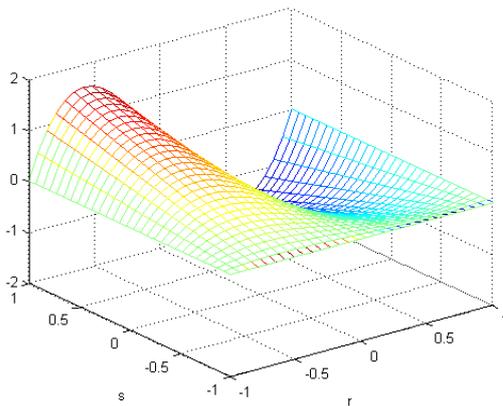
As equações (4.25a) – (4.25d) são de enriquecimento de contorno; as superfícies geradas de cada equação são mostradas nas figuras 4.5 (a) – (d).

$$h_5 = 2(r^3 - r)(1 + s) \quad (4.25a)$$

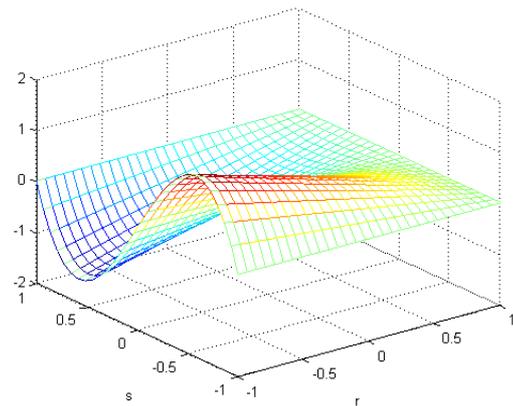
$$h_6 = 2(s^3 - s)(1 - r) \quad (4.25b)$$

$$h_7 = 2(r^3 - r)(1 - s) \quad (4.25c)$$

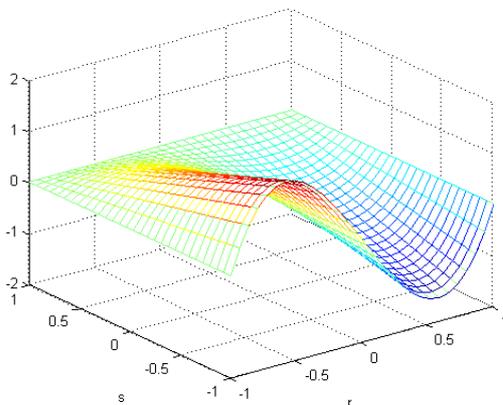
$$h_8 = 2(s^3 - s)(1 + r) \quad (4.25d)$$



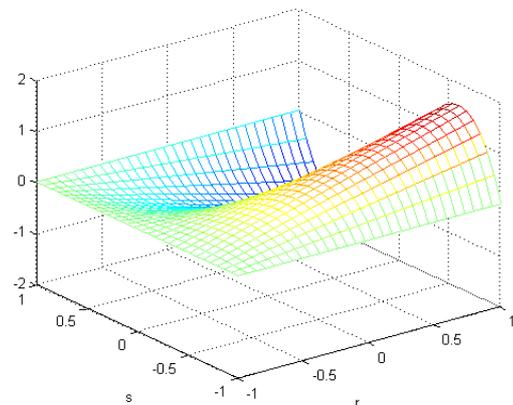
(a). Superfície de MEFHs h_5 .



(b). Superfície de MEFHs h_6 .



(c). Superfície de MEFHs h_7 .



(d). Superfície de MEFHs h_8 .

Figura 4.5. Superfícies de MEFHs, primeiro nível de enriquecimento.

Para enriquecimento de elemento *serendipity*, utilizando-se a formulação de partição de unidade, MEFs, as funções propostas por Arndt (2009) são modificadas de modo a se adequarem ao fato de que o elemento tem quatro nós nos vértices, e outros quatro nós, um em cada aresta. Neste trabalho, a opção por empregar as funções propostas por Arndt (2009) se justifica no fato de que elas são contínuas no domínio do elemento, assim como suas derivadas. Outro aspecto a ser atendido é a necessidade de essas funções assumirem valores nulos nos pontos nodais. Assim, o sentido físico dos resultados nodais não será afetado.

As equações (4.26a) – (4.26d), apresentadas a seguir, mostram as funções propostas nesta tese para o elemento *serendipity*.

$$h_5 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)\text{sen}(\beta_j(1-r)) \quad (4.26a)$$

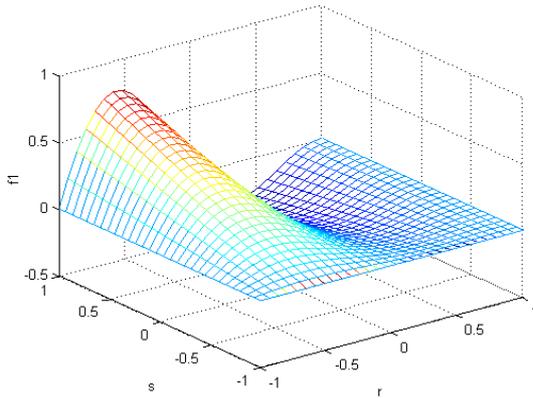
$$h_6 = \frac{1}{4}(r-1)(s-1)\text{sen}(\beta_j(1+s)) \quad (4.26b)$$

$$h_7 = \frac{1}{4}(r-1)(s-1)\text{sen}(\beta_j(1+r)) \quad (4.26c)$$

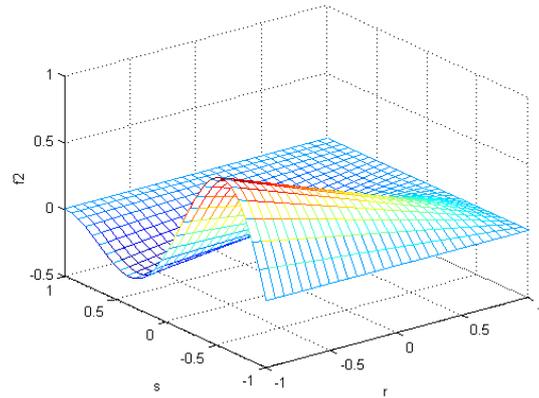
$$h_8 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)\text{sen}(\beta_j(1+s)) \quad (4.26d)$$

para $\beta_j = j\pi ; j = 1, 2, 3, 4, \dots$

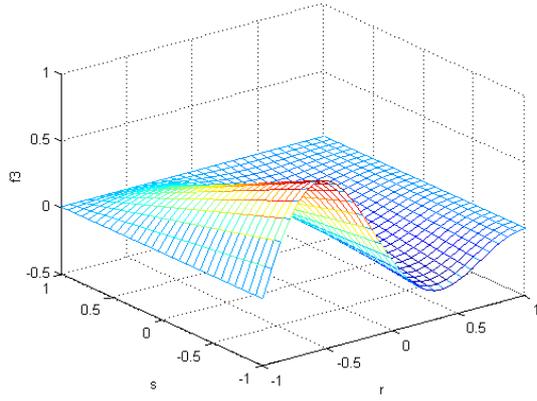
As figuras 4.6 (a) – (d) mostram as superfícies geradas pelas equações propostas, com $\beta_j = \pi$.



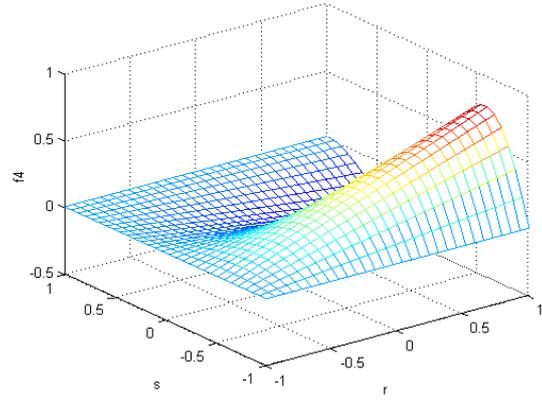
(a). Superfície de MEFs h_5 .



(b). Superfície de MEFs h_6 .



(c). Superfície de MEFs h_7 .



(d). Superfície de MEFs h_8 .

Figura 4.6. Superfícies de MEFs, primeiro nível de enriquecimento.

Considere o enriquecimento de um elemento quadrilateral de quatro nós. Segundo Solin et. al. (2004), as variáveis a serem determinadas são expressas como sendo uma somatória de funções convencionais com funções de enriquecimento no contorno e no campo:

$$\tilde{u}_e(r, s) = \tilde{u}_e^v(r, s) + \tilde{u}_e^c(r, s) + \tilde{u}_e^b(r, s) \quad (4.27)$$

sendo $\tilde{u}_e(r, s)$ a função de aproximação na coordenada local do elemento, \tilde{u}_e^v variáveis nodais situadas nos vértices, \tilde{u}_e^c variáveis situadas nos contornos e por último, \tilde{u}_e^b variáveis situadas no campo.

A \tilde{u}_e^v é determinada pelas funções de interpolação convencionais, e \tilde{u}_e^c é determinada por:

$$\tilde{u}_e^c = \sum_{j=1}^4 u^{cj}, \text{ sendo } u^{cj} = \sum_{k=2}^{p^{ej}} b_{k,q}^{ej} \phi_{k,q}^{ej} \quad (4.28)$$

e

$$\tilde{u}_e^b = \sum_{n1=2}^{p^{b,1}} \sum_{n2=2}^{p^{b,2}} b_{n1,n2,q}^b \phi_{n1,n2,q}^b \quad (4.29)$$

onde $b_{k,q}^{ej}$ e $b_{n1,n2,q}^b$ indicam variáveis locais geradas em função do enriquecimento e que não desempenham papéis físicos, e são determinados sem desempenhar nenhum significado físico até então conhecido.

A formulação de enriquecimento desenvolvida até então, do elemento quadrilateral, será empregada visando analisar sua robustez e as condições de continuidade. Para esta finalidade, será feita uma análise de autovalores e autovetores a serem determinados a partir de matriz de rigidez e matriz de massa. Essa metodologia é conhecida como uma ferramenta eficiente para verificar a qualidade do elemento. O resultado da análise será apresentado no próximo capítulo.

4.4 Medidor de erro para análise dinâmica

Há grande dificuldade de se encontrar medidor de erros em problemas da dinâmica estrutural. Nesta seção apresenta-se brevemente um medidor de erro proposto por Torii (2012) e que será também empregado em algumas aplicações do presente estudo.

Um medidor de erro procura quantificar o erro entre a solução numérica e uma solução de referência, e serve como uma medida para avaliar se a malha adotada na análise é capaz de determinar um resultado preciso ou não. A formulação de medidor de erro consiste em determinar a diferença entre resultados da solução numérica com a solução analítica e pode ser determinado de diversas formas, como citado em Zienkiewicz (2005) e Bathe (1996). Numa análise dinâmica empregando o MEF baseado em formulações de deslocamentos, a variável adotada para a determinação de erro é o deslocamento. Além disso, dependendo do algoritmo de marcha do tempo, o intervalo de tempo utilizado na análise também desempenha um papel fundamental. Logo, é conveniente desenvolver a formulação do estimador de erro baseada nessas duas variáveis, o deslocamento e o intervalo de tempo. Segundo Torii (2012), o erro pode ser estimado num ponto fixo no domínio de problema pela expressão:

$$erro \approx \sum_{i=1}^n \Delta t \left| u_{analitica}^{(i)} - \tilde{u}^{(i)} \right| \quad (4.30)$$

onde *erro* representa erro a ser estimado, n é a quantidade de passos de tempo adotado na análise, Δt é o intervalo de tempo utilizado na análise, $u_{analitica}^{(i)}$ é a solução analítica, $\tilde{u}^{(i)}$ é a solução do MEF, convencional ou enriquecido.

Esse modelo de medidor de erro será adotado no capítulo 6, para servir como um parâmetro de avaliação de desempenho de formulações convencionais e enriquecidas.

5. DETERMINAÇÃO DE AUTOVALORES E AUTOVETORES NAS VIBRAÇÕES LIVRES PELO ELEMENTO ENRIQUECIDO

Uma das metodologias conhecidas para avaliação da qualidade dos elementos consiste no cálculo de autovalores e autovetores da matriz utilizada. Nos problemas da Mecânica dos Sólidos, os pares de autovalores e autovetores correspondem às frequências naturais e aos modos de vibração respectivamente. A determinação dos pares de autovalores e autovetores é a solução da equação 5.1. Especialmente para uma análise dinâmica, esse teste, via frequências naturais e modos de vibrar, desempenha um papel importante.

$$([K] - \lambda[M])\{n\} = 0 \quad (5.1)$$

No caso dos elementos quadriláteros utilizados neste trabalho, aplicados ao problema do Estado Plano de Tensões, em que cada nó tem dois graus de liberdade, os três primeiros modos de vibrar correspondem aos movimentos de corpo rígido, quando tais movimentos não estão impedidos. Enquanto, os outros três modos subsequentes dizem respeito aos modos de deformação constante.

5.1. Integração numérica no elemento enriquecido

A determinação dos pares de autovalores e autovetores quando envolvem as matrizes de massa e de rigidez de grau de liberdade elevado, torna-se de difícil resolução. Por este motivo, existem vários métodos de solução numérica para auxiliar no cálculo computacional. Neste trabalho, foi adotado o método de iteração inversa para determinar a primeira frequência natural e seu modo correspondente. Em seguida, é aplicado o método de coeficiente de *Rayleigh* para determinar outros pares de autovalores e autovetores.

O método de iteração inversa consiste em se estimar um valor inicial de autovetor para calcular seu autovalor correspondente. A partir do autovalor obtido, é corrigido também o autovetor, e em seguida, o processo iterativo é acionado, até

que o erro apresentado esteja menor que a tolerância previamente estabelecida. No caso deste trabalho, foi considerada uma tolerância de 1×10^{-8} para todos os modos.

O método de coeficiente de *Rayleigh* consiste em aplicar um *shift* na primeira frequência natural determinada para depois inseri-la num processo iterativo. Entretanto, conforme o valor do *shift* dado, a frequência natural determinada pelo método de coeficiente de Rayleigh pode não ser a frequência de modo em sequência, pois, por esse método, o resultado converge sempre para a frequência mais alta e mais próxima. Por esse motivo, este trabalho adotou um algoritmo simples para determinar frequências naturais, desde o primeiro modo até um modo qualquer. Esse algoritmo consiste simplesmente em um processo incremental de valor de *shift*.

A obtenção dos pares de autovalores e autovetores corretos depende do refino da malha e da função de interpolação adotada pelo elemento. Conforme o aumento do número de graus de liberdade na matriz de massa e de rigidez, a determinação fica mais precisa, entretanto, demanda maior esforço computacional nos processos iterativos adotados, mencionados anteriormente.

Uma das vantagens de se utilizar o MEF para análise de estruturas é a sua versatilidade em fornecer resultados satisfatórios em geometrias complexas, mesmo quando envolve malhas distorcidas. Logo, é mais fácil do ponto de vista computacional a integração numérica para determinar a matriz de rigidez e de massa de malhas distorcidas. Neste trabalho, adota-se, portanto, a quadratura de Gauss.

Para se obter matrizes de rigidez e de massa robustas via integração numérica, a quantidade de pontos de integração desempenha um papel fundamental. Diversos esquemas de integração já foram desenvolvidos, entre eles integração completa, integração uniformemente reduzida e integração seletiva reduzida. Várias pesquisas [(HUGHES *et al.*, 1978); (BELYTSCHKO *et al.* 1984 & 1985); (BRIASSOULIS, 1988); (KIM & MIN, 1993)] revelaram que a integração completa pode criar travamento no elemento e, ao se adotar integração reduzida, há risco de se obterem modos espúrios (*hourglass modes*).

O fenômeno de travamento surge quando a energia contribuída pela técnica de integração numérica for muito grande nos modos de deformação mais elevada. Entretanto, os modos espúrios de energia zero do elemento ficam difíceis de controlar quando a energia é pequena (WHITE & ABEL, 1989).

A influência do travamento no elemento pode ser mitigada pela integração reduzida, o que implica em alterar a condição de restrição no elemento, e por consequência, o comportamento do elemento é influenciado pela ordem da integração adotada. Por outro lado, caso a ordem de quadratura seja reduzida de forma inadequada, pode aparecer matriz de rigidez mal condicionada. Por isso, ao se adotar integração reduzida, corre-se o risco de aparecerem modos espúrios. A integração reduzida seletiva (*Selected Reduced Integration*) permite que os elementos analisados sejam livres de travamento e dos modos espúrios (KIM & MIN, 1993) para o caso de elementos convencionais. Não foi visto ainda na literatura, até este momento, se a mesma técnica de integração gera semelhante efeito em elementos enriquecidos.

Os modos espúrios aparecem quando os deslocamentos nodais produzem um campo de deformações nulas em todos os pontos de integração numérica. Nesses modos de energia nula também estão incluídos os modos de movimento do corpo livre. Entretanto, quando os movimentos de corpo livre estiverem impedidos e, mesmo assim, aparecerem os modos espúrios, então a matriz de rigidez não é robusta. Existem dois tipos de modo espúrios, aqueles que são compartilhados pelos elementos adjacentes, e aqueles que não são compartilhados (ZHILIANG & QIGEN, 1992). O modo espúrio compartilhado entre elementos adjacentes é influenciado pela continuidade da função de interpolação na fronteira entre elementos.

Diversos métodos de controle de modos espúrios foram desenvolvidos. Entre eles, o método gama (BELYTSCHKO *et al*, 1985), desenvolvido para elemento convencionais. Esse método consiste em introduzir uma matriz de rigidez criada artificialmente no algoritmo da solução para desempenhar um papel de estabilização no algoritmo de controle.

Para o elemento enriquecido, a integração numérica precisa de atenção especial dada à função de enriquecimento nos contornos e no campo. As funções dos contornos precisam garantir continuidade entre elementos. Em outras palavras, a partir desse ponto de vista, um elemento enriquecido mal condicionado nos contornos pode introduzir erros numéricos na determinação de pares de autovalores e autovetores.

A quantidade dos pontos de integração numérica desempenha um papel fundamental na precisão da análise. Para elementos convencionais, foram

desenvolvidas várias estratégias de integração numérica, como por exemplo, quadratura de Gauss. Para uma malha uniforme ou distorcida de elementos convencionais, existe uma quantidade mínima necessária de pontos de Gauss para que os polinômios de interpolação sejam calculados com precisão. Entretanto, verifica-se ao longo do trabalho que existem outras considerações obrigatórias para integração numérica de um elemento enriquecido. Ao longo do trabalho, adotam-se duas nomenclaturas diferentes para designar diferentes estratégias de integração numérica, a quadratura de Gauss e a integração numérica por subintervalo.

No caso do MEFG, MEFGs, e MEFH, para malha distorcida, o emprego da estratégia da integração numérica de um elemento convencional introduz erros graves, ou seja, a mesma consideração da quadratura de Gauss de elemento convencional introduz erros numéricos quando é aplicada para um elemento quadrilateral enriquecido na malha distorcida. Portanto, foi empregada a estratégia de integração numérica por subintervalo (QUARTERONI ET AL, 2000), em que o domínio do elemento é dividido em subintervalos em cada direção, e em cada subintervalo diversos pontos de integração são empregados. Para a malha uniforme, não foi observado esses erros numéricos, independentemente da estratégia de integração numérica adotada. No caso de MEFHs, a situação foi diferente. Na malha distorcida, o MEFHs com apenas 1 nível de enriquecimento apresenta resultados precisos com integração numérica por quadratura de Gauss e apresenta erros numéricos apreciáveis com integração por subintervalo. Entretanto, quando se acrescenta mais um nível, o MEFHs com 2 níveis de enriquecimento apresenta erros numéricos com quadratura de Gauss, porém apresenta resultados precisos com integração por subintervalo.

Para efeito de comparação, os elementos enriquecidos a partir do elemento *serendipity* são comparados aos elementos convencionais - elemento quadrilateral quadrático de nove nós e elemento *serendipity*.

5.2. Chapa quadrada com malha uniforme

Para verificar qualidade do elemento enriquecido, um exemplo da chapa quadrada é analisado. Para tanto, calcularam-se os pares de autovalores e autovetores, utilizando-se malha uniforme e distorcida. Fez-se, inicialmente, uma

análise de refino h para elemento convencional a fim de determinar a porcentagem do erro relativo a partir de resultado obtido com o valor de referência (TORII, 2012).

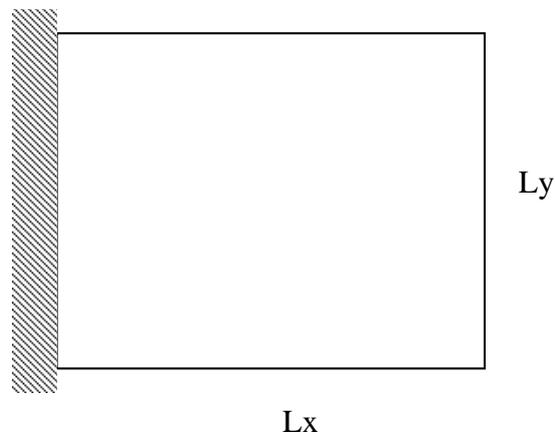


Figura 5.1. Representação esquemática do problema.

Considere-se uma chapa quadrada de 1 m, cuja espessura é 0,05 m, com condição de contorno mostrada pela figura 5.1, com módulo de elasticidade $E = 210 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$ e densidade $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$.

As matrizes de rigidez e de massa dos elementos analisados são determinadas por integração numérica, com 8×8 pontos de quadratura de Gauss para elementos convencionais. Para elementos enriquecidos, foi adotada integração numérica por subintervalo, 3 pontos em cada subintervalo, e são 10 subintervalos em cada direção do elemento, portanto, 30 pontos por 30 pontos. Os pontos de integração precisam garantir uma cobertura tanto para a função de interpolação quanto para as funções de enriquecimentos. Entretanto, com o emprego da integração por subintervalo, o tempo de processamento aumenta consideravelmente.

A tabela 5.1 mostra o valor de referência e o erro relativo em porcentagem entre diferentes elementos para os primeiros 20 modos de frequência natural. Esses valores de referência foram obtidos por uma malha 4×4 elementos MEFH polinomiais de ordem nove (TORII, 2012). Na coluna de MEFQ e MEFs, uma malha uniforme de 6×6 elementos foi adotada, com 338 graus de liberdade para MEFQ e 266 graus de liberdade para MEFs. A coluna de MEFGs mostra erro relativo do resultado obtido com $\beta = \pi$ e apenas um nível de enriquecimento assim como os MEFHs. Os

elementos enriquecidos adotam uma malha uniforme de 4x4 elementos, com 210 graus de liberdade.

Tabela 5.1. Erro relativo em porcentagem obtido por elemento convencional e enriquecido para os 20 primeiros modos.

Modo	Freq. (rad/s)	MEFQ	MEFs	MEFGs (pi)	MEFHs
1	3372,1300	0,13003354	0,247268047	0,26529912	0,138648273
2	8092,7200	0,039963078	0,074575668	0,51575725	0,112873051
3	9079,0900	0,066073803	0,103392521	0,01857906	0,123077313
4	14427,2300	0,046329753	0,054387433	0,04918803	0,033230218
5	15558,2300	0,141735917	0,222417332	0,20485695	0,292259467
6	16511,9600	0,020975705	0,023701608	0,19042422	0,071303467
7	20812,7700	0,291638259	0,35240768	0,26459580	0,451328679
8	21911,6100	0,272294459	0,397757627	0,58974577	0,574473533
9	24194,7400	0,251054981	0,297400592	0,01228180	0,208858206
10	24349,4200	4,058013702	0,230627259	0,09379437	0,194871993
11	25319,9000	6,334226833	0,082106959	0,89160171	0,053072484
12	26790,3100	16,01384941	0,60629123	0,77433296	0,759980381
13	30891,7800	3,269697958	0,7489863	0,91454117	1,151639044
14	31068,5500	6,774530836	1,203263429	1,28088311	1,629621595
15	31740,8000	6,035081346	0,668342953	1,02931489	1,347785185
16	32970,5300	4,518446322	0,705685957	0,10939721	0,601992143
17	33517,4900	10,85015734	0,464589681	0,10460549	0,264798468
18	34374,5300	14,62179236	0,303703643	0,23468644	0,44937138
19	36566,7900	8,89837883	1,892434365	1,45595852	2,689021377
20	39182,6600	3,237929737	0,68601366	0,36478946	1,10735897

Uma análise de convergência do refino h foi feita para todos os elementos envolvidos. A legenda abaixo das figuras a serem apresentadas a seguir indica a quantidade de elementos na malha utilizada. A figura 5.2 mostra erro relativo em cada modo, obtido pelo MEFQ para diferentes malhas. As linhas contínuas da figura 5.2 e das figuras a serem mostradas em seguida não representam uma função contínua. Mas apenas mostram uma tendência de evolução. A legenda da figura 5.2 mostra a quantidade de elementos adotada, assim como os graus de liberdade correspondentes à malha uniforme. É possível observar que o erro relativo está abaixo de 5% para todas as malhas para os modos abaixo do sétimo modo; a partir então, o erro relativo tende a aumentar. No caso da malha uniforme de 2x2, o erro relativo assume valor acima de 5% para modos mais elevados. Embora se aumente a quantidade de elementos, a porcentagem do erro relativo para modos mais elevados continua alta. A mesma análise é feita para MEFs, como mostra a figura

5.3. O erro relativo fica abaixo de 5% para todos os modos com graus de liberdade maior que 192. Tanto o MEFQ quanto os MEFs são elementos convencionais com função de interpolação quadrática no contorno e MEFQ tem uma função de bolha dentro do elemento. Essas condições não são suficientes para fazer com que o refino h do elemento atinja um erro relativo abaixo de 5% para modos para elevados, em função do travamento proporcionado pela integração numérica, com 8x8 pontos de Gauss.

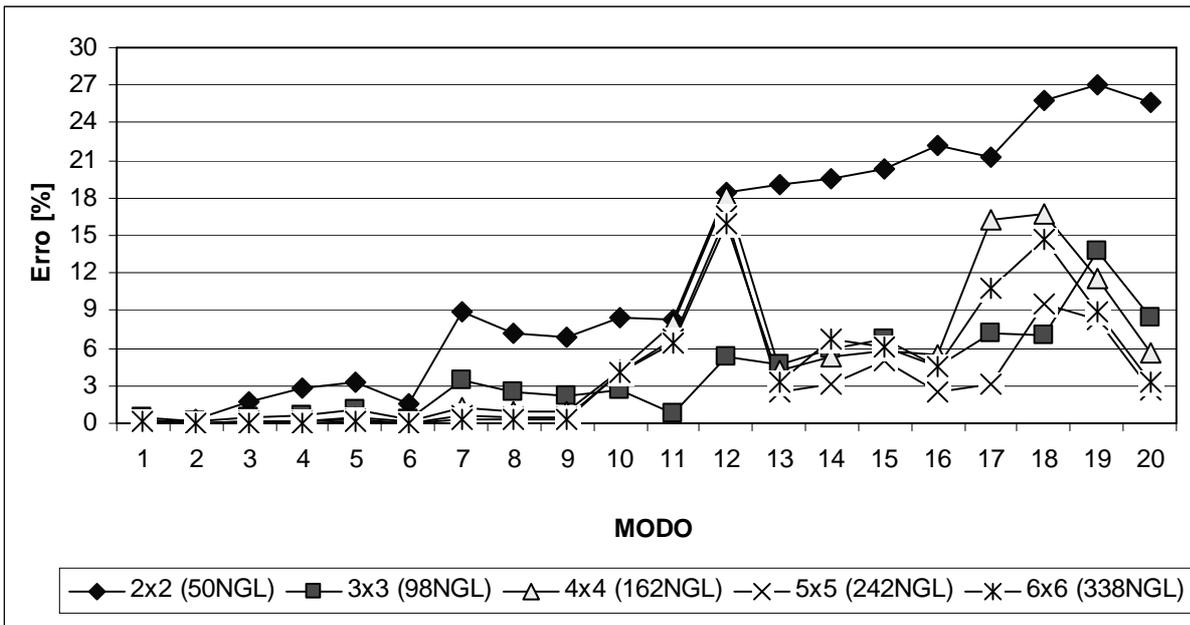


Figura 5.2. Erro relativo em cada modo para MEFQ.

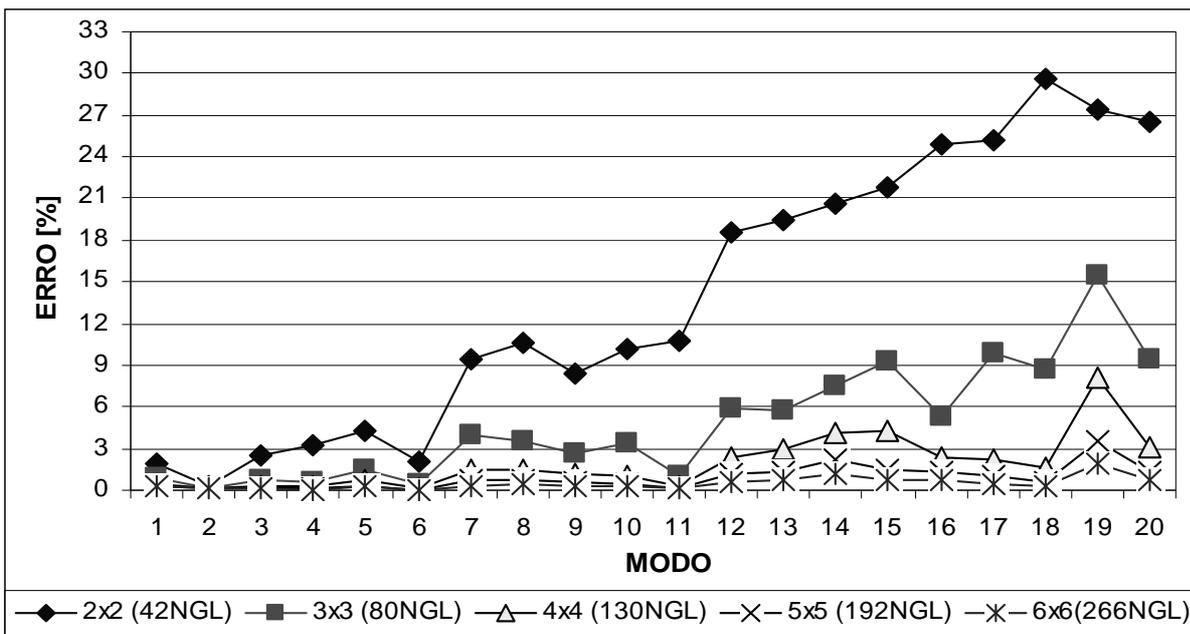


Figura 5.3. Erro relativo em cada modo para MEFs.

O resultado obtido pelo elemento MEFHs e MEFGs é mostrado nas figuras 5.4 e 5.5 respectivamente. Para MEFHs, as funções de enriquecimento adotadas são as que foram propostas por Oliveira (1993), expressões 4.26. Num primeiro instante, apenas o primeiro nível de enriquecimento foi feito, ou seja, fez-se enriquecimento apenas nos contornos e nenhuma função de bolha. Portanto, considerando-se as funções de interpolação nos vértices, mais as funções nas arestas e mais as funções de enriquecimento nos contornos.

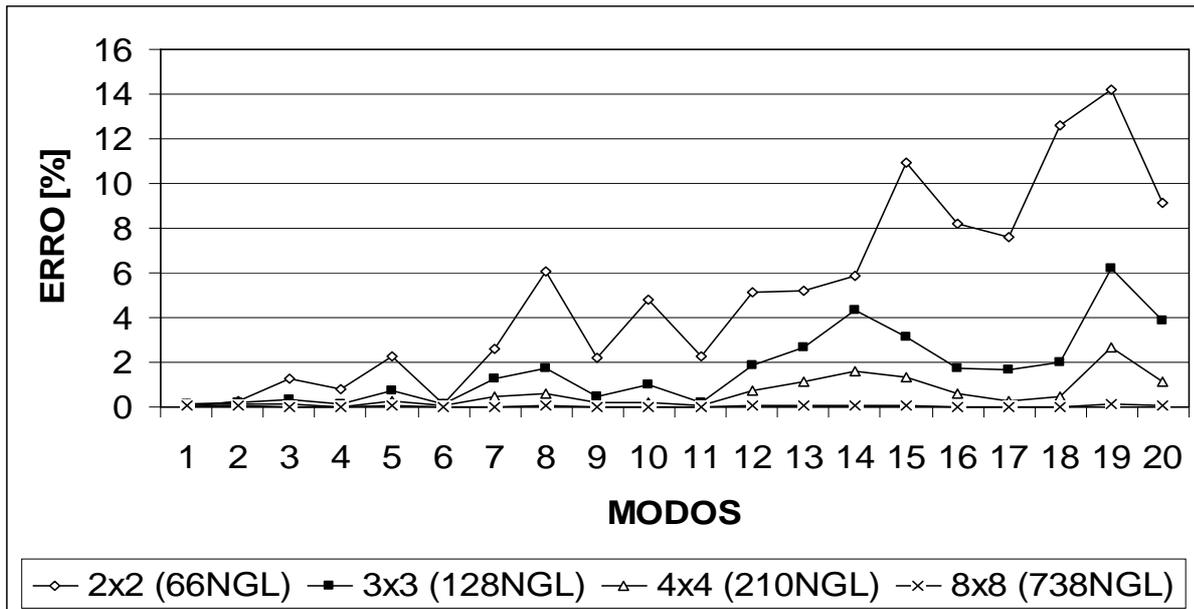


Figura 5.4(a). Erro relativo em cada modo para MEFHs (1 nível de enriquecimento).

Os resultados da figura 5.4(a) foram obtidos pela integração numérica de 8x8 pontos de quadratura de Gauss. A partir da observação da figura 5.4, percebe-se que o MEFHs consegue obter um resultado satisfatório, mantendo erro relativo abaixo de 5% nos modos mais elevados para malha uniforme maior do que 3x3 elementos, com exceção do modo 19. Apesar de a malha de 2x2 não apresentar resultado tão satisfatório, entretanto, ao ser comparada, ver figuras 5.2 e 5.3, o erro relativo para modos mais elevados é ainda menor. Isso mostra que as funções de enriquecimento contribuem para melhorar a precisão nos modos mais elevados, mais especificamente a partir do sexto modo. A figura 5.4(b) mostra resultados obtidos pelo MEFHs com 2 níveis de enriquecimento. Nesse caso, a integração numérica de 8x8 pontos de Gauss introduziu erros significativamente visíveis, por isso, integração numérica por subintervalo de 30x30 pontos foi utilizada. É possível

observar a partir da figura que os erros relativos permanecem abaixo de 5%, mesmo para uma malha grosseira de 2x2 elementos.

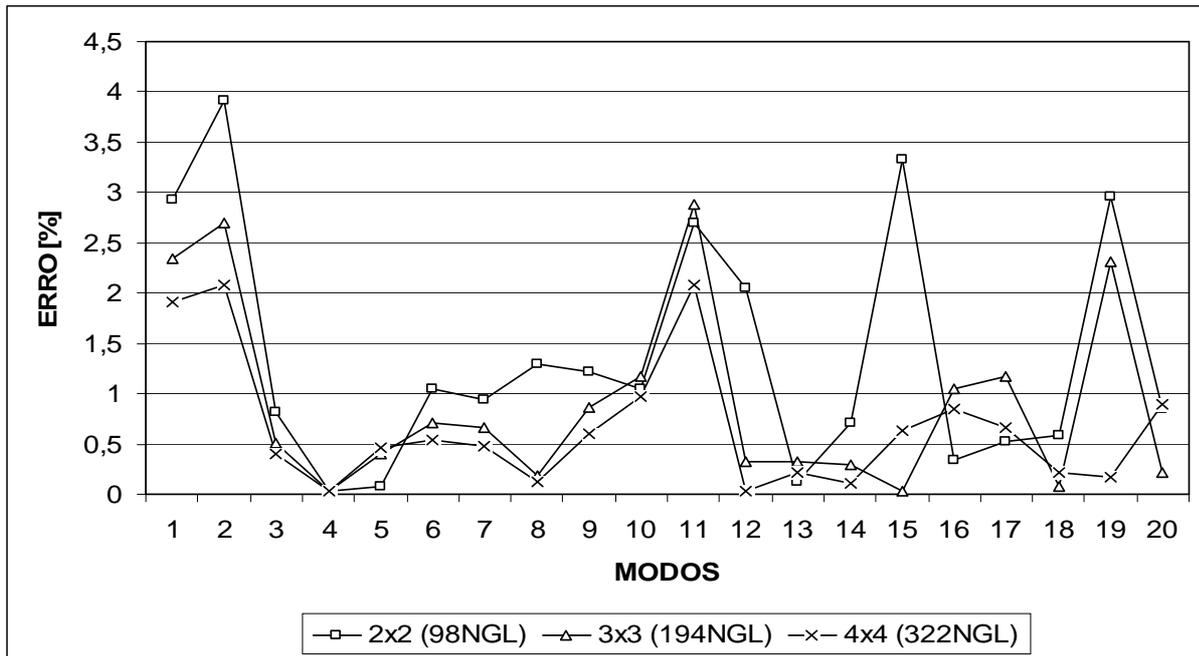


Figura 5.4(b). Erro relativo em cada modo para MEFHs (2 níveis de enriquecimento).

O MEFGs foi desenvolvido utilizando-se as expressões 4.27. A integração numérica por subintervalo foi adotada, 30 x 30 pontos de integração. Neste exemplo, assume-se o valor de $\beta = \pi$. A partir da observação da figura 5.5, a malha uniforme de 2x2 apresenta erro relativo oscilatório. Para modos mais elevados, acusa, inclusive, erro relativo maior que 5%. À medida que aumenta o grau do refino h , o erro relativo reduz para valor abaixo de 5%. Para malha de 3x3, 4x4 e 8x8, praticamente todos os modos apresentam erro menor que 2%. Vale a pena ressaltar que com integração numérica via quadratura de Gauss, de 8x8 pontos, também foi possível de obter resultados satisfatórios. A figura 5.5(b) mostra resultados obtidos pelo MEFGs com 2 níveis de enriquecimento. Nesse caso, assume-se valor de $\beta = 2\pi$ para a cobertura do enriquecimento do nível 2, enquanto a cobertura do enriquecimento do nível 1 permanece com $\beta = \pi$. Assim sendo, é possível preservar qualidades de enriquecimento do nível 1, e ainda acrescenta-se enriquecimento do nível 2. Não foi possível obter resultados coerentes com integração numérica de 8x8 pontos de Gauss com 2 níveis de enriquecimento. Por isso foi adotada integração numérica por subintervalo. Ao comparar resultados obtidos entre as figuras 5.5 (a) e

(b), é possível observar uma redução significativa do erro relativo para malha de 2x2 elementos. Quando se faz refino h , a malha de 4x4 elementos apresenta o máximo erro relativo abaixo de 1,5%.

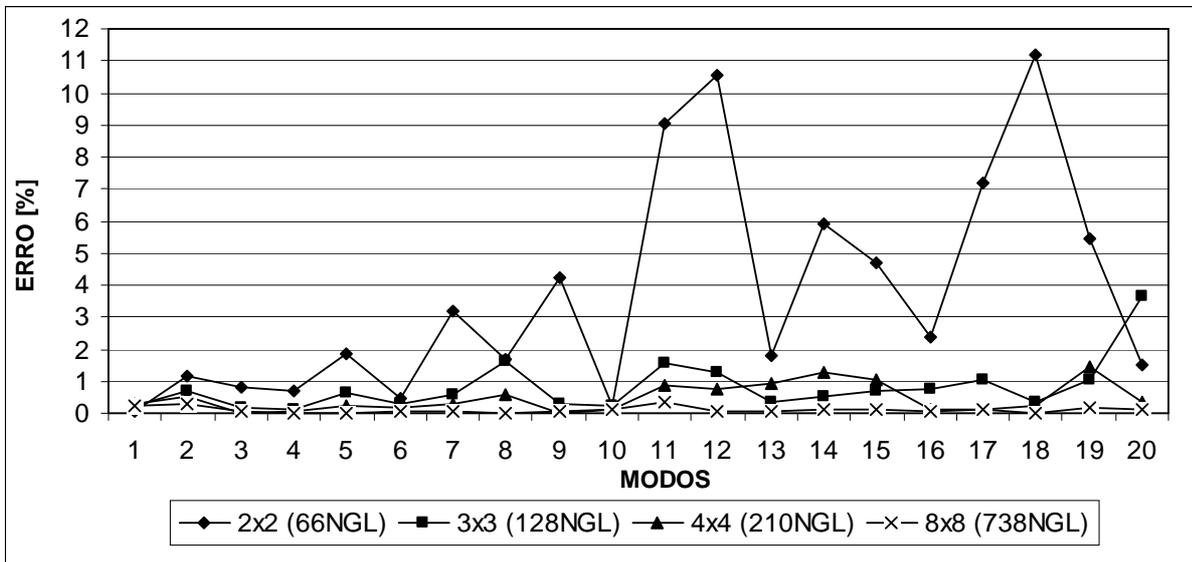


Figura 5.5(a). Erro relativo em cada modo para MEFGs (1 nível de enriquecimento).

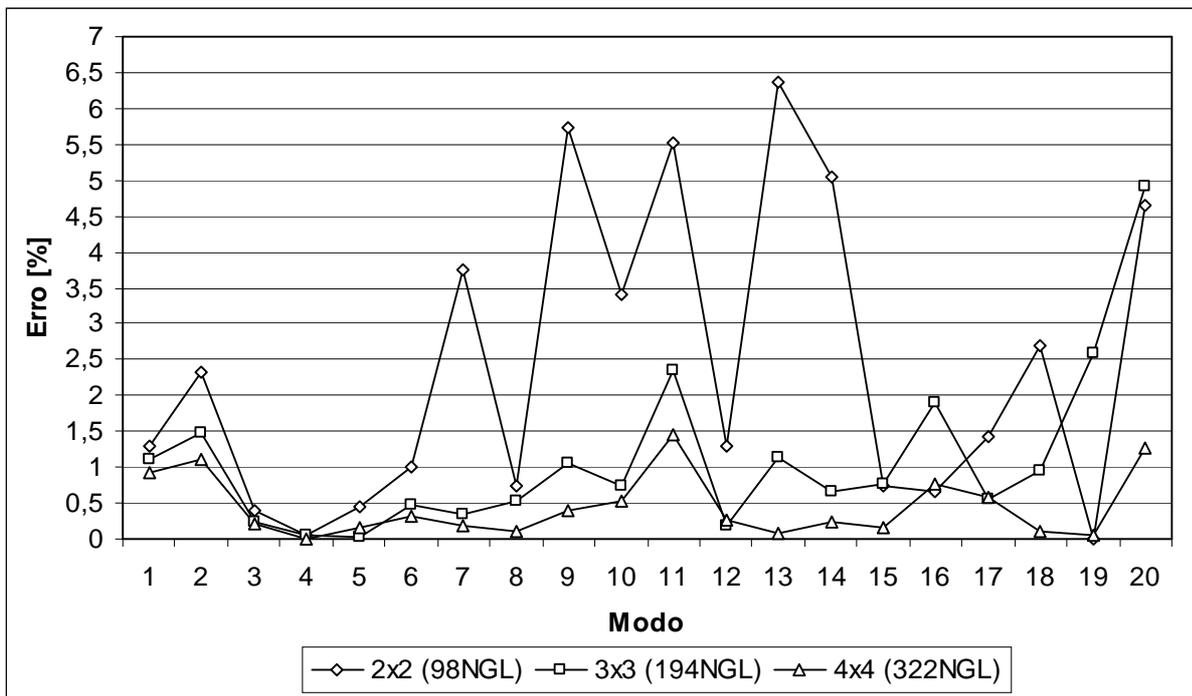


Figura 5.5(b). Erro relativo em cada modo para MEFGs (2 níveis de enriquecimento).

5.3 Patch test do elemento enriquecido

Para testar a qualidade do elemento MEFQs com malha distorcida, o exemplo da seção anterior é adotado. Considerem-se duas malhas não uniformes mostradas na figura 5.6, (b) e (c).

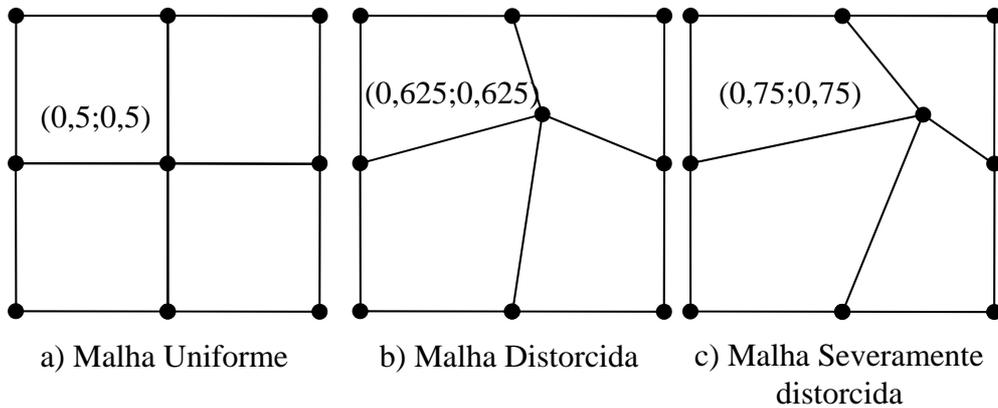


Figura 5.6. Representação esquemática de malha 2x2 uniforme e distorcida.

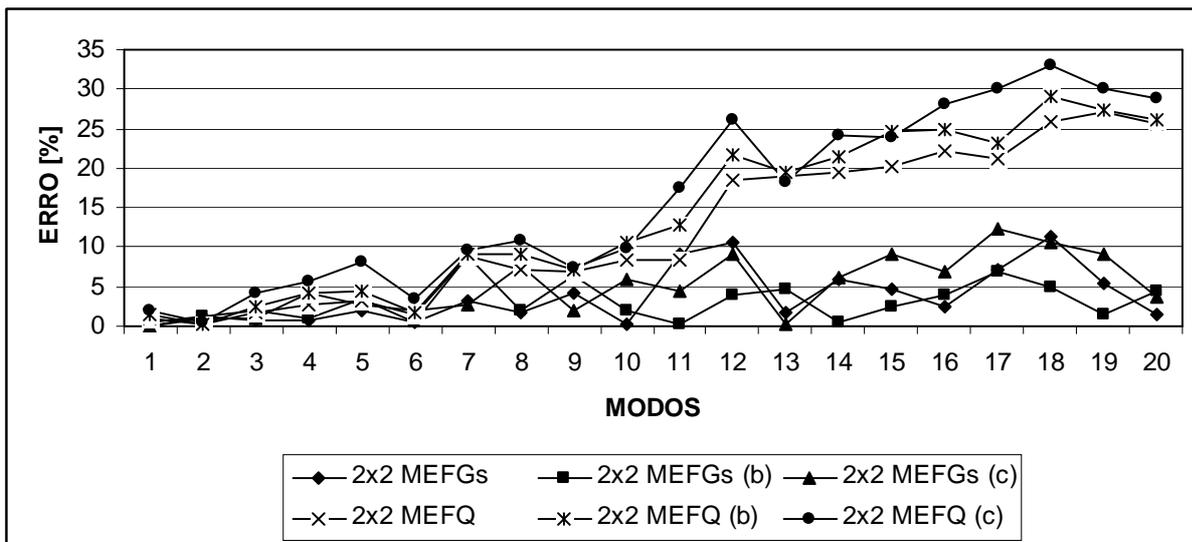


Figura 5.7. Erro relativo em cada modo para malhas 2x2 uniforme e distorcida (MEFGs x MEFQ).

A figura 5.7 mostra os erros relativos para essas três malhas diferentes. Observe-se que a malha uniforme de 2x2 elementos já tinha porcentagem de erro relativo elevado para modos mais altos. Por esse motivo, para malhas distorcidas, a porcentagem do erro relativo continua presente.

A partir da observação da figura 5.7, a malha distorcida do caso (b) apresenta erro relativo menor que o do caso (c) na grande maioria dos modos. Essa situação

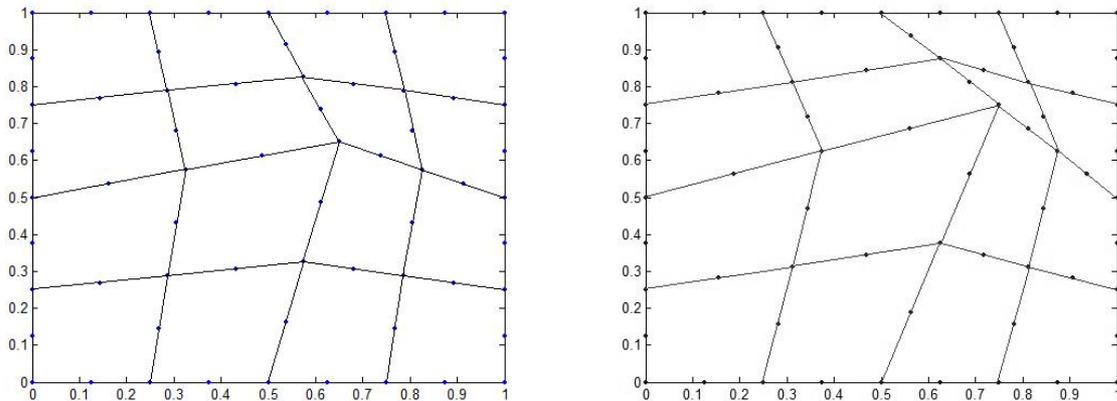
está presente tanto para o MEFQ quanto para os MEFGs. Para modos mais baixos, o MEFQ apresenta valor de erro relativo semelhante aos MEFGs, com exceção da malha distorcida caso (c), em que apresenta erro maior que 5% no quinto modo. Para modos mais elevados, o MEFQ acusa erro muito maior nas malhas distorcidas em comparação aos MEFGs. Por outro lado, os MEFGs apresenta erro relativo menor ou aproximadamente igual a 5% até o nono modo da vibração livre. A partir desse modo, as malhas distorcidas apresentam erros relativos bem maiores que a malha uniforme. A partir dessa observação, é possível concluir que as funções de enriquecimento contribuem para robustez da malha distorcida até certo modo, não para todos. Em outras palavras, as funções de enriquecimento adotadas proporcionam uma cobertura no domínio para esse problema, de tal forma que uma parte da qualidade do elemento é garantida. Conforme a alteração do nível de enriquecimento, essa cobertura pode ser comprometida. Devem-se acrescentar as funções de enriquecimento de tal modo que se obtenha função completa, que, por sua vez, proporcione todos os termos na função e garanta a cobertura total do domínio do problema [(TORII, 2012); (ARNDT, 2009)].

Como a malha uniforme de 4x4 elementos, o MEFGs apresenta menor erro relativo em praticamente todos os modos, figura 5.5(a), portanto esta malha foi selecionada para servir de referência no caso da malha distorcida. A figura 5.8 mostra a representação esquemática da malha distorcida de 4x4 elementos, sendo o caso da malha uniforme não representada na figura. O caso b é uma malha levemente distorcida, o caso c é uma malha severamente distorcida.

Para malha uniforme com elemento MEFGs, a integração numérica de 8 x 8 pontos de quadratura de Gauss não apresenta erros numéricos significativos. Entretanto, quando é empregada a malha distorcida, surgem erros numéricos significativos em diversos modos. Quando a integração por subintervalo com 30 x 30 pontos é empregada, esses erros numéricos significativos desaparecem. Os resultados são mostrados nas figuras 5.9 (a).

Na análise apresentada a seguir, considere MEFGs com $\beta = \pi$ e 1 nível de enriquecimento. A figura 5.9 (a) mostra resultados do MEFGs com malha 4x4 elementos, em cada elemento são 30 x 30 pontos de integração numérica por subintervalo. A malha uniforme do MEFGs mostra os erros relativos abaixo de 1,5%. À medida que a malha se distorce levemente, o caso b, os erros relativos obtidos

permanecem abaixo de 2,2%, aproximadamente. Quando a malha se distorce severamente, os erros relativos permanecem abaixo de 3%.



Caso b: Malha levemente distorcida Caso c: Malha severamente distorcida
 Figura 5.8. Representação esquemática da malha distorcida de 4x4 elementos.

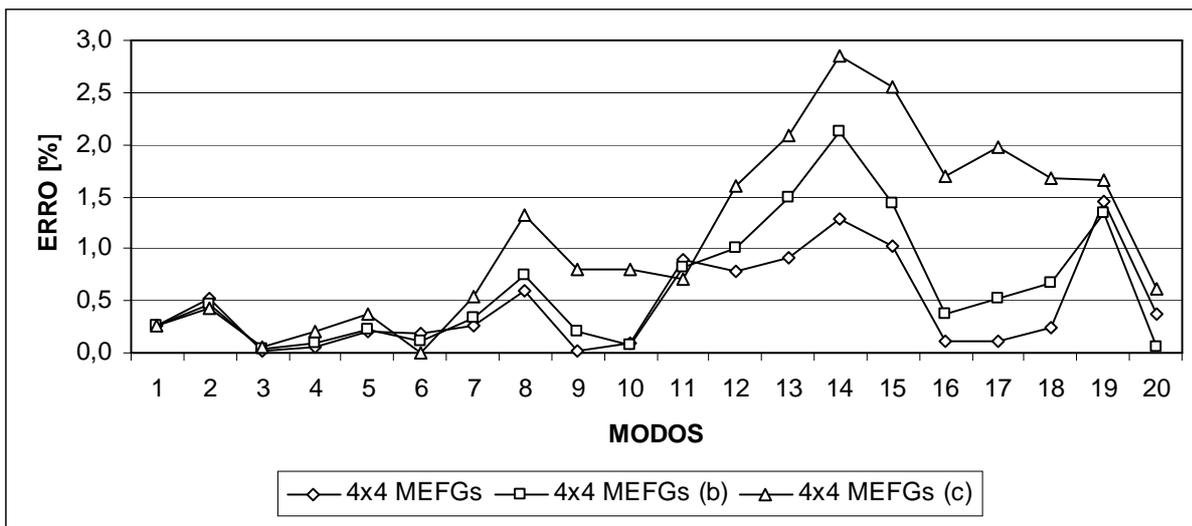


Figura 5.9(a). Erro relativo em cada modo para MFGs para situações diferentes.

Para efeito de comparação, foi feita a mesma análise da malha não uniforme com 4x4 elementos, porém 8x8 pontos de integração numérica no elemento. Para malha uniforme, o MFGs apresentou os resultados satisfatórios, entretanto, para malha severamente distorcida, a integração numérica de 8x8 pontos de Gauss forneceu resultados incoerentes. No primeiro instante, foi levantada a suspeita de que as funções de enriquecimento estavam provocando fenômeno de modos espúrios ou travamento. Entretanto, com o emprego da integração numérica por subintervalo, esse fenômeno foi eliminado. Portanto, é possível concluir que o

MEFGs com malha não uniforme, precisa necessariamente adotar integração numérica com elevada quantidade de pontos de integração.

Para observar efeito das funções de enriquecimento na análise da malha severamente distorcida, caso c, resultados obtidos pelo elemento convencional *serendipity* são comparados com os resultados obtidos pelo elemento enriquecido. A figura 5.9(b) mostra os erros relativos determinados pelo elemento MEFs, *serendipity*. O erro relativo permanece abaixo de 1% para primeiro 6 modos e sua magnitude se aumenta rapidamente a partir do 12º modo. Com o intuito de reduzir erro relativo, adiciona-se então um nível do enriquecimento, e dois níveis de enriquecimento, em análises separadas. Para diferenciar os resultados desses dois enriquecimento, denomina-se por MEFs1 com $\beta = \pi$ para um nível de enriquecimento, e MEFs2, $\beta = 2\pi$, para dois níveis de enriquecimento. Lembrando que no MEFs2, o primeiro nível do enriquecimento assume $\beta = \pi$ e para segundo nível $\beta = 2\pi$. A figura 5.9(b) mostra que a adição de um nível de enriquecimento reduz significativamente o erro relativo do MEFs. Os erros relativos permanecem abaixo de 3%. Com dois níveis de enriquecimento, essa redução se mostra mais evidente ainda.

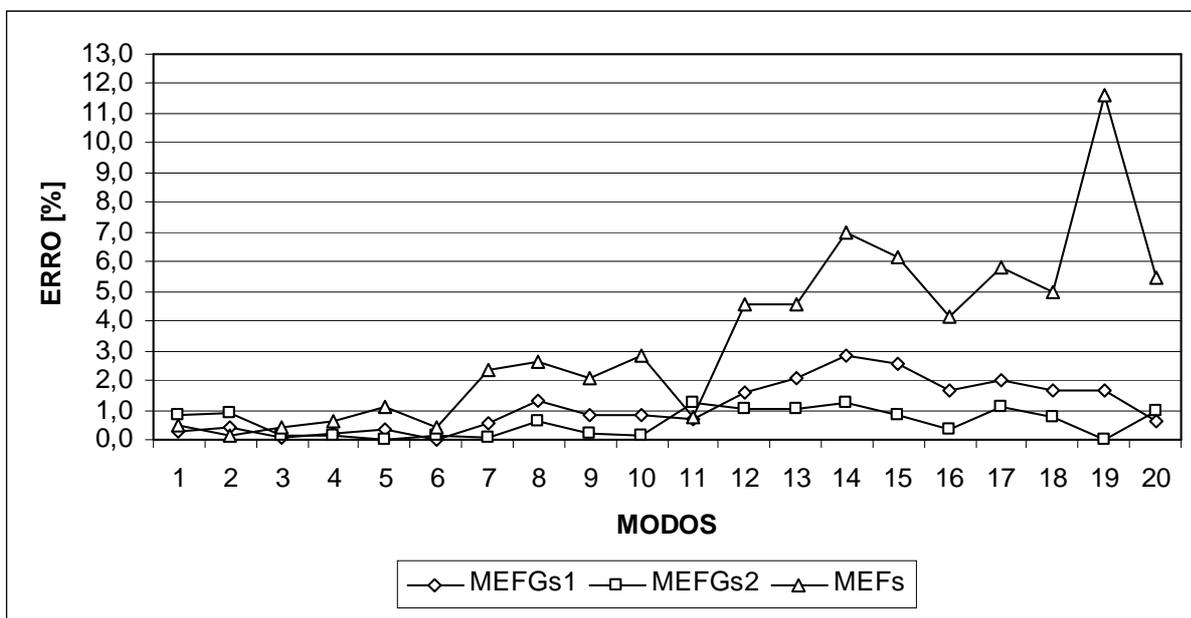


Figura 5.9(b). Erro relativo determinado da malha severamente distorcida pelo MEFs, MEFs1 (1 nível de enriquecimento) e MEFs2 (2 níveis de enriquecimento).

Os elementos empregados nesse exemplo são submetidos a uma análise do refino h , malha uniforme, sem alterar o nível da função de interpolação, no caso dos

elementos convencionais, assim como sem alterar o nível da função de enriquecimento, no caso de elemento enriquecido. Alguns modos foram selecionados para mostrar a convergência do resultado em função do número de graus de liberdade adotado na análise. Todos os modos a serem apresentados a seguir foram obtidos por integração numérica 8x8 pontos de Gauss para elemento convencional e 30x30 pontos da integração por subintervalo para elementos enriquecidos. As figuras 5.10 (a) – (e) estão na escala log.

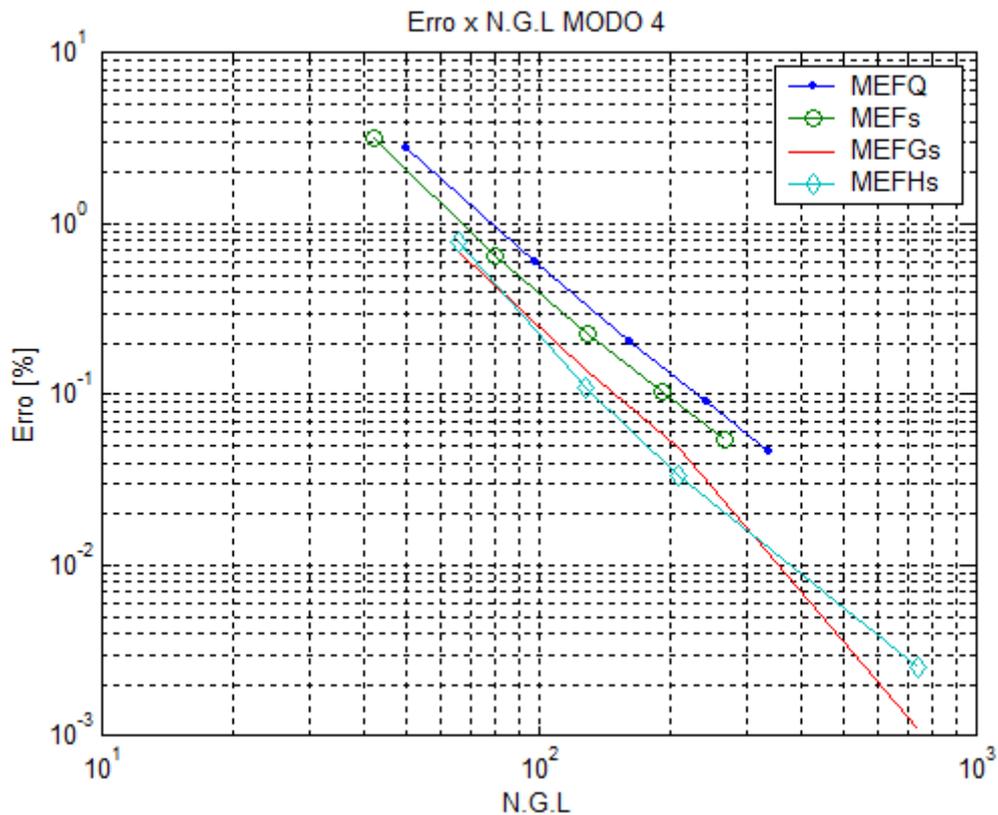


Figura 5.10 (a). Erro relativo versus grau de liberdade, modo 4.

A figura 5.10 (a) registra erro relativo versus grau de liberdade do modo 4. Os elementos convencionais MEFQ e MEFs mostram curva de convergência com taxa semelhante. À medida que a malha é refinada o erro relativo diminui. No caso dos elementos enriquecidos MEFHs e MEFGs, o erro relativo é menor que o dos elementos convencionais, mesmo com a malha relativamente grosseira. No caso do modo 7, mostrado na figura 5.10 (b), todos os elementos dispõem da mesma tendência da convergência, inclusive os elementos enriquecidos. Para os primeiros modos de frequência natural, os elementos enriquecidos não se destacam como elementos com elevada tendência de convergência quando comparados aos

elementos convencionais. Porém, para os modos mais elevados, destacam-se por apresentarem erro relativo baixo. Para efeito da análise das figuras a serem apresentadas nesta seção, e na seção seguinte, define-se a taxa de convergência como sendo a razão entre a variação da porcentagem do erro relativo e a variação do número do grau de liberdade.

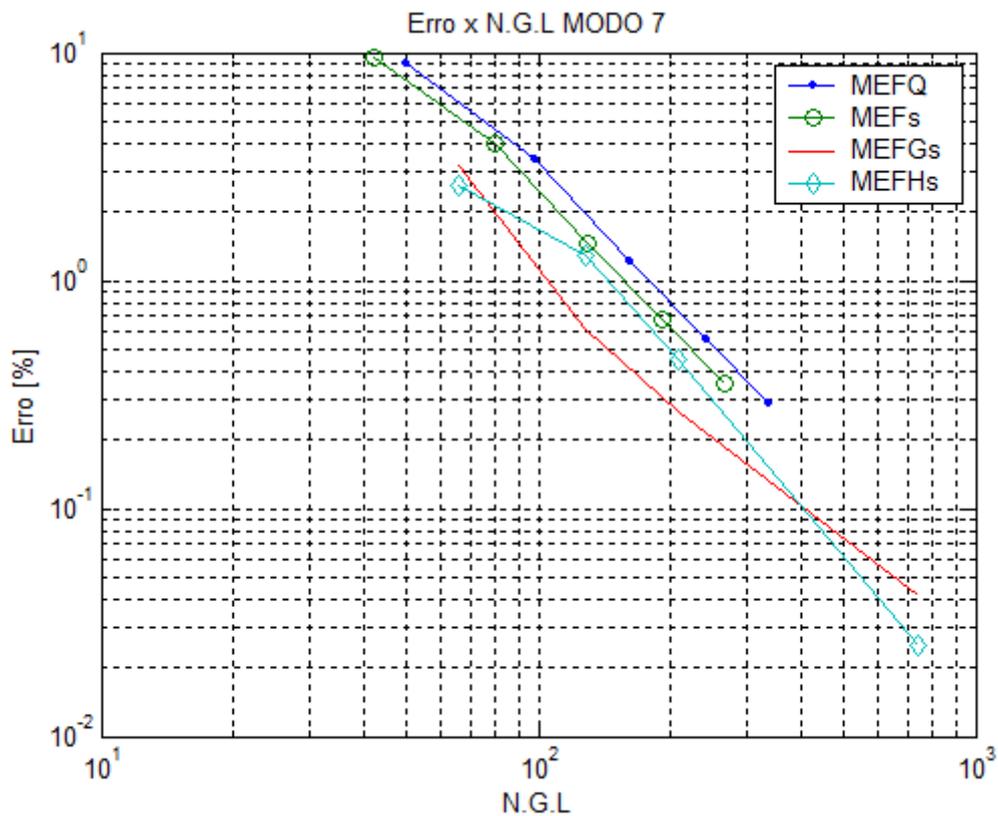


Figura 5.10 (b). Erro relativo versus graus de liberdade, modo 7.

Por outro lado, para modos mais elevados, os elementos convencionais não conseguem obter taxas de convergência elevadas, por mais que se aumente o número de graus de liberdade. Nesse caso, os elementos enriquecidos são favorecidos, por apresentarem altas taxas de convergência, em função do aumento das funções de enriquecimentos. Essa situação pode ser observada na figura 5.10 (c). Para o elemento convencional MEFQ, o erro relativo se mantém constante, mesmo com o aumento do número de graus de liberdade, enquanto o MEFs, o MEFGs e o MEFHs apresentam boa taxa de convergência com o refino da malha.

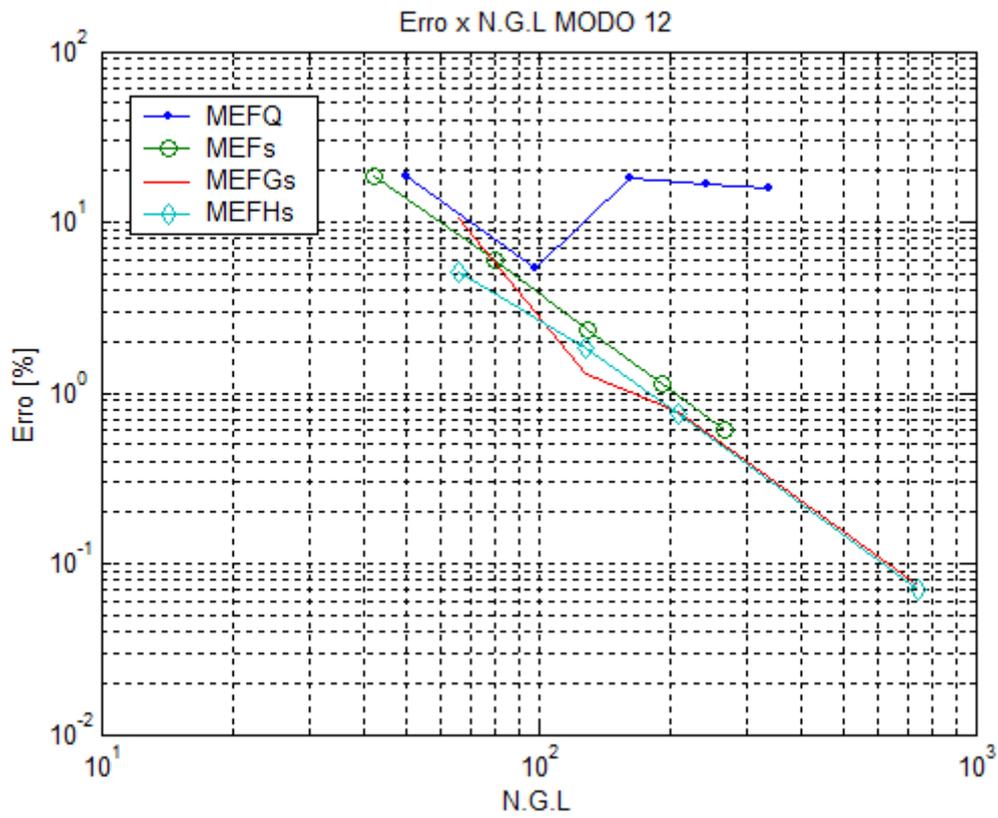


Figura 5.10 (c). Erro relativo versus graus de liberdade, modo 12.

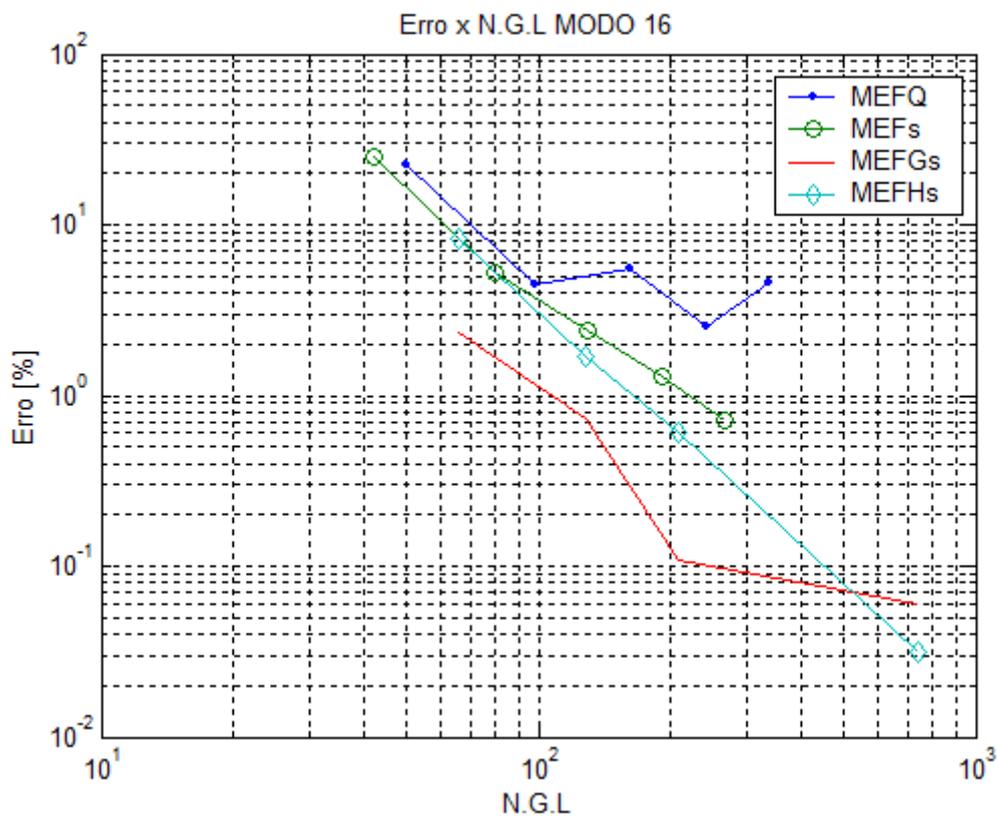


Figura 5.10 (d). Erro relativo versus graus de liberdade, modo 16.

Para modos ainda mais elevados como, por exemplo, o modo 16, figura 5.10 (d), a situação se repete. O elemento convencional MEFQ tende a se estabilizar num determinado valor de erro relativo, sem capacidade de reduzir esse erro mesmo com o refino da malha, enquanto os elementos MEFs e enriquecidos apresentam boa taxa de convergência. Especialmente o MEFGs. A figura 5.10 (e) mostra o mesmo contexto.

Nesta seção, diferentes elementos quadrilaterais e enriquecidos foram submetidos à avaliação de desempenho, via determinação de autovalores e autovetores para modos de vibração baixos e altos. De modo geral, os elementos enriquecidos tiveram melhor desempenho na determinação de modos, em comparação com elemento convencional, especialmente, para modos mais elevados.

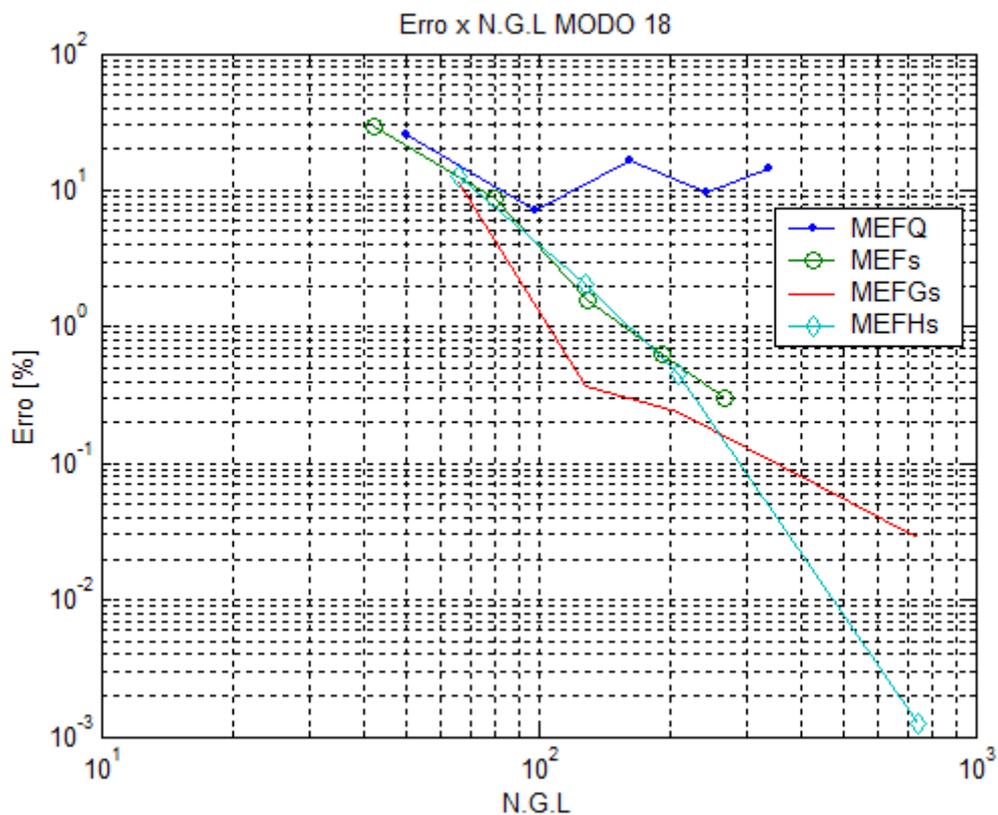


Figura 5.10 (e). Erro relativo versus graus de liberdade, modo 18.

Um aspecto importante a ser observado é a quantidade de pontos de integração numérica a ser empregada para elementos diferentes. Para elementos convencionais, basta utilizar quadratura de Gauss. Neste trabalho se adota 8x8 pontos de integração numérica para obter maior precisão. Por outro lado, para elementos enriquecidos, quando a análise é da malha uniforme ou apenas um nível

de enriquecimento, não há necessidade de adotar integração numérica por subintervalo, basta utilizar quadratura de Gauss. Entretanto, quando os elementos enriquecidos são empregados para malha não uniforme, ou se deseja aumentar o nível de enriquecimento, o emprego da integração numérica por subintervalo é necessário para evitar resultados incoerentes.

No próximo capítulo, elementos enriquecidos serão aplicados para análise dinâmica elastoplástica. Para excluir efeito de modos espúrios, somente malhas uniformes serão empregadas, e os elementos enriquecidos têm apenas um nível de enriquecimento.

5.4 Formulações enriquecidas com refino h e com refino p

Esta seção apresenta análises de pares de autovalores e autovetores da chapa quadrada apresentada na seção 5.2. As análises são feitas empregando-se elementos quadrilaterais, de quatro nós (MEFn), de nove nós (MEFQ) e de formulação enriquecida e generalizada (MEFG).

O objetivo desta seção é analisar o desempenho das funções de enriquecimentos apresentadas na seção 4.2. Os resultados são obtidos por duas metodologias diferentes. A primeira metodologia consiste em empregar o MEFG com refino h . Para efeito de simplificação, os níveis de enriquecimento são de no máximo dois. A segunda metodologia consiste em empregar o MEFG com refino p . Neste caso, existe apenas um elemento na malha, e o refino é feito pelos aumentos sucessivos de níveis de enriquecimento. A consideração da segunda metodologia de empregar apenas um elemento é para destacar o efeito gerado pelas funções de enriquecimento. Dessa forma, avalia-se o desempenho dos métodos comparando-os com os resultados obtidos pelos outros elementos e pela primeira metodologia.

Enriquecimentos dos elementos quadrilaterais de quatro nós são adotados nesta seção. Por meio de duas estratégias. A primeira consiste em enriquecer o elemento quadrilateral pelo contorno e pelo campo (MEFG^{cc}), tal como um elemento quadrilateral enriquecido hierarquicamente. A segunda estratégia consiste em enriquecimento somente pelo campo (MEFG). O refino p das duas estratégias respeita a sequência dos níveis de enriquecimento, sem omitir nenhum nível.

Os efeitos de enriquecimento se tornam evidentes para modos de vibrações mais elevadas, conforme observado na seção anterior. Isso se revela pela alta taxa

de convergência observada. As figuras 5.11 (a) – (d) mostram essa característica para resultados obtidos por diferentes formulações. Nessas figuras, o $MEFG^{cch}$ indica o MEFG enriquecido nos contornos e no campo, com apenas um nível de enriquecimento, com estratégia de refino h . O $MEFG^{ccp}$ indica o MEFG enriquecido nos contornos e no campo, com estratégia de refino p . O $MEFG^h$ indica o MEFG enriquecido apenas no campo, com dois níveis de enriquecimento, e estratégia de refino h , e $MEFG^p$ indica o MEFG enriquecido no campo com estratégia de refino p . O aumento dos graus de liberdades do $MEFG^{cch}$ e $MEFG^h$ se deve exclusivamente ao aumento da quantidade de elementos, refino h , enquanto o aumento dos graus de liberdades do $MEFG^{ccp}$ e o $MEFG^p$ se deve somente ao aumento de níveis de enriquecimento, refino p . Estes últimos chegaram ao nível quatro de enriquecimento.

Sobre o aspecto da integração numérica, as metodologias apresentadas no parágrafo anterior, $MEFG^{cch}$, $MEFG^h$, $MEFG^{ccp}$ e $MEFG^p$ apresentam respostas diferentes. O $MEFG^h$ com enriquecimento no campo, é possível empregar quadratura de Gauss de 8x8 pontos de integração numérica, sem presença de resultado incoerente. Por outro lado, o $MEFG^{cch}$ e o $MEFG^{ccp}$ necessitam integração numérica por subintervalo, este trabalho adota 30x30 pontos. Por último, o $MEFG^p$ apresenta resultado coerente com 8x8 pontos de quadratura de Gauss para primeiro e segundo nível de enriquecimento, a partir do terceiro nível de enriquecimento, é necessário integração numérica por subintervalo para evitar resultado incoerente.

Ao longo do cálculo, é observado o fato de que os resultados obtidos são influenciados pelo parâmetro β , um parâmetro inerente à formulação proposta por Arndt (2009). Essa influência afeta o valor dos resultados obtidos, assim como no tempo gasto na solução numérica. Como o parâmetro β está influenciando na precisão e no tempo gasto na determinação dos pares de autovalores e autovetores, ainda é uma questão em aberta para trabalhos futuros.

Por outro lado, para estratégia do refino p , a cada cobertura de funções de enriquecimento emprega um valor de β diferente. O elemento enriquecido com 1 nível de enriquecimento assume um valor de β , quando se acrescenta mais um nível de enriquecimento, o valor de β do nível anterior é preservado, e o novo nível de enriquecimento assume outro valor de β . Assim sucessivamente até o nível de enriquecimento desejado. Entretanto, este trabalho não trabalhou com a lógica para variação do valor de β . Para presente trabalho, adota-se que o valor de β do nível do enriquecimento é sempre maior do que o nível inferior.

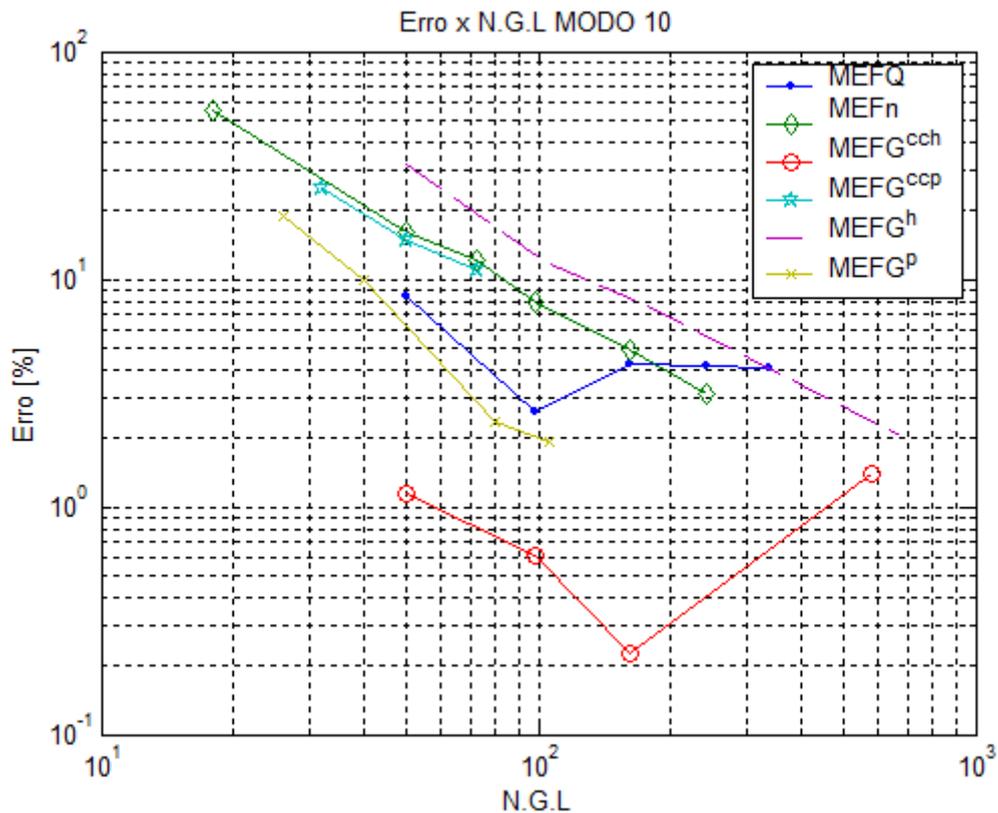


Figura 5.11 (a). Erro relativo versus o número de graus de liberdade, modo 10, MEFG refino p e h .

A figura 5.11 (a) mostra os resultados obtidos por diversas formulações para 10^o modo de vibrar. É possível observar que o MEFQ apresenta um resultado praticamente indiferente ao aumento do número de grau de liberdade. Por outro lado, o MEFn apresenta uma tendência da convergência praticamente linear. Enquanto o MEFG^{cch} e o MEFG^p apresentam erros relativos mais baixos do que outras formulações. O MEFG^{cch} é a formulação que apresenta menor erro relativo. Lembrando que para o MEFG^p e o MEFG^{ccp} emprega apenas um elemento na malha.

A figura 5.11 (b) mostra uma situação diferente do que foi apresentada pela figura 5.11 (a). Na figura, os resultados do MEFG^p mostram que seu erro relativo determinado é o menor de todos para baixo número de grau de liberdade. Enquanto as formulações, o MEFG^{cch} e o MEFG^{ccp} apresentam erro relativo menor do que aquele apresentado pelo MEFQ. Ambas mostrando a formulação enriquecida com refino p apresenta alta taxa de convergência para modos mais elevados. E essa taxa é maior do que a formulação enriquecida com refino h .

Para inferiores ao 10^o, tabela 5.1, a formulação enriquecida, tanto para o MEFG com refino p quanto para o refino h , apresenta resultados semelhantes

àqueles obtidos pela formulação convencional. Somente para os modos mais elevados, na sua maioria acima do décimo modo, a formulação enriquecida de refino p apresenta a taxa de convergência mais elevada do que formulações convencionais e formulações enriquecidas do refino h .

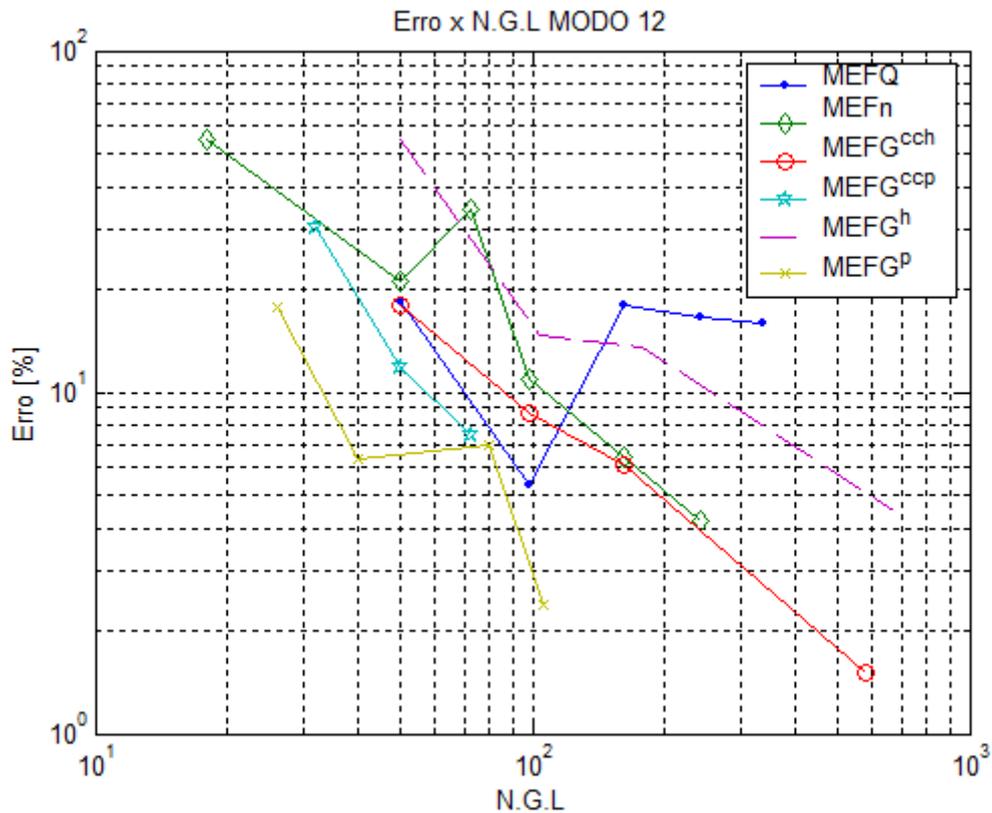


Figura 5.11 (b). Erro relativo versus o número de graus de liberdade, modo 12, MEFG refino p e h .

Este capítulo apresentou um estudo para determinação de pares de autovalores e autovetores, e a quantidade de pontos de integração necessária para elementos enriquecidos. A partir da observação dos resultados, as formulações enriquecidas apresentam resultados coerentes com 8x8 pontos da quadratura de Gauss quando se emprega apenas 1 nível de enriquecimento e malha uniforme. Entretanto, para malha não uniforme ou mais de 1 nível de enriquecimento, o emprego da quadratura de Gauss de 8x8 pontos se mostrou falho, nesse caso, é necessário integração numérica por sub intervalo, que no presente trabalho se adotou 30x30 pontos de integração numérica.

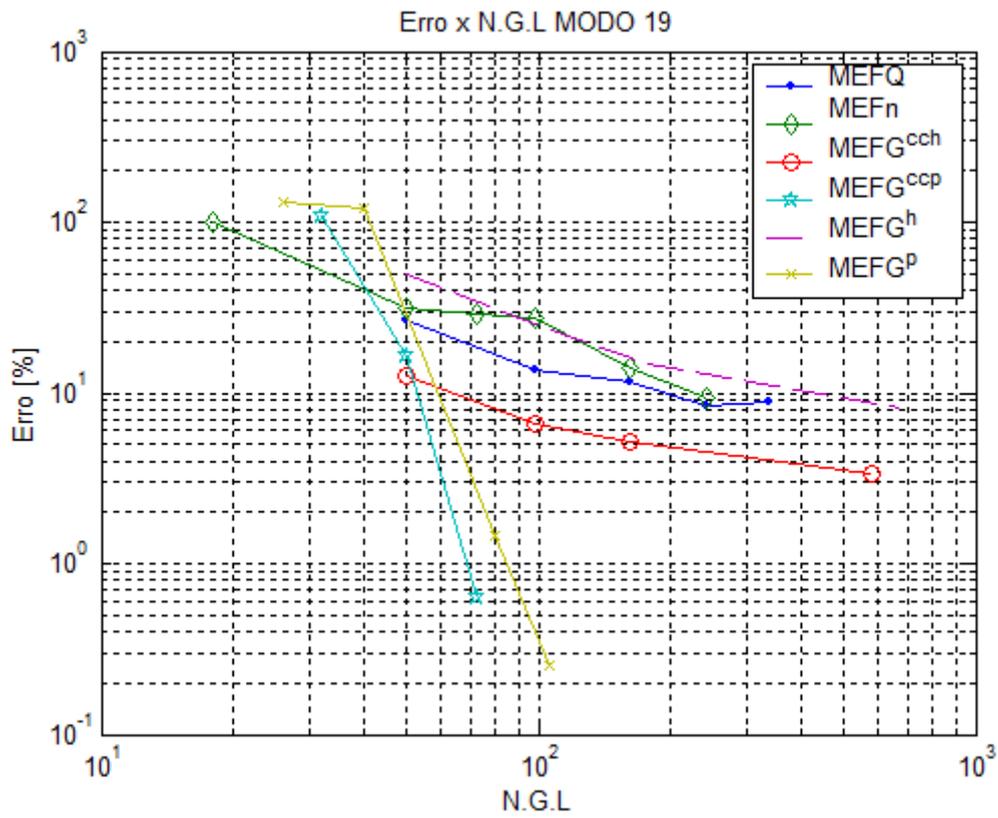


Figura 5.11 (c). Erro relativo versus o número de graus de liberdade, modo 19, MEFG refino p e h .

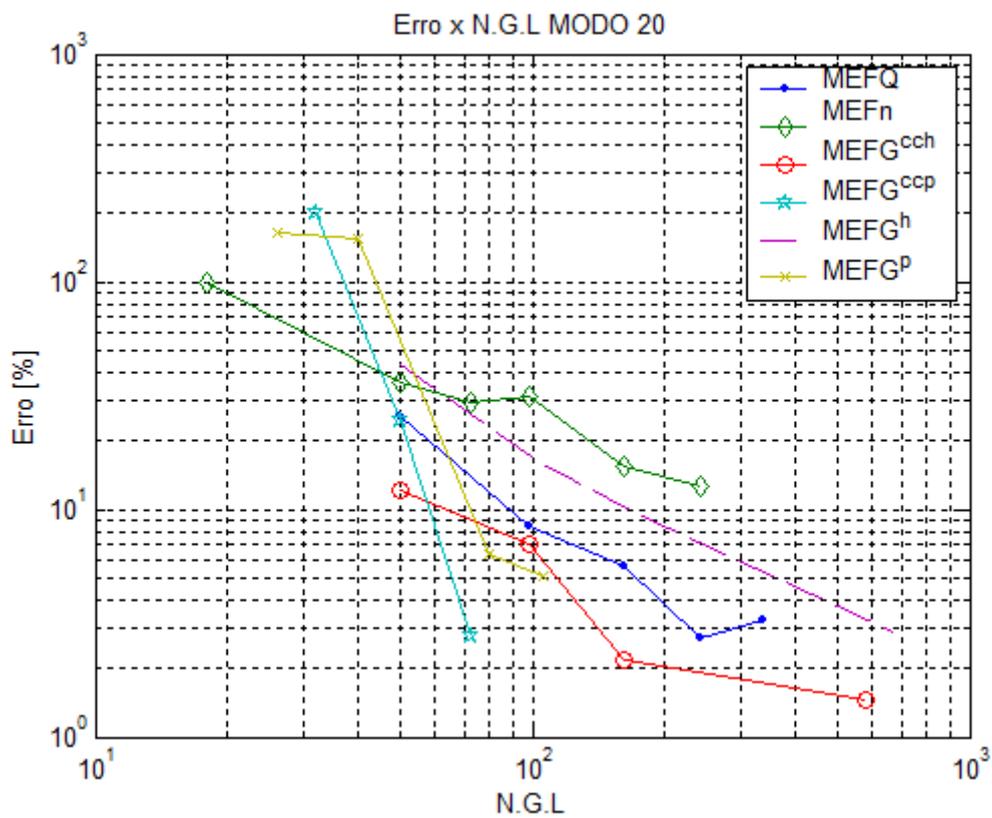


Figura 5.11 (d). Erro relativo versus o número de graus de liberdade, modo 20, MEFG refino p e h .

6. APLICAÇÕES

Este capítulo apresenta resultado do estudo de propagação de ondas de deslocamentos e de tensões ao longo de barras e de vigas bem como estado plano de tensão, utilizando elemento unidirecional e elemento bidirecional. Para estudo da viga, adotou-se a formulação de viga Euler – Bernoulli, com sete pontos de integração numérica ao longo do elemento convencional e enriquecido, dois dos quais situados nas extremidades e cinco distribuídos uniformemente ao longo do elemento. O elemento quadrilateral de quatro nós, de nove nós e o *serendipity*, convencionais e enriquecidos, são utilizados, com diferentes quantidades de pontos de integração numérica. Será feita uma comparação cruzada entre elementos convencionais e enriquecidos, com os métodos de solução temporal. Ao se adotar diferentes algoritmos de solução temporal, o elemento convencional e os elementos enriquecidos respondem de forma diferente. Essa diferença é mostrada e discutida neste capítulo também.

Para se proceder à análise de viga como elemento unidirecional, consideram-se quatro formas de discretização, a saber: MEEG, MEFH, MEFQ e MEFn. O MEEG é aplicado para enriquecer o elemento finito de dois nós, e as equações (4.18) e (4.19) são adotadas para garantir esse efeito. O MEFH também é aplicado para enriquecer elemento de dois nós, a partir das funções de Lobatto, (4.1) para deslocamento longitudinal, e funções de Bardell, (4.2) para deslocamento transversal. O MEFQ é o termo adotado para representar elemento convencional quadrático de três nós, sem enriquecimento, dois dos quais nas extremidades e um no meio do elemento. O MEFn é a denominação dada para o elemento convencional de dois nós

Os algoritmos adotados para solução temporal são os de Newmark de aceleração linear e média, HHT e alfa generalizado. Em todos os exemplos, o efeito de amortecimento não é considerado.

Para efeito de organização de exemplos, conjuntos de propriedades mecânicas e geométricas são apresentados e numerados.

- Conjunto 1: $E = 210GPa$; $\rho = 7830kg/m^3$.
Comprimento de 1 m; raio externo de 75 mm e interno de 70 mm.
- Conjunto 2: $E = 207GPa$; $\rho = 7830kg/m^3$; tensão de escoamento = 414MPa.

- Comprimento de 1 m; raio externo de 75 mm e interno de 70 mm.
 Conjunto 3: $E = 207GPa$; $\rho = 7830kg/m^3$; tensão de escoamento = $414MPa$.
 Comprimento de 1 m; raio externo de 25 mm e interno de 20 mm.
 Conjunto 4: $E = 210GPa$; $\rho = 7830kg/m^3$; tensão de escoamento = $414MPa$.
 $\nu = 0,3$. Comprimento de 1 m; altura de 0,1 m, espessura de 0,05 m.

6.1. Análise elástica de barra engastada – livre submetida à força do tipo Heaviside.

O primeiro exemplo é voltado para o estudo de elementos unidimensionais de barras e, por sua simplicidade, permite avaliar melhor as diferenças de desempenho dos métodos aqui tratados.

Considere uma barra de propriedades conjuntos 1, engastada livre com uma força de magnitude de -1000N aplicada subitamente na extremidade livre e mantida nesse valor, como mostra a figura 6.1.1, até final da análise. Para solução temporal, adotou-se intervalo de tempo de $1 \times 10^{-6}s$ e 5000 passos de tempo.

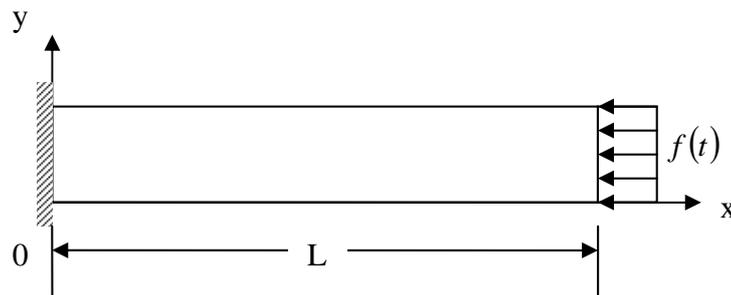


Figura 6.1.1. Barra engastada – livre com força de tipo Heaviside aplicada na extremidade livre.

A solução analítica é dada pelas equações (6.1.1a), (6.1.1b) e (6.1.1c), as quais determinam, na direção longitudinal, o deslocamento, a velocidade e a aceleração, respectivamente. Essas equações foram deduzidas por Nowacki (1963; *apud* MONTEIRO, 2009).

$$u(x,t) = \frac{8f_oL}{\pi^2EA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2L}\right)\right) \right] \quad (6.1.1a)$$

$$\frac{du(x,t)}{dt} = \frac{4f_o c}{\pi EA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \left(\sin\left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2L}\right) \right) \right] \quad (6.1.1b)$$

$$\frac{d^2u(x,t)}{dt^2} = \frac{2f_o c^2}{LEA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(-1)^{n-1} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \left(\cos\left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2L}\right) \right) \right] \quad (6.1.1c)$$

Para solução temporal de equação governante de fenômeno elastodinâmico, os métodos de Newmark e de HHT ($\alpha_f = -0,1$) são adotados e comparados, e o método Newmark é aplicado considerando aceleração linear e aceleração constante. Para efeito de comparação, a solução analítica de Nowacki (1963), equação (6.1.1), e a solução fornecida pelo MEFQ são consideradas referência, enquanto outros elementos são comparados a elas. As malhas de cada análise tem aproximadamente o mesmo número de graus de liberdade, MEFQ e MEFn com 123 número de graus de liberdade, MEFQ e MEFH com 126. Os resultados apresentados neste exemplo são referentes ao nó da extremidade da barra, onde a força é aplicada.

Os resultados obtidos numérica e analiticamente são apresentados nas figuras 6.1.2 à 6.1.9. A figura 6.1.2 mostra a aceleração calculada no nó da extremidade. Observe-se que MEFQ^c e MEFQ^L são denominações dadas ao método generalizado considerando aceleração constante e linear, respectivamente para o método de Newmark. O subíndice superior, HHT, representa algoritmo de solução temporal utilizado. Como se pode observar na figura 6.1.2, a solução numérica MEFQ, em combinação com Newmark constante e linear, produz oscilações bastante pronunciadas em comparação à solução analítica. A figura 6.1.3 mostra a velocidade no ponto extremo da viga. Note que, nesse problema, a velocidade é determinada pela derivada temporal da equação de deslocamento e apresenta descontinuidade em diversos pontos. Por outro lado, a solução numérica obtida via Newmark apresenta oscilação numérica na região próxima ao salto do diagrama. Entretanto, o mesmo fenômeno não acontece com a solução obtida via HHT. A figura 6.1.4 (a) e (b) mostra curva de deslocamento obtida analítica e numericamente. Pela observação da figura 6.1.4 (b), o MEFQ em combinação com Newmark linear é aquele que apresenta resultado mais próximo da solução analítica.

À medida que o deslocamento vai mudando de sentido, após atingir valores de pico, a curva da velocidade, representada na figura 6.1.3, torna-se descontínua.

Embora todos os elementos da figura 6.1.4(a) tenham atingido o resultado determinado pela solução analítica com precisão razoável, a velocidade determinada pelo MEFG em combinação com Newmark se mostra altamente oscilatória tanto para aceleração linear quanto para aceleração constante (figura 6.1.3). Por outro lado, a figura 6.1.4(b) mostra o MEFG^L como um dos métodos que mais se aproxima da solução analítica. O mesmo acontece para caso de aceleração, como mostra a figura 6.1.2. A combinação de MEFG com HHT se revela, por sua vez, razoavelmente satisfatória. Esse contexto acusa a diferença entre os métodos de Newmark e HHT perante elementos finitos convencionais e enriquecidos.

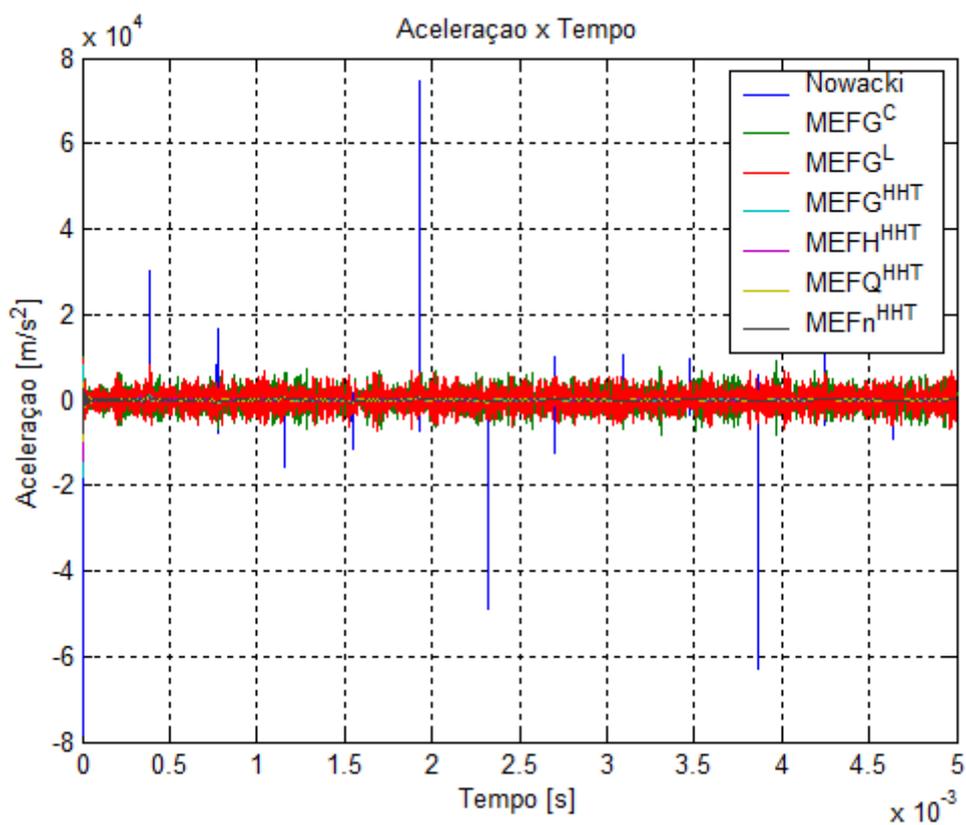


Figura 6.1.2. Aceleração do exemplo 1, resultado obtido por diversas formulações.

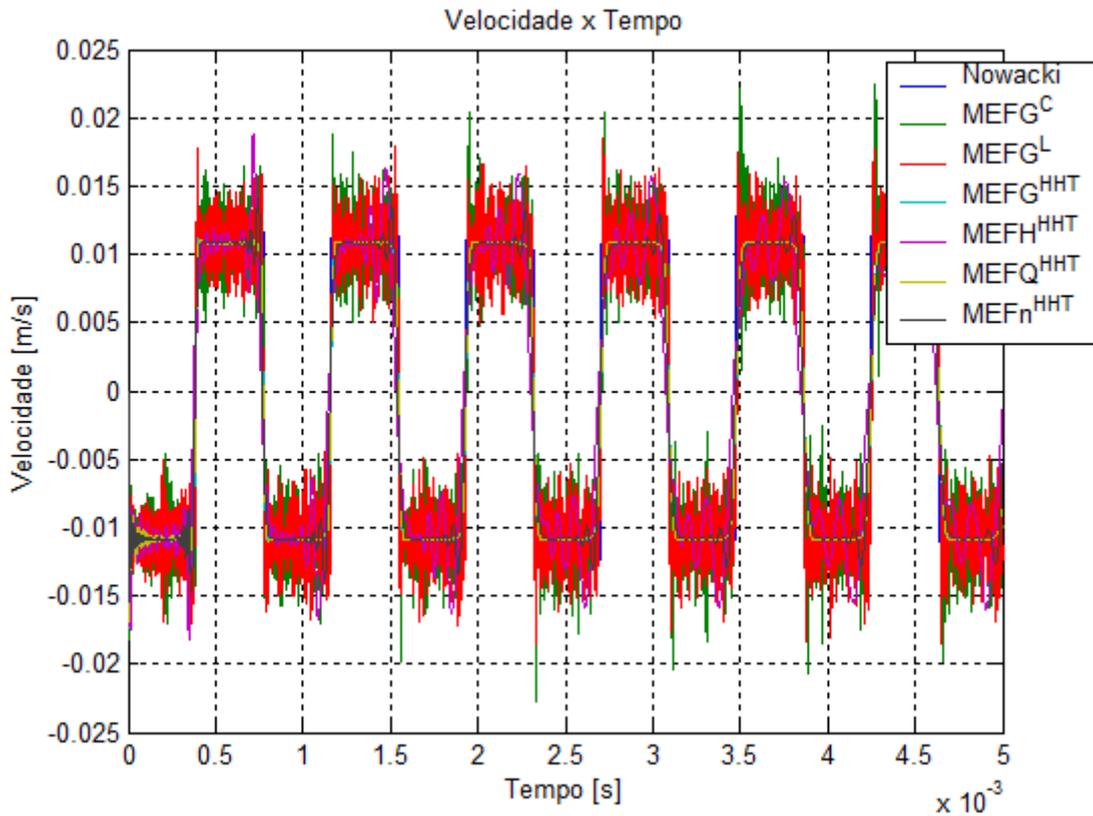


Figura 6.1.3. Velocidade do exemplo 1, resultado obtido por diversas formulações.

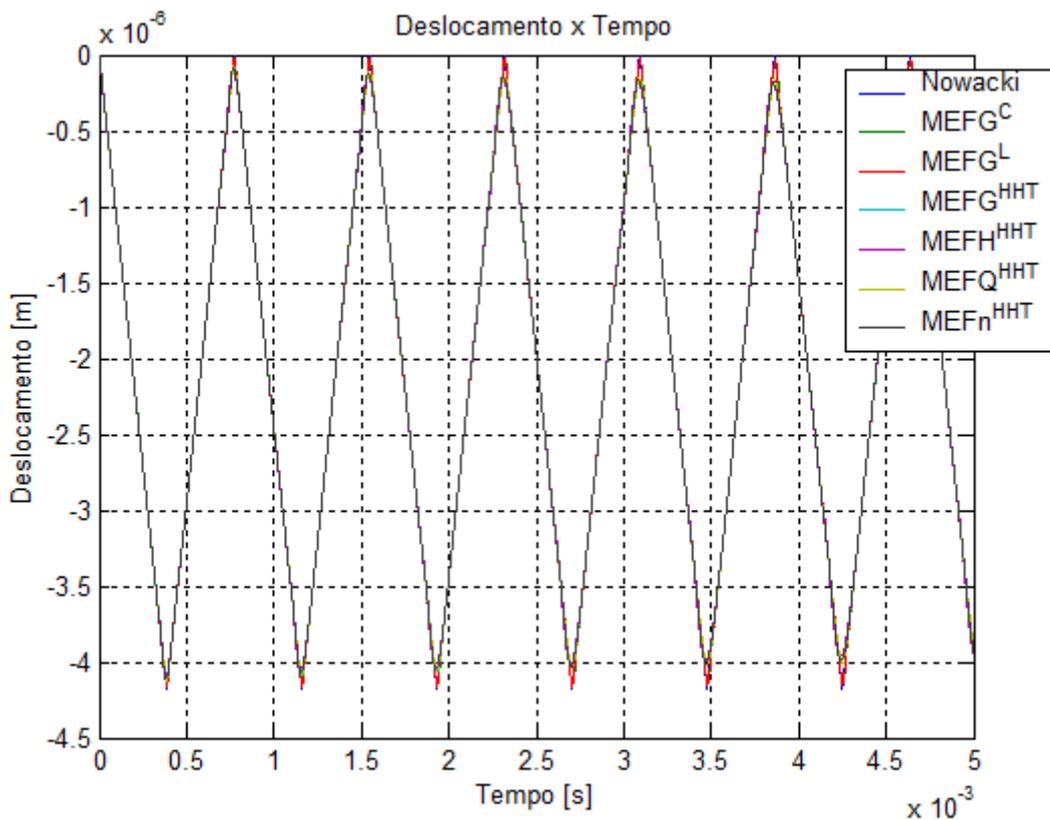


Figura 6.1.4(a). Deslocamento do exemplo 1, resultado obtido por diversas formulações.

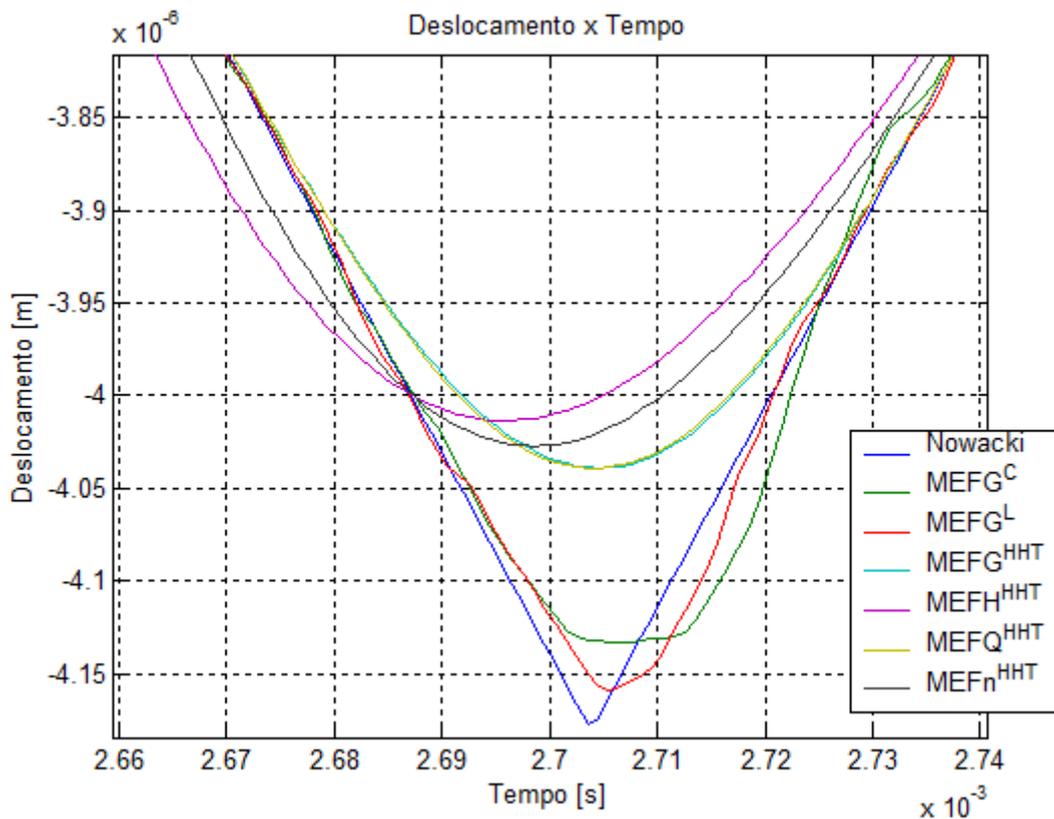


Figura 6.1.4(b). Ampliação da figura 6.1.4(a).

O método HHT é reconhecido como mais dissipativo que o de Newmark, sendo capaz de reduzir mais a oscilação numérica. Entretanto, essa dissipação afeta resultados como o deslocamento (ver figura 6.1.4(b)). Essa observação é importante para a determinação de tensões e de deformações, pois estas últimas são as derivadas dos deslocamentos no espaço e no tempo, no contexto dos problemas da elastodinâmica. A figura 6.1.5 mostra o gráfico da deformação versus tempo obtida pelo MEFG a partir de Newmark e HHT. O resultado obtido pelo método Newmark se mostra mais oscilatório em comparação aos que são obtidos pelo método HHT. Do ponto de vista computacional, quando o algoritmo envolver processo iterativo, em que critério de convergência precisa ser atendido, essa oscilação pode prolongar o tempo de processamento. Isso é o que ocorre em uma análise envolvendo plastificação, contexto em que o processo iterativo de Newton – Raphson é utilizado, como se pode acompanhar nos próximos exemplos.

Para observar o desempenho do MEFH, MEFn e MEFQ, em combinação com HHT, as curvas de $MEFG^c$ e $MEFG^L$ são retiradas. A figura 6.1.6 mostra que os elementos tiveram oscilação reduzida na aceleração assim como na velocidade (ver

figura 6.1.7). A figura 6.1.7 mostra o desempenho dos elementos ao tratarem da descontinuidade matemática. É possível observar na figura 6.1.7 que o MEFG e o MEFQ praticamente não apresentam oscilação nos pontos descontínuos e também não são capazes de atingir a largura total do degrau, como mostra a solução analítica. O MEFH e o MEFn apresentam, por sua vez, oscilação numérica, enquanto o MEFH, com enriquecimento de Lobatto, acusa oscilação mais acentuada que o MEFn.

O que explica o fato de o MEFG praticamente não apresentar oscilação, mesmo enriquecido, a partir de elemento de dois nós, é a utilização das equações (4.18) e (4.19). Ambas as funções de enriquecimento contêm funções trigonométricas, que garantem a continuidade da equação no espaço mesmo diante de derivada espacial e temporal de ordem mais elevada. Isso afeta consideravelmente o desempenho de HHT, auxiliando-o a obter resultado com menos perturbação.

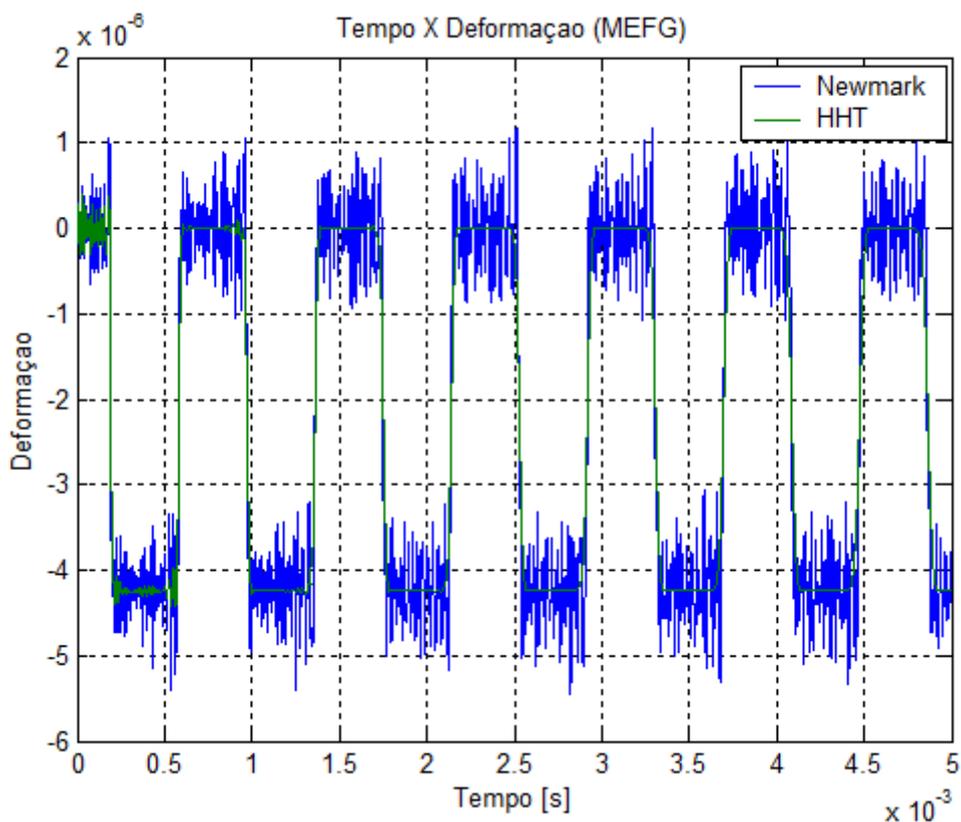


Figura 6.1.5. Deformação do exemplo 1, resultado obtido por diferentes métodos.

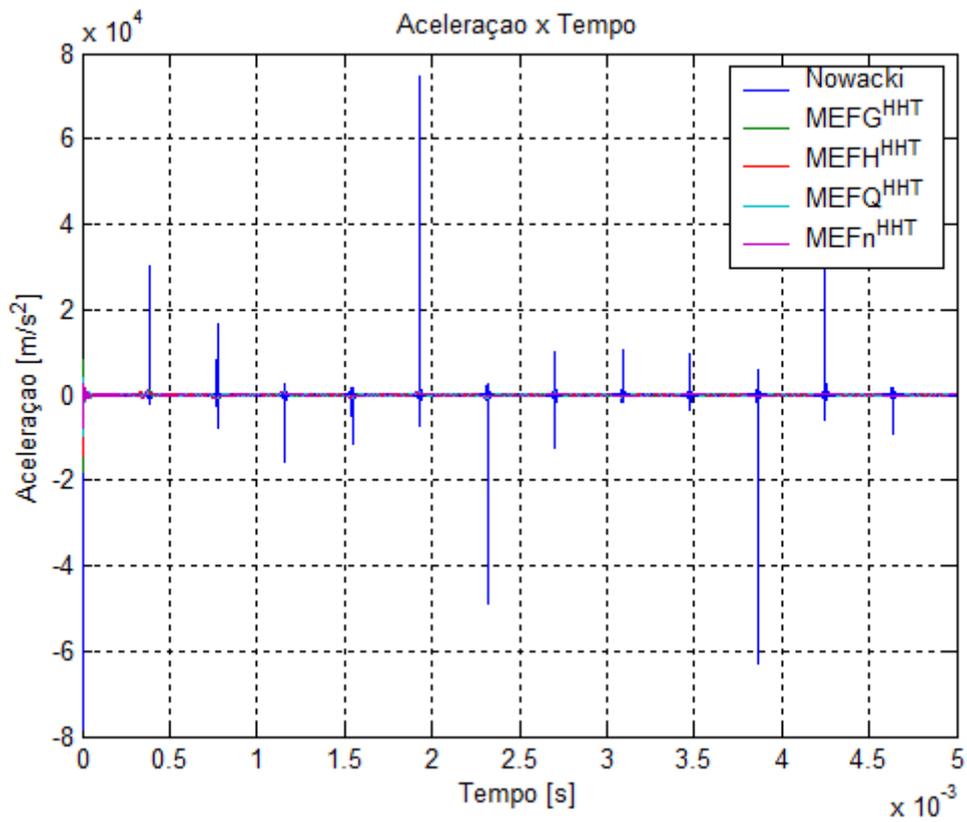


Figura 6.1.6. Aceleração do exemplo 1, resultado obtido por HHT.

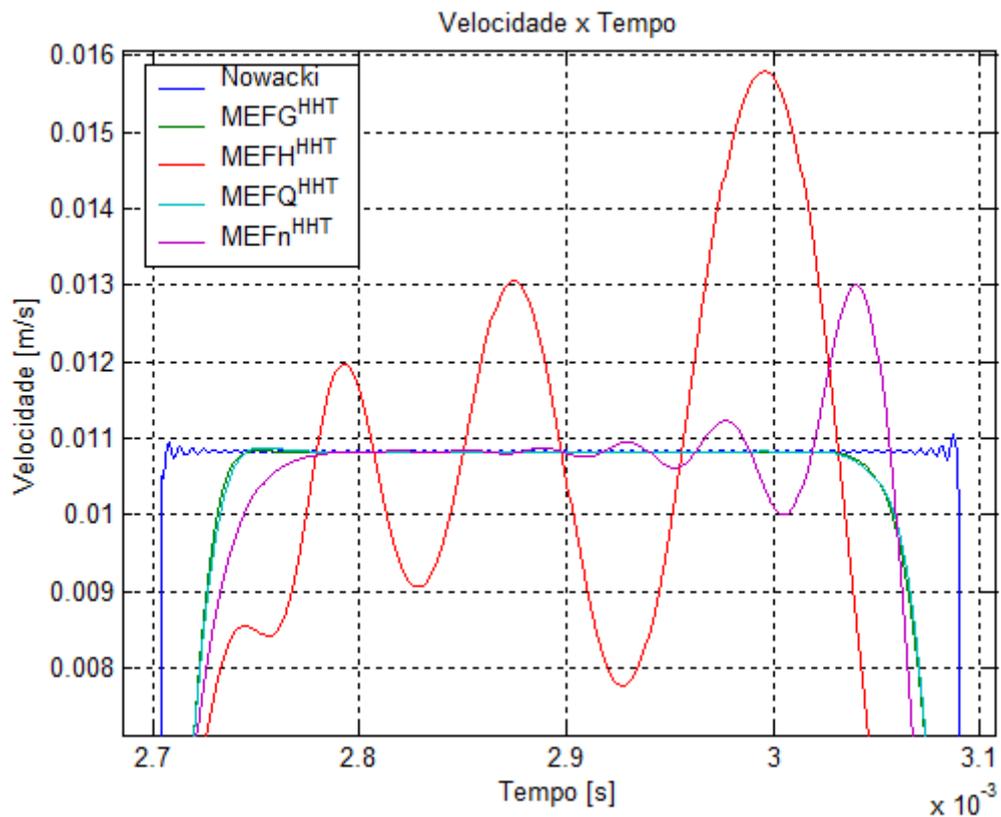


Figura 6.1.7. Ampliação da curva de velocidade obtida por HHT.

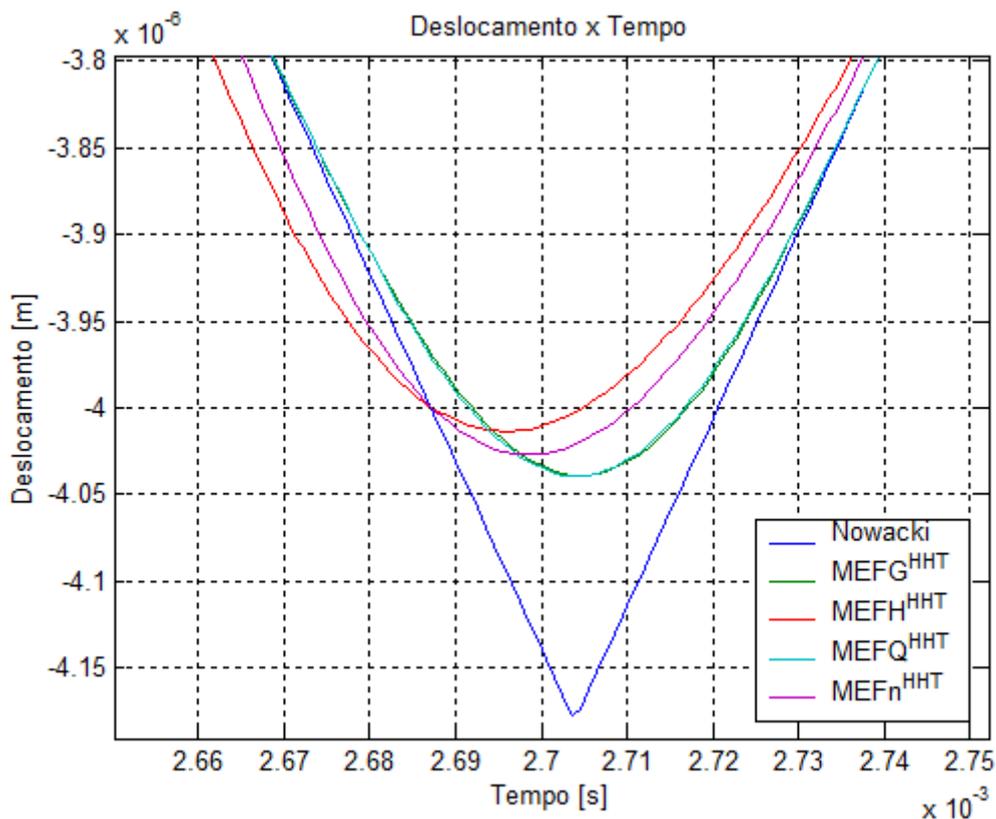


Figura 6.1.8. Ampliação da figura 6.1.4(a), somente resultado HHT.

No MEFQ, por ter função de interpolação cúbica, essa continuidade também é garantida. Por outro lado, o MEFH, em que se utilizam funções de Lobatto como enriquecimento, embora tenha apresentado resultado satisfatório na determinação de frequências naturais (TORII, 2012), revela, diante de descontinuidades matemáticas, oscilação numérica, diferentemente do MEFG. A figura 6.1.8 mostra que todos os elementos utilizados apresentam resultados bem semelhantes, especialmente o MEFG e o MEFQ, cujos resultados são praticamente iguais.

A propagação da onda de deslocamento movimentando-se ao longo da barra em função do tempo é estudada nas figuras 6.1.9(a) – (d). Nessa análise, o resultado de MEFn não é apresentado. Ao se comparar o resultado de todos os elementos, aparentemente o MEFG é aquele que apresenta menor oscilação ao longo da barra e o que mais se aproxima da solução analítica. A razão dessa diferença se deve ao fato de que o MEFH e o MEFQ utilizam função de interpolação polinomial enquanto o MEFG incorpora função trigonométrica no enriquecimento. Assim, o MEFG apresenta continuidade no espaço e no tempo, quando utiliza HHT,

e, por consequência, apresenta maior estabilidade na solução de propagação de ondas de deslocamentos.

Apesar de que o algoritmo HHT em combinação com MEFQ apresentou menos oscilação numérica nas curvas de velocidade, mas vale a pena observar que o método HHT é um algoritmo que introduz artificialmente amortecimento numérico, que por sua vez, pode abafar erros numéricos na análise. Esses erros numéricos podem ser de origem da malha grosseira ou da quantidade de pontos de integração numérica adotada. A introdução do amortecimento numérico introduzido na solução pode esconder esses erros numéricos e não apresentar resultado real da solução.

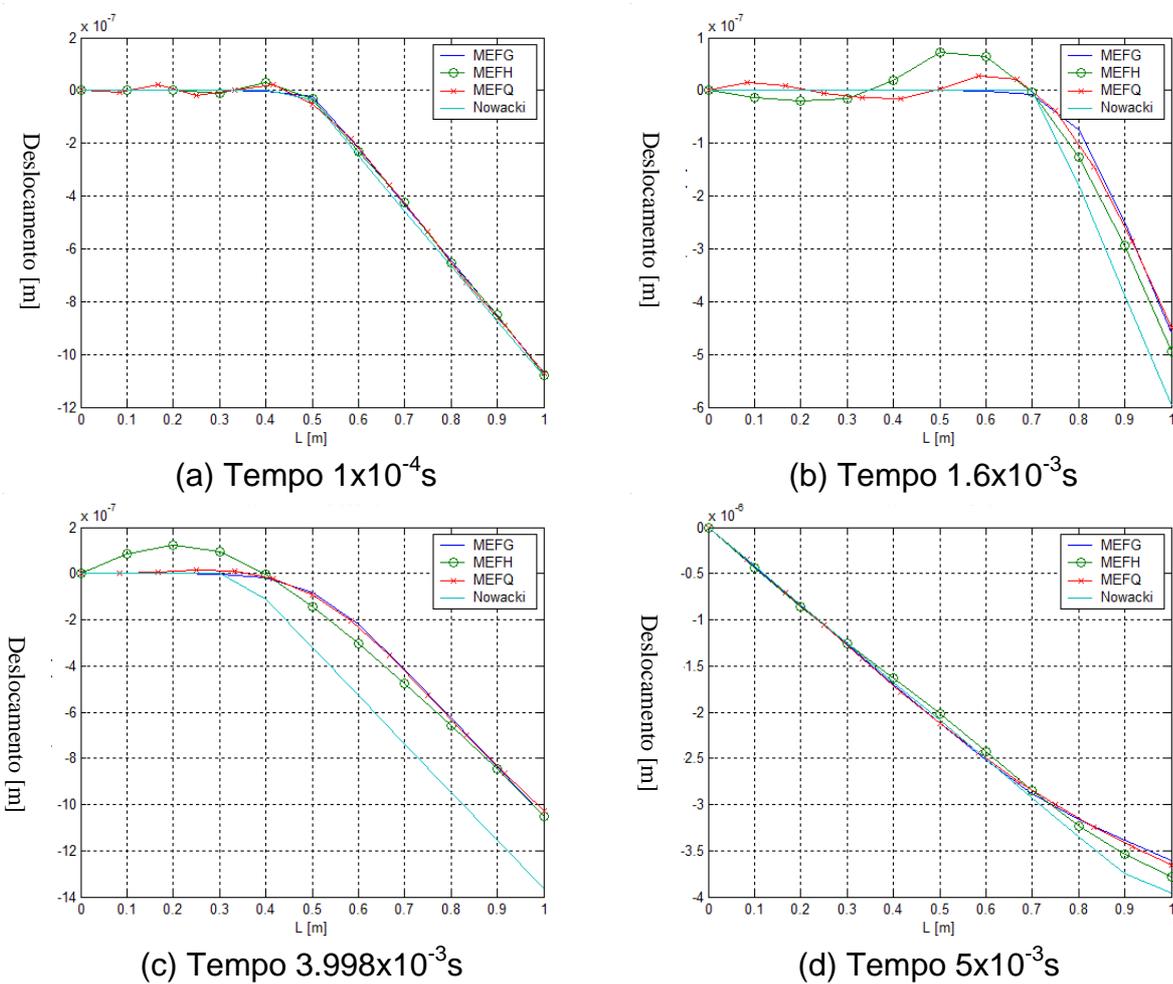


Figura 6.1.9. Perfil de deslocamento em instantes diferentes.

A partir dos resultados obtidos pelas formulações convencionais e enriquecidas, e pelo o método HHT, foi feita uma estimativa de erro associando a solução analítica de Nowacki (1963) e a solução numérica. Os erros foram determinados no nó da extremidade livre pelo modelo de estimador de erro proposto

por Torii (2012). Para efeito de comparação, os erros numéricos foram estimados por malhas de números de graus de liberdade diferentes. Foi adotado refino h nesta análise. Os resultados são apresentados pela figura 6.1.10. É possível observar que o MEFQ e o MEFH apresentam erro estimado em valores aproximadamente constantes, mesmo diante o aumento do número de graus de liberdade. Assim, mostrando eficiência dos métodos aplicados para este exemplo. Por outro lado, o MEFH e o MEFn apresentam convergência de erro diante do refino h . Mesmo assim, os erros estimados são ainda maiores em relação ao MEFQ e ao MEFH.

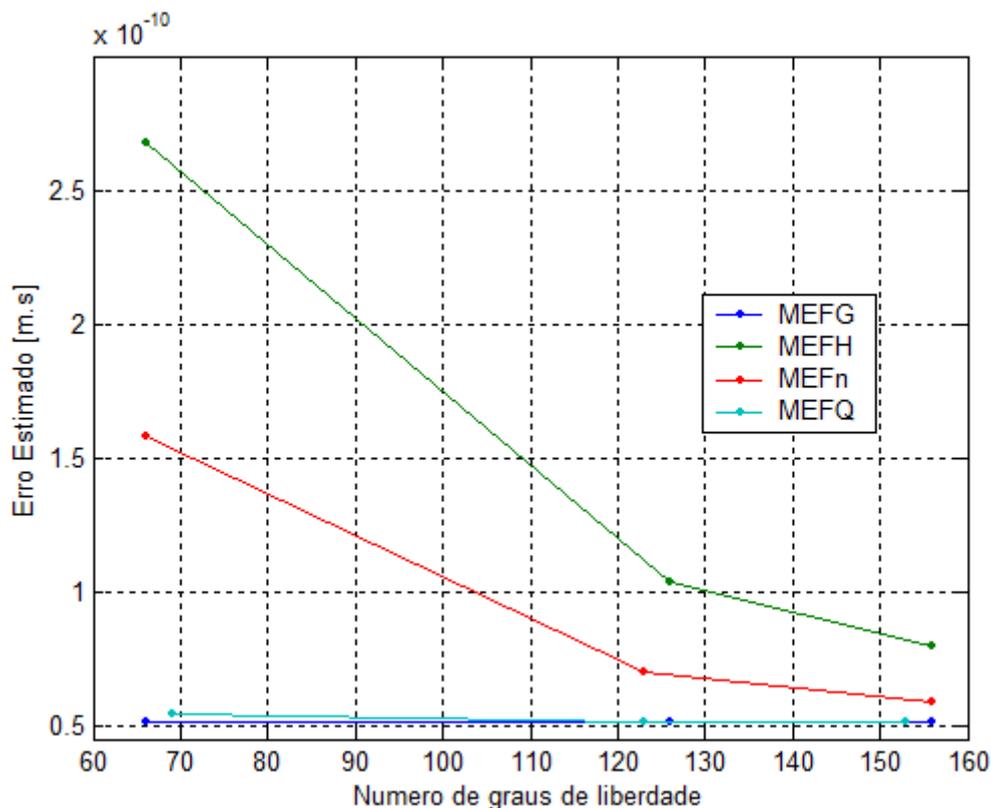


Figura 6.1.10. Erros estimados por formulações convencionais e enriquecidas, exemplo 1.

6.2. Barra engastada – livre submetida à força de impulso

Nesta seção, a barra do modelo 1 é submetida a uma força de impulso na extremidade livre. A solução temporal é feita com intervalo de tempo de 1×10^{-6} s, durante 5000 passos. A força de magnitude de -1000N é aplicada para extremidade livre no intervalo de tempo de 0s e até 1×10^{-5} s.

A solução analítica é obtida por Chopra (1995) e mostrada nas equações (6.2.1a) a (6.2.1c), onde t_d é o intervalo do tempo, contado de zero, com a aplicação da força impulsiva até a mesma ser descarregada.

$$u(x,t) = \frac{8f_o L}{\pi^2 EA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{(2n-1)\pi ct}{2L}\right)\right) \right] \text{ para } t \leq t_d \quad (6.2.1a)$$

$$u(x,t) = \frac{8f_o L}{\pi^2 EA} \sum_{n=1}^{\infty} \left[u(t_d) \cos(\omega_n(t-t_d)) + \frac{\dot{u}(t_d)}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n(t-t_d)) \right] \quad (6.2.1b)$$

$$u(t_d) = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{(2n-1)\pi ct_d}{2L}\right)\right) \quad (6.2.1c)$$

Os resultados apresentados nas próximas figuras são relativos ao nó da extremidade livre. A figura 6.2.1 mostra as curvas de aceleração obtidas no nó da extremidade e determinadas pelos diversos métodos. A figura 6.2.2(a) mostra as curvas de velocidade. É possível observar que todos os elementos tiveram elevada perturbação no seu resultado, devido ao carregamento e descarregamento da força impulsiva. Depois de certo tempo, os elementos começaram a apresentar resultados repetitivos. A figura 6.2.3(a) mostra as curvas de deslocamentos obtidas pela solução numérica e analítica. É possível observar que a força impulsiva gera deslocamentos no formato de função degrau.

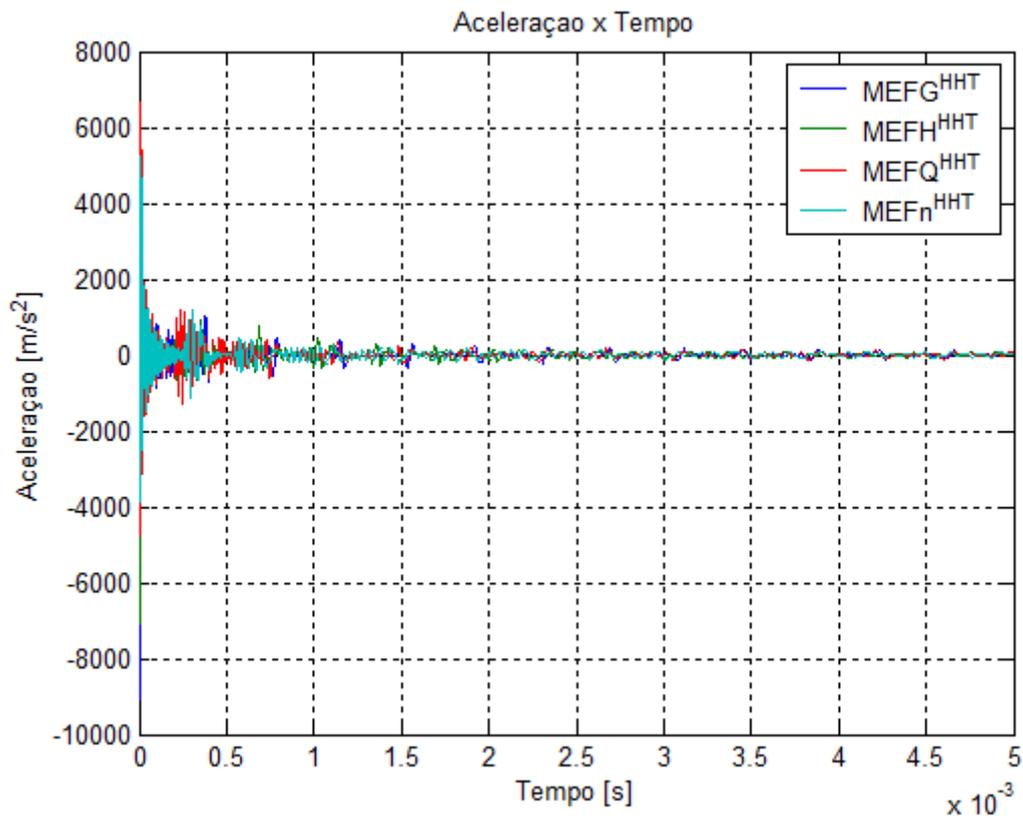


Figura 6.2.1. Aceleração do exemplo 2, resultado obtido por diversos métodos.

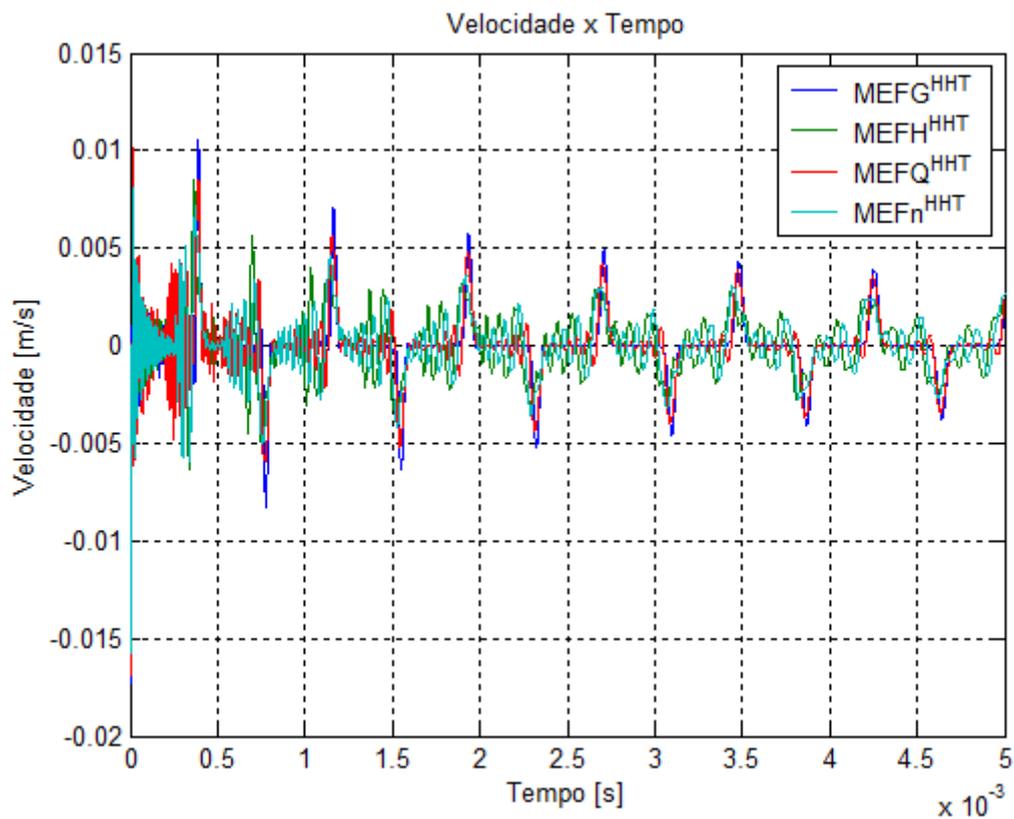


Figura 6.2.2(a). Velocidade do exemplo 2, resultado obtido por diversas formulações.

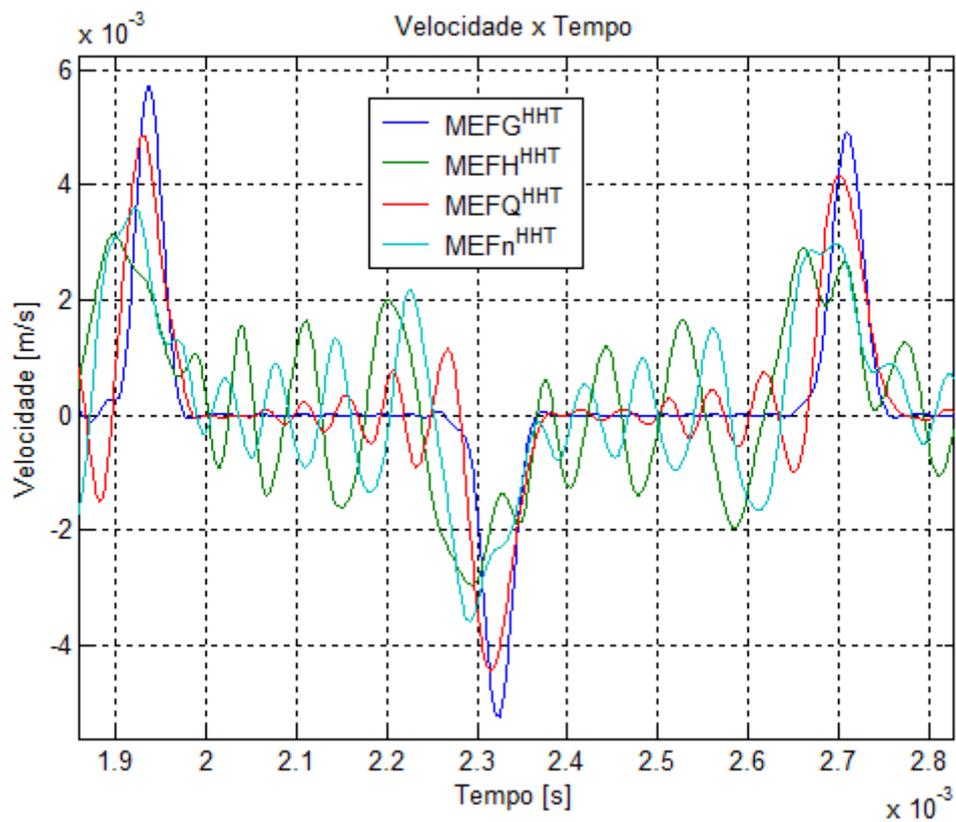


Figura 6.2.2(b). Ampliação da figura 6.2.2(a).

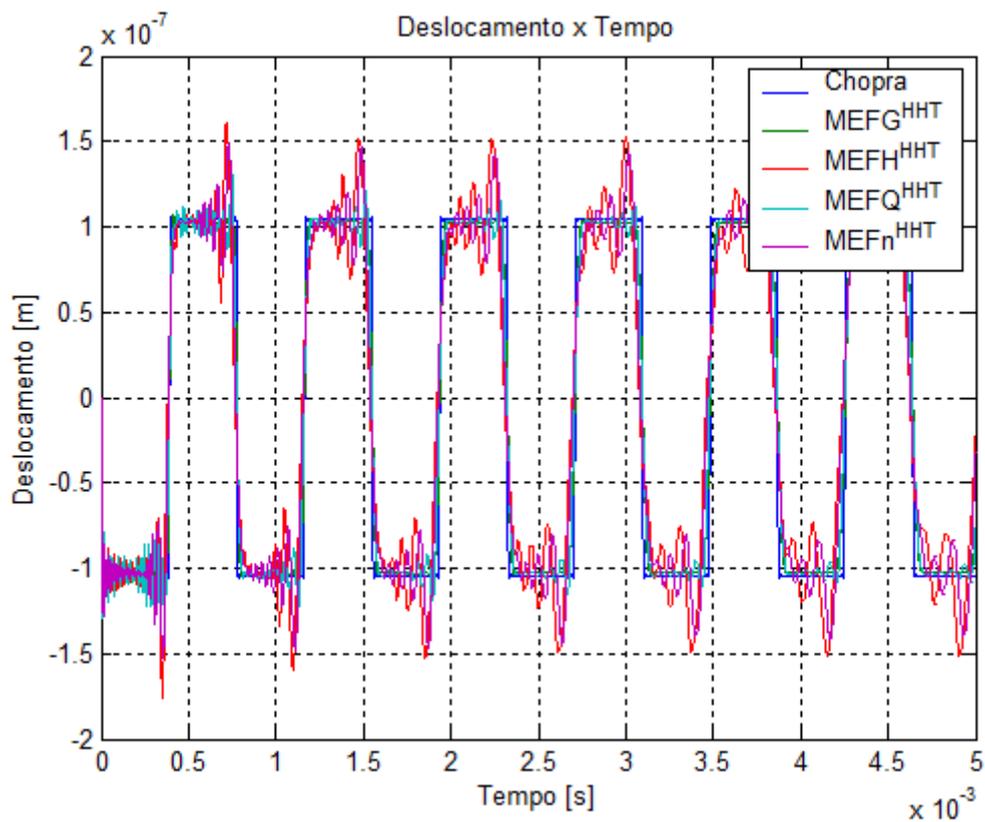


Figura 6.2.3(a). Deslocamentos do exemplo 6.2, resultados obtidos por diversas formulações.

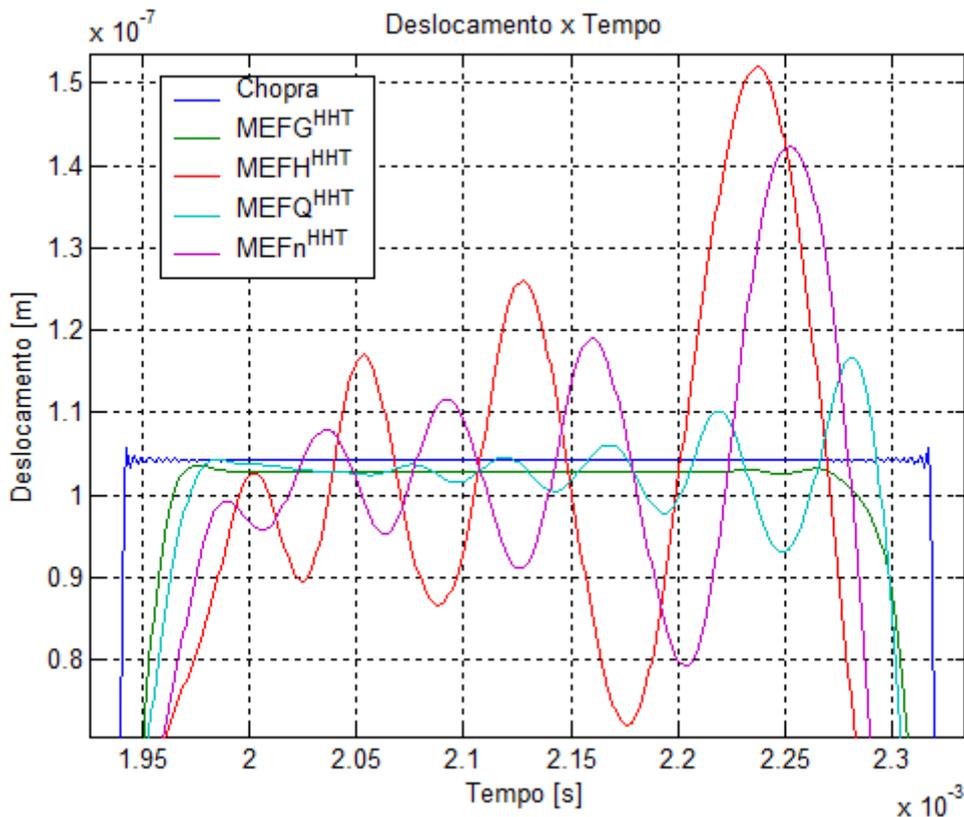


Figura 6.2.3(b). Ampliação da figura 6.2.3(a).

Em função disso, quando o nó da extremidade livre inverter o sentido de deslocamento, a velocidade associada se mostra como um salto na forma de pico. Esse fenômeno é visto na figura 6.2.2(a) pelo resultado apresentado do MEFQ. A figura 6.2.2(b) revela que outros elementos não foram capazes, como o MEFQ, de determinar os resultados com estabilidade razoável. Isso revela a eficiência do MEFQ em obter resultados estáveis quando é aplicado junto com algoritmo de característica dissipativa, como o HHT. A partir da figura 6.2.3(b), é possível anotar que MEFQ apresenta levemente oscilação numérica diante de força impulsiva, enquanto MEFG se mostra estável. Para os outros elementos, o MEFH e o MEFn, observa-se comportamento oscilatório, muito mais que a solução analítica. Convém lembrar que nos quatro elementos se utilizou malha com aproximadamente o mesmo número de graus de liberdade, MEFQ e MEFn 123, MEFG e MEFH 126. As figuras 6.2.4(a) – (d) mostram a passagem de onda de deslocamentos. A seta vermelha indica a direção da propagação. Nessas figuras, o resultado do MEFn não é incluído. Apesar de o MEFQ e o MEFG não coincidirem inteiramente com a

solução analítica, são, entretanto, os que mais se aproximam a esta solução, mais do que o MEFH.

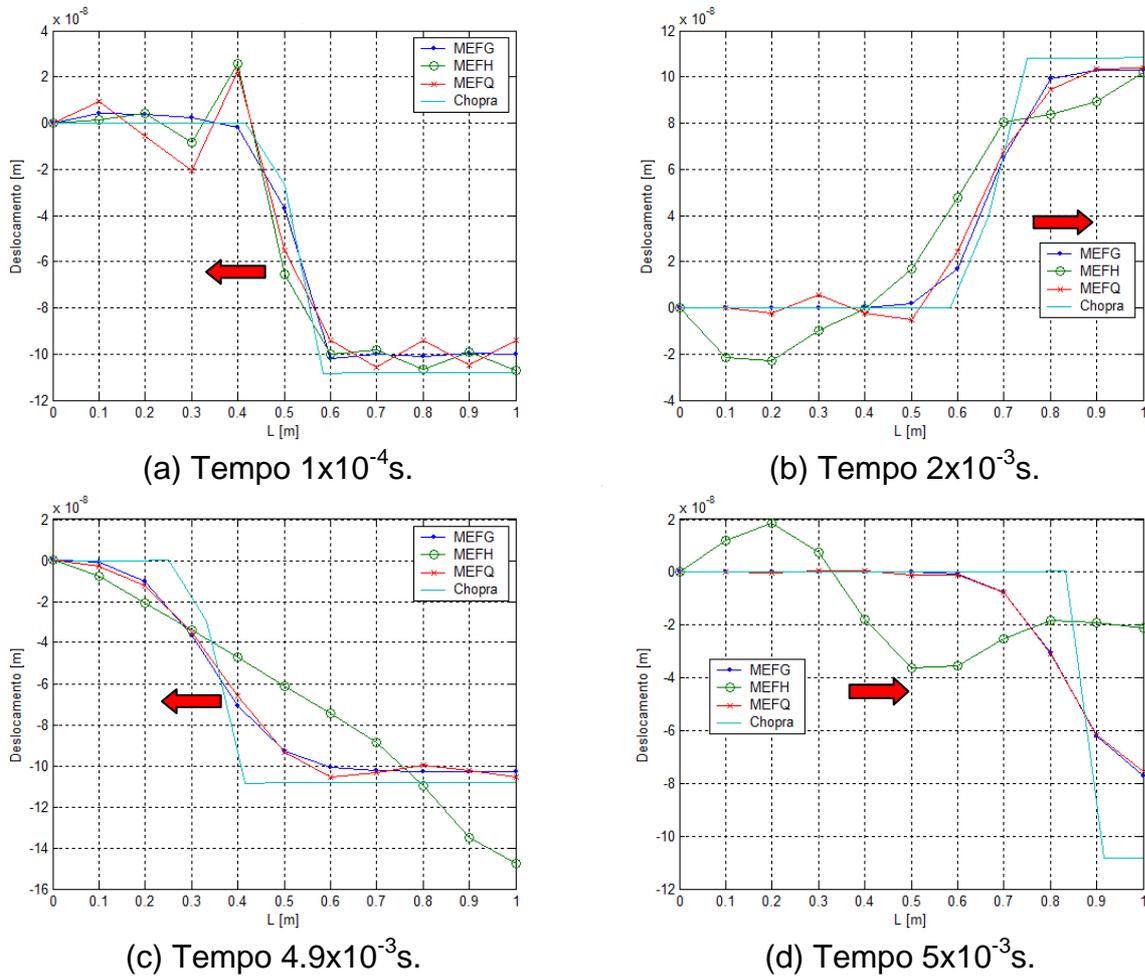


Figura 6.2.4. Perfil de deslocamento do exemplo 6.2 em instantes diferentes.

6.3 Análise elástica de barra biengastada com deslocamento inicial.

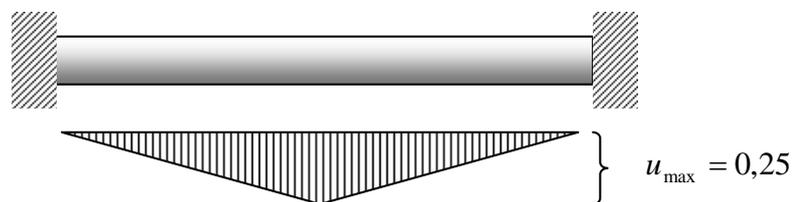


Figura 6.3.1. Esquemático de barra biengastada, submetido ao deslocamento inicial.

O exemplo 3 mostra um caso já analisado por Torii (2012), em que uma barra biengastada é submetida ao deslocamento longitudinal inicial como mostra a figura

6.3.1. O comprimento da barra é de 1 m e $\sqrt{E/\rho} = 1m/s$. A malha adotada pelos MEFQ, MEFH e MEFG tem o mesmo número de graus de liberdade; e os métodos Newmark e HHT são comparados.

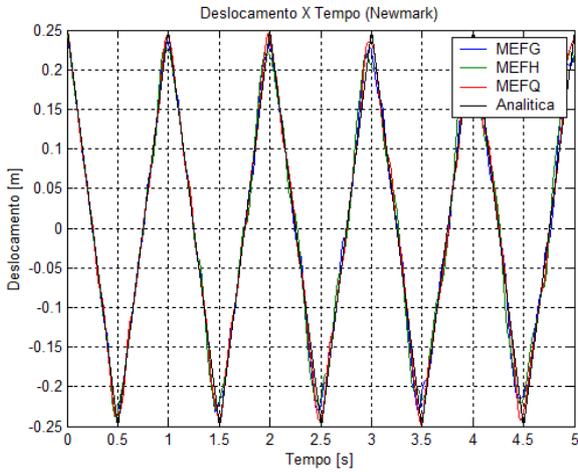


Figura 6.3.2(a). Deslocamento do exemplo 3, Newmark.

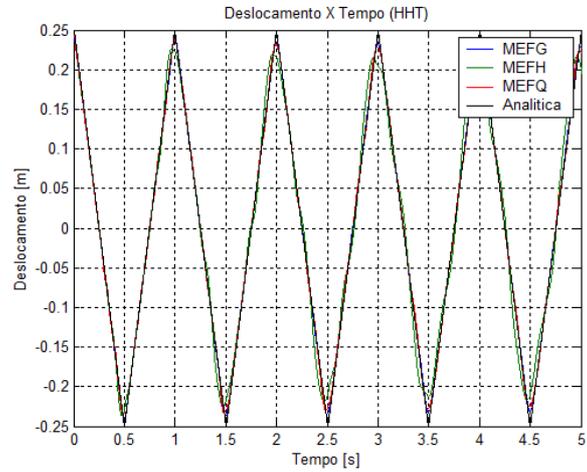


Figura 6.3.2(b). Deslocamento do exemplo 3, HHT.

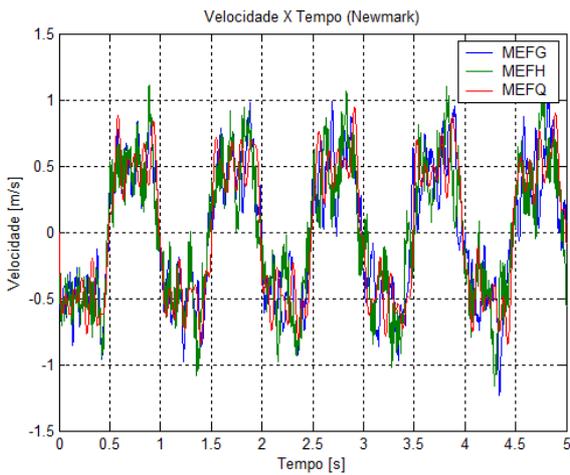


Figura 6.3.2(c). Velocidade do exemplo 3, Newmark.

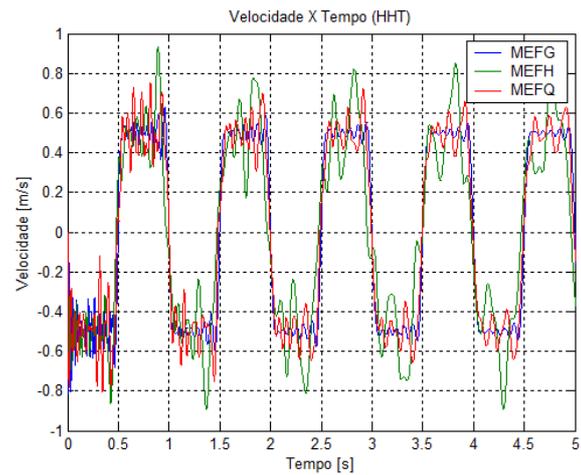


Figura 6.3.2(d). Velocidade do exemplo 3, HHT.

Fez-se a análise, conforme Torii (2012), com intervalo de tempo de $2,5 \times 10^{-3}$ s, e os parâmetros de Newmark são $\alpha = 0,5$ e $\gamma = 0,25$. Em paralelo, o método HHT também foi considerado. O objetivo desse exemplo é, portanto, reproduzir os mesmos resultados obtidos por Torii (2012) e comparar, em paralelo com Newmark e HHT, o comportamento dos elementos enriquecidos e convencionais. Os resultados extraídos são do nó que está situado bem no meio da barra.

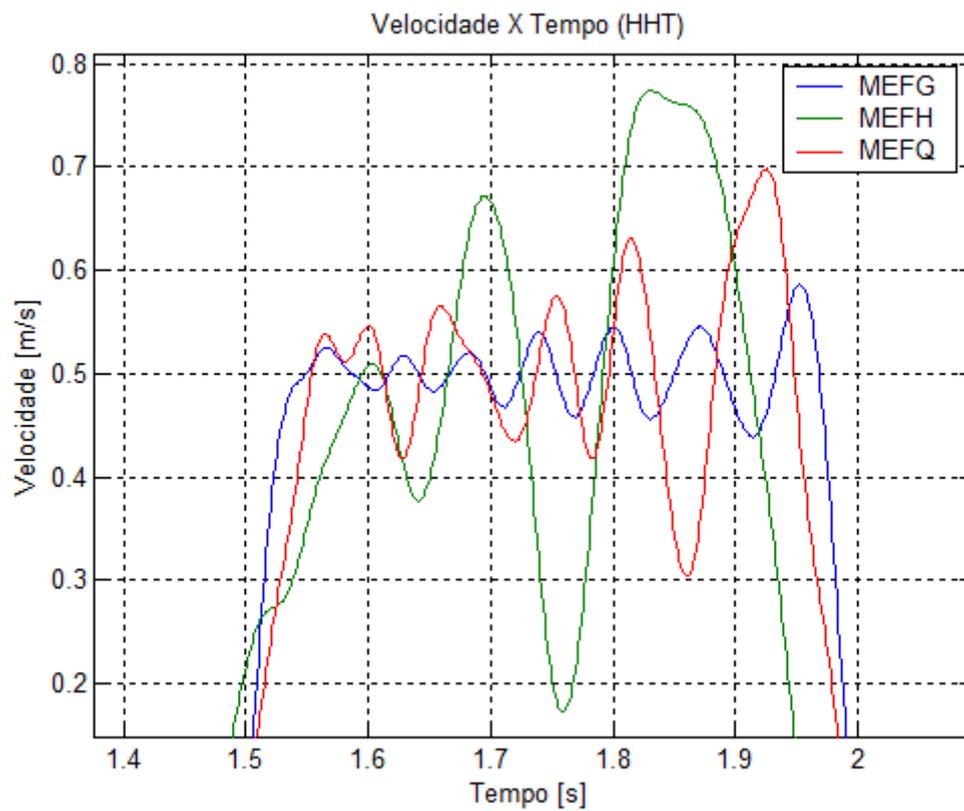


Figura 6.3.3(a). Ampliação da figura 6.3.2(d).

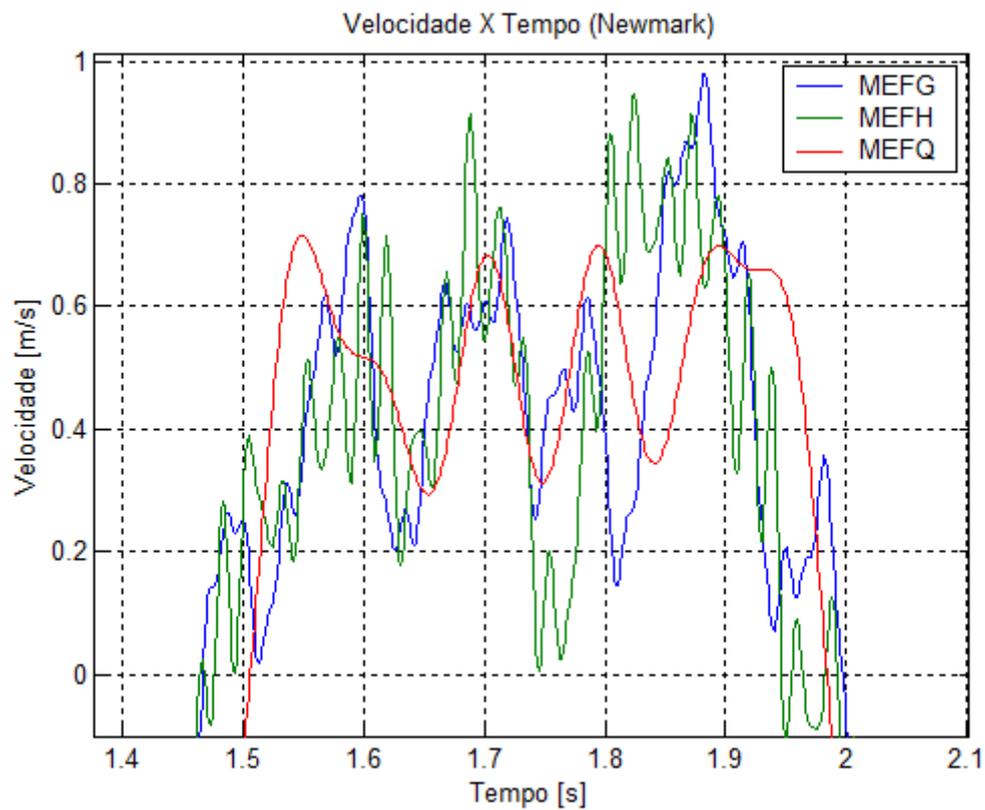


Figura 6.3.3(b). Ampliação da figura 6.3.2(c).

As figuras 6.3.2(a) e (b) mostram as curvas de deslocamentos obtidas pelos métodos de Newmark e HHT, respectivamente, as quais são semelhantes ao resultado apresentado por Torii (2012). Diante das mesmas condições de malha e parâmetros de análise, a figura 6.3.2 (a) mostra que o MEFQ é o que se aproxima mais da solução analítica, enquanto o MEFG e o MEFH apresentam resultados bem semelhantes. Entretanto, a figura 6.3.2(b) mostra outra situação com a utilização de HHT. Os três elementos tiveram amortecimento numérico devido à característica dissipativa do HHT, e o MEFG é o que mais se aproxima da solução analítica, mais do que MEFQ, enquanto MEFH é o que está mais afastado. A partir dessa observação, conclui-se que o MEFH, com funções de Lobatto e HHT para análise de barra, não apresenta comportamento satisfatório em comparação ao MEFQ e ao MEFG. Entretanto, com o método de Newmark, o MEFH apresenta curva de deslocamento semelhante ao MEFG.

As figuras 6.3.2(c) e (d) mostram comportamento dos três métodos em relação à derivada temporal do deslocamento, a velocidade. Com o método Newmark, o MEFG e o MEFH apresentam oscilação acentuada ao longo do tempo, enquanto o MEFQ revela menos oscilação, como acusa a figura 6.3.2(c). Por outro lado, a figura 6.3.2(d) mostra que o método HHT consegue reduzir essa oscilação para todos, e o MEFG é o que apresenta maior estabilidade, tanto na magnitude da velocidade quanto na frequência dessa oscilação numérica. As figuras 6.3.3(a) e (b) constituem uma ampliação das figuras 6.3.2(c) e (d).

Combinando com a observação feita a partir das análises das figuras 6.3.2(a) e (b), é possível concluir que o método Newmark proporciona condições favoráveis para MEF convencional e MEF enriquecido de modo a determinar o deslocamento com razoável precisão, em comparação à solução analítica. Entretanto, não consegue fornecer condições favoráveis para reduzir oscilação numérica da derivada temporal do deslocamento, especialmente quando apresenta descontinuidade na curva, como se observa na figura 6.3.2(c). Por outro lado, o método HHT introduz amortecimento numérico no cálculo dos deslocamentos, o que faz com que o MEFQ, o MEFG e o MEFH apresentem resultados mais afastados da solução analítica, em comparação com os resultados obtidos por Newmark. Entretanto, proporciona condições estáveis para reduzir oscilação numérica para os MEF's, mesmo diante descontinuidade numérica. Em especial, o MEFG fornece resultado mais estável devido à função de enriquecimento (ver figura 6.3.3(a)).

6.4. Viga bi-apoiada submetida à força impulsiva do tipo *Heaviside*

O exemplo 6.4 analisa uma viga bi-apoiada, com propriedades do conjunto 1, submetida à força do tipo *Heaviside*. O intervalo de tempo utilizado é 1×10^{-6} s, com 5000 passos. Somente o método HHT é utilizado. Uma força de magnitude 1000 N é aplicada justamente na metade da viga no tempo zero, e mantida com esse valor até final da análise. É um exemplo que visa avaliar o comportamento dos elementos MEFQ, MEFH e MEFG numa situação que envolve flexão, especialmente para os elementos enriquecidos.

As funções utilizadas para o enriquecimento de deslocamentos transversais são avaliadas pela observação dos resultados a serem apresentados pelas figuras seguintes. Para o MEFH, as funções de Bardell, (4.2e) (4.2f) são utilizadas para enriquecimento de deslocamentos transversais. Para o MEFG, as funções (4.19) propostas por Arndt (2009) são adotadas. A solução analítica para deslocamentos no ponto da aplicação da força é apresentada por Chopra (1995), como mostra a equação (6.4.1). Os resultados dos elementos MEFG e MEFH são obtidos com malha de 11 nós; os resultados do MEFQ foram determinados por uma malha de 21 nós. Essa consideração foi feita para que se tenha um parâmetro em comum de grau de liberdade para a malha adotada pelos elementos em estudo.

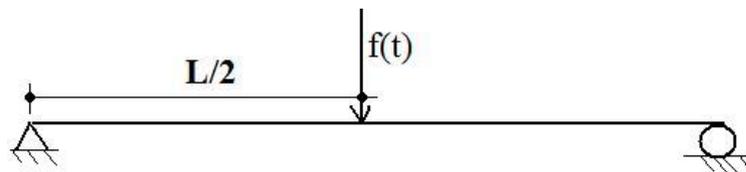


Figura 6.4.1 Esquemático da viga fixa – apoiada submetida à força do impacto.

Segundo Chopra (1995), o problema em questão apresenta o seguinte campo de deslocamentos:

$$u(x,t) = \frac{2P_o L^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi(L/2)}{n^4} (1 - \cos \omega_n t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (6.4.1)$$

Os resultados obtidos no nó situado no meio da viga são apresentados nas figuras 6.4.2, 6.4.3 e 6.4.4. São eles: acelerações, velocidades e deslocamentos

transversais, respectivamente. Os resultados obtidos pela solução analítica da equação (6.4.1) servem como referência de comparação.

A figura 6.4.2 mostra a curva de aceleração versus tempo obtida pelos diferentes métodos e solução analítica; e a figura 6.4.3, a curva de velocidades versus tempo. É possível observar que os elementos enriquecidos com a função de Bardell e Arndt apresentam resultado semelhante ao do MEFQ. A partir da observação dos resultados, em especial da figura 6.4.4, é possível considerar que os elementos utilizados apresentam resultados relativamente precisos, em relação ao que é fornecido pela solução analítica. Os três métodos praticamente têm seus resultados um sobrepondo com os outros. Isso indica que as funções de enriquecimento do MEFQ se comportam de forma semelhante às funções de Bardell, adotadas pelo MEFH, em combinação com o método HHT. O problema de amortecimento numérico apresentado nos exemplos anteriores não é observado nessa situação. O MEFH, com a função de enriquecimento de Bardell, também se mostrou eficiente por apresentar resultado próximo da solução analítica, sem oscilação numérica como se constatou nos exemplos anteriores de barra.

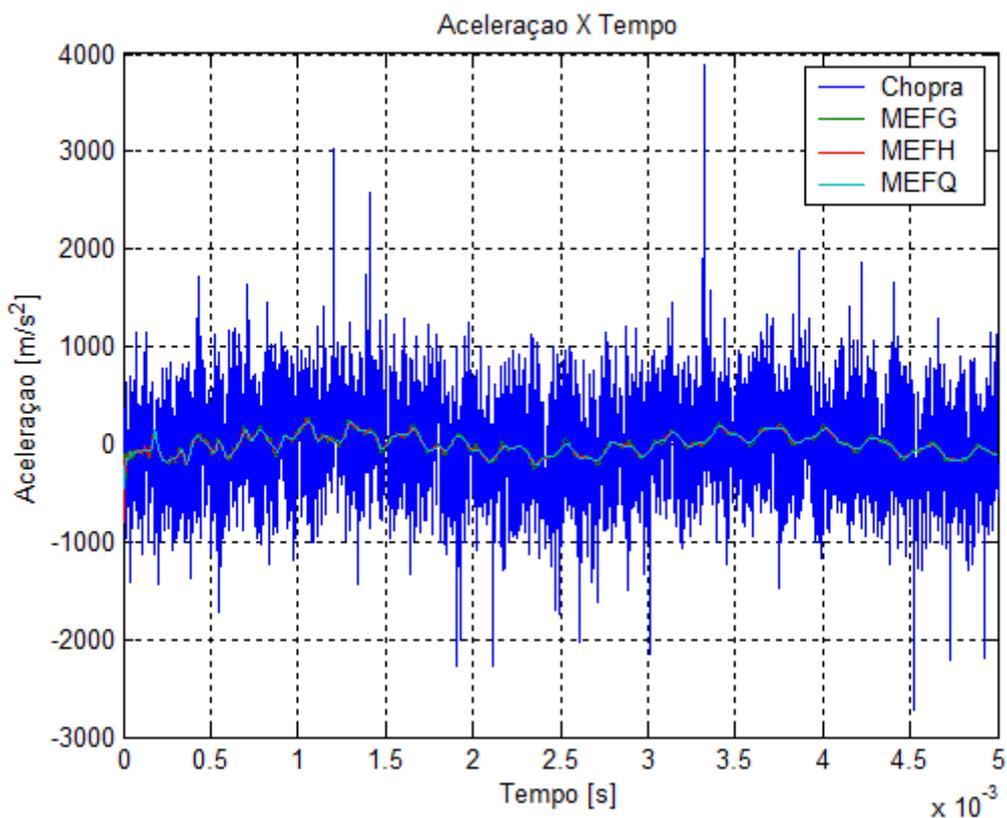


Figura 6.4.2. Aceleração do exemplo 4, resultado obtido por diversas formulações.

A configuração deformada da viga em função de deslocamentos transversais é apresentada nas figuras 6.4.5(a) – (d), em instantes diferentes. A figura 6.4.5 (a) o perfil de deslocamento no instante 1×10^{-3} s. No instante $2,217 \times 10^{-3}$ s, a curva de deslocamento transversal está bem próxima do ponto de inversão (ver figura 6.4.4). Logo, é possível observar uma diferença de resultados entre a solução analítica e as soluções dos métodos numéricos na figura 6.4.5(b). Aparentemente, os elementos enriquecidos e convencionais apresentam uma defasagem em magnitude de deslocamento transversal, no momento próximo ao ponto de inversão de sentido. Porém, essa diferença na magnitude dos deslocamentos se reduz ao longo do tempo, como mostra a figura 6.4.5(c). Por último, novamente, no instante próximo ao ponto de inversão, a figura 6.4.5(d) mostra claramente essa defasagem no tempo.

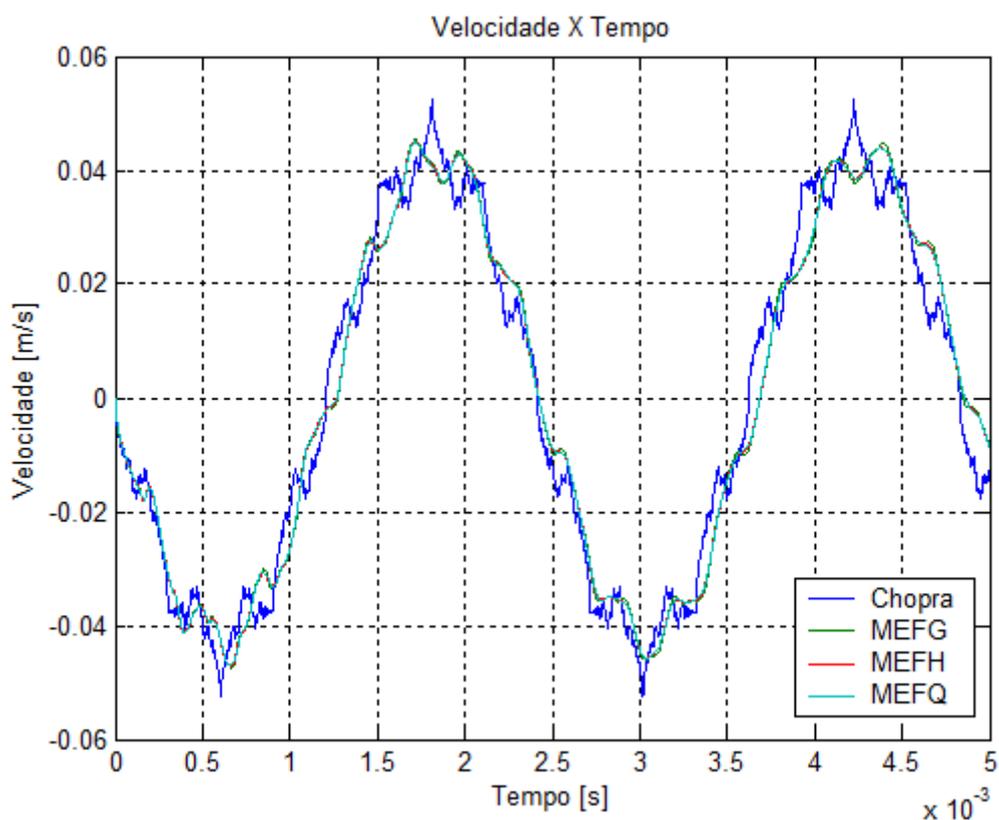


Figura 6.4.3. Velocidade do exemplo 4, resultado obtido por diversas formulações.

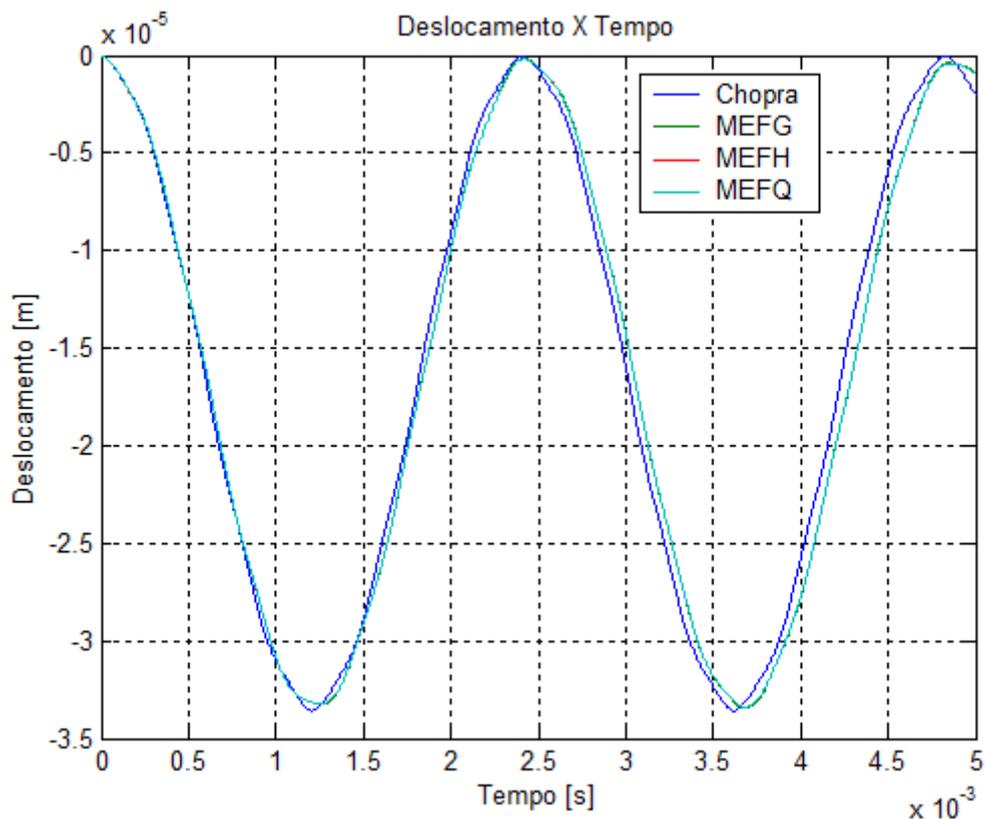
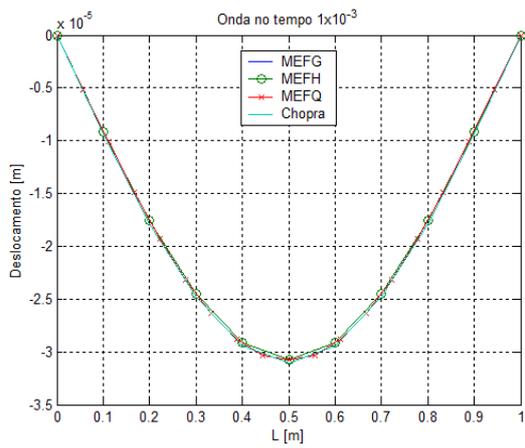
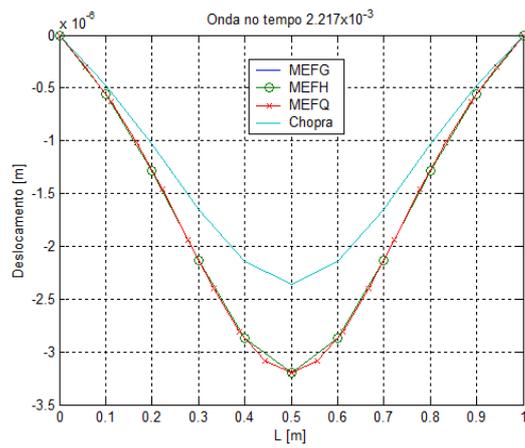


Figura 6.4.4. Deslocamento do exemplo 4, resultado obtido por diversas formulações.

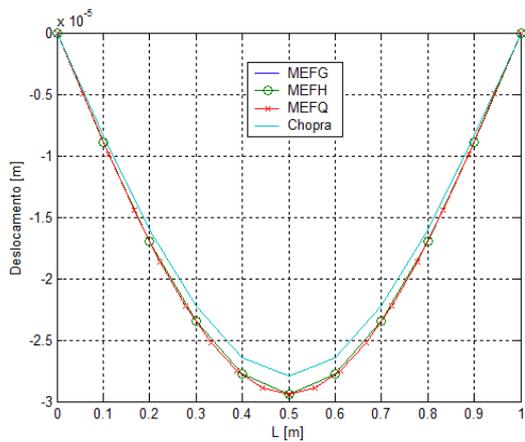
Outra possibilidade para causar essa defasagem é a própria propagação da onda. As ondas de deslocamentos provocadas por forças do tipo *Heaviside* viajam em alta velocidade na viga, a partir do ponto da aplicação da força até os dois extremos, e encontram condições de contorno distintas; assim, invertem o sentido de propagação e retornam ao seu ponto de partida. Durante o cálculo numérico da situação descrita, devido ao erro numérico, acumulativo na integração numérica e no algoritmo de HHT, acaba provocando essa defasagem.



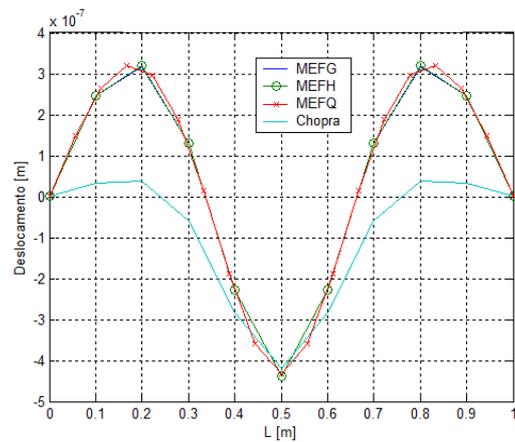
(a) Tempo 1×10^{-3} s.



(b) Tempo $2,217 \times 10^{-3}$ s.



(c) Tempo $3,942 \times 10^{-3}$ s.



(d) Tempo $4,887 \times 10^{-3}$ s.

Figura 6.4.5. Perfil deformado da viga do exemplo 4, em instantes diferentes.

Para analisar a contribuição da função de Bardell e da função de Arndt (2009) na determinação de deformações, considera-se o ponto situado no meio da viga, na superfície externa superior, e a curva é mostrada na figura 6.4.6. Os três elementos empregados acusam resultados praticamente iguais. Com o mesmo grau de liberdade e, por consequência, mesma dimensão das matrizes, os elementos enriquecidos apresentam deformação bem semelhante ao que foi apresentado por MEFQ. Os elementos enriquecidos têm como base o elemento de dois nós, enquanto o MEFQ, três nós, e suas funções de interpolação são polinômios de ordem mais elevada do que o do elemento de dois nós. Isso mostra a contribuição das funções de enriquecimento. Por outro lado, a deformação é a derivada espacial de deslocamento, que tem a degradação no resultado como característica inerente, especialmente no ponto entre dois elementos vizinhos.

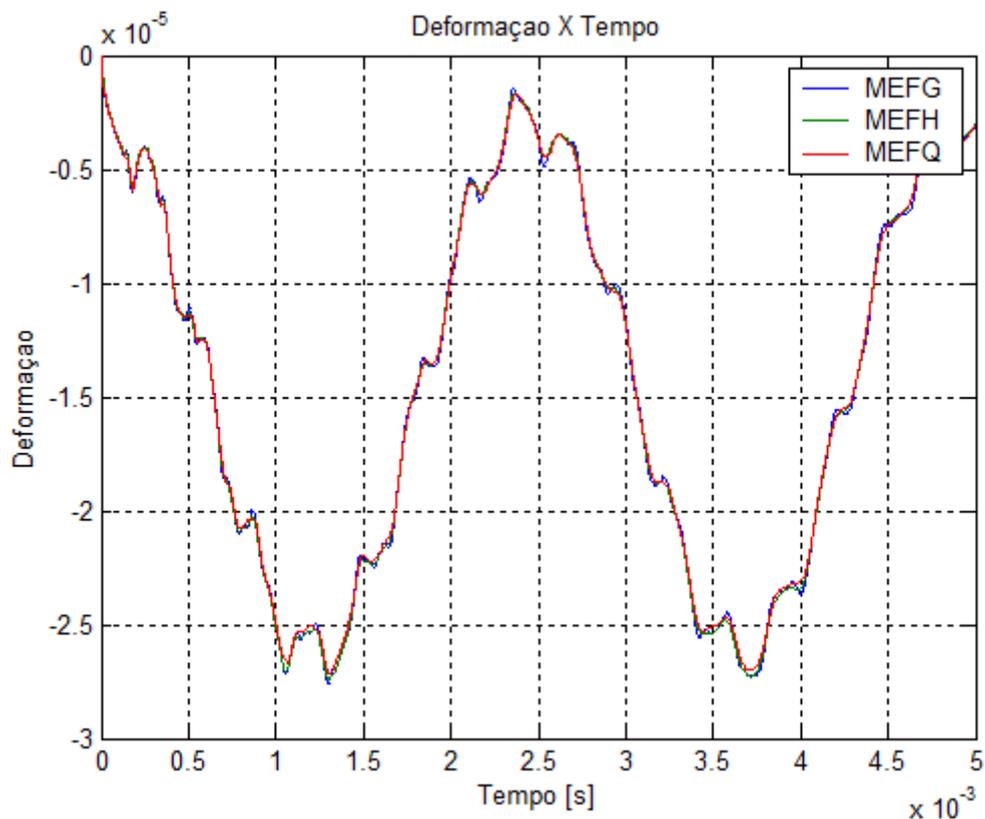


Figura 6.4.6. Deformação do exemplo 4, medida calculada no ponto situado no meio da viga.

6.5. Análise elástica de viga engastada – livre submetida à força vertical de impulso

Este exemplo analisa o caso de um viga com propriedades do conjunto 1, engastada – livre submetida à força vertical de impulso na extremidade livre. A força de impulso tem magnitude de -1000N , aplicada no instante inicial zero, e é descarregada no instante $0,1\text{s}$ na mesma magnitude. Somente o método HHT é aplicado, com intervalo de tempo de $1 \times 10^{-4}\text{s}$, 10000 passos de tempo.

O MEFH utiliza as funções de Bardell como função de enriquecimento, enquanto Mefg utiliza as de Arndt (2009), como no exemplo anterior. Os resultados como acelerações, velocidades e deslocamentos são extraídos no ponto da aplicação da força, na extremidade livre da viga. A viga é discretizada por onze nós para Mefg e MEFH, e vinte de um nó para MEFQ.

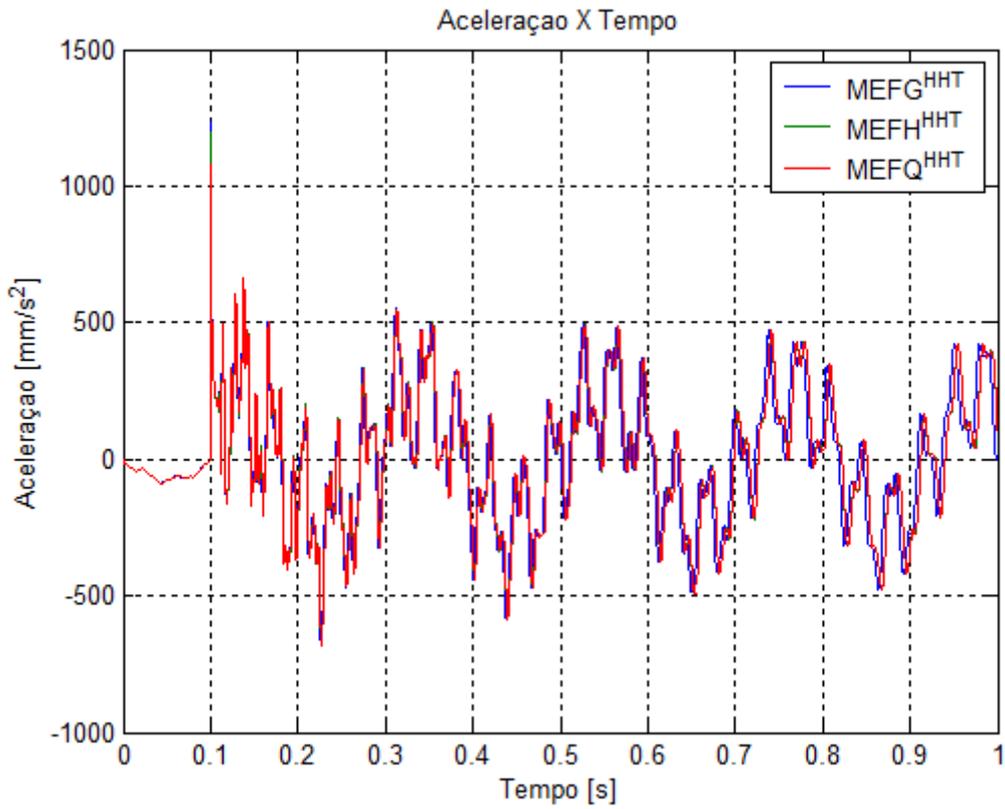


Figura 6.5.1. Aceleração do exemplo 5, resultados obtidos por diversas formulações.

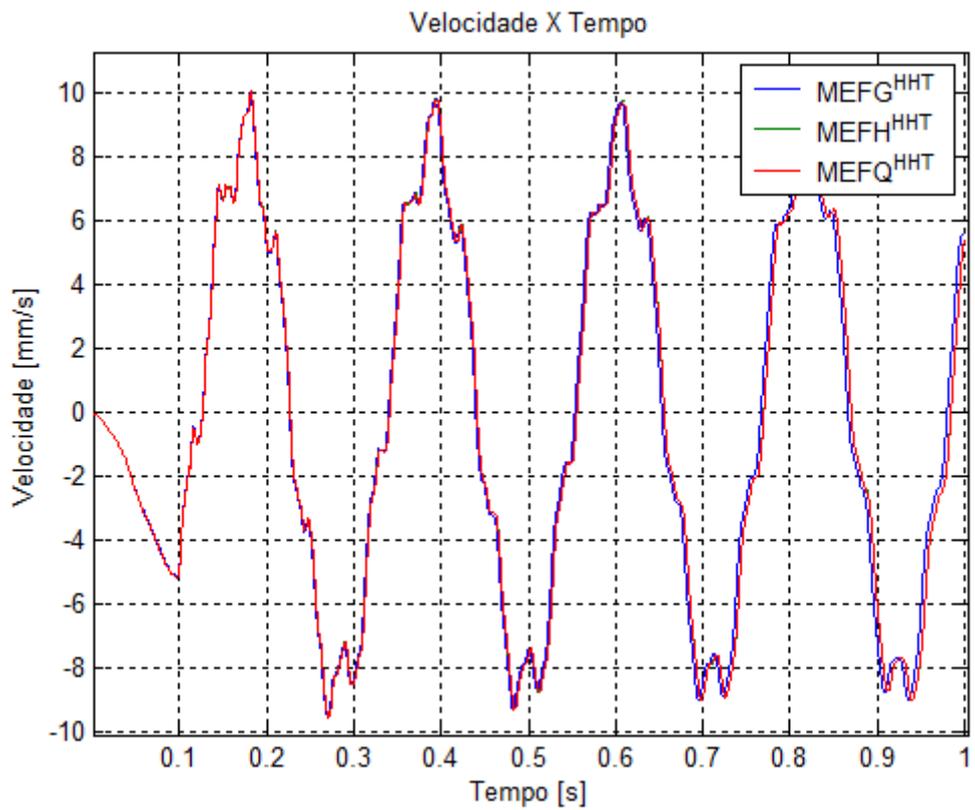


Figura 6.5.2. Velocidade do exemplo 5, resultados obtidos por diversas formulações.

Conforme as figuras - Figura 6.5.1 - curva de aceleração; Figura 6.5.2 - curva de velocidade; e Figura 6.5.3 - curva de deslocamento -, os resultados apresentados por três métodos em combinação com o HHT são semelhantes, com poucas diferenças na defasagem do tempo como no exemplo anterior. Esse exemplo mostra mais uma vez que o MEFQ e o MEFH são equivalentes no caso de deslocamento transversal, mesmo quando apresentam funções de enriquecimento diferentes.

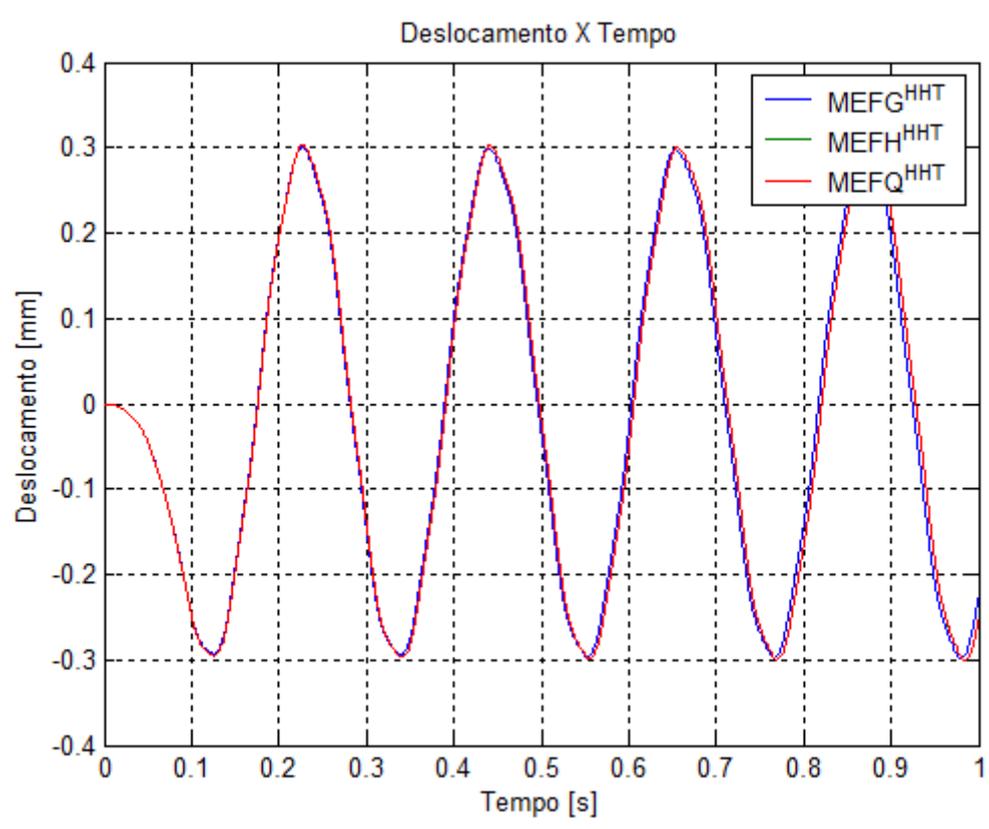


Figura 6.5.3. Deslocamento do exemplo 5, resultados obtidos por diversas formulações.

6.6. Plastificação de viga bi- apoiada submetida à força harmônica

O exemplo 6 analisa a viga mostrada na figura 6.4.1. As propriedades mecânicas e geométricas são do conjunto 2. Uma força harmônica de amplitude 15000N é aplicada no meio da viga, com frequência baixa, de 4 Hz. A amplitude da força foi calculada previamente para garantir que ocorra plastificação na viga, e uma baixa frequência foi adotada para testar o comportamento das funções de

enriquecimento em análises cíclicas, sem intervenção de efeito da frequência elevada. A função da força que está variando de acordo com o tempo é expressa pela equação (6.6.1). O método alfa generalizado foi adotado como método de solução temporal, com raio espectral de 0,6. Esse método permite trabalhar com intervalos do tempo maiores do que o de Newmark linear, no caso de análise dinâmica elastoplástica, e sem perder a estabilidade numérica. Por isso, essa característica foi aproveitada, adotando-se um intervalo do tempo de 5×10^{-5} s, com 60000 passos do tempo. A figura 6.6.1 mostra a curva de tensão – deformação do material utilizado na análise. Por simplicidade, o efeito do peso próprio da viga é desprezado. Adota-se modelo de Von Mises para a plastificação.

$$f(t) = f_o \text{sen}(\omega t) \quad (6.6.1)$$

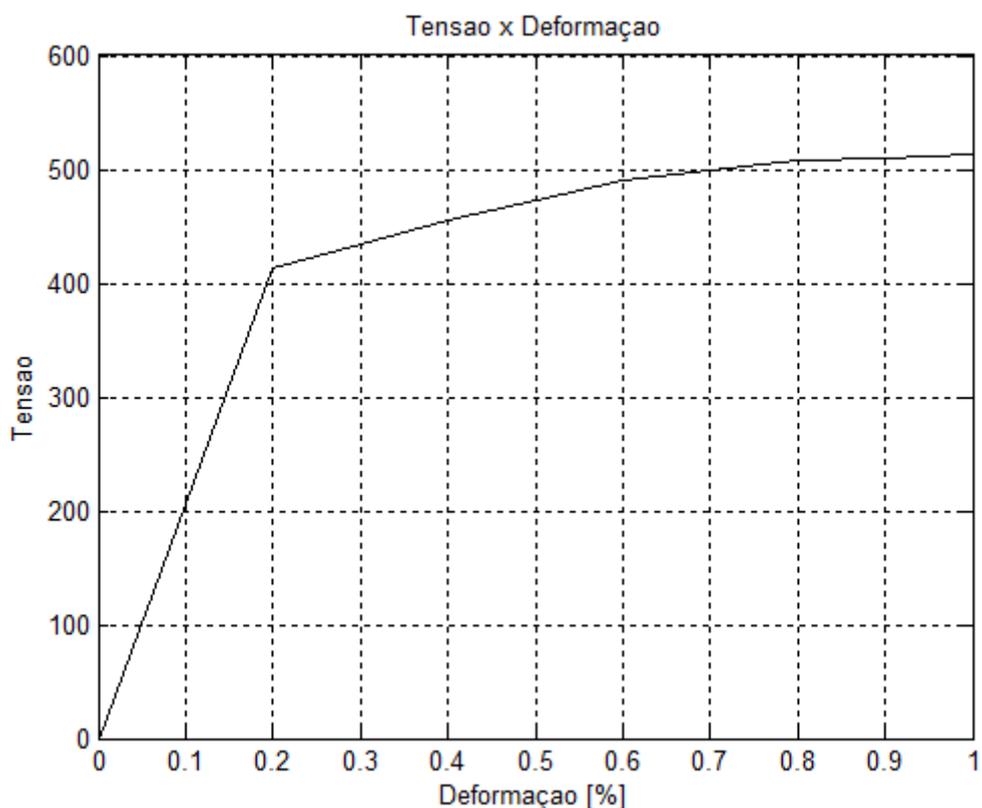


Figura 6.6.1. Curva tensão deformação do exemplo 6.

Os resultados são obtidos do nó situado no meio da viga. A figura 6.6.2 mostra a curva de aceleração, e a figura 6.6.3(a), a de deslocamentos. Observe-se que a curva de aceleração apresenta oscilação em sua magnitude nos instantes em

que o deslocamento está prestes a atingir um valor máximo, em módulo, tal como se observa na figura 6.6.3(a). Nesses instantes é que a viga inicia o processo de plastificação. Desse modo, no processo iterativo de Newton – Raphson, a viga busca nova configuração de distribuição de tensões. Em cada iteração, nova força residual - isto é, a diferença entre a força interna, resultante das tensões, e a força externa -, é determinada. Por isso, a figura 6.6.2 mostra essas oscilações na curva de aceleração. Para o cálculo das tensões, considere-se o segundo tensor de Piola-Kirchoff.

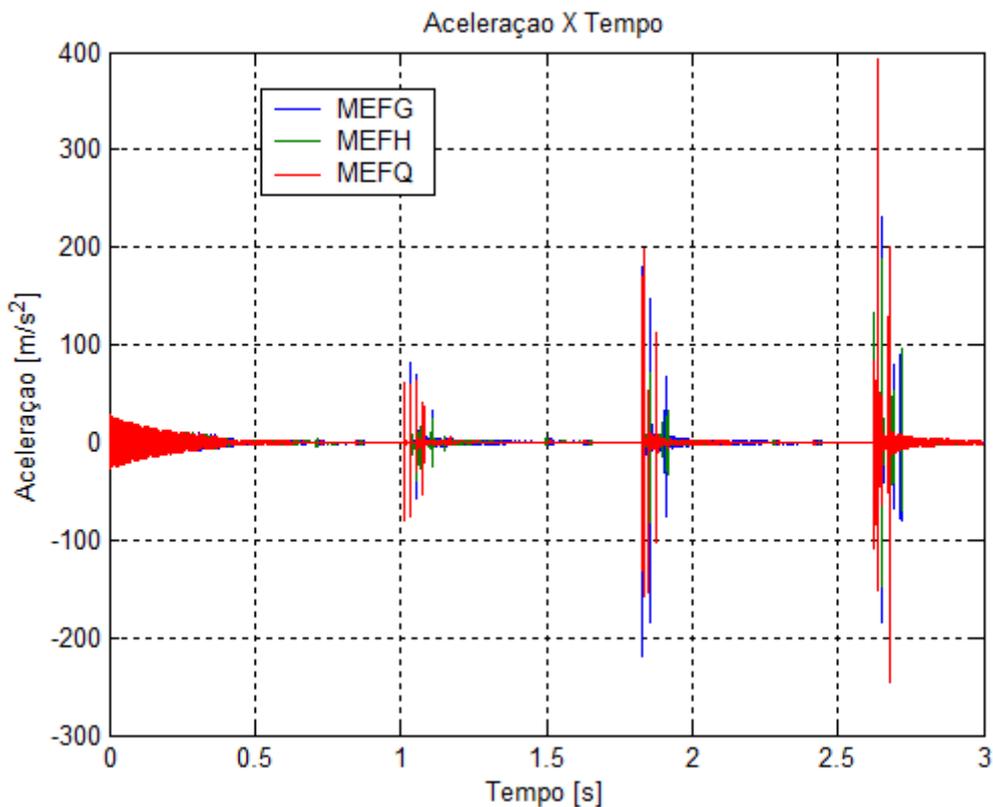


Figura 6.6.2. Aceleração do exemplo 6, resultado obtido por diversas formulações.

Durante a fase da plastificação, a deformação é determinada pelos termos lineares e não lineares. Logo, as funções de enriquecimento podem contribuir nos termos não lineares de deformação. Aparentemente, as funções de enriquecimento de Lobatto e de Arndt não introduzem perturbação numérica nos resultados (ver figura 6.6.3). Isso é um indício de que os termos não lineares de deformação podem incluir as funções de enriquecimento, sem comprometer os resultados, mesmo diante de análise dinâmica.

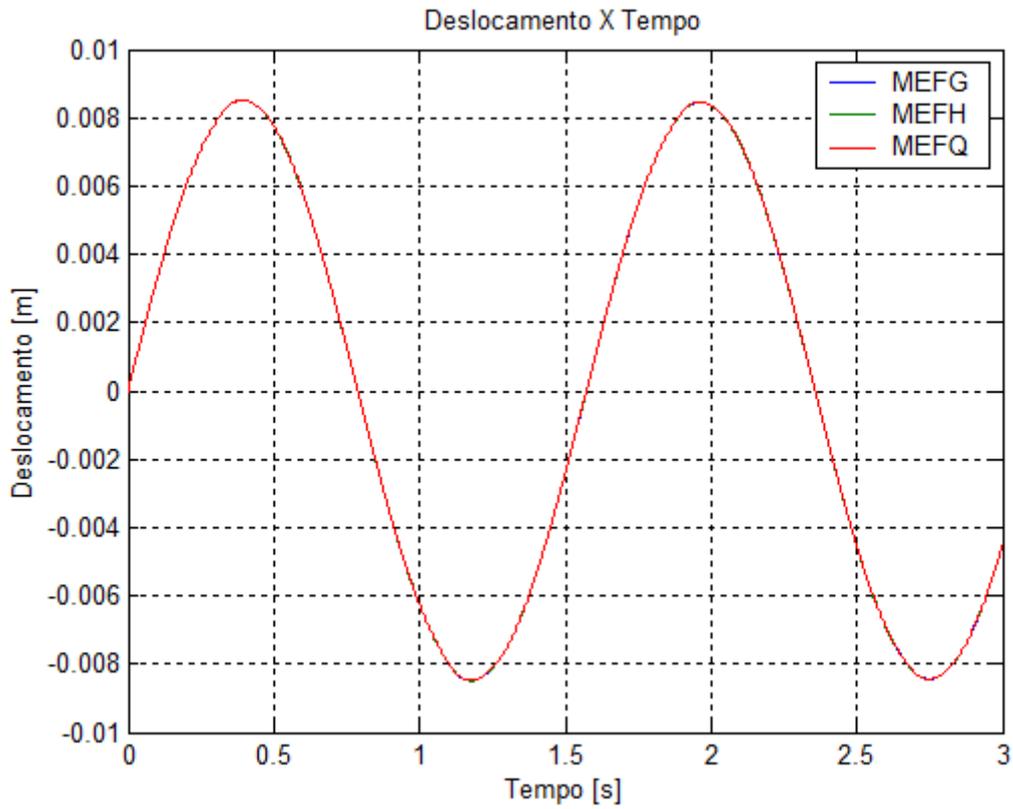


Figura 6.6.3(a). Deslocamento do exemplo 6, resultado obtido por diversas formulações.

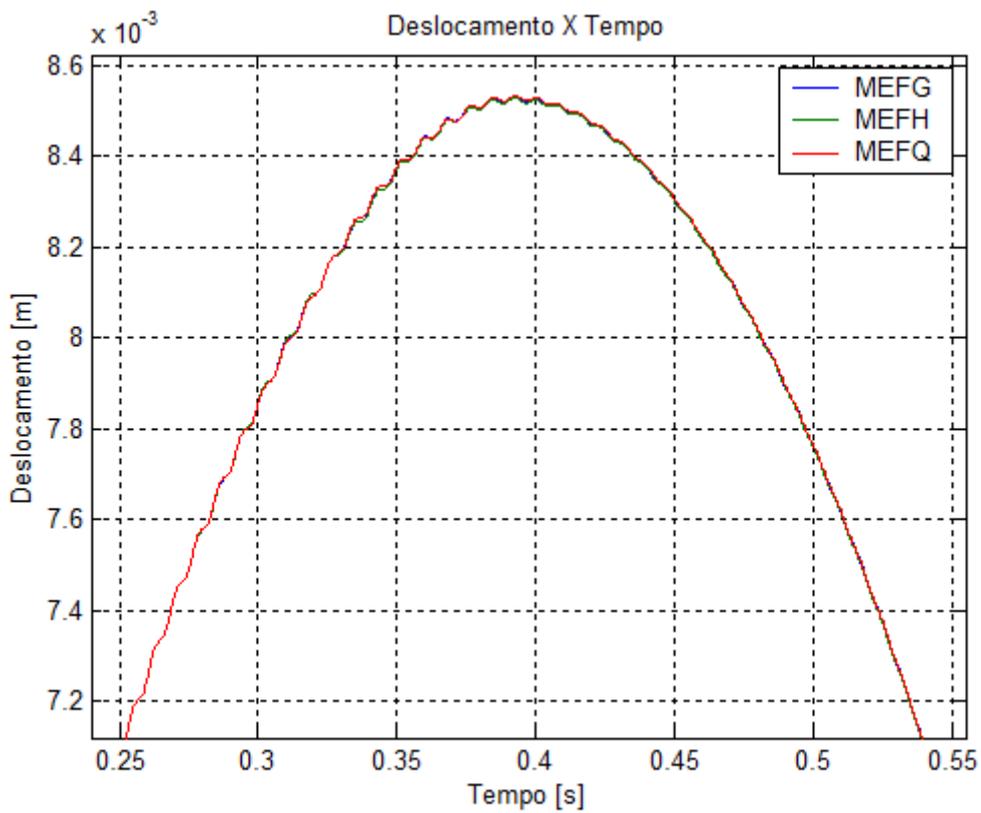


Figura 6.6.3(b). Ampliação da figura 6.6.3(a).

A figura 6.6.3(b) mostra uma vista ampliada do primeiro pico da curva deslocamento. É possível observar que resultados pelos três métodos apresentam oscilações em função da variação harmônica da força. Os três métodos conseguem determinar o mesmo efeito. Isso mostra que as funções de enriquecimento não afetam as oscilações transitórias, mesmo durante a plastificação. Essa característica é importante para uma análise dinâmica elastoplástica, devido ao fato de que as análises são feitas em intervalos de tempo extremamente pequenos e ao longo de muitos passos do tempo. Os elementos enriquecidos já são conhecidos por terem resultados mais preciso nas análises dinâmicas elásticas (TORII, 2012). Ao longo do processo iterativo, caso algum método seja capaz de garantir maior estabilidade, então reduzirá erro numérico e o tempo de processamento.

A figura 6.6.4 mostra as curvas de deformação versus o tempo, obtidas pelos elementos convencionais e enriquecidos. Essas curvas de deformação são obtidas na superfície externa superior da viga. É possível observar que os elementos enriquecidos apresentam mesmo resultado do elemento convencional. A curva de histerese de tensão – deformação é observada na figura 6.6.5. A tensão é de Von Mises e foi determinada na superfície externa superior do ponto central da viga. No regime elástico, antes da plastificação, os resultados dos três métodos são idênticos. Logo após a plastificação, os três elementos ainda apresentam relação tensão – deformação semelhante no patamar de escoamento. No momento de descarregamento, os três métodos acusam uma relação tensão – deformação em linhas paralelas à linha do regime elástico. Porém, erros numéricos são acumulados ainda na fase de plastificação. Por esse motivo, os três métodos têm pontos de partida diferentes para as linhas de descarregamento, como mostra a figura 6.6.5. No segundo ramo de plastificação, quando a deformação é de aproximadamente - 0,15%, os três métodos não apresentaram oscilação numérica no processo iterativo de expansão de superfície de Von Mises. O material nesse instante já está plastificado e apresenta tensão residual. Por esse motivo, o material plastifica com uma tensão de escoamento maior que 414 MPa, que era a tensão de escoamento original. O mesmo acontece no terceiro ramo de plastificação, com uma deformação menor que 0,2%.

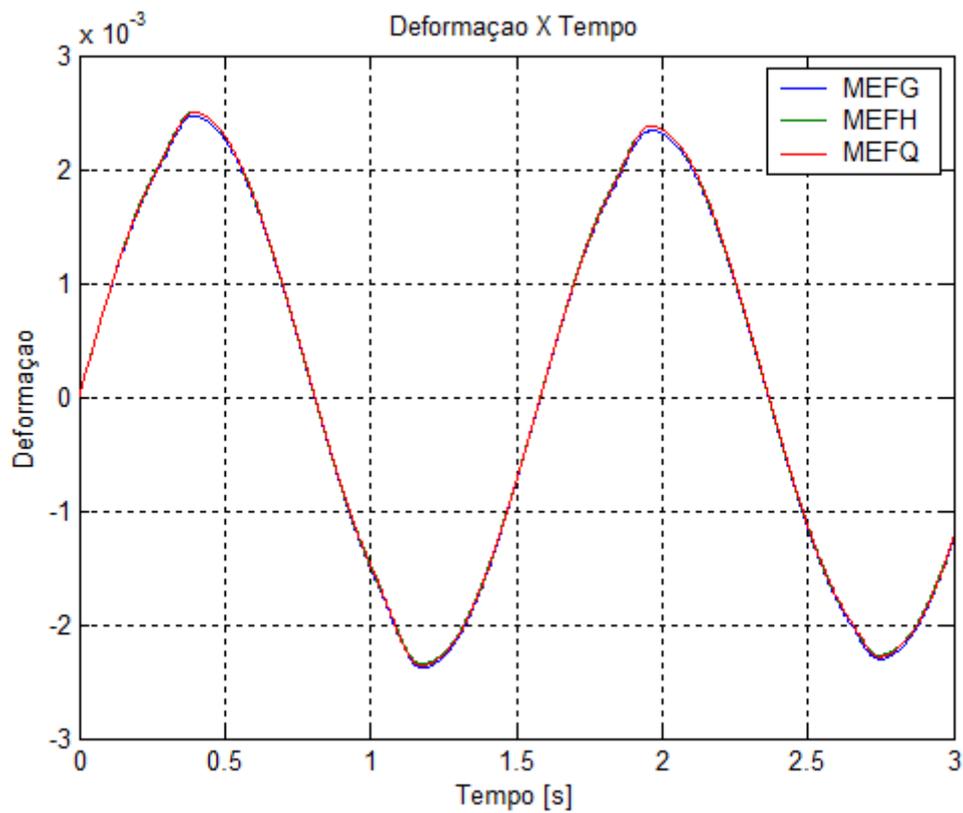


Figura 6.6.4. Curva deformação do exemplo 6, resultado obtido por diversas formulações.

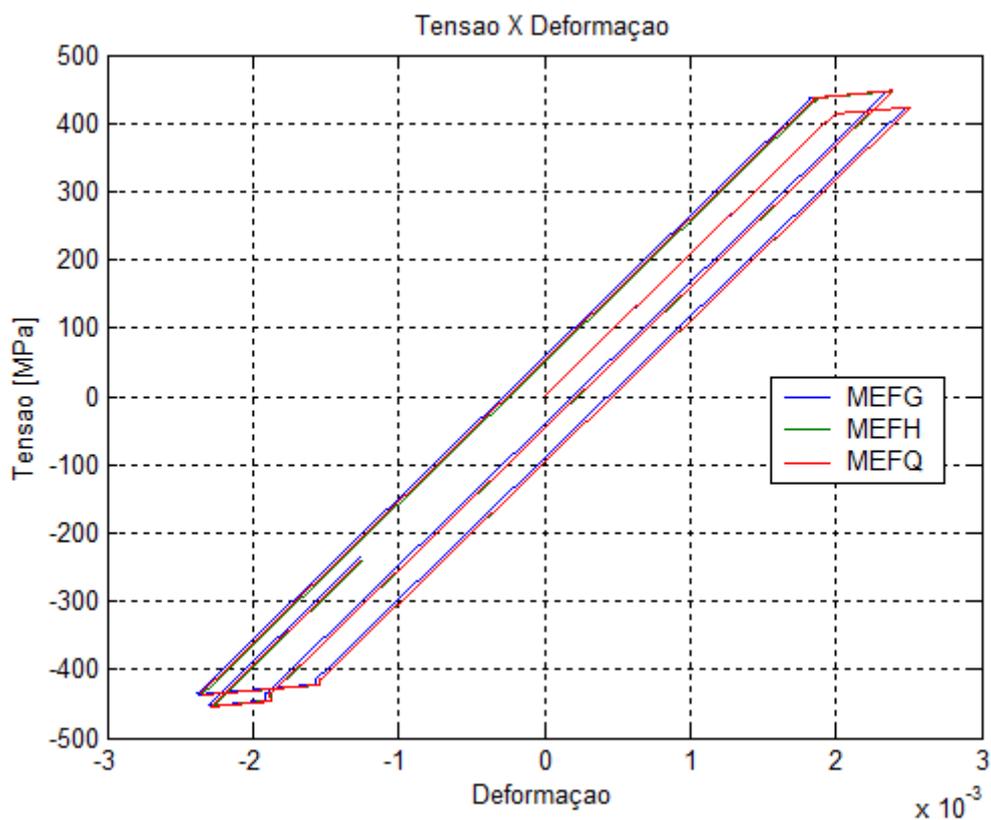


Figura 6.6.5. Curva tensão – deformação do exemplo 6, obtida por diversas formulações.

6.7. Plastificação de viga bi–apoiada submetida à força impulsiva do tipo *Heaviside*

Este exemplo analisa viga bi-apoiada mostrada na figura 6.4.1, submetida à força de tipo *Heaviside* no meio da viga. As propriedades são do conjunto 3. A relação tensão – deformação é mostrada pela figura 6.6.1. Uma força de magnitude -9000N é aplicada no instante inicial e descarregada no final da análise, 0,02s. A magnitude da força foi determinada *a priori* de modo a se garantir que a viga ultrapassasse o limite de escoamento e plastifique, seguindo relação de tensão – deformação multilinear. A força é aplicada no meio da viga, por isso os resultados são extraídos no mesmo ponto.

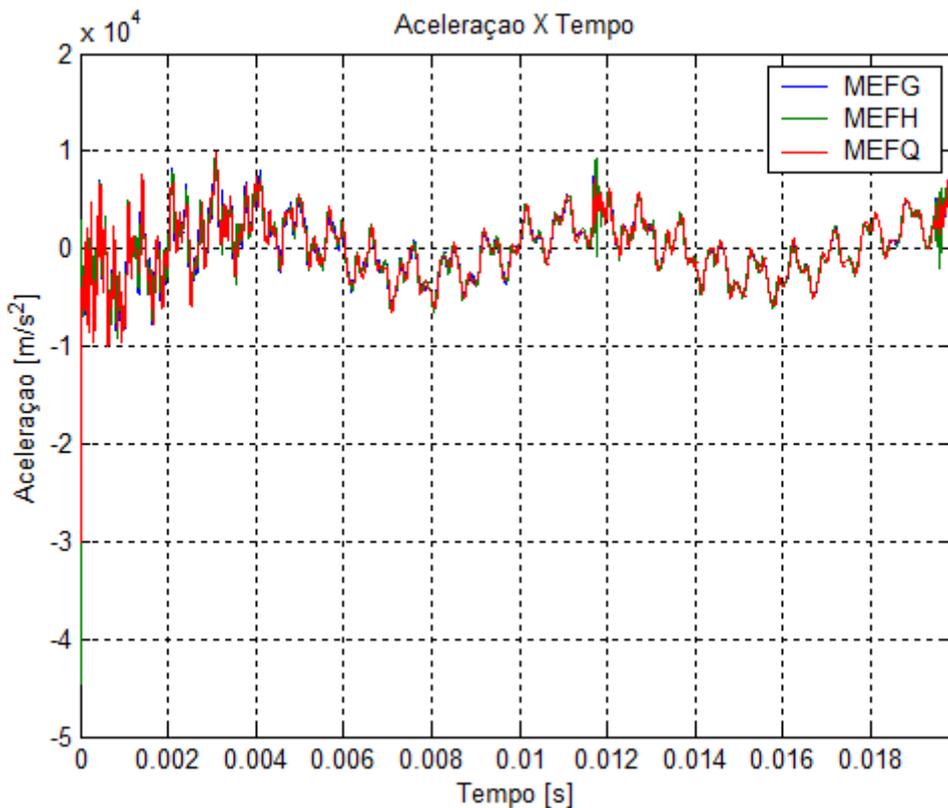


Figura 6.7.1. Aceleração do exemplo 7, resultado obtido por diversas formulações.

Emprega-se o método alfa generalizado que é utilizado como algoritmo para solução temporal, com intervalo do tempo 1×10^{-6} s e 20000 passos. Conforme sugerido por Menin *et. al.* (2007), o raio espectral para determinar os parâmetros de

marcha do tempo é de 0,6 numa análise dinâmica elastoplástica, tem sido adotado esse valor neste exemplo.

Diante de uma força é tipo *Heaviside*, logo no início do ciclo de oscilação, a viga já está submetida à plastificação. À medida que a viga se plastifica, as propriedades mecânicas no ponto da plastificação sofrem alteração, e a tensão do escoamento é alterada da mesma maneira que o módulo de elasticidade.

A figura 6.7.1 mostra a curva de aceleração do ponto onde a força é aplicada. É possível observar que, no início do ciclo, a curva de aceleração apresenta oscilação em alta frequência, que corresponde ao momento em que a viga está plastificando. Por esse motivo, a curva de aceleração oscilatória. Durante o processo, a tensão de escoamento do material no ponto da plastificação é atualizada, de acordo com a figura 6.6.1. Os três métodos, o MEEG, o MEFH e o MEFQ acusam essa situação tal como se observa na figura 6.7.1. Após o tempo de 0,002 s, a frequência de oscilação é reduzida, devido ao fato de que o material no ponto já tem sua tensão de escoamento alterada, portanto a partir desse instante o material volta a se deformar linearmente.

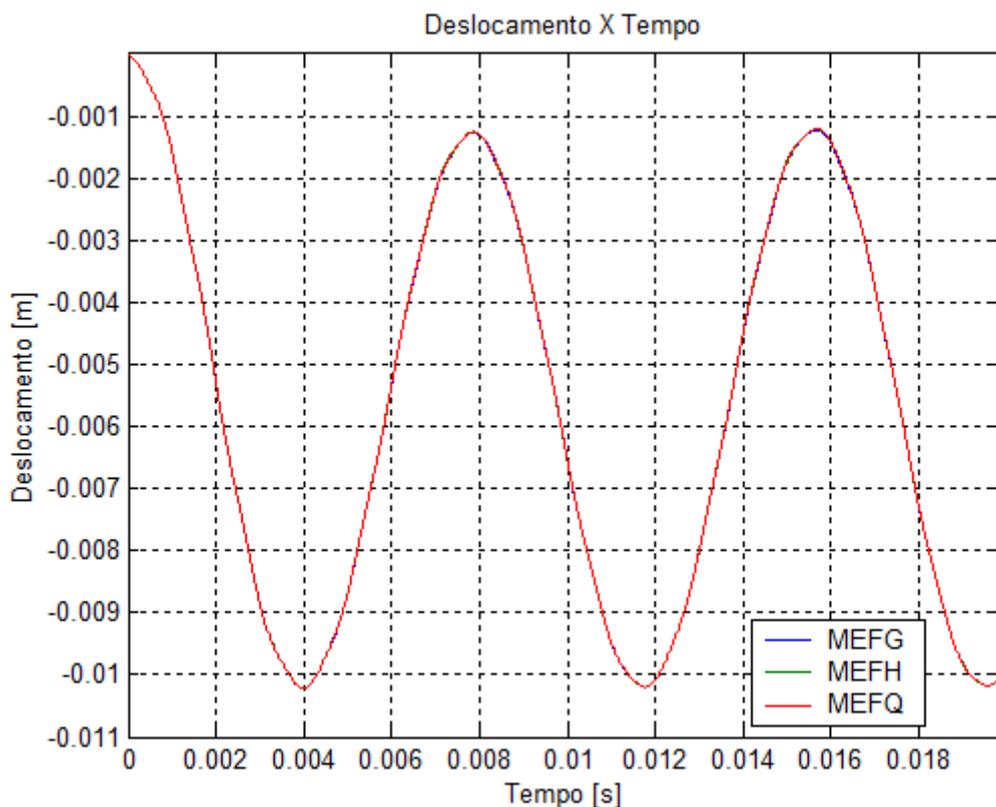


Figura 6.7.2. Curvas de deslocamento do exemplo 7, resultado obtido por diversas formulações.

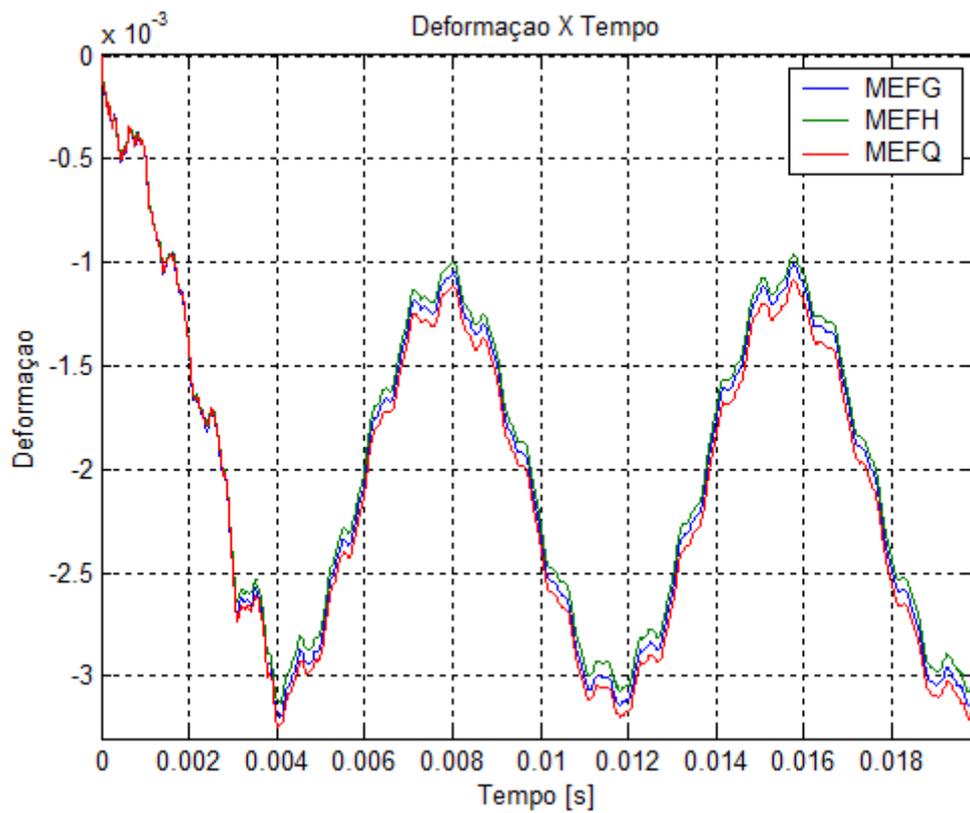


Figura 6.7.3. Curvas de deformação do exemplo 7, obtidas por diversas formulações.

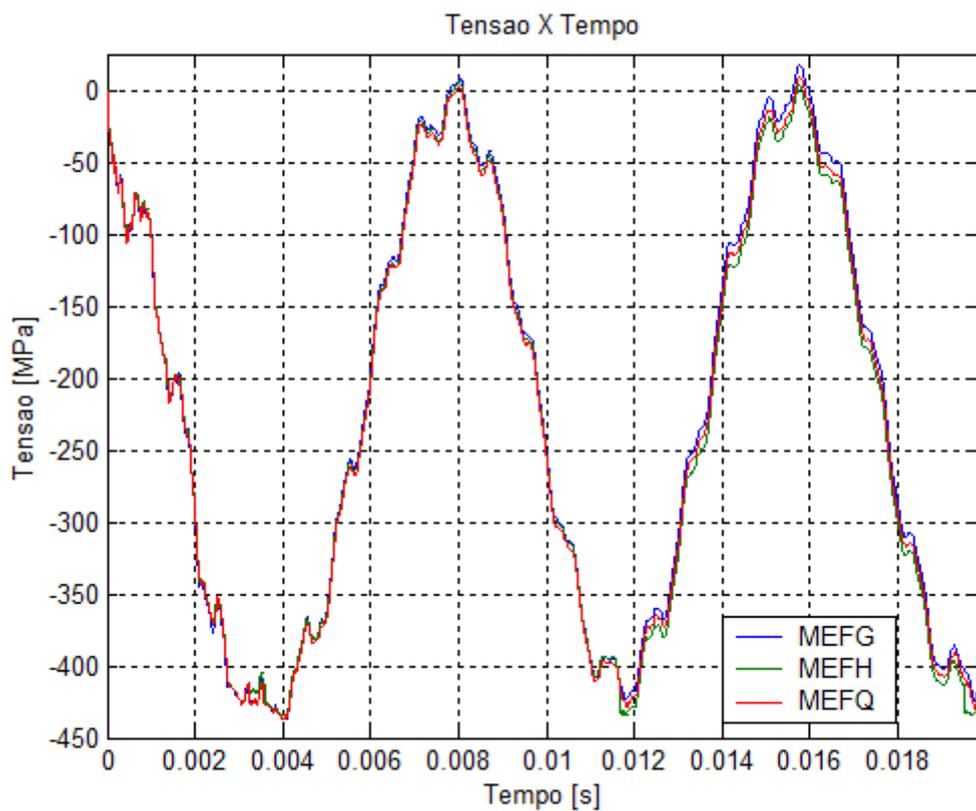


Figura 6.7.4. Curvas de tensão do exemplo 7, obtida por diversas formulações.

A figura 6.7.2 mostra a curva de deslocamento. Observe-se que o deslocamento partiu do ponto zero, no tempo zero, e aumentou sua magnitude em módulo no decorrer do tempo. Entretanto, quando o deslocamento chega ao valor máximo e reduz sua magnitude, ele não retorna a zero, em função da plastificação que ocorreu no local. Se fosse um caso de deformação elástica, teria retornado a zero. A figura 6.7.3 mostra a curva de deformação, e a figura 6.7.4 de tensão de Von Mises. Ambas as curvas são obtidas na superfície externa superior do ponto central da viga. Ao se reunir essas duas figuras, obtém-se a curva histerese de tensão – deformação (ver figura 6.7.5(a) e (b)).

Conforme discutido no exemplo anterior, as funções de enriquecimento contribuem para determinação de deformação de forma positiva, proporcionando condições de continuidade na solução temporal e espacial, nos casos em que podem ser descontínua. Quando a função da deformação não é descontínua, no mínimo, as funções de enriquecimento precisam apresentar o mesmo resultado, ou resultado semelhante em relação ao elemento convencional, nesse caso o elemento quadrático, como mostra a figura 6.7.3.

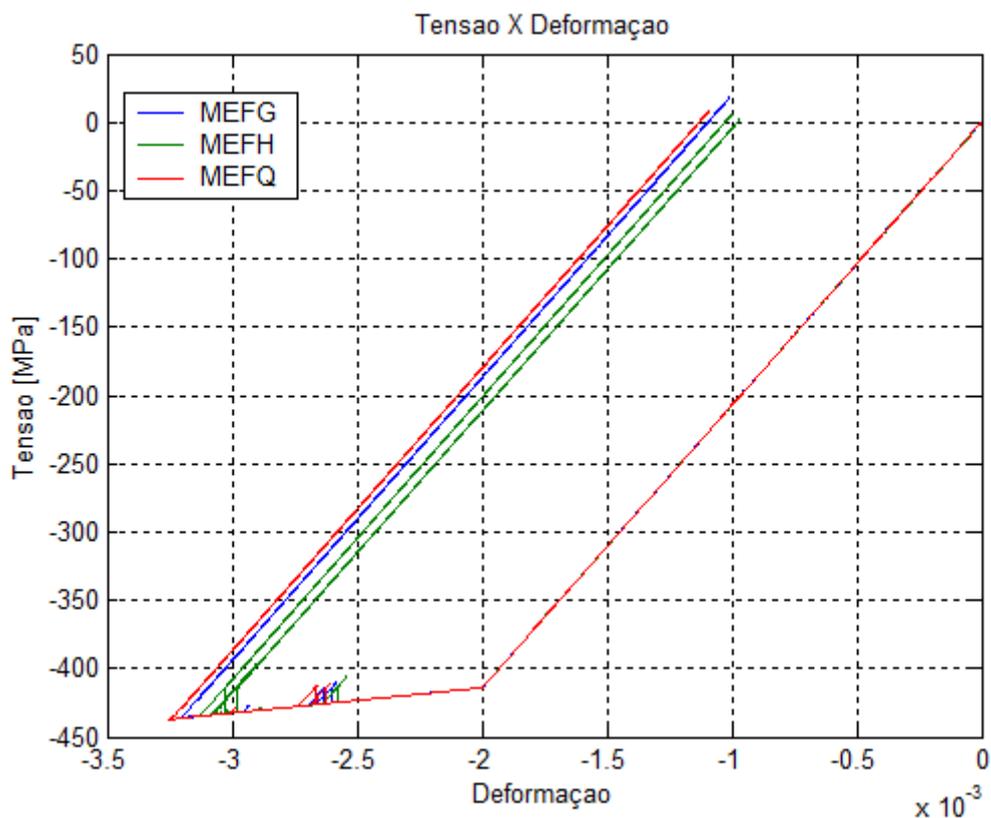


Figura 6.7.5(a). Curvas histerese de tensão – deformação do exemplo 7.

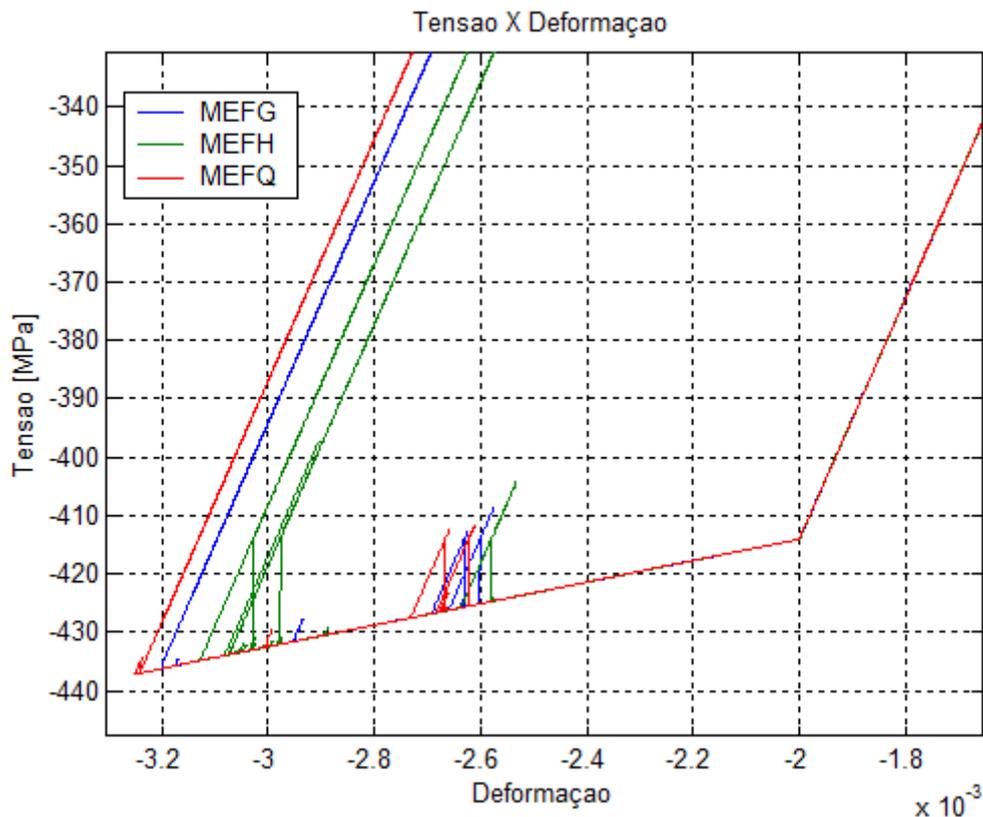
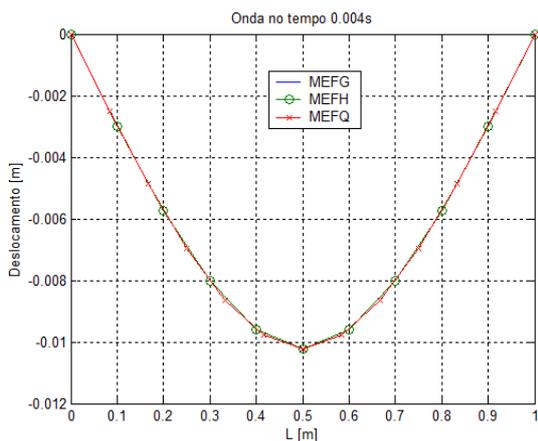


Figura 6.7.5(b). Ampliação da figura 6.7.5(a).

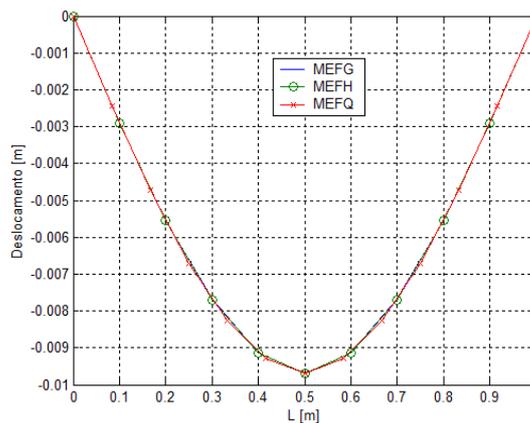
A figura 6.7.4 permite perceber a ocorrência do processo iterativo no primeiro pico de tensão para todos os métodos do mesmo modo que a figura 6.7.5(a) mostra as curvas de histereses, de tensão e deformação. Pela figura 6.7.5 percebe-se que existe diferenças nos valores determinados pelos os três métodos. Essa diferença de magnitude de tensão e deformação é vista como sendo uma contribuição de diferença entre funções de interpolação e funções de enriquecimento. Além disso, pode ser o erro numérico acumulado ao longo do processo iterativo, que dificulta convergência do resultado, como mostra a figura 6.7.5(b).

As figuras 6.7.6(a) – (d) apresentam a configuração deformada da viga em instantes de tempo diferentes. Ao comparar figuras de um instante para outro, é possível observar certa defasagem de deslocamentos do MEFQ em relação aos métodos enriquecidos. As figuras 6.7.7(a) – (d) mostram o perfil de tensão elastoplástica de Von Mises, medida na superfície externa superior da viga. Os instantes de tempo selecionados têm o objetivo de destacar os instantes de plastificação. Na figura 6.7.7(a), a plastificação inicia no ponto da aplicação da força. Ao passar para 6.7.7(b), o material no ponto central da viga já havia plastificado;

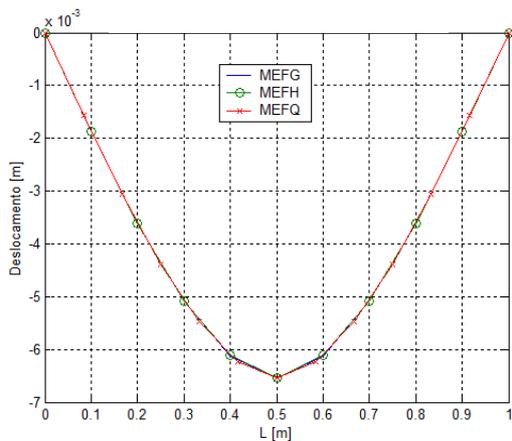
ocorre, então, uma redistribuição de tensões nos pontos vizinhos. Isso faz com que a onda da tensão se propague do ponto da aplicação da força para as duas extremidades. A figura 6.7.7(c) registra de forma mais clara a continuação desse fenômeno, quando o deslocamento chegou ao próximo do seu valor máximo. A figura 6.7.7(e) mostra o momento em que a tensão é reduzida, e o ponto central começa a retornar ao seu lugar de partida.



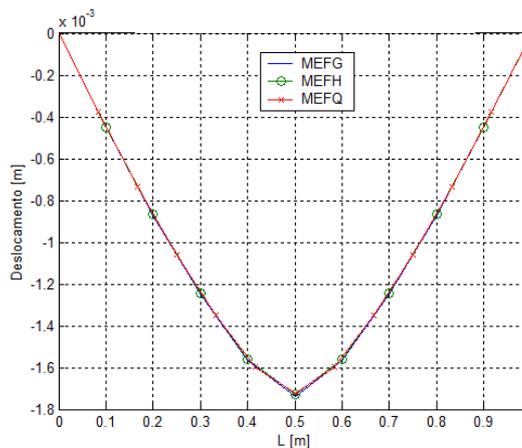
(a) Tempo 0.004 s.



(b) Tempo 0.0045 s.

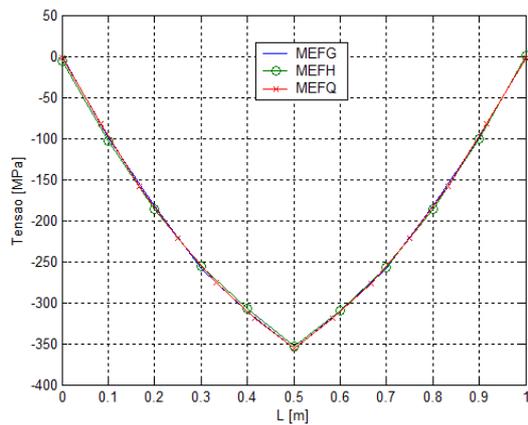


(c) Tempo 0.01 s.

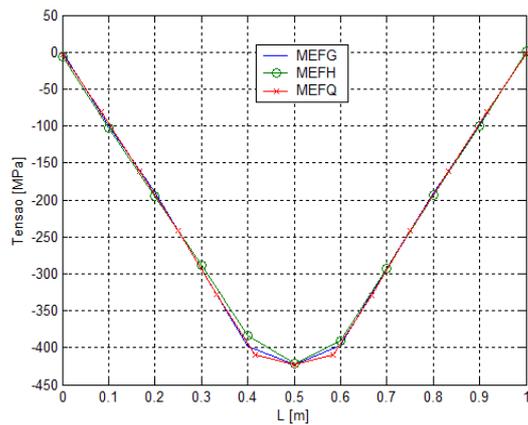


(d) Tempo 0.015 s.

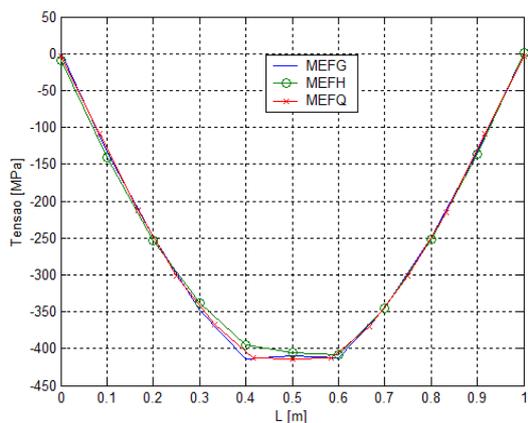
Figura 6.7.6. A configuração deformada da viga do exemplo 7 em instantes de tempo diferentes.



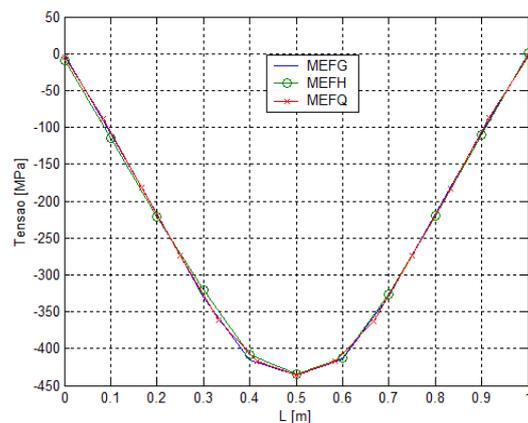
(a) Tempo 0.0025 s.



(b) Tempo 0.003 s.



(c) Tempo 0.0035 s.



(d) Tempo 0.004 s.

Figura 6.7.7. Perfis de tensões ao longo da viga do exemplo 7 nos instantes de tempo diferentes.

6.8. Problema de EPT usando elemento quadrilateral e submetido à força do tipo *Heaviside*.

Nos próximos exemplos, casos de estado plano de tensão serão analisados, utilizando-se elemento quadrilateral de 4 nós (MEFn), de 8 nós (MEFs) e de 9 nós (MEFQ), assim como elementos enriquecidos, a partir de 4 nós (MEFG e MEFH) e de 8 nós (MEFGs e MEFHs).

Este exemplo analisa a mesma viga do exemplo 1, mostrada pela figura 6.1.1, com conjunto 4 de propriedades mecânicas e geométricas. Somente o método de alfa generalizado é adotado para solução temporal, com raio espectral de 0,6. Uma força de magnitude de -1000N é aplicada na extremidade livre da viga de 0s até $5 \times 10^{-3}\text{s}$. A análise foi feita com 5000 passos do tempo, sendo $1 \times 10^{-6}\text{s}$ cada. Todos os resultados são obtidos no nó da extremidade livre onde a força está aplicada,

exceto os resultados de tensões e deformações que são obtidos na extremidade engastada.

Primeiramente, os resultados obtidos do elemento convencional são comparados com os resultados obtidos pela solução analítica para o caso de viga unidirecional, de Nowacki (1963). Adotou-se a solução analítica apresentada por Nowacki (1963), considerando-se a falta de solução analítica para o estado plano de tensão. A malha adotada pelo MEFn é de 50 elementos, com 156 graus de liberdade. Para MEFs é de 15 elementos, 156 graus de liberdade; e para MEFQ é de 12 elementos, 150 graus de liberdade. A figura 6.8.1(a) mostra curva de deslocamentos obtida por esses três métodos. Convém atentar para o fato de que existe uma defasagem no tempo e no deslocamento em comparação ao resultado obtido pela solução analítica. Essa defasagem se deve ao fato de que no estado plano de tensões se consideram os efeitos associados ao coeficiente de Poisson. A figura 6.8.1(b) mostra uma ampliação no pico do deslocamento da figura 6.8.1(a). Com malhas com número de graus de liberdade bem semelhantes, os métodos MEFQ e MEFs mostraram resultados mais próximos à solução analítica, conforme esperado. A figura 6.8.2(a) registra a velocidade obtida, e figura 6.8.2(b) faz uma ampliação dessa figura. Os resultados apresentados pelos elementos MEFn, MEFQ e MEFs serão comparadas a seguir com as soluções obtidas com elementos enriquecidos.

O elemento quadrilateral de quadro nós utilizado neste exemplo é enriquecido pelo MEFQ, somente pelo campo. Os resultados para deslocamentos e velocidades são mostrados nas figuras 6.8.3 e 6.8.4. Nesta análise, adotou-se $\beta = \pi/2$. O parâmetro da função de enriquecimento deve garantir continuidade para as funções de enriquecimento entre elementos adjacentes, portanto, $\beta \geq \pi/2$ (TORII, 2012). A figura 6.8.3(a) mostra as curvas de deslocamentos. A figura 6.8.3(b) registra que o MEFQ é o que mais se aproxima do resultado de referência, mais do que o MEFH e o MEFn. As figuras 6.8.4(a) e (b) descrevem o resultado de velocidade. Na figura 6.8.4(b), observa-se que o MEFQ é o elemento enriquecido que oferece maior estabilidade, mais que o MEFH, e menos dissipativo que o MEFn.

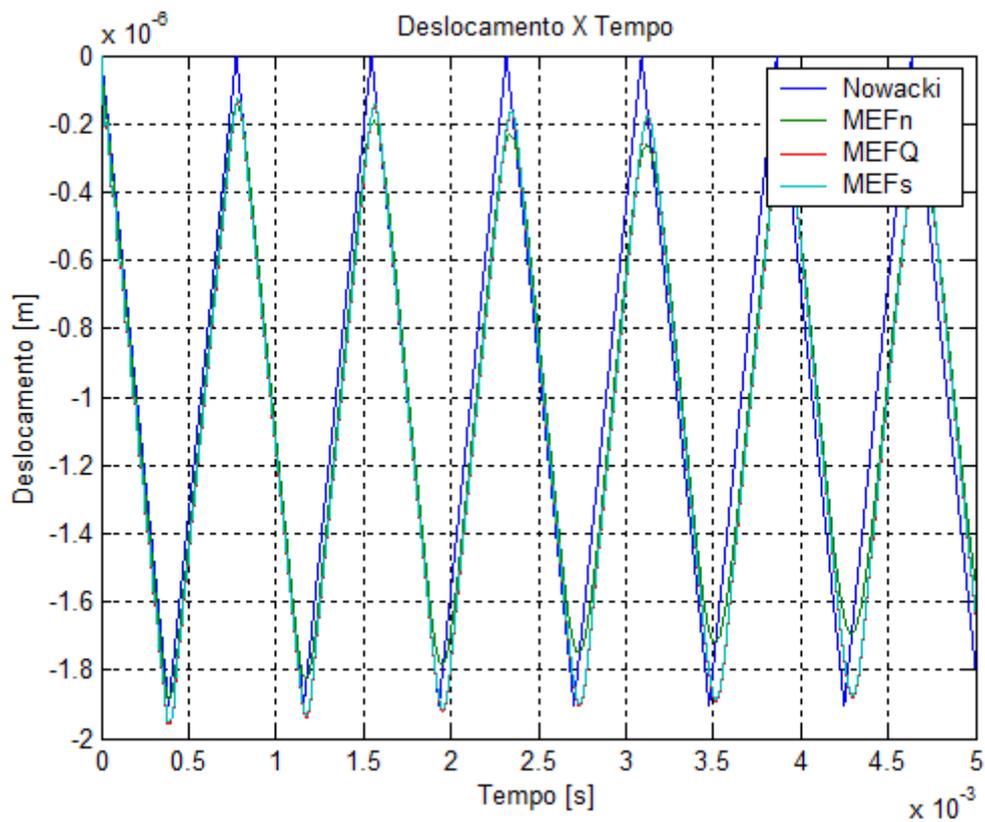


Figura 6.8.1(a). Deslocamento do exemplo 6.8, resultado obtido por MEFn, MEFQ e MEFs.

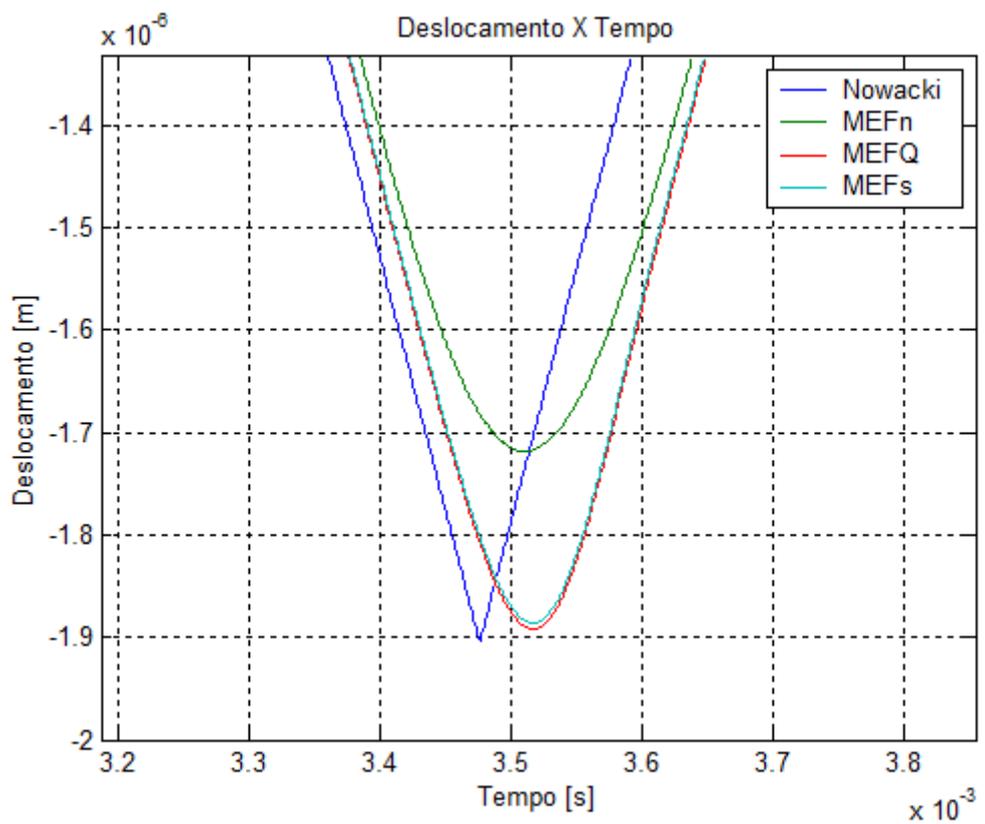


Figura 6.8.1(b). Ampliação da figura 6.8.1(a).

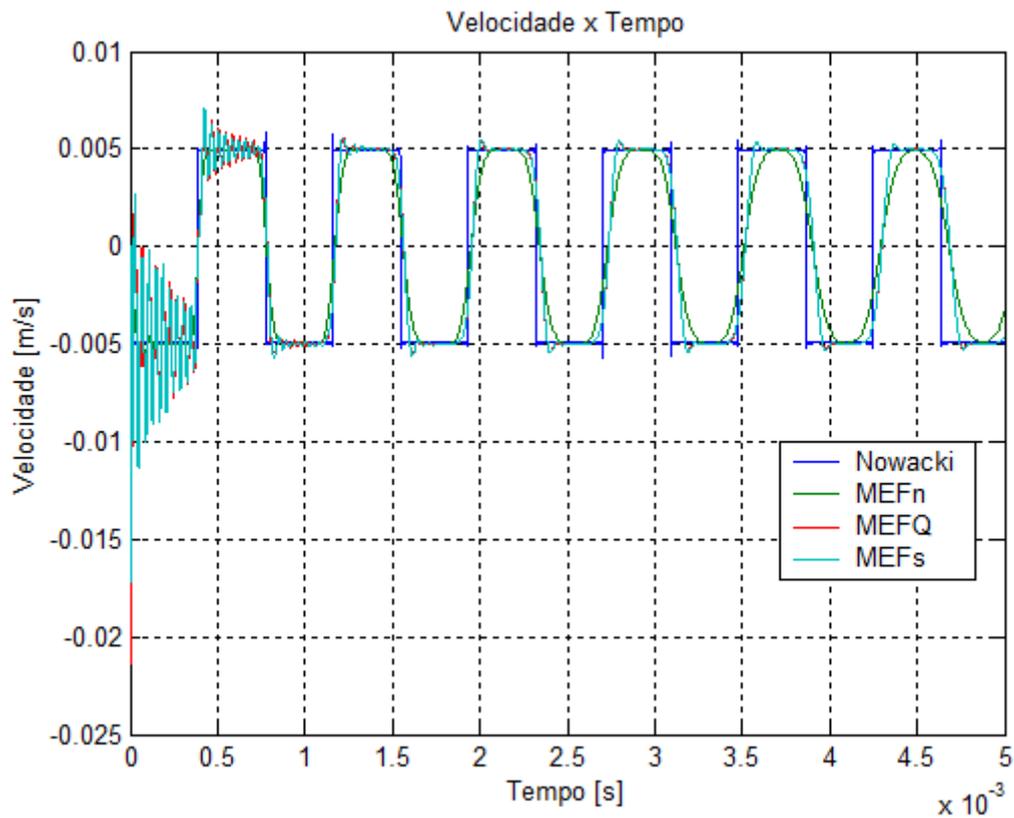


Figura 6.8.2(a). Velocidade do exemplo 6.8, resultados obtidos pelas formulações MEFn, MEFQ e MEFs.

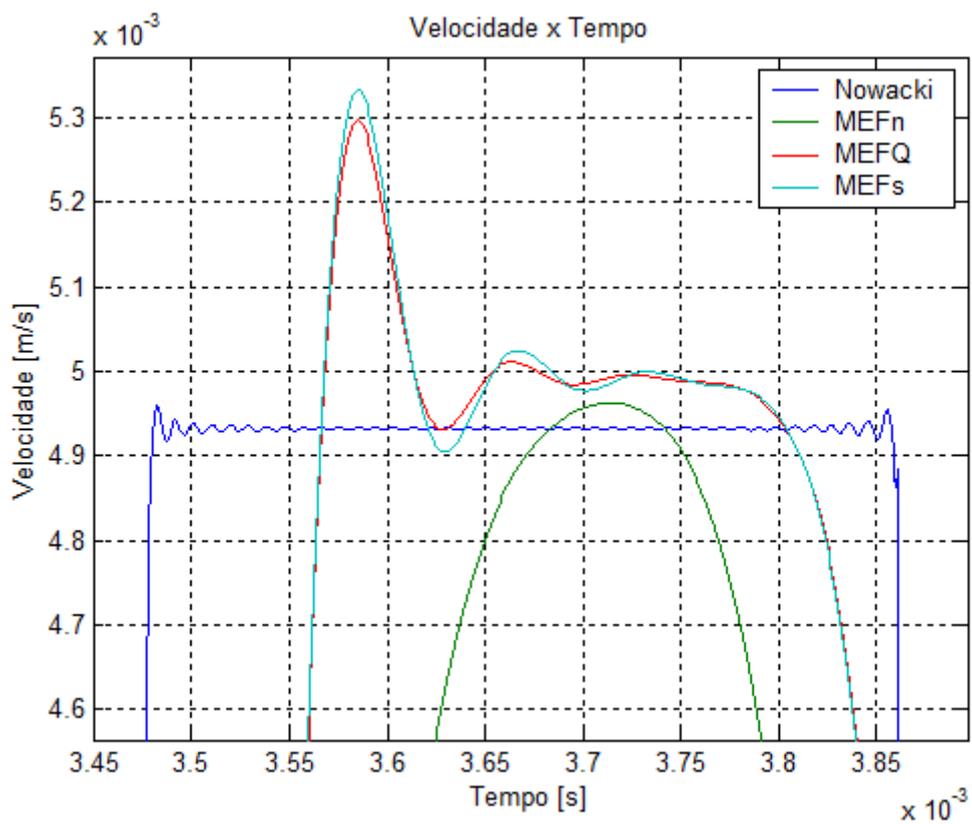


Figura 6.8.2(b). Ampliação da figura 6.8.2(a).

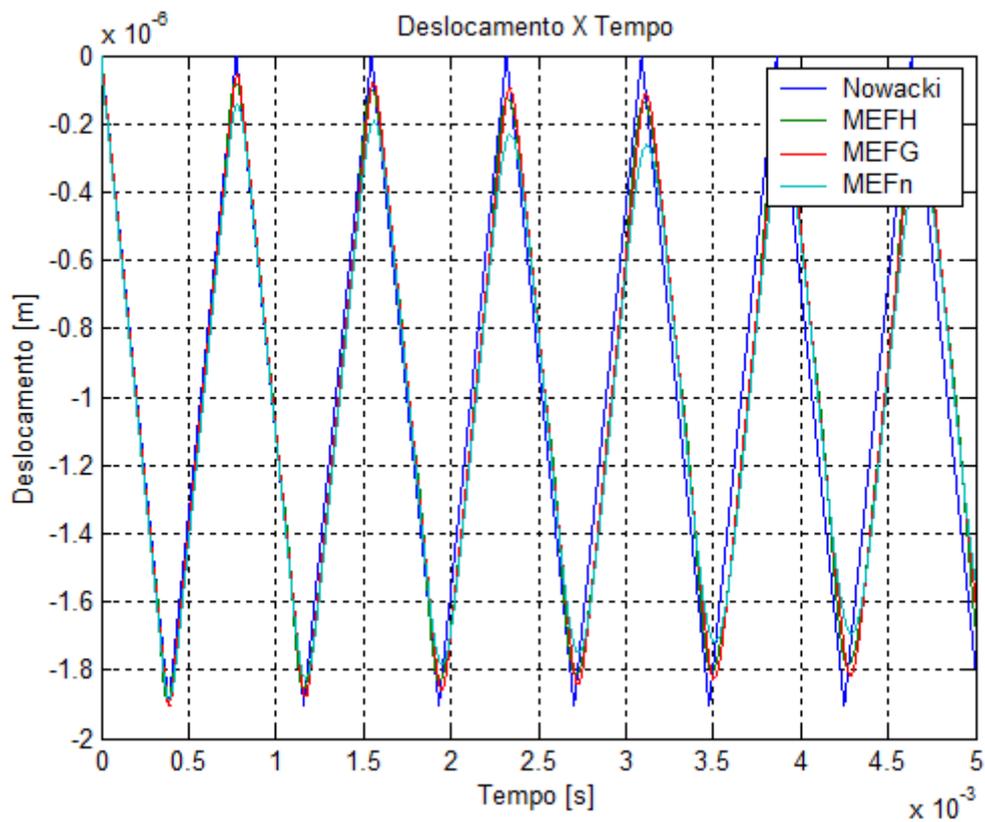


Figura 6.8.3(a). Deslocamento do exemplo 6.8, resultado obtido por MEFn, MEFG e MEFH.

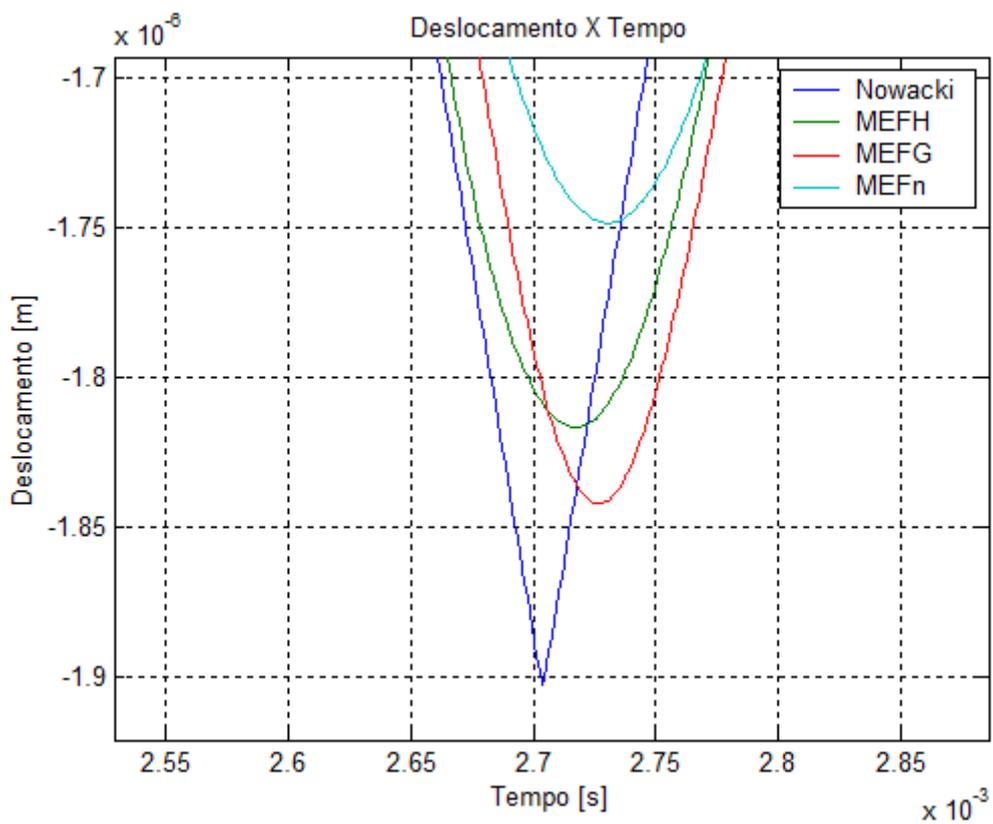


Figura 6.8.3(b). Ampliação da figura 6.8.3(a).

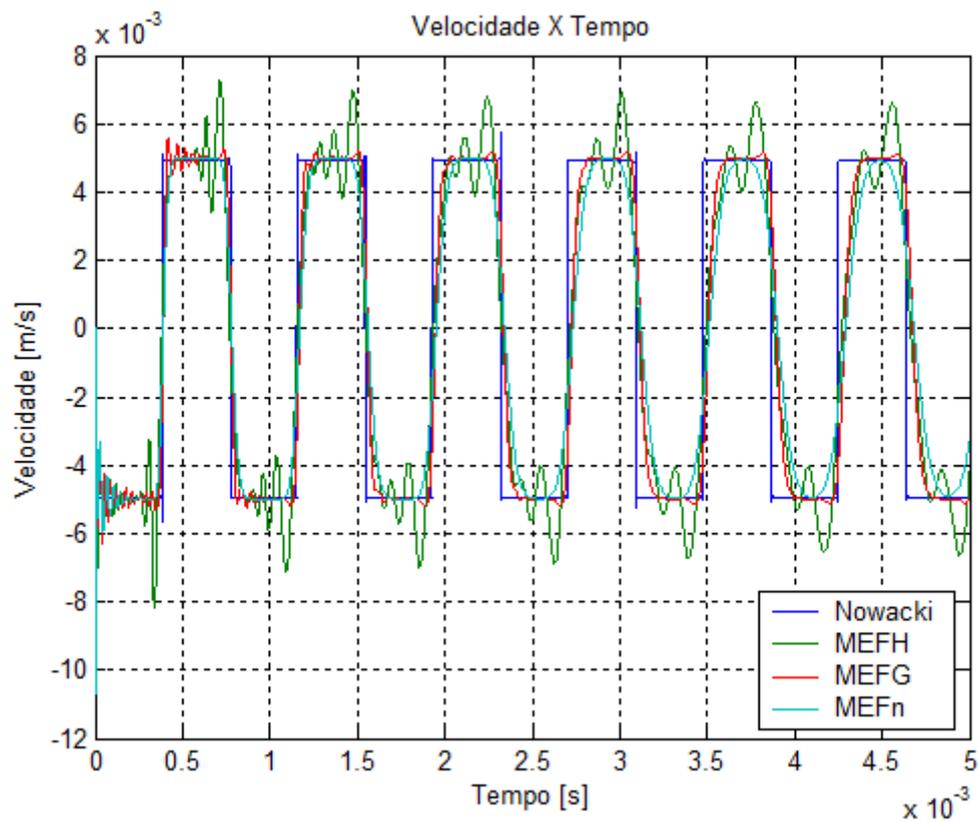


Figura 6.8.4(a). Velocidade do exemplo 6.8, resultado obtido pelo MEFn, MEFG e MEFH.

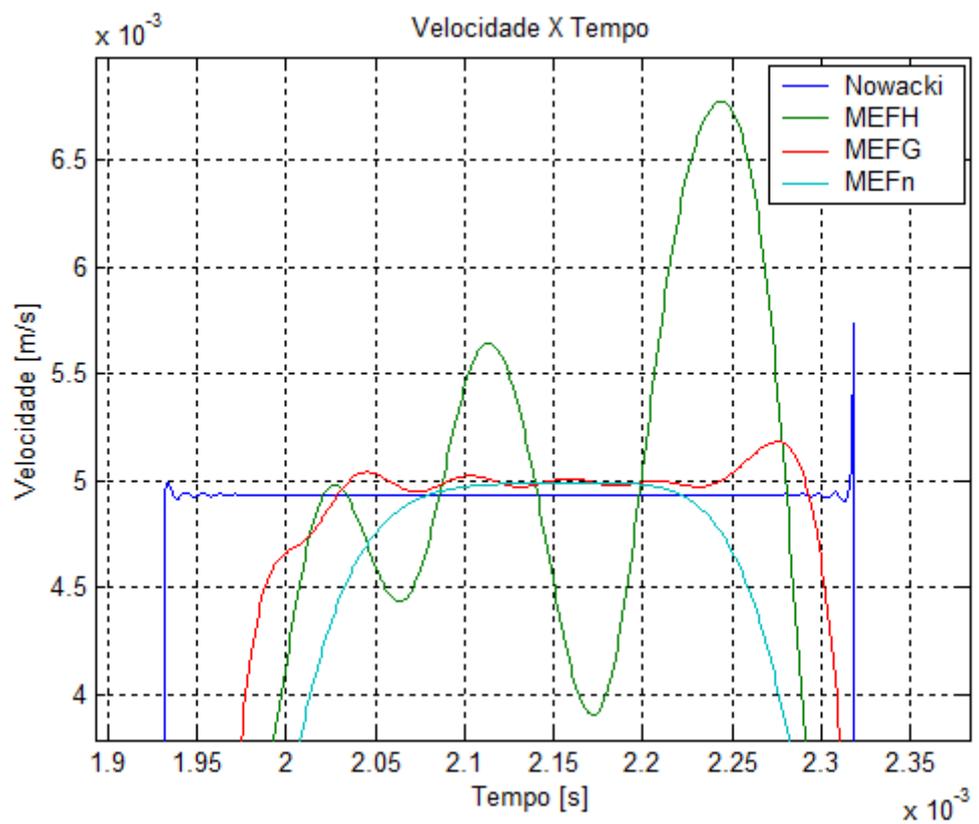


Figura 6.8.4(b). Ampliação da figura 6.8.4(a).

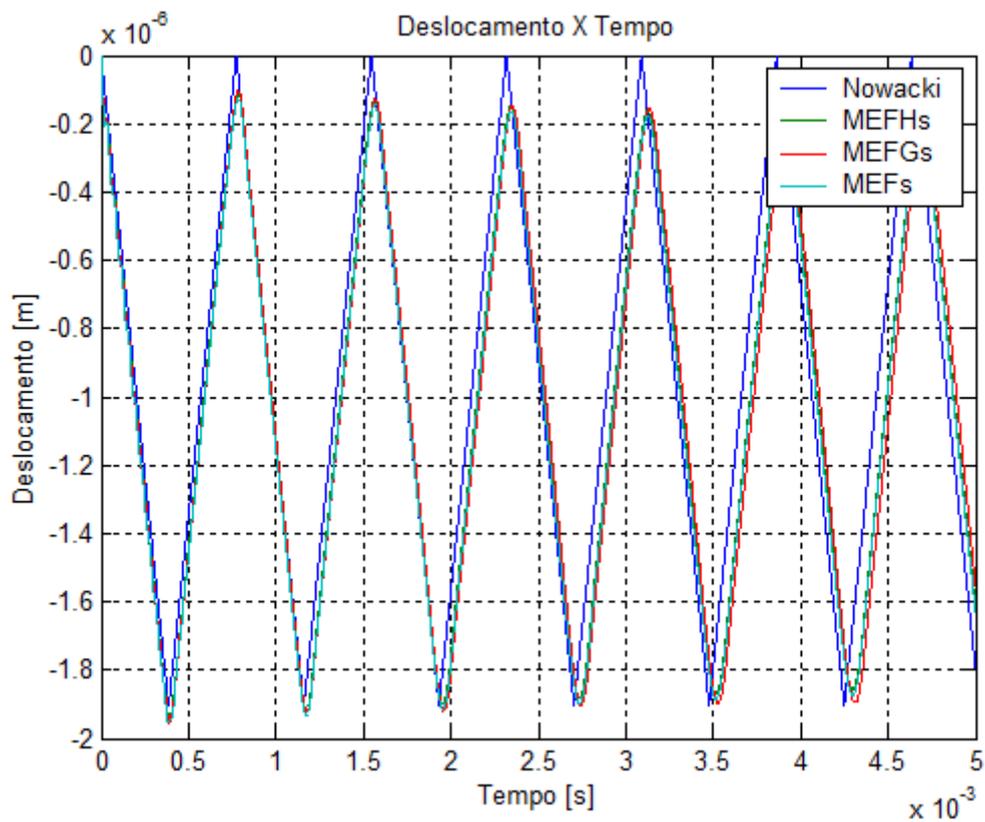


Figura 6.8.5(a). Deslocamento do exemplo 6.8, resultado obtido pelo MEFs, MEFGs e MEFHs.

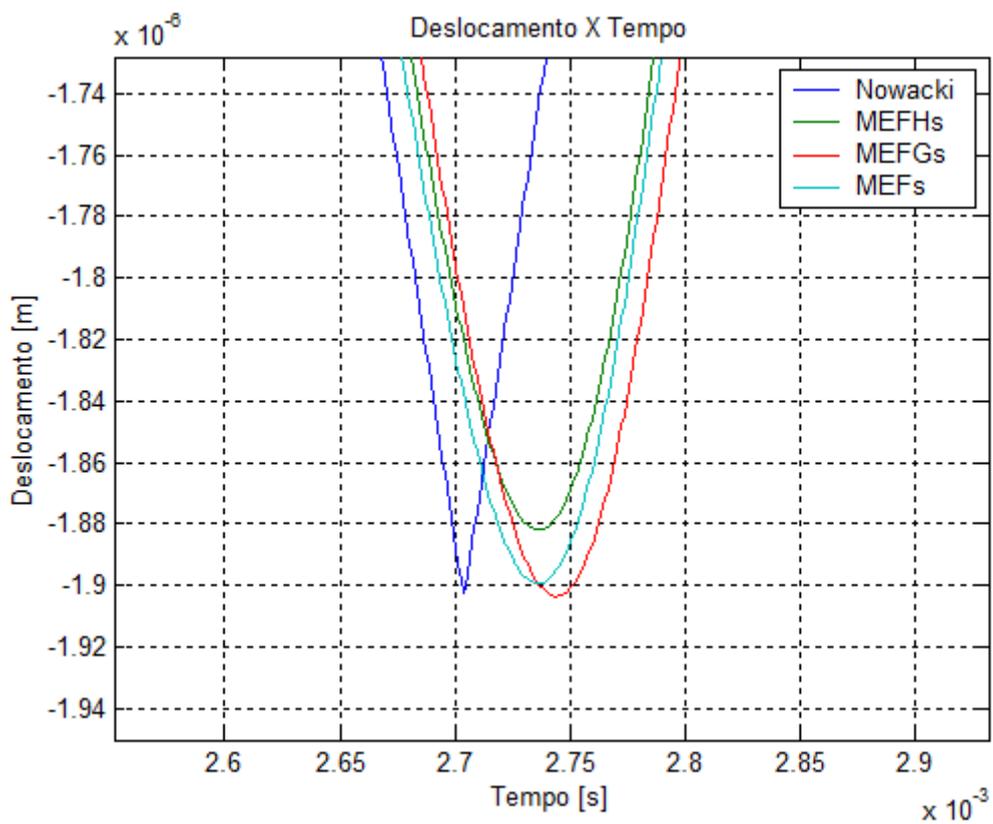


Figura 6.8.5(b). Ampliação da figura 6.8.5(a).

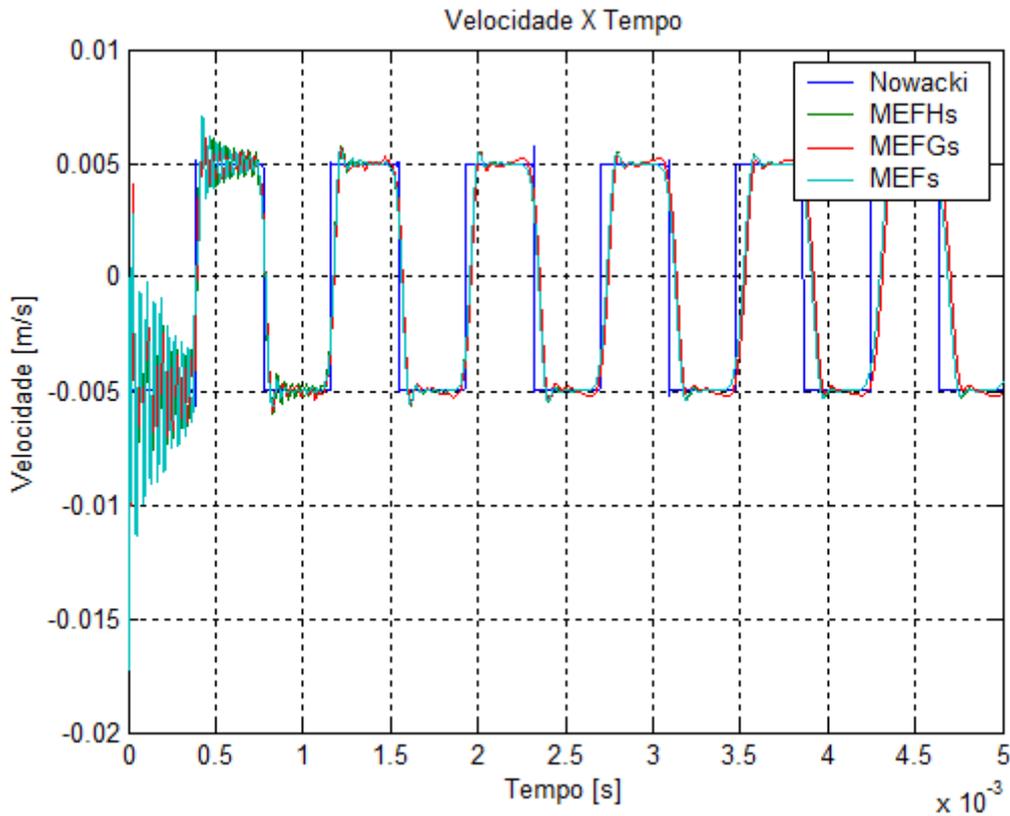


Figura 6.8.6(a). Velocidade do exemplo 6.8, resultado obtido pelo MEFs, MEFGs e MEFHs.

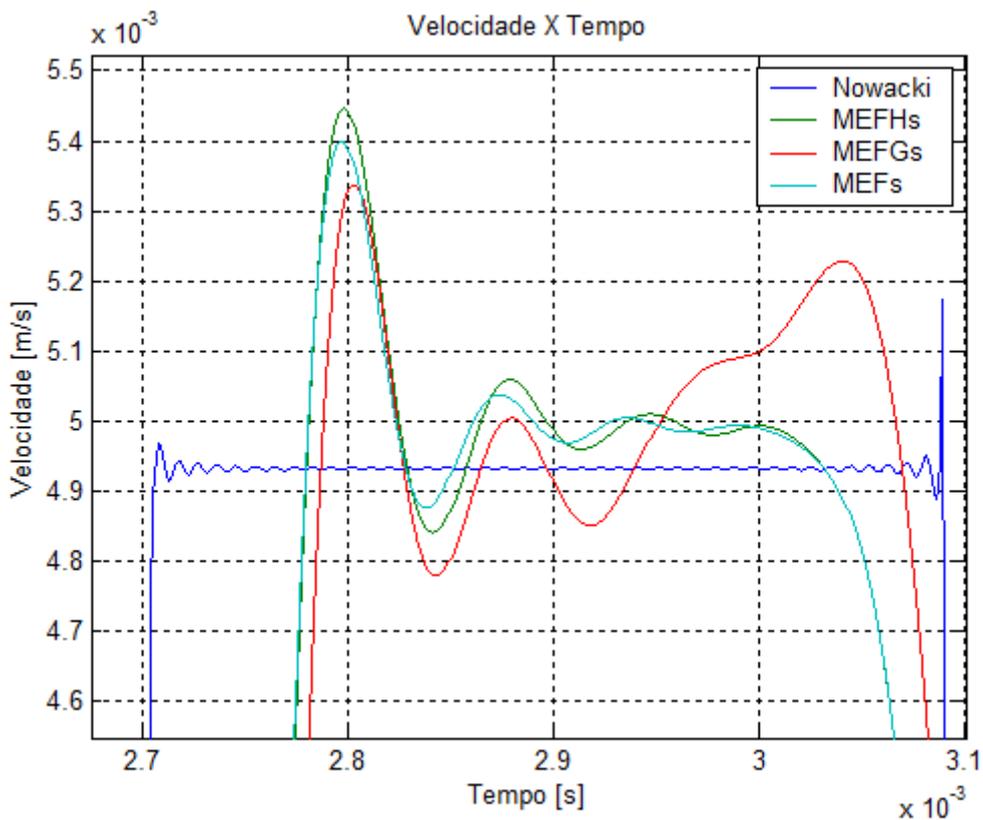


Figura 6.8.6(b). Velocidade do exemplo 6.9, resultado obtido pelo MEFs, MEFGs e MEFHs.

O MEFG empregado neste exemplo adotou-se apenas dois níveis de enriquecimento, enquanto o MEFH adotou apenas um nível de enriquecimento. O motivo de adotar poucos níveis de enriquecimento se deve ao interesse em avaliar efeitos introduzidos nas formulações convencionais com mínimo de funções de enriquecimento possível.

As figuras 6.8.5 e 6.8.6 mostram os resultados obtidos pelo MEFGs e MEFHs, para os quais se usou malha de 9 elementos, 152 graus de liberdade, em comparação com os MEFs. O parâmetro β utilizado para o MEFGs é igual a π . A figura 6.8.5(a) mostra curva de deslocamentos, e a figura 6.8.5(b) uma ampliação. É possível observar que o MEFGs apresenta melhores resultados que o MEFs; o MEFHs, por sua vez, apresentam uma pequena diferença. A figura 6.8.6(a) e (b) registram curva de velocidades versus tempo. Observe-se que tanto os elementos enriquecidos quanto os convencionais apresentam oscilações numéricas no ponto próximo da descontinuidade. Aparentemente os elementos enriquecidos, com as funções de enriquecidas adotadas, não são capazes de minimizar essa oscilação numérica.

6.9. Problema de EPT usando-se elemento quadrilateral e submetido à força impulsiva.

Este exemplo visa analisar a mesma viga dada pela figura 6.1.1, com conjunto 4 de propriedades mecânicas e geométricas. Uma força impulsiva de magnitude -1000N é aplicada à extremidade livre da viga no instante inicial e descarregada no 1×10^{-5} s. Neste caso, somente o método de alfa generalizado é utilizado para solução temporal, com raio espectral 0,6, e 5000 passos do tempo de intervalo 1×10^{-6} s. Para este exemplo, o método MEFG com enriquecimento no campo é utilizado, adotando - se $\beta = \pi/2$. No caso do MEFGs, adotou-se $\beta = \pi$ para garantir a condição de compatibilidade nos contornos de elementos. Para o MEFH, somente as funções de Lobatto (SOLIN et. al.; 2004) são utilizadas para enriquecimento. Os resultados são obtidos no nó da extremidade livre. As malha e o número de grau de liberdade são os mesmos do exemplo 8. O objetivo desta análise é avaliar o comportamento dos elementos convencionais e enriquecidos perante força impulsiva. Os parâmetros de avaliação são de deslocamento, e de tensão.

As figuras 6.9.1 (a) e (b) mostram os deslocamentos na extremidade, obtidos pelos diversos métodos. A figura 6.9.1(b) mostra que todos os resultados apresentam comportamentos semelhantes, exceto o MEFH, implementado com as funções de Lobatto, o que revela oscilação numérica acentuada em comparação com outros. O mesmo fenômeno foi observado nos exemplos de viga Euler – Bernoulli, discutidos no exemplo 6.4. Os resultados do MEFHs, que utiliza as funções propostas por Oliveira (1993), mostram-se bastante semelhantes ao do MEFQ, com oscilação numérica no ponto próximo à descontinuidade.

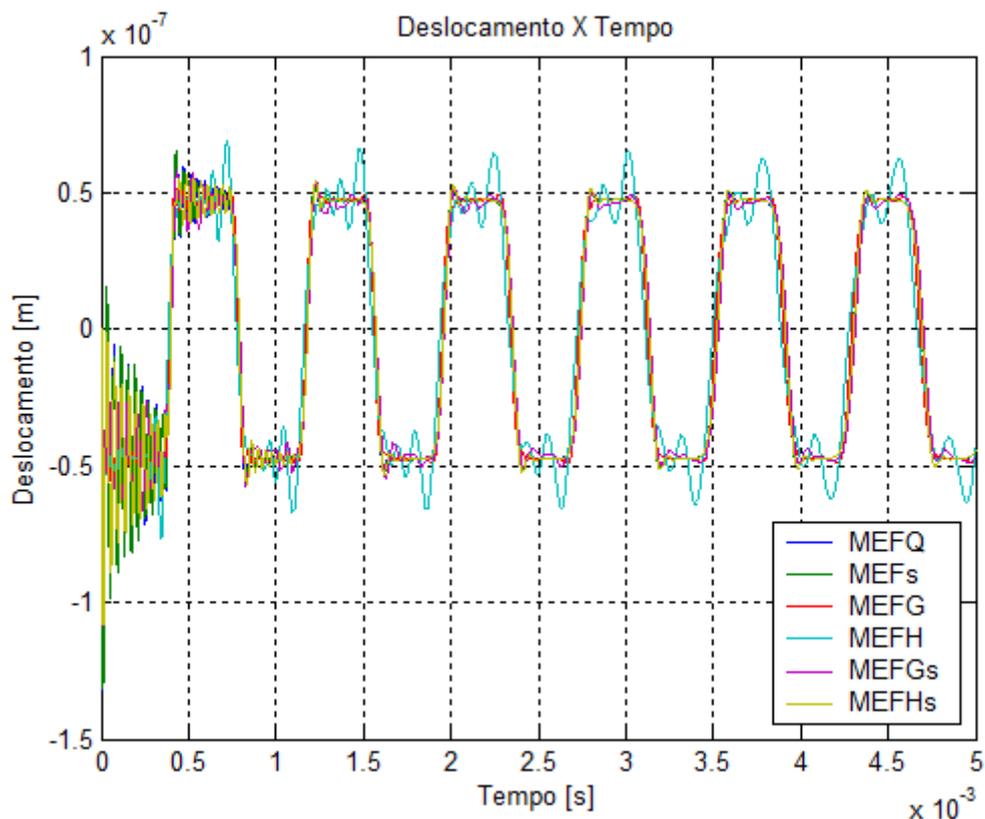


Figura 6.9.1(a). Deslocamento do exemplo 9, resultado obtido por diversas formulações.

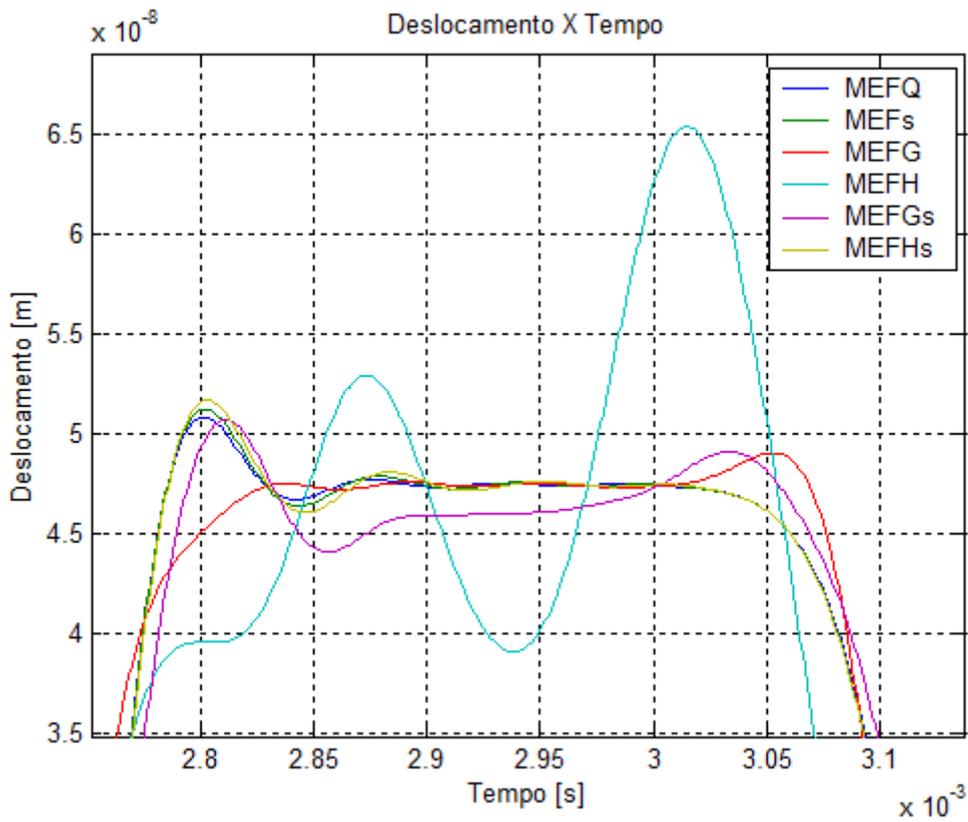


Figura 6.9.1(b). Ampliação da figura 6.9.1(a).

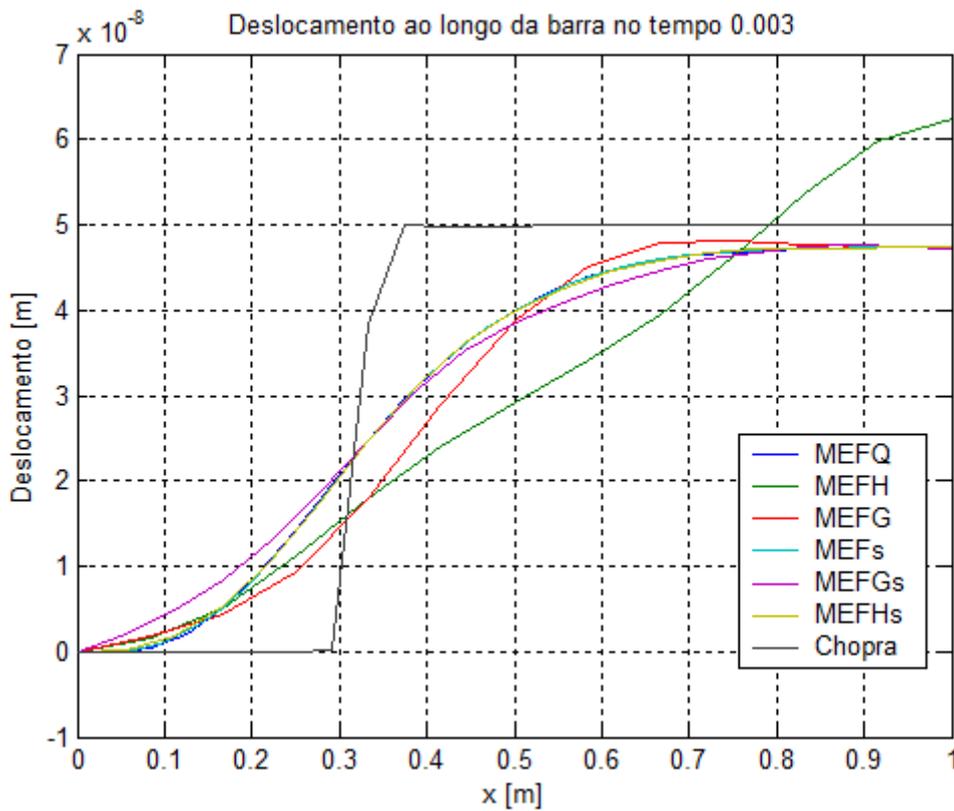


Figura 6.9.2(a). Configuração deformada no instante 0,003s.

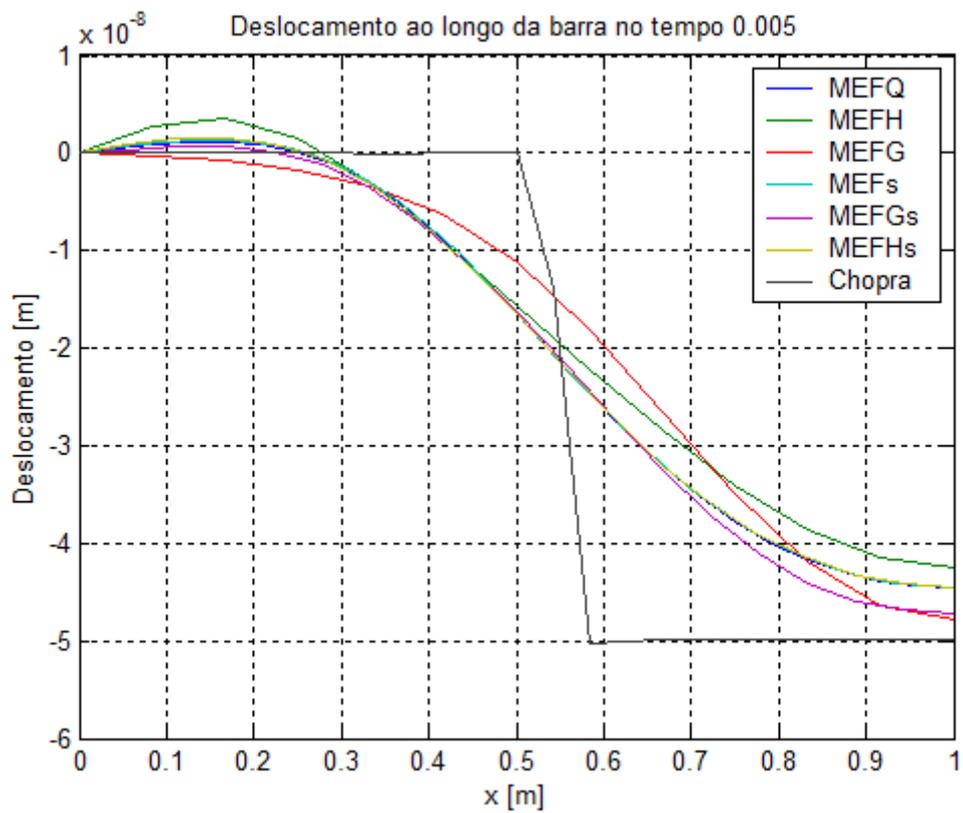


Figura 6.9.2(b) Configuração deformada no instante 0,005s.

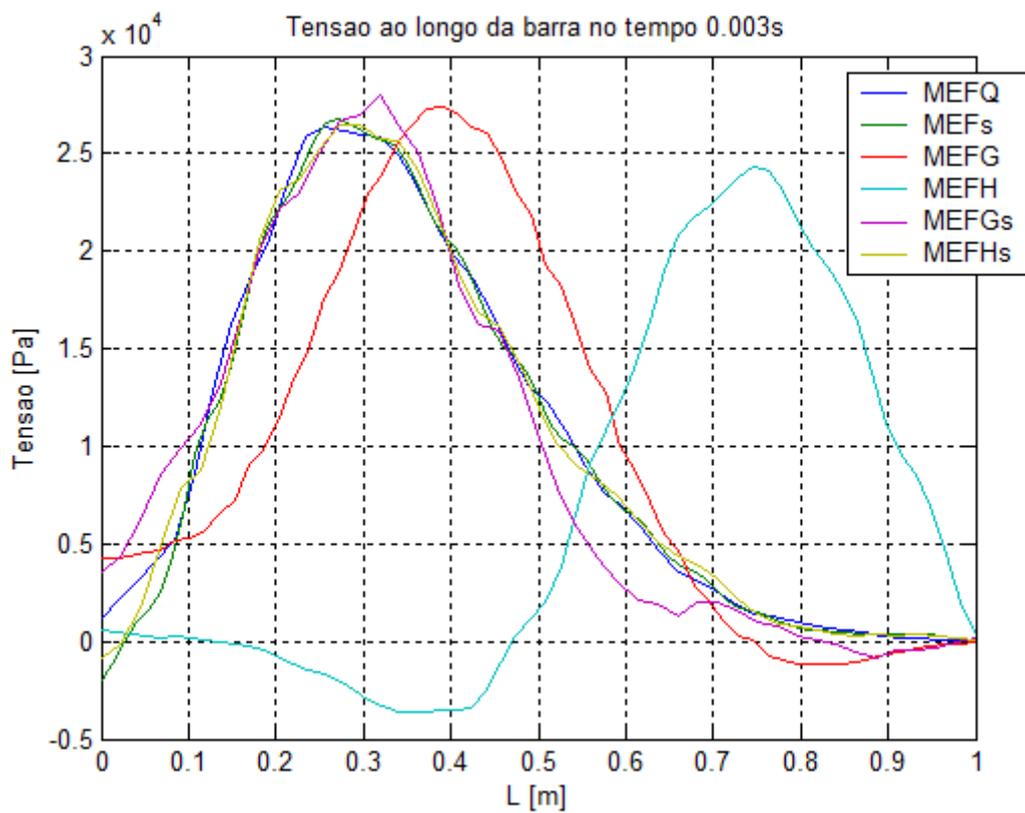


Figura 6.9.3(a). Onda da tensão no instante 0,003s.

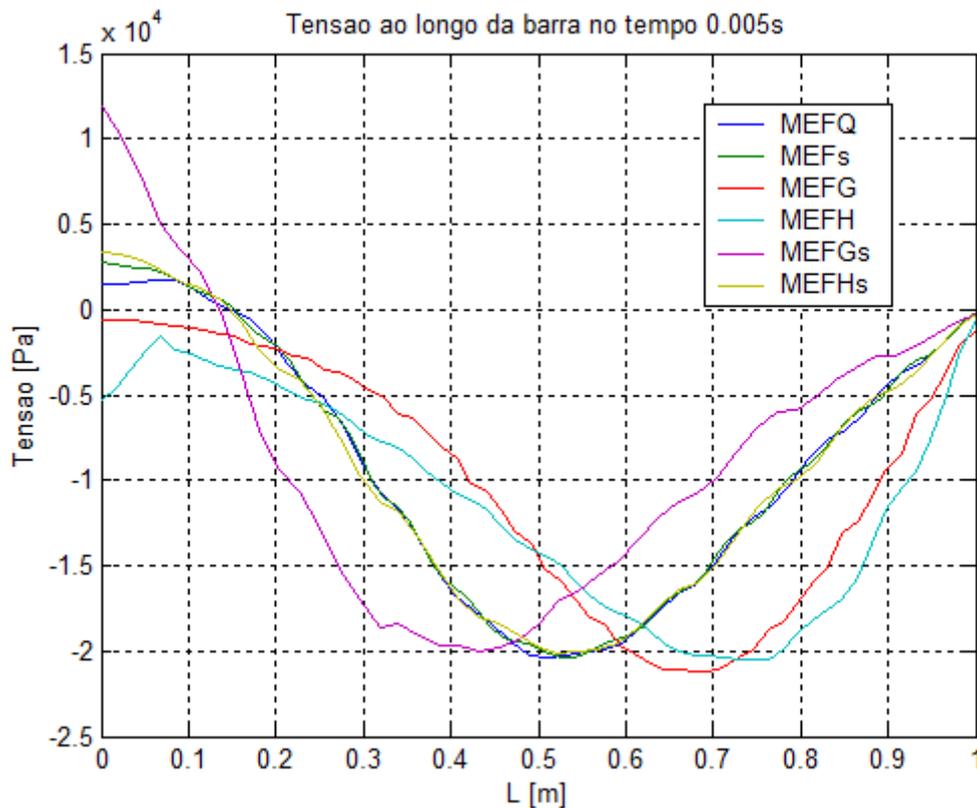


Figura 6.9.3(b). Onda da tensão no instante 0,005s.

A configuração deformada da viga é mostrada pelas figuras 6.9.2(a)-(b). Para efeito de comparação, a solução analítica obtida pelo Chopra (1995) para a viga com modelo unidirecional foi colocada nas figuras. Os modelos do MEFQ, MEFs e MEFHs apresentam resultados semelhantes em todos os instantes e ao longo do comprimento também. A partir dos resultados, não se pode concluir ainda qual é o elemento mais eficiente para analisar passagem de onda dado que todos apresentam comportamentos semelhantes. Entretanto, o MEFH com função de Lobatto é o que mais se afasta da curva de deslocamento proporcionado pela solução analítica, e dos demais elementos.

A passagem da onda de tensão longitudinal é vista pelas figuras 6.9.3(a) – (b). Observa-se que o MEFH e o MEFG apresentam curvas em degrau. Vale lembrar que o MEFG e o MEFH são processos de enriquecimento de elementos simples de 4 nós, e as funções de base são de C^0 , por esse motivo, uma vez derivados esses polinômios, para a determinação de deformações, surge uma descontinuidade matemática na vizinhança dos elementos. Aparentemente, as funções de enriquecimento generalizado e hierárquico adotadas neste exemplo não são capazes de suavizar essa descontinuidade. Para efeito de comparação, todos os

elementos têm número de graus de liberdade bem próximos. Isso desfavorece o MEF_G e o MEF_H em relação aos outros elementos convencionais, que têm função de interpolação do tipo polinômial de ordem mais elevada. Outra observação, ainda em relação às figuras 6.9.3(a)-(b), é a diferença de resultado entre o MEF_G e o MEF_H. A onda de tensão apresentada pelo MEF_G está mais próxima aos demais elementos em comparação ao MEF_H. Aparentemente, o MEF_G está acompanhando a onda de tensão dos demais elementos, porém com alguma defasagem do tempo. Por outro lado, o MEF_H parece que está mais defasado.

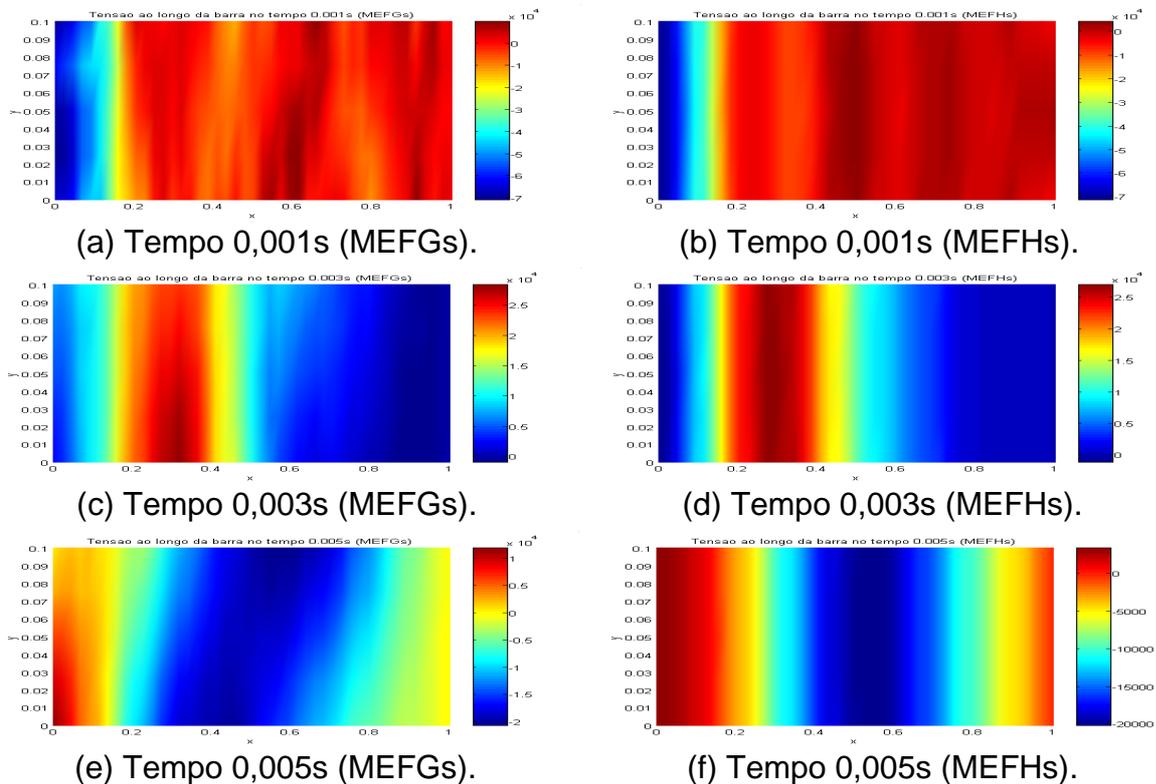


Figura 6.9.4. Configurações de tensões longitudinais na barra em instantes diferentes de tempo do exemplo 9.

As figuras 6.9.4(a) – (f) mostram uma representação bidimensional da distribuição de tensões ao longo da barra, em instantes diferentes de tempo, para os modelos do MEF_Gs e MEF_Hs. É possível observar, nas figuras 6.9.4(c) e (e), que os MEF_Gs apresentam distribuição de tensão não simétrica, quando se comparam as figuras 6.9.4(d) e (f). A mesma situação não foi observada nos instantes iniciais. Uma das possibilidades é o erro acumulado ao longo da integração numérica, inerente ao algoritmo. Outra possibilidade está vinculada com a quantidade de pontos de integração numérica adotada.

6.10. Viga fixa - fixa usando-se elemento quadrilateral, submetida à força do tipo *Heaviside* em EPT.

Este exemplo mostra uma viga fixa – fixa submetida à força do tipo *Heaviside*, de magnitude -1000N, aplicada do início até final da análise, no meio da viga, como mostra a figura 6.10.1. As propriedades são do conjunto 4. O método alfa generalizado é utilizado para solução temporal, com raio espectral de 0,6 e 5000 passos de tempo, com intervalo de 1×10^{-6} s.

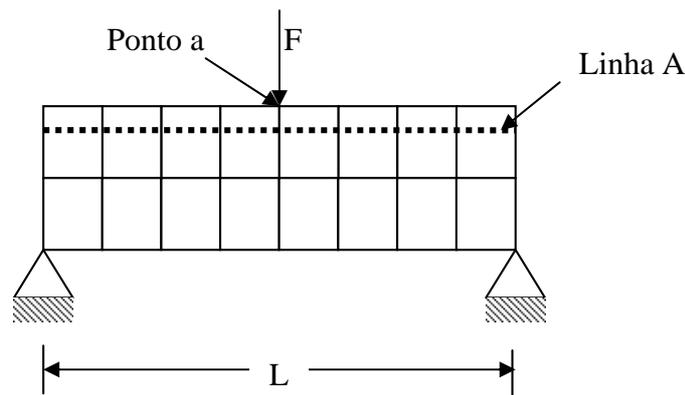


Figura 6.10.1. Representação esquemática do exemplo 10.

Os resultados das figuras 6.10.2(a) – (c) são extraídos do nó situado no ponto a , onde a força está aplicada. Para efeito de estudo da influência do refino da malha pelo aumento de quantidade de elemento, o MEFH e o MEFH são escolhidos para fazer refino h , com o intuito de analisar influência exercida sobre resultados. O nível de enriquecimento é mantido fixo, com as mesmas funções de enriquecimento. Assim, somente a quantidade de elementos é elevada. A figura 6.10.2(a) registra os resultados de deslocamentos entre métodos diferentes. Todas as malhas apresentam número de graus de liberdade bem próximo, como mostra a tabela 6.10.1. Entretanto, o MEFH e MEFH acusam resultado diferente em comparação a outros elementos. Para analisar esse fenômeno, a quantidade de elementos para o MEFH e o MEFH é aumentada até 18, com 222 graus de liberdade. A figura 6.10.2(b) mostra que o resultado apresenta uma evidente melhora. Assim como mostram as figuras 6.10.2(c) e (d) para diferentes quantidades de elementos. Mesmo fazendo refino h com o MEFH e o MEFH, entretanto esses não são capazes de atingir com

exatidão os resultados do MEFs e do MEFQ mesmo diante de mesmo grau de liberdade. Uma situação semelhante foi observada na seção 5.4, em que o refino h do MEFG e MEFH não apresenta uma melhora significativa do que foi apresentado pelo refino p .

Para estudar a propagação de ondas de deslocamentos, obtidos pela malha de 24 elementos, as figuras 6.10.3(a) – (c) são apresentadas, mostrando diferentes perfis de deformada em instantes distintas. No instante inicial, figura 6.10.3(a), o MEFG e o MEFH apresentam resultados bem próximos aos demais elementos. Entretanto, com o passar do tempo, ocorre defasagem na variável tempo, como mostram as figuras 6.10.3(b) e (c) como aconteceu nos exemplos anteriores. Isso indica que o MEFG e o MEFH se comportam, em relação ao método alfa generalizado para solução temporal, de forma diferente, quando comparados aos demais elementos enriquecidos ou convencionais.

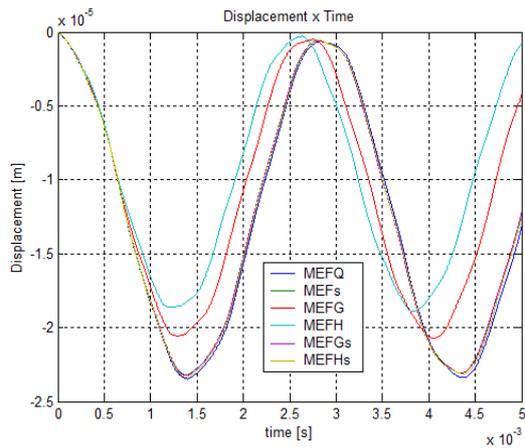
Tabela 6.10.1. Quantidade de elemento e grau de liberdade.

Elemento	Qtde. Elemento	No de Graus de liberdade
MEFs	15 (1x15)	156
MEFQ	12 (1x12)	150
MEFH	12 (1x12)	150
	18 (1x18)	222
	20 (1x20)	246
	24(1x24)	306
MEFG	12 (1x12)	150
	18 (1x18)	222
	20 (1x20)	246
	24(1x24)	306
MEFHs	9 (1x9)	152
MEFGs	9 (1x9)	152

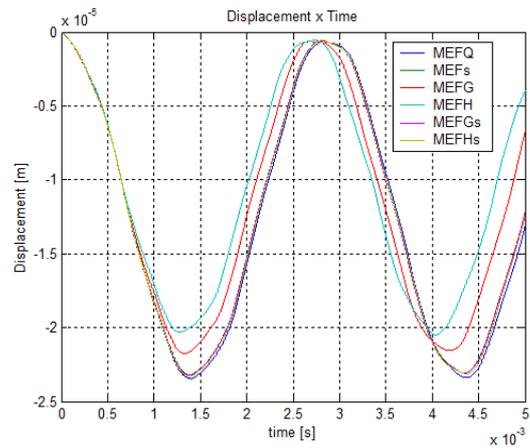
A propagação da onda da tensão longitudinal é registrada pelas figuras 6.10.4(a) – (b). Os resultados foram obtidos nos pontos de integração numérica. Como este exemplo adota-se 5x5 pontos de integração de Gauss, portanto, os valores da tensão longitudinal foram determinados nos pontos próximos a linha superior da figura 6.10.1, linha A. É possível observar que todos os elementos são capazes de determinar tensão longitudinal para este caso. O MEFG e o MEFH são capazes de determinar um resultado próximo aos demais métodos, apesar da existência de descontinuidade na curva de tensão devido à transição de um

elemento para outro. Todos os modelos também são capazes de capturar a onda da tensão longitudinal, no momento em que a viga deformada tende a retornar para sua posição inicial. Entretanto, a defasagem no resultado de deslocamentos também aparece na determinação da onda da tensão, como mostra as figuras 6.10.4(b).

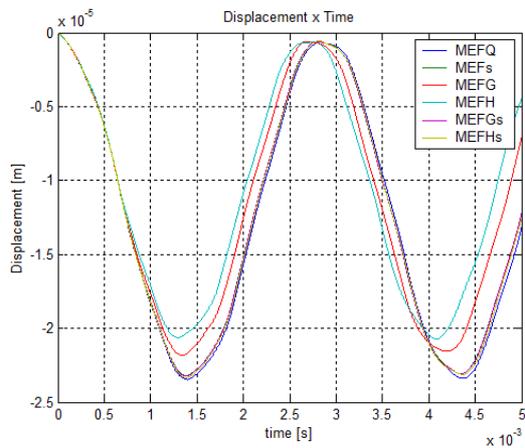
As figuras 6.10.5(a) – (d) mostram distribuição de tensão longitudinal ao longo da viga numa perspectiva bidimensional para momentos diferentes, resultado obtido por MEFGs e MEFHs.



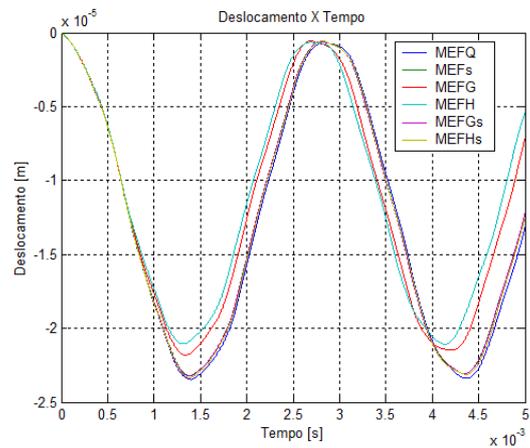
(a) Malha de 12 elementos.



(b) Malha de 18 elementos.



(c) Malha de 20 elementos.



(d) Malha de 24 elementos.

Figura 6.10.2. Curvas de deslocamento do exemplo 10, obtidas por MEFH e MEFG.

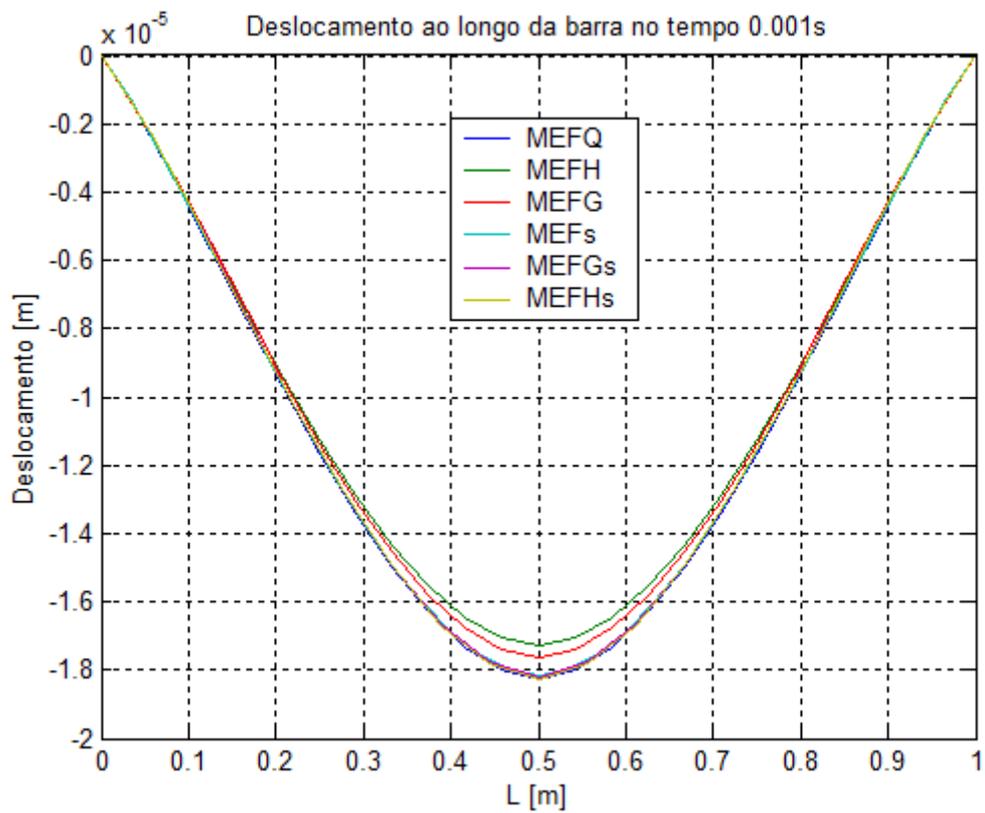


Figura 6.10.3(a). Configuração deformada do exemplo 10 no instante 0,001s.

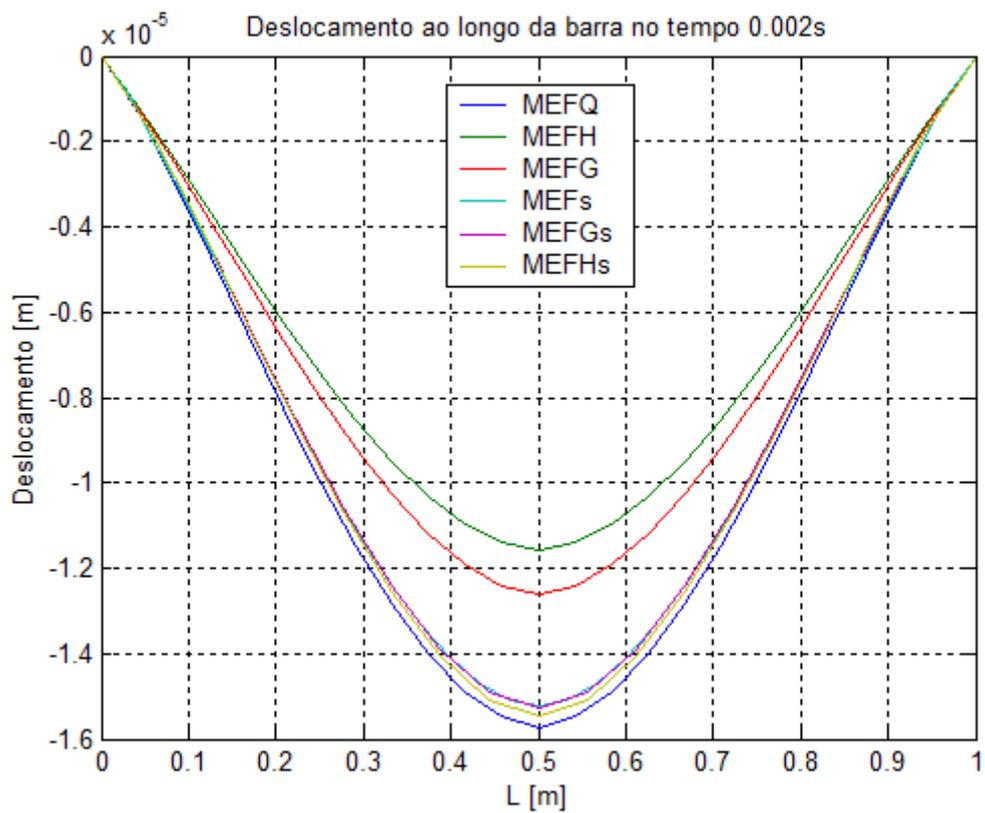


Figura 6.10.3(b). Configuração deformada do exemplo 10 no instante 0,002s.

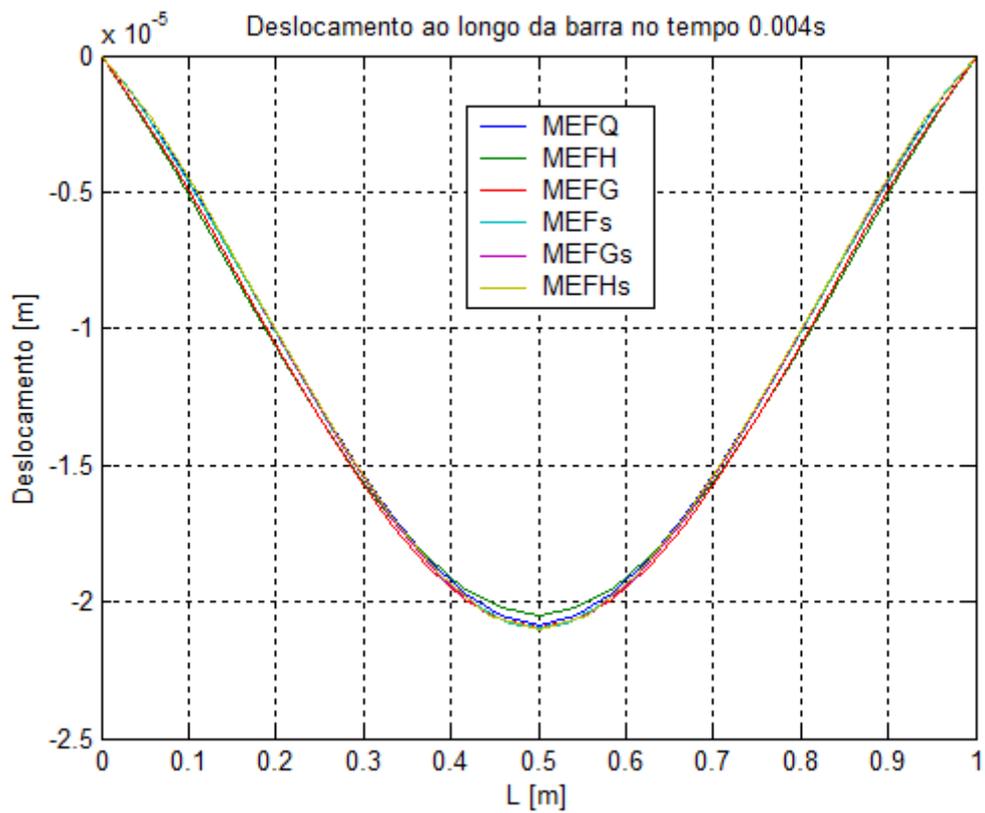


Figura 6.10.3(c). Configuração deformada do exemplo 10 no instante 0,004s.

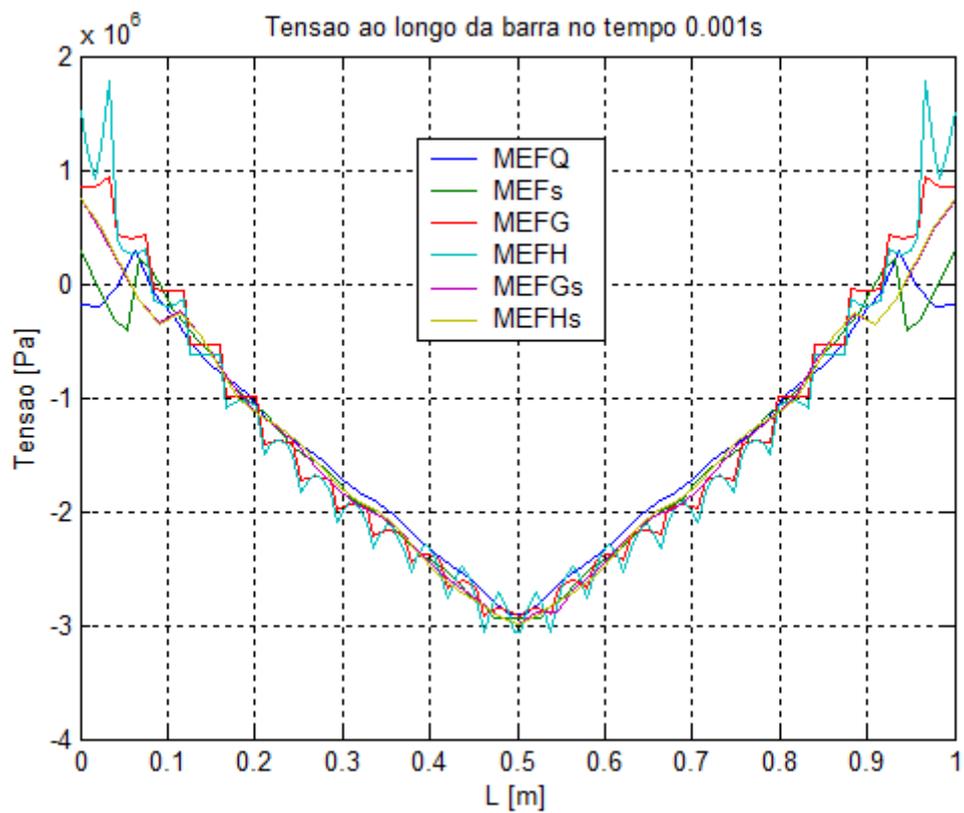


Figura 6.10.4(a). Onda tensão do exemplo 10 no instante 0,001s.

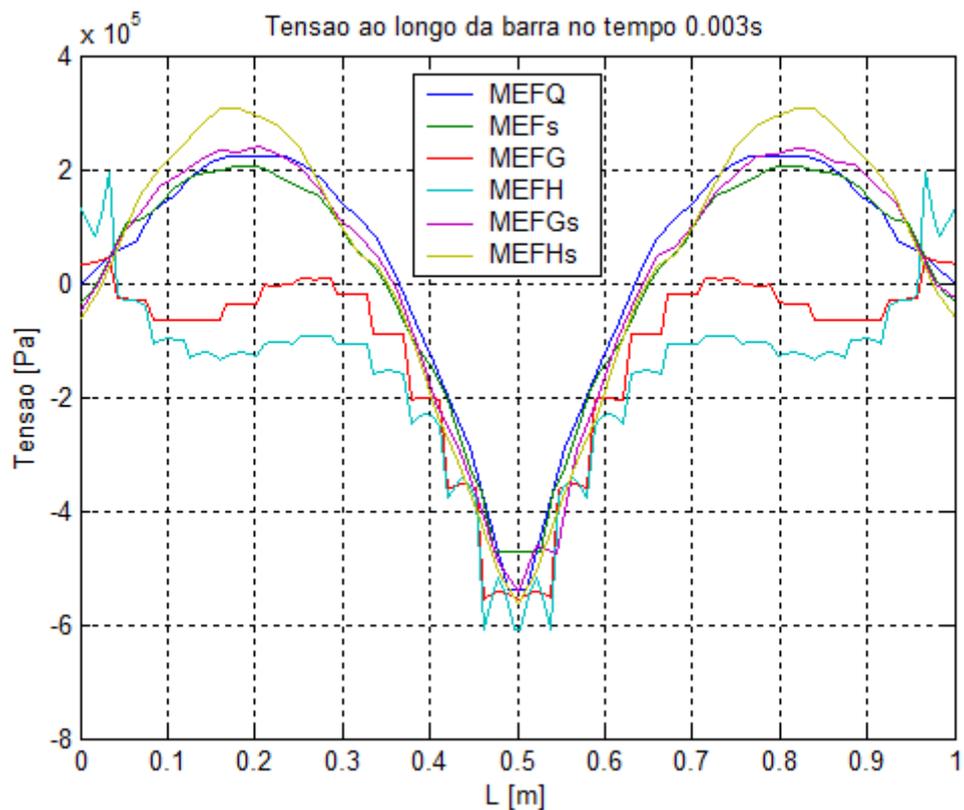


Figura 6.10.4(b). Onda tensao do exemplo 10 no instante 0,003s.

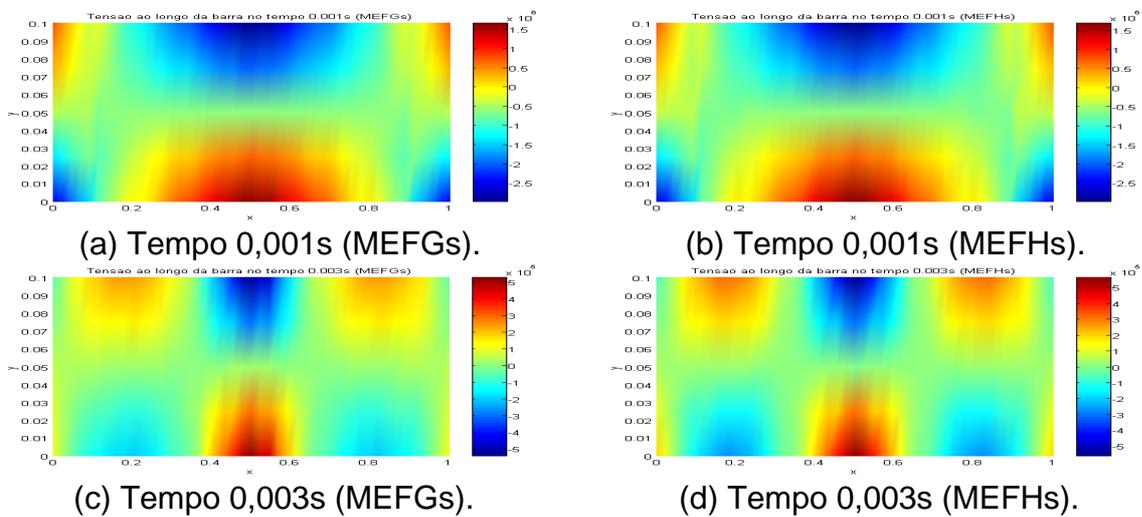


Figura 6.10.5. Tensao longitudinal em instante diferentes do exemplo 10.

6.11. Viga biapoiada em EPT submetida à força de *Heaviside* utilizando-se elemento quadrilateral e análise dinâmica elastoplástica.

Este exemplo tem por objetivo aplicar os elementos enriquecidos para análise dinâmica elastoplástica e comparar os resultados obtidos com elementos convencionais. No primeiro instante, apenas a malha uniforme é adotada, com integração numérica de quadratura de Gauss de 8x8 pontos. Logo depois, o caso é analisado com malha não uniforme, e o resultado comparado entre os elementos enriquecidos e os elementos convencionais *seredipity*, com 8x8 pontos de integração numérica. Por último, analisa-se a malha não uniforme com 30x30 pontos de integração de quadratura de Gauss.

O exemplo a seguir é um caso clássico na análise dinâmica elastoplástica, estudado por Machado (1983) e Costa (1978), dos quais os dados de referência foram reproduzidos. Excepcionalmente, nesta aplicação serão consideradas as unidades do sistema FPS.

Considere-se uma viga representada pela figura 6.11.1 com tensão de escoamento $\sigma_y = 50 \text{ kip/in}^2$, módulo de Young $E = 30000 \text{ kip/in}^2$, coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$, densidade $\rho = 0.733 \times 10^{-3} \text{ lb.s}^2/\text{in}^4$, espessura de 1 in. Sobre a viga atua uma força distribuída de $p = 0.75 p_o (\text{lb/in}^2)$, onde $p_o = \frac{2\sigma_y h^2}{L^2}$. Para reduzir esforço computacional na análise, apenas $\frac{1}{4}$ do modelo foi considerado, o que corresponde a seis elementos, como mostrado em Machado (1983). O algoritmo adotado para marcha do tempo é o método de Newmark de aceleração média, que proporciona estabilidade incondicional. O intervalo do tempo adotado é de 5×10^{-5} s, com 1000 passos de tempo. O ponto A está situado no meio da viga, na coordenada global (15; 1). O ponto B é um ponto de integração numérica, situado na coordenada natural do elemento (0,9061798; 0,9061798) para 8x8 pontos de integração numérica.

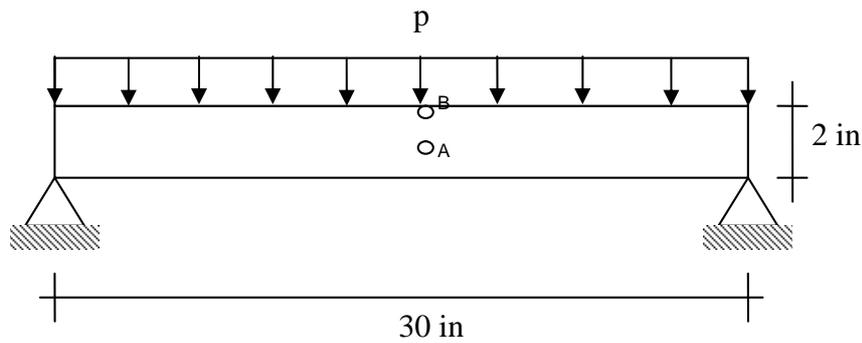


Figura 6.11.1 Representação esquemática da viga biapoiada.

A curva de deslocamentos versus tempo é determinada no nó situado no ponto A, posicionado sobre o eixo neutro da viga, da figura 6.11.1, e representada na figura 6.11.2. É possível observar que os elementos convencionais e enriquecidos apresentam a mesma tendência da curva, com um pouco de diferença entre as curvas. Quando comparados ao resultado de referência, todos os métodos se aproximam dos resultados da referência.

Por outro lado, a tensão axial é calculada no ponto de integração situada no ponto B, da figura 6.11.1, e representada pela figura 6.11.3. Todos os modelos apresentam plastificação, como mostrado nos trabalhos de Machado (1983) e Costa (1978). No momento do escoamento, o MEEGs e o MEFHs apresentam oscilação numérica menor no que diz respeito aos elementos convencionais.

A distribuição de tensões ao longo do comprimento da viga tanto no regime elástico quanto no regime plástico, ou até mesmo, no momento de descarregamento, pode ser vista nas figuras 6.11.4 (a) – (c). Os resultados mostrados são referentes ao bordo superior da viga, onde o carregamento distribuído é aplicado. A figura 6.11.4 (a) mostra o momento em que a viga é carregada. Todos os métodos apresentam curvas semelhantes em termos de magnitude. Logo depois, no instante de 0,003s, acontece a redistribuição de tensão (ver figura 6.11.4 (b)). Pois, nesse momento, a viga se encontra no regime elástico plástico perfeito, e uma porção da viga estava plastificada. Essa plastificação teve início no 0,0015 s, aproximadamente, e se propagou do ponto central da viga para as extremidades, que se encontram apoiadas. Quando chegou em 0,003 s, a região de plastificação já havia ocupado mais da metade da viga, como mostra a figura 6.11.4 (b). A curva da distribuição de tensão determinada pelos elementos convencionais registra oscilação na magnitude

da tensão na região plastificada, enquanto os elementos enriquecidos não apresentam mesmo problema. A figura 6.11.4 (c) mostra o instante em que a viga é descarregada. Os resultados dos elementos convencionais mostram irregularidades na magnitude da tensão determinada, enquanto os resultados dos elementos enriquecidos mostram estabilidade.

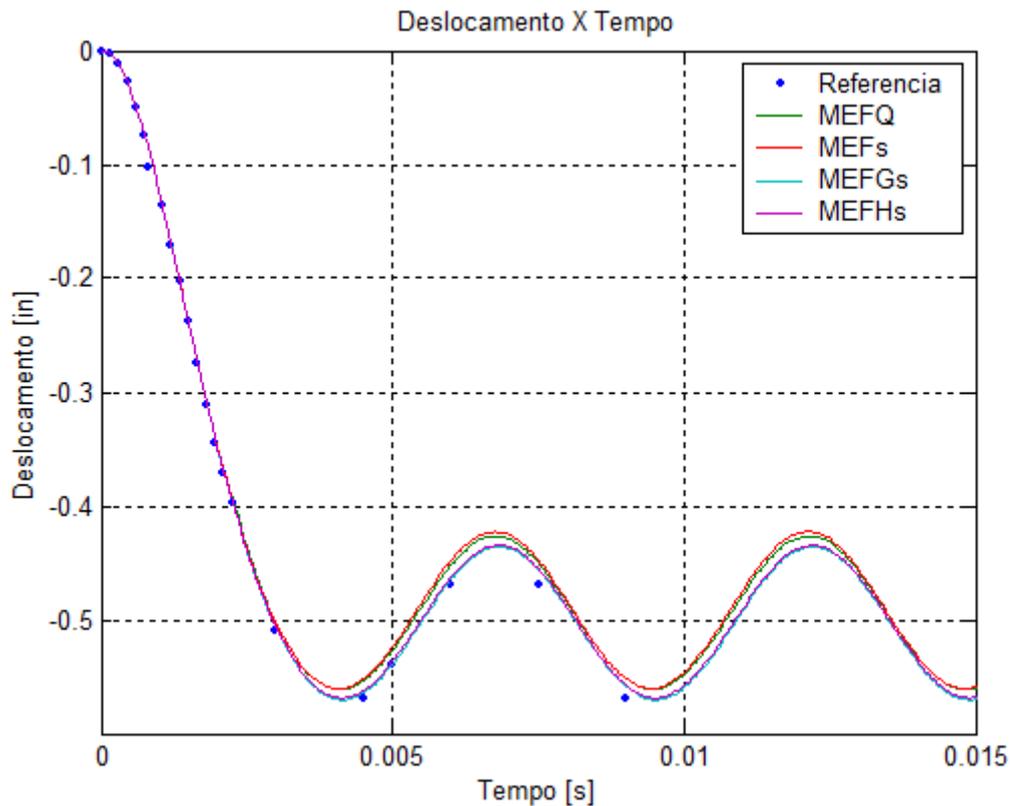


Figura 6.11.2. Deslocamento do nó situado no meio da viga, ponto A.

Por outro lado, os elementos enriquecidos também apresentam alguns problemas como mostram as figuras 6.11.5 (a) – (f). No primeiro instante, no momento em que o tempo é de 0,001s, a distribuição de tensão longitudinal é registrada pelas figuras 6.11.5 (a) e (b), pelo MEFGs e MEFHs respectivamente. No bordo superior da viga, a distribuição de tensão é mais uniforme, especialmente para os MEFGs, em comparação à ao bordo inferior da viga. Esse problema se intensifica no momento de plastificação (ver figuras 6.11.5 (c) e (d)). A região superior das figuras, representada pela cor azul, indica o espaço onde ocorre a plastificação devido à compressão. Na região abaixo, onde não ocorre plastificação, existe irregularidade na distribuição de tensão. A mesma situação ocorre quando a viga está sendo descarregada, como mostra as figuras 6.11.5 (e) e (f). Entretanto, a

magnitude da irregularidade é pequena comparada com máxima tensão, no instante em que essa irregularidade é observada. Nesse sentido, não compromete o resultado obtido.

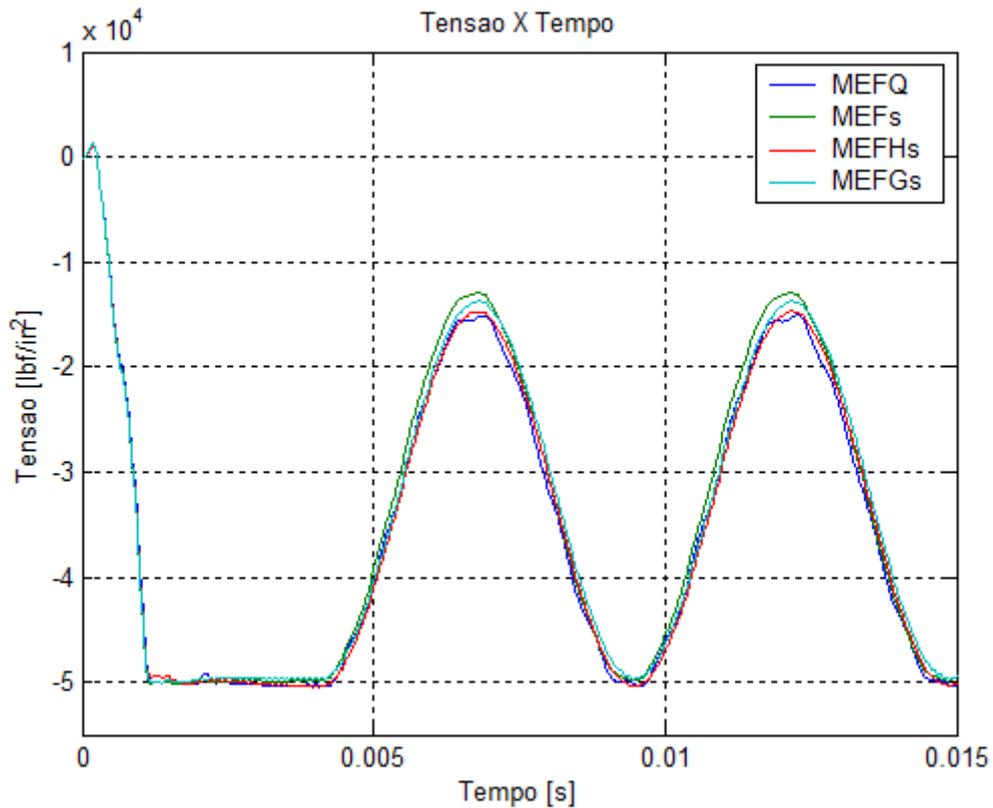
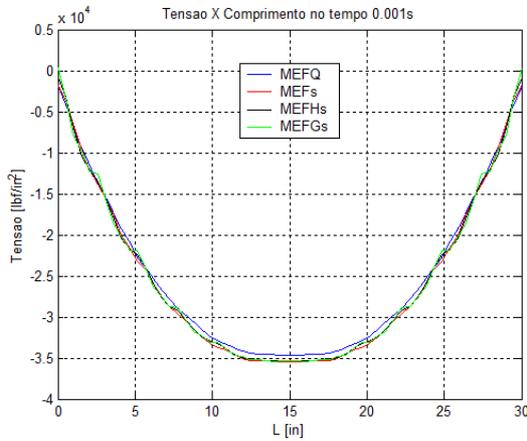


Figura 6.11.3. Tensão axial no ponto situado no ponto B.

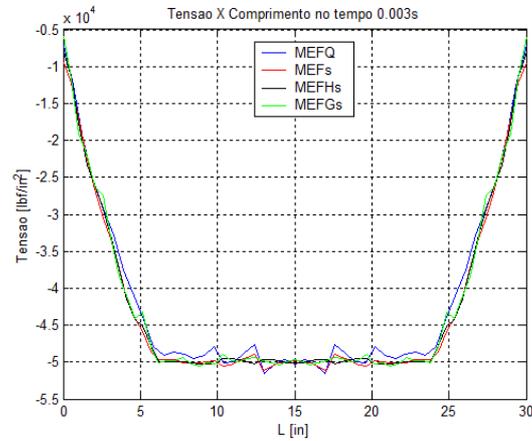
Em seguida, o mesmo caso é analisado utilizando-se uma malha não uniforme. A representação esquemática da malha é registrada pela figura 6.11.6. Para essa análise, adota-se método de alfa generalizado de solução temporal para garantir a estabilidade numérica. Nessa análise, considerou-se a utilização de diferentes quantidades de pontos de integração, com o intuito de observar suas influências sobre o elemento enriquecido, MEFGs.

Inicialmente se empregaram 8x8 pontos de quadratura de Gauss. O resultado obtido pode ser visto na figura 6.11.7. É possível observar resultados incoerentes com a curva obtida pelo 8x8 pontos de quadratura de Gauss para MEFGs. Por outro lado, ao optar pela integração numérica por subintervalo, com 30 x 30 pontos de integração, a curva obtida se aproxima dos resultados da referência. O que mostra a coerência com os resultados apresentados do capítulo 6, em que o MEFGs com 1

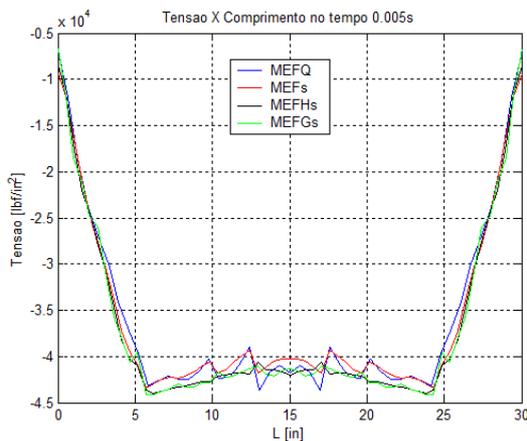
nível de enriquecimento, porém malha não uniforme, necessita de integração numérica por subintervalo para obter um cálculo que garanta a determinação com maior precisão da cobertura dada pelo enriquecimento.



(a). Distribuição de tensão ao longo de x, 0,001s.



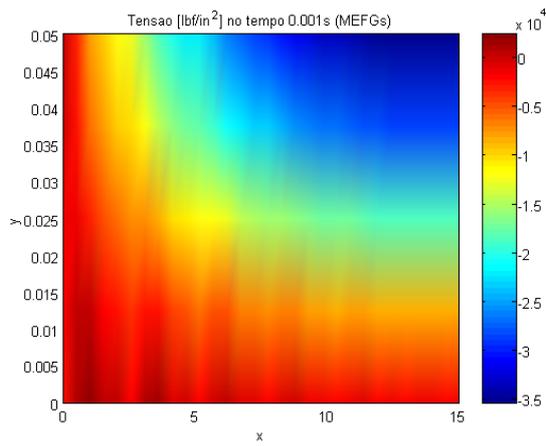
(b). Distribuição de tensão ao longo de x, 0,003s.



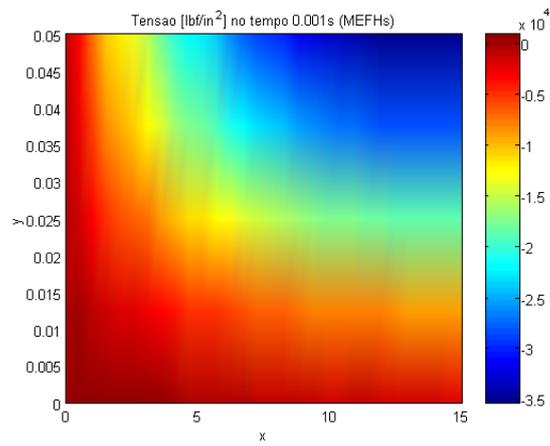
(c). Distribuição de tensão ao longo de x, 0,005s.

Figura 6.11.4. Distribuição de tensão longitudinal ao longo de x em instante diferentes, exemplo 11.

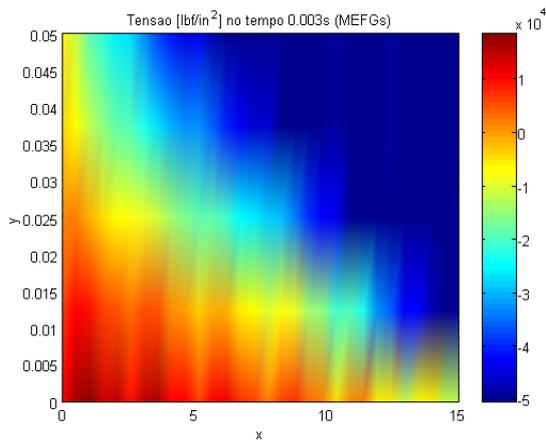
Por outro lado, apesar de apresentar resultados coerentes, a integração numérica por subintervalo aumentou consideravelmente o tempo de processamento, em comparação com a integração numérica de 8x8 pontos de quadratura de Gauss. No caso de uma análise dinâmica elastoplástica, quando um elemento se deforma consideravelmente, e por consequência, gerar malha não uniforme, o elemento enriquecido se mostra eficiente em obter resultados precisos, sob a penalidade de aumentar o tempo de processamento. Enquanto o elemento convencional, o MEFs com 8x8 pontos de integração numérica, apresenta-se dificuldades na determinação de resultados coerentes.



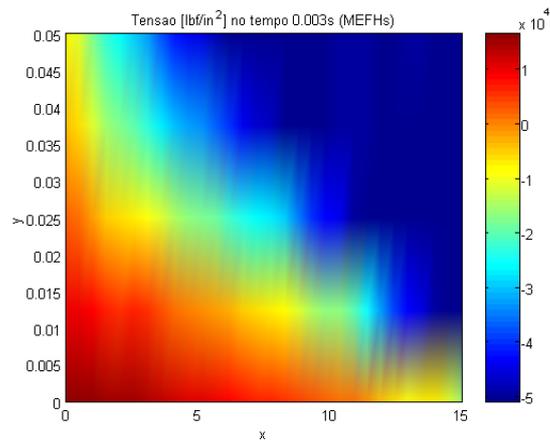
(a) Tempo 0,001s, MEFGs.



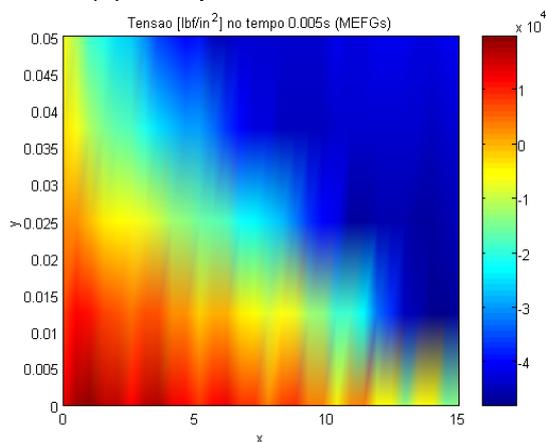
(b) Tempo 0,001s, MEFHs.



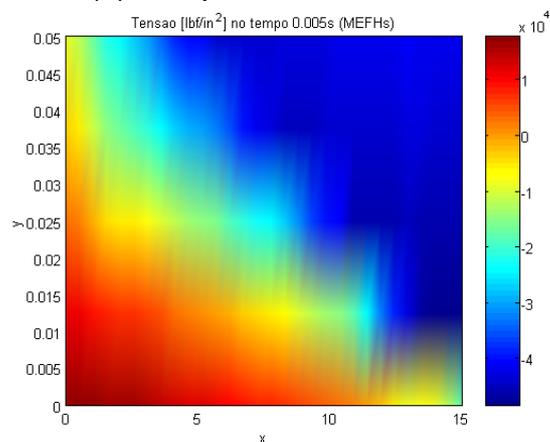
(c) Tempo 0,003s, MEFGs.



(d) Tempo 0,003s, MEFHs.



(e) Tempo 0,005s, MEFGs.



(f) Tempo 0,005s, MEFHs.

Figura 6.11.5. Distribuição da tensão longitudinal do exemplo 11.

Tanto o MEFGs quanto o MEFs, ambos os elementos mostraram resultados não coincidentes com os resultados da referência quando se adota 8x8 pontos de integração numérica. O que mostra a formulação enriquecida, com funções trigonométricas, necessita de quantidade elevada de pontos de integração numérica, para que possa garantir uma cobertura matemática completa. Especialmente no

caso de malha distorcida, a adição das funções de enriquecimento não eliminou por completo a imprecisão numérica com 8x8 pontos de integração numérica. Do ponto de vista do processamento computacional numa análise dinâmica elastoplástica, o MEFs com 30 x 30 pontos de integração numérica não se mostra viável. Por este motivo, é conveniente investigar uma estratégia de integração numérica que, por um lado, garantir a precisão de resultados, por outro lado, não demanda tempo de processamento.

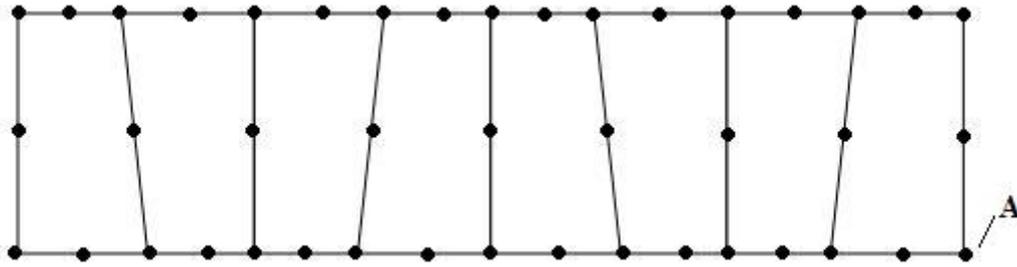


Figura 6.11.6. Representação esquemática de malha não uniforme.

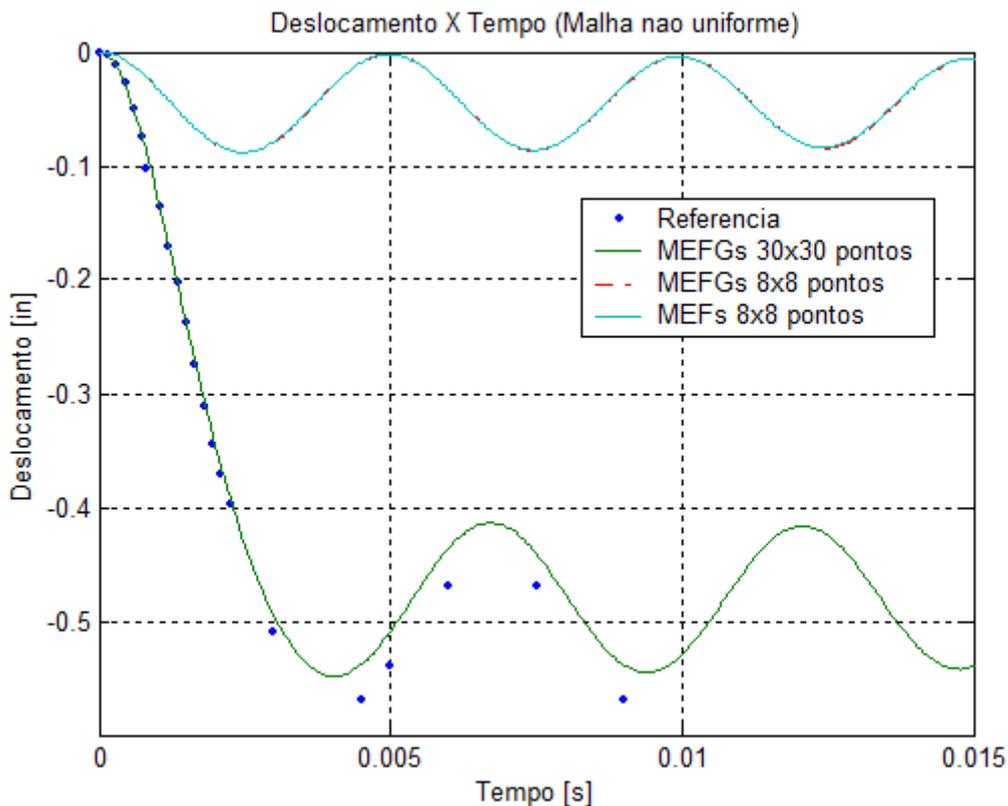


Figura 6.11.7. Deslocamento do ponto A da malha não uniforme.

7. CONCLUSÕES

Este trabalho desenvolveu análises elastodinâmicas em meios sólidos voltadas para problemas de propagação de ondas mecânicas. Foram implementados os elementos de barra, viga e EPT quadrilateral. Procedeu-se à discretização do tempo utilizando-se diferentes algoritmos, tais como o de Newmark, HHT e alfa generalizado. A discretização do espaço, por sua vez, fez-se a partir dos elementos convencionais e elementos enriquecidos. Dois foram os métodos de enriquecimento adotados - enriquecimento hierárquico e de partição da unidade - para se proceder à análise por elementos finitos. O desempenho foi considerado com vistas a avaliar os elementos convencionais e enriquecidos na relação com diferentes algoritmos de marcha do tempo, incluindo a ocorrência de plastificação.

A formulação de viga e de barra enriquecida mostrou-se eficiente em capturar passagem de onda de deslocamentos e de tensões. As funções de enriquecimento proporcionam condições de continuidade nas derivadas espaciais de deslocamento, o que contribui para reduzir as oscilações numéricas nas ocasiões em que a estrutura é submetida à cargas impulsivas. Por outro lado, os algoritmos HHT e alfa generalizado, por serem métodos dissipativos, auxiliam na estabilidade numérica. Ao se comparar os resultados obtidos pelas formulações convencionais e formulações enriquecidas, utilizando-se diferentes algoritmos de marcha do tempo, é possível afirmar que em todos os casos se observam resultados satisfatórios nas curvas de deslocamentos, porém são evidentes as oscilações numéricas nas curvas de velocidades, quando acoplados com o método de Newmark. Por outro lado, ao se considerarem métodos como HHT e alfa generalizado, as formulações enriquecidas se mostram muito mais estáveis que as formulações convencionais. Esta conclusão fornece uma diretriz para aprimorar a solução do problema EPT dinâmico elastoplástico. Nas análises elastoplásticas realizadas em vigas, envolvendo forças do tipo *Heaviside* e plastificação, é possível observar que todas as formulações apresentam oscilação numérica no resultado, devido ao processo iterativo de Newton-Raphson; entretanto, as formulações enriquecidas apresentam essas oscilações em menor magnitude.

Em paralelo a essa observação, o MEFH com funções de Lobatto (SOLIN et. al. 2004) para propagação de ondas longitudinais apresenta oscilação numérica, na região próxima às descontinuidades temporais, de forma mais significativa do que as

formulações convencionais. Embora o MEFH com função de Lobatto se apresenta eficiente na determinação de frequências naturais, e na determinação de deslocamentos, em análises elastodinâmicas, a formulação hierárquica apresenta resultados excessivamente oscilatórios nas curvas de velocidades. Por outro lado, o MEFH com funções de Bardell para propagação de ondas transversais se mostrou eficiente, com resultado satisfatório. Saliente-se que essas observações são independentes do algoritmo de marcha do tempo adotado. O MEFG com função de Arndt (2012) não apresenta, por sua vez, esses problemas.

Para análise elastodinâmica com modelos bidimensionais considerou-se o caso de estado plano de tensões, com elementos quadrilaterais. O enriquecimento foi feito com elementos quadrilaterais de quatro e de oito nós, ambos através de funções hierárquicas e funções generalizadas baseadas na partição de unidade. O MEFH de quatro nós emprega funções de Lobatto e apresentou oscilações numéricas na região próxima da descontinuidade matemática, tal como no problema de barra. Mas quando a estrutura é submetida a carregamento transversal, esses problemas não aparecem. Isso mostra que o MEFH é eficiente na determinação de propagação de onda, entretanto, a utilização de função de Lobatto requer análise mais aprofundada. Por outro lado, no caso do MEFG de quatro nós, apenas com enriquecimento no campo, não se observa esse problema. Com o algoritmo HHT, o MEFG com enriquecimento no campo é o que fornece maior estabilidade numérica entre todos os elementos. Tanto o MEFH quanto o MEFG fornecem melhora significativa na determinação da passagem de ondas em relação aos elementos convencionais de quatro nós. Entretanto, como tais elementos enriquecidos são desenvolvidos a partir de elementos convencionais de quatro nós, apresentam também necessidade de refino h ou p de níveis de enriquecimento para obter resultado satisfatório em comparação com resultados de referência.

O algoritmo de alfa generalizado com raio espectral de 0,6 combinado com o processo iterativo de Newton-Raphson se mostrou capaz de solucionar a propagação de ondas de tensões elastoplásticas apesar de apresentar alguns erros numéricos em comparação com os resultados de referência. A fonte para esses erros numéricos pode ser a do refino da malha, ou intervalo de tempo muito grande.

As funções de enriquecimento proporcionam maior estabilidade numérica na determinação das deformações ao longo do tempo em combinação com o método HHT ou alfa generalizado. Por outro lado, funções de enriquecimento não

introduzem fatores desestabilizadores durante a marcha do tempo nem durante as iterações de Newton-Raphson. Os métodos dissipativos HHT e alfa generalizado apesar de auxiliarem em proporcionar maior estabilidade numérica para formulações enriquecidas, porém, introduzem também amortecimento artificial nos resultados, de tal forma que fontes de erros numéricos sejam escondidas.

As formulações convencionais e enriquecidas para EPT quadrilateral também foram empregadas para a determinação dos pares de autovalores e autovetores. Diversos aspectos foram analisados, entre eles, a comparação de resultados obtidos por refino h e por refino p de níveis de enriquecimento. Através dos resultados apresentados na seção 5.4, é possível observar que o refino p de níveis de enriquecimento apresenta uma melhora significativa de resultados em comparação com o refino h , nos modos mais elevados. Além disso, para os modos de vibração mais elevados, as formulações enriquecidas, tanto com o refino h quanto com o refino p , apresentam porcentagem de erro relativo menor do que a de formulações convencionais. Outro aspecto abordado foi a quantidade de pontos de integração numérica necessária para proporcionar resultados coerentes. As formulações enriquecidas apesar de apresentarem eficiência e capacidade em obter baixa porcentagem de erros relativos na determinação de pares de autovalores e autovetores, entretanto, as funções de enriquecimento adotados neste trabalho apresentam resultados satisfatórios somente com elevada quantidade de pontos de integração numérica. Os resultados mostraram que as formulações enriquecidas, com quadratura de Gauss de 8x8 pontos, numa malha uniforme, proporcionam erro relativo bastante baixo, mesmo para modos mais elevados. Por outro lado, no *patch test*, as formulações enriquecidas se mostraram sensíveis à quantidade do número de pontos de integração. Quando se emprega integração numérica por quadratura de Gauss de 8x8 pontos para malha não uniforme, as formulações enriquecidas mostram resultados incoerentes. Entretanto, esses resultados incoerentes podem ser eliminados pela integração numérica por subintervalo, com a penalidade de aumentar consideravelmente o tempo de processamento.

A seguir, apresentam-se sugestões para trabalhos futuros, a saber:

- Como as formulações enriquecidas se mostraram muito eficientes na análise elastodinâmica, porém deve ser investigado melhor o aspecto de malha distorcida. Novos estudos devem trabalhar com a possibilidade de empregar baixa

quantidade de pontos de integração numérica, porém proporciona resultado preciso.

- Estender a formulação dos elementos enriquecidos para interação fluido-estrutura. Como os elementos enriquecidos se mostraram eficientes na determinação dos resultados em problemas de descontinuidades temporais e espaciais, podem ser aplicados para modelos numéricos que envolvem o acoplamento de sólidos e fluidos na mesma malha. Como o fluido tem resistência mecânica menor que sólido, isso caracteriza um problema de descontinuidade espacial. Quando esse tipo de malha é submetido ao carregamento impulsivo, deve-se saber qual é o desempenho dos elementos enriquecidos perante propagação de onda, especialmente na fronteira entre sólido e fluido.
- Por fim, como os elementos enriquecidos se mostram eficientes em lidar com problemas que envolvem descontinuidades matemática, a sugestão é aplicar MEFG para problemas de escoamentos compressíveis, como ondas de choque em velocidades supersônicas de propagação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Abdalla, J. E. Qualitative and discretization error analysis of laminated composite plate models. PHD thesis, Faculty of the Graduate School of the University of Colorado, 1992.
2. Abbasnia, R. & Kassimali, A. Large deformation elastic-plastic analysis of space frames. *Journal of Constructional Steel Research*, v. 35, p. 275-290, 1995.
3. Almeida, A. C. B. Análise inelástica de pórticos planos considerando a plasticidade distribuída e o efeito das tensões residuais nos perfis estruturais de aço. Dissertação de M. Eng., Pós-graduação em engenharia de estruturas, UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2006.
4. Almeida, A. C. B. & Lavall, A. C. C. Resistência de estruturas de aço considerando a análise avançada com plasticidade distribuída e o efeito das tensões residuais. *Anais XXVIII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia*, Porto, 2007.
5. Andreaus, U., Casini, P. & Vestroni, F. Non-linear dynamics of a cracked cantilever beam under harmonic excitation. *International Journal of Non-linear Mechanics*, vol. 42, pg. 566-575, 2007.
6. Armero, F. & Romero, I. Energy-dissipative momentum-conserving time-stepping algorithms for the dynamics of nonlinear cosserat rods. *Computational Mechanics*, vol 31, pg 3-26, 2003.
7. Arndt, M. O método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise de vibrações livres de estruturas reticuladas. Tese de Doutorado, PPGME, UFPR, 2009.
8. Arndt, M., Machado, R. D. & Scremin, A. An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, pg. 659 – 672, 2010.
9. Arndt, M., Machado, R. D. & Scremin, A. The generalized finite element method applied to free vibration of framed structures. *Advances in vibration analysis research*, 2011.
10. Babuska, I. & Melenk, J. M. The partition of unity method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, pg. 727-758, 1997.

11. Babuska, I. & Banerjee, U. Stable generalized finite element method. ICES report 11-07, 2011.
12. Babuska, I. & Banerjee, U. Stable Generalized Finite Element Method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, pg. 91-111, 2012.
13. Babuska, I., Banerjee, U. & Osborn, J. E. Survey of meshless and generalized finite element methods: a unified approach. *Acta Numerica*, Cambridge University Press, v. 12, pg 1-125, 2003.
14. Babuska, i., Banerjee, U. & Osborn, J. E. On principles for the selection of shape functions for the generalized finite element method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, vol. 191, pg. 5595 – 5629, 2002.
15. Bardell, N. S. Free vibration analysis of a flat plate using the hierarchical finite element method. *Journal of sound and Vibration*, vol. 151, pg. 263-289, 1991.
16. Barthold, F. J., Schmidt, M. & Stein, E. Error indicators and mesh refinements for finite-element computations of elastoplastic deformations. *Computacional Mechanics*, vol. 22, pg. 225-238, 1998.
17. Barros, F. B. Métodos sem malha e método dos elementos finitos generalizados em análise não linear de estruturas. Tese de Doutorado. USP-São Calors, 2002.
18. Bathe, K. J. *Finite element procedures*. Prentice Hall, 1996.
19. Belo, I. Moura, Análise eficiente de compósitos laminados planos utilizando-se a formulação de elementos finitos corrigidas a-priori sem os efeitos do travamento. Dissertação de Mestrado, PUCPR, 2006.
20. Belytschko. T., Ong, J. S. J. & Liu W. K. A consistent control of spurious singular modes in the 9-node Lagrange element for the Laplace and Mindlin plate equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 44, pg. 269-295, 1984.
21. Belytschko, T., Gracie, R. & Ventura G. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, v. 17, pg. 1-31, 2009.
22. Belytschko, T., Lu, Y. Y. & Gu, L. Crack propagation by element free Galerkin methods. *Engineering fracture mechanics*, vol. 51, pg. 295 – 315, 1995.
23. Belytschko, T., Liu, W. K., Ong, J. S. J. & Lam, D. Implementation and application of a 9-node Lagrange shell element with spurious mode control. *Advances in Finite Element Technology*, vol. 20, pg. 121 – 128, 1985.

24. Belytschko, T., Liu, W. K. & Ong, J. S. J. Mixed variational principles and stabilization of spurious modes in the 9-node element. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 62, pg. 275 – 292, 1987.
25. Beslin, O. & Nicolas, J. A hierarchical function set for predicting very high order plate bending modes with any boundary conditions. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 202, pg 633-655, 1997.
26. Bonet, J. & Wood R. D. *Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis*. First edition, Cambridge University Press, 1997.
27. Briassoulis, D. The zero energy modes problem of the nine-node Lagrangian degenerated shell element. *Computer & Structures*, vol. 30, pg. 1389 – 1402, 1988.
28. Carrer, J. A. m. & Mansur, W. J. Stress and velocity in 2D transient elastodynamics analysis by the boundary element method. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 23, pg. 233 – 245, 1999.
29. Chandrupatla, T. R.; Belegundu, A. D. *Introduction to finite elements in engineering*. 1^o Edição. Unite State of America: Prentice-Hall, 1991.
30. Chang, S. Y. A new family of explicit methods for linear structural dynamics. *Computers and Structures*, vol. 88, pg 755-772, 2010.
31. Cho, J. W. & Youn, S. K. A hierarchical time adaptive refinement scheme for the finite element elastodynamics, *Computer & Structure*, vol. 56, pg. 645 – 650, 1995.
32. Chopra, A. K. *Dynamics of structures – Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice Hall, 1995.
33. Chung, J. & Hulbert, G. M. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized – alfa method. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 60, pg 371-375, 1993.
34. Cook, R. D. *Concepts and applications of finite element analysis*. John Wiley & Sons, 1981.
35. Corbani, Silvia. *Análise dinâmica elasto-plástica de estruturas metálicas sujeitas a excitação aleatória de sismos*. Dissertação de Mestrado, USP, 2006.
36. Costa, A. M. *Análise dinâmica elasto-plástica transiente de curta duração incluindo os efeitos da interação solo-fluido-estrutura*. Dissertação de Mestrado, Pós-graduação de engenharia de UFRJ, 1978.

37. Cottrell, J. A., Reali, A., Bazilevs, Y. & Hughes, T. J. R. Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pg. 5257 – 5296, 2006.
38. Cramer, H., Rudolph, M., Steinl, G. & Wunderlich, W. A hierarchical adaptive finite element strategy for elastic plastic problems. *Computer & Structures*, vol. 73, pg. 61-72, 1999.
39. Datta, T. K. *Seismic analysis of structures*. John Wiley & Sons, 2010.
40. De Bel E., Villon, P. & Bouillard, Ph. Forced vibrations in the medium frequency range solved by a partition of unity method with local information. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 62, pg. 1105-1126, 2005.
41. Deuffhard, P., Leinen, P. & Yserentant, H. Concepts of an adaptive hierarchical finite element code. *Impact of Computing in Science and Engineering*, vol. 1, pg. 3-35, 1989.
42. Dhatt, G., Touzot, G. & Cantin, Gilles. *The finite element method displayed*. John Wiley & Sons. 1985.
43. Duarte, C. A. & Oden, J. T. An h-p adaptive method using clouds. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 139, pg. 237-262, 1996.
44. Duarte, C. A., Babuska, I. & Oden, J. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. *Computer & Structures*, vol. 77, pg. 215-232, 2000.
45. Duarte, C. A., Hamzeh, O. N., Liszka, T. J. & Tworzydło, W. W. A generalized finite element method for the simulation of three dimensional dynamic crack propagation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, pg. 2227 – 2262, 2001.
46. Duarte, C. A. & Kim, D. J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global-local enrichment functions. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, pg. 487 – 504, 2008.
47. Eringen A. C. & Suhubi, E. S. *Elastodynamics – Finite Motions*, volume 1, Academic Press, 1974.
48. Fernandes, K. M. Identificação de dano estrutural via abordagem de propagação de ondas acústicas utilizando técnicas de inteligência computacional. Tese de Doutorado, UERJ, 2010.

49. Fleischfresser, S. A. Uma formulação do método dos elementos de contorno para análise de vigas de timoshenko. Tese de Doutorado, Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, UFPR, 2012.
50. Forti, T. L. L. & Requena, J. A. V. & Devillo, P. R. B. Formulação de viga 3D com relação constitutiva não-linear. Anais XXVIII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Porto, 2007.
51. Fung, T. C. Unconditionally stable higher order Newmark methods by substepping procedure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 147, pg. 61 – 84, 1997.
52. Ganesan, N. & Engels, R. C. Hierarchical Bernoulli-euler beam finite elements. *Computer & Structure*, vol. 43, pg. 297-304, 1992.
53. Góis, W. Método dos elementos finitos generalizados em formulação variacional mista. Dissertação de Mestrado, USP-São Carlos, 2004.
54. Goudreau, G. L. & Taylor, R. L. Evaluation of numerical integration methods in elastodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 2, pg. 69-97, 1972.
55. Grosu, E. & Harari, I. Studies of the discontinuous enrichment method for two-dimensional acoustics. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 44, pg. 272 – 287, 2008.
56. Gupta, V., Kim, D. J. & Duarte, C. A. Analysis and improvements of global – local enrichments for the generalized finite element method. *Comput. Methods appl. Mech. Enrg.*, vol. 245, pg. 47-62, 2012.
57. Han, W. Error estimates of numerical solutions for a cyclic plasticity problem. *Computational Mechanics*, vol. 23, pg. 33-38, 1999.
58. Han, W. & Pety, M. Linear vibration analysis of laminated rectangular plates using the hierarchical finite element method – I. Free vibration analysis. *Computer & Structure*, vol. 61, pg. 705 – 712, 1996.
59. Han, W. & Pety, M. Linear vibration analysis of laminated rectangular plates using the hierarchical finite element method – II. Forced vibration analysis. *Computer & Structure*, vol. 61, pg. 713 – 724, 1996.
60. Hilbert, H. M., Hughes, T. J. R. & Taylor, R. L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. *Earthquake engineering and structural dynamics*, vol. 5, pg 283-292, 1977.

61. Hjelmstad, K. D. Fundamentals of Structural Mechanics. United States of America, PRENTICE HALL, 1997.
62. Hoff, C. & Pahl, P. J. Development of an implicit method with numerical dissipation from a generalized single-step algorithm for structural dynamics. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 67, pg. 367-385, 1988.
63. Houmat, A. An alternative hierarchical finite element formulation applied to plate vibrations. Journal of Sound and Vibration, vol. 206, pg. 201-215, 1997.
64. Hsu, Y. S. Machado, R. D. Dynamic analysis of pipe as Euler – Bernoulli beam with GFEM and HFEM. 22nd International Congress of Mechanical Engineering (COBEM 2013), Ribeirão Preto, Brazil.
65. Hsu, Y. S. Machado, R. D. & Abdalla Filho, J. E. Elastodynamics analysis of structure subjected to impulsive loading by using generalized and hierarchical finite element method. Anais XXXIV CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Pirenópolis, 2013.
66. Hughes, T. J. R., Cottrell, J. A. & Bazilevs, Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 194, pg. 4135 – 4195, 2005.
67. Hughes, T. J. R., Cohen, M. & Haroun, M. Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates. Nuclear Engineering and Design, vol. 46, pg. 203-222, 1978.
68. Justo, J. M. C. F. Estudo do comportamento ao impacto de alta velocidade de estruturas em materiais compósitos. Tese de Doutorado, FEUP, 2005.
69. Khan, A. S. & Huang, S. Continuum Theory of Plasticity. United States of America, JOHN WILEY & SONS, 1995.
70. Kim, S. E. & Kim, Y. & Choi, S. H. Nonlinear analysis of 3D steel frames. Thin-Walled Structures, v. 39, p. 445-461, 2001.
71. Kim, Y. W. & Min, O. K. Theoretical review on the spurious modes in plane-stress/strain isoparametric meshes. Computers & Structures, vol. 49, pg. 1069-1082, 1993.
72. Kirsch, u. & Bogomolni, M. Nonlinear and dynamic structural analysis using combined approximations. Computer & Structures, vol. 85, pg. 566 – 578, 2007.

73. Kuhl, D. & Crisfield, M. A. Energy-conserving and decaying algorithms in non-linear structural dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 45, pg. 569-599, 1999.
74. Lai, W. M., Rubin, D. & Krempl, E. *Introduction to Continuum Mechanics*. Pergamon Press Ltd, 1993.
75. Law, S. S. & Lu, Z. R. Crack identification in beam from dynamic responses. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 285, pg. 967-987, 2005.
76. Leung, A. Y. T. & Chan, J. K. W. Fourier p-element for the analysis of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 212, pg. 179 – 185, 1998.
77. Leung, A. Y. T., Zhu, B., Zheng, J. & Yang, H. Analytic trapezoidal fourier p-element for vibrating plane problems. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 271, pg. 67-81, 2004.
78. Leung, A. Y. T. & Au, F. T. K. Spline finite elements for beam and plate. *Computer & Structure*, vol. 37, pg. 717 – 729, 1990.
79. Li, z., Li, P., He, Z. & Liu, G. Coupled partition of unity method and improved meshless weighted least-square method for two-dimensional interior structure-acoustic problem. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 36, pg. 154-160, 2012.
80. Loureiro, F. S. Generalização do método da aproximação explícita de Green para a solução de equações parabólicas e hiperbólicas. Tese de Doutorado, UFRJ, 2011.
81. Lubliner, J. *Plasticity theory*. Dover, Newyork, 2008.
82. Machado, R. D. Análise dinâmica não linear de sistemas rígido flexíveis. Dissertação de Mestrado, UFRJ, 1983.
83. Madeo, A., Zagari, G. & Casciaro, R. An isostatic quadrilateral membrane finite element with drilling rotations and no spurious modes. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 50, pg. 21-32, 2012.
84. Magdi, M. Exact yield hyper-surface for thin pipes. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, v. 78, p. 507-514, 2001.
85. Mangini, M. Método dos elementos finitos generalizados para análise de estruturas em casca de revolução. Dissertação de Mestrado, USP – São Carlos, 2006.
86. Melenk, J. M. & Babuska, I. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. Research Report No. 96-01, 1996.

87. Menin, R. C. G., Taylor, W., Menin, E. C. G. & Lopes, A. P. Algoritmos de conservação ou decréscimo da energia na análise dinâmica não-linear de estruturas. CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Portugal, 2007.
88. Mikkola, M. J., Tuomala, M. & Sinisalo, H. Comparison of numerical integration methods in the analysis of impulsively loaded elasto-plastic and viscoplastic structures. *Computer & Structures*, vol. 14, pg. 469-478, 1981.
89. Monteiro, C. S. G. Novos operadores de captura via o método dos elementos finitos aplicado a problemas de propagação de ondas. Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, 2009.
90. Murotani, K., Yagawa, G. & Choi, J. B. Adaptive finite elements using hierarchical mesh and its application to crack propagation analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 253, pg. 1-14, 2013.
91. Nirschl, G. C. Método dos elementos finitos e técnicas de enriquecimento da aproximação aplicados à análise de tubos cilíndricos e cascas esféricas. Dissertação de Mestrado. USP – São Carlos, 2005.
92. Nowacki, W. *Dynamic of Elastic Systems*, New York, John Wiley & Sons. Inc., 1963.
93. Nowzartash, F. & Mohareb, M. An elasto-plastic finite element for steel pipelines. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, v. 81, p. 919-930, 2004.
94. Oden, j. T., Duarte, C. A. & Zienkiewicz, O. C. A new cloud-based hp finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 153, pg. 117-126, 1998.
95. Oliveira, W. Um elemento finito hierárquico para análise dinâmica p-adaptativa de placas espessas, Tese de Doutorado, UNICAMP, 1993.
96. Oliveira, W. Um processo de refinamento do método dos elementos finitos para análise de vibrações livres de vigas. SIMMEC, 2004.
97. Park, K. C. & Flaggs, D. L. A fourier analysis of spurious mechanisms and locking in the finite element method. *Computer Method in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 46, pg. 65 – 81, 1984.
98. Pereira, J. P. A. Extração de fatores de intensidade de tensão utilizando a solução do método dos elementos finitos generalizados. Dissertação de Mestrado, USP – São Carlos, 2004.

99. Pereira, M. S. Um modelo de placa para análise de compósitos laminados utilizando a notação *strain gradient*. Dissertação de Mestrado, PUCPR, 2004.
100. Pinto, J. M. G. T. Avaliação do comportamento mecânico de blindagens balísticas. Dissertação de Mestrado, 2009, Universidade técnica de Lisboa.
101. Quarteroni, A., Sacco, R. & Saleri, F. Numerical Mathematics, Springer – Verlag, New York, 2000.
102. Ribeiro, P. Hierarchical finite element analysis of geometrically non-linear vibration of beams and plane frames. Journal of Sound and Vibration, vol. 246, pg. 225-244, 2001.
103. Ribeiro, P. & Petyt, M. Nonlinear vibration of plates by the hierarchical finite element and continuation methods. International Journal of Mechanical Sciences. Vol. 41, pg. 437 – 459, 1999.
104. Ribeiro, P. & petyt, M. Non-linear vibration of composite laminated plates by the hierarchical finite element method. Composite Structures, vol. 46, pg. 197 – 208, 1999.
105. Rodrigues, P. F. N. Ferramentas Numéricas para a Análise Não-Linear Física e Geométrica de Estruturas Reticuladas na Exploração de petróleo *Offshore*. Tese de D.Sc., UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 2000.
106. Romkes, A. & Oden, J. T. Adaptive modeling of wave propagation in heterogenous elastic solids. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 193, pg. 539 – 559, 2004.
107. Shishvan, S. S., Noorzad, A. & Ansari, A. A time integration algorithm for linear transient analysis based on the reproducing kernel method. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 198, pg. 3361 – 3377, 2009.
108. Silva, W. T. M. Aplicações de um esquema de integração implícito-composto na análise dinâmica não linear. CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Portugal, 2007.
109. Silvestre, N. & Camotim, D. Utilização da teoria generalizada de vigas na análise de estabilidade de barras com secção tubular circular. Anais XXVIII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Porto, 2007.
110. Simo, J. C. Tarnow, N. The discrete energy-momentum method. Conserving algorithms for nonlinear elastodynamics. Math Phys, vol. 43, 1992.

111. Solin, P. Segeth, K. & Dolezel, I. Higher-order finite element methods. Chapman & Hall/CRC, 2004.
112. Souza, L. A. F. Análise não linear via elementos finitos de um modelo de vigas para dutos enterrados. Dissertação de Mestrado, PPGMNE, UFPR, 2005.
113. Strouboulis, T., Babuska, I. & Copps, K. The design and analysis of the generalized finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 181, pg. 43-69, 2000.
114. Strouboulis, T., Zhang, L., Wang, D. & Babuska, I. A posteriori error estimation for generalized finite element methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, pg. 852-879, 2006.
115. Strouboulis, T., Hidajat, R. & Babuska, I. The generalized finite element method for Helmholtz equation. Part II: Effect of choice of handbook functions, error due to absorbing boundary conditions and its assessment. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 197, pg. 364 – 380, 2008.
116. Taylor, R., Zienkiewicz, O. C. & Onate, E. A hierarchical finite element method based on the partition of unity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 152, pg. 73-84, 1998.
117. Torres, I. F. R. Desenvolvimento e aplicação do método dos elementos finitos generalizados em análise tridimensional não linear de sólidos. Tese de Doutorado, USP – São Carlos, 2003.
118. Torii, A. J. Análise dinâmica de estruturas com o método dos elementos finitos generalizado. Tese de Doutorado, UFPR, 2012.
119. Torii, A. J. Machado, R. D. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 9, pg. 309 – 337, 2012.
120. Tudela, C. A. R. V. Formulações alternativas do MEC para problemas elastodinâmicos de mecânica da fratura com o uso da função de Green numérica. Tese de Doutorado, COPPE, UFRJ, 2003.
121. Volterra, E. & Zachmanoglou, E. C. *Dynamics of vibrations*, Charles E. Merrill Books, 1965.
122. White, D. W. & Abel, J. F. Accurate and efficient nonlinear formulation of a nine-node shell element with spurious mode control. *Computer & Structures*, vol. 35, pg. 621-641, 1990.

123. Wood, W. L., Bossak, M. & Zienkiewicz, O. C. An alpha modification of Newmark's method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, pg. 1562-1566, 1981.
124. Wu, J. Zhu, Z. J., Szmelter, J. & Zienkiewicz, O. C. Error estimation and adaptivity in navier-stokes incompressible flows, *Comput. Mech.*, vol. 6, pg. 259 – 270, 1990.
125. Xue, Q. & Meek, J. L. Dynamic response and instability of frame structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. vol. 190, pg 5233-5242, 2001.
126. Yang, Z. J., Zhang, Z. H., Liu, G. H. & Ooi, E. T. An h-hierarchical adaptive scaled boundary finite element method for elastodynamics, *Computers & Structures*, vol. 89, pg. 1417 – 1429, 2011.
127. Yu, Z., Guo, X, & Chu, F. A multivariable hierarchical finite element for static and vibration analysis of beams. *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 46, pg. 625-631, 2010.
128. Zhiliang, F. & Qigen, S. Occurrence of non-communicable spurious modes in an eight-node serendipity element. Technical note. *Computer & Structures*, vol. 43, pg. 809 – 811, 1992.
129. Zhou, X., Sha, D. & Tamma, K. K. A novel non-linearly explicit second-order accurate L-stable methodology for finite deformation: hypoelastic/hypoelasto-plastic structural dynamics problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 59, pg. 795-823, 2004.
130. Zienkiewicz, O. C., Gago, J. P. S. R. & Kelly, D. The hierarchical concept in finite element analysis. *Computers & Structures*, vol. 16, pp. 53-65, 1983.
131. Zienkiewicz, O. C. & Taylor, R. L. *The finite element method for solid and structural mechanics*. 6 edição, Elsevier Ltd, 2005.