

DIOGO CERVELIN

**MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO:
DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO EM ANÁLISE NÃO-
LINEAR UTILIZANDO ELEMENTO DE PÓRTICO
ESPACIAL DE ALTA ORDEM**

Curitiba

2014

DIOGO CERVELIN

**MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO:
DESENVOLVIMENTO E APLICAÇÃO EM ANÁLISE NÃO-
LINEAR UTILIZANDO ELEMENTO DE PÓRTICO
ESPACIAL DE ALTA ORDEM**

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Escola Politécnica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Orientador: Roberto Dalledone
Machado, D. Eng.

Curitiba

2014

Dados da Catalogação na Publicação
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Sistema Integrado de Bibliotecas – SIBI/PUCPR
Biblioteca Central

C419m
2014 Cervelin, Diogo
Método dos elementos finitos generalizado : desenvolvimento e aplicação em análise não-linear utilizando elemento de pórtico espacial de alta ordem ; orientador, Roberto Dalledone Machado. – 2014.
102 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná,
Curitiba, 2014
Bibliografia: f. 99-102

1. Engenharia mecânica. 2. Método dos elementos finitos. 3. Polinômios.
I. Machado, Roberto Dalledone. II. Pontifícia Universidade Católica do Paraná.
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDD 20. ed. – 620.1

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus familiares e à
minha esposa.

AGRADECIMENTOS

À Deus, à Nossa Senhora do Perpétuo Socorro e à um espírito amigo, pela luz divina.

Aos meus familiares, pelo amor e apoio nos momentos de desânimo e dificuldade.

À minha esposa Maria Eugênia, pelo amor, carinho e paciência durante esta importante e difícil etapa.

Ao professor Roberto Dalledone Machado, pela amizade e orientação.

Ao professor Shang, pelas sugestões e ensinamentos que me ajudaram no desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos, pela amizade.

À PUCPR, pela oportunidade de desenvolver o meu trabalho de mestrado.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	19
1.1 MOTIVAÇÃO	21
1.2 OBJETIVO GERAL	23
1.3 OBJETIVO ESPECÍFICO	23
1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	28
2. REVISÃO TEÓRICA	30
2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	30
2.2 MECÂNICA DO CONTÍNUO	35
2.3 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS	36
2.4 FORMULAÇÃO DE ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI ..	42
2.5 RELAÇÃO DEFORMAÇÃO – DESLOCAMENTO	44
2.6 ELEMENTO DE PÓRTICO.....	48
2.7 MATRIZES DE DEFORMAÇÃO – DESLOCAMENTO.....	51
2.8 ANÁLISE NÃO-LINEAR.....	53
2.8.1 TENSÕES PRINCIPAIS.....	56
2.8.2 PLASTICIDADE	57
2.8.3 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	60
3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO	64
3.1 MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE.....	64
3.2 FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO	68
3.3 MONTAGEM DAS FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO.....	74
4. APLICAÇÕES	77
4.1 RELAÇÃO CONSTITUTIVA	78
4.2 ANÁLISE NÃO-LINEAR DE BARRA SOB TRAÇÃO	80

4.3	ANÁLISE LINEAR DE VIGA	81
4.4	ANÁLISE NÃO-LINEAR DE VIGA	84
4.5	ANÁLISE SELETIVA	87
4.6	ANÁLISE NÃO-LINEAR DE VIGA BI APOIADA SOB MOMENTO CONCENTRADO	91
4.7	AVALIAÇÃO DO EFEITO DO MEFMG NO CÁLCULO DE TENSÕES.....	93
5.	CONCLUSÃO.....	97
	REFERENCIAS.....	99

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Subdivisão do Domínio: a) Caso Real; b) Discretização do espaço de elementos finitos representação das condições de contorno.	31
Figura 2: Representação de corpo rígido.	35
Figura 3: Referencial Lagrangeano Total.	38
Figura 4: Referencial Lagrangeano Atualizado.	39
Figura 5: Típico de uma Viga de Euler-Bernoulli.....	43
Figura 6: Elemento de pórtico tridimensional.....	48
Figura 7: Classificação das Análises.....	55
Figura 8: Superfície de escoamento após carregamento no material que apresenta encruamento isotrópico.....	58
Figura 9: Superfície de escoamento no espaço de tensões.	59
Figura 10: Projeções das superfícies de escoamento de Tresca e Von Mises: a) Plano- π ; b) Plano σ_1 - σ_3 σ_2 - σ_3	60
Figura 11: Ilustração do processo de iteração de Newton-Raphson em uma solução genérica de um sistema de um único grau de liberdade.....	62
Figura 12: Efeito Snap-Through.....	63
Figura 13: Efeito Snap-Back.....	63
Figura 14: Cobertura $\{\Omega_i\}$ do domínio Ω	65
Figura 15: Subdomínio e funções PU para uma malha de elemento unidimensionais do MEF.	68
Figura 16: Configuração da partição da unidade do MEF convencional (h_i MEF), função de enriquecimento (γ_i) e função enriquecida (h_i MEFG) para o nó inicial ($\xi = -1$) na direção do Eixo X_1	70
Figura 17: Configuração da partição da unidade do MEF convencional (h_i MEF), função de enriquecimento (γ_i) e função enriquecida (h_i MEFG) para o nó intermediário ($\xi = 0$) na direção do Eixo X_1	70
Figura 18: Configuração da partição da unidade do MEF convencional (h_i MEF), função de enriquecimento (γ_i) e função enriquecida (h_i MEFG) para o nó final ($\xi=1$) na direção do Eixo X_1	71

Figura 19: Configuração da partição da unidade do MEF convencional (h_i MEF), função de enriquecimento (γ_i) e função enriquecida (h_i MEFG) para o nó inicial ($\xi = -1$) na direção dos Eixos X_2 e X_3 .	72
Figura 20: Configuração da partição da unidade do MEF convencional (h_i MEF), função de enriquecimento (γ_i) e função enriquecida (h_i MEFG) para o nó intermediário ($\xi = 0$) na direção dos Eixos X_2 e X_3 .	72
Figura 21: Configuração da partição da unidade do MEF convencional (h_i MEF), função de enriquecimento (γ_i) e função enriquecida (h_i MEFG) para o nó final ($\xi=1$) na direção dos Eixos X_2 e X_3 .	73
Figura 22: Funções enriquecidas para os graus de liberdade, para barra e viga, de deslocamentos nas três direções.	73
Figura 23: Graus de Liberdade Nodais acrescidos de 1 (um) nível de enriquecimento.	74
Figura 24: Graus de Liberdade Nodais acrescidos de 2 (dois) nível de enriquecimento.	75
Figura 25: Casos analisados em condição linear e não-linear; a) Tração em viga engastada; b) Flexão em viga bi apoiada.	78
Figura 26: Diagrama Tensão x Deformação.	79
Figura 27: <i>Deslocamento axial x Log NGL</i> para barra sob tração em análise não-linear.	80
Figura 28: <i>Deslocamento vertical x Log NGL</i> para viga sob flexão em análise linear.	82
Figura 29: <i>Deslocamento vertical</i> na viga biapoadada em análise linear considerando 1000 passos de carga, para 45 graus de liberdade.	83
Figura 30: <i>Deslocamento vertical x Log NGL</i> para viga sob flexão em análise não-linear.	84
Figura 31: <i>Deslocamento vertical</i> na viga biapoadada em análise não-linear considerando 1000 passos de carga, para 45 graus de liberdade.	86
Figura 32: Seletividade de um subdomínio para enriquecimento.	87
Figura 33: Erro absoluto de deslocamentos em relação ao número de graus de liberdade para análise linear para 1 passo de carga.	88
Figura 34: Erro absoluto de deslocamentos em relação ao número de graus de liberdade para análise linear para 10 passos de carga.	89

Figura 35: Erro absoluto de deslocamentos em relação ao número de graus de liberdade para análise linear para 1000 passos de carga.	89
Figura 36: Erro absoluto de deslocamentos em relação ao número de graus de liberdade para análise não-linear para 10 passos de carga.....	90
Figura 37: Erro absoluto de deslocamentos em relação ao número de graus de liberdade para análise não-linear para 100 passos de carga.	90
Figura 38: Erro absoluto de deslocamentos em relação ao número de graus de liberdade para análise não-linear para 1000 passos de carga.	91
Figura 39: Modelo de duto analisado.	92
Figura 40: Deslocamento vertical no duto em função do carregamento de momento concentrado.	93
Figura 41: Tensão de Von Mises ao longo da viga biapoiada.	94
Figura 42: Tensão de Von Mises ao longo do elemento considerando 2 níveis de enriquecimento.	95

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Classificação de Análises Não-Lineares.....	54
Tabela 2: Forças aplicadas nas análises de tração e flexão, linear e não-linear.	77
Tabela 3: Valores para Diagrama Tensão x Deformação.....	79
Tabela 4: Erro relativo do deslocamento axial com o valor analítico em função do número de elementos.....	81
Tabela 5: Erro relativo do deslocamento vertical com o valor analítico em função do número de elementos no caso de análise linear de viga.	82
Tabela 6: Deslocamento vertical na viga biapoda, para último passo de carga, em análise linear considerando 1000 passos de carga, para 45 graus de liberdade.....	84
Tabela 7: Erro relativo do deslocamento vertical com o valor analítico em função do número de elementos no caso de análise não-linear de viga.	85
Tabela 8: Deslocamento vertical na viga biapoda, para último passo de carga, em análise não-linear considerando 1000 passos de carga, para 45 graus de liberdade.....	86
Tabela 9: Tensão de Von Mises.....	96

LISTA DE SIGLAS

MEF – Método dos Elementos Finitos

MEFG – Método dos Elementos Finitos Generalizado

MPU – Método da Partição da Unidade

PU – Partição da Unidade

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathbf{a} – Vetor de aceleração de campo

A – Área

a_{ij} – Graus de liberdade nodal

\mathbf{b} – Vetor de forças de campo atuantes no elemento

b_{ij} – Graus de liberdade de campo

β_j – Fator multiplicador da função de enriquecimento associado ao nível de enriquecimento j

${}^t_0 B^L$ – Matriz linear de deformação-deslocamento no tempo t

${}^t_0 B_1^{NL}$ – Matriz não-linear de deformação-deslocamento no tempo t

${}^t_0 B_2^{NL}$ – Matriz não-linear de deformação-deslocamento no tempo t

${}^t_0 B_3^{NL}$ – Matriz não-linear de deformação-deslocamento no tempo t

\mathbf{C} – Matriz de coeficiente de amortecimento

${}^t C^{EP}$ – Componentes da Matriz Constitutiva Elastoplástica

\mathbf{D} – Matriz de relação constitutiva do material

$\boldsymbol{\varepsilon}$ – Vetor de deformação global

$\boldsymbol{\varepsilon}_i$ – Vetor de deformação nodal

${}_0 \varepsilon_{x_1}$ – Deformação na direção x_1 no eixo centroidal

${}_0 \varepsilon_0^L$ – Deformação incremental linear axial no eixo centroidal no tempo zero da configuração de referência

${}_0 \varepsilon_0^{NL}$ – Deformação incremental não-linear axial no eixo centroidal no tempo zero da configuração de referência

E – Módulo de Young

E_t – Módulo Tangente

$f(\sigma; \zeta)$ – Superfície de Escoamento

\mathbf{F} – Vetor de forças globais

\mathbf{F}_i – Vetor de forças nodais

F_{eq} - Força axial equivalente

F_{AS} – Força incremental da mola de solo longitudinal no tempo t

F_{BS} – Força incremental de compressão da mola de solo de base no tempo t

F_{US} – Força incremental de compressão da mola de solo de levantamento no tempo t

F_{RLS} – Força incremental de compressão da mola de solo lateral direita no tempo t

${}^{t+\Delta t}f_i^B$ - Componente das forças externas aplicadas por unidade de volume analisadas no tempo $t+\Delta t$

${}^{t+\Delta t}f_i^S$ - Componentes das forças de tração externas aplicadas por unidade de área analisadas no tempo $t+\Delta t$

t_0H – Matriz das funções de forma de elementos finitos

t_0H_h – Matriz das funções de forma de elementos finitos generalizado

I_1, I_2, I_3 – Invariantes do Tensor de Tensões de Cauchy

J_1, J_2, J_3 – Invariantes do Tensor Deviatório de Tensões

j – Nível de enriquecimento

\mathbf{K} – Matriz de rigidez de corpo rígido

${}^tK_{AS}$ – Constante de rigidez da mola de solo longitudinal no tempo t

${}^tK_{BS}$ – Constante de rigidez da mola de solo de base no tempo t

${}^tK_{US}$ – Constante de rigidez da mola de solo de levantamento no tempo t

${}^tK_{LLS}$ – Constante de rigidez da mola de solo lateral esquerda no tempo t

${}^tK_{RLS}$ – Constante de rigidez da mola de solo lateral direita no tempo t

${}_0\Delta_{AS}$ – Deformação incremental da mola de solo longitudinal no tempo t

${}_0\Delta_{BS}$ – Deformação incremental da mola de solo de base no tempo t

${}_0\Delta_{US}$ – Deformação incremental da mola de solo de levantamento no tempo t

${}_0\Delta_{LLS}$ – Deformação incremental da mola de solo lateral esquerda no tempo t

${}_0\Delta_{RLS}$ – Deformação incremental da mola de solo lateral direita no tempo t

\mathbf{L} – Operador Linear

\mathbf{M} – Matriz de massa do corpo

${}^tM_{eq2}$ – Momento equivalente em relação à direção x_2

${}^tM_{eq3}$ – Momento equivalente em relação à direção x_3

\mathbf{N} – Vetor de funções interpoladoras de elementos finitos

$\boldsymbol{\sigma}$ – Vetor de tensões de Cauchy

σ_{esc} – Tensão de Escoamento

σ_m – Tensão Média

$\sigma(n)$ – Tensão Normal de superfície à direção n

t - Tempo

$\tau(n)$ – Tensão de Cisalhamento à direção n

${}^t\tau_{mn}$ – Componentes do Tensor de Tensões de Cauchy no tempo t

ρ – Densidade

${}^t\rho$ - Densidade no tempo t

${}^0\rho$ – Densidade na configuração inicial

\mathbf{S}_{ij} – Tensor Deviatório de Tensões

${}^{t+\Delta t}{}_0S_{ij}$ – Componentes do segundo tensor de tensões de Piolla-Kirchoff no tempo $t+\Delta t$ com referência à configuração inicial

${}^{t+\Delta t}{}_0\varepsilon_{ij}$ - Componentes do tensor de deformações de Green-Lagrange no tempo $t+\Delta t$ com referência à configuração inicial

$t(n)$ – Forças de Tração de Superfície na direção n

n_i, n_j – Vetor unitário na direção i e j

\ddot{U} – Vetor de aceleração global do corpo rígido

\dot{U} – Vetor de velocidade global do corpo rígido

U – Vetor de deslocamento global do corpo rígido

U_i – Vetor de deslocamento nodal do corpo rígido

ν – Coeficiente de Poisson

${}^t u_0, {}^t v_0, {}^t w_0$ - Componentes de deslocamentos do eixo centroidal no tempo t em relação à configuração de referência

u, v, w - Componentes de deslocamento

u_{MEF}^e – Deslocamento nodal de elementos finitos

u_{ENRIQ}^e - Deslocamento nodal de enriquecimento

u_h^e - Deslocamento nodal aproximado pelas funções de enriquecimento

${}^t\theta_y^L$ - Rotação incremental em torno do eixo x_2 no tempo t em relação à configuração de referência

${}^t\theta_z^L$ - Rotação incremental em torno do eixo x_3 no tempo t em relação à configuração de referência

${}_0\phi_z^{NL}$ – Curvatura incremental não-linear em torno do eixo x_3

${}_0\phi_y^{NL}$ – Curvatura incremental não-linear em torno do eixo x_2

${}_0\phi_z^L$ – Curvatura incremental linear em torno do eixo x_3

${}_0\phi_y^L$ – Curvatura incremental linear em torno do eixo x_2

${}_0\phi_y$ – Curvatura incremental em torno do eixo x_2 no tempo t em relação à configuração de referência.

${}_0\phi_z$ – Curvatura incremental em torno do eixo x_3 no tempo t em relação à configuração de referência.

Ω - Domínio

φ_i – Funções Partição da Unidade

$\{\Omega_j\}$ – Subcobertura do domínio Ω relacionada às funções partição da unidade

γ_j – Funções de enriquecimento

x_1, x_2, x_3 - Coordenadas cartesianas locais

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ - Coordenadas cartesianas globais

ξ - Coordenada natural axial

δW_{int} – Energia Potencial Interna

δW_{ext} – Energia Potencial Externa

RESUMO

Cervelin, D. *Método dos Elementos Finitos Generalizado: Desenvolvimento e Aplicação em Análise Não-Linear Utilizando Elemento de Pórtico Espacial de Alta Ordem*. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2014.

O Método dos Elementos Finitos é utilizado em diversas aplicações da engenharia, mais usualmente aplicado no estudo de problemas com elevados gradientes de tensão, trincas, análises de vibração, entre outros, buscando maior confiabilidade no projeto de estruturas. Devido ao elevado grau de complexidade de alguns problemas, o tempo computacional demandado pode ser consideravelmente alto. Na busca pela obtenção de resultados de picos de tensões ou deslocamentos, pode-se enriquecer o campo de deslocamentos do MEF. Um destes procedimentos é chamado MEFG – Método dos Elementos Finitos Generalizado. O principal objetivo deste trabalho é desenvolver uma formulação de enriquecimento de um elemento de elevada ordem polinomial, de viga, que seja capaz de aprimorar os resultados numéricos da aproximação convencional. Alguns exemplos são modelados para mostrar a performance do MEFG e os resultados são comparados com software comercial e com soluções analíticas. São testados também diferentes níveis de enriquecimento bem como a seletividade de elementos a serem enriquecidos. O MEFG é desenvolvido para um elemento de viga de Euler-Bernoulli 3D com funções polinomiais de elevada ordem. Os resultados encontrados mostram que o método é mais eficiente na obtenção de resultados de tensões ao invés de deslocamentos. Além disso, melhores resultados com a utilização do MEFG foram obtidos em análises com considerações de não-linearidade material.

Palavras-Chave: Funções de Enriquecimento, MEFG, Elevada Ordem Polinomial, Viga de Euler-Bernoulli, Partição da Unidade.

ABSTRACT

Cervelin, D. *Generalized Finite Element Method: Development and Application in Non-Linear Analysis Using a High Order Space Frame Element*. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2014.

The Finite Element Method is used in several engineering problems and more usually applied for the study of problems with high stress gradients, cracks, vibration analysis and so on, looking for more reliability in design of structures. Due the complexity of some problems, the computational time demanded can be very high. In order to obtain the peak of stress or displacements, it should enrich the FEM displacement field. One of these procedures is called GFEM - Generalized Finite Element Method. The main objective of this work is to develop a formulation that is able to enrich a high polynomial order beam element in order to improve the numerical results of the conventional approach. Some examples are modeled to show the performance of GFEM and the results are compared with commercial software and analytical solutions. Also are tested different enrichment levels as well as only some elements are enriched instead of all element. The GFEM is developed for 3D Euler-Bernoulli beam element with high order of polynomial functions. Results shows that the proposed method is more efficient than FEM when tensions results are obtained instead of displacement results. Furthermore, better results using GFEM was obtained on analysis with material non-linearity considerations.

Keywords: Enriched Functions, GFEM, High Order Polynomial Functions, Euler-Bernoulli Beam, Partition of Unity.

1. INTRODUÇÃO

Constantemente máquinas, peças, estruturas metálicas, edificações, veículos, ferramentas, entre outros, estão sujeitos a carregamentos e esforços das mais diversas naturezas. Os projetos, sejam eles de qualquer disciplina, elétrica, mecânica ou civil, tendem a ser cada vez mais otimizados e com foco na redução de custo de fabricação e/ou produção, manufatura.

Com a evolução do mercado e da dificuldade das empresas em buscar o desenvolvimento próprio devido elevados custos operacionais e baixo retorno financeiro pelas vendas, os novos investimentos desejados pelas indústrias tendem a ser caracterizados por baixo custo de investimento inicial, conciliado com rapidez de execução do projeto com confiabilidade e qualidade. Isto faz dos projetos mais otimizados e próximos dos limites dimensionais e de fatores de segurança admitidos. Tudo isto faz com que a excelência na execução do projeto seja alcançada de forma a se evitar problemas futuros, após posta em marcha de tais equipamentos, máquinas, ferramentas, etc. As constantes mudanças climáticas pelas quais o planeta está atravessando, devido principalmente pelo constante e gradual aumento do crescimento global, torna as estruturas mais exigidas sofrendo esforços de vibração, dilatação térmica, entre outros.

Da mesma forma como a medicina evolui no desenvolvimento de vacinas, remédios, pesquisas na cura de determinadas doenças ou da mesma forma como o direito busca a regulamentação e atualização das normas legais dos países, a engenharia precisa buscar o desenvolvimento de ferramentas e processos que otimizem a indústria seja isso da maneira que for conveniente e necessária. Entenda-se melhoria contínua em processos operacionais, busca pela excelência na execução de projetos, processos de manufatura, dentre outros.

Um das principais ferramentas utilizadas por engenheiros são as chamadas ferramentas computacionais, softwares capazes de executar cálculos e análises complexas em um curto espaço de tempo que levariam muito tempo, ou até mesmo seriam impossíveis e inviáveis, de serem realizados à mão. A pesquisa e desenvolvimento destes é de extrema importância, tornando-as rápidas, fáceis de se manipular e eficazes, com alta eficiência e confiabilidade.

O Método dos Elementos Finitos é muito usado na indústria para execução de projetos e otimizações dos mesmos. Análises de fadiga e fratura, análises estáticas com linearidade e não-linearidade geométrica e de material e análises dinâmicas são algumas das aplicações deste método. Diversos são os softwares comerciais disponíveis no mercado os quais utilizam a Teoria do Método dos Elementos Finitos, como por exemplo: Algor, Ansys, Catia, Solid Works, Solid Edge, Pro-E, Hyper Mesh, etc.

Apesar de ser um método consagrado e eficiente, em algumas situações pode-se encontrar algumas limitações na utilização destes softwares. Problemas da mecânica da fratura, mecânica do dano, problemas com considerações de concentração de tensão, entre outros, demandam elevado esforço computacional em função das particularidades de cada problema, como é o caso da mecânica da fratura por exemplo, onde a obtenção do efeito da singularidade na ponta de trincas requer malhas de elementos finitos extremamente refinadas.

Em diversos casos na utilização do MEF faz-se necessário uma correta e precisa criação da malha de elementos finitos devido ao grau de complexidade do problema tornando a simulação onerosa e também reduzindo a eficiência do método, em outras palavras, a malha de elementos finitos deve ser tão refinada quanto necessária de forma a se alcançar o menor erro da solução. Outro fator impactante é o fato de que a cada refino de malha um novo conjunto de matrizes de rigidez deve ser recriado e recalculado, aumento assim ainda mais a demanda de tempo de processamento.

Tendo isto em vista, desenvolveu-se (Melenk e Babuska (1996), Babuska *et. al* (2000), entre outros) o Método da Partição da Unidade e em seguida o Método dos Elementos Finitos Generalizado os quais tornaram possível a inclusão na formulação do MEF funções de efeitos conhecidos de forma a capturar comportamentos determinados, tais como singularidades, oscilações de valores no tempo, entre outros. Este método permitiu o enriquecimento no campo de variáveis com características de refinamento hierárquico, reduzindo a demanda computacional e aumentando a eficiência nas simulações, principalmente em situações com elevado grau de complexidade.

Sendo assim, este trabalho propõe o estudo e desenvolvimento de uma formulação adaptada através do Método dos Elementos Finitos Generalizado que seja capaz de avaliar os efeitos causados em vigas por forças estáticas, as

quais podem levar o material ao regime plástico. Uma das aplicações da formulação será na análise de dutos, pois sabe-se que estas estruturas são submetidas a esforços extremos e constantes. Nos próximos capítulos serão realizadas revisões bibliográficas e teóricas a respeito deste tema.

1.1 MOTIVAÇÃO

A principal motivação deste trabalho é a possibilidade de adaptação do método dos elementos finitos convencional, um método consagrado, através da técnica de enriquecimento das funções de forma com o uso do Método da Partição da Unidade para a solução de equações diferenciais em problemas da mecânica. Este método é também conhecido como Método dos Elementos Finitos Generalizado.

Algumas das principais vantagens em torno da implementação do Método dos Elementos Finitos Generalizado são:

- Possibilidade de considerar o comportamento prévio de uma determinada solução no espaço de aproximação de elementos finitos através da inclusão de funções de enriquecimento na formulação de elementos finitos;
- Obtenção de efeitos ou comportamentos localizados;
- A habilidade de construir um espaço de elementos finitos com qualquer que seja a sua regularidade e/ou comportamento;
- A não necessidade de criação de uma complexa malha de elementos finitos para resolução de problemas com elevado grau de complexidade, pelo fato da possibilidade de implementação de diferentes níveis de enriquecimento no modelo, técnica esta à ser revisada nas seções seguintes;
- O fato de este método possuir características hierárquicas;

De acordo com alguns trabalhos presentes na literatura, como por exemplo, Babuska *et. al* (2000), Osborn *et. al* (2002), entre outros, percebe-se que o MEFG pode proporcionar bons resultados e resolução de determinados

problemas que o método clássico de elementos finitos falha ou é extremamente demandado e com baixa eficiência, tais como problemas da mecânica da fratura problemas da dinâmica das estruturas, entre outros. Esta boa eficiência do método se dá basicamente pelo fato de que é possível a inclusão de informações analíticas do problema dentro do espaço de elementos finitos.

Diversas são as aplicações do MEEG presentes na literatura como, por exemplo: Análise dinâmica com forças variáveis no tempo, análise de vibração, mecânica do dano, mecânica da fratura, entre outros. Não foram encontrados ainda estudos que mostrem a implementação deste método em análises estáticas com considerações de não-linearidade geométrica e material utilizando elemento com funções de ordem elevada.

1.2 OBJETIVO GERAL

Este trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento e implementação do Método dos Elementos Finitos Generalizado em um código computacional para a obtenção de efeitos localizados em estruturas sujeitas a carregamentos diversos em análises com considerações de não-linearidade material. O elemento implementado está baseado nos trabalhos de Mejía (2003), Souza (2005) e Shang (2009), e admite a ocorrência de efeitos não lineares produzidos pela plastificação do material. O programa base foi desenvolvido em linguagem FORTRAN a partir do código adaptado por Shang (2009), designado por APC3D_Multilinear.

1.3 OBJETIVO ESPECÍFICO

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Adaptar o código computacional APC3D_Multilinear implementando a Teoria do Método dos Elementos Finitos Generalizado;
- Avaliar o efeito das funções de enriquecimento em análises com considerações de linearidade e não-linearidade material;
- Modelagem de duto avaliando o comportamento de deslocamentos e tensões locais;

1.4 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O Método dos Elementos Finitos é um método muito utilizado em análises computacionais e projetos diversos. Os resultados obtidos por este método são em geral precisos e confiáveis. Pesquisas estão sendo desenvolvidas e alguns métodos mais eficientes estão sendo descobertos, dentre eles está o Método dos Elementos Finitos Generalizado. O presente estudo se baseia no trabalho desenvolvido por Shang (2009). Este utilizou o programa escrito em linguagem FORTRAN, sob o nome de APC3D_Multilinear, para realizar análises do efeito de concentração de tensões em dutos corroídos através de elemento de pórtico uniaxial tridimensional. Foram considerados efeitos de não-linearidade física na formulação do elemento. Baseado nesta referência, o presente trabalho propõe a adaptação do programa através do Método dos Elementos Finitos Generalizado.

O Método dos Elementos Finitos Generalizado foi introduzido inicialmente por Babuska *et. al* (2000) e é baseado no Método da Partição da Unidade, o qual foi apresentado na literatura pelo mesmo autor. Melenk e Babuska (1996) apresentaram a fundamentação matemática básica do MPU analisando e definindo os métodos de escolha das partições da unidade para enriquecimento do espaço de elementos finitos. Mostrou-se nestes trabalhos a eficácia deste novo método quando desenvolvido para problemas Laplacianos, problemas da elasticidade e problemas de Helmholtz.

No trabalho de Babuska, Banerjee e Osborn (2002) foram apresentadas diversas formulações para o Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG) e suas consequências na solução de problemas de equações diferenciais. Uma noção quantitativa de robustez do método é apresentada e discutida além de concluírem que funções polinomiais são muito eficientes na implementação do campo de enriquecimento.

Por sua vez, Barros, Proença e Barcellos (2002) propuseram um estimador de erros utilizado no procedimento de solução de equações diferenciais de Newton-Raphson, com aplicação em problemas não-lineares de vigas de concreto armado abrangendo a formulação do MEFG. Os resultados mostraram a eficiência do método enriquecido sendo pontuado como principal

vantagem a simplicidade com que o refinamento p não-homogêneo pode ser realizado, sem a necessidade de imposição de condições de contorno para as funções de aproximação.

Barros (2002) analisou algumas formulações de métodos sem malha, dentre eles o método das nuvens. Além disso analisou o MEFG e apresentou as vantagens de cada método. Os métodos foram aplicados em análises onde estruturas chegam ao regime de comportamento não-linear físico no estudo da Mecânica do Dano Contínuo. Constatou-se uma grande flexibilidade no uso do MEFG pelo fato da independência da malha e pelo fato da possibilidade de refino do sistema apenas no subdomínio desejado. Ainda, notou-se uma vantagem expressiva no uso de funções de aproximação tipo trigonométrica em relação às funções polinomiais.

Torres (2003) realizou análises tridimensionais de modelos sólidos considerando efeitos não-lineares, empregando o Método dos Elementos Finitos Generalizado. Baseado nas análises realizadas, conclui que o MEFG possui ótima capacidade de aproximação dos resultados em subdomínios ou locais de interesse, não só em picos de resultados mas também na captura de gradientes de deformação e tensão na região de interesse.

Chessa e Belytschko (2003) apresentam um método enriquecido no qual a interface entre a parcela de enriquecimento e a parcela de elementos finitos convencional pode se mover arbitrariamente por entre a malha sem a necessidade de criação de nova malha de elementos finitos. O enriquecimento é implementado pelo Método dos Elementos Finitos Estendido modelando descontinuidades no gradiente de velocidades na região de interface através de partição da unidade local.

Santana (2004), em uma análise de propagação de trincas no contexto da mecânica da fratura linear elástica, estudou o emprego dos métodos sem malha, os quais dispensam o uso da discretização através de elementos sendo esta realizada através do emprego de nós distribuídos sobre o domínio, bem como estudou o MEFG. Em seu trabalho, avalia as diferenças entre o MEF convencional, o Método de Galerkin Sem Elementos (MGSE) e o MEFG em formulação uni e bidimensional. Constatou que o MEF captura de forma muito imprecisa os efeitos localizados. Para conseguir bons resultados o refino da malha deve ser alto, o que demanda muito tempo computacional. O MGSE

captura com mais eficiência os resultados locais, se comparado com o MEF tradicional, porém sua aproximação demanda maior esforço computacional, pelo fato das funções de forma serem obtidas através da solução de um sistema de equações em cada ponto do domínio, ao contrário do MEF convencional, o qual obtém as funções de forma apenas nos nós do elemento. Pode ser uma formulação vantajosa para análises tridimensionais onde a geometria e recriação de malhas pode se tornar onerosa. Constatou também que com o MEFG a captura dos efeitos locais é muito precisa com a técnica de enriquecimento das funções pelo fato de se escolher funções de enriquecimento que representam o resultado esperado. O MEFG é baseado no conhecimento “*a priori*” da natureza da solução, ou seja, as funções de enriquecimento representam o conhecimento prévio do comportamento da estrutura sujeita a determinado carregamento. Concluiu-se em uma comparação entre os métodos que as soluções numéricas com o MEFG resultam no melhor custo-benefício para o problema de propagação de trincas.

Souza (2005) estudou o comportamento de dutos enterrados através de um modelo de viga. Algumas aplicações deste trabalho serão reproduzidas no presente estudo através do método de elementos finitos generalizado para efeito de validação do modelo proposto.

O estudo de Mangini (2006) traz o Método dos Elementos Finitos Generalizado aplicado na análise de estruturas em casca de revolução. Funções de enriquecimento polinomiais, exponenciais e trigonométricas foram propostas para o enriquecimento do MEF convencional e observou-se que o método proposto possui uma taxa de convergência dos resultados significativamente maior que o método convencional.

O MEFG também pode ser aplicado no estudo da Mecânica da Fratura, como é o caso do trabalho de Duarte e Kim (2008). O estudo aplica a técnica de enriquecimento em problemas com múltiplas trincas no domínio e demonstra que a precisão do método pode ser controlada usando um número fixo de graus de liberdade e de funções de enriquecimento.

Arndt (2009) estudou o Método dos Elementos Finitos Generalizado aplicado em análise de vibração livre de estruturas reticuladas. Funções aproximadoras, também chamadas de funções de enriquecimento, foram propostas para elementos de barra e de viga de Euler-Bernoulli. Os diferentes

tipos e composição de funções foram analisadas para cada caso avaliando os erros relativos em relação às análises via MEF convencional. Pode-se concluir neste trabalho também que o refinamento gerou resultados mais precisos que o refinamento. Outro resultado importante é que o MEFG permite encontrar resultados precisos e com eficiência os quais não são possíveis de se obter via MEF convencional, em situações específicas.

Torii (2012) aplicou o MEFG em análise dinâmica de barras, treliças, vigas, pórticos, equação da onda bidimensional e estado plano de tensões. Análises modal e transiente foram realizadas. Os resultados foram comparados com o MEF convencional polinomial. Observou-se que, em geral, o MEFG foi mais eficiente em problemas que envolvem os modos mais elevados de vibração, os quais são de extrema importância em problemas relativos à propagação de ondas no domínio, indicando assim o potencial do método dos elementos finitos generalizado.

Muitas análises requerem um grau de precisão tal que o método dos elementos finitos convencional não consegue alcançar ou, quando alcança, demanda um esforço computacional muito grande através do alto refinamento da malha de elementos finitos. Em algumas situações isto pode se tornar inconveniente em função do tempo disponível para as análises, em função das ferramentas ou equipamentos disponíveis, etc. Problemas que levam em consideração a não-linearidade física ou geométrica, problemas da mecânica da fratura, problemas de vibração, problemas temporais, entre outros, requerem tal esforço computacional muitas vezes não disponível. A técnica de enriquecimento (MEFG) vem contribuir nestas situações reduzindo o esforço computacional bem como aumentando a eficiência nas análises com um considerável ganho na precisão dos resultados. Além disso, situações e comportamentos específicos ao problema podem ser simulados com mais eficiência através do MEFG.

Os trabalhos encontrados na literatura aplicam a técnica em elementos de barra, viga, pórtico, entre outros, bem como em situações de linearidade e não-linearidade física do modelo. O presente trabalho propõe o emprego deste método em um elemento de pórtico uniaxial tridimensional de elevada ordem. Serão propostas algumas funções trigonométricas para o enriquecimento das funções interpoladoras do método dos elementos finitos e aplicadas em análises

linear e não-linear. A seguir será feita uma breve revisão teórica para servir de base ao trabalho.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está dividido basicamente em 4 capítulos principais sendo em sequência: Revisão Teórica, Método dos Elementos Finitos Generalizado, Aplicações e Conclusões.

O capítulo 2 apresenta uma revisão teórica a qual formará uma base de estudo e referência para o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos Generalizado. Nesta seção serão tratados assuntos como a essência do Método dos Elementos Finitos e da Mecânica do Contínuo. Será apresentado também o elemento finito que será utilizado no desenvolvimento do trabalho, bem como suas características e formulações. Uma breve revisão dos conceitos de plasticidade e métodos de integração numérica será realizada.

O capítulo 3 tratará a respeito do Método dos Elementos Finitos Generalizado tendo em vista a sua teoria básica, derivada do Método da Partição da Unidade, seu método de adaptação ao MEF convencional e das técnicas de implementação. Além disso serão propostas funções de enriquecimento para implementação de código computacional desenvolvido na plataforma FORTRAN.

Por sua vez, o capítulo 4 é destinado às aplicações do Método dos Elementos Finitos Generalizado. Será avaliado o modelo implementado com o uso de elemento de viga de Euler-Bernoulli com formulação enriquecida e aplicada na análise de vigas com seção transversal circular sob carregamento axial e transversal, avaliando efeitos de linearidade e não-linearidade material. Uma análise de validação do modelo proposto com referência em um caso avaliado por Souza (2005) será efetuada. Além disso será discutido a seletividade do enriquecimento do domínio, ou seja, as diferenças entre enriquecimento de todo o domínio ou de apenas parte do domínio nos resultados de deslocamento. As soluções serão então discutidas. Por fim será avaliado o efeito do enriquecimento na análise de tensões ao longo de um elemento, comparando os resultados com o MEF convencional.

Os resultados e conclusões deste trabalho serão discutidos no capítulo 5, bem como proposições para trabalhos futuros serão feitas. A seguir dá-se início à revisão teórica do presente trabalho.

2. REVISÃO TEÓRICA

Esta seção se destina à uma revisão teórica de alguns temas que são importantes para o estudo do Método dos Elementos Finitos Generalizado, formando assim uma base teórica para a implementação da formulação. A revisão teórica iniciará tratando o Método dos Elementos Finitos.

2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos (MEF) consiste em uma técnica aproximativa para solução de problemas das mais variadas formas. Esta técnica é amplamente aplicada, via análise computacional, em casos onde uma solução analítica não pode ser obtida, sendo então a solução por aproximação a mais indicada.

Trata-se de um procedimento numérico para analisar estruturas e meios contínuos, sendo formulado através de equações diferenciais e sujeito a condições de contorno, sendo então muito utilizado em Problemas de Valor de Contorno.

A técnica consiste em subdividir, ou representar, o problema real em um domínio finito, subdivido em n partes. Cada subdivisão é chamada de elemento. Quanto maior o número de elementos (i.e. mais subdivisões no domínio) melhor será a solução encontrada. Este procedimento será demonstrado nas seções a seguir.

A Figura 1 exemplifica como é realizada esta subdivisão. Na Figura 1.a) é representado uma situação real, no caso um forno rotativo utilizado na indústria cimenteira e a Figura 1.b) representa a subdivisão do domínio de elementos finitos representando o caso real analisado.

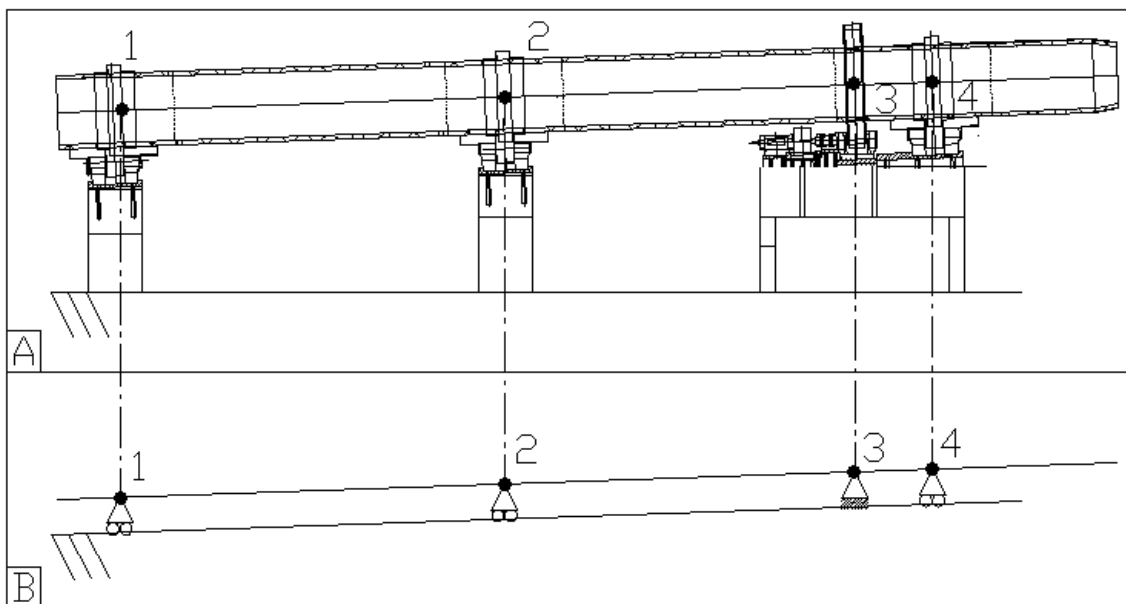


Figura 1: Subdivisão do Domínio: a) Caso Real; b) Discretização do espaço de elementos finitos representação das condições de contorno.

Os passos básicos em uma análise via Método dos Elementos Finitos, usando o método por deslocamentos, são:

1. Subdividir a estrutura como um todo em pequenos elementos interconectados estruturalmente por pontos, denominados nós;
2. Identificar as condições de contorno do sistema, impondo-as ao estudo de forma que correspondam à correta resposta do sistema, em termos de deslocamento;
3. Incorporar ao sistema as relações constitutivas relacionadas à análise;
4. Formular as equações de equilíbrio correspondentes e resolvê-las;
5. Com os deslocamentos conhecidos e as relações constitutivas pré-definidas, calcular a distribuição interna de tensões dos elementos;
6. Interpretar os resultados encontrados e compará-los com o resultado esperado do caso real.

A Equação de Equilíbrio do Movimento que descreve o Método dos Elementos Finitos, em função do tempo, para um caso genérico, é dado por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (1)$$

Em que \mathbf{M} é a massa total do sistema, \mathbf{C} representa o amortecimento do sistema dinâmico, $\ddot{\mathbf{U}}$ é a aceleração total, $\dot{\mathbf{U}}$ é a velocidade e \mathbf{U} é o deslocamento total do sistema, em consequência das forças globais aplicadas \mathbf{F} . Desconsiderando os efeitos inerciais e dinâmicos, tem-se para a análise estática a seguinte Equação de Equilíbrio simplificada:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\mathbf{U}; \quad (2)$$

Um elemento finito típico “e”, conforme mostrado na Figura 1.1 para o estado plano de tensões, é definido pelos nós i, j, m , etc. conectados por linhas entre si. Sejam os deslocamentos u em qualquer ponto dentro do elemento aproximados por:

$$\mathbf{u} = \sum N_i u_i^e = [N_i, N_j, \dots] \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{N}\mathbf{u}^e; \quad (2.1)$$

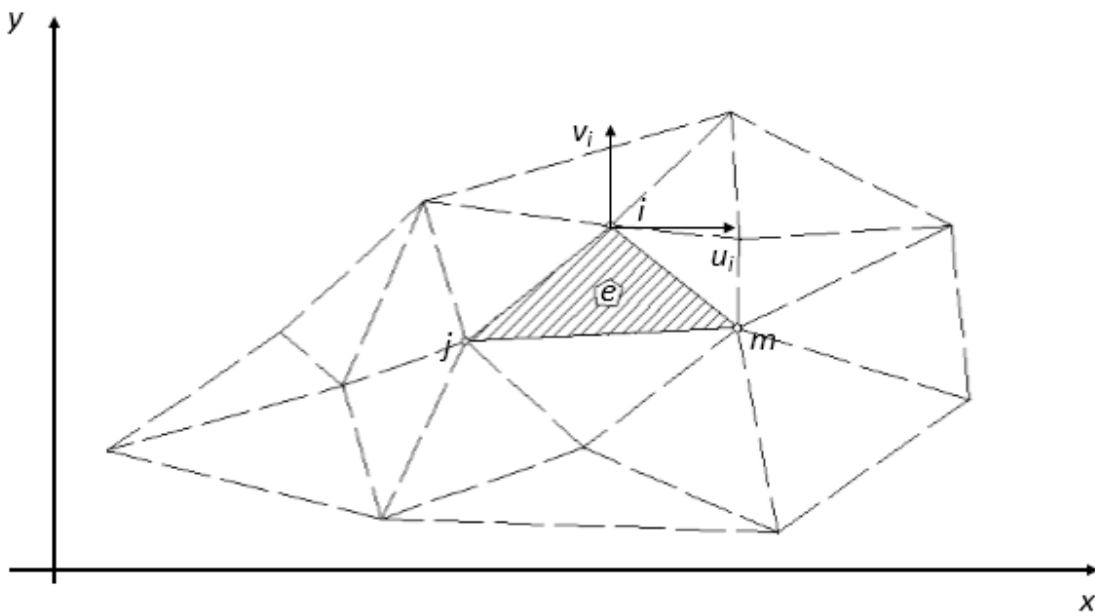


Figura 1.1: Domínio no estado plano de tensões dividido em elementos finitos.

Em que os componentes de \mathbf{N} são funções prescritas, conhecidas como funções de forma ou de interpolação, e \mathbf{u}^e representam a lista de deslocamentos nodais para um elemento particular.

No caso do estado plano de tensões, os deslocamentos horizontal e vertical correspondentes a um nó i podem ser escritos como:

$$\mathbf{u}_i = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

De tal forma que, reescrevendo a equação (2.1):

$$\mathbf{U} = \mathbf{N}\mathbf{u}_i \quad (3)$$

E substituindo-a na equação (2), tem-se:

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{K}\mathbf{N}\mathbf{u}_i \quad (4)$$

Onde \mathbf{K} é a matriz de rigidez do sistema, \mathbf{U} é o vetor de deslocamentos global do sistema, \mathbf{u}_i é o vetor de deslocamentos nodais, \mathbf{F} é o vetor de forças globais, \mathbf{F}_i é o vetor de forças nodais e \mathbf{N} é a matriz das funções interpoladoras.

As condições de contorno essenciais são incorporadas em \mathbf{F} de forma que os deslocamentos possam ser então calculados da seguinte maneira:

$$\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{F} \quad (5)$$

Com os deslocamentos conhecidos em todos os pontos dentro do elemento, as deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ podem ser obtidas da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (6)$$

Em que \mathbf{L} é um operador linear. Usando a equação (3), a equação (6) pode ser aproximada como:

$$\varepsilon = \mathbf{B}u_i \quad (6.1)$$

Sendo,

$$\mathbf{B} = \mathbf{L}\mathbf{N}; \mathbf{L} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

A partir das deformações determinadas ε e com as relações constitutivas \mathbf{D} previamente conhecidas, pode-se então obter as tensões atuantes no elemento. Em geral, o material dentro do contorno do elemento pode estar sujeito a deformações iniciais sejam elas de natureza quaisquer. Tais deformações são chamadas de ε_0 , sendo então as tensões causadas pela diferença entre a deformação atual e inicial. Em adição a isto, pode-se assumir que o corpo em análise esteja sob efeitos de tensões iniciais residuais σ_0 e que devem ser incorporadas na definição geral. Logo, assumindo um comportamento linear elástico qualquer, a relação linear entre tensões e deformações é escrita na forma:

$$\sigma = \mathbf{D}(\varepsilon - \varepsilon_0) + \sigma_0 \quad (7)$$

Uma boa interpretação do Método dos Elementos Finitos é dada pela Equação (3), a qual relaciona o deslocamento global de um determinado domínio com os deslocamentos nodais através das chamadas Funções Interpoladoras ou Funções de Forma \mathbf{N} . Estas funções polinomiais interpolam valores nodais subsequentes através de um sistema de equações para obtenção dos resultados globais. Desta maneira, entende-se que malhas refinadas possuem mais funções de forma interpolando valores nodais mais próximos entre si, obtendo assim resultados mais precisos do que malhas menos refinadas, ou seja, com menos elementos e por consequência menor número de nós.

2.2 MECÂNICA DO CONTÍNUO

Esta seção fará uma rápida revisão a respeito da Mecânica do Contínuo levantando os principais conceitos a serem considerados como referência no presente trabalho.

De acordo com LUBLINER (2006), a mecânica do contínuo é conhecida como sendo o estudo das forças e movimentos. Um determinado corpo rígido, sujeito a forças externas, pode deslocar-se no tempo ou então sofrer deformações elásticas e plásticas. O comportamento do corpo é descrito pelas equações variacionais, sejam elas, Princípio do Trabalho Virtual ou Princípio da Energia Potencial Total Estacionária. Estas formulações buscam o equilíbrio global do sólido por meio da energia interna do corpo e das forças e reações externas impostas ao sólido, podendo ser analisadas em situações de linearidade total e não linearidade física e/ou geométrica. O estudo das análises não-lineares será discutido nas seções seguintes.

Dado um corpo rígido no domínio Ω , de volume dV , superfície dS , forças externas F_Ω e condições de contorno R_Ω , conforme Figura 2:

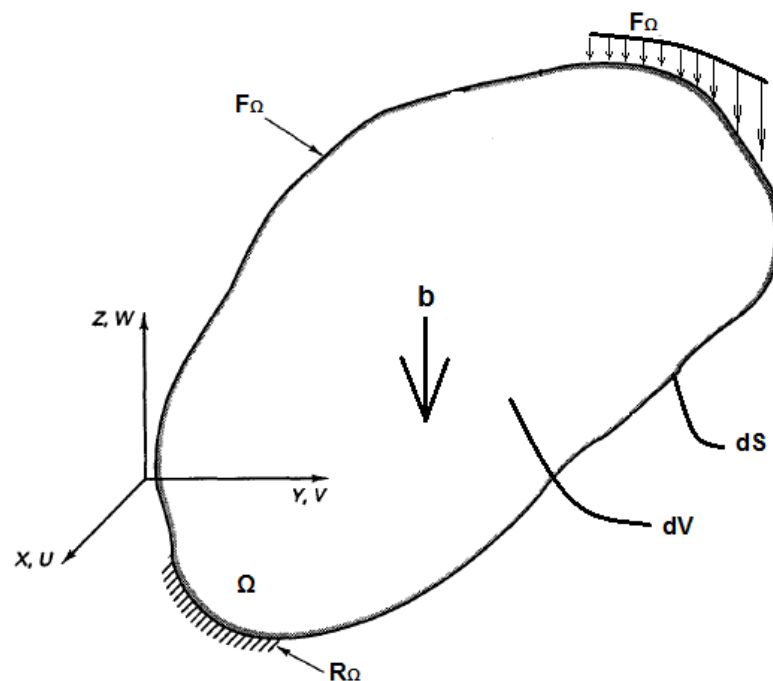


Figura 2: Representação de corpo rígido.

É definido, pela equação denominada Equação do Movimento de Euler, ou Balanço de Momento Linear ou Equação de Força Global:

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{b} dV + \int_{\delta\Omega} \mathbf{t}(\mathbf{n}) dS = \int_{\Omega} \rho \mathbf{a} dV \quad (8)$$

Onde ρ é a densidade (massa por unidade de volume), \mathbf{b} é o vetor de forças de campo (com dimensão de força por unidade de massa) e \mathbf{a} é o vetor de aceleração de campo. As forças externas são representadas pela componente $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ denominada Forças de Superfície. Este componente não é definido como sendo um componente de campo pois não depende apenas da localização, mas também depende de uma orientação da superfície do corpo/elemento como definido pelo valor local (Direção) de \mathbf{n} .

A dependência das forças \mathbf{t} com as direções \mathbf{n} pode ser explicada pelo Tetraedro de Cauchy. Estas forças podem ser ainda separadas em Tensão Normal e de Cisalhamento, respectivamente:

$$\sigma(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{t}(\mathbf{n}) = \sigma_{ij} \mathbf{n}_i \mathbf{n}_j \quad (9)$$

$$\tau(\mathbf{n}) = \sqrt{|\mathbf{t}(\mathbf{n})|^2 - [\sigma(\mathbf{n})]^2} \quad (10)$$

A Equação (8) representa o equilíbrio de um corpo rígido submetido a uma variedade de carregamentos e restrições.

2.3 PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Uma das formas de se determinar a estabilidade de um corpo é mensurando a energia total do mesmo. Um dos princípios utilizados em análise via Elementos Finitos é o Princípio da Energia Potencial Total. Quando a variação da Energia Potencial Interna se iguala à variação da Energia Potencial Externa, tem-se então um corpo em estado de equilíbrio elástico, isto é, todo corpo em equilíbrio não possui variação em sua energia total:

$$\delta W_{int} = \delta W_{ext} \quad (11)$$

Sendo δW_{int} e δW_{ext} a variação da energia potencial interna e externa, respectivamente. A partir do momento em que um desbalanceamento de energias ocorre, o sistema entra em desequilíbrio e o fenômeno de não linearidade física e/ou geométrica deve ser levada em consideração. Neste momento, um problema de valor de contorno só poderá ser solucionado através de processos iterativos e considerações de não-linearidade física e geométrica na formulação do elemento finito.

Um problema de elementos finitos pode ser baseado na formulação Lagrangeana ou Euleriana. A formulação Euleriana é muito empregada em problemas relativos à transferência de calor, dinâmica dos fluidos, entre outros, pois neste caso a malha de discretização se mantém fixa e estacionária em relação a um ponto referencial, enquanto o problema se desloca em relação a este mesmo ponto. Para problemas de valor de contorno da mecânica dos sólidos, a formulação mais empregada é a Lagrangeana. Esta se caracteriza pelo fato da malha de discretização se mover em conjunto com o corpo em relação a um ponto referencial, o que resulta em melhores resultados quando se reproduz análises não-lineares. Segundo Bathe (1996), em uma análise não-linear podem-se adotar duas formas de referenciais Lagrangeanos, sendo eles:

- Referencial Lagrangeano Total (LT): Os deslocamentos são medidos em relação à configuração inicial deformada no tempo 0 (zero), conforme Figura 3;
- Referencial Lagrangeano Atualizado (LA): Todas as variáveis estáticas e cinemáticas são medidas em relação à última configuração de equilíbrio obtida no processo incremental, ou seja, em relação a um referencial que é atualizado a cada incremento de carga, conforme ilustrado na Figura 4:

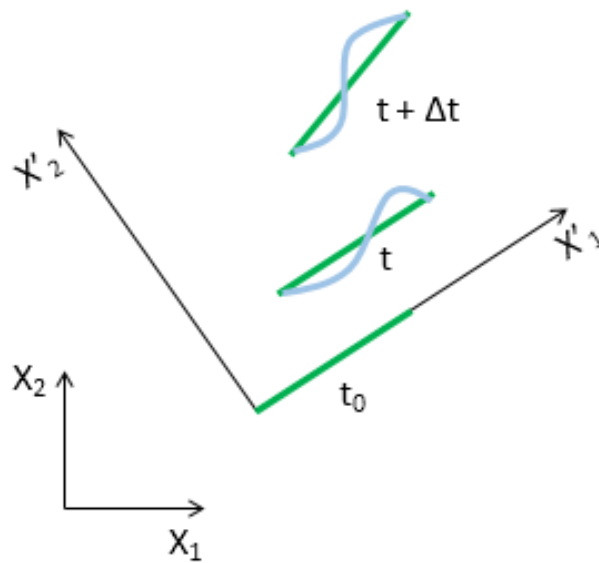


Figura 3: Referencial Lagrangeano Total.

Nota-se que no Referencial Lagrangeano Total a referência se desloca com o sistema ao haver incremento de tempo e carregamento sem que haja geração de novo sistema referência, sendo os deslocamentos medidos em relação a configuração deformada inicial. No caso de Referencial Lagrangeano Atualizado, conforme ilustrado na Figura 4, a referência é atualizada a cada incremento de carga e tempo sendo que os deslocamentos são medidos em relação às novas referências.

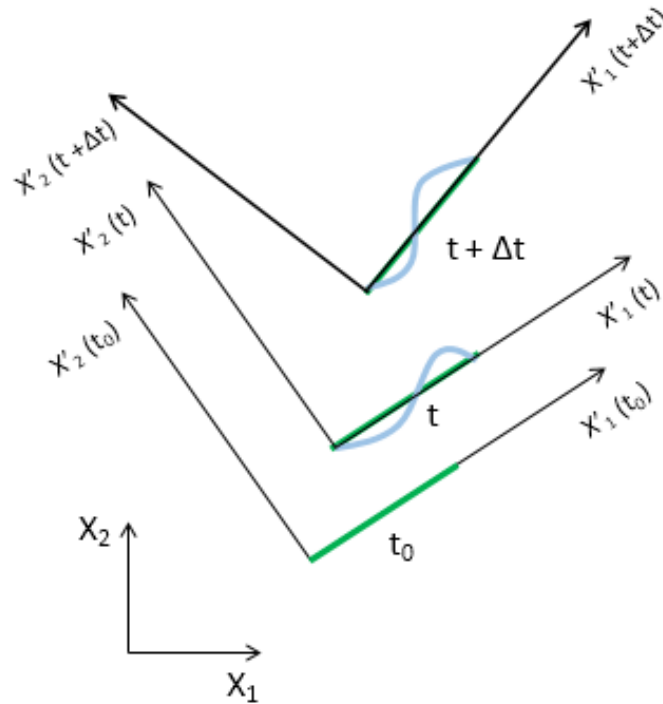


Figura 4: Referencial Lagrangeano Atualizado.

Neste trabalho será adotada uma notação para a formulação do problema o qual segue a seguinte regra no que se refere aos índices das variáveis:

- Índice superior esquerdo – Denota a configuração na qual ocorre a variável;
- Índice inferior esquerdo – Denota a configuração de referência na qual ocorre a variável;
- Índice inferior direito – Denota os componentes do vetor ou do tensor de segunda ordem;
- Índice inferior direito seguido de vírgula – Denota em relação a qual variável ocorre a diferenciação.

Sendo assim, para a determinação da energia total de um corpo pode ser utilizado o Princípio dos Trabalhos Virtuais, em termos de deslocamentos, na formulação Lagrangeana Total, o qual é dado por:

$$\int_{\circ V} {}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} R \quad (12)$$

Onde o lado esquerdo da expressão é representado pelo trabalho virtual interno, em termos do Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchoff (${}^{t+\Delta t} \mathbf{S}_{ij}$) no tempo $t+\Delta t$ referido à configuração inicial 0 e do Tensor de Deformações de Green-Lagrange (${}^{t+\Delta t} \varepsilon_{ij}$). O lado direito da expressão é representado pelo trabalho virtual externo (${}^{t+\Delta t} R$).

O Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchoff e de Deformações de Green-Lagrange no tempo t são definidos, respectivamente, como:

$${}^t \mathbf{S}_{ij} = \frac{{}^0 \rho}{{}^t \rho} {}^0 x_{i,m} {}^0 x_{j,n} {}^t \tau_{mn} \quad (13)$$

$${}^t \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} ({}^t u_{i,j} + {}^t u_{j,i} + {}^t u_{k,i} {}^t u_{k,j}) \quad (14)$$

No qual τ_{mn} é o Tensor de Tensões de Cauchy e ρ é a densidade aparente do material utilizado.

O trabalho virtual externo ${}^{t+\Delta t} R$ é descrito por:

$${}^{t+\Delta t} R = \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d^{t+\Delta t} V + \int_{t+\Delta t S_f} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i^S d^{t+\Delta t} S \quad (15)$$

Onde:

- ${}^{t+\Delta t} f_i^B$ – Componente das forças externas aplicadas por unidade de volume analisadas no tempo $t+\Delta t$;
- ${}^{t+\Delta t} f_i^S$ – Componentes das forças externas aplicadas por unidade de área analisadas no tempos $t+\Delta t$;
- ${}^{t+\Delta t} S_f$ – Superfície no tempos $t+\Delta t$ na qual as forças externas de tração são aplicadas;
- δu_i^S - δu_i avaliado na superfície ${}^{t+\Delta t} S_f$.

As tensões e deformações incrementais, respectivamente, são calculadas como:

$${}^{t+\Delta t}{}_{0}\mathbf{S}_{ij} = {}^t{}_{0}\mathbf{S}_{ij} + {}_{0}\mathbf{S}_{ij} \quad (16)$$

$${}^{t+\Delta t}{}_{0}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = {}^t{}_{0}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} + {}_{0}\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} \quad (17)$$

Tomando como premissa os componentes de tensão e deformação para um elemento viga-duto, considerações de interação solo-estrutura, quando aplicável, e as relações constitutivas do material, a equação do trabalho virtual incremental para um elemento solo-duto, segundo Mejía (2003) e reescrito por Shang (2009), é posta como:

$$\begin{aligned} & \int_{0_L} ({}^t\mathbf{F}_{eq} \delta_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0^{NL} + {}^t\mathbf{M}_{eq2} \delta_0 \phi_z^{NL} + {}^t\mathbf{M}_{eq3} \delta_0 \phi_y^{NL}) d^0 \mathbf{x} + \int_{0_V} {}^t\mathbf{C}^{EP} {}_{0}\boldsymbol{\varepsilon}_{x_1} (\delta_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{x_1}^L + \\ & \quad \delta_0 \boldsymbol{\varepsilon}_{x_1}^{NL}) d^0 \mathbf{V} + \int_{0_L} ({}^t\mathbf{K}_{AS} {}_{0}\Delta_{AS}) \delta_0 \mathbf{u}_0 d^0 \mathbf{x}_1 + \int_{0_L} ({}^t\mathbf{K}_{BS} {}_{0}\Delta_{BS} + \\ & \quad {}^t\mathbf{K}_{US} {}_{0}\Delta_{US}) \delta_0 \mathbf{v}_0 d^0 \mathbf{x}_1 + \int_{0_L} ({}^t\mathbf{K}_{LLS} {}_{0}\Delta_{LLS} + {}^t\mathbf{K}_{RLS} {}_{0}\Delta_{RLS}) \delta_0 \mathbf{w}_0 d^0 \mathbf{x}_1 = \\ & \quad \delta^{t+\Delta t} \mathbf{W}_{ext} - \int_{0_L} ({}^t\mathbf{F}_{eq} \delta_0 \boldsymbol{\varepsilon}_0^L + {}^t\mathbf{M}_{eq2} \delta_0 \phi_z^L + {}^t\mathbf{M}_{eq3} \delta_0 \phi_y^L) d^0 \mathbf{x} - \\ & \quad \int_{0_L} {}^t\mathbf{F}_{AS} \delta_0 \mathbf{u}_0 d^0 \mathbf{x}_1 - \int_{0_L} ({}^t\mathbf{F}_{BS} + {}^t\mathbf{F}_{US}) \delta_0 \mathbf{v}_0 d^0 \mathbf{x}_1 + \int_{0_L} ({}^t\mathbf{F}_{BS} + \\ & \quad {}^t\mathbf{F}_{RLS}) \delta_0 \mathbf{w}_0 d^0 \mathbf{x}_1 \end{aligned} \quad (18)$$

Sendo que a primeira parcela do lado esquerdo em conjunto com a segunda parcela do lado direito calcula a matriz incremental que descreve o comportamento não-linear geométrico da estrutura para grandes deslocamentos e pequenas deformações. A segunda parcela do lado esquerdo calcula a matriz de rigidez no tempo t com a matriz constitutiva variável, sendo calculado neste termo a não-linearidade física. Os três termos restantes do lado esquerdo e os três últimos termos do lado direito representam o trabalho virtual das molas de solo. O primeiro termo do lado direito é o trabalho virtual externo originado pelas cargas aplicadas.

2.4 FORMULAÇÃO DE ELEMENTO DE VIGA DE EULER-BERNOULLI

Este capítulo apresenta uma formulação do modelo de viga de Euler-Bernoulli aplicada à análise de dutos. Em termos práticos, dois tipos de modelos são utilizados para modelagem de dutos: modelos que usam elemento de casca/sólido ou modelos unidimensionais de elemento de viga. Os elementos de casca/sólido apresentam capacidade em analisar o caso de dutos carregados, considerando a flambagem local, causas frequentes para ruptura de duto. Para dutos com defeitos quaisquer, o modelo geométrico é, por natureza, tridimensional. Os elementos tridimensionais são ideais para análise de efeitos locais, tais como flambagem local, plastificação na região de corrosão, ou interação de diversas colônias de defeitos. Porém, mesmo modelando um duto num trecho de comprimento limitado, os elementos de casca ou sólido requerem maior esforço computacional, por que são elementos de elevado número de graus de liberdade. No caso de análise de dutos com longo comprimento e que apresentam ramificações, a malha de elementos de casca/sólido não é indicada. Nestes casos, o elemento de viga é recomendado apesar da sua simplicidade. Uma das limitações é a exclusão do efeito de flambagem local. Além disso, a ovalização na seção transversal e fratura local não são inclusos. Assim, algumas hipóteses são consideradas para que a formulação do modelo de viga seja possível.

As equações de equilíbrio são determinadas através do princípio de trabalhos virtuais. A descrição cinemática do modelo inclui efeitos de não linearidade geométrica, devido à possibilidade de desenvolvimento de grandes deslocamentos e pequenas deformações. Tal descrição é baseada na Formulação Lagrangeana Total. O efeito de não linearidade física também é incorporado no modelo considerando que o duto teria comportamento elasto-plástico multilinear, com características de material isotrópico.

Considerando um duto carregado com cargas externas e a pressão interna, o modelo permite calcular três tipos de tensões: longitudinal, radial e tangencial. A tensão radial é a menor dentre todas. A tensão longitudinal é calculada através da lei constitutiva do material. Em cada incremento, a

deformação é calculada através das equações deduzidas pela descrição cinemática, na seção transversal de cada ponto de integração de Gauss. Devido a não linearidade física e geométrica do modelo, a variação da tensão longitudinal é calculada para cada passo de incremento. A tensão tangencial é calculada pela equação de Lamé com o incremento de pressão em cada passo.

No desenvolvimento do modelo matemático é considerada a hipótese fundamental de que a viga é formulada segundo teorema de Viga Euler-Bernoulli.

A viga é caracterizada pelo suporte de cargas transversais que produzem efeitos de flexão no corpo. Estas forças de flexão produzem esforços de tração e compressão nas faces superior e inferior da viga, dependendo da direção das forças aplicadas. A seção da viga é subdividida em duas partes pela linha neutra, a qual coincide com o eixo centroidal da mesma onde neste ponto as tensões são nulas. A Figura 5 ilustra esquematicamente o comportamento de uma viga Euler-Bernoulli sob carregamento.

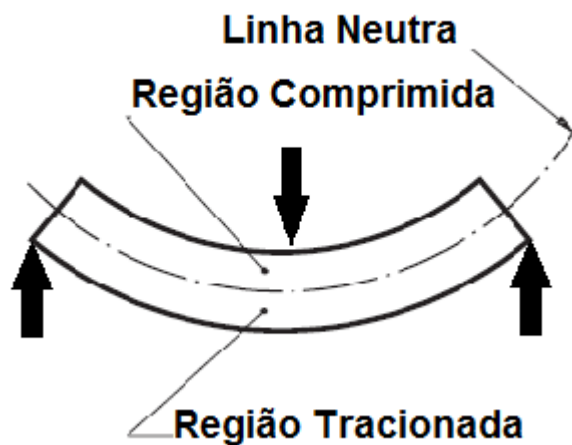


Figura 5: Típico de uma Viga de Euler-Bernoulli

Algumas hipóteses são adotadas para a formulação de um elemento com base na Teoria da Viga de Euler-Bernoulli, como segue:

1. A existência da linha neutra onde a viga não sofre tração nem compressão na flexão pura;

2. A seção transversal que era originalmente perpendicular ao eixo longitudinal permanece plana e perpendicular ao eixo longitudinal após a deformação;
3. Hipótese de viga esbelta;
4. No duto submetido à pressão interna, existem as tensões tangenciais e radiais. A tensão máxima segundo a solução de Lamé para cilindros de parede fina é a tangencial. Em função desta conclusão, no modelo em estudo, a tensão radial é desprezada, devido ao seu valor relativamente menor comparado com outras tensões;
5. Admite-se um comportamento elasto-plástico do material com endurecimento isotrópico. A expansão de superfície de escoamento é dada de acordo com critério de Von Mises.

2.5 RELAÇÃO DEFORMAÇÃO – DESLOCAMENTO

Os deslocamentos do eixo centroidal, em coordenadas globais, são obtidos a partir dos deslocamentos incrementais, como segue:

$${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}_0 = {}^t\tilde{\mathbf{u}}_0 + {}_t\tilde{\mathbf{u}}_0 \quad (19)$$

$${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{v}}_0 = {}^t\tilde{\mathbf{v}}_0 + {}_t\tilde{\mathbf{v}}_0 \quad (20)$$

$${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{w}}_0 = {}^t\tilde{\mathbf{w}}_0 + {}_t\tilde{\mathbf{w}}_0 \quad (21)$$

Os componentes de deslocamento, para qualquer ponto $P(x_1, x_2, x_3)$ do corpo na seção transversal deste, com referência no tempo t , podem ser descritas de acordo com as expressões:

$${}_t\mathbf{u} = {}_t\mathbf{u}_0 - \frac{\partial {}_t v_0}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial {}_t w_0}{\partial x_1} x_3 \quad (22)$$

$${}_t\mathbf{v} = {}_t\mathbf{v}_0 \quad (23)$$

$${}^t\mathbf{w} = {}^t\mathbf{w}_0 \quad (24)$$

Os quais, ${}^t v_0$ e ${}^t w_0$ são os deslocamentos do eixo centroidal no tempo de referência t .

Os deslocamentos totais acumulados no sistema de coordenada global é então descrito como:

$${}^{t+\Delta t}\check{\mathbf{u}} = {}^t\check{\mathbf{u}} + {}_t\check{\mathbf{u}} \quad (25)$$

$${}^{t+\Delta t}\check{\mathbf{v}} = {}^t\check{\mathbf{v}} + {}_t\check{\mathbf{v}} \quad (26)$$

$${}^{t+\Delta t}\check{\mathbf{w}} = {}^t\check{\mathbf{w}} + {}_t\check{\mathbf{w}} \quad (27)$$

O tensor de deformações empregado é o Tensor de Deformações de Green-Lagrange, definido conforme Equação 14, onde os termos na forma expandida são escritos conforme:

$$\begin{aligned} {}^t\mathbf{u}_{1,1} &= \frac{\partial^t u}{\partial^0 x_1}; & {}^t\mathbf{u}_{2,1} &= \frac{\partial^t v}{\partial^0 x_1}; & {}^t\mathbf{u}_{3,1} &= \frac{\partial^t w}{\partial^0 x_1}; & {}^t\mathbf{u}_{1,2} &= \frac{\partial^t u}{\partial^0 x_2}; & {}^t\mathbf{u}_{2,2} &= \frac{\partial^t v}{\partial^0 x_2}; & {}^t\mathbf{u}_{3,2} &= \\ \frac{\partial^t w}{\partial^0 x_2}; & {}^t\mathbf{u}_{1,3} &= \frac{\partial^t u}{\partial^0 x_3}; & {}^t\mathbf{u}_{2,3} &= \frac{\partial^t v}{\partial^0 x_3}; & {}^t\mathbf{u}_{3,3} &= \frac{\partial^t w}{\partial^0 x_3} \end{aligned} \quad (28)$$

Expandindo a Equação 14 e considerando que só existe a deformação longitudinal então se tem:

$${}^t\boldsymbol{\varepsilon}_{1,1} = {}^t\varepsilon_{x_1} = \frac{1}{2} \left({}^t\mathbf{u}_{1,1} + {}^t\mathbf{u}_{1,1} + {}^t\mathbf{u}_{1,1}{}^t\mathbf{u}_{1,1} + {}^t\mathbf{u}_{2,1}{}^t\mathbf{u}_{2,1} + {}^t\mathbf{u}_{3,1}{}^t\mathbf{u}_{3,1} \right) \quad (29)$$

Substituindo as Equações de (28) na Equação 29, pode-se expressar os componentes de deformação longitudinal como segue:

$$\begin{aligned}
{}^t\varepsilon_{1,1} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t u}{\partial x_1} + \frac{\partial^t u}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial^t u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial^t v}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial^t w}{\partial x_1} \right)^2 \right) = \frac{\partial^t u_0}{\partial x_1} - \frac{\partial_t^2 v_0}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{\partial_t^2 w_0}{\partial^t x_1^2} x_3 + \\
\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial^t u_0}{\partial x_1} - \frac{\partial_t^2 v_0}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{\partial_t^2 w_0}{\partial^t x_1^2} x_3 \right)^2 + \left(\frac{\partial^t v_0}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial^t w_0}{\partial x_1} \right)^2 \right] &= \frac{\partial^t u_0}{\partial x_1} - \frac{\partial_t^2 v_0}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{\partial_t^2 w_0}{\partial^t x_1^2} x_3 + \\
\frac{1}{2} \left(\frac{\partial_t^2 u_0}{\partial^t x_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^t u_0}{\partial^t x_1} \frac{\partial_t^2 v_0}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^t u_0}{\partial^t x_1} \frac{\partial_t^2 w_0}{\partial^t x_1^2} x_3 - \frac{1}{2} \frac{\partial^t u_0}{\partial^t x_1} \frac{\partial_t^2 v_0}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_t^2 v_0}{\partial^t x_1^2} x_2 \right)^2 - \\
\frac{1}{2} x_2 x_3 \frac{\partial_t^2 v_0}{\partial^t x_1^2} \frac{\partial_t^2 w_0}{\partial^t x_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^t u_0}{\partial^t x_1} \frac{\partial_t^2 w_0}{\partial^t x_1^2} x_3 - \frac{1}{2} x_2 x_3 \frac{\partial_t^2 v_0}{\partial^t x_1^2} \frac{\partial_t^2 w_0}{\partial^t x_1^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_t^2 w_0}{\partial^t x_1^2} x_3 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t v_0}{\partial^t x_1} \right)^2 + \\
\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t w_0}{\partial^t x_1} \right)^2 & \quad (30)
\end{aligned}$$

Desprezando os termos $x_2 x_3$, x_2^2 e x_3^2 , a equação acima é simplificada para:

$$\begin{aligned}
{}^t\varepsilon_{1,1} &= \frac{\partial^t u_0}{\partial^t x_1} - \frac{\partial_t^2 v_0}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{\partial_t^2 w_0}{\partial^t x_1^2} x_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t u_0}{\partial^t x_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^t u_0}{\partial^t x_1} \frac{\partial_t^2 v_0}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^t u_0}{\partial^t x_1} \frac{\partial_t^2 w_0}{\partial^t x_1^2} x_3 - \\
\frac{1}{2} \frac{\partial^t u_0}{\partial^t x_1} \frac{\partial_t^2 v_0}{\partial^t x_1^2} x_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^t u_0}{\partial^t x_1} \frac{\partial_t^2 w_0}{\partial^t x_1^2} x_3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t v_0}{\partial^t x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^t w_0}{\partial^t x_1} \right)^2 & \quad (31)
\end{aligned}$$

Da expressão acima podemos retirar as parcelas de deformação, curvatura e rotação incremental linear (Representado pela letra L no canto superior direito) em termos das coordenadas locais:

- Deformação incremental: ${}^t\varepsilon_0^L = \frac{\partial^t u_0}{\partial^t x_1} = \frac{\partial^t u_0}{\partial^0 \xi} \frac{d^0 \xi}{d^0 x_1} = \frac{2}{0L} \frac{\partial^t u_0}{\partial^0 \xi}$ (32)

- Curvatura incremental em X_3 : ${}^t\vartheta_z^L = \frac{\partial_t^2 v_0}{\partial^t x_1^2} = \frac{4}{0L^2} \frac{\partial_t^2 v_0}{\partial^0 \xi^2}$ (33)

- Curvatura incremental em X_2 : ${}^t\vartheta_y^L = \frac{\partial_t^2 w_0}{\partial^t x_1^2} = \frac{4}{0L^2} \frac{\partial_t^2 w_0}{\partial^0 \xi^2}$ (34)

- Rotação incremental em torno do eixo X_3 : ${}^t\theta_z^L = \frac{\partial^t v_0}{\partial^t x_1} = \frac{2}{0L} \frac{\partial^t v_0}{\partial^0 \xi}$ (35)

- Rotação incremental em torno do eixo X_2 : ${}^t\theta_y^L = \frac{\partial^t w_0}{\partial^t x_1} = \frac{2}{0L} \frac{\partial^t w_0}{\partial^0 \xi}$ (36)

A substituição do conjunto de equações (32) à (36) na equação (31), resulta em:

$${}^t\varepsilon_{x_1} = {}^t\varepsilon_0^L - {}^t\phi_z^L x_2 + {}^t\phi_y^L x_3 + \frac{1}{2} ({}^t\varepsilon_0^L)^2 - \frac{1}{2} {}^t\varepsilon_0^L {}^t\phi_z^L x_2 + \frac{1}{2} {}^t\varepsilon_0^L {}^t\phi_y^L x_3 - \frac{1}{2} {}^t\varepsilon_0^L {}^t\phi_z^L x_2 + \frac{1}{2} {}^t\varepsilon_0^L {}^t\phi_y^L x_3 + \frac{1}{2} ({}^t\theta_y^L)^2 + \frac{1}{2} ({}^t\theta_z^L)^2 \quad (37)$$

Pode-se então decompor a equação (37) em duas parcelas, sendo parcela linear e não-linear, respectivamente:

$${}^t\varepsilon_{x_1} = {}^t\varepsilon_{x_1}^L + {}^t\varepsilon_{x_1}^{NL} \quad (38)$$

Tal que:

$${}^t\varepsilon_{x_1}^L = {}^t\varepsilon_0^L - x_2 {}^t\phi_z^L + x_3 {}^t\phi_y^L \quad (39)$$

$${}^t\varepsilon_{x_1}^{NL} = {}^t\varepsilon_0^{NL} - x_2 {}^t\phi_z^{NL} + x_3 {}^t\phi_y^{NL} \quad (40)$$

Sendo a parcela de deformação não-linear inicial representada por:

$${}^t\varepsilon_0^{NL} = \frac{1}{2} [({}^t\varepsilon_0^L)^2 + ({}^t\theta_y^L)^2 + ({}^t\theta_z^L)^2]; \quad {}^t\phi_z^{NL} = {}^t\varepsilon_0^L {}^t\phi_z^L; \quad {}^t\phi_y^{NL} = {}^t\varepsilon_0^L {}^t\phi_y^L \quad (41)$$

Fazendo:

$${}^t\varepsilon_0 = {}^t\varepsilon_0^L + {}^t\varepsilon_0^{NL} \quad (42)$$

$${}^t\phi_z = {}^t\phi_z^L + {}^t\varepsilon_0^L {}^t\phi_z^L \quad (43)$$

$${}^t\phi_y = {}^t\phi_y^L + {}^t\varepsilon_0^L {}^t\phi_y^L \quad (44)$$

E substituindo-as na equação (38), tem-se por fim:

$${}^t\varepsilon_{x_1} = {}^t\varepsilon_0 - x_2 {}^t\phi_z + x_3 {}^t\phi_y \quad (45)$$

2.6 ELEMENTO DE PÓRTICO

Para o estudo de dutos será utilizado um elemento de pórtico tridimensional, uniaxial, com seção transversal circular vazada. Este elemento foi desenvolvido por Meija e Rohel (2005) e aplicado por Souza (2005) e Shang (2009). O elemento possui funções de forma de ordem elevada, com comprimento L , conforme Figura 6. O elemento possui 3 nós e 6 graus de liberdade por nó, sendo estes: deslocamentos nas direções X_1 , X_2 e X_3 e rotação em torno dos eixos X_1 , X_2 e X_3 . O elemento prevê a possibilidade de plastificação da seção transversal em uma análise não linear física.

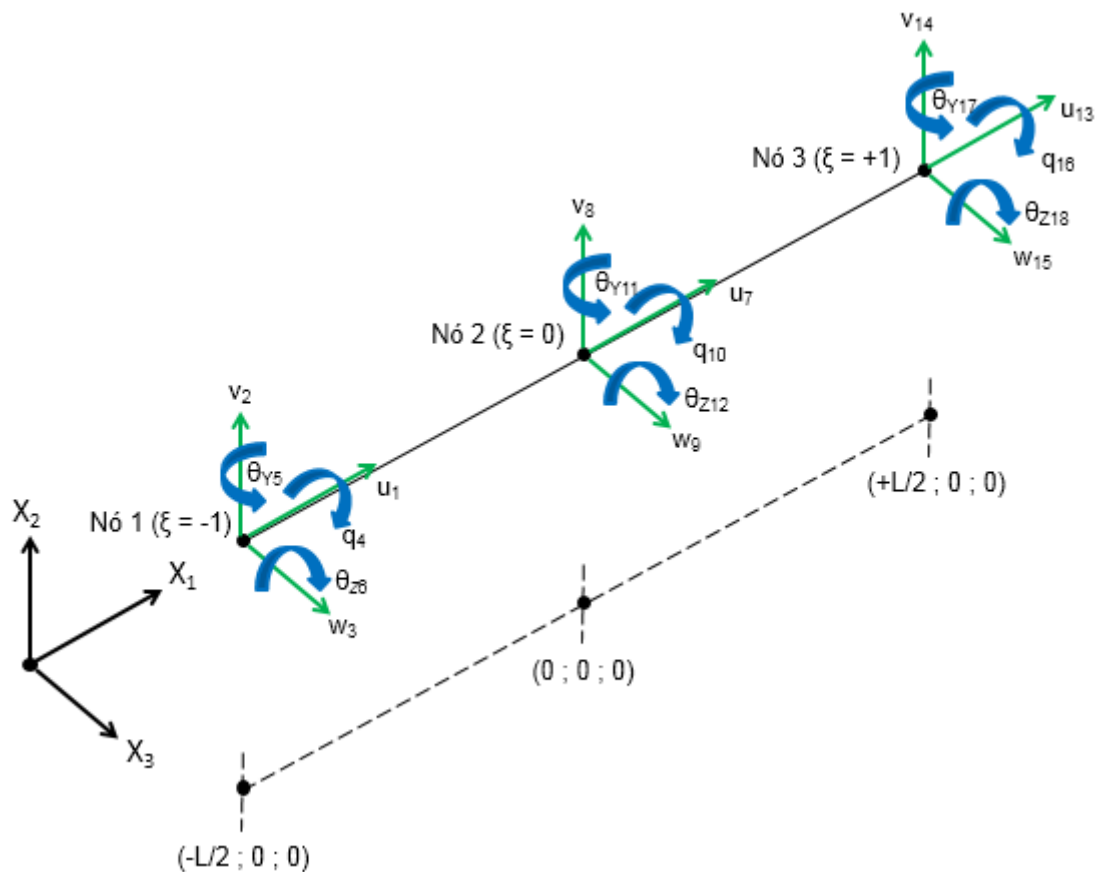


Figura 6: Elemento de pórtico tridimensional.

Conforme descrito por Bathe (1996), de acordo com a formulação isoparamétrica de deslocamentos, as funções interpoladoras para o elemento de

pórtico tridimensional de 3 nós, considerando as coordenadas locais, são definidas como:

Deslocamento Axial (Eixo X_1):

$$h_1({}^0\xi) = -\frac{{}^0\xi}{2} + \frac{{}^0\xi^2}{2} \quad (46)$$

$$h_7({}^0\xi) = 1 - {}^0\xi^2 \quad (47)$$

$$h_{13}({}^0\xi) = \frac{{}^0\xi}{2} + \frac{{}^0\xi^2}{2} \quad (48)$$

Deslocamento Transversal (Eixos X_2 e X_3):

$$h_2({}^0\xi) = h_3({}^0\xi) = \frac{1}{4} {}^0\xi^2 (3 {}^0\xi + 4) (-1 + {}^0\xi)^2 \quad (49)$$

$$h_8({}^0\xi) = h_9({}^0\xi) = (-1 + {}^0\xi)^2 (1 + {}^0\xi)^2 \quad (50)$$

$$h_{14}({}^0\xi) = h_{15}({}^0\xi) = -\frac{1}{4} {}^0\xi^2 (3 {}^0\xi - 4) (1 + {}^0\xi)^2 \quad (51)$$

Rotação - Flexão (Eixos X_2 e X_3):

$$h_5({}^0\xi) = h_6({}^0\xi) = \frac{1}{8} {}^0\xi^2 L (1 + {}^0\xi) (-1 + {}^0\xi)^2 \quad (52)$$

$$h_{11}({}^0\xi) = h_{12}({}^0\xi) = \frac{1}{2} L {}^0\xi (-1 + {}^0\xi)^2 (1 + {}^0\xi)^2 \quad (53)$$

$$h_{17}({}^0\xi) = h_{18}({}^0\xi) = \frac{1}{8} {}^0\xi^2 L (-1 + {}^0\xi) (1 + {}^0\xi)^2 \quad (54)$$

Rotação - Torção (Eixos X_1):

$$h_4({}^0\xi) = -\frac{{}^0\xi}{2} + \frac{{}^0\xi^2}{2} \quad (55)$$

$$h_{10}({}^0\xi) = 1 - {}^0\xi^2 \quad (56)$$

$$h_{16}({}^0\xi) = \frac{{}^0\xi}{2} + \frac{{}^0\xi^2}{2} \quad (57)$$

Na qual ξ representa a coordenada local do elemento, o índice superior esquerdo (Zero) remete à configuração inicial do elemento e L é o comprimento do mesmo. Este elemento é apropriado para a análise de dutos sujeitos a pressões internas ou externas. Entretanto, desconsideram-se as deformações devidas a esforços de torção, pois análises com pequenas deformações da seção transversal não são objeto de estudo. Sendo assim, pode-se expressar na forma matricial os deslocamentos incrementais, da seguinte forma:

$$\begin{Bmatrix} {}^t u \\ {}^t v \\ {}^t w \\ {}^t q \end{Bmatrix} = [{}^t_0 H] \{ {}^t u_e \} \quad (58)$$

$$\begin{bmatrix} {}^t u \\ {}^t v \\ {}^t w \\ {}^t q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 {}^t u_1 + h_7 {}^t u_7 + h_{13} {}^t u_{13} \\ h_2 {}^t v_2 + {}^t \theta_{Z6} h_6 + h_8 {}^t v_8 + {}^t \theta_{Z12} h_{12} + h_{14} {}^t v_{14} + {}^t \theta_{Z18} h_{18} \\ h_3 {}^t w_3 + {}^t \theta_{Y5} h_5 + h_9 {}^t w_9 + {}^t \theta_{Y11} h_{11} + h_{15} {}^t w_{15} + {}^t \theta_{Y17} h_{17} \\ h_4 {}^t q_4 + h_{10} {}^t q_{10} + h_{16} {}^t q_{16} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Nas expressões anteriores ${}^t u$ representa os deslocamentos axiais, ${}^t v$ representa os deslocamentos no Eixo X_2 , ${}^t \theta_z$ representa rotações transversais no Eixo X_3 , ${}^t w$ representa os deslocamentos no Eixo X_3 , ${}^t \theta_y$ as rotações transversais no Eixo X_2 e ${}^t q$ representa as rotações no Eixo X_1 . Desprezando-se o efeito de torção no eixo do elemento por esta ter participação desprezível na

plastificação do material, bem como admitindo-se que não haja empenamento da seção do elemento, a equação (59) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} {}^t u \\ {}^t v \\ {}^t w \end{Bmatrix} = [{}^t H] \{ {}^t u_e \} \quad (60)$$

No qual a matriz das funções de interpolação pode ser escrita como:

$$[{}^t H] = \begin{bmatrix} {}^t h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t h_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t h_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & {}^t h_2 & 0 & 0 & 0 & {}^t h_6 & 0 & {}^t h_8 & 0 & 0 & 0 & {}^t h_{12} & 0 & {}^t h_{14} & 0 & 0 & 0 & {}^t h_{18} \\ 0 & 0 & {}^t h_3 & 0 & {}^t h_5 & 0 & 0 & 0 & {}^t h_9 & 0 & {}^t h_{11} & 0 & 0 & 0 & {}^t h_{15} & 0 & {}^t h_{17} & 0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

2.7 MATRIZES DE DEFORMAÇÃO – DESLOCAMENTO

Pode-se obter a deformação axial linear ${}^t \varepsilon_o^L$ e as rotações e curvaturas lineares ${}^t \phi_z^L$ e ${}^t \phi_y^L$ através da formulação descrita na sessão anterior e descreve-las como sendo:

$$\begin{Bmatrix} {}^t \varepsilon_o^L \\ {}^t \phi_z^L \\ {}^t \phi_y^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} h_1' {}^t u_1 + h_7' {}^t u_7 + h_{13}' {}^t u_{13} \\ h_2'' {}^t v_2 + h_6'' {}^t \theta_{z6} + h_8'' {}^t v_8 + h_{12}'' {}^t \theta_{z12} + h_{14}'' {}^t v_{14} + h_{18}'' {}^t \theta_{z18} \\ h_3'' {}^t w_3 + h_5'' {}^t \theta_{y5} + h_9'' {}^t w_9 + h_{11}'' {}^t \theta_{y11} + h_{15}'' {}^t w_{15} + h_{17}'' {}^t \theta_{z17} \end{Bmatrix} \quad (62)$$

Em que h' e h'' representam as derivadas primeira e segunda, respectivamente, das funções interpoladoras em relação à coordenada local ξ . A forma matricial acima também pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} {}^t \varepsilon_o^L \\ {}^t \phi_z^L \\ {}^t \phi_y^L \end{Bmatrix} = [{}^t B^L] \{ {}^t u_e \} \quad (63)$$

Na qual ${}^t_0B^L$ se resume à:

$${}^t_0B^L = \begin{bmatrix} \frac{2h_1'}{0L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_7'}{0L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{13}'}{0L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4h_2''}{0L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_6''}{0L^2} & 0 & \frac{4h_8''}{0L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_{12}''}{0L^2} & 0 & \frac{4h_{14}''}{0L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_{18}''}{0L^2} \\ 0 & 0 & \frac{4h_3''}{0L^2} & 0 & \frac{4h_5''}{0L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_9''}{0L^2} & 0 & \frac{4h_{11}''}{0L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_{15}''}{0L^2} & 0 & \frac{4h_{17}''}{0L^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Conforme descrito por Bathe (1996), a deformação axial incremental não-linear pode ser descrita da seguinte maneira:

$${}^t_0\varepsilon_0^{NL} = \frac{1}{2} \left\{ {}^t_0u_e \right\}^T [{}^t_0B_1^{NL}]^T [{}^t_0B_1^{NL}] \left\{ {}^t_0u_e \right\} \quad (65)$$

No qual:

$${}^t_0B_1^{NL} = \begin{bmatrix} \frac{2h_1'}{0L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_7'}{0L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{13}'}{0L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2h_2'}{0L} & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_5'}{0L} & 0 & \frac{2h_8'}{0L} & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{12}'}{0L} & 0 & \frac{2h_{14}'}{0L} & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{18}'}{0L} \\ 0 & 0 & \frac{2h_3'}{0L} & 0 & \frac{2h_5'}{0L} & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_9'}{0L} & 0 & \frac{2h_{11}'}{0L} & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{15}'}{0L} & 0 & \frac{2h_{17}'}{0L} & 0 \end{bmatrix} \quad (66)$$

A partir disso pode-se escrever a parcela da variação da deformação axial incremental não-linear:

$$\delta_0^t \varepsilon_0^{NL} = \frac{1}{2} \left\{ \delta_0^t u_e \right\}^T [{}^t_0B_1^{NL}]^T [{}^t_0B_1^{NL}] \left\{ {}^t_0u_e \right\} \quad (67)$$

A curvatura incremental não-linear ${}^t_0\phi_z^{NL}$ é escrita como sendo:

$${}^t_0\phi_z^{NL} = {}^t_0\varepsilon_0^L {}^t_0\phi_z^L = \left\{ {}^t_0u_e \right\}^T [{}^t_0B^L]^T [{}^t_0B_2^{NL}] \left\{ {}^t_0u_e \right\} \quad (68)$$

No qual:

$$[{}^t_0\mathbf{B}_2^{NL}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4h_2''}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_6''}{L^2} & 0 & \frac{4h_8''}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_{12}''}{L^2} & 0 & \frac{4h_{14}''}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_{18}''}{L^2} \\ \frac{2h_1'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_7'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{13}'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (69)$$

De forma análoga, a curvatura incremental não-linear ${}^t_0\phi_y^{NL}$ é obtida através da seguinte equação:

$${}^t_0\phi_y^{NL} = {}^t_0\varepsilon_0^L {}^t_0\phi_y^L = \{ {}^t_0\mathbf{u}_e \}^T [{}^t_0\mathbf{B}^L]^T [{}^t_0\mathbf{B}_3^{NL}] \{ {}^t_0\mathbf{u}_e \} \quad (70)$$

Em que:

$$[{}^t_0\mathbf{B}_3^{NL}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{4h_3''}{L^2} & 0 & \frac{4h_5''}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_9''}{L^2} & 0 & \frac{4h_{11}''}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4h_{15}''}{L^2} & 0 & \frac{4h_{17}''}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2h_1'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_7'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2h_{13}'}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (71)$$

2.8 ANÁLISE NÃO-LINEAR

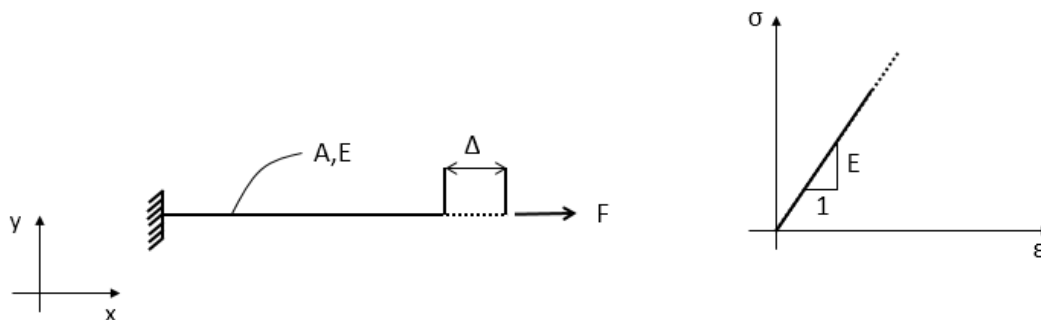
Frequentemente análises com considerações de não-linearidade material são realizadas. É importante a identificação do tipo de problema analisado de forma a empregar as corretas considerações e métodos de cálculo. A Tabela 1 mostra uma classificação clara dos tipos de análises não-lineares considerando separadamente efeitos de não-linearidade material e efeitos de não-linearidade cinemática.

Tabela 1: Classificação de Análises Não-Lineares.

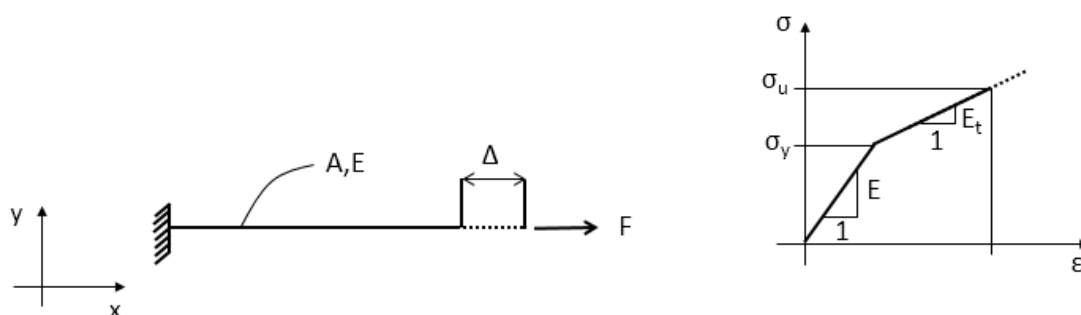
Fonte: Adaptado de Bathe (1996).

TIPO DE ANÁLISE	DESCRIÇÃO	FOMULAÇÃO TÍPICA	MEDIÇÃO DE TENSÃO E DEFORMAÇÃO
Não-Linearidade Material Apenas	Deformações e Deslocamentos Infinitesimais; A relação <i>Tensão x Deformação</i> é não-linear	Não-Linearidade Material	Tensões e deformações de engenharia
Grandes Deslocamentos / Grandes Rotações / Pequenas Deformações	Grandes deslocamentos e rotações das fibras, mas mudanças de ângulo e alongamentos entre fibras são pequenas; A relação <i>Tensão x Deformação</i> pode ser linear ou não-linear	Lagrangeana Total (LT) Lagrangeana Atualizada (LA)	Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff Tensor de Deformações de Green-Lagrange Tensor de Tensões de Cauchy Tensor de Deformações de Almansi
Grandes Deslocamentos / Grandes Rotações / Grandes Deformações	Alongamentos e ângulo de rotação entre fibras podem ser grandes. Grandes deslocamentos e rotações nas fibras também podem ocorrer; A relação <i>Tensão x Deformação</i> pode ser linear ou não-linear	Lagrangeana Total (LT) Lagrangeana Atualizada (LA)	Segundo Tensor de Tensões de Piola-Kirchhoff Tensor de Deformações de Green-Lagrange Tensor de Tensões de Cauchy Deformações Logarítmicas

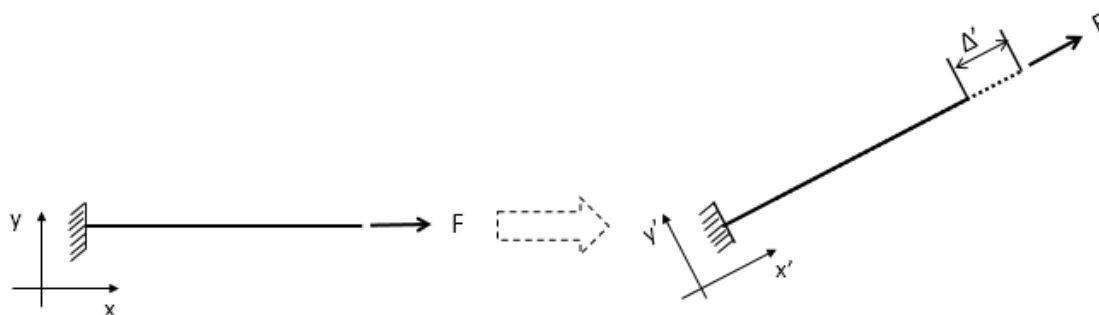
A Figura 7 apresenta um esboço de alguns tipos de problemas que são encontrados, conforme listados na Tabela 1.



a) Linear Elástica (Deslocamento Infinitesimal).



b) Não-Linearidade Material Apenas (Deslocamentos infinitesimais – Não-linearidade na relação *Tensão x Deformação*).



c) Grandes Deslocamentos e Rotações com pequenas Deformações. Comportamento de linearidade ou não-linearidade material.

Figura 7: Classificação das Análises.

Tendo em vista a grande diversidade de problemas na engenharia, deve-se ficar atento ao modelo a ser adotado para que tempo computacional não seja desperdiçado, bem como não se perca a confiabilidade da solução.

Na sequência são apresentados alguns outros conceitos a respeito de análises com considerações de não-linearidade material.

2.8.1 TENSÕES PRINCIPAIS

É possível a determinação de direções na qual as tensões cisalhantes se anulam, tornando as tensões normais máximas. Os valores de tensões normais máximas são interessantes quando análises visam um resultado muito específico, ou seja, um resultado em uma determinada direção. Estas tensões são chamadas de Tensões Principais. As tensões principais também são utilizadas nos critérios de escoamento utilizados em análises não lineares.

Os principais invariantes de tensão são definidos como:

$$I_1 = \sigma_{kk} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (72)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{kk}) = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \quad (73)$$

$$I_3 = \det\sigma = \sigma_1\sigma_2\sigma_3 \quad (74)$$

$$\text{Tensão Média ou Tensão Hidrostática: } \sigma_m = \frac{1}{3}I_1 \quad (75)$$

Em que σ_1 , σ_2 e σ_3 representam a primeira, segunda e terceira tensão principal, respectivamente.

A Tensão Deviatória ou Tensor Deviatório de Tensões s_{ij} é definido como:

$$s_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_{ij} - \sigma_m \delta_{ij} \quad (76)$$

Em que δ_{ij} representa o Delta de Kronecker. Sendo os principais invariantes do tensor deviatório:

$$J_1 = s_{kk} \quad (77)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] \quad (78)$$

$$J_3 = \frac{1}{27} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2(\sigma_1 - \sigma_3 + \sigma_2 - \sigma_3) + (\sigma_2 - \sigma_3)^2(\sigma_2 - \sigma_1 + \sigma_3 - \sigma_1) + (\sigma_3 - \sigma_1)^2(\sigma_3 - \sigma_2 + \sigma_1 - \sigma_2)] \quad (79)$$

As tensões deviatórias principais podem ser relacionadas com as tensões principais através das seguintes expressões:

$$S_1 = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \quad (80)$$

$$S_2 = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} \quad (81)$$

$$S_3 = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \quad (82)$$

2.8.2 PLASTICIDADE

Nos problemas de engenharia é comum a premissa da condição de elasticidade para projeto de máquinas e estruturas, isto pois não é de se esperar que uma máquina, viga, duto, etc., plastifique quando estiver exercendo sua função, seja ela qual for. No entanto, em algumas situações é necessário a verificação do projeto levando a estrutura à condição de plasticidade de forma a verificar até que ponto a estrutura pode ser submetida a tais esforços. Para isto é preciso conhecer alguns conceitos básicos.

Um dos principais pontos a ser levado em consideração ao realizar uma análise com presença de efeitos de não-linearidade é o tipo de material que será estudado. Algumas classificações para tal são definidas, como segue:

- Material Anisotrópico: Possui 21 coeficientes e as propriedades são totalmente diferentes em todas as direções;

- Material Ortotrópico: Possui 9 coeficientes e as propriedades são diferentes nas 3 direções, porém iguais entre si em cada direção;
- Material Transversalmente Isotrópico: Possui 5 coeficientes e é isotrópico por lâminas, ou seja, as propriedades são iguais nas 3 direções porém diferente entre as lâminas;
- Material Isotrópico: Possui 2 coeficientes e as propriedades são iguais em todas as direções.

Este estudo leva em consideração o uso de materiais com comportamento isotrópico. Estes materiais, quando em escoamento plástico, têm sua superfície de escoamento sendo expandida sem distorção e translação, como mostra a Figura 8:

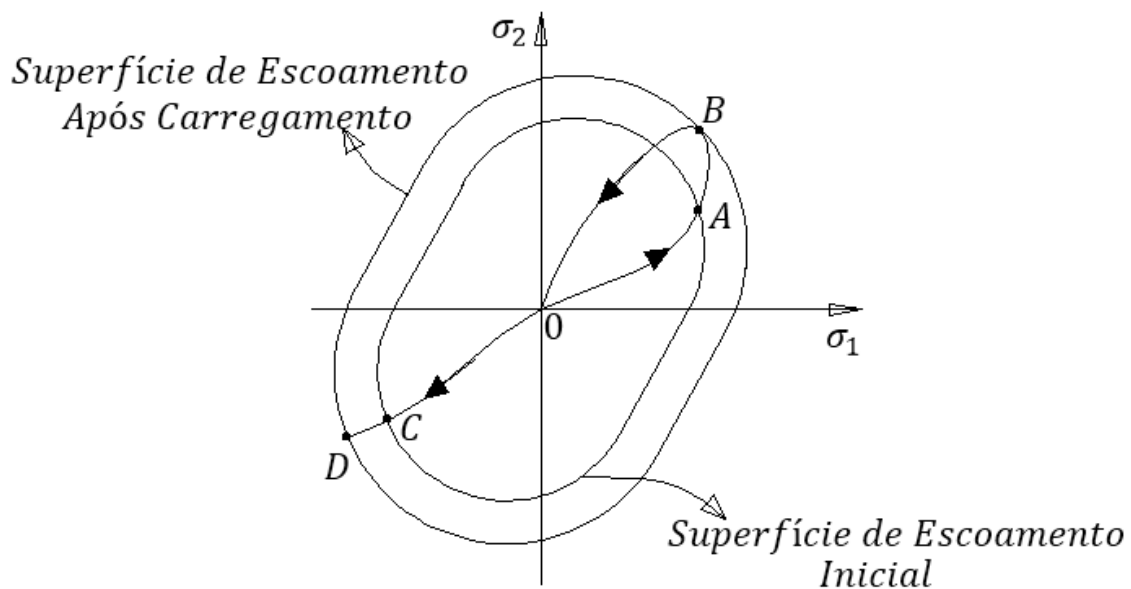


Figura 8: Superfície de escoamento após carregamento no material que apresenta encruamento isotrópico.

Ou seja, conforme descrito por Lubliner (2006), dada uma função contínua $f(\sigma, T, \epsilon)$ tal que exista uma região no espaço de tensões no qual (dados valores para T e ϵ) $f(\sigma, T, \epsilon) < 0$, então esta região constitui a elasticidade do problema, sendo que $f(\sigma, T, \epsilon) = 0$ constitui a superfície de plasticidade do sistema, conforme mostrado na Figura 9:

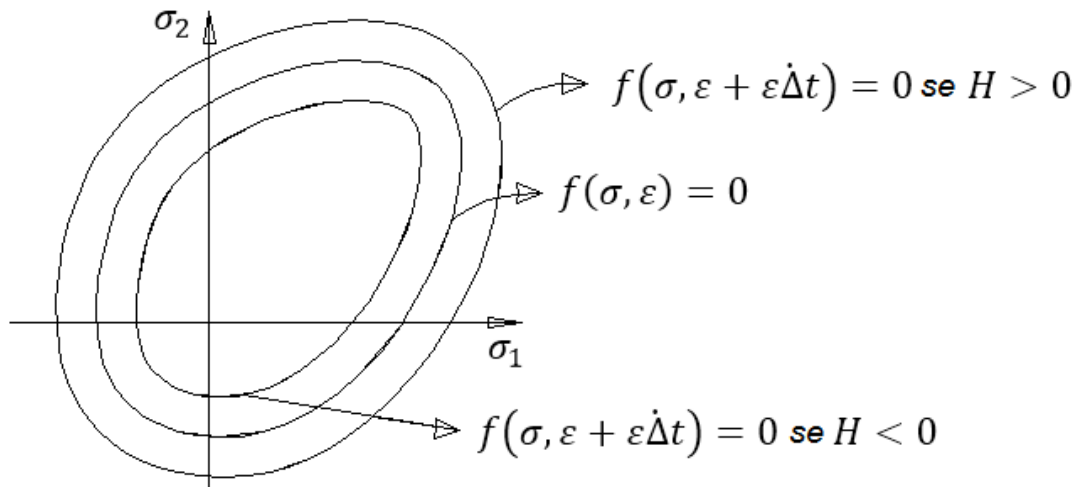


Figura 9: Superfície de escoamento no espaço de tensões.

A plastificação do material é comandada principalmente pelas tensões deviatóricas, sendo que para tornar possível a determinação da superfície de expansão de escoamento para um material com endurecimento isotrópico é necessário o cálculo de tais tensões através de critérios de escoamento.

É adotado neste trabalho o Critério de Von Mises como critério de escoamento. Conforme descrito em Lubliner (2006), a condição de escoamento determinada por este critério no tempo $t+\Delta t$ é dada por:

$${}^{t+\Delta t}f^{vm} = \frac{1}{2} {}^{t+\Delta t}S_{ij} \cdot {}^{t+\Delta t}S_{ij} - \frac{1}{3} ({}^{t+\Delta t}\sigma_{esc})^2 = 0 \quad (83)$$

Em que ${}^{t+\Delta t}\sigma_{esc}$ é a tensão de escoamento no tempo $t+\Delta t$ e ${}^{t+\Delta t}S_{ij}$ é o tensor de tensões deviatórias no tempo $t+\Delta t$.

Outro modo de representar o critério de Von Mises é através das tensões principais. A superfície de escoamento pode então ser escrita como:

$$f(\sigma; \xi) = \sqrt{J_2} - k(\xi) \quad (84)$$

Onde J_2 é o segundo invariante do tensor deviatório de tensões S_{ij} e $k(\xi)$ é a Tensão de Escoamento Cisalhante. Desta forma, pode-se representar a superfície de escoamento como sendo:

$$\sigma_{esc}^2 = \frac{1}{6}((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2) \quad (85)$$

Ou,

$$\sigma_{esc}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2) \quad (86)$$

De forma gráfica, o critério de Von Mises é definido como mostra a Figura 10:

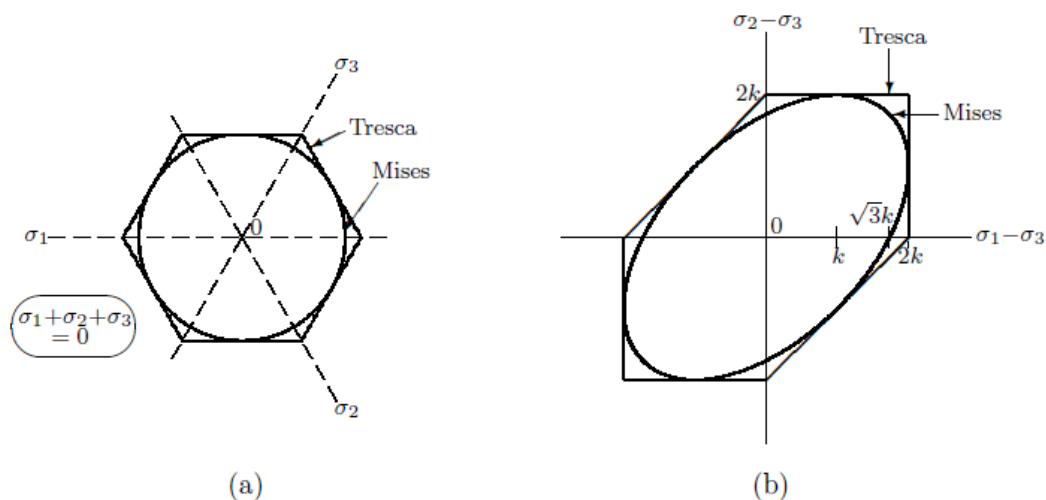


Figura 10: Projeções das superfícies de escoamento de Tresca e Von Mises: a) Plano- π ; b) Plano $\sigma_1-\sigma_3$ | $\sigma_2-\sigma_3$.

Fonte: Lubliner (2006).

No qual k representa a Máxima Tensão de Escoamento Cisalhante.

2.8.3 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Em análises com presença de efeitos de não-linearidade física e geométrica há a necessidade de se realizar determinados procedimentos de

integração numérica através de métodos incrementais iterativos de forma a se alcançar os limites da curva *Tensão x Deformação*. Um dos métodos mais empregados para este tipo de solução é o Método de Newton-Rapshon.

Como já discutido, a equação básica a ser resolvida em análises não-lineares, no tempo $t+\Delta t$, é:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (87)$$

Esta é a equação de equilíbrio do elemento finito a ser resolvida, onde ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ são as cargas nodais aplicadas e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$ é o vetor de forças nodais equivalente às tensões no elemento.

Uma vez que o vetor de forças nodais ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$ depende não-linearmente dos deslocamentos nodais, é necessário a iteração da solução da equação de equilíbrio do elemento. Assume-se que o processo de iteração de Newton-Raphson é independente das deformações e é resolvido da seguinte maneira, para $i=1,2,3,\dots$

$$\Delta\mathbf{R}^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (88)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}\Delta\mathbf{U}^i = \Delta\mathbf{R}^{(i-1)} \quad (89)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta\mathbf{U}^{(i)} \quad (90)$$

Com,

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(0)} = {}^t\mathbf{U} ; {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(0)} = {}^t\mathbf{F} \quad (91)$$

Em que $\Delta\mathbf{U}^i$ são os incrementos de deslocamentos e ${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i-1)}$ é a matriz de rigidez tangente. Estas equações são obtidas pela linearização da resposta do sistema de elementos finitos nas condições do tempo $t+\Delta t$ e iteração $(i-1)$. Em cada iteração é calculado um novo vetor de carga no qual um incremento de deformação é aplicado, sendo o processo contínuo até o momento em que os

incrementos de carga e deformações sejam suficientemente pequeno. Este processo é demonstrado pela Figura 11.

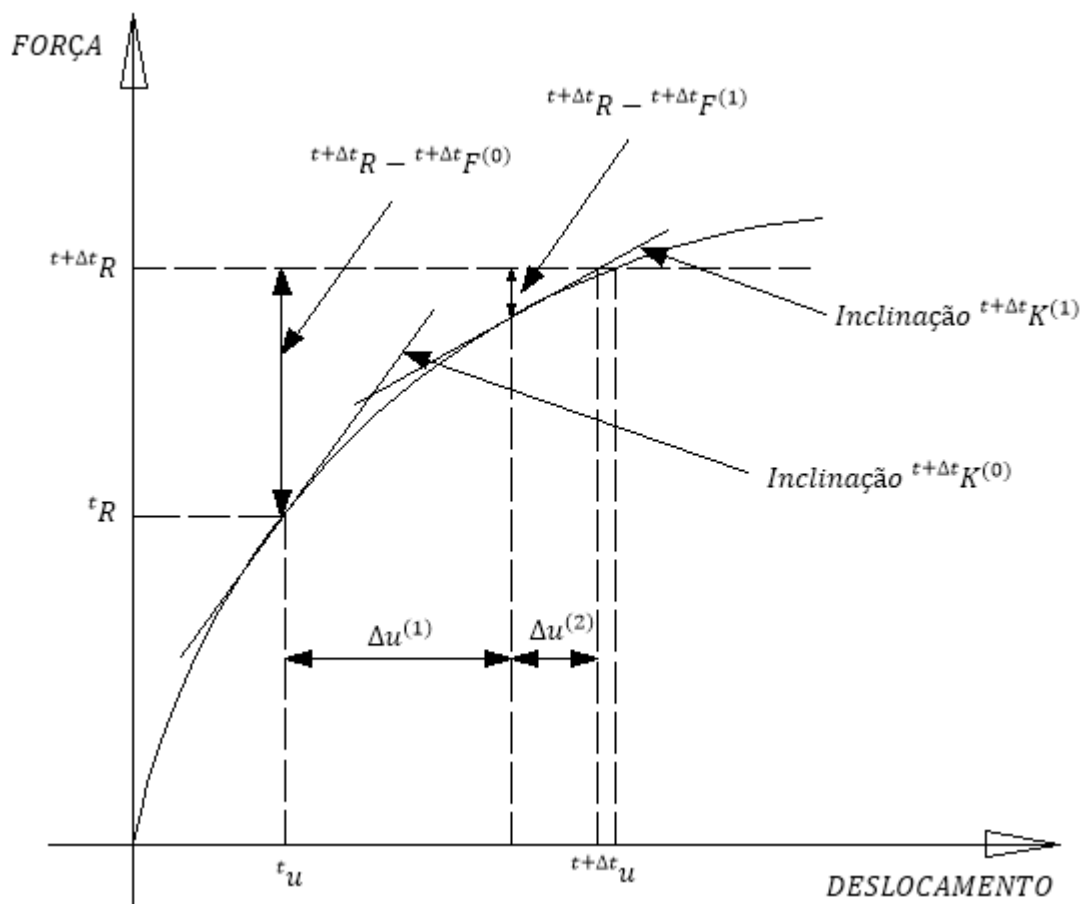


Figura 11: Ilustração do processo de iteração de Newton-Raphson em uma solução genérica de um sistema de um único grau de liberdade.

Uma característica deste processo é que a cada incremento de carga uma nova matriz de rigidez tangente é calculada. Logo entende-se que quanto maior o número de passos de carga, mais preciso tende a ser o resultado encontrado. O processo iterativo é finalizado quando um determinado critério de convergência é alcançado.

Alguns problemas em análises não-lineares podem ser encontrados e bons métodos iterativos devem ser capazes de superar estes pontos. Exemplos de casos típicos são os chamados *Snap-Through* e *Snap-Back*, problema de salto dinâmico sob controle de carga e sob controle de deslocamento respectivamente, conforme Figuras 12 e 13.

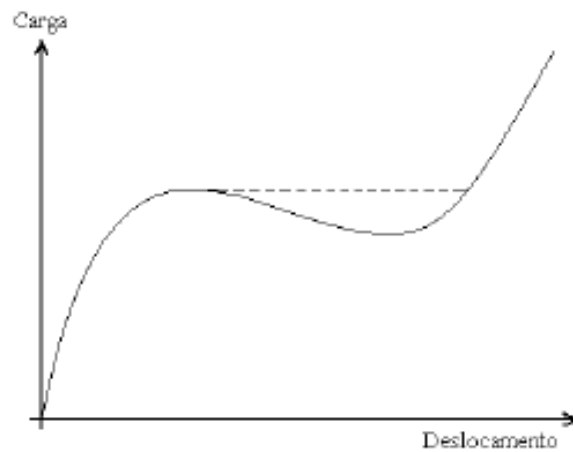


Figura 12: Efeito Snap-Through.

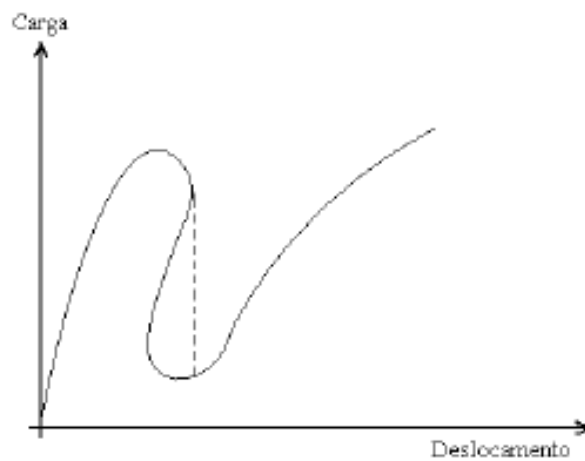


Figura 13: Efeito Snap-Back.

Algumas desvantagens são encontradas neste método, mas a principal é o fato da necessidade de armazenamento da matriz de rigidez calculada em cada iteração, o que demanda mais tempo computacional.

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADO

Até o momento foi realizada uma breve revisão teórica a respeito do Método dos Elementos Finitos Generalizado, plasticidade, mecânica do contínuo, método de Newton-Rapshon para integração numérica e efeitos de não-linearidade material. Nesta seção será discutido o Método dos Elementos Finitos Generalizado em uma revisão teórica e em seguida em uma proposição de implementação do método.

O Método dos Elementos Finitos Generalizado (MEFG) é baseado no Método da Partição da Unidade, proposto por Melenk e Babuska (1996). É um método de Galerkin que tem por objetivo o enriquecimento do elemento finito através da construção de um subespaço de funções aproximadoras de solução pré-estabelecida. Este subespaço tem por objetivo melhorar os resultados locais e globais, quando comparado com o MEF convencional.

Busca-se a aplicação do MEFG em problemas onde resultados locais são difíceis de serem capturados através do MEF. A seguir serão apresentados os conceitos básicos desta técnica e algumas aplicações desta teoria.

3.1 MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE

O Método da Partição da Unidade (MPU) pode ser entendido como uma generalização do Método dos Elementos Finitos convencional usado para gerar um campo de aproximação com propriedades e comportamentos de conformidade e regularidade qualquer, como definido por Melenk e Babuska, (1996). O Método é definido como apresentado a seguir (Melenk e Babuska, 1996).

A Partição da Unidade é definida como: Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $\{\Omega_i\}$ uma cobertura aberta de Ω satisfazendo uma condição de sobreposição em cada ponto:

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \Omega \quad \text{contagem}\{i|x \in \Omega_i\} \leq M \quad (92)$$

A Figura 14 (Duarte, Babuska e Oden, 2000) representa as subcoberturas Ω_i de forma que $\Omega \subset \{\Omega_i\}$, ressaltando que o conceito de cobertura também é aplicado nos métodos sem malha.

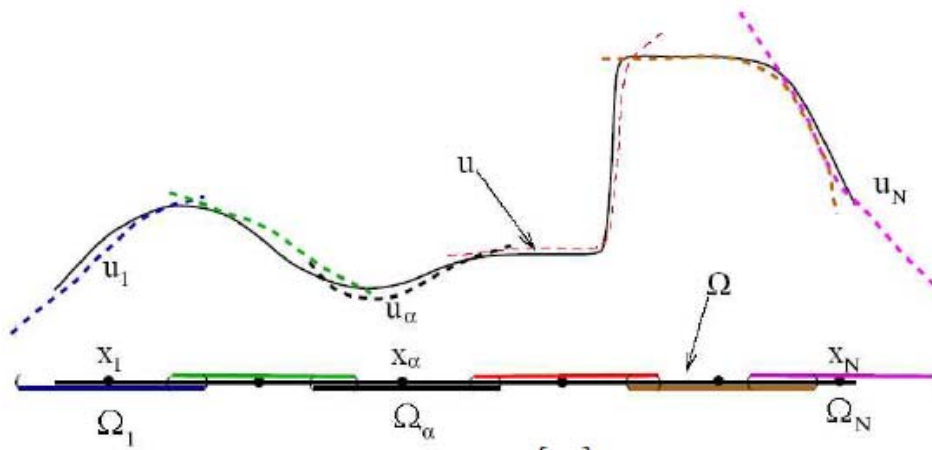


Figura 14: Cobertura $\{\Omega_i\}$ do domínio Ω .

Fonte: Duarte, Babuska e Oden (2000).

O parâmetro M controla o número de subcoberturas que podem se sobrepor em um mesmo ponto dentro do domínio Ω . Seja $\{\varphi_i\}$ uma partição da unidade Lipschitziana subordinada à cobertura $\{\Omega_i\}$ satisfazendo as seguintes condições:

$$\text{sup}(\varphi_i) \subset \text{fechament}(\Omega_i) \quad \forall i \quad (93)$$

Esta equação mostra que as funções Lipschitzianas devem ser não nulas apenas dentro da subcobertura às quais estão vinculadas.

$$\sum_i \varphi_i \equiv 1 \text{ em } \Omega \quad (94)$$

Esta representação indica que a soma das funções φ_i pertencentes à PU deve resultar na unidade. Esta é a característica fundamental do método da partição da unidade.

$$\|\varphi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_\infty \ ; \ C_\infty = cte. \quad (95)$$

$$\|\nabla \varphi_i\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C_g}{diam\Omega_i} \ ; \ C_g = cte. \quad (96)$$

As equações 95 e 96, respectivamente, mostram que as funções que compõem a PU (Funções φ_i) devem ser limitadas, bem como possuir derivadas limitadas.

Logo $\{\varphi_i\}$ é chamada de Partição da Unidade $PU(M, C_\infty, C_g)$ subordinada à cobertura $\{\Omega_i\}$, sendo seus subdomínios chamados de subcoberturas. A partição da unidade possui grau $m \in \mathbb{N}_0$ se $\{\varphi_i\} \subset C^m(\mathbb{R}^n)$. Diversas são as formas de se obter as funções φ_i , pois quaisquer funções que, quando somadas, resultem na unidade no domínio e sejam conformes às condições propostas nas equações (95) e (96), satisfazem os pré-requisitos para formar uma partição da unidade. Uma forma simples de representar estas funções é utilizar as funções de forma convencionais do MEF.

Com a definição da Partição da Unidade, é então possível apresentar a definição do espaço de aproximação do MPU (Melenk e Babuska, 1996). Pode-se obter um conjunto de funções $S_i \subset H^1(\Omega_i \cap \Omega)$ sobre cada subdomínio $\Omega_i \cap \Omega$ de tal forma que os deslocamentos u possam ser bem aproximados neste subdomínio, então o espaço global S utilizado para aproximar u em Ω é obtido da seguinte forma:

$$S = \sum_i \varphi_i S_i = \left\{ \sum_i \varphi_i S_i^j \mid S_i^j \in S_i \right\} \subset H^1(\Omega) \quad (97)$$

Ou seja, a solução aproximada para deslocamentos em qualquer ponto x do domínio é dada por:

$$u_h(x) = \sum_i \sum_{S_i^j \in S_i} \varphi_i S_i^j(x) a_{ij} \quad (98)$$

No qual a_{ij} são os graus de liberdade de campo. Demonstra-se ainda (Melenk e Babuska, 1996) que, se em cada subdomínio $\Omega_i \cap \Omega$, u pode ser aproximado por $s_i^j \in S_i$ tal que:

$$\|u - s_i^j\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_1(i) \quad (99)$$

$$\|\nabla(u - s_i^j)\|_{L^2(\Omega_i \cap \Omega)} \leq \varepsilon_2(i) \quad (100)$$

Então, a solução aproximada u_h descrita na Equação (98) satisfaz:

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{M_s C_\infty} \left(\sum_i \varepsilon_1^2(i) \right)^{1/2} \quad (101)$$

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2M_s} \left(\sum_i \left(\frac{C_G}{\text{diam}\Omega_i} \right)^2 \varepsilon_1^2(i) + C_\infty^2 \varepsilon_2^2(i) \right)^{1/2} \quad (102)$$

Conforme Arndt (2009), o exposto acima: “Estabelece que o espaço global S herda as propriedades de aproximação dos espaços locais S_i , ou seja, u pode ser aproximado em Ω pelas funções de S tão bem quanto pode ser aproximado em Ω_i pelo espaço local S_i ”.

Verifica-se então que o MPU permite a construção de um subespaço de aproximação de forma desejada sem prejudicar o espaço e propriedades inicial, herdando as propriedades de aproximação local com garantia de conformidade.

De forma prática, no MEFM a cobertura $\{\Omega_i\}$ representa a malha de elementos finitos, sendo que as subcoberturas Ω_i representam subdomínios de Ω formados pela união de elementos que compartilham o mesmo nó sobre tais subcoberturas, como mostra a Figura 15.

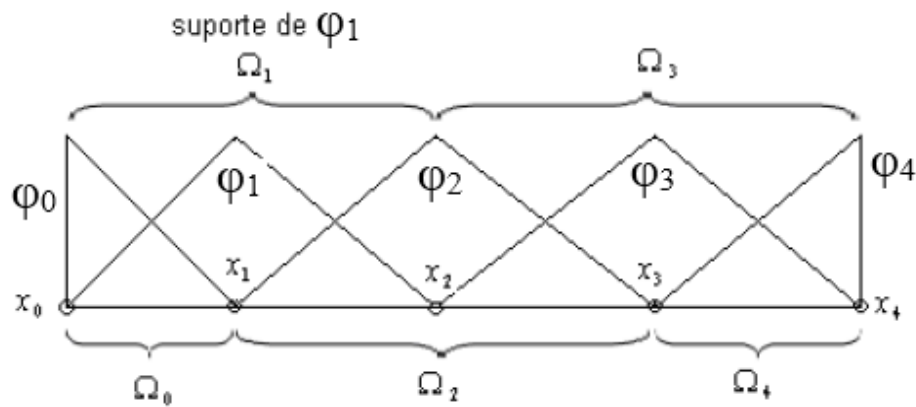


Figura 15: Subdomínio e funções PU para uma malha de elemento unidimensionais do MEFG.

Fonte: Adaptado de Arndt (2009).

Sendo que as funções φ_i podem ser as próprias funções interpoladoras do MEF convencional. Na próxima sessão serão apresentadas as funções de enriquecimento propostas no presente trabalho.

3.2 FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO

As funções de enriquecimento do MEFG devem ser escolhidas de forma a representar um comportamento desejado da solução. Os casos analisados neste trabalho têm por objetivo a validação da implementação do método empregado (MEFG). Logo foram selecionadas funções que representem um comportamento de amplificação de deslocamentos e tensões no domínio do elemento mestre. Funções trigonométricas ou exponenciais podem ser adotadas pois possuem continuidade C^∞ . Ainda, diferentes funções podem ser adotadas para diferentes comportamentos desejados da solução, desde que um mesmo pacote de funções seja implementado em conjunto para todos o domínio Ω do elemento, a cada nível de enriquecimento. Em outras palavras, a cada refino realizado na formulação enriquecida, o mesmo número de funções deve ser aplicado no enriquecimento para todo o domínio, mantendo assim um equilíbrio no número de graus de liberdade do sistema.

O MEFG pode escrito na forma de um método enriquecido da seguinte forma, no domínio $\Omega_e(-1;1)$ de um elemento mestre:

$$u_h^e(\xi) = u_{MEF}^e + u_{ENRIQ}^e \quad (103)$$

$$u_h^e(\xi) = u_{MEF}^e + u_{ENRIQ}^e \quad (104)$$

$$u_{ENRIQ}^e(\xi) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\xi) \left[\sum_{j=1}^{n_i} (\gamma_{1j}(\xi) a_{1j} + \gamma_{2j}(\xi) b_{1j}) \right]; j = 1, 2, \dots, n_e \quad (105)$$

Na qual φ_i são as partições da unidade do MEF convencional, γ_{1j} são as funções de enriquecimento adotadas para enriquecimento dos deslocamentos axiais, γ_{2j} são as funções de enriquecimento adotadas para enriquecimento dos deslocamentos transversais, n_e é o número de níveis de enriquecimento e a_{1j} e b_{1j} são os graus de liberdade de campo associados a cada nível de enriquecimento. Para o enriquecimento dos graus de liberdade de translação axial do elemento na direção X_1 , foram adotadas as seguintes funções, associadas às PU h_1 , h_7 e h_{13} , *respectivamente*:

$$\gamma_{1j}(\xi) = \begin{cases} \left[\begin{aligned} & \text{sen} \left[\beta_j \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) \right] + \cos \left[\beta_j \left(\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) \right] - 1 \\ & \text{sen} [\beta_j (1 - \xi^2)] + \cos [\beta_j (1 - \xi^2)] - 1 \\ & \text{sen} \left[\beta_j \left(-\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) \right] + \cos \left[\beta_j \left(-\frac{\xi}{2} + \frac{\xi^2}{2} \right) \right] - 1 \end{aligned} \right] & ; \left\{ \beta_j = \frac{\pi}{2} \right. \end{cases} \quad (106)$$

Nas Figuras 16 a 18, as funções $h_i(MEF)$ representam as funções nodais de interpolação do MEF para deslocamento axial. As funções γ_i representam as funções de enriquecimento relacionadas aos seus respectivos graus de liberdade conforme descritas na Equação (106), sendo $h_i(MEFG)$ a função enriquecida resultante do processo de enriquecimento do MEFG, como descrito na Equação (103).

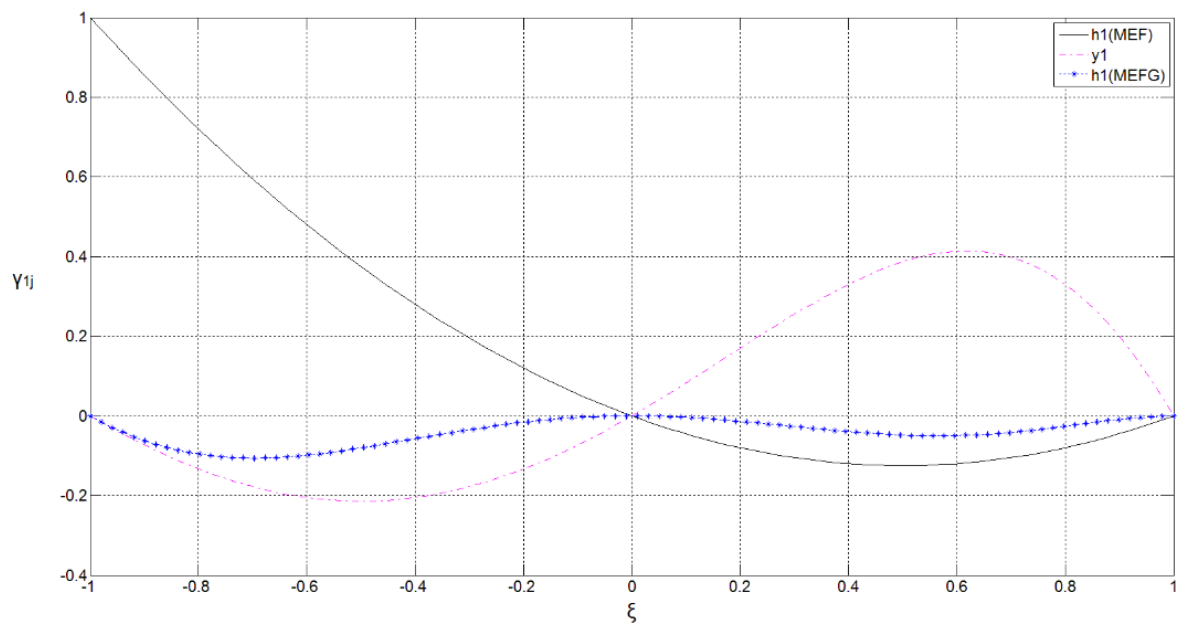


Figura 16: Configuração da partição da unidade do MEF convencional (h_i MEF), função de enriquecimento (y_i) e função enriquecida (h_i MEFG) para o nó inicial ($\xi = -1$) na direção do Eixo X_1 .

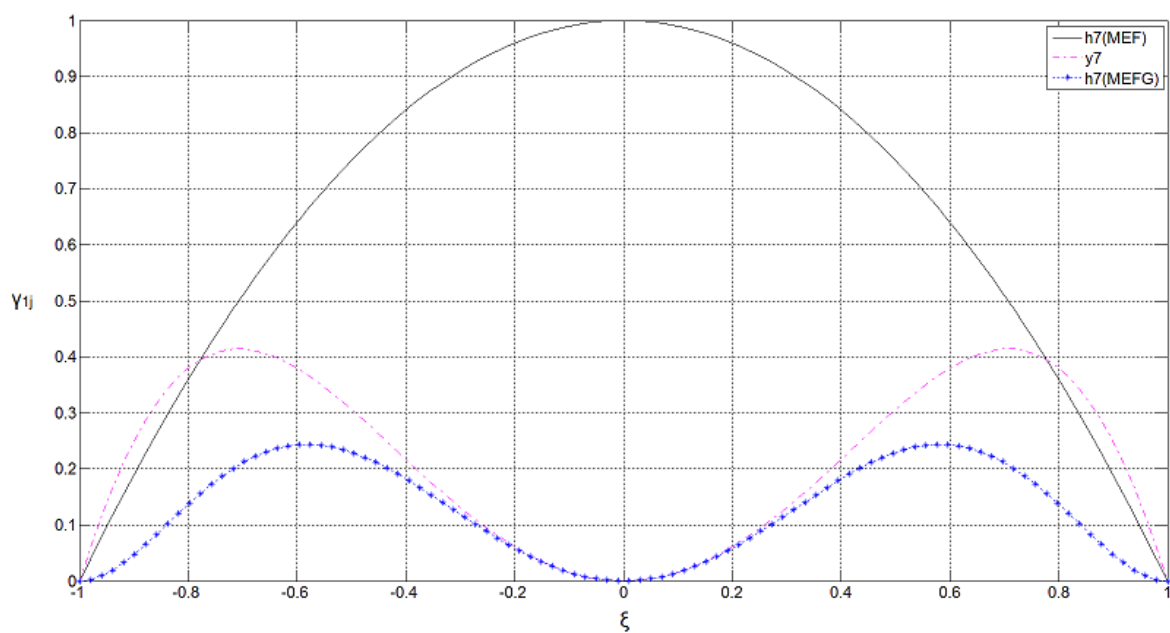


Figura 17: Configuração da partição da unidade do MEF convencional (h_i MEF), função de enriquecimento (y_i) e função enriquecida (h_i MEFG) para o nó intermediário ($\xi = 0$) na direção do Eixo X_1 .

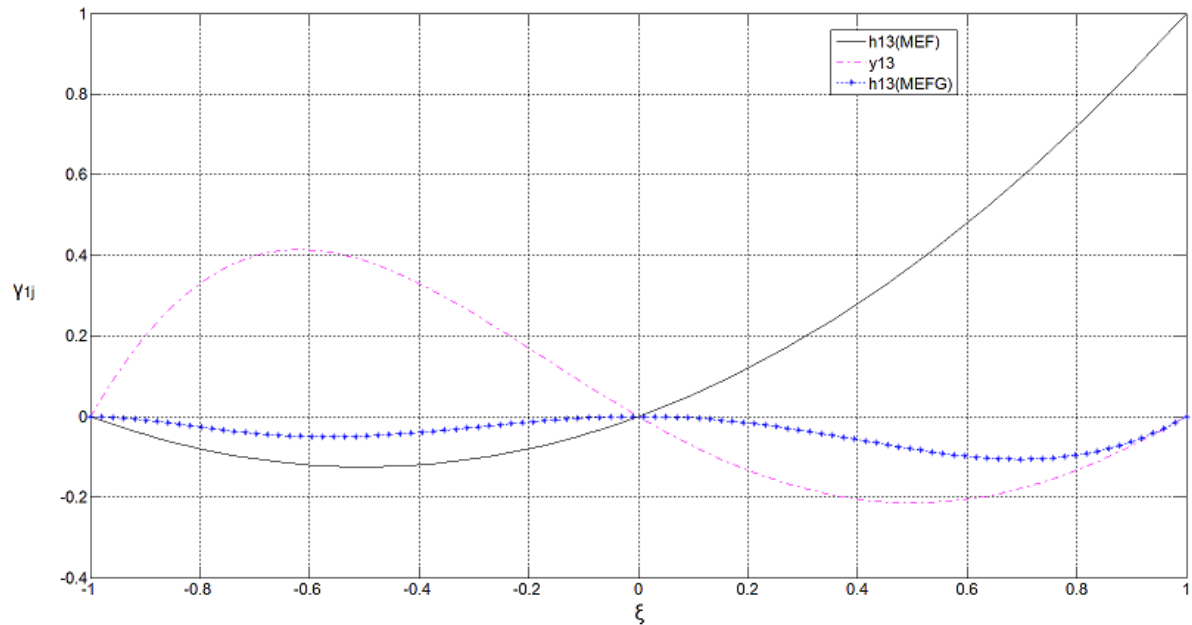


Figura 18: Configuração da partição da unidade do MEF convencional (h_i MEF), função de enriquecimento (γ_i) e função enriquecida (h_i MEFG) para o nó final ($\xi=1$) na direção do Eixo X_1 .

Nota-se que as funções enriquecidas possuem valor nulo em todos os nós. Tal condição é pré-requisito para o correto enriquecimento da partição da unidade pois as funções impostas não podem afetar os valores nodais e as condições de contorno do problema.

Para o enriquecimento dos graus de liberdade de deslocamento do elemento nas direções X_2 e X_3 , foram adotadas as seguintes funções, adaptadas dos trabalhos de Arndt (2009) e Torii (2012), associadas às PU h_2 e h_3 , h_8 e h_9 , h_{14} e h_{15} , respectivamente:

$$\gamma_{2j}(\xi) = \begin{cases} \cos\left[\frac{\beta_j}{2}(\xi+1)\right] - 1 \\ \cos(\beta_j\xi) - 1 \\ \cos\left[\frac{\beta_j}{2}(\xi-1)\right] - 1 \end{cases} ; \left\{ \beta_j = \frac{\pi}{2} \right. \quad (107)$$

Novamente abaixo são mostradas as funções interpoladoras do MEF convencional, as funções de enriquecimento e as funções aproximadoras resultantes são mostradas nas Figuras 19 a 21.

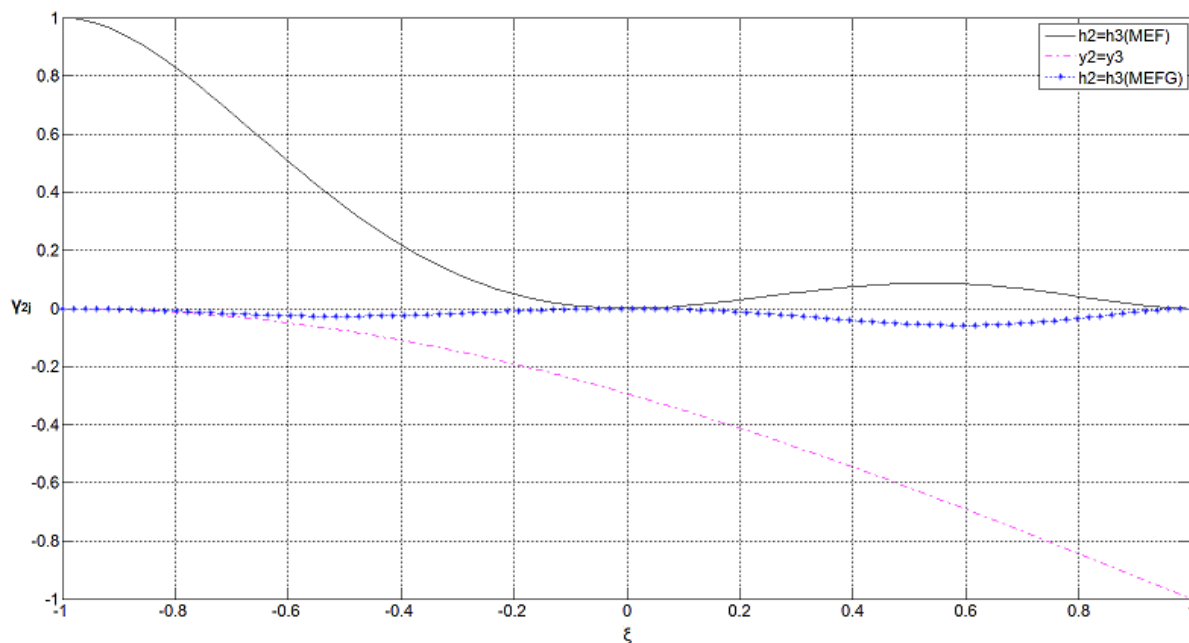


Figura 19: Configuração da partição da unidade do MEF convencional (h_i MEF), função de enriquecimento (y_i) e função enriquecida (h_i MEFG) para o nó inicial ($\xi = -1$) na direção dos Eixos X_2 e X_3 .

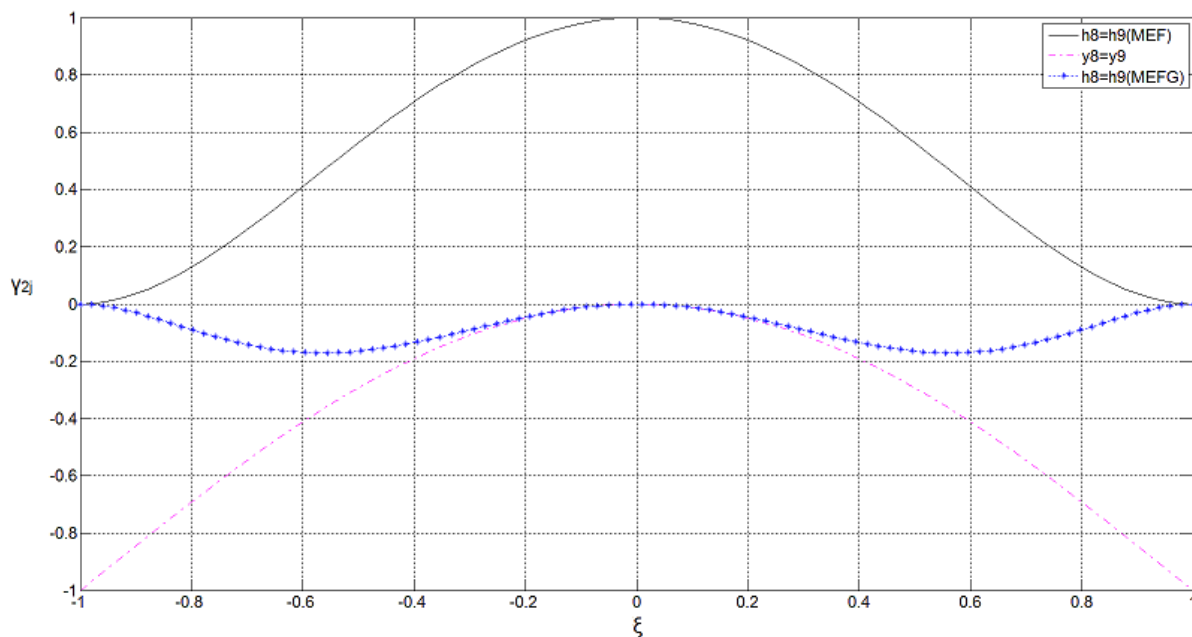


Figura 20: Configuração da partição da unidade do MEF convencional (h_i MEF), função de enriquecimento (y_i) e função enriquecida (h_i MEFG) para o nó intermediário ($\xi = 0$) na direção dos Eixos X_2 e X_3 .

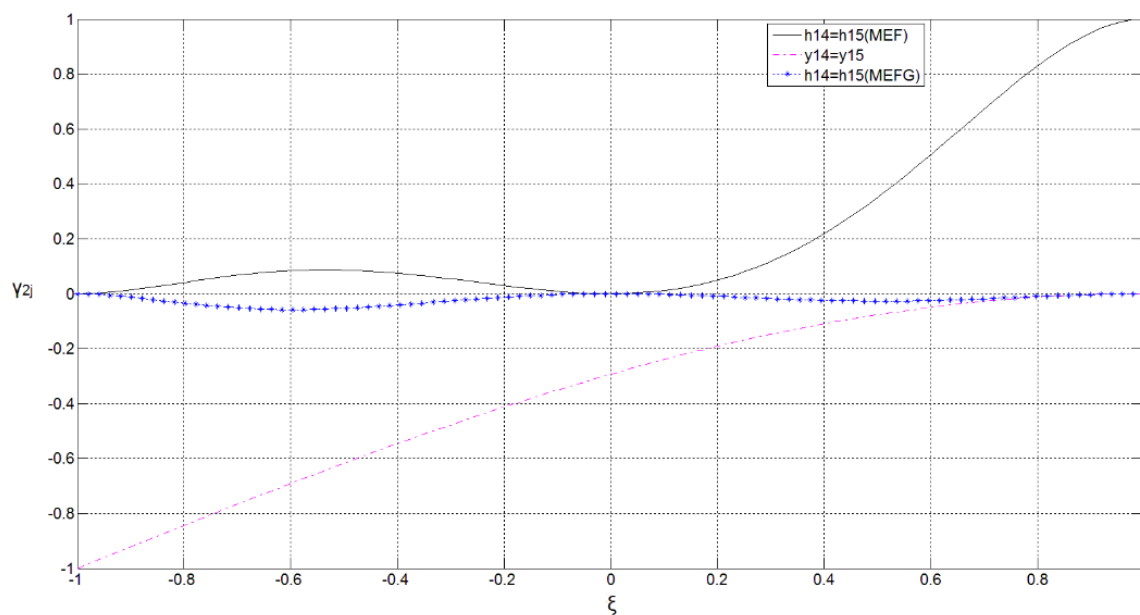


Figura 21: Configuração da partição da unidade do MEF convencional (h_i MEF), função de enriquecimento (y_i) e função enriquecida (h_i MEFG) para o nó final ($\xi=1$) na direção dos Eixos X_2 e X_3 .

A Figura 22 apresenta as funções aproximadas, conforme descrito na Equação (105), para deslocamentos nas três direções e 1 nível de enriquecimento, aplicados aos graus de liberdade de barra e viga.

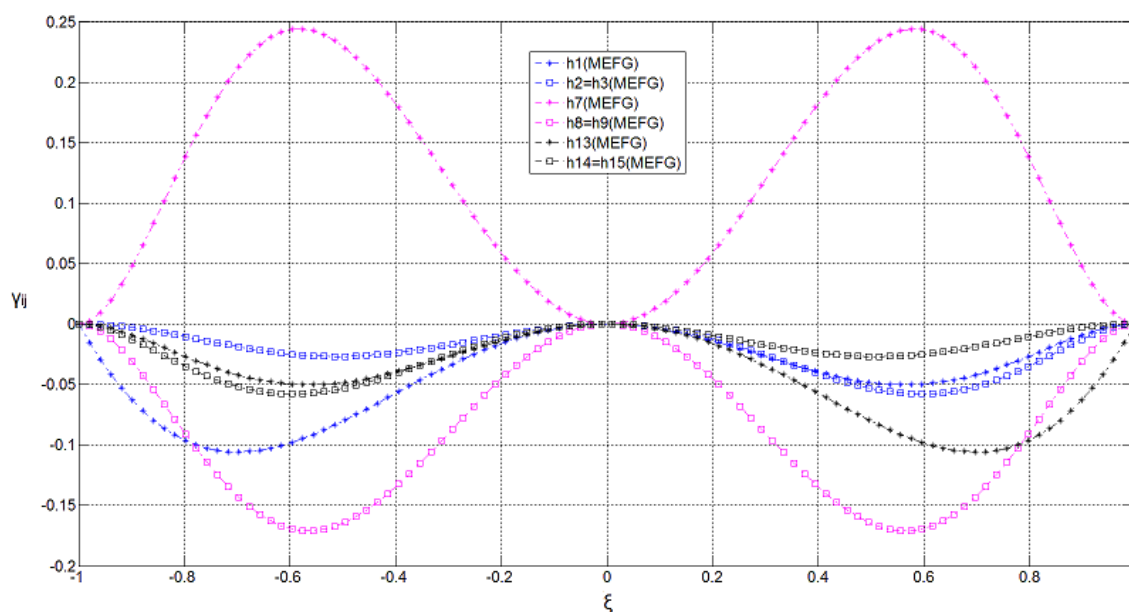


Figura 22: Funções enriquecidas para os graus de liberdade, para barra e viga, de deslocamentos nas três direções.

Estas funções serão utilizadas na composição do estudo de enriquecimento do modelo de Viga de Euler-Bernoulli para estudo de dutos. Não serão enriquecidos os graus de liberdade de rotação.

3.3 MONTAGEM DAS FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO

Um elemento finito qualquer pode receber funções de enriquecimento tantas quanto forem necessárias. Estas funções estarão associadas a graus de liberdade de campo no elemento, ou seja, não estarão associadas diretamente a um nó mas sim a uma região do elemento. No presente trabalho, o elemento finito é composto por 3 graus de liberdade de translação axial e 3 graus de liberdade de rotação por nó, totalizando 18 graus de liberdade nodais por elemento.

Para cada nível de enriquecimento, este trabalho adotará 9 funções de aproximação por elemento, aumentando o número total de graus de liberdade global de 18 para 27, conforme mostra esquematicamente a Figura 23.

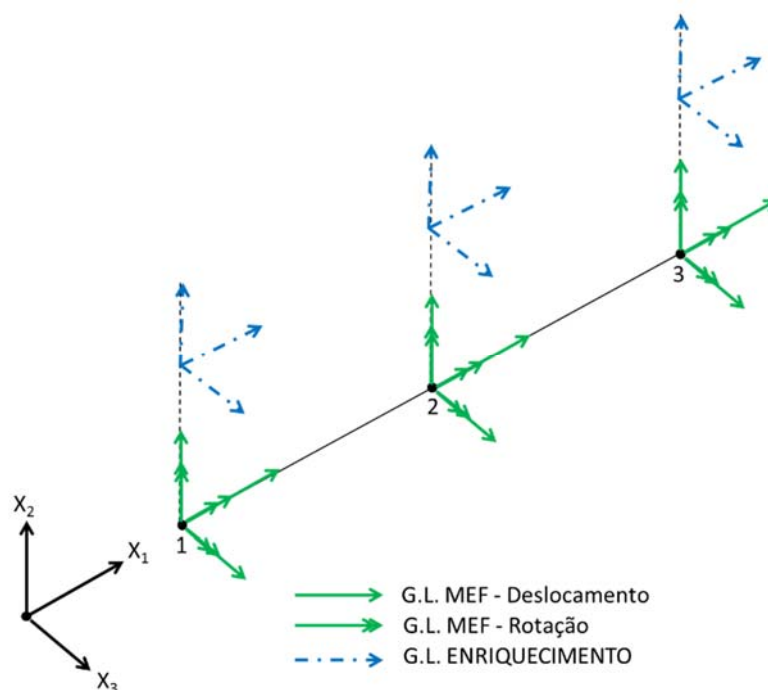


Figura 23: Graus de Liberdade Nodais acrescidos de 1 (um) nível de enriquecimento.

Importante notar que o grau de liberdade de enriquecimento é associado ao campo do elemento e não ao nó. Ou seja, a cada nível de enriquecimento são acrescentadas 9 funções de enriquecimento associadas aos graus de liberdade de campo, porém, são esquematicamente posicionadas conforme indicado na Figura 23 e nas equações 108 e 109.

Para cada acréscimo do nível de enriquecimento um novo conjunto de nove funções deve ser aplicado, nas mesmas posições (nas matrizes) e forma que o nível anterior. Para um terceiro nível de enriquecimento, mais um conjunto de nove funções deverão ser acrescentadas, mantendo toda a estrutura anterior sem alteração, e assim sucessivamente até o nível desejado.

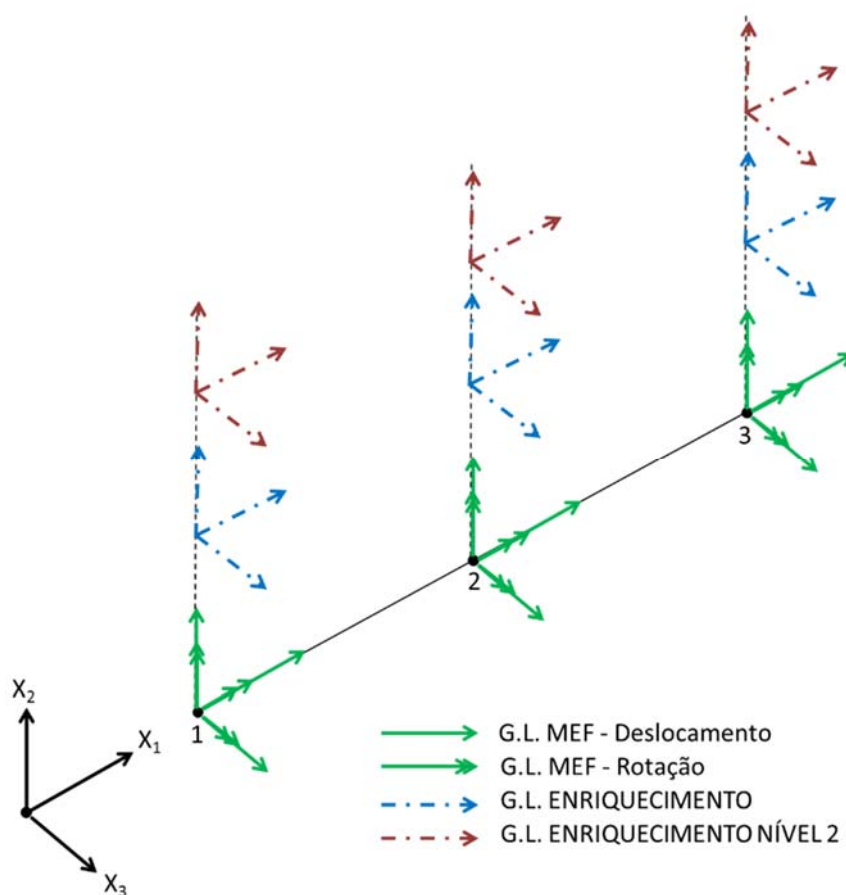


Figura 24: Graus de Liberdade Nodais acrescidos de 2 (dois) nível de enriquecimento.

Conforme descrito pela equação (103), as parcelas referentes aos graus de liberdade enriquecidos devem ser acrescentadas às parcelas referente aos graus

de liberdade nodais. Deve-se prestar atenção no momento da montagem da matriz de funções interpoladoras de forma que a matriz de rigidez global não perca suas características. O posicionamento das parcelas na matriz segue a seguinte regra, na forma matricial:

$$\begin{aligned}
 \left[{}^t_0 H_h \right] = & \begin{bmatrix}
 {}^t_0 h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_1^e & 0 & 0 & {}^t_0 h_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_7^e & 0 & 0 \\
 0 & {}^t_0 h_2 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_6 & 0 & {}^t_0 h_2^e & 0 & 0 & {}^t_0 h_8 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_{12} & 0 & {}^t_0 h_8^e & 0 \\
 0 & 0 & {}^t_0 h_3 & 0 & {}^t_0 h_5 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_3^e & 0 & 0 & {}^t_0 h_9 & 0 & {}^t_0 h_{11} & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_9^e \\
 \\
 {}^t_0 h_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_{13}^e & 0 & 0 & & & & & & & & & \\
 0 & {}^t_0 h_{14} & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_{18} & 0 & {}^t_0 h_{14}^e & 0 & & & & & & & & & \\
 0 & 0 & {}^t_0 h_{15} & 0 & {}^t_0 h_{17} & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_{15}^e & & & & & & & & &
 \end{bmatrix} \quad (108)
 \end{aligned}$$

No qual as parcelas indicadas com o índice superior direito “e” representam os graus de liberdade enriquecidos. As funções associadas a cada nível de enriquecimento são adicionadas posteriormente a cada grupo de graus de liberdade por nó, ou seja, a cada seis funções interpoladoras nodais são adicionadas 3 funções de enriquecimento associadas aos graus de liberdade de campo do elemento. Para cada incremento do nível de enriquecimento, um novo conjunto de funções deve ser adicionado da mesma forma, mantendo o formato e funções anteriores sem alteração.

$$\left[{}^t_0 H_{h^{2:n}} \right] = \begin{bmatrix}
 {}^t_0 h_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_1^e & 0 & 0 & {}^t_0 h_1^{e2:n} & 0 & 0 & \dots \\
 0 & {}^t_0 h_2 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_6 & 0 & {}^t_0 h_2^e & 0 & 0 & {}^t_0 h_2^{e2:n} & 0 & \dots \\
 0 & 0 & {}^t_0 h_3 & 0 & {}^t_0 h_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & {}^t_0 h_3^e & 0 & 0 & {}^t_0 h_3^{e2:n} \dots
 \end{bmatrix} \quad (109)$$

Onde n representa o nível de enriquecimento desejado para o problema.

O próximo capítulo apresenta e discute as aplicações do MEFG em análises de barra e viga buscando resultados de deslocamentos e tensões ao longo do elemento. Em algumas situações será levada em consideração a não-linearidade material.

4. APLICAÇÕES

A literatura possui diversos trabalhos voltados ao estudo do Método dos Elementos Finitos Generalizado com aplicação no estudo de elementos com funções lineares de interpolação e em análises com linearidade material e comportamento dinâmico como, por exemplo: Arndt (2009) e Torii (2012). Os estudos encontrados estão voltados para problemas da mecânica da fratura (Duarte e Kim 2008), vibração livre ou problemas de não-linearidade física com variação no tempo. O presente trabalho estuda o MEEG aplicado a elemento de pórtico com funções interpoladoras de elevado grau, para estudo de dutos, em análises lineares e não-lineares.

Sendo assim, algumas aplicações foram efetuadas para efeito de validação e comprovação da eficiência do método. Primeiramente foram realizados estudos de tração (Linear e Não-Linear). Na sequência, foi aplicado o método em vigas de Euler-Bernoulli engastada e bi apoiada sob flexão (Linear e Não-Linear), respectivamente, com seção circular vazada para todos os casos. Todas as análises foram realizadas no plano 2D.

Em todas as aplicações a mesma geometria do duto foi considerada, tal que o diâmetro externo do duto é 100mm, diâmetro interno é 90mm e comprimento L igual a 1000mm. O Coeficiente de Poisson utilizado é igual a 0,25. Os dados do material estão descritos na sessão seguinte. A diferença entre as análises está na magnitude da carga aplicada, como mostrado na Tabela 2.

Tabela 2: Forças aplicadas nas análises de tração e flexão, linear e não-linear.

FORÇA F (kN)			
TRAÇÃO		FLEXÃO	
LINEAR	NÃO-LINEAR	LINEAR	NÃO-LINEAR
1	900	-1	-100

Nas análises de barra sob tração serão aplicadas forças axiais de 1kN e 900kN para efeitos de linearidade e não-linearidade material, respectivamente. No caso de vigas sob flexão serão aplicadas forças de 1kN e 100kN para efeitos

de linearidade e não-linearidade material, respectivamente. A Figura 25 esboça as aplicações realizadas.

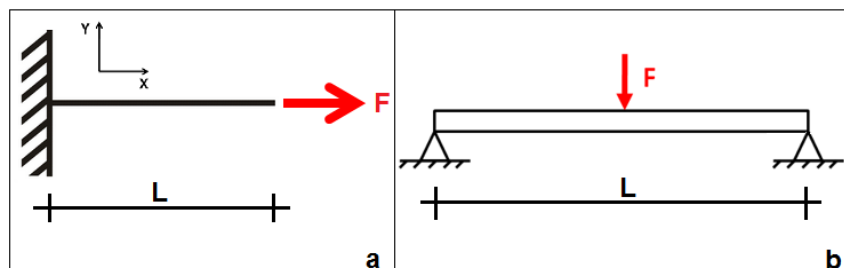


Figura 25: Casos analisados em condição linear e não-linear; a) Tração em viga engastada; b) Flexão em viga bi apoiada.

A Figura 25.a mostra esquematicamente a barra com carregamento axial de tração e a Figura 25.b mostra a viga sob carregamento de flexão central e vertical. O tópico a seguir define a relação constitutiva adotada no presente trabalho que leva consideração de não-linearidade material.

4.1 RELAÇÃO CONSTITUTIVA

Diversas são as relações constitutivas possíveis para serem utilizadas na aproximação via Método dos Elementos Finitos. Elas se subdividem em Linear Elástica, Hiperelástica, Perfeitamente Plástica e Elastoplástica, sendo esta subdivida em bi linear ou multilinear.

O presente trabalho prevê ocorrências de não-linearidade material nos casos analisados. Para tanto, adota-se então o uso da relação constitutiva Elastoplástica Multilinear. A Figura 26 apresenta o Diagrama Tensão x Deformação utilizado em todos os casos onde a não-linearidade material é levada em consideração.

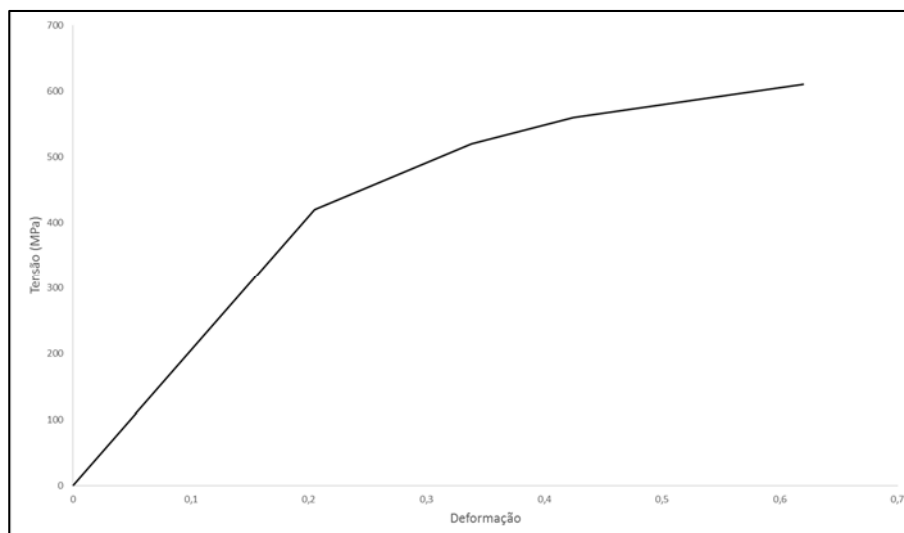


Figura 26: Diagrama Tensão x Deformação.

A Tabela 3 apresenta os valores utilizados para tensão e deformação utilizados para gerar o Diagrama Tensão x Deformação.

Tabela 3: Valores para Diagrama Tensão x Deformação.

ϵ	σ (MPa)
0	0
0,2049	420
0,3384	520
0,4250	560
0,6200	610

Será utilizado o Método de Newton-Rapshon para o cálculo iterativo da formulação e como critério de escoamento da estrutura será considerado o Critério de Von Mises.

Para os problemas em que se considera apenas linearidade material, ou seja, aplicação linear elástica, utilizou-se o módulo de elasticidade do aço $E=205GPa$ e coeficiente de Poisson $\nu=0,25$. Considerou-se material isotrópico e as propriedades geométricas das vigas e barras analisadas nestas situações são as mesmas descritas na sessão anterior.

4.2 ANÁLISE NÃO-LINEAR DE BARRA SOB TRAÇÃO

Os valores apresentados na Figura 27 e na Tabela 4, para a análise não-linear de barra sob tração, são comparados com os resultados obtidos através do software comercial ANSYS 13.0, utilizando elemento quadrático BEAM188, com 256 elementos e 100 passos de carga, sendo considerado este o valor referência para deslocamentos. São mostradas as diferenças absolutas do deslocamento encontrado para o último passo de carga em relação ao valor de referência (ANSYS), no eixo das ordenadas, e o número de graus de liberdade no eixo das abcissas.

Foram realizadas análises com 10 e 1000 passos de carga (MEF_Xpc ou MEFG_Xpc) e com 7 e 30 pontos de integração de Gauss para MEFG (MEFG_Xpc_7pg e MEFG_Xpc_30pg, respectivamente), tal que X=10 e 100.

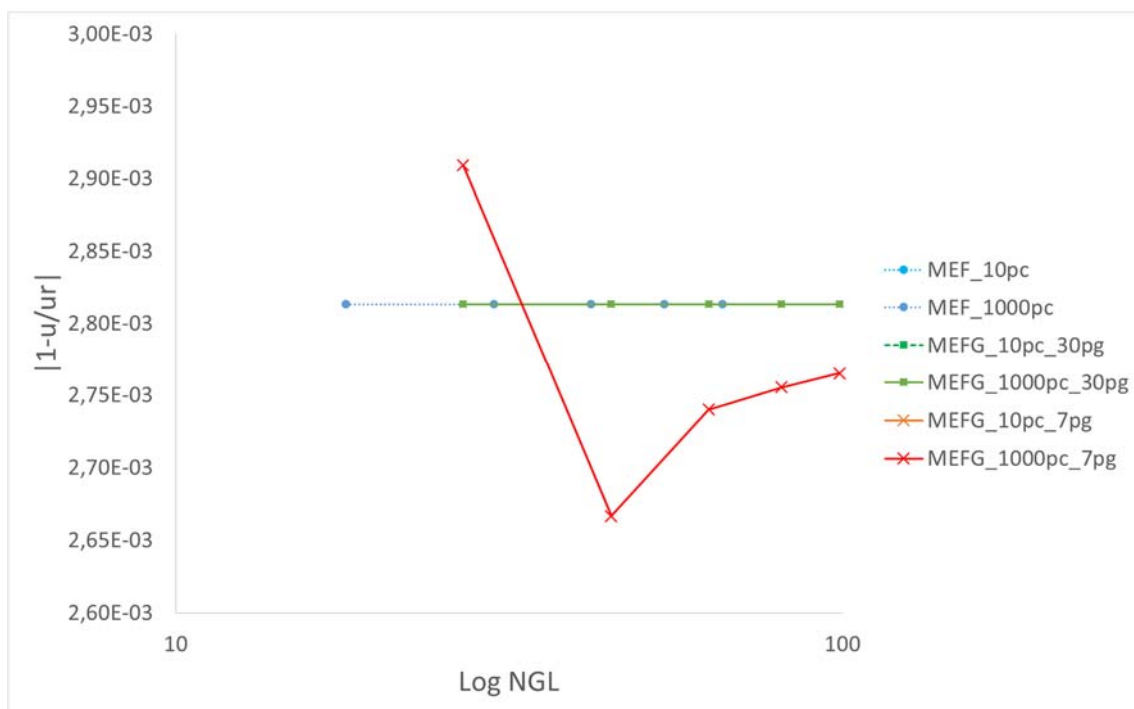


Figura 27: Deslocamento axial x Log NGL para barra sob tração em análise não-linear.

Tabela 4: Erro relativo do deslocamento axial com o valor analítico em função do número de elementos.

ANÁLISE	NÚMERO DE ELEMENTOS				
	1	2	3	4	5
	ERRO $ 1-u/u_r $				
MEF_10pc	4,0001E-03	4,0001E-03	4,0001E-03	4,0001E-03	4,0001E-03
MEFG_10pc_7pg	3,6747E-03	3,7012E-03	3,8042E-03	3,8570E-03	3,8887E-03
MEFG_10pc_30pg	4,0003E-03	4,0003E-03	4,0003E-03	4,0003E-03	4,0003E-03
MEF_1000pc	2,8134E-03	2,8134E-03	2,8134E-03	2,8134E-03	2,8134E-03
MEFG_1000pc_7pg	2,9089E-03	2,6666E-03	2,7398E-03	2,7551E-03	2,7649E-03
MEFG_1000pc_30pg	2,8132E-03	2,8132E-03	2,8132E-03	2,8132E-03	2,8132E-03

Observa-se em detalhe pela Tabela 4 que o MEFG (30 pontos de Gauss) possui um erro menor que o MEF em relação ao valor de referência. A análise via método dos elementos finitos generalizado utilizando 7 pontos de integração de Gauss possui o menor erro, no entanto nota-se instabilidade na solução. Uma provável causa para este erro pode se dar em função das condições de contorno impostas ao problema, pois estas podem gerar instabilidades no resultado quando analisado na seção transversal do duto na região deformada, após a plastificação, com poucos pontos de integração numérica. Nota-se ainda convergência nos resultados tanto com o refino da malha quanto com o aumento do número de passos de carga.

4.3 ANÁLISE LINEAR DE VIGA

A análise linear de viga biapoiada sob flexão, quando comparada com o resultado analítico, com o qual obteve-se um deslocamento vertical no centro da viga de -0,0644mm, mostra novamente que o resultado obtido com MEFG utilizando 30 pontos de Gauss é melhor que para os demais casos. Os valores apresentados na Figura 28 são para deslocamento vertical no centro da viga.

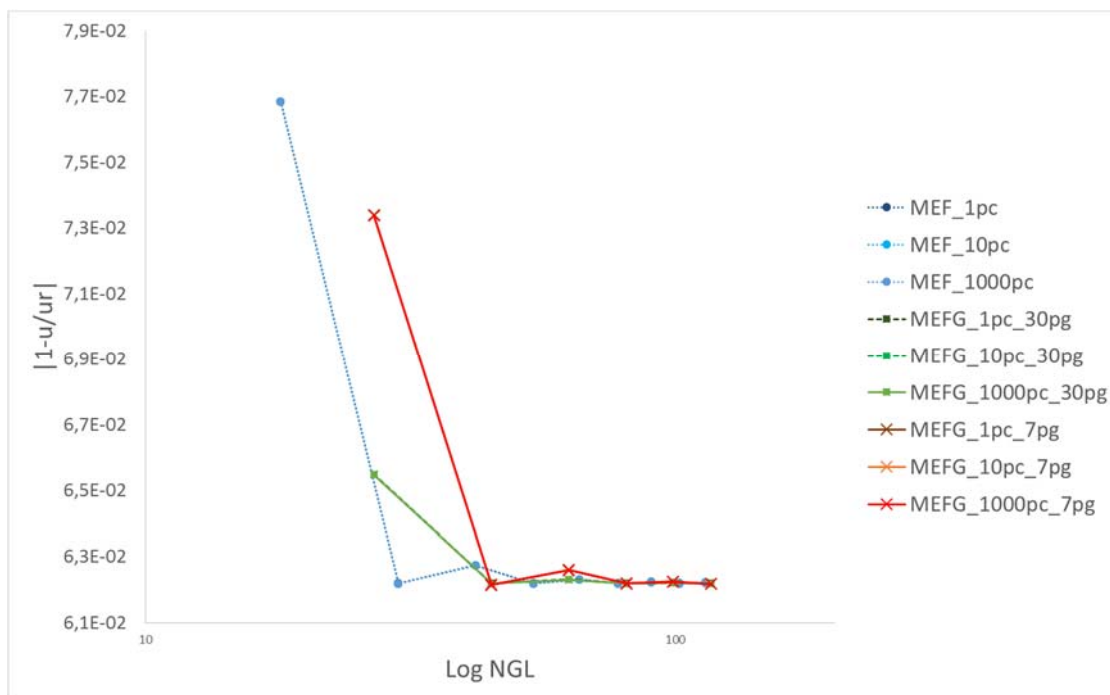


Figura 28: Deslocamento vertical x Log NGL para viga sob flexão em análise linear.

Pelo fato de se tratar de análise linear, observa-se uma convergência muito rápida em todas as soluções, tornando difícil a análise de efetividade do método enriquecido. A Tabela 5 mostra os valores relativos à Figura 28.

Tabela 5: Erro relativo do deslocamento vertical com o valor analítico em função do número de elementos no caos de análise linear de viga.

ANÁLISE	NÚMERO DE ELEMENTOS				
	1	2	3	4	5
	ERRO $ 1-u/u_r $				
MEF_1pc	7,69E-02	6,22E-02	6,27E-02	6,22E-02	6,23E-02
MEFG_1pc_7pg	7,34E-02	6,22E-02	6,26E-02	6,22E-02	6,23E-02
MEFG_1pc_30pg	6,55E-02	6,22E-02	6,23E-02	6,22E-02	6,22E-02
MEF_10pc	7,68E-02	6,22E-02	6,27E-02	6,22E-02	6,23E-02
MEFG_10pc_7pg	7,34E-02	6,21E-02	6,26E-02	6,22E-02	6,22E-02
MEFG_10pc_30pg	6,55E-02	6,22E-02	6,23E-02	6,22E-02	6,22E-02
MEF_1000pc	7,68E-02	6,22E-02	6,27E-02	6,22E-02	6,23E-02
MEFG_1000pc_7pg	7,34E-02	6,21E-02	6,26E-02	6,22E-02	6,22E-02
MEFG_1000pc_30pg	6,55E-02	6,22E-02	6,23E-02	6,22E-02	6,22E-02

A análise linear, neste caso, foi também realizada com 10 e 1000 passos de carga para verificar a interferência do número de graus de liberdade na resposta do problema e se observa que não há alteração no resultado em relação à solução com 1 passo de carga.

Ainda, pode-se observar que para um mesmo número de graus de liberdade a resposta dada pelo MEFG possui menor erro em relação à resposta pelo MEF. Novamente é possível notar a convergência com o refino da malha de elementos finitos e com o aumento do número de passos de carga aplicados na análise, onde a variação ou flutuação no resultado por MEFG é menor que por MEF.

A Figura 29 e a Tabela 6 indicam a força obtida em relação à referência versus o deslocamento obtido em relação à sua referência. Através delas é possível verificar que a convergência no resultado para deslocamentos é muito semelhante entre as análises, sendo ligeiramente maior em MEFG que para MEF convencional. Os resultados foram comparados para mesmo número de graus de liberdade.

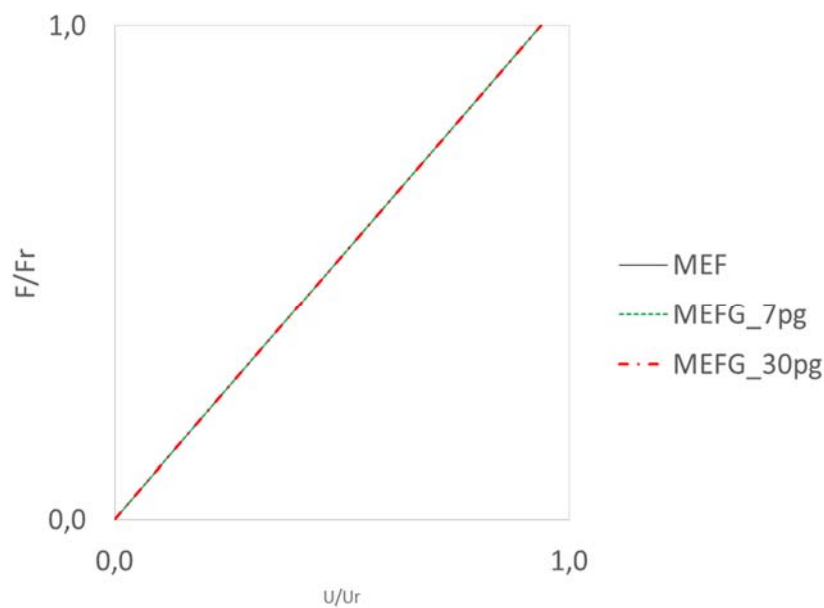


Figura 29: Deslocamento vertical na viga biapoada em análise linear considerando 1000 passos de carga, para 45 graus de liberdade.

Para o último passo de carga é possível notar a diferença entre os resultados para as soluções do MEF convencional e do MEFG com 7 e 30 pontos de Gauss, conforme apresentado na Tabela 6.

Tabela 6: Deslocamento vertical na viga biapoadada, para último passo de carga, em análise linear considerando 1000 passos de carga, para 45 graus de liberdade.

Passo	F/Fr	MEF	MEFG_7pg	MEFG_30pg
1000	1	93,7%	93,8%	93,8%

Apesar de ser ter obtido uma diferença muito pequena entre os resultados conforme apresentado, deve-se levar em consideração a simplicidade das análises sobre o grau de complexidade das formulações. Além disso, pode-se notar o fato de que a adição de funções de enriquecimento na formulação do MEF convencional não causou problemas para a obtenção dos resultados, pelo contrário, houve relativa melhora quando analisado os valores dos erros obtidos com o MEF e MEFG.

4.4 ANÁLISE NÃO-LINEAR DE VIGA

Os resultados para análise não-linear de viga sob flexão são apresentados na Figura 30. Os valores mostrados são os erros relativos dos deslocamentos obtidos no último passo de carga em relação ao valor de referência (ANSYS).

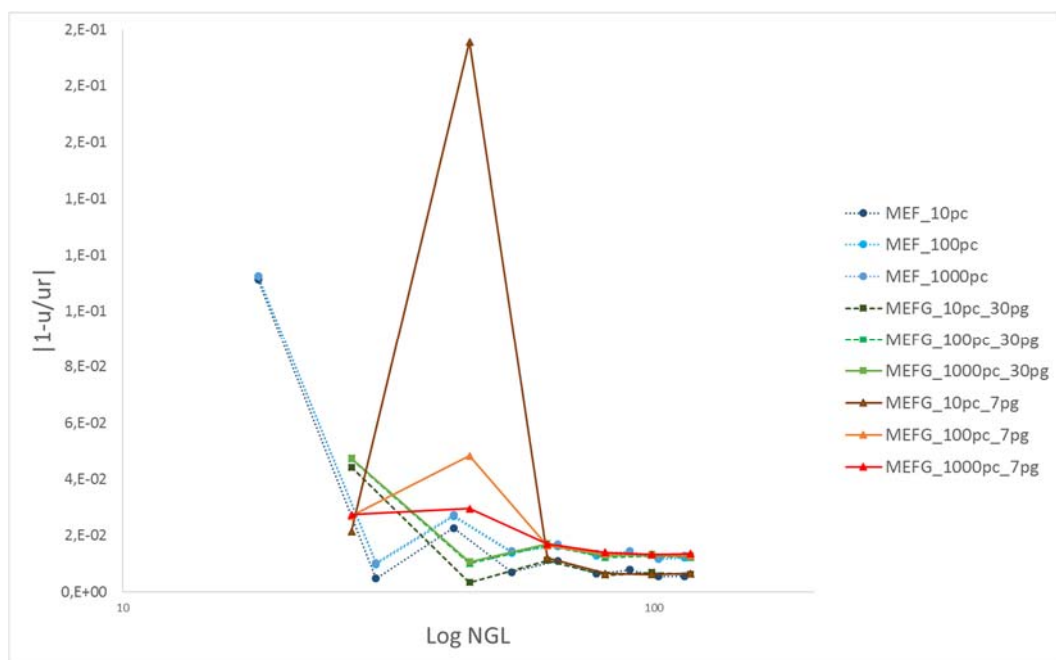


Figura 30: Deslocamento vertical x Log NGL para viga sob flexão em análise não-linear.

A Tabela 7 mostra os resultados referentes à Figura 30.

Tabela 7: Erro relativo do deslocamento vertical com o valor analítico em função do número de elementos no caso de análise não-linear de viga.

ANÁLISE	NÚMERO DE ELEMENTOS						
	1	2	3	4	5	6	7
	ERRO $ 1-u/u_r $						
MEF_10pc	1,112E-01	4,722E-03	2,270E-02	6,971E-03	1,103E-02	6,365E-03	7,790E-03
MEFG_10pc_30pg	4,422E-02	3,362E-03	1,112E-02	5,925E-03	6,929E-03	6,220E-03	6,319E-03
MEFG_10pc_7pg	2,145E-02	1,957E-01	1,204E-02	6,544E-03	6,113E-03	6,575E-03	6,187E-03
MEF_100pc	1,124E-01	9,828E-03	2,679E-02	1,391E-02	1,621E-02	1,278E-02	1,396E-02
MEFG_100pc_30pg	4,722E-02	1,003E-02	1,647E-02	1,227E-02	1,282E-02	1,223E-02	1,203E-02
MEFG_100pc_7pg	2,692E-02	4,823E-02	1,632E-02	1,355E-02	1,300E-02	1,279E-02	1,305E-02
MEF_1000pc	1,125E-01	1,034E-02	2,727E-02	1,443E-02	1,680E-02	1,353E-02	1,444E-02
MEFG_1000pc_30pg	4,747E-02	1,064E-02	1,704E-02	1,275E-02	1,344E-02	1,283E-02	1,263E-02
MEFG_1000pc_7pg	2,742E-02	2,948E-02	1,696E-02	1,396E-02	1,331E-02	1,352E-02	1,347E-02

Nota-se novamente o menor erro encontrado através do MEFG em relação ao MEF, para resultados onde o número de graus de liberdade é o mesmo, bem como maior estabilidade do MEFG com o refino da solução. Observa-se na Figura 30 que, no segundo ponto da curva de MEFG com 7 pontos de integração de Gauss, houve um aumento significativo do erro na solução seguido de uma redução deste erro e convergência da solução. Este pico de erro pode-se dar ao fato de se ter um baixo número de pontos de integração no domínio sabendo que o método generalizado requer mais pontos em relação ao método convencional.

Pela Figura 31 e Tabela 8 é possível verificar que a convergência no resultado para deslocamentos é muito semelhante entre as análises, sendo que o resultado para MEFG se aproxima ligeiramente mais da referência que o MEF convencional. Os resultados foram comparados para mesmo número de graus de liberdade.

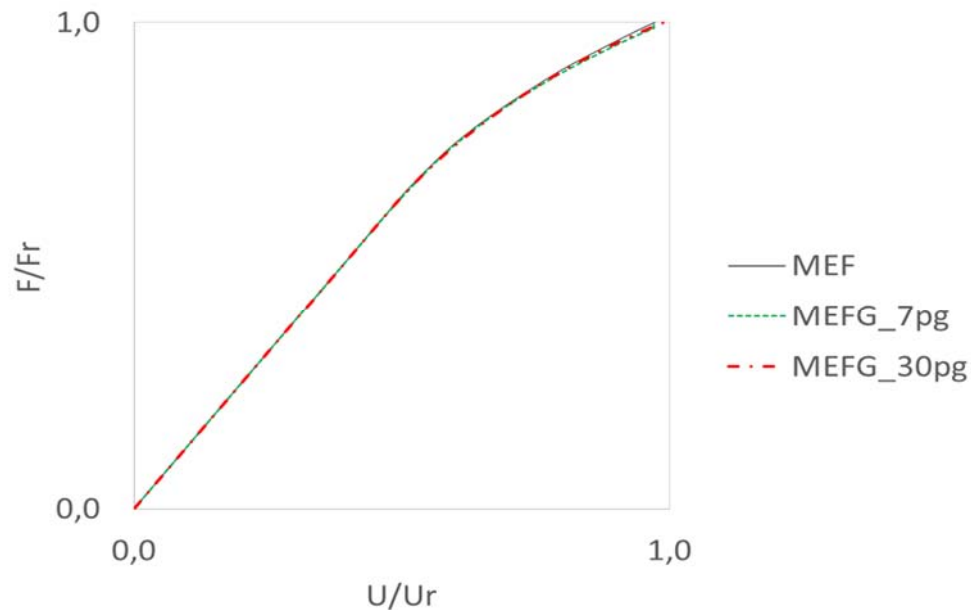


Figura 31: Deslocamento vertical na viga biapoada em análise não-linear considerando 1000 passos de carga, para 45 graus de liberdade.

Tomando como referência o último passo de carga se pode notar que o resultado utilizando elemento generalizado com 30 pontos de Gauss de integração é mais preciso quando comparado com as demais soluções.

Tabela 8: Deslocamento vertical na viga biapoada, para último passo de carga, em análise não-linear considerando 1000 passos de carga, para 45 graus de liberdade.

Passo	F/Fr	MEF	MEFG_7pg	MEFG_30pg
1000	1	97,27%	97,05%	98,94%

Todas as simulações anteriores levaram em consideração o enriquecimento de todo o domínio do elemento, no entanto, deve-se avaliar a possibilidade de enriquecimento de apenas parte do domínio de tal forma que seja possível a redução de tempo computacional sem que haja deterioração ou perda de efetividade nos resultados. A seguir esta análise, denominada neste trabalho de Análise Seletiva, será apresentada e discutida.

4.5 ANÁLISE SELETIVA

Quando se fala em Método dos Elementos Finitos Generalizado logo se pensa em avaliar um determinado comportamento prescrito e conhecido em um elemento finito convencional, de tal forma que este comportamento local seja melhor representado.

Até o momento todas as análises realizadas levaram em consideração a implementação das funções de enriquecimento para todo o domínio do problema. O objetivo desta seção é avaliar como o modelo se comporta quando uma determinada seletividade no domínio é tomada para que a implementação seja realizada. Em outras palavras, avaliar o efeito do enriquecimento em apenas uma parte do domínio ao invés do enriquecimento de todo o domínio proposto, como exemplificado através da Figura 32. Os nós e a linha na cor preta representam o domínio do elemento sendo os nós e linha na cor vermelha o subdomínio enriquecido.

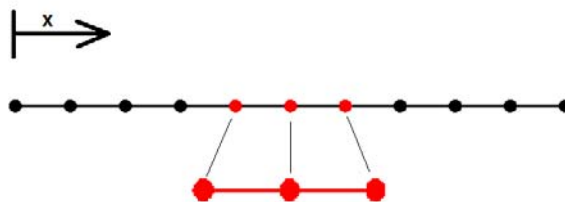


Figura 32: Seletividade de um subdomínio para enriquecimento.

A seletividade ou, entenda-se neste trabalho como o enriquecimento de apenas parte do domínio, evita o aumento excessivo do número de graus de liberdade na formulação e por consequência evita o aumento do tempo de processamento computacional demandado. Esta avaliação se torna importante quando efeitos locais estão sendo avaliados, pois tais efeitos são difíceis de serem obtidos apenas com a formulação do MEF convencional, como no caso de problemas de trincas.

Foram utilizados os mesmos modelos das seções anteriores para a avaliação realizada nesta seção, sendo que apenas análises de viga foram realizadas. Não foram executadas avaliações nos casos de barra (carregamento

de tração) pelo fato de serem modelos muito simplificados e por não terem apresentado resultado significativo como exposto nos capítulos anteriores.

As primeiras análises foram feitas para carregamento na viga biapoada, no regime linear, considerando 1, 10 e 1000 passos de carga. Os resultados foram comparados com o resultado analítico. Os gráficos são apresentados com o erro absoluto do deslocamento obtido em relação ao deslocamento analítico no eixo das ordenadas e o número de graus de liberdade no eixo das abcissas. Os resultados comparam as soluções obtidas com enriquecimento de todo o domínio (MEFG_Xpg_NS) e com apenas um elemento enriquecido (MEFG_Xpg_S) e são apresentados nas Figuras 33 à 35.

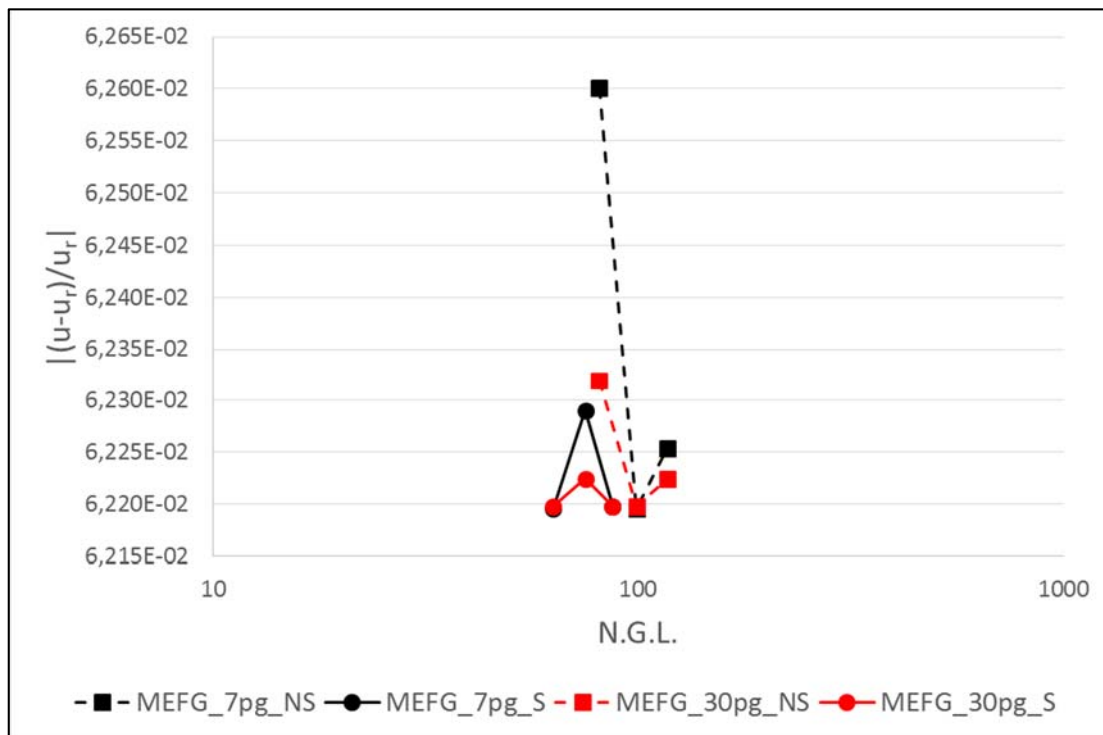


Figura 33: Erro absoluto de deslocamentos em relação ao número de graus de liberdade para análise linear para 1 passo de carga.

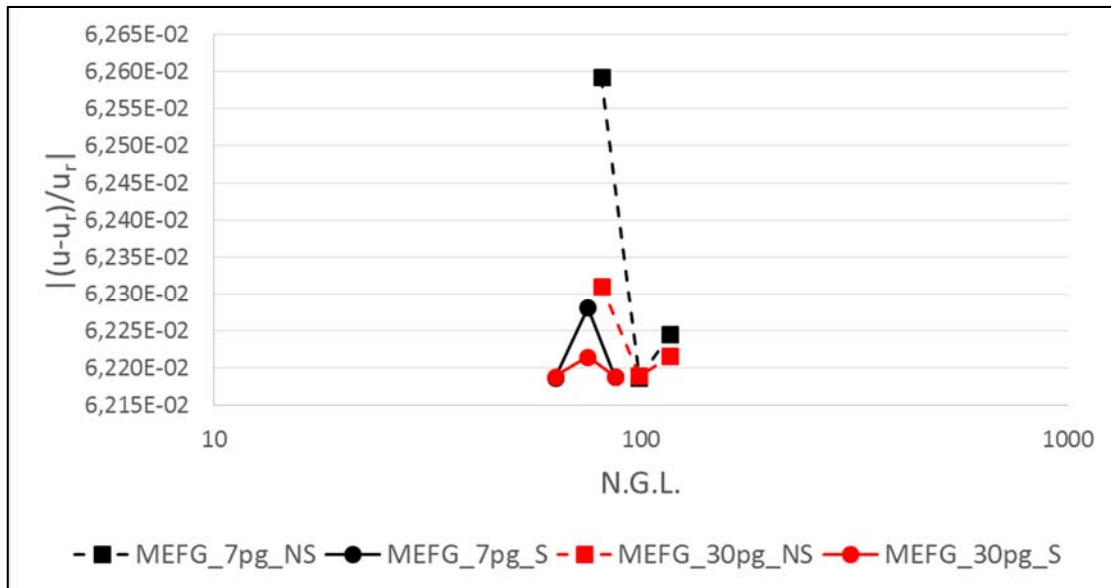


Figura 34: Erro absoluto de deslocamentos em relação ao número de graus de liberdade para análise linear para 10 passos de carga.

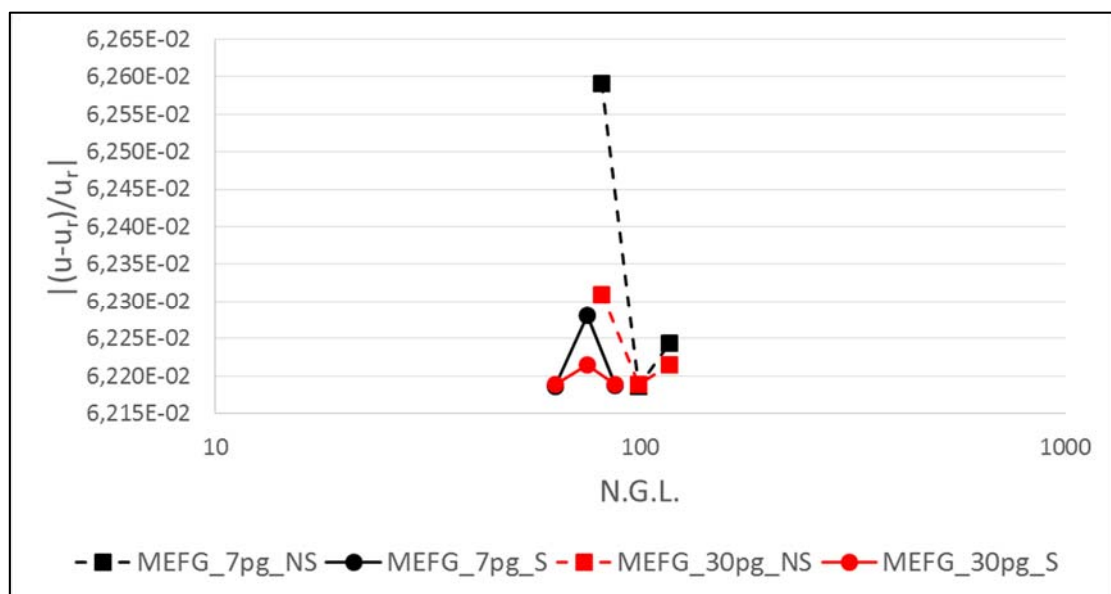


Figura 35: Erro absoluto de deslocamentos em relação ao número de graus de liberdade para análise linear para 1000 passos de carga.

Observa-se que o resultado é o mesmo para 1 passo de carga ou para 1000 passos de carga, como previsto para uma análise linear. Os resultados obtidos com MEFG utilizando 7 e 30 pontos de Gauss são muito parecidos. Ainda, não notou-se diferença significativa entre os resultados com seletividade (MEFG_Xpg_S) e sem seletividade (MEFG_Xpg_NS), logo um ganho computacional pode ser obtido realizando-se a seletividade do elemento (i.e.

subdomínio) ao invés do uso do enriquecimento de todo o domínio do problema. Isto representa menor número de graus de liberdade com mesma precisão.

A mesma situação de seletividade foi simulada para análise com consideração de não-linearidade material para 10, 100 e 1000 passos de carga e os resultados são mostrados nas Figuras 36 à 38.

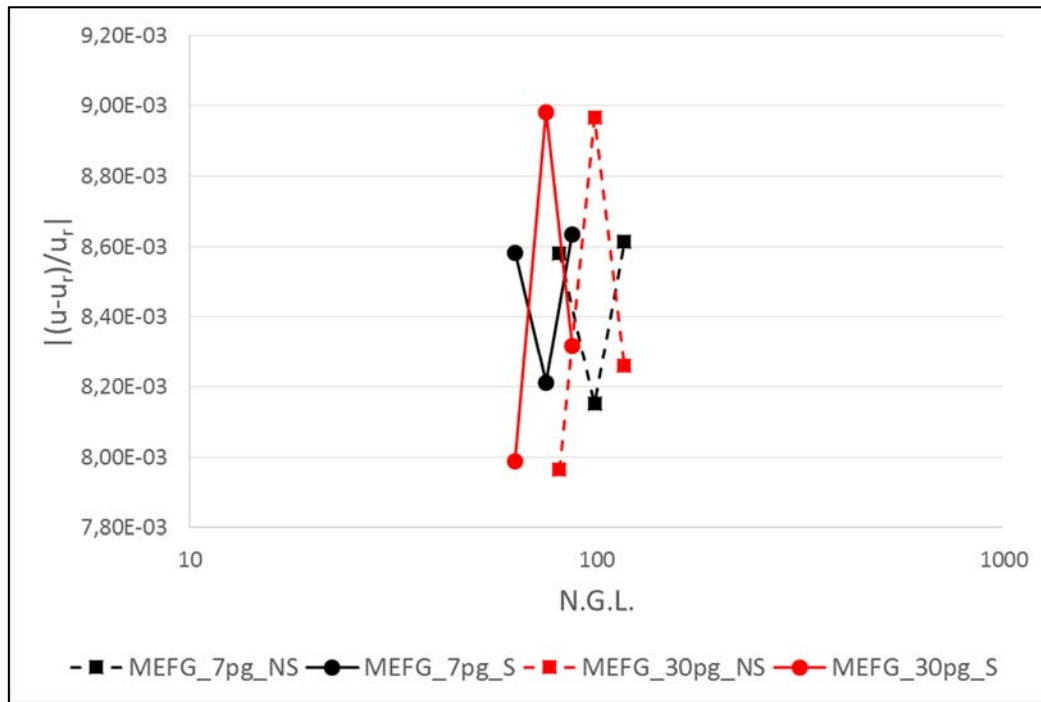


Figura 36: Erro absoluto de deslocamentos em relação ao número de graus de liberdade para análise não-linear para 10 passos de carga.

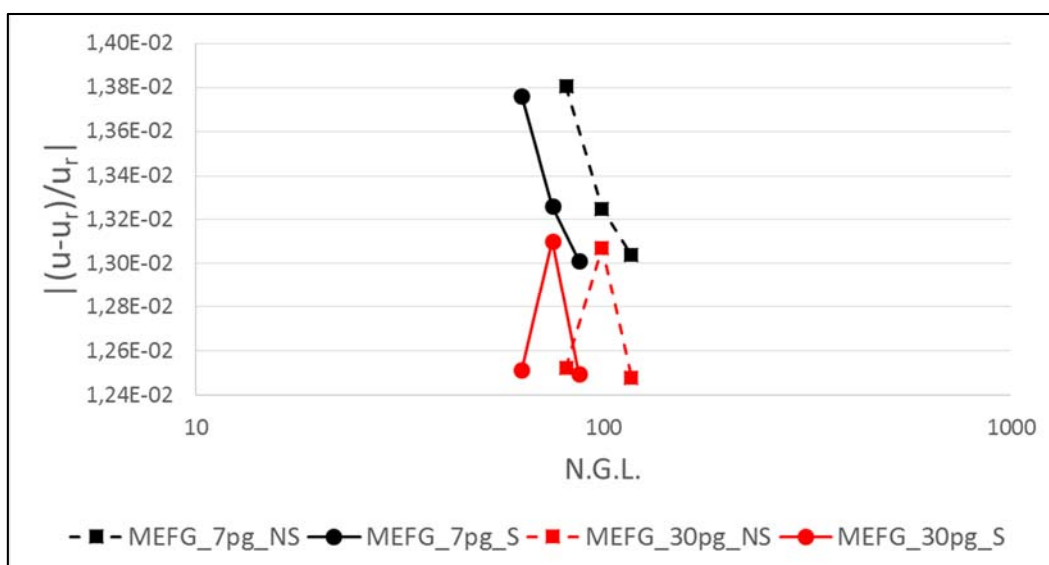


Figura 37: Erro absoluto de deslocamentos em relação ao número de graus de liberdade para análise não-linear para 100 passos de carga.

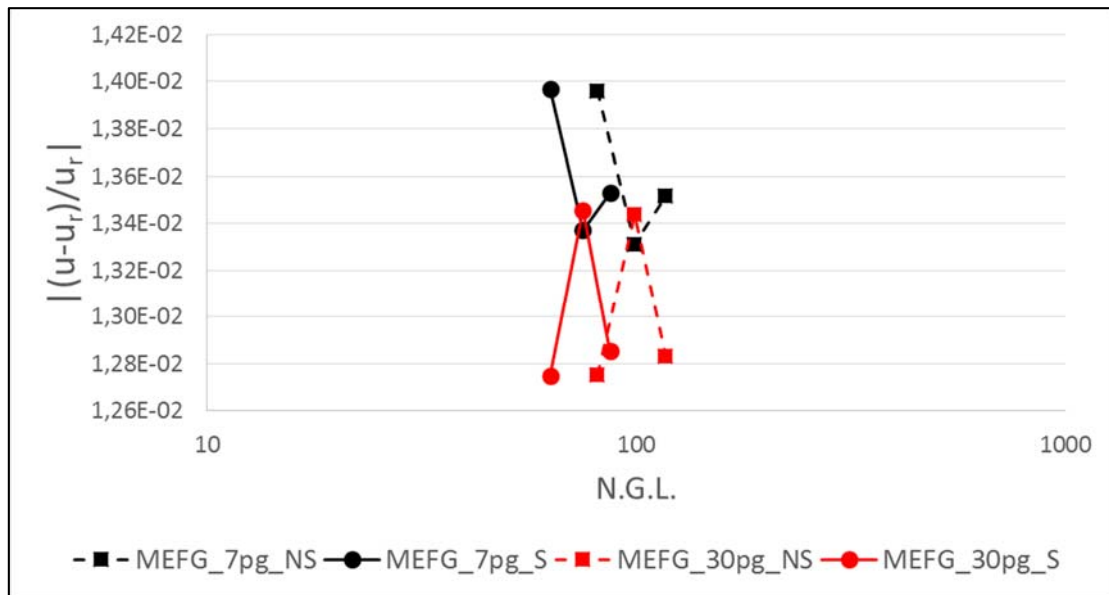


Figura 38: Erro absoluto de deslocamentos em relação ao número de graus de liberdade para análise não-linear para 1000 passos de carga.

No caso de análise não-linear é possível observar que os resultados com apenas uma parte do domínio enriquecido possui um erro absoluto um pouco maior do que levando em consideração todo o domínio enriquecido. No entanto esta diferença também não é significativa e a seletividade do domínio a ser enriquecido pode ser uma alternativa para se obter ganho computacional neste tipo de análise. Além disso, em situações onde houver considerações de concentração de tensão, singularidades ou efeitos desta natureza, a seletividade poderá trazer ganhos significativos em termos de tempo e esforço computacional.

4.6 ANÁLISE NÃO-LINEAR DE VIGA BI APOIADA SOB MOMENTO CONCENTRADO

Após as diversas simulações realizadas conforme descrito nas sessões anteriores, é tomado como referência uma análise já efetuada e que pode ser encontrada na literatura de forma a validar a implementação realizada.

Esta análise de validação foi realizada comparando os resultados obtidos por Souza (2005) em um estudo de duto sob flexão utilizando elemento de viga. O modelo estudado é apresentado na Figura 39.

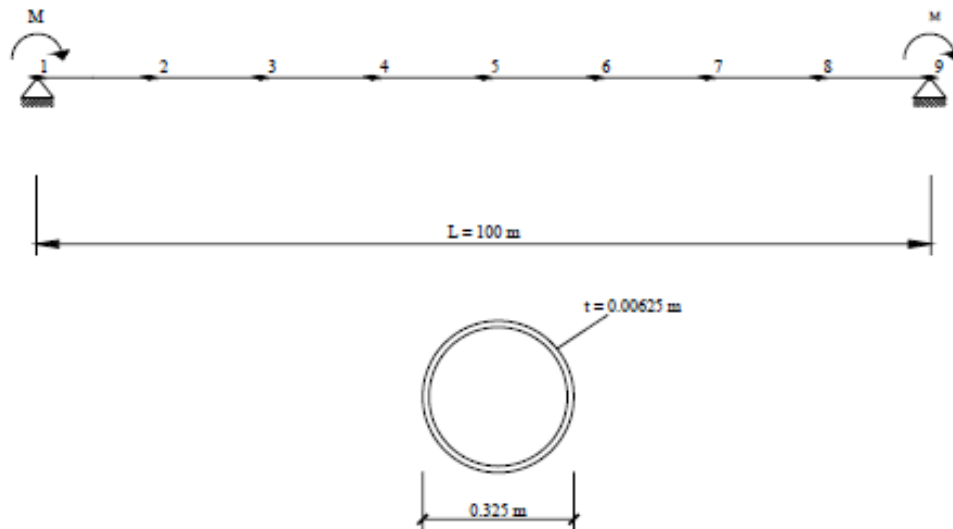


Figura 39: Modelo de duto analisado.

Fonte: Souza(2005).

O modelo estudado trata-se de um duto biapoiado com comprimento de 100m, diâmetro externo de 32,5cm e parede com espessura de 6,25mm. À ele é aplicado um carregamento tipo momento concentrado de 250kNm nos apoios e são então analisados os deslocamentos verticais ao longo do comprimento do duto. O módulo de elasticidade e o coeficiente de Poisson considerados no modelo são 205GPa e 0,25, respectivamente.

As simulações realizadas por Souza (2005) foram executadas no programa INTERA 3D e ANSYS. Os resultados de deslocamento vertical na análise via MEFG foram coletados e comparados e são apresentados na Figura 40.

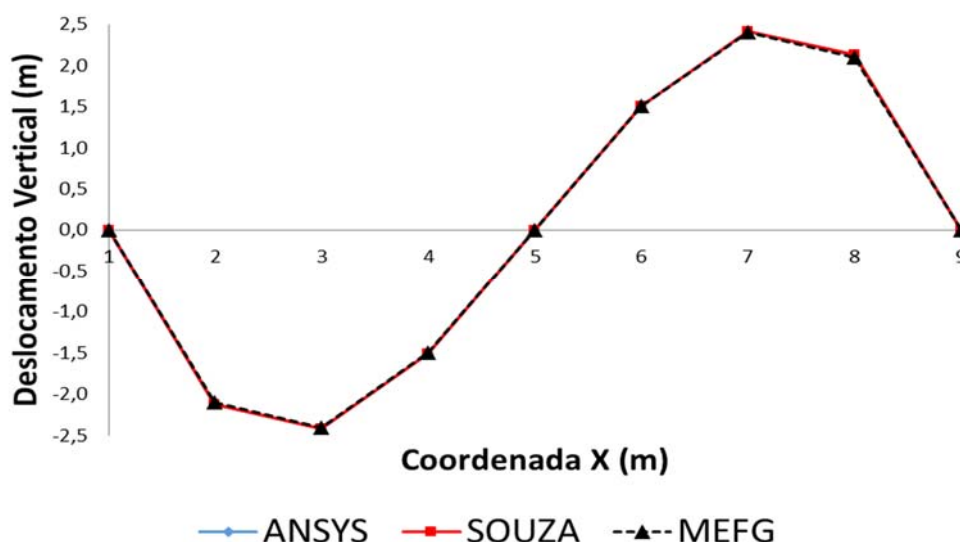


Figura 40: Deslocamento vertical no duto em função do carregamento de momento concentrado.

Pode-se observar que os resultados se sobrepõem em todas as soluções. O resultado encontrado nesta análise utilizando um elemento finito enriquecido comprova a eficiência na adaptação do programa original.

4.7 AVALIAÇÃO DO EFEITO DO MEFG NO CÁLCULO DE TENSÕES

Nesta seção será discutido o efeito da implementação do método de enriquecimento na verificação das tensões atuantes ao longo do elemento. Esta avaliação é importante pois em diversas situações a análise de tensões é realizada a fim de se verificar a vida útil residual de uma determinada estrutura.

Considerou-se a análise de uma viga biapoiada com força central vertical. A análise foi levada até a condição de plastificação do material de forma a verificar qual seria a condição de obtenção das tensões pelo MEF convencional e pelo MEFG. A análise considerou o elemento enriquecido sendo integrado com 7 e 30 Pontos de Gauss e a tensão de Von Mises foi computada para cada ponto ao longo de todo o domínio. A Figura 41 mostra o resultado obtido para um nível de enriquecimento do elemento com aproximadamente 45 graus de liberdade entre os modelos convencional e enriquecido:

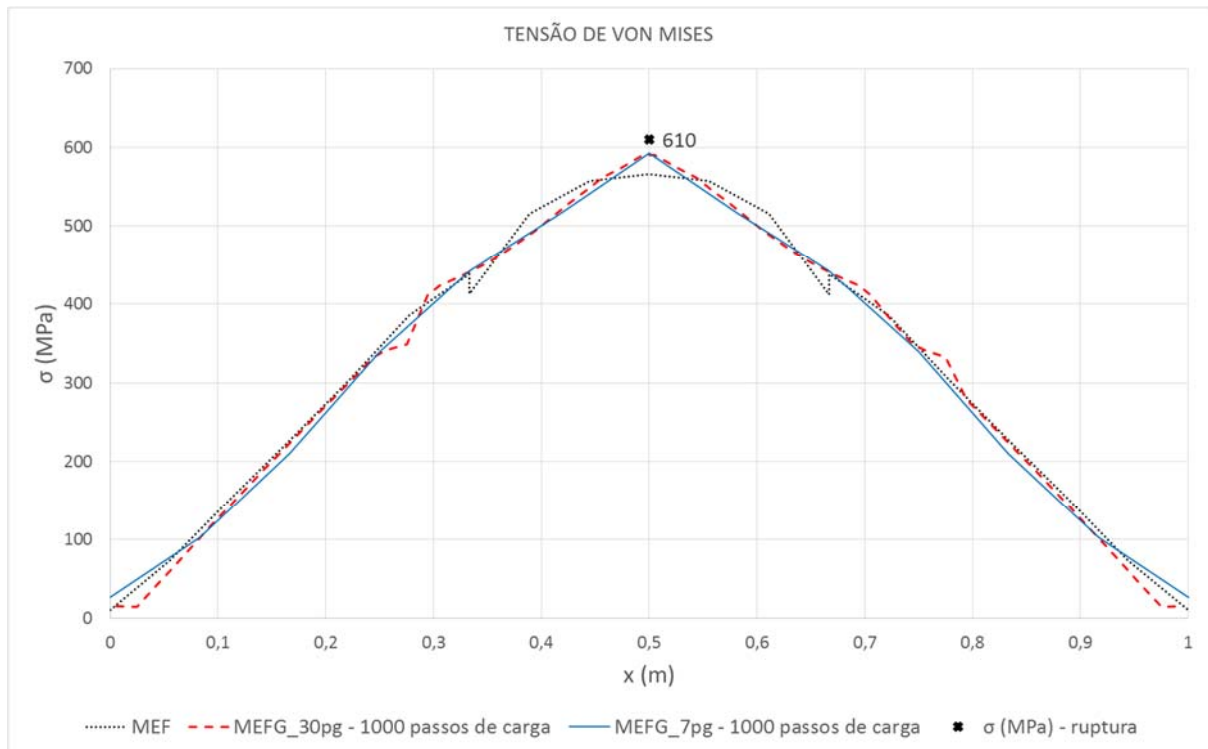


Figura 41: Tensão de Von Mises ao longo da viga biapoiada.

Conforme mostrado no gráfico, a tensão de ruptura do material (Tensão de referência) é de 610MPa e teoricamente se dá no centro da viga biapoiada. Nota-se que o MEFG busca o resultado de referência com mais precisão do que o MEF convencional. A aproximação maior se dá em função da cobertura imposta ao longo do elemento através das funções de aproximação enriquecidas.

Este resultado é de suma importância pois demonstra a capacidade do método enriquecido em obter resultados em picos ou em ocasiões onde a suavidade do MEF convencional o torna incapaz de chegar.

Tendo em vista a efetividade no enriquecimento do elemento foi realizada então a mesma análise, porém agora com um nível de enriquecimento adicional. Para fácil referência, a Equação (105) é reescrita abaixo mostrando como se forma o enriquecimento com mais de um nível:

$$u_{ENRIQ}^e(\xi) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(\xi) \left[\sum_{j=1}^{n_i} (\gamma_{1j}(\xi)a_{1j} + \gamma_{2j}(\xi)b_{1j}) \right]; j = 1, 2, \dots, n_e \quad (110)$$

O segundo nível enriquecido utiliza as mesmas funções de enriquecimento que o primeiro, porém agora com fator $\beta_2=\pi$, das funções de enriquecimento, para o nível 2. Os resultados desta análise são mostrados abaixo com as Tensões de Von Mises obtidas ao longo do elemento. Foram utilizados aproximadamente 65 graus de liberdade para a realização desta análise.

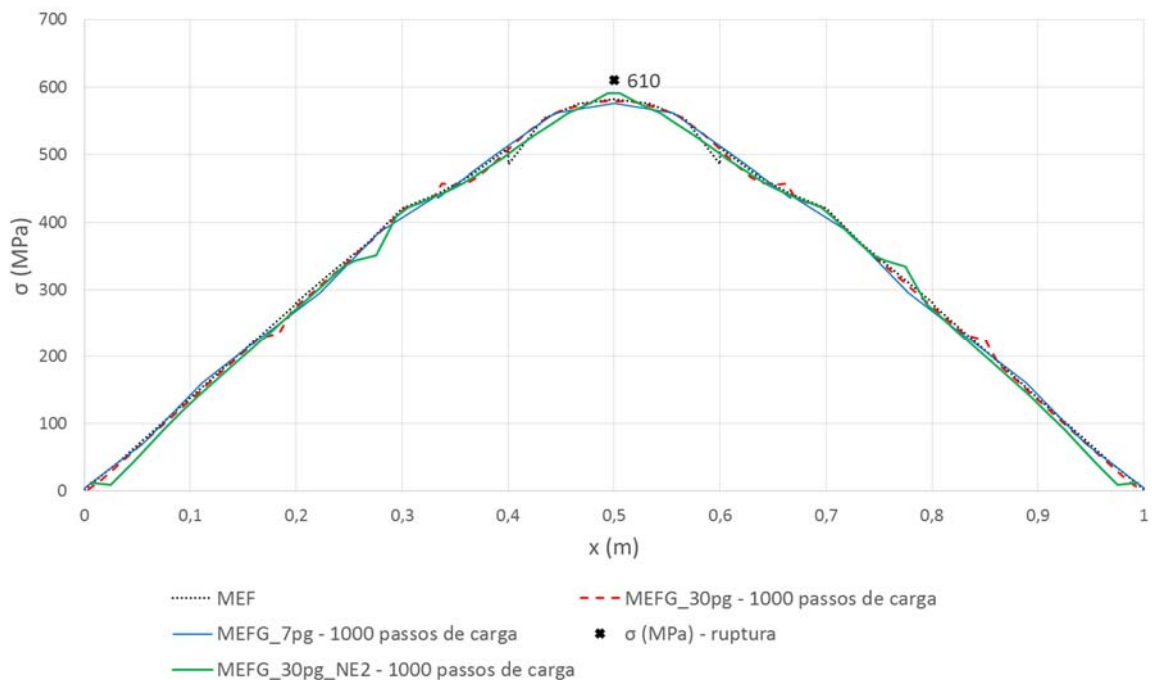


Figura 42: Tensão de Von Mises ao longo do elemento considerando 2 níveis de enriquecimento.

Note que nesta situação os valores obtidos pelo MEF se aproximam dos valores encontrados com MEFG para um nível de enriquecimento. Mas ao se realizar o incremento no nível de enriquecimento observa-se uma pequena melhora no resultado, aproximando-se ainda mais do valor referêcia. A melhora não é expressiva mas tendo em vista a complexidade do problema é possível concluir que o efeito causado pelo enriquecimento do problema nos leva a resultados melhores que o MEF convencional, abrindo espaço para ganhos em resultados em análises mais complexas, como análises de concentrações de tensões, análises de fratura, dano, análises de problemas da dinâmica, entre outros. Numericamente, os valores para tensão de Von Mises no centro do

domínio são mostrados na Tabela 9, sendo o valor de referência a tensão de ruptura do material igual a 620MPa.

Tabela 9: Tensão de Von Mises.

σ (MPa)	
Tensão de Ruptura	620,0
MEF	575,6
MEFG_7pg	575,4
MEFG_30pg	579,1
MEFG_30pg_nível 2	590,8

Por fim, após as análises realizadas no presente trabalho, serão apresentadas as conclusões obtidas a respeito da implementação do Método dos Elementos Finitos Generalizado baseadas nos resultados encontrados.

5. CONCLUSÃO

O presente trabalho propôs a implementação do Método dos Elementos Finitos Generalizado aplicado em elemento de elevada ordem polinomial, tridimensional e de pórtico. Foram realizadas análises de barra e viga com consideração de não-linearidade material em análise de viga.

Em todos os resultados pode-se observar que o MEFG apresenta resultado com menor erro absoluto para deslocamentos no último passo de carga, em relação à solução referência, do que o MEF convencional. O método não se mostrou tão vantajoso na análise de barra, mesmo tendo uma melhor precisão na solução.

Pode-se notar nos resultados que houve influência do número de pontos de integração de Gauss no resultado, onde com apenas 7 pontos para o MEFG o resultado se apresentou menos preciso que os resultados obtidos com 30 pontos de Gauss. Além disso, o MEFG com 30 pontos de integração se mostrou mais estável na solução do que os demais resultados, alcançando a solução com menos oscilações ao se realizar refino da malha. Para um mesmo número de graus de liberdade, os resultados do MEFG são mais precisos que do MEF convencional.

Nota-se também que, como esperado, na análise linear de viga sob flexão não houve influência do número de passos de carga na solução. Do contrário, nas análises não-lineares, os melhores resultados foram encontrados utilizando 10 passos de carga. Sugere-se uma melhor avaliação deste fato visto que a expectativa de incremento do número de passos de carga para maior precisão na solução não foi verdadeira.

A análise comparativa com Souza (2005) mostrou que o método é estável e confiável. Não houve deterioração da solução em função do incremento de funções na formulação de elementos finitos convencional. Os resultados são muito próximos da solução de referência.

Outro resultado importante é com relação à seletividade do domínio a ser enriquecido. Um ganho computacional expressivo pode ser obtido quando se enriquece apenas um subdomínio do elemento e não todo o elemento finito. Esta seletividade reduz o número de graus de liberdade adicionados, por

consequência reduz o número de equações, e em consequência reduz o tempo de processamento. Pode-se observar que os resultados encontrados não possuem diferença significativa quando comparados com resultados obtidos com todo o domínio enriquecido, tanto em análise linear quanto não-linear.

Os resultados obtidos para tensões de Von Mises ao longo do domínio do problema demonstram a efetividade do MEFG sobre o MEF convencional. Em termos de tensões foi possível um ganho substancial na precisão de resultados tendo em vista o grau de complexidade do problema, ainda mais quando analisado com dois níveis de enriquecimento na formulação para o qual os resultados chegaram mais próximo da referência. Ainda, cabe executar uma análise detalhada com relação à obtenção dos valores ao longo do elemento, pois nota-se pelas Figuras 41 e 42 que houve certa descontinuidade no perfil de tensões tanto nos resultados de MEF quanto MEFG.

Os resultados encontrados neste trabalho nos levam a crer que o Método dos Elementos Finitos Generalizado aplicado em um elemento uniaxial, tridimensional de elevada ordem polinomial é possível e nos leva a obter bons resultados. A adaptação do código computacional *APC3D_Multilinear*, através da inclusão dos graus de liberdade de enriquecimento, torna-o eficaz para estudos como proposto neste trabalho.

Com referência ao exposto acima, ficam algumas sugestões para continuidade deste trabalho como, por exemplo:

- Estudo do fator de concentração de tensão com elementos enriquecidos;
- Considerações de relações constitutivas variáveis ao longo do domínio;
- Estudo localizado da variação abrupta da seção transversal do elemento;
- Consideração de ovalização da seção transversal;
- Avaliação de outras funções de enriquecimento de natureza trigonométrica e/ou polinomial.

REFERENCIAS

1. Arndt, M., 2009. *O método dos elementos finitos generalizado aplicado à análise de vibrações livres de estruturas reticuladas*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná.
2. Babuska, I.; Banerjee, U., *Stable generalized finite element method (SGFEM)*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 201-204, p. 91–111, 2012.
3. Babuska, I., Banerjee, U., Osborn, J. E., *On principles for the selection of shape functions for the generalized finite element method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, p. 35, 2002.
4. Babuska, I., Banerjee, U.; Osborn, J. E. *Generalized finite element methods: main ideas, results, and perspective*. Technical Report 04-08, TICAM, University of Texas at Austin, 2004.
5. Babuska, I.; Melenk, J., *The partition of unity method*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 40, n. 4, p. 727–758, 1996.
6. Barros, F. B., *Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas*. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, 2002.
7. Barros, F. B., Proença, S. P. B., Barcellos, C. S., *Sobre o Método dos Elementos Finitos Generalizados na Análise do Comportamento Não-Linear de Estruturas*, Métodos Numéricos en Ingeniería V, Espanha, 2002.
8. Bathe, K. J. *Finite Element Procedures*. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1996.
9. Belytschko, T. Lu Y. Y., Gu L. *Element-Free Galerkin Methods*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 37, p. 229-256, 1994.

10. Chessa J., Belytschko T. *An Enriched Finite Element Method for Axisymmetric Two-Phase Flow with Surface Tension*. 2003.
11. Chopra, A. K. *Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering*. New Jersey: Prentice Hall, 1995.
12. Cook, R. D., Malkus D. S., Plesha M. E., *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, University of Wisconsin – Madison, 650p, 1989.
13. Duarte, C.A., Babuska, I., Oden, J. T. *Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems*. Computer & Structures, p. 18, 2000.
14. Duarte, C. A.; Hamzeh, O. N.; Lyszka, T. J.; Tworzydło, W. W. *A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional dynamic crack propagation*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 190, p. 487-504, 2008.
15. Duarte, C. A., Kim, D. J. *Analysis and applications of a generalized finite element method with global–local enrichment functions*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 197, p. 2227-2262, 2008.
16. Góis, W. *Método dos Elementos Finitos Generalizados em Formulação Variacional Mista*. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.
17. Kreyszig, E. *Advanced Engineering Mathematics*. 9. ed. New York: John Wiley & Sons, 2006.
18. Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications*. New York: John Wiley & Sons, 1978.
19. Lubliner, J. *Plasticity Theory*. University of California at Berkeley: Pearson Education, Inc. 2006.
20. Mangini, M. *Método dos elementos finitos generalizado para análise de cascas de revolução*. São Carlos, 2006. 132 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade de São Paulo.
21. MATHWORKS. MATLAB 2011a. Natick, MA: The Mathworks Inc., 2011.

22. Mejía, I. E. O. *Modelo numérico para o estudo do comportamento de dutos enterrados*. Dissertação (Mestre em Engenharia Civil) – PUC-RIO, Rio de Janeiro, Março 2003.
23. Melenk, J. M., Babuska, I. *The partition of unity finite element method: basic theory and applications*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 139, n. 1-4, p. 289-314, 1996.
24. Santana, W.C. *Um Método Robusto de Elementos Finitos Generalizados Aplicado à Mecânica da Fratura*. Rio de Janeiro, 2004, 158p. Tese de Doutorado - Departamento de Engenharia Mecânica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
25. Shang, H.Y. *Introdução de fatores de concentração de tensões na análise não-linear via MEF de sistemas de dutos corroídos*. Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2009.
26. Shang, H.Y. *Análise dinâmica elastoplástica de problemas da mecânica de sólidos via métodos enriquecidos de elementos finitos*. Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2014.
27. Souza, L.A.F., 2005. *Análise não linear via elementos finitos de um modelo de vigas para dutos enterrados*. Dissertação de Mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná.
28. Strouboulis, T., Copps, K., Babuska, I. *The generalized finite element method*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, p. 113, 2000.
29. Timoshenko, S., Goodier, J. *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill, 1951.
30. Torres, I. F. R. (2003). *Desenvolvimento e aplicação do método dos elementos finitos generalizados em análise tridimensional não-linear de sólidos*. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.
31. Torii, A.J., 2012. *Análise dinâmica de estruturas com o método dos elementos finitos generalizado*. Tese de Doutorado, Universidade Federal do Paraná.

32. Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L. *The Finite Element Method: The Basis*.
5. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.