



RENATO BARBIERI

## GerTRI – Gerador de TRIângulos

Trabalho apresentado à Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia, como requisito parcial para obtenção do Título de Professor Titular.

Curitiba  
Outubro/2000

# Sumário

Item	Conteúdo	Pgs.
1.	<b>Resumo</b>	-
2.	<b>Capítulo 1</b> Introdução	1-4
3.	<b>Capítulo 2</b> Malhas do MEF : Noções Gerais	5-8
4.	<b>Capítulo 3</b> Métodos de Avanço da Frente Advancing front Methods	9-15
5.	<b>Capítulo 4</b> Estrutura dos Dados	16-22
6.	<b>Capítulo 5</b> Algoritmo 1	23-26
7.	<b>Capítulo 6</b> Algoritmo 2	27-30
8.	<b>Capítulo 7</b> A Regularização e Refino da Malha	31-32
9.	<b>Capítulo 8</b> Exemplos e Conclusões	33-46
10.	Referências Bibliográficas	47

# Lista de Figuras

## Capítulo 1

- Fig.1-Modelagem Sólida (CAD); Malha de Elementos Hexahédricos e Tensão Equivalente de Von Mises. 1  
Fig.2- Metodologia atual de Projetos de Componentes Mecânicos 2  
Fig.3(a)- Malha de Elementos Finitos com carregamento e condições de contorno. 3  
Fig.3(b)- Tensão Equivalente de Von Mises com malha original e deslocada. 3  
Fig.3(c)- Tensão Principal Máxima 3  
Fig.3(d)- Tensão Máxima Cisalhante 3  
Fig.3(e)- Tensão Principal Mínima 3  
Fig.3(f)- Deslocamento na direção axial 3

## Capítulo 2

- Fig.1- Alguns tipos de Elementos Finitos 5  
Fig.2- Malha Conforme (a) e Não conforme (b). 6

## Capítulo 3

- Fig.1- Esquema geral dos Métodos de Geração da Malha com preenchimento do domínio a partir do contorno. 9  
Fig.2- Padrão (a). 10  
Fig.3- Padrão (b). 11  
Fig.4- Padrão (c). 11  
Fig.5- Malha completa de Elementos Triangulares. 13  
Fig.6(a)- Frente de Geração da Malha. 13  
Fig.6(b)- Frente de Geração da Malha. 14  
Fig.7 – Preenchimento do domínio a partir da geração de todos os elementos do contorno. 15

## Capítulo 4

- Fig.1- (a) Segmentos no Contorno e (b) Conectividade do segmento j. 16  
Fig.2- (a) Numeração correta do contorno externo. (b) Numeração correta do(s) contorno(s) interno(s). 17  
Fig.3- (a) Numeração correta do contorno externo e (b) Numeração incorreta. 18  
Fig.4- Segmentos em uma mesma reta. 19  
Fig.5- Subdivisão dos segmentos próximos. 20  
Fig.6- Geração dos nós no contorno igualmente espaçados e refinados em uma região localizada. 20  
Fig.7- Geração dos nós internos a partir do contorno (a) e correção nos cantos (b). 21  
Fig.8- (a) Geração dos nós de domínio. (b) Definição das retas e geração dos nós no domínio. 22

## Capítulo 5

- Fig.1- (a) Geração de triângulo a partir de nó interno. (b) Geração de triângulo a partir de outro segmento ativo. 24  
Fig.2-Circunferência Inscrita e Circunscrita. 26

## Capítulo 6

- Fig.1-(a) Contornos divididos já prevendo a existência de elementos menores em pontos próximos ao contorno interno e externo. 27  
Fig.1-(b) Malha de Elementos gerados a partir do Contorno. Elementos próximos da forma ótima com exceção aos alocados em cantos do contorno. 28  
Fig.2- Geração dos Triângulos muito fáceis. 29  
Fig.3- Geração dos Triângulos de acoplamento dos triângulos de domínio com os triângulos de contorno. 30

## Capítulo 7

- Fig.1- Regularização Laplaciana (a) Original (b) Modificada 31

## Capítulo 8

- Fig.1-Malha de Elementos Finitos com 456 elementos após a regularização. 33  
Fig.2-(a) Malha Inicial – Sem regularização. 34  
Fig.2-(b) Malha Inicial – regularizada. 34  
Fig.2-(c) Malha com Refino localizado sem regularização. 35  
Fig.2-(d) Malha com refino localizado regularizada. 35  
Fig.3-(a) Malha Inicial – Sem regularização. 36

Fig.3-(b) Malha regularizada.	37
Fig.3-(c) Malha com Refino localizado sem regularização.	38
Fig.3-(d) Malha com refino localizado regularizada.	39
Fig.4-(a) Definição do Domínio (saída do CAD-bidimensional).	40
Fig.4-(b) Malha inicial regularizada.	40
Fig.4-(c) Malha com Refino localizado sem regularização.	41
Fig.4-(d) Malha com refino localizado regularizada.	41
Fig.5-(a) Malha inicial regularizada.	42
Fig.5-(b) Malha com refino homogêneo regularizada.	43
Fig.6-(a) Malha inicial regularizada.	44
Fig.6-(b) Malha com refino homogêneo regularizada.	44
Fig.7-(a) Malha inicial sem regularização.	45
Fig.7-(b) Malha regularizada.	45

# Resumo

O **GerTRI** é um gerador automático de malhas de elementos triangulares para domínios bidimensionais com geometria genérica (com ou sem furos).

Foram desenvolvidas duas versões para o **Gertri**: a versão v.1 para DOS e a versão v.2 para Windows. As duas versões foram desenvolvidas utilizando a linguagem Fortran77 e o compilador Fortran77-Salford.

O **Gertri v.1** foi concebido utilizando um algoritmo cuja filosofia é a de geração da malha com o preenchimento progressivo do domínio com triângulos a partir da fronteira, técnica já conhecida e utilizada por outros pesquisadores, como por exemplo Alquati & Groehs (1994) e Lo (1985). Nesta implementação foi utilizada uma *nova* alternativa para a seleção dos *triângulos ótimos*; refino automático em regiões onde a fronteira interna e externa estão próximas; a *regularização Laplaciana* da malha e a *triangularização de Delaunay* para o refino local quando o usuário desejar este procedimento sem uma análise adaptativa.

Para o **Gertri v.2** utilizou-se um segundo algoritmo que é baseado nas seguintes etapas: primeiro são gerados elementos no contorno com o objetivo de garantir triângulos próximos de *triângulos ótimos* (equiláteros) em todo o contorno; na segunda etapa realiza-se o *preenchimento do domínio* com triângulos equiláteros e finalmente, na terceira etapa gera-se os triângulos de ligação entre os triângulos gerados no contorno e os triângulos gerados no domínio.

As saídas gráficas para as duas versões foram elaboradas em HPGL para obter maior definição das figuras.

Descreve-se neste trabalho todos os passos destes dois algoritmos para a geração de triângulos.

# Resumo

O **GerTRI** é um gerador automático de malhas de elementos triangulares para domínios bidimensionais com geometria genérica (com ou sem furos).

Foram desenvolvidas duas versões para o **Gertri**: a versão v.1 para DOS e a versão v.2 para Windows. As duas versões foram desenvolvidas utilizando a linguagem Fortran77 e o compilador Fortran77-Salford.

O **Gertri v.1** foi concebido utilizando um algoritmo cuja filosofia é a de geração da malha com o preenchimento progressivo do domínio com triângulos a partir da fronteira, técnica já conhecida e utilizada por outros pesquisadores, como por exemplo Alquati & Groehs (1994) e Lo (1985). Nesta implementação foi utilizada uma *nova* alternativa para a seleção dos *triângulos ótimos*; refino automático em regiões onde a fronteira interna e externa estão próximas; a *regularização Laplaciana* da malha e a *triangularização de Delaunay* para o refino local quando o usuário desejar este procedimento sem uma análise adaptativa.

Para o **Gertri v.2** utilizou-se um segundo algoritmo que é baseado nas seguintes etapas: primeiro são gerados elementos no contorno com o objetivo de garantir triângulos próximos de *triângulos ótimos* (equiláteros) em todo o contorno; na segunda etapa realiza-se o *preenchimento do domínio* com triângulos equiláteros e finalmente, na terceira etapa gera-se os triângulos de ligação entre os triângulos gerados no contorno e os triângulos gerados no domínio.

As saídas gráficas para as duas versões foram elaboradas em HPGL para obter maior definição das figuras.

Descreve-se neste trabalho todos os passos destes dois algoritmos para a geração de triângulos.

## Capítulo 1

# Introdução

A simulação de vários fenômenos físicos ( em química, análises térmica, escoamento de fluidos, eletromagnetismo, deformação dos sólidos, dinâmica de estruturas, acústica, etc ...) pode ser realizada através de um conjunto de equações diferenciais parciais que atualmente são resolvidas com uso de técnicas computacionais. O método numérico mais empregado nos dias atuais é o Método de Elementos Finitos, MEF.

O uso do MEF deve-se principalmente ao fato de que soluções analíticas só são possíveis para problemas com geometria e carregamentos bastantes simples. Por exemplo, é praticamente impossível resolver as equações de equilíbrio da Teoria da Elasticidade para carregamentos e geometria complexos.

A grande vantagem destes métodos numéricos é a solução com precisão cada vez maior dos mais diversos tipos de problemas com geometria e carregamentos bastante complexos. Com o avanço dos microcomputadores, estes aplicativos numéricos tornam-se cada vez mais populares, *baratos* e rápidos.

Em se tratando da análise de tensões em componentes mecânicos, o método mais utilizado também é o MEF e um resultado típico desta análise é mostrado na Fig.1.

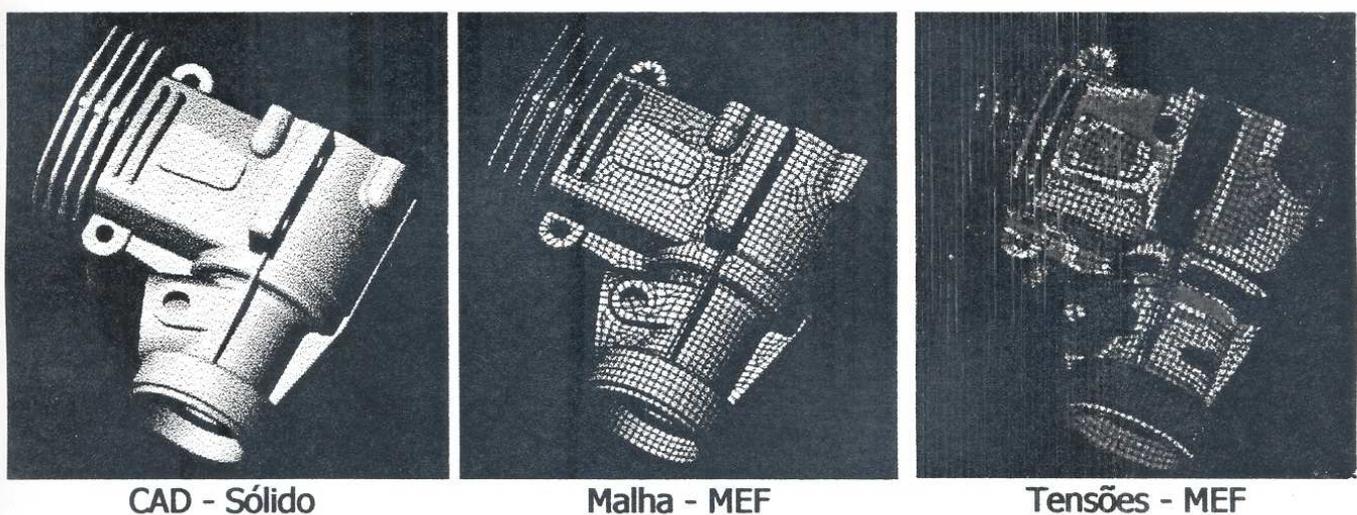


Fig.1-Modelagem Sólida (CAD); Malha de Elementos Finitos Hexahédricos e Tensão Equivalente de Von Mises.

O fluxograma mostrado na Fig.2 ilustra o caminho *passo a passo* seguido pelos principais usuários de elementos finitos para realizar a análise de componentes *complexos*, como o ilustrado na Fig.1.

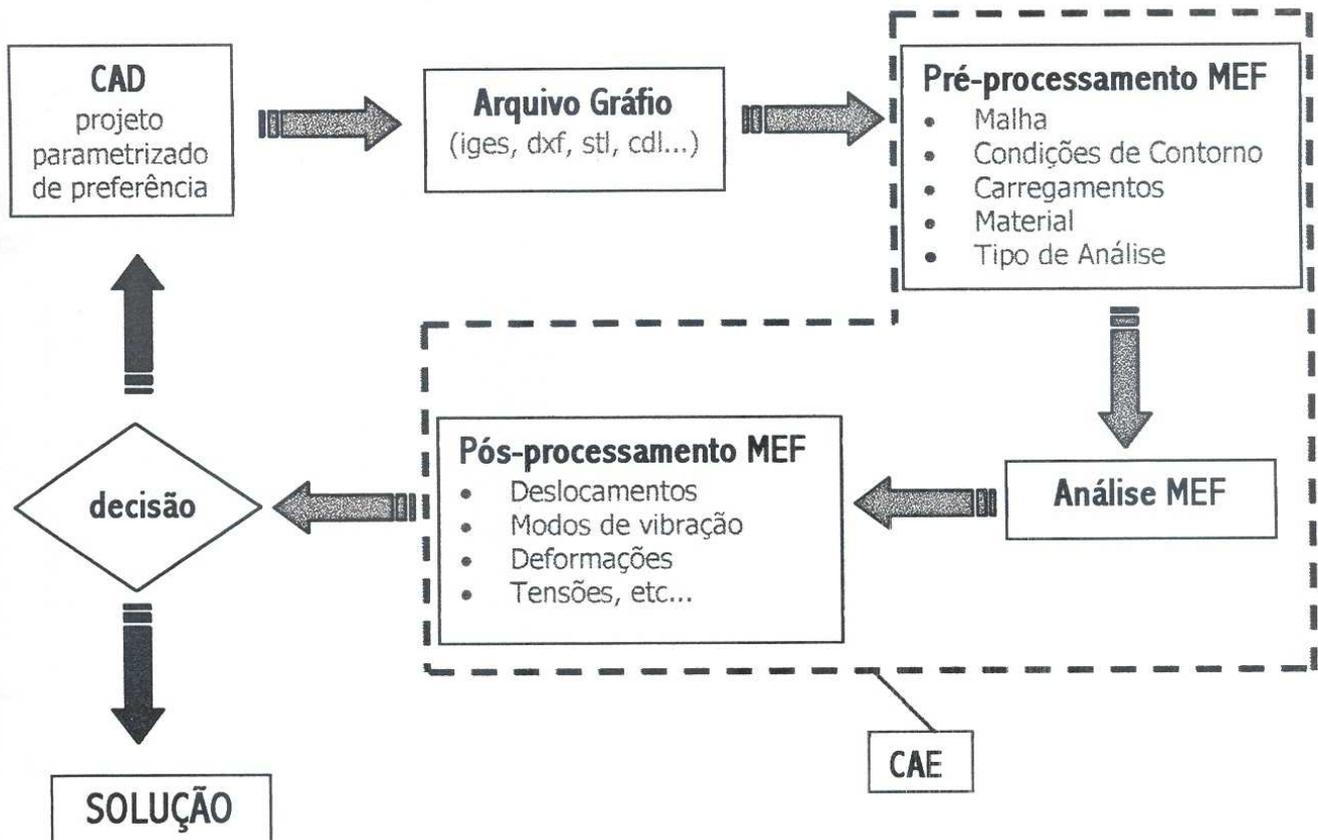


Fig.2-Metodologia atual de Projetos de Componentes Mecânicos.

A fase do pré-processamento é, sem dúvida nenhuma, a parcela *mais importante, tediosa* e que *consome o maior tempo* nas análises lineares. Gerar uma *boa malha* para geometrias complexas não é uma tarefa trivial e a qualidade da resposta de elementos finitos esta fortemente relacionada com esta qualidade da malha.

Nas Figs.3(a) a 3(f) são mostrados os resultados de uma análise de tensões de um componente com geometria e carregamentos simples com uso do MEF. A malha utilizada esta mostrada na Fig.3(a) e é composta de elementos triangulares lineares, assim como as condições de contorno do problema e as condições de carregamento.

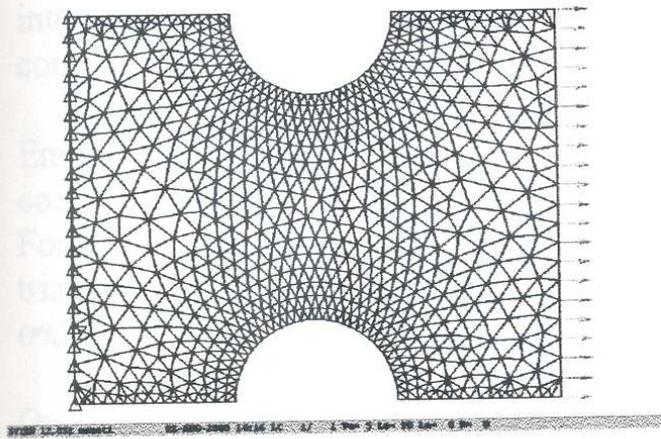


Fig.3(a)-Malha de Elementos Finitos com carregamento e condições de contorno.

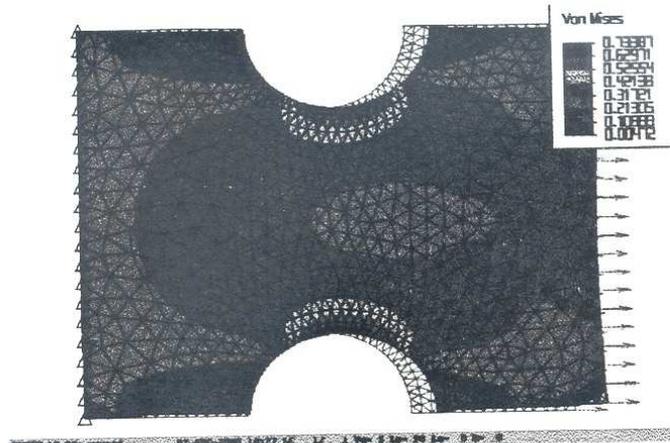


Fig.3(b) - Tensão Equivalente de Von Mises com malha original e deslocada.

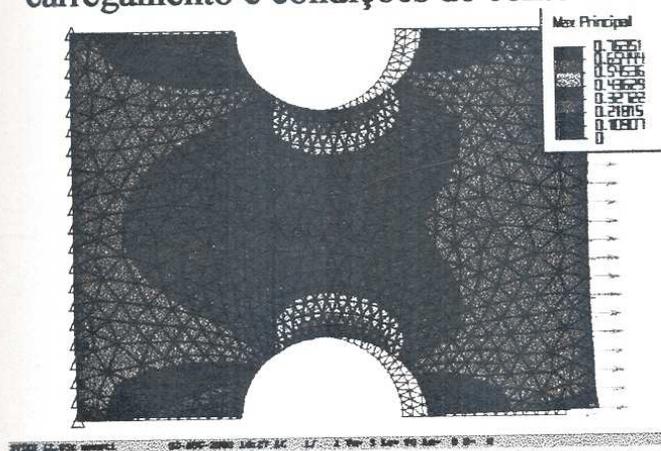


Fig.3(c)- Tensão Principal Máxima.

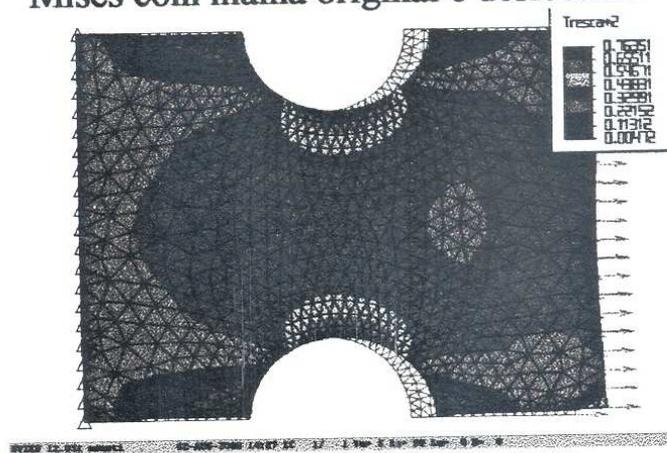


Fig.3(d)- Tensão Máxima Cisalhante.

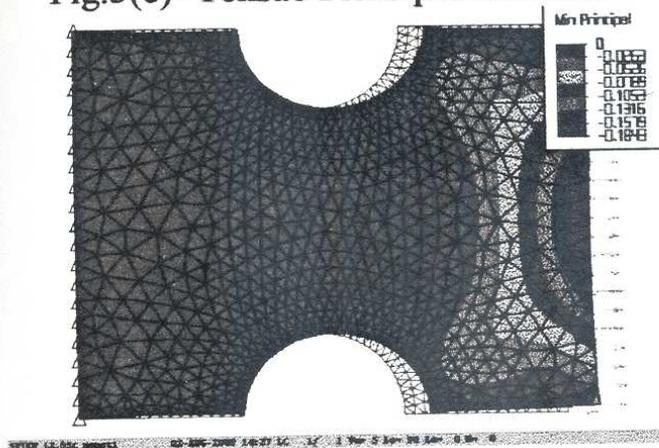


Fig.3(e)-Tensão Principal Mínima.

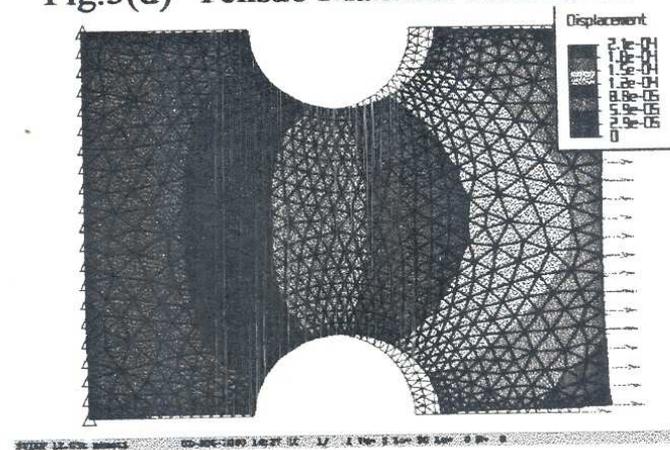


Fig.3(f)-Deslocamento na direção axial.

A tendência futura (que já aparece em alguns aplicativos) é integrar totalmente as etapas de CAD e CAE, bastando o usuário acionar o *ícone* correspondente no aplicativo de CAD para automaticamente comutar para o aplicativo de CAE *carregando* todas as informações já criada no CAD. Tal tarefa elimina a etapa

intermediária de gerar arquivos gráficos que muitas vezes não são perfeitamente compatíveis para os dois aplicativos, CAD e CAE.

Embora existam comercialmente vários pré-processadores para elementos finitos, como o Patran, Gridmesh, GID, TrueGrid, etc...; o **GerTRI** foi desenvolvido em Fortran77 (Fortran-Salford) com o objetivo de gerar malhas de elementos finitos triangulares para geometrias bidimensionais com ou sem furos e de tal forma a obter *triângulos ótimos*.

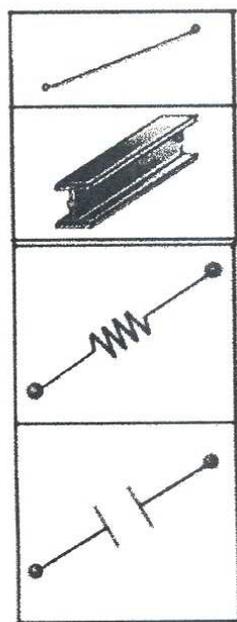
Os arquivos gráficos de saída são formatados com o padrão HPGL e o arquivo texto com os dados da malha podem ser manipulados pelo usuário para formatá-los na maneira desejada.

Capítulo 2

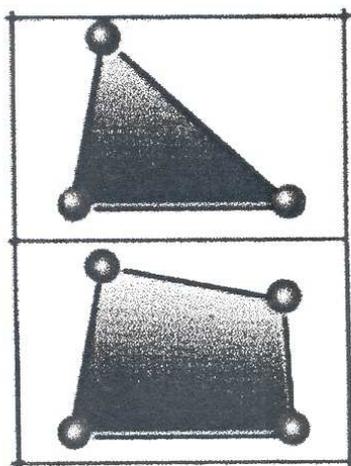
# Malhas do MEF: Noções Gerais

A malha do domínio,  $\Omega$ , é definida pelo conjunto,  $\Sigma_h$ , que contem um número finito de:

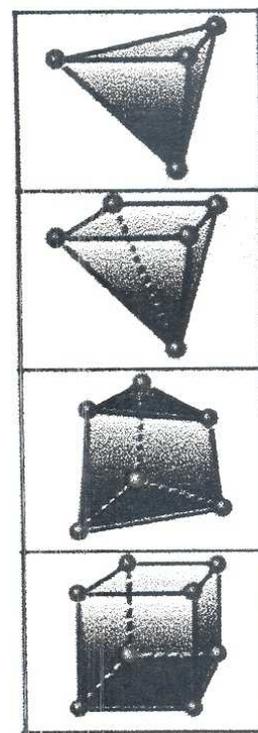
- segmentos para problemas unidimensionais,
- segmentos, triângulos e/ou quadriláteros em domínios bidimensionais, e
- segmentos, triângulos e/ou quadriláteros, tetrahedros, pentahedros e/ou hexahedros em domínios tridimensionais.



Elementos Unidimensionais



Elementos Bidimensionais



Elementos Tridimensionais

Fig.1- Alguns tipos de Elementos Finitos.

Os elementos,  $K$ , que compõem a malha devem satisfazer certas propriedades que serão descritas em seguida. A primeira destas propriedades é com relação à *conformidade*, com respeito às seguintes definições:

**Definição 1:** O conjunto  $\Sigma_h$  é uma malha conforme de  $\Omega$  se:

1.  $\overline{\Omega} = \cup_{K \in \Sigma_h} K$  ;
2. Qualquer elemento  $K \in \Sigma_h$  tem o seu interior não vazio;
3. A interseção de dois elementos em  $\Sigma_h$  é tal que:
  - reduz-se ao conjunto vazio;
  - reduz-se a um ponto;
  - reduz-se a um lado;
  - reduz-se a uma face.

Esta definição implica que  $\Sigma_h$  representa o *cobrimento* de  $\Omega$  de modo *conforme* apenas no aspecto geométrico, Fig.2.

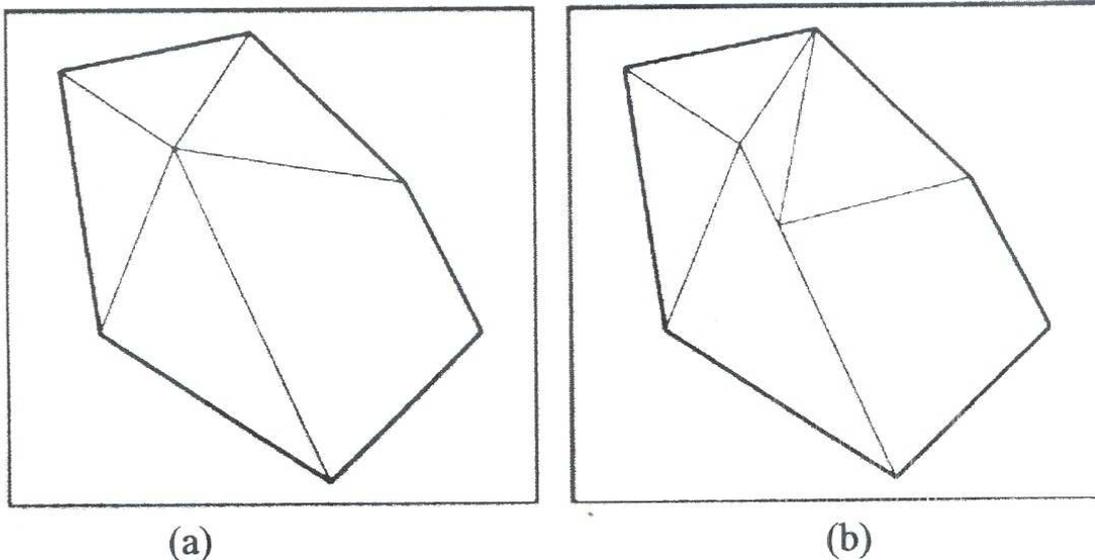


Fig.2- Malha Conforme (a) e Não Conforme (b).

Na prática,  $\Sigma_h$  é o particionamento de  $\Omega$  na melhor maneira possível. Quando  $\Omega$  não tem formato poligonal  $\Sigma_h$  representa apenas sua aproximação (mudanças de curvatura são facilmente verificadas, principalmente em contornos circulares, mesmo para elementos finitos de ordem superior).

#### As propriedades de natureza geométrica:

- a variação de tamanho entre dois elementos adjacentes deve ser progressiva e a diferença de tamanho entre dois elementos não deve ser muito grande;
- na presença de grandes gradientes, por exemplo em pontos de concentração de tensões, a densidade de elementos nesta região deve ser maior;

- quando os elementos são triangulares deve-se evitar a presença de ângulos obtusos.

**Definição 2:** A malha de elementos triangulares é dita não obtusa se todos os seus elementos não possuírem ângulos obtusos.

- a malha deve satisfazer condições de anisotropia quando for o caso.

#### As propriedades de natureza física:

- Esta propriedade está fortemente relacionada com os aspectos físicos do problema em consideração. Por exemplo, para a análise de problemas com singularidades é muito comum o uso dos elementos quarter-point e, portanto, os elementos que apresentam singularidades e seus vizinhos devem conter estas informações.

Existem vários algoritmos para a construção de malhas em domínios bi e tridimensionais. A escolha do algoritmo para geração da malha depende fortemente da geometria do problema, entretanto, é desejável um algoritmo robusto o suficiente para gerar a malha em qualquer situação.

**Definição 3:** A *conectividade* da malha é a definição dos vértices de cada elemento.

**Definição 4:** A malha é dita *estruturada* se sua conectividade é obtida sempre com o mesmo tipo de elemento.

**Definição 5:** A malha é *não-estruturada* se sua conectividade é obtida com tipos de elementos diferentes.

Segundo George (1991) existem duas principais categorias de geradores de malha: os geradores para malhas estruturadas e os geradores para malhas não estruturadas. Alguns dos geradores de malha mais populares podem ser classificados de acordo com a metodologia utilizada para a geração da malha de domínio em:

- **Geração Manual;**
- **Geração Semi-Automática;**
- **Geração da malha através de mapeamento da geometria desejada e uma geometria conhecida (triângulo, retângulo, etc...);**
- **Geração da malha utilizando a solução de equações diferenciais parciais;**
- **Geração da malha com técnicas de superposição e deformação do contorno;**
- **Geração com particionamento estruturado;**
- **Geração com métodos do avanço da frente de geração;**
- **Geração da malha de domínio através de pontos de seu contorno usando triangulação do tipo Delaunay-Voronoi.**
- Geração com a combinação das técnicas citadas.

Neste trabalho, o método da geração da malha de domínio com o *avanço da fronteira de geração* serve como base dos algoritmos desenvolvidos e será detalhado em seguida.

As razões para escolher este método como referência para a geração da malha ficarão claras durante a descrição deste trabalho.

Capítulo 3

# Métodos de Avanço da Frente

## Advancing front methods

### Introdução

Esta classe de geradores de malha são aplicáveis para geometrias arbitrárias. Os primeiros estudos com estes métodos foram realizados por George (1971), Carnet (1978), Löhner & Parikh (1988a), Löhner & Parikh (1988b), Peraire et al. (1988) and Golgolab (1989).

Nestes métodos de geração a malha de domínio é construída a partir do contorno. Os elementos criados são triângulos para domínios bidimensionais e tetrahedros para domínios tridimensionais. Os dados necessários para a geração da malha são os segmentos que definem os contornos bidimensionais e as faces que definem os contornos tridimensionais.

O processo de geração é *iterativo*: a *frente de geração* (fronteira), iniciada com os dados do(s) contorno(s), é analisada com o objetivo de determinar uma *região de partição* da qual é selecionado *um* elemento dentre todos os possíveis; após a criação deste elemento a *frente de geração* é atualizada e o processo de criação dos elementos é repetido até que a *frente de geração* esteja *vazia*. O processo pode ser resumido, George (1991), como mostrado na Fig.1.

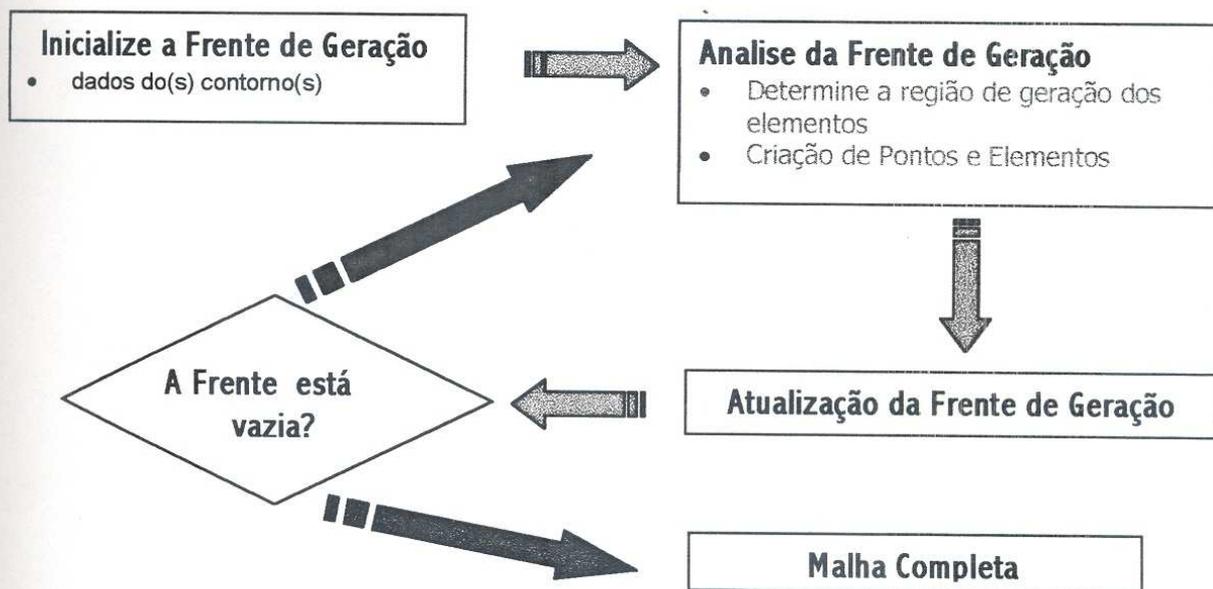


Fig.1-Esquema Geral dos Métodos de Geração de Malha com preenchimento do domínio a partir do Contorno.

## A Geração da Malha em Domínios Bidimensionais

Utilizado para domínios com geometria arbitrária, este tipo de gerador de malha produz uma *cobertura* do domínio  $\Omega$  com triângulos tendo como ponto de partida o(s) contorno(s). Na prática, utiliza-se uma aproximação poligonal do(s) contorno(s) constituídos de segmentos (semelhantes a elementos finitos unidimensionais lineares). Uma vez construída a aproximação poligonal do(s) contorno(s), o interior do domínio que é a região de criação da malha fica suficientemente bem caracterizada.

A *frente inicial* é definida como sendo o conjunto dos segmentos do(s) contorno(s). Este conjunto será denominado de  $C$ .

Dada a *frente*,  $F$ , associada ao(s) contorno(s),  $C$ , detalha-se em seguida o procedimento da criação dos triângulos. Assim que um novo triângulo é gerado, o(s) contorno(s),  $C$ , e a *frente*,  $F$ , também são atualizados.

Seja  $F$  a *frente* em consideração. Então a sua análise é realizada examinando as características geométricas de seus segmentos. Seja  $\alpha$  o ângulo formado por dois segmentos consecutivos da *frente*  $F$ , então, existem três situações possíveis:

- $\alpha < \pi/2$ . Neste caso os dois segmentos com ângulo  $\alpha$  são retidos (lados do triângulo) e um novo triângulo é gerado, Fig.2;

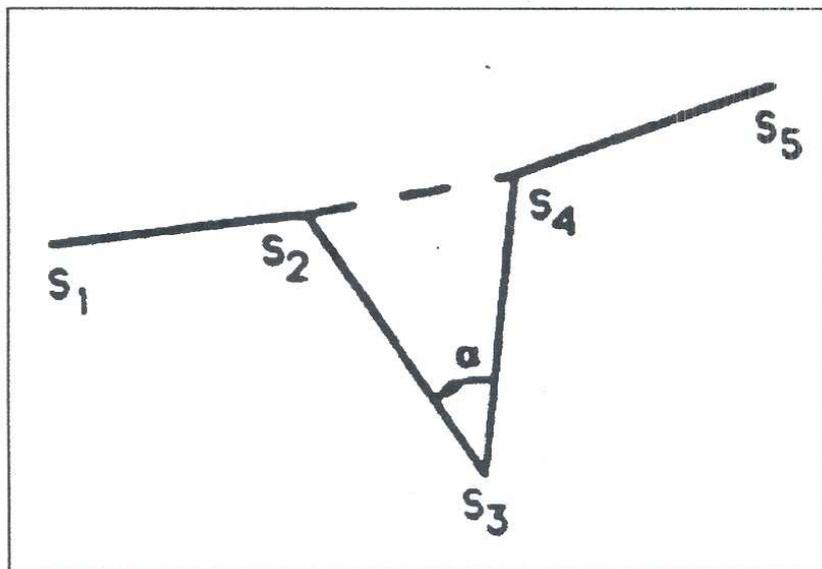


Fig.2-Padrão (a).

- $\pi/2 \leq \alpha \leq 2\pi/3$ . Neste caso, os dois segmentos são retidos, um ponto interno e dois triângulos são gerados, Fig.3;

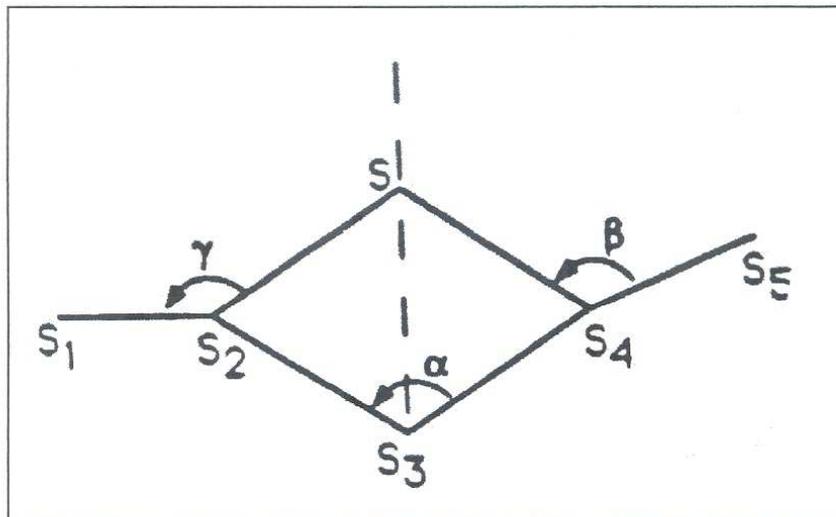


Fig.3- Padrão (b).

- $\alpha > 2\pi/3$ . Neste caso, um segmento é retido, um triângulo é criado com este segmento (um lado) e um ponto interno, Fig.4;

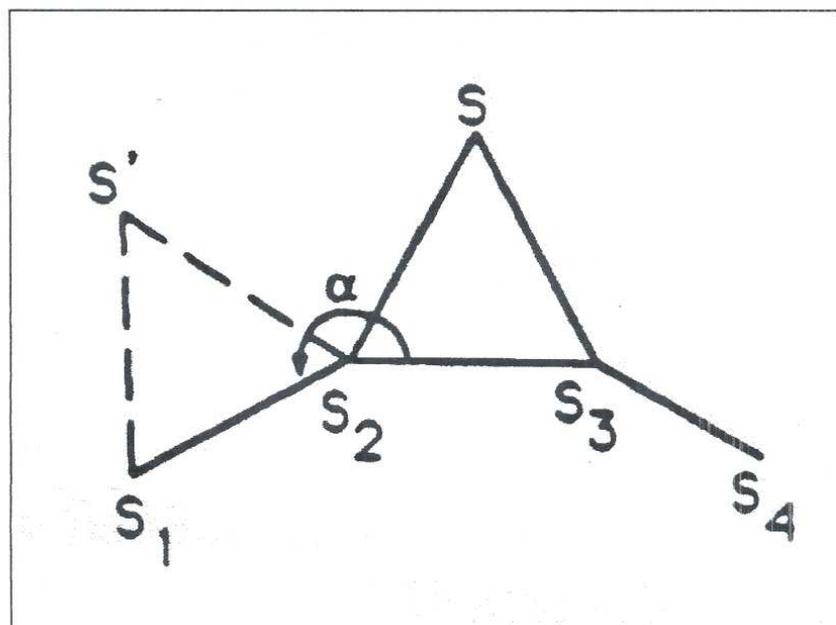


Fig.4- Padrão (c).

Os pontos internos criados são definidos de modo a satisfazer o critério de *ótimo*, isto é, os triângulos formados por estes pontos devem ser próximos de *triângulos equiláteros* (os melhores).

No caso do padrão (b) mostrado anteriormente, o vértice é gerado na linha bissetriz do ângulo  $\alpha$  na distância  $d_{S_3 S_3}$  do vértice  $S_3$ . Para o caso onde  $\pi/5 \leq \beta, \gamma \leq 2\pi - \pi/5$  a distância  $d_{S_3 S_3}$  é computada com lados adjacentes da seguinte maneira:

$$d_{SS3} = \frac{1}{6}(2d_{S_2S_3} + 2d_{S_3S_4} + d_{S_1S_2} + d_{S_4S_5})$$

Para situações onde  $\beta$  e  $\gamma$  não satisfazem este critério,  $\pi/5 \leq \beta, \gamma \leq 2\pi - \pi/5$ , a construção mostrada no padrão (a) é utilizada.

Para o padrão de construção (c) o triângulo mais próximo do equilátero é gerado usando o menor lado na região de geração do domínio.

Para cada estágio da geração é necessário verificar se o ponto gerado pertence ao domínio que ainda não foi plenamente preenchido com triângulos. Este fato assegura que o ponto criado pertence ao domínio em análise e não pertence a nenhum outro triângulo já gerado. Esta verificação é crucial para este tipo de método. Para domínios bidimensionais o ponto será um ponto interno se as retas dos lados ligados a ele não interceptam nenhuma aresta dos triângulos já existentes.

esta etapa de geração dos triângulos com estes padrões, a nova frente de geração é formada com:

- A subtração dos lados pertencentes ao(s) triângulo(s) criado(s) que já existiam na *frente de geração* e
- Pela adição dos novos lados pertencentes ao(s) triângulo(s) criado(s) que não existiam na *frente de geração*.

O mesmo processo de geração repete-se para a nova *frente de geração* até que todo o domínio esteja completo. Na Fig.5 ilustra-se uma malha de elementos triangulares completa. Já nas Figs. 6(a) e 6(b) mostra-se vários estágios da *frente de geração* da malha para o domínio mostrado na Fig.5.

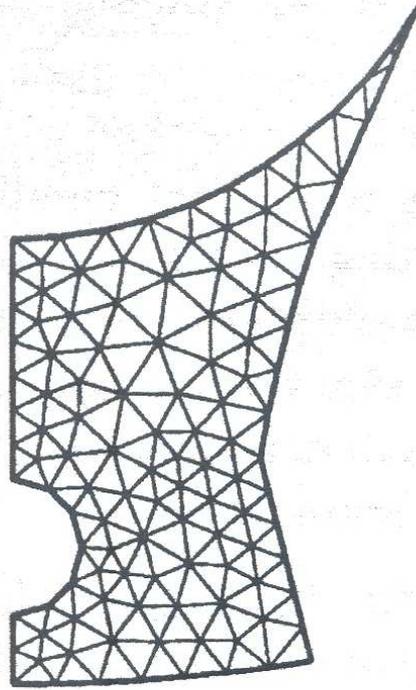


Fig.5- Malha completa de Elementos Triangulares.

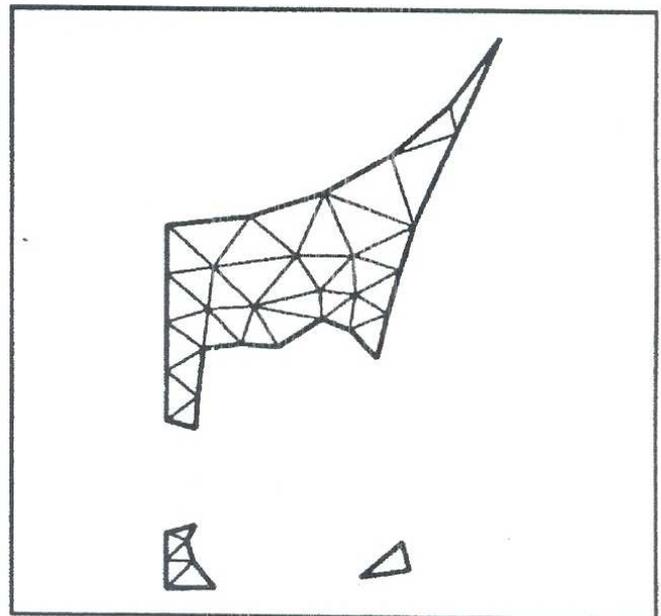
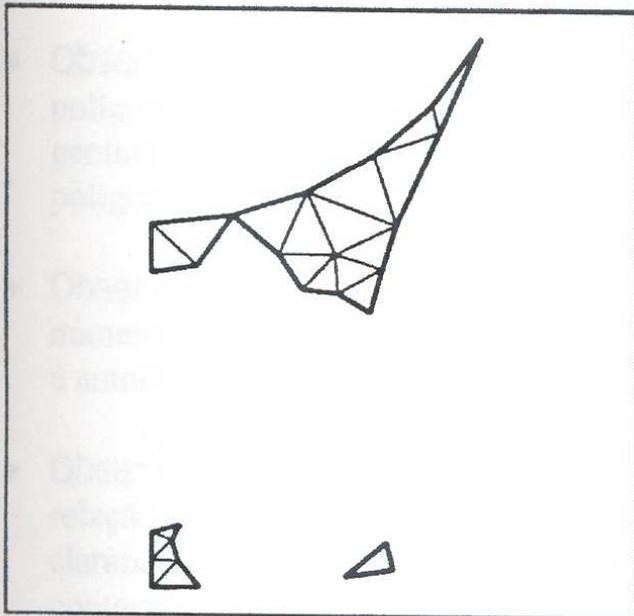


Fig.6a- Frente de Geração da Malha.

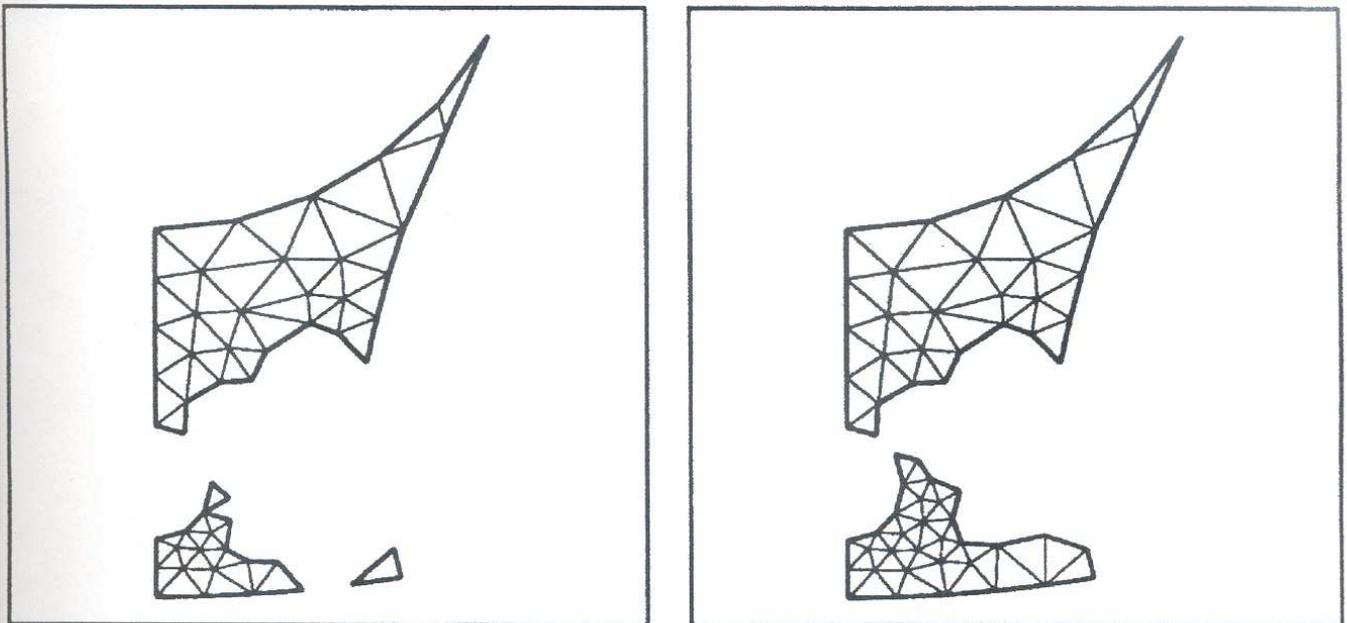


Fig.6b-Frente de Geração da Malha.

- Observação 2: O número total de elementos da malha é função da geometria, do número de pontos no contorno e da distribuição dos pontos no contorno.
- Observação 3: Note que o contorno externo e o(s) contorno(s) internos são poligonais (após a divisão inicial em segmentos). Assim, a presença de furos na geometria passa a ser tratada de maneira simples, isto é, passa a ser apenas um polígono a mais na análise.
- Observação 4: Como a geração dos elementos está intimamente ligada com o número de elementos do contorno, em locais de maior densidade a malha também é automaticamente refinada.
- Observação 5: A geração mostrada na Fig.7 mostra uma pequena variação com relação ao mostrado nas Figs.6(a) e 6(b). Neste caso, a frente de geração claramente é atualizada a partir da geração de todos os elementos ligados ao contorno inicial do problema. Esta técnica é a utilizada no GerTRI.

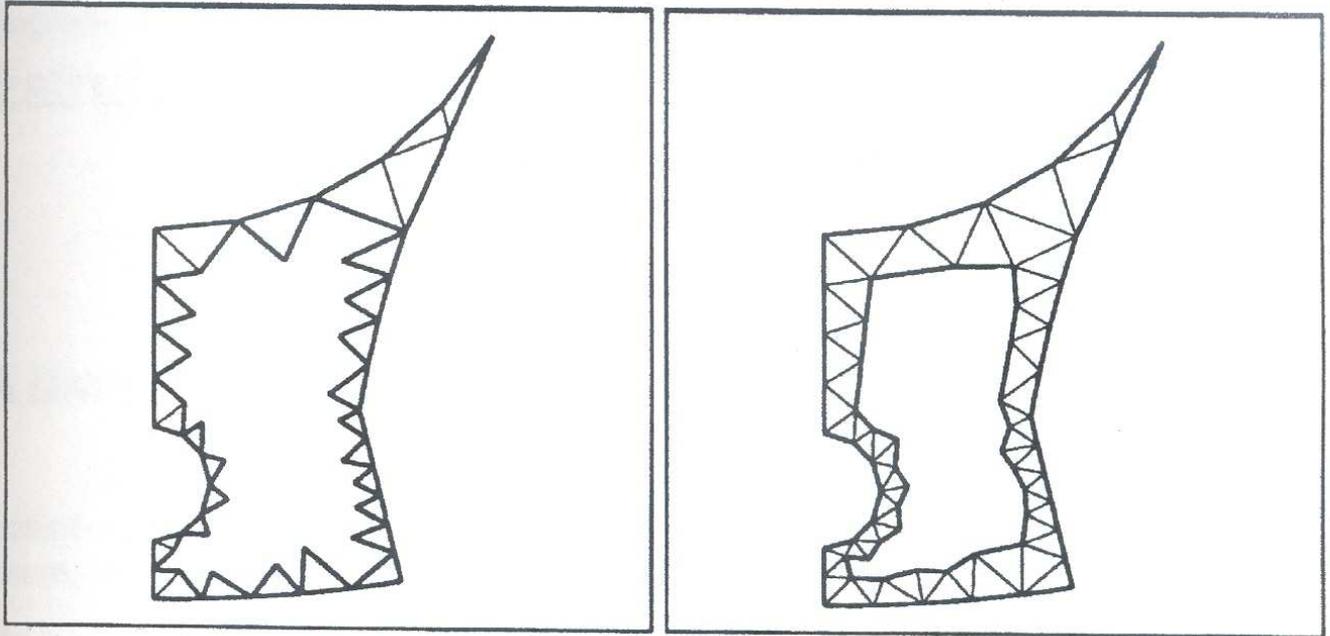


Fig.7-Preenchimento do domínio a partir da geração de todos os elementos do contorno.

## Capítulo 4

## Estrutura dos Dados

## A Divisão do Contorno e o seu Refino Automático

Após a construção do modelo geométrico (CAD), todos os elementos que compõem os contornos interno e externo podem ser identificados como sendo *linhas*, *arcos*, *círculos*, *elipses*, *etc...*

Para iniciar o processo de geração da malha, um *tamanho médio* de elemento é selecionado pelo usuário (via mouse definindo dois pontos na tela). De posse desta informação, todos os elementos geométricos que compõem os contornos do modelo são *subdivididos em segmentos lineares* delimitados por dois nós no contorno, veja Fig.1a. Estes segmentos de contorno passam a ser identificados tal qual os elementos finitos unidimensionais lineares, isto é, através de uma *matriz de conectividade* onde é feita a correlação dos nós locais 1 de 2 com os nós gerados no contorno, veja Fig.1b.

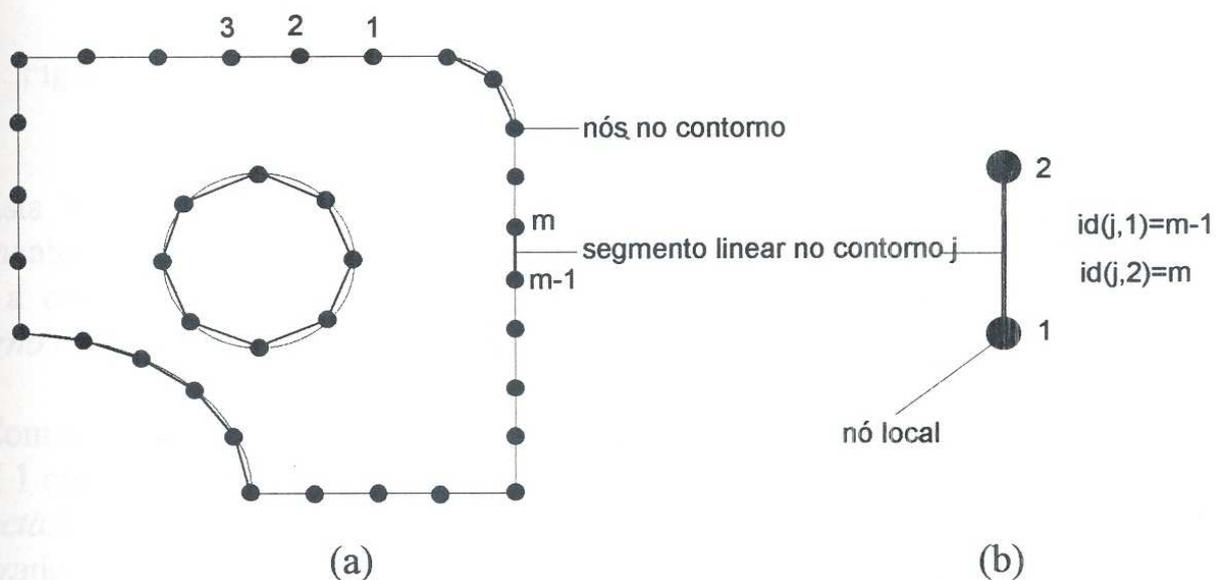


Fig.1-(a) Segmentos no contorno e (b) Conectividade do segmento  $j$ .

Após a geração dos *segmentos lineares* no contorno; mesmo para as elipses e círculos; a primeira tarefa a ser executada é verificar se a matriz de conectividade esta

com a numeração correta. A conectividade dos segmentos de contorno deve ser construída de tal modo que obedeça a seguinte regra:

- numeração *anti-horária* para os segmentos do *contorno externo* e
- numeração *horária* para os segmentos do(s) *contorno(s) interno(s)*.

Este procedimento é adotado para garantir que durante o processo de geração os elementos triangulares com arestas correspondentes a estes segmentos de contorno tenham sempre *áreas positivas*.

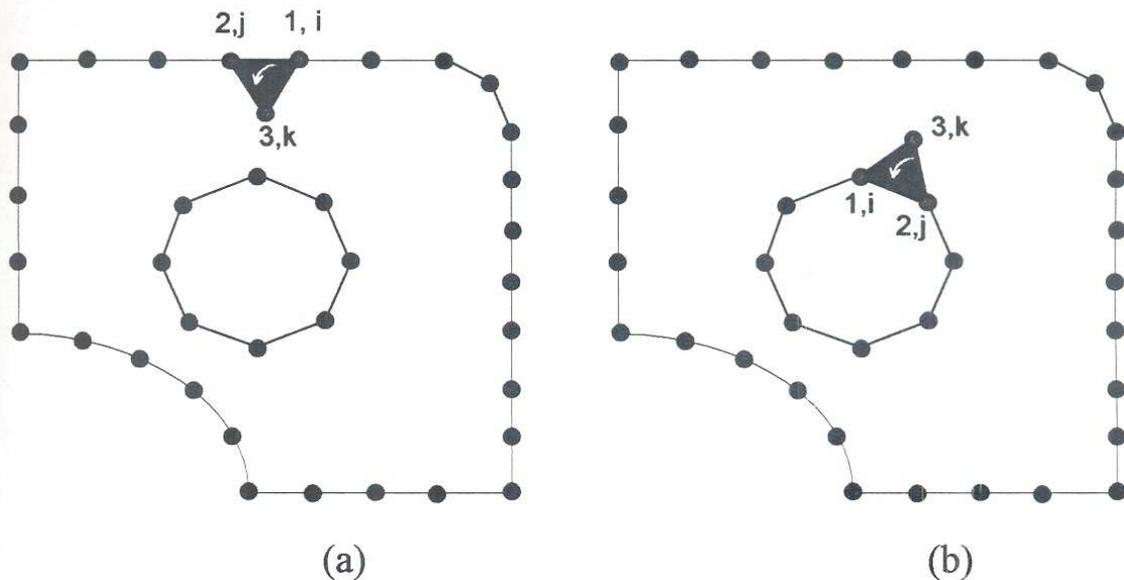


Fig.2-(a) Numeração correta do contorno externo. (b) Numeração correta do(s) contorno(s) interno(s).

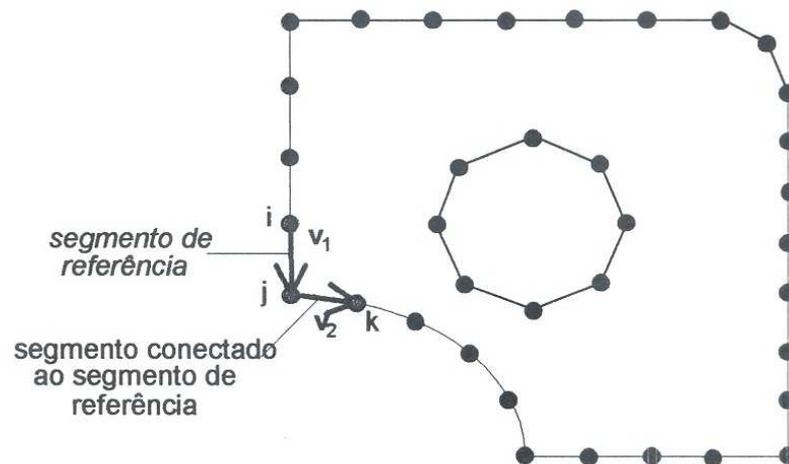
Esta etapa de verificar a numeração correta da matriz conectividade dos segmentos do contorno é executada a partir da seleção do segmento cujo *nó local 1* tem a coordenada  $x$  máxima. Seguramente este segmento faz parte do *contorno externo* e é tomado como sendo *segmento de referência*.

Com as coordenadas do segmento de referência define-se o vetor  $\mathbf{v}_1$  ligando o *nó local 1* com o *nó local 2*. Com as coordenadas do *nó local 2* identifica-se o segmento *conectado ao segmento de referência* e define-se o vetor  $\mathbf{v}_2$  de maneira análoga ao realizado para o definir o vetor  $\mathbf{v}_1$ , porém com as coordenadas do segmento conectado.

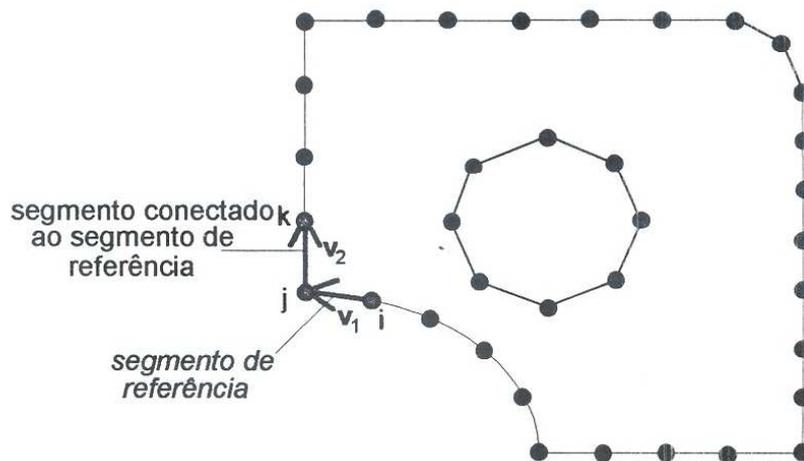
A conectividade deste elemento de referência e de todos os elementos do *contorno externo* é correta se  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 > 0$ ; onde  $\times$  indica produto vetorial. Se  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 < 0$  a conectividade do elemento de referência e de todos os outros segmentos do *contorno externo* devem ser trocados, Fig.3.

A última hipótese a ser estudada é quando  $v_1 \times v_2 = 0$ . Nesta situação os dois segmentos analisados estão sobre a mesma reta.

Para resolver este pequeno problema, o segmento conectado ao segmento de referência passa ser tomado como sendo o segmento de referência e um novo segmento conectado é procurado até que se obtenha uma situação onde  $v_1 \times v_2 \neq 0$ , Fig.4.



(a)



(b)

Fig.3-(a)Numeração correta do contorno externo e (b) Numeração incorreta.

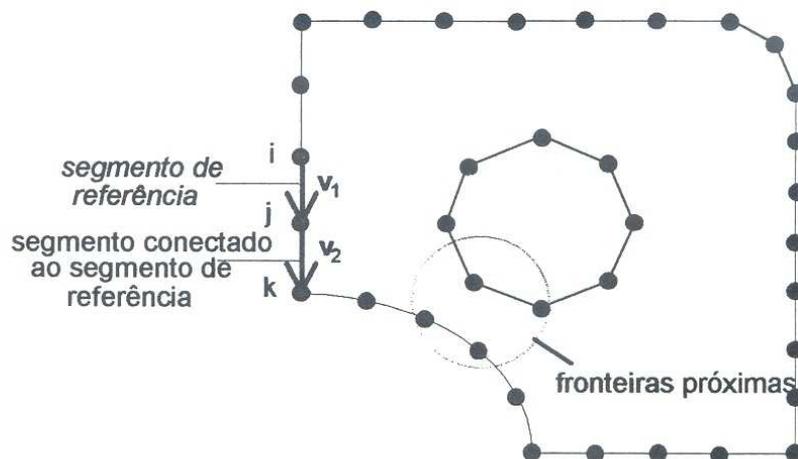


Fig.4-Segmentos em uma mesma reta.

Análise igual é realizada para o(s) contorno(s) interno(s). Vale a pena lembrar que a numeração correta para os segmentos pertencentes ao(s) contorno(s) internos é quando  $v_1 \times v_2 < 0$ .

Entretanto, como mostra a Fig.4, algumas regiões do domínio em análise podem possuir contornos externos e internos bem próximos. Nesta situação, uma nova geração de segmentos no contorno é realizada *automaticamente* e tendo como base o procedimento descrito a seguir.

Para identificar contornos próximos (fronteiras próximas) é verificada a distância do ponto médio do segmento de referência até o segmento mais próximo nos contornos interno e externo, chamada de  $d$ . Este procedimento é realizado usando a equação paramétrica da *reta normal* que passa pelo *ponto médio* do segmento de referência (já com a numeração devidamente verificada) e os pontos de interseção desta normal com os outros segmentos dos contornos internos e externo.

Se a distância  $d$  é inferior a 1,7 vezes o tamanho do segmento de referência,  $L$ ; Fig.5, o segmento de referência é subdividido.

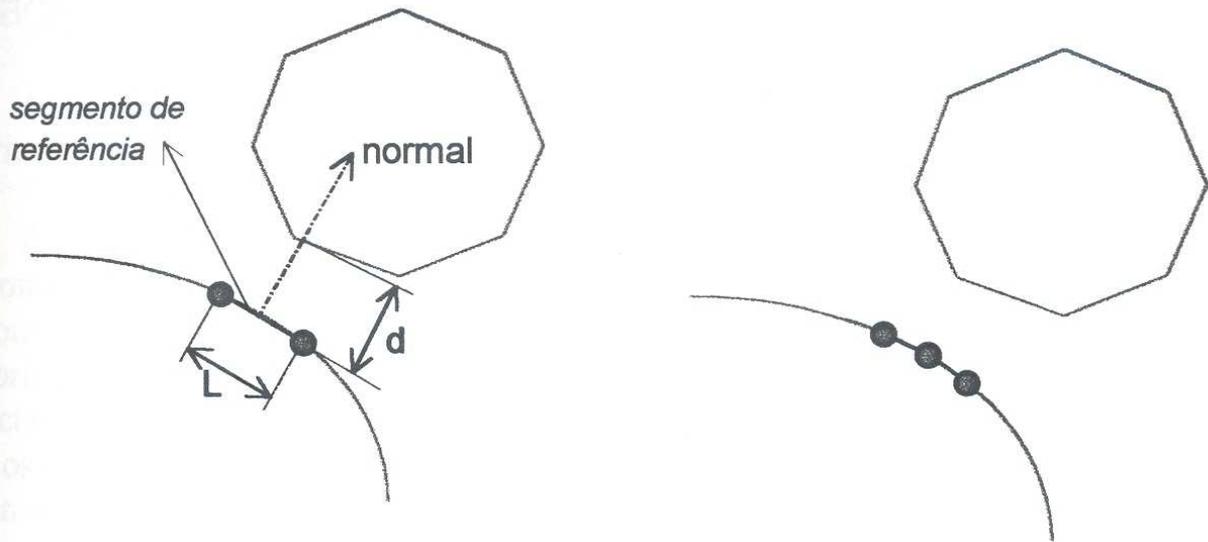


Fig.5-Subdivisão dos segmentos próximos.

Após verificar a numeração correta da matriz de conectividade dos segmentos de contorno e realizar a subdivisão dos segmentos nas regiões onde os contornos estão próximos, o próximo passo é gerar nós internos no domínio.

Uma outra estratégia utilizada por um grande número de pesquisadores e aplicativos comerciais é o refinamento automático de acordo com o do raio de curvatura do contorno. Entretanto, o mais comum é o usuário especificar regiões de refinamento no contorno. Esta estratégia pode ser vista na Fig. 6 e ainda não foi implementada no Gertri.

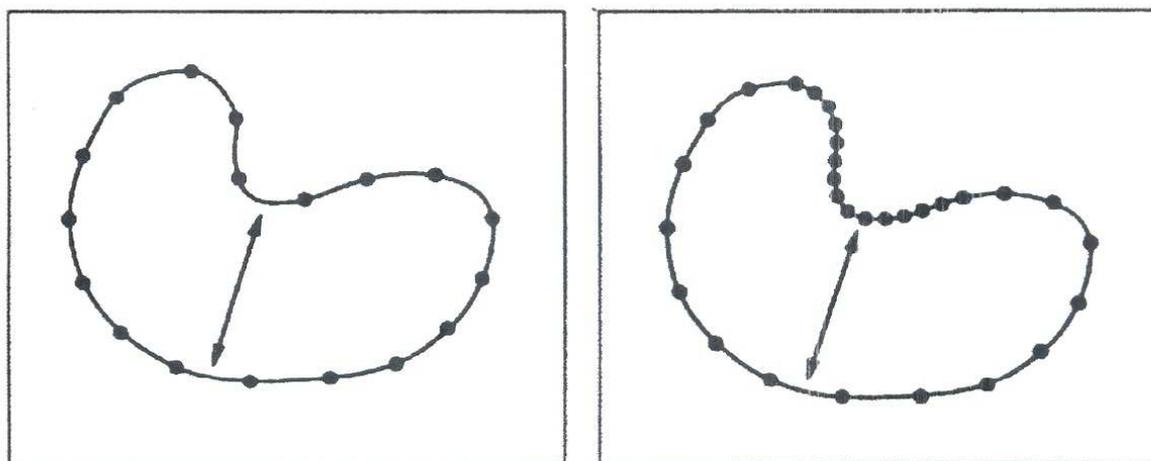


Fig.6-Geração dos Nós no Contorno igualmente espaçados e refinados em uma região localizada.

## Geração dos Nós Internos

A geração dos nós internos é feita em duas etapas e é comum aos dois algoritmos implementados.

A **primeira etapa** é realizada com o objetivo de obter elementos triangulares na fronteira próximos a *triângulos equiláteros*. São gerados nós no domínio a partir do ponto médio de cada segmento do contorno e a uma distância igual a 0,86 vezes o comprimento do segmento com o objetivo de assegurar que todos os elementos conectados ao contorno preservem uma razão de forma ótima, que só é distorcida para os elementos próximos a cantos, Fig.7a. Nesta circunstância dois nós de domínio podem estar bastante próximos e apenas um deles é mantido na lista de nós internos e com as coordenadas média destes dois nós, Fig.7b.

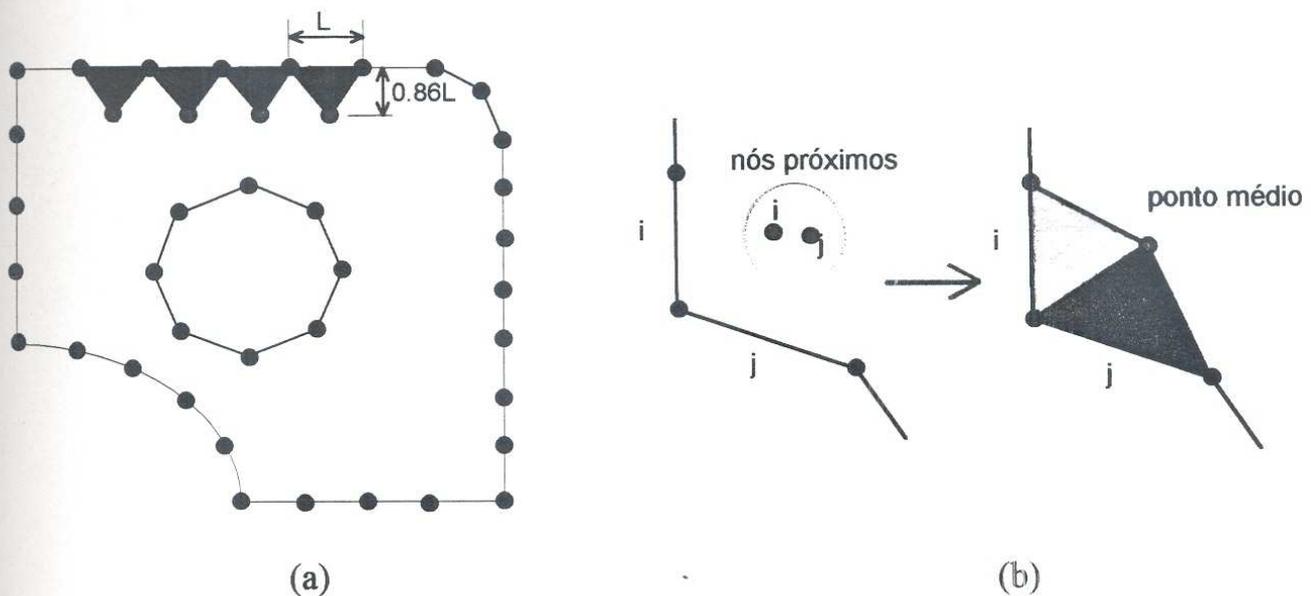


Fig.7-Geração dos nós internos a partir do contorno (a) correção nos cantos (b).

A **segunda etapa** é realizada usando técnica semelhante à descrita por Lo (1985). São geradas retas horizontais a partir da cota máxima,  $y_{\max}$ , até a cota mínima,  $y_{\min}$ , separadas de uma distância igual a 0,86 vezes o comprimento do tamanho médio dos segmentos do contorno,  $0,86 L_{\text{médio}}$ .

Como o contorno é aproximado com segmentos lineares, não é difícil calcular os pontos de interseção destas retas horizontais com os segmentos do contorno para definir os intervalos onde serão gerados os nós no domínio, Fig.8a.

Para melhorar a qualidade dos triângulos estes nós de domínio são gerados de tal forma que o primeiro nó de uma linha horizontal esteja defasado do primeiro nó

da horizontal posterior de  $0,5 L_{\text{médio}}$ , Fig.8b. Nesta etapa nenhum nó é gerado no domínio se sua distância a qualquer nó já existente na malha é inferior a  $0,5 L_{\text{médio}}$ .

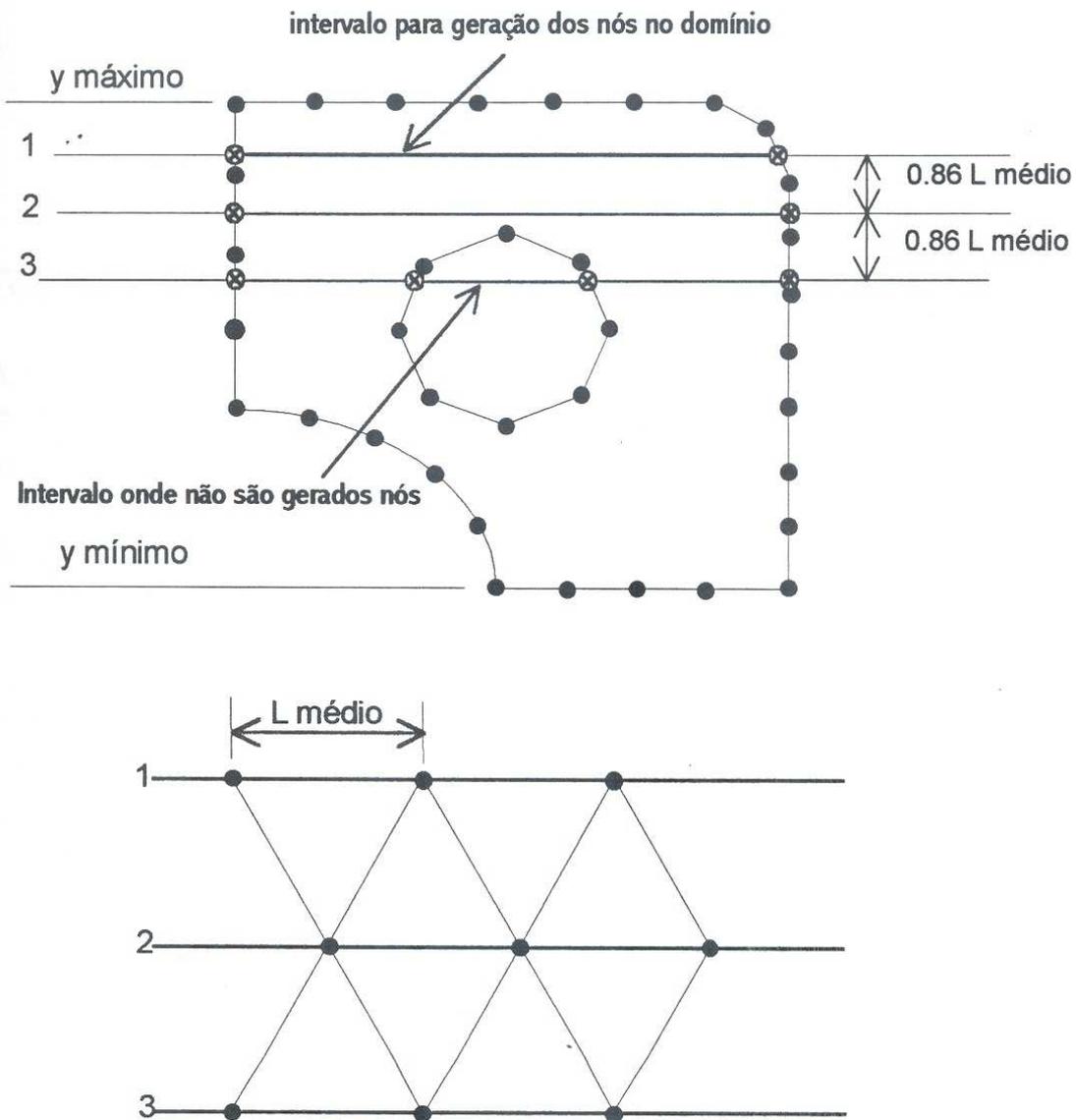


Fig.8-(a)Geração dos nós de domínio. (b) Definição das retas e geração dos nós no domínio.

## Capítulo 5

## Algoritmo 1

A Geração dos Triângulos *Ótimos*

A técnica utilizada para a geração dos triângulos é progressão da *frente de geração* a partir do contorno. Usando esta metodologia, os elementos são gerados a partir do contorno inicial e a cada novo triângulo gerado este contorno é modificado.

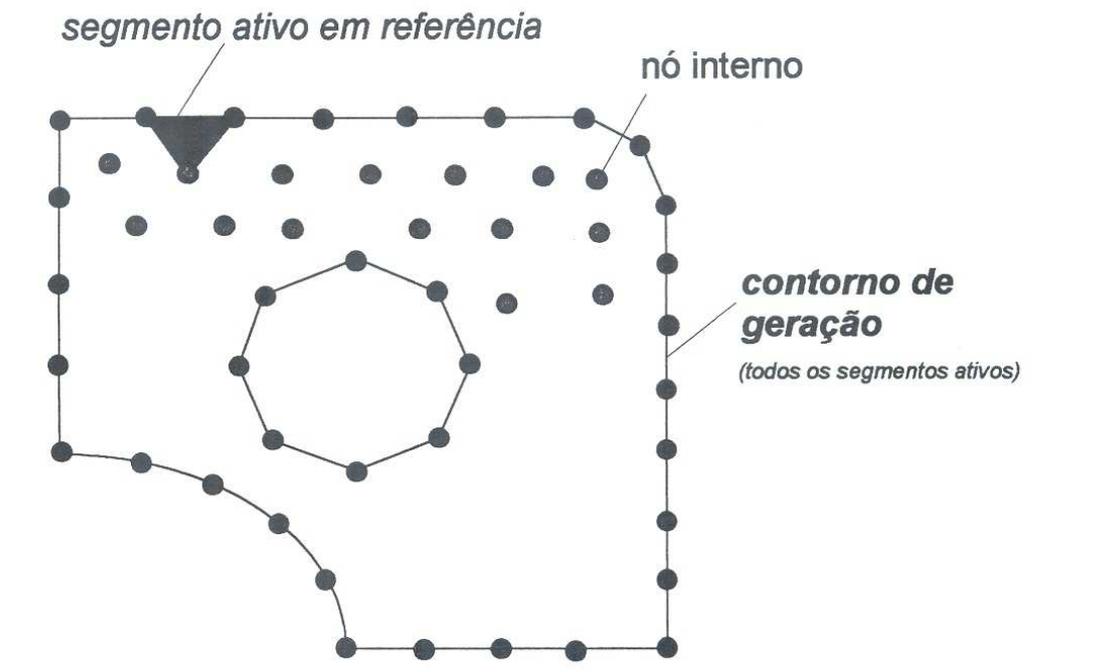
No início do processo *todos* os segmentos do(s) contorno(s) (interno e externo) são designados de *segmentos ativos*.

Tomando como *referência* um dos segmentos ativos, procura-se nos *nós internos* e nos nós dos *outros* segmentos ativos um nó que gere o *triângulo ótimo*. Feita a escolha, este segmento ativo de referência passa para a lista dos *segmentos inativos* e duas situações podem ser encontradas:

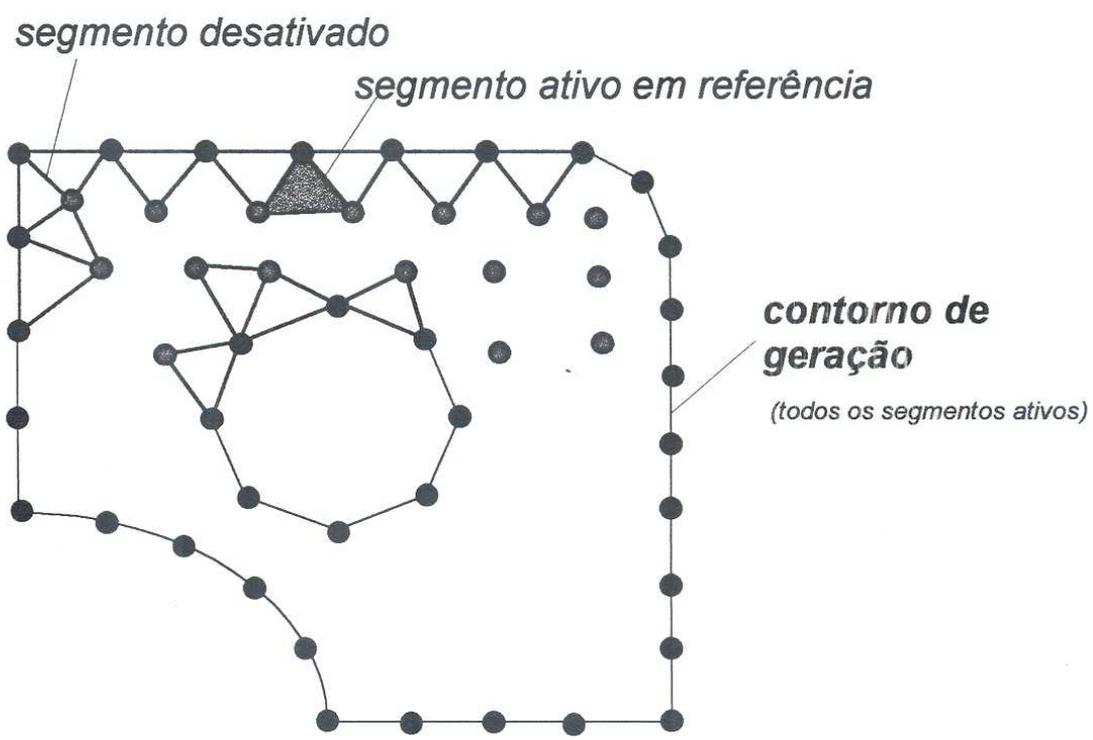
1. O nó selecionado pertence a lista dos nós internos. Neste caso são criados mais *dois novos* segmentos ativos e o nó é *eliminado* da lista dos nós internos, Fig.1a; e
2. O nó selecionado pertence a outro segmento ativo. Neste caso os dois segmentos ativos (o de *referência* e o *selecionado*) são *desativados* e existe a possibilidade de criar um novo segmento ativo, Fig.1b. O novo segmento ativo é *criado* se ele não pertencer a lista dos segmentos ativos existentes. Se este segmento também pertencer a lista dos segmentos ativos existentes, ele também é *desativado*.

Dessa maneira, quando um *novo* triângulo é gerado um *novo contorno de geração*, ou frente de geração, também é criado e a lista dos *segmentos ativos* é necessariamente alterada e a lista dos *nós internos* também pode sofrer alterações.

O processo de geração de novos triângulos é repetido até que não exista mais *nenhum segmento ativo* no *contorno de geração*. Nesta situação a malha esta gerada.



(a)



(b)

Fig.1-(a) Geração de triângulo a partir de nó interno.(b) Geração de triângulo a partir de outro segmento ativo.

## A Escolha dos Triângulos *Ótimos*

Para a escolha dos *triângulos ótimos* são verificados três fatores em conjunto:

1. Área positiva;
2. Melhor fator de forma; e
3. Se o nó selecionado não gera arestas que *interceptam* os outros contornos ativos do contorno de geração.

Após a seleção de um nó, a área do novo triângulo, Fig.2, é calculada com uso das coordenadas dos três nós com a seguinte fórmula:

$$A = (x_2y_3 + x_1y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 - x_2y_1 - x_3y_2) / 2 \quad (1)$$

Se a área  $A$  do novo triângulo é positiva, calcula-se o fator de forma,  $ff$ , do triângulo que é definido como sendo:

$$ff = A \times D / d \quad (2)$$

onde  $D/d$  é a razão entre o diâmetro *circunscrito* e o diâmetro *inscrito* no triângulo. Esta razão é facilmente calculada com a seguinte expressão:

$$D/d = abc / 4(s-a)(s-b)(s-c) \quad (3)$$

onde  $a$ ,  $b$  e  $c$  designam os comprimentos das arestas do triângulo e  $s = (a+b+c)/2$ .

A razão da escolha do fator de forma  $ff$  como parâmetro da seleção do triângulo *ótimo* reside em dois fatores:

- O valor numérico da área dá indicativos da distância do nó selecionado até o *segmento ativo de referência*; e
- A razão  $D/d$  dá indicativos sobre a *qualidade* deste triângulo, pois para os triângulos equiláteros (melhor triângulo possível)  $D/d=2$ . Triângulos com razão  $D/d$  muito grande são descartados.

O critério utilizado para a seleção do *triângulo ótimo* é o menor valor de  $ff$ .

Finalmente, o critério referente ao cruzamento das arestas do *novo* triângulo com os *outros segmentos ativos* do *contorno de geração* é para evitar a superposição de triângulos.

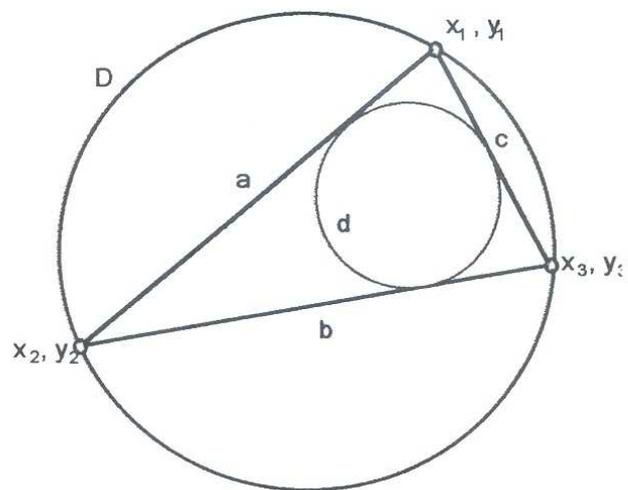


Fig.2- Circunferência Inscrita e Circunscrita.

## Capítulo 6

## Algoritmo 2

Esta segunda estratégia para a geração dos triângulos pode ser dividida em 3 etapas e, seguramente apresenta resultados de tempo de processamento bastante melhores do que os resultantes para a estratégia anterior.

**Etapa 1: A Geração dos Triângulos no Contorno**

Após a geração de todos os segmentos do contorno são gerados os triângulos associados a estes segmentos. Nesta etapa, com o objetivo de obter triângulos mais próximos possíveis a triângulos equiláteros o terceiro nó do triângulo (os outros dois já são os do segmento) é gerado utilizando-se a normal ao segmento e a uma distância de  $0,866 L_{\text{segmento}}$ .

Utilizando esta prática, os triângulos do contorno serão triângulos próximos de triângulos ótimos. A exceção ocorre quando existem os cantos na geometria, Figs.1a e 1b.

Esta etapa também é denominada de *geração dos triângulos fáceis*.

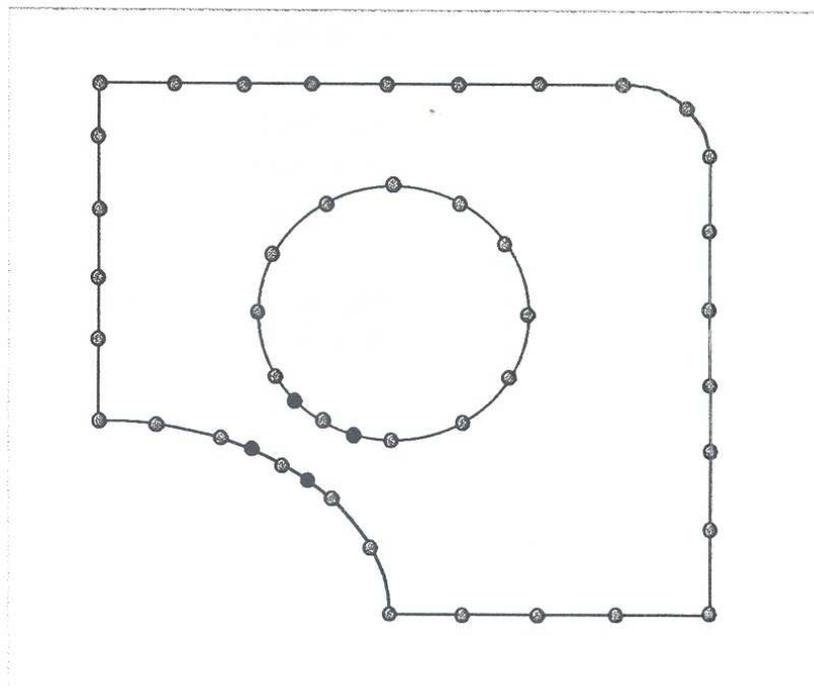


Fig. 1a- Contornos divididos já prevendo a existência de elementos menores em pontos próximos ao contorno interno e externo.

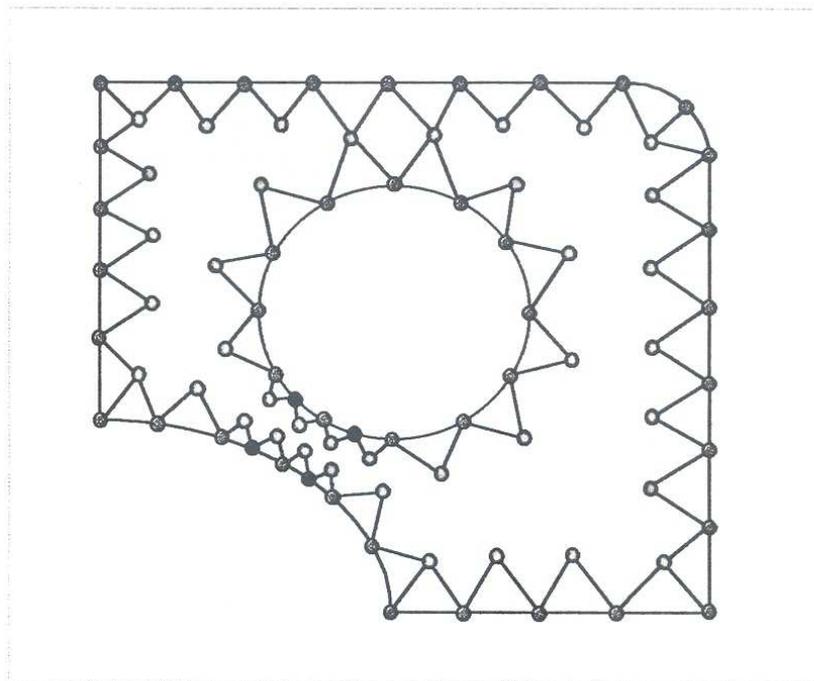


Fig.1b-Malha de elementos gerados a partir do contorno.  
Elementos próximos da *forma ótima* com exceção aos alocados em cantos do contorno.

## Etapa 2: A Geração dos Triângulos do Domínio

Esta etapa é também denominada de *geração dos triângulos muito fáceis*.

Utilizando o mesmo procedimento para a geração dos nós internos com o uso de retas paralelas horizontais como descrito anteriormente, é possível construir triângulos para o *preenchimento de quase todo o domínio*, como ilustrado na Fig.2.

Nesta figura mostra-se os nós próximos ao contorno (cor vermelha) que não são utilizados para a geração dos triângulos do domínio (triângulos com lados pontilhados).

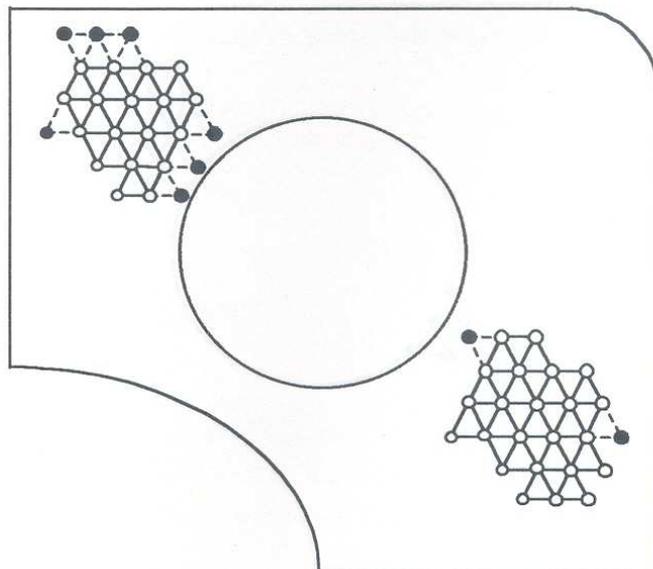


Fig.2-Geração dos *Triângulos muito fáceis*.

É interessante notar que nesta etapa pode-se também realizar o refinamento local da malha com uso dos dados da malha de contorno, isto é, ao redor dos pontos onde a malha de contorno é refinada, a malha de domínio também pode ser refinada automaticamente.

### **Etapa 3: O Acoplamento da Malha.**

Esta etapa também pode ser denominada de *costura*, isto é, o único trabalho restante é unir as duas malhas pré-existentes, como é mostrado a seguir, Fig.3.

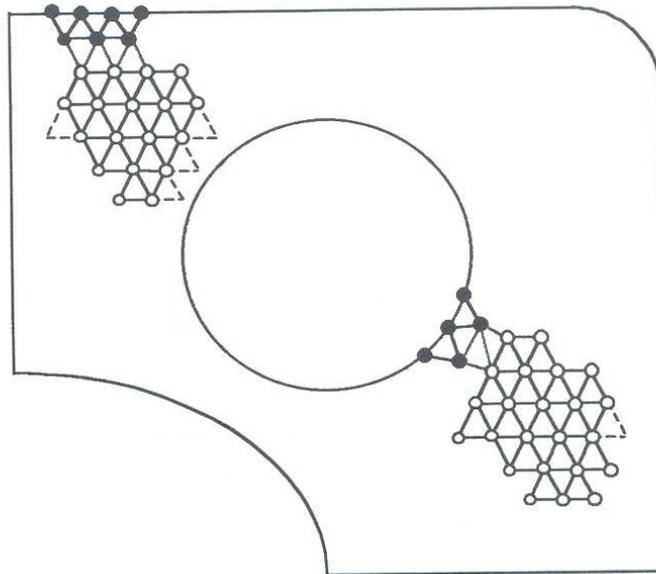


Fig.3-Geração dos *Triângulos de acoplamento* dos triângulos de domínio com os triângulos de contorno.

## Capítulo 7

# A Regularização e Refino da Malha

## A Regularização da Malha

O esquema utilizado na primeira etapa de geração dos nós de domínio gera todos os triângulos com arestas no contorno com forma de triângulos quase equiláteros. Portanto, todos estes triângulos estão próximos de triângulos ótimos,  $D/d=2$ .

Entretanto, nem todos os triângulos gerados possuem esta forma. Alguns triângulos são obtidos conectando estes triângulos quase equiláteros com os nós internos oriundos da segunda etapa de geração dos nós de domínio podem ter forma relativamente distorcida. O mesmo pode ocorrer em regiões onde foi feito um refino automático nos segmentos de contorno e em regiões de cantos.

Estes triângulos com forma distorcida são regularizados com uso da *Regularização Laplaciana*, Sezer & Zeid (1991), e cada nó do domínio é deslocado para a posição definida pela média das coordenadas dos nós que pertencem aos elementos com este nó em comum, Fig.1.

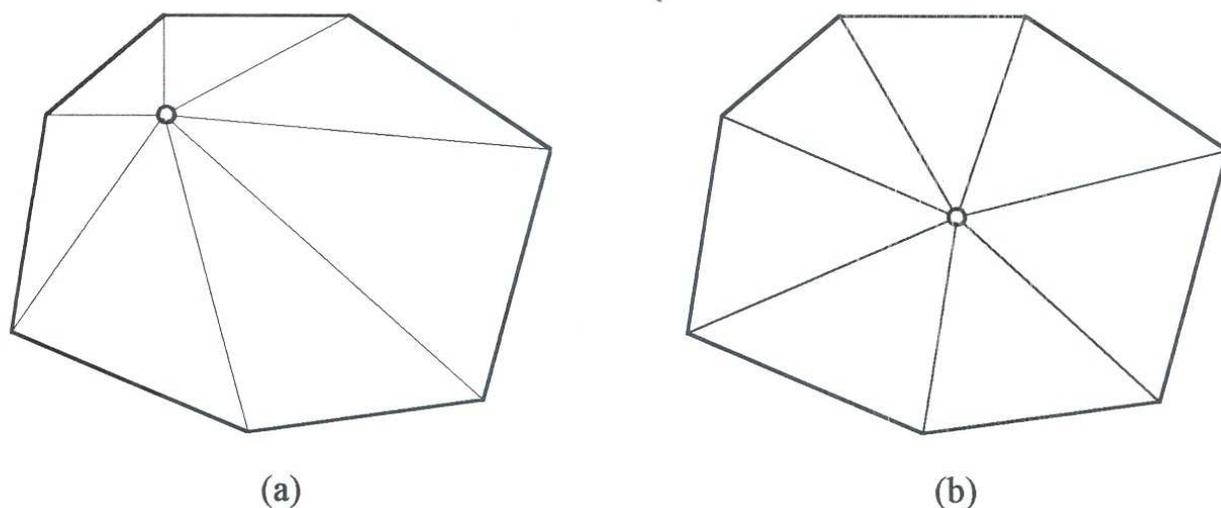


Fig.1-Regularização Laplaciana (a) Original (b) Modificada

Como a *Regularização Laplaciana* é um processo iterativo, neste trabalhos foram executadas 4 iterações para a obtenção da malha regularizada. Boa convergência já é verificada com apenas 2 iterações.

Independente do algoritmo utilizado na geração da malha, esta regularização é realizada após a totalização dos triângulos.

## O Refino Localizado

De posse de uma malha inicial regularizada, mesmo antes de um processo h-adaptativo, o usuário pode desejar o refino de toda a malha ou o refino localizado da malha. Para efetuar esta tarefa foi empregado o seguinte esquema de refino:

- O usuário define a região de refino identificando-a com dois pontos que definem um retângulo (via mouse);
- Todos os triângulos inteiramente contidos nesta região são subdivididos em 4 triângulos utilizando o ponto médio de cada uma das arestas;
- Os triângulos que possuem apenas uma aresta totalmente contida nesta região de refino são subdivididos em apenas 2 triângulos utilizando o ponto médio e o vértice oposto a esta aresta; e
- Como existe a possibilidade de gerar triângulos distorcidos, principalmente nesta última etapa, nova regularização da malha é realizada.

Após estas etapas o processo de refino localizado da malha esta completo.

## Capítulo 8

# *Exemplos e Conclusões*

- **Exemplo 1.** Neste exemplo é mostrada a geração da malha com segmentos adicionais nos contornos onde existem fronteiras próximas. Sem nenhum refinamento adicional, a malha resultante é a mostrada na Fig.1. Note que o tamanho médio do elemento é bem maior que o tamanho na região refinada.
- Tempo de processamento = 6,593 s (486dx33 Intel)
- Algoritmo=2

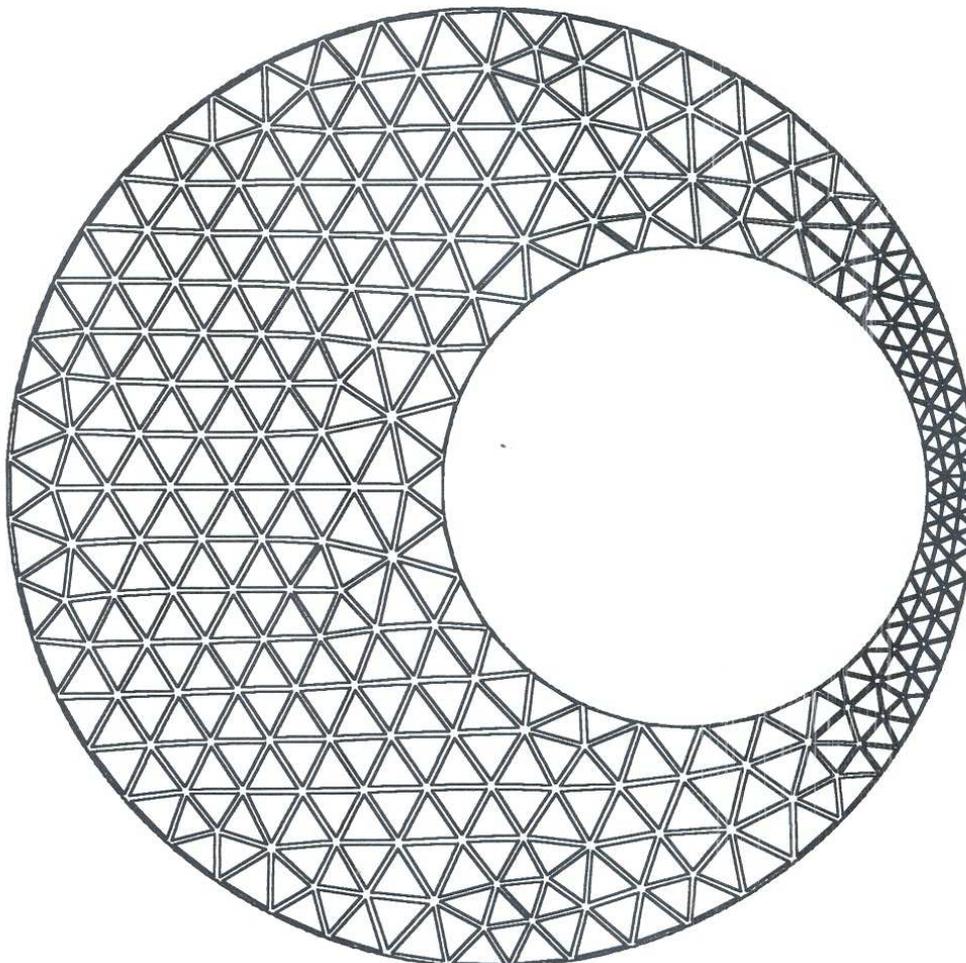


Fig.1-Malha de Elementos Finitos com 456 elementos após a regularização.

- Exemplo 2. Mostra-se neste exemplo as etapas da geração da malha sem a regularização da malha e com a regularização da malha.
- Número de elementos gerados = 420
- Tempo de processamento para gerar a malha = 4,670 s (Fig.2-a/b)
- Tempo de processamento para o refino da malha = 6,428 s (Fig.2-c/d)
- Algoritmo=2

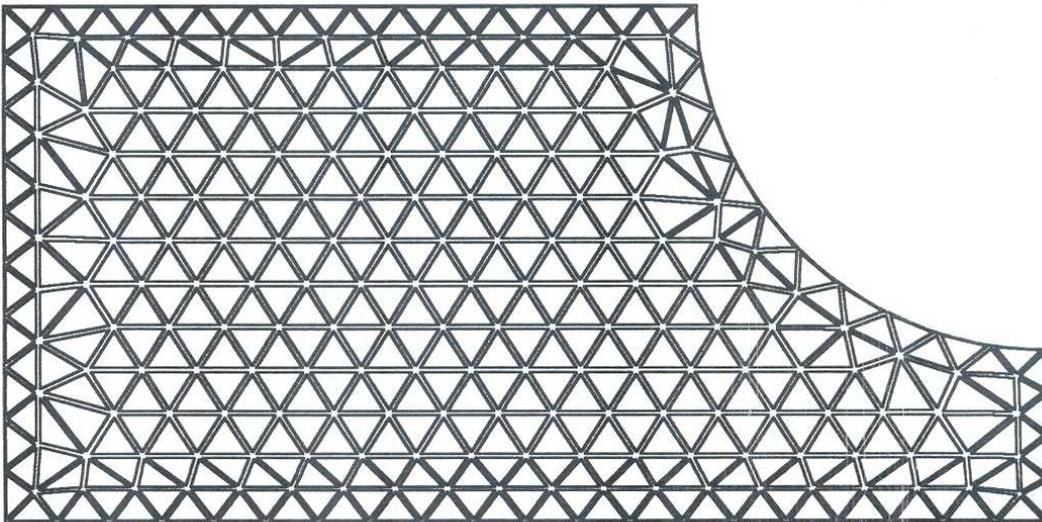


Fig.2- (a) Malha Inicial - Sem regularização

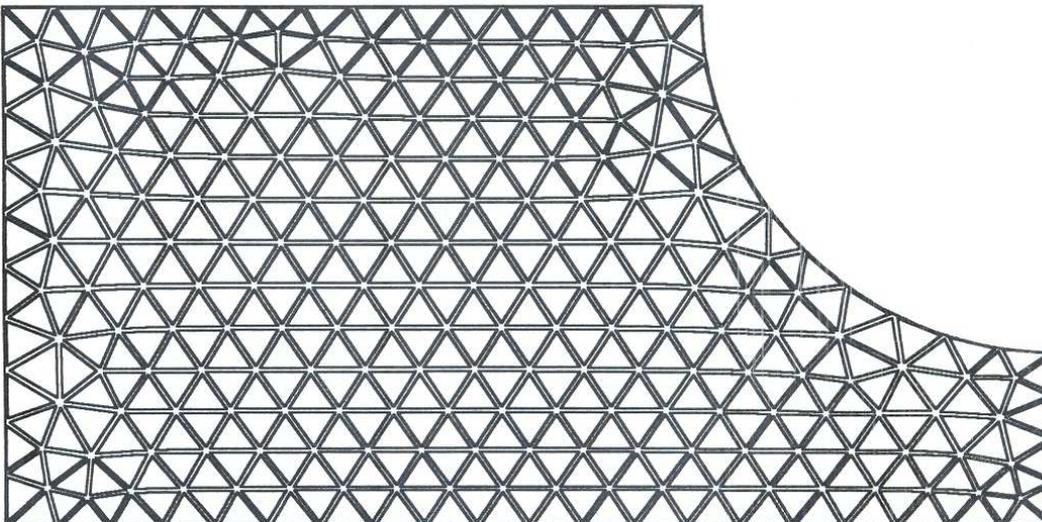


Fig.2- (b) Malha Inicial - regularizada

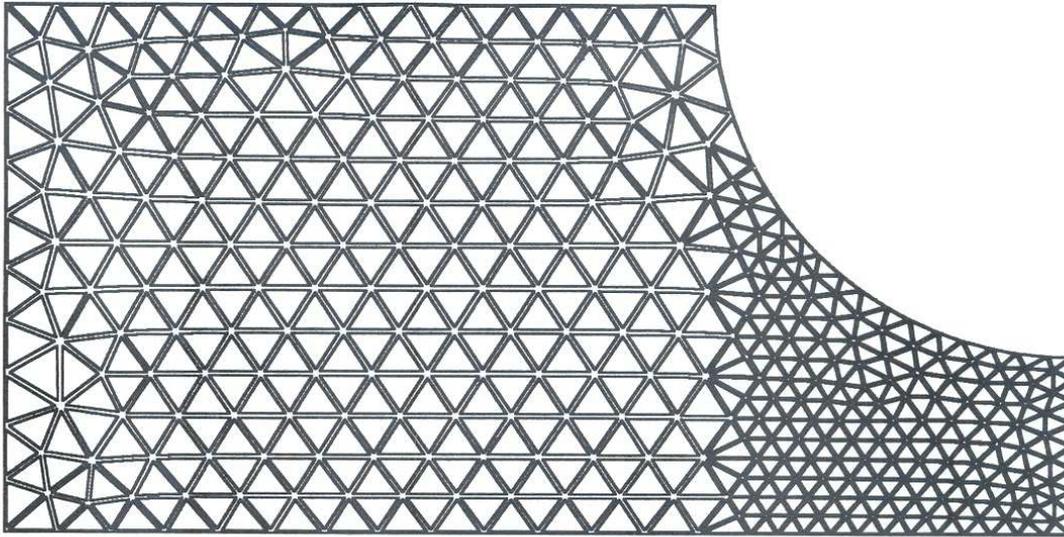


Fig.2 (c) Malha com Refino Localizado sem Regularização

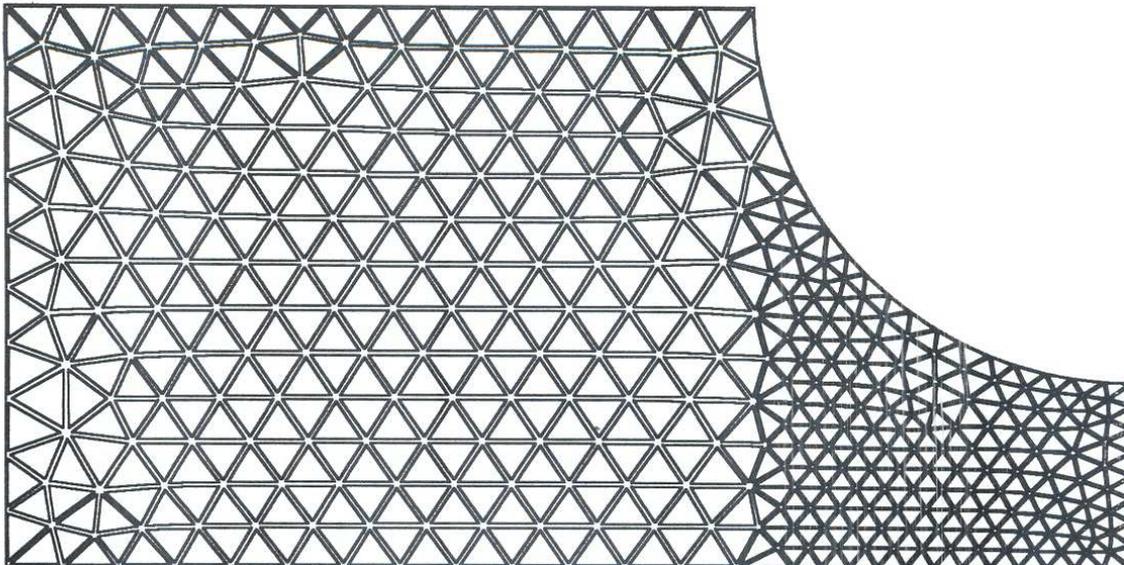


Fig.2 (d) Malha com Refino Localizado Regularizada.

- Exemplo 3. Neste exemplo é realizada a geração da malha para domínios com furos e com contornos próximos.
- Número de elementos = 589
- Tempo de processamento para gerar a malha = 9.505 s
- Cpu= 486dx33 Intel
- Algoritmo=1

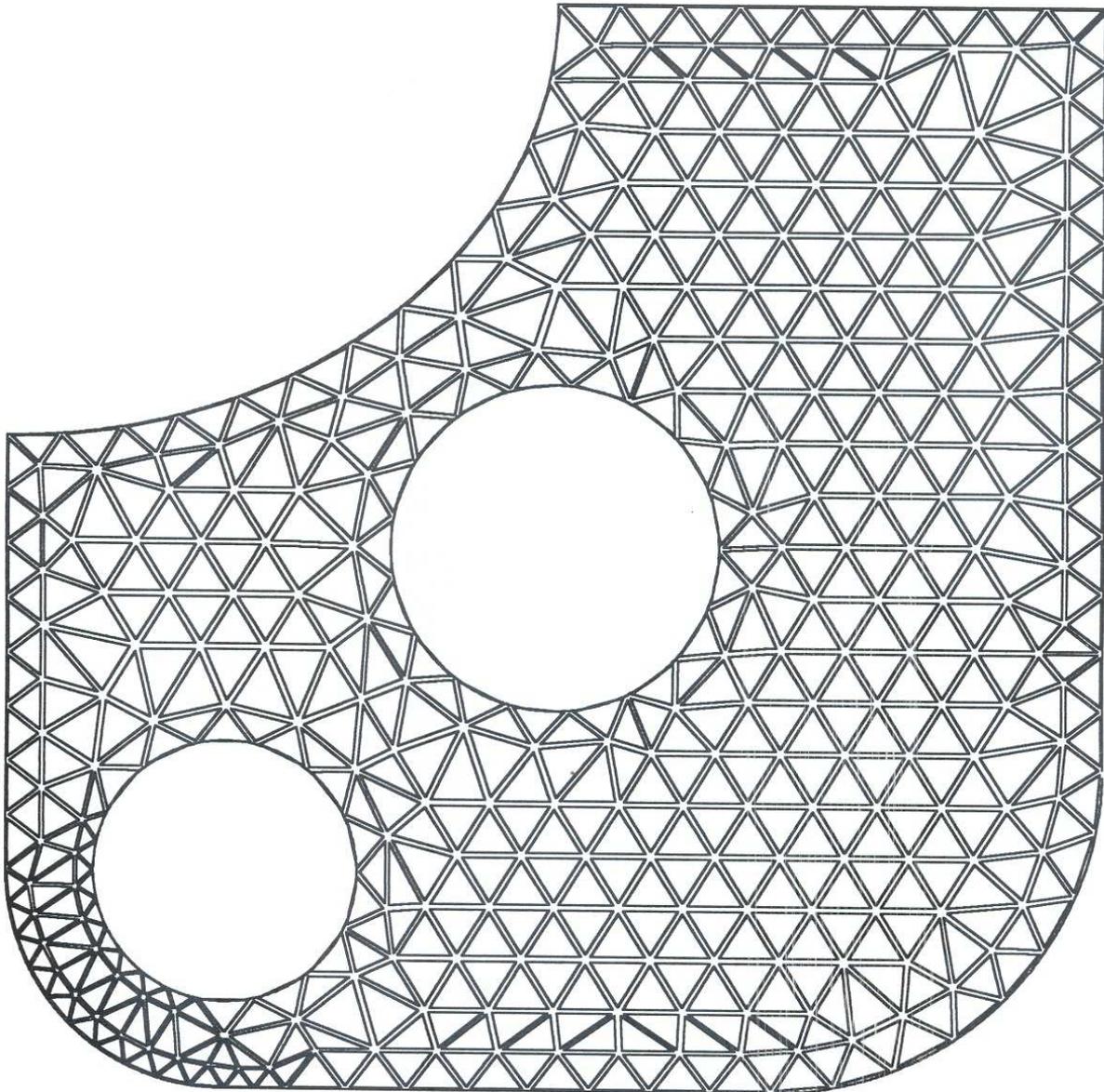


Fig.3 (a) Malha Inicial - Sem regularização

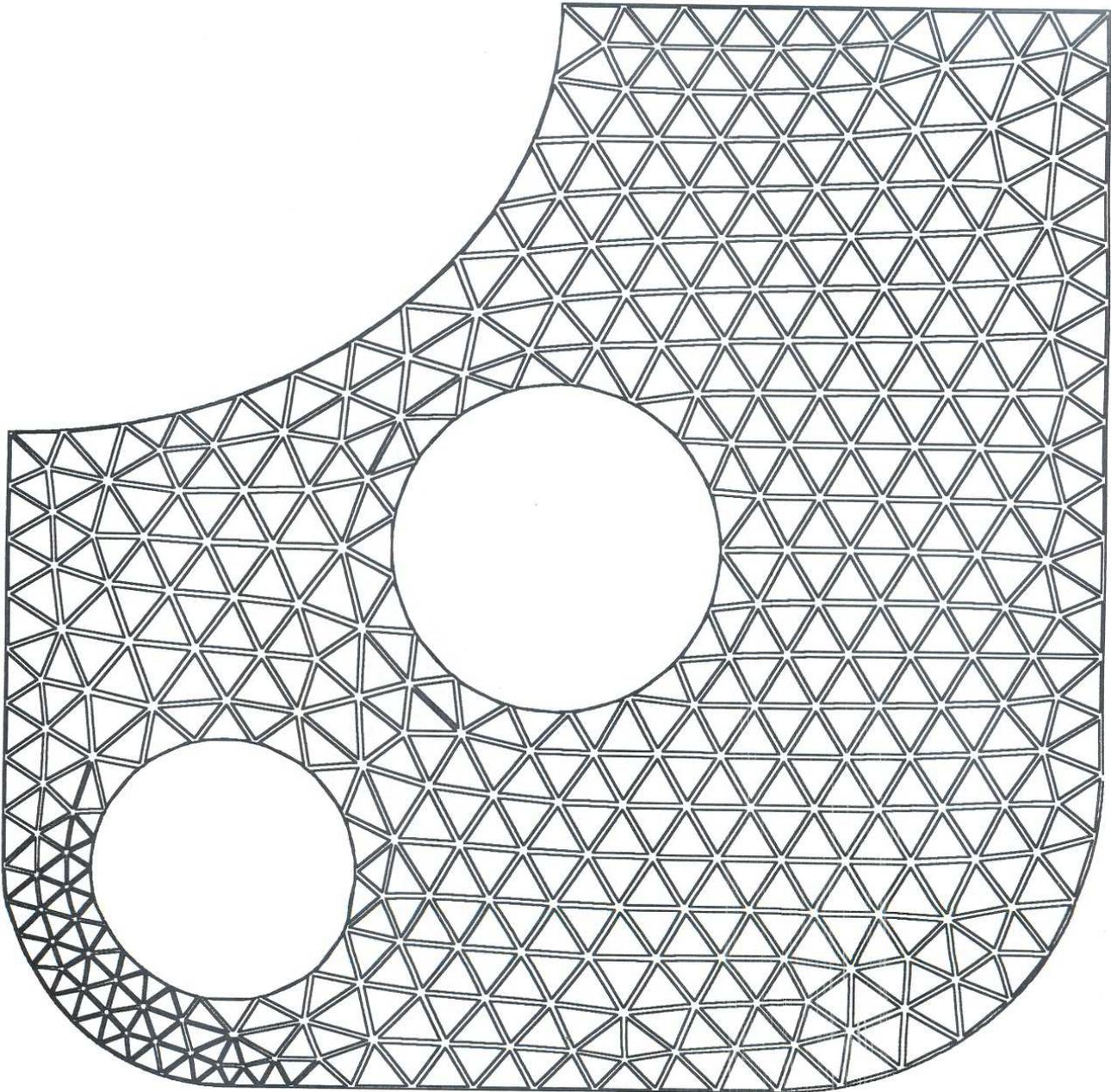


Fig.3 (b) Malha Regularizada

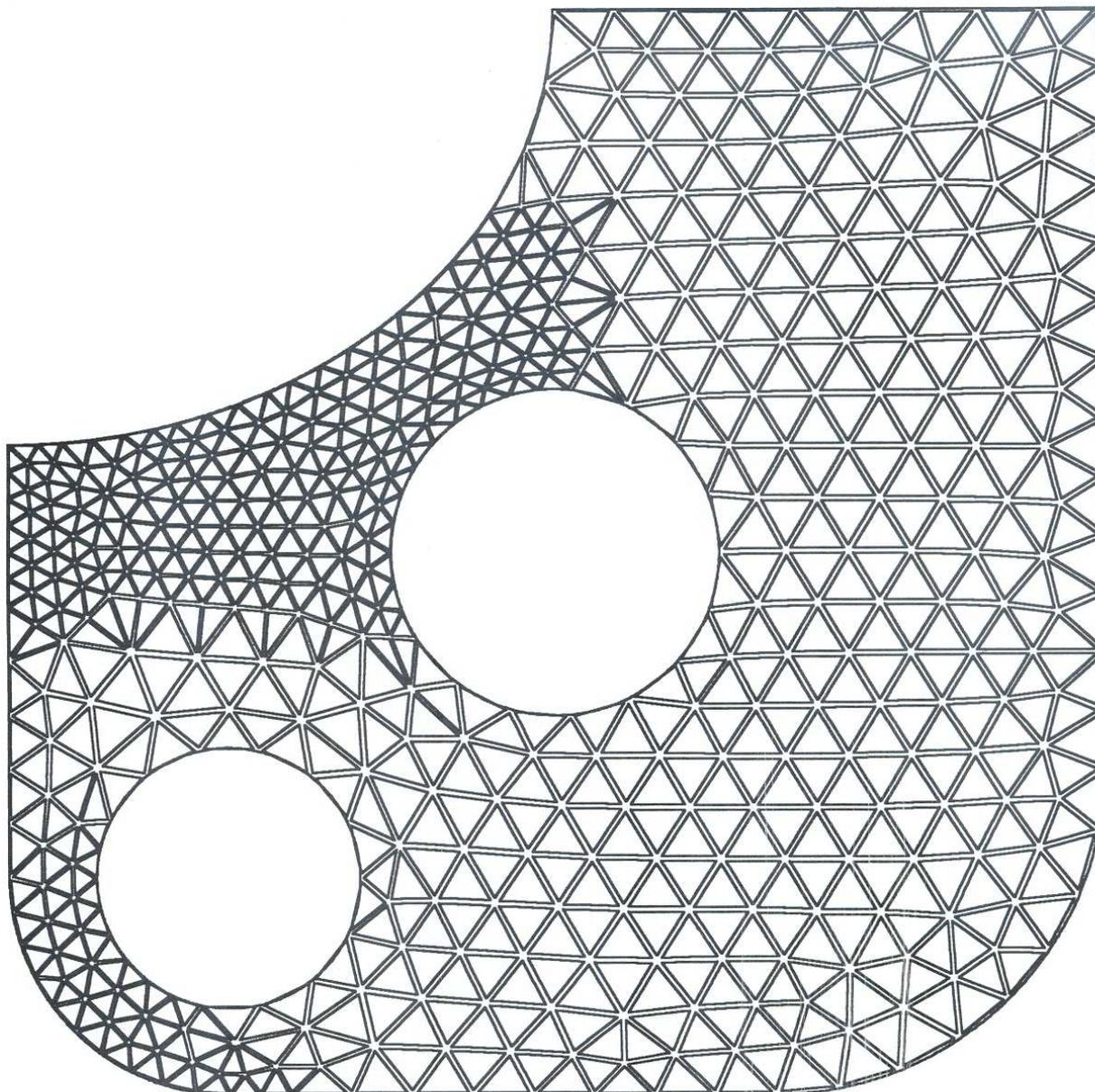


Fig.3 (c) Malha com Refino Localizado sem Regularização

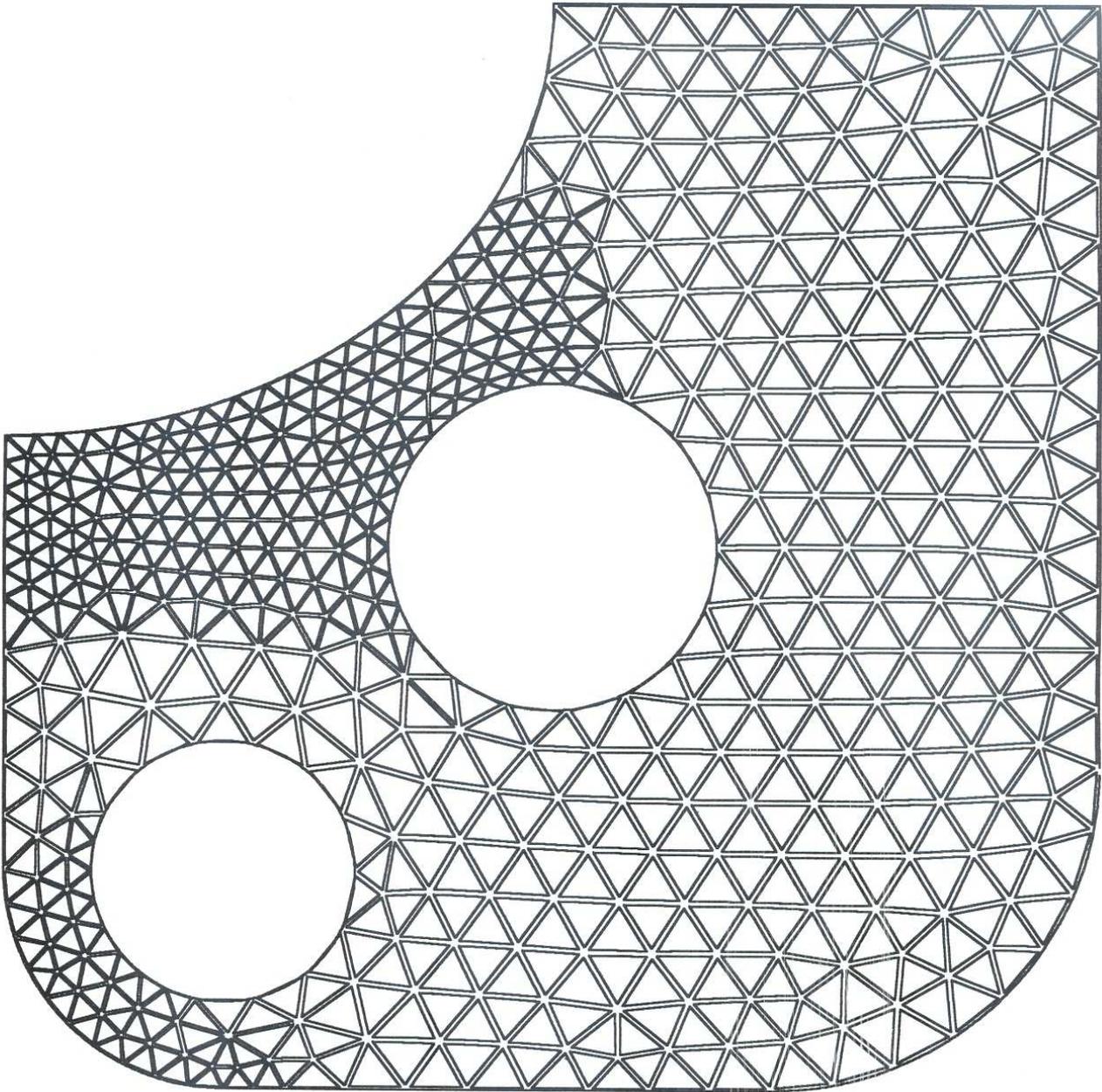


Fig.3 (d) Malha com Refino Localizado Regularizada.

- Exemplo 4. Neste exemplo também é realizada a geração da malha para domínios com furos e com contornos próximos.
- Número de elementos = 420
- Tempo de processamento para gerar a malha = 6.593 s (486dx33-Intel)
- Número de elementos após o refino = 706
- Tempo de processamento para o refino = 8.681 s (486dx33-Intel)
- Algoritmo=1

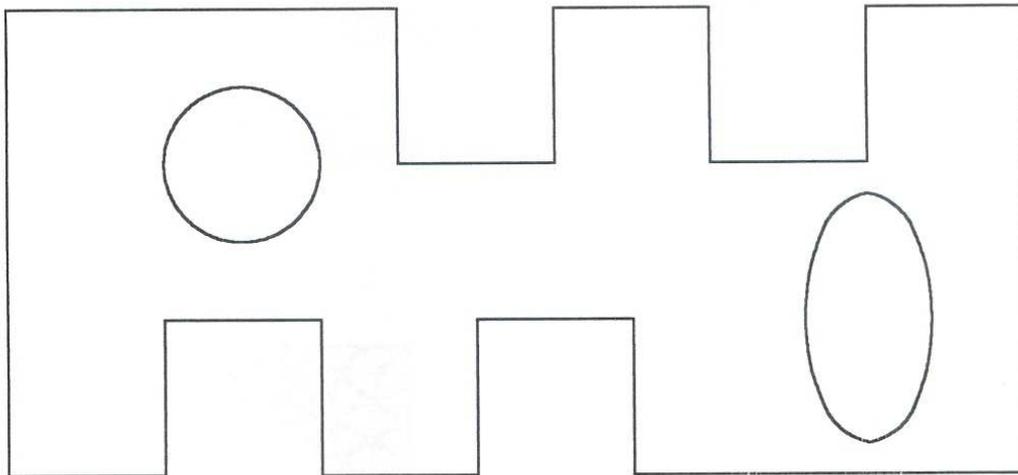


Fig.4 (a) Definição do Domínio (saída do CAD-bidimensional)

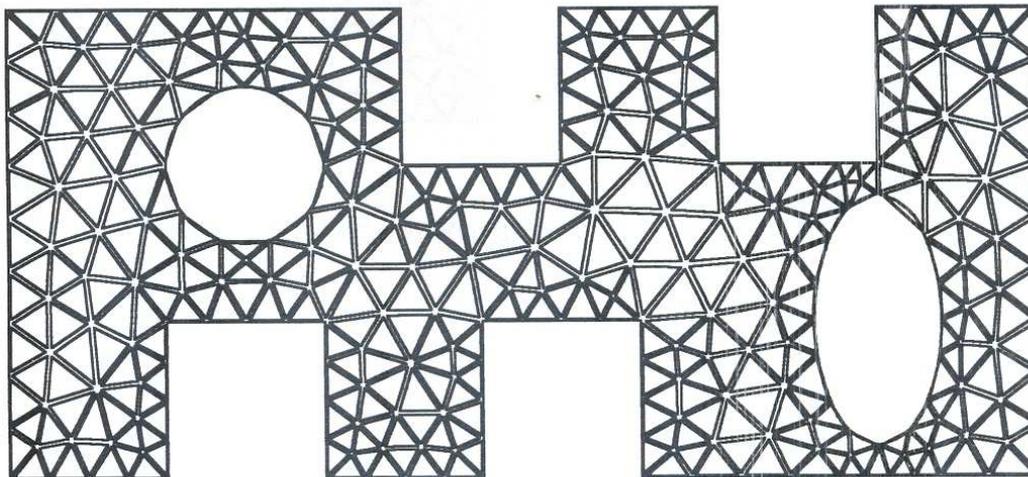


Fig.4 (b) Malha Inicial Regularizada

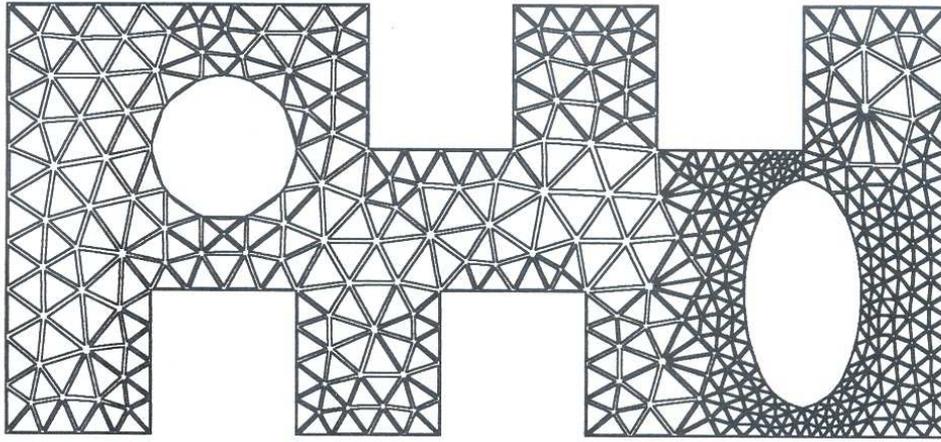


Fig.4 (c ) Malha com Refino Localizado sem Regularização

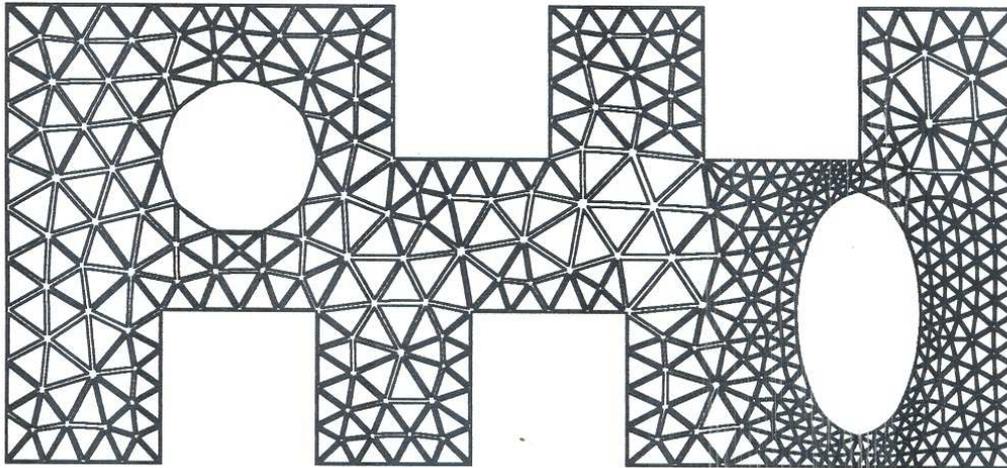


Fig.4 (d) Malha com Refino Localizado Regularizada.

- Exemplo 5. Este exemplo mostra o refinamento homogêneo de toda a malha. Note que o número final de elementos é igual a 4 vezes o número inicial e que durante o processo de geração o domínio também é refinado.
- Número de elementos = 188
- Tempo de processamento para gerar a malha = 1.648 s
- Algoritmo=1

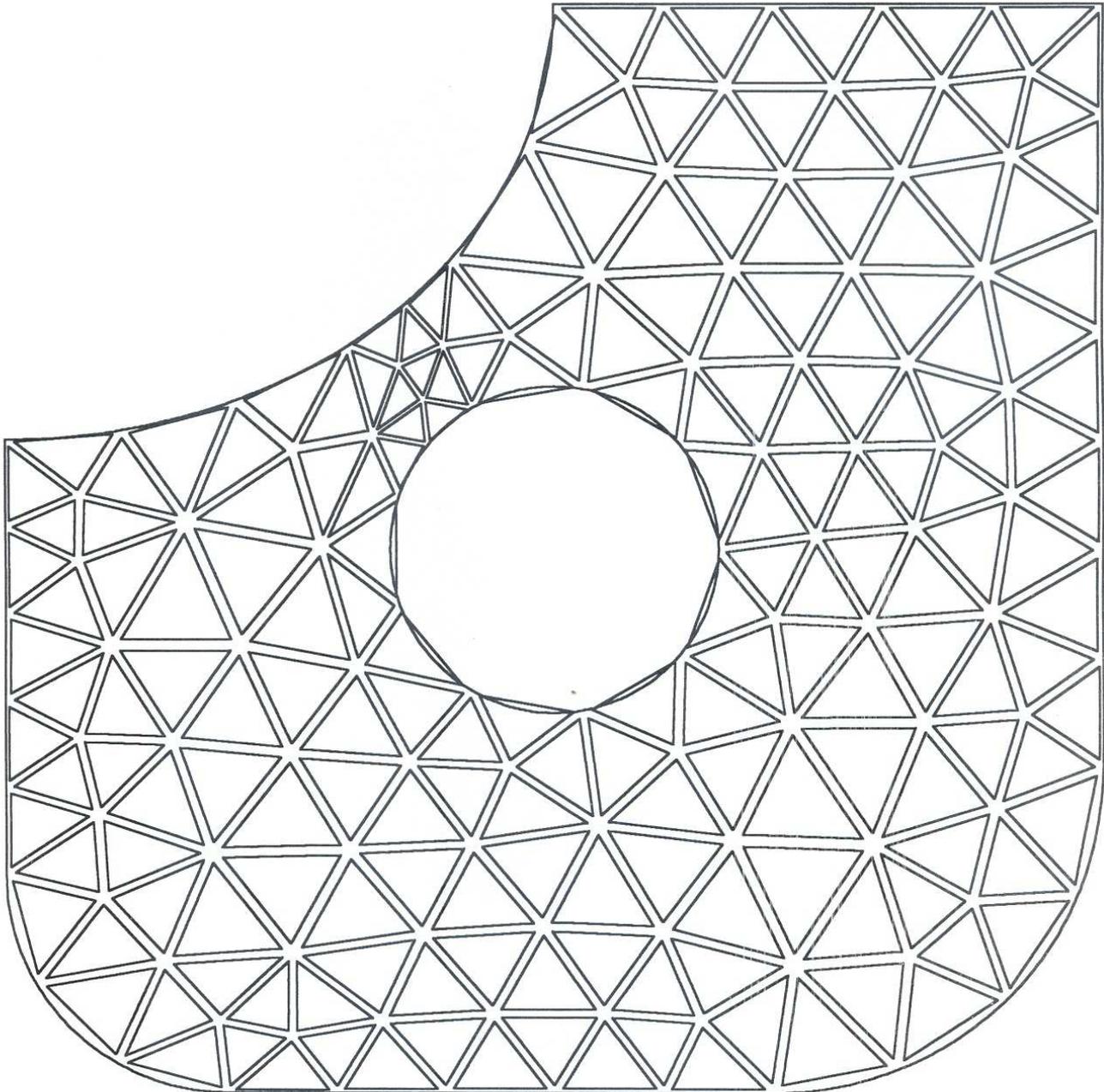
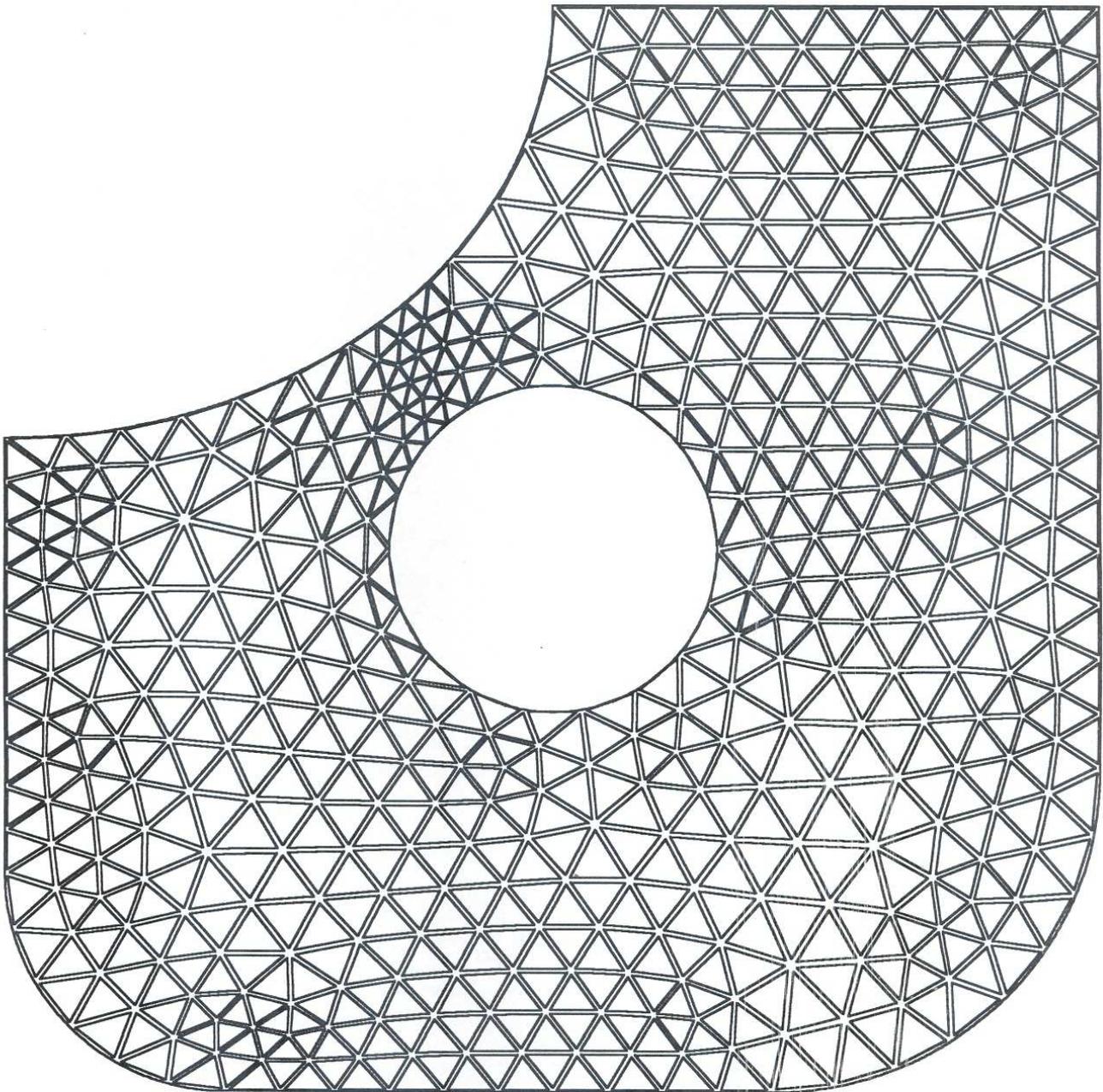


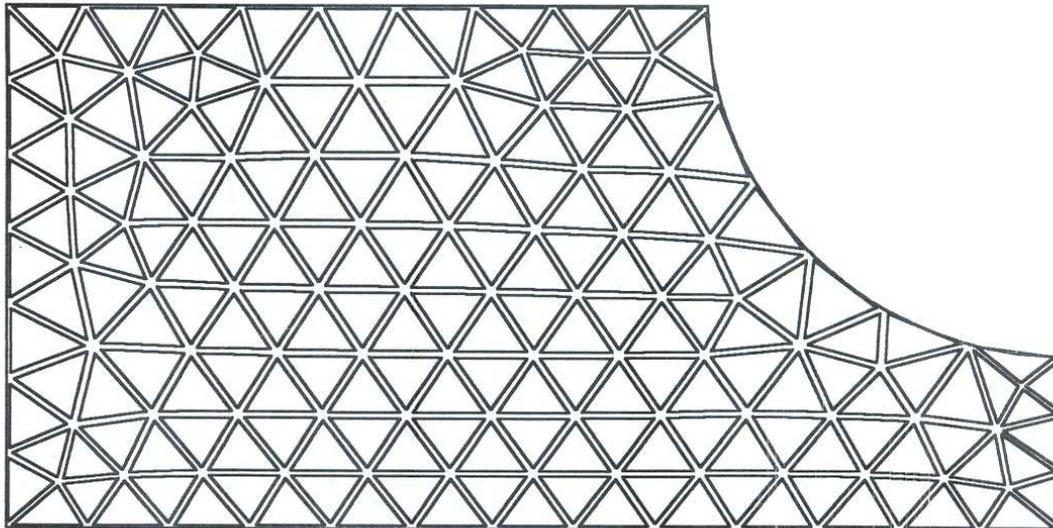
Fig.4a-Malha Inicial Regularizada.



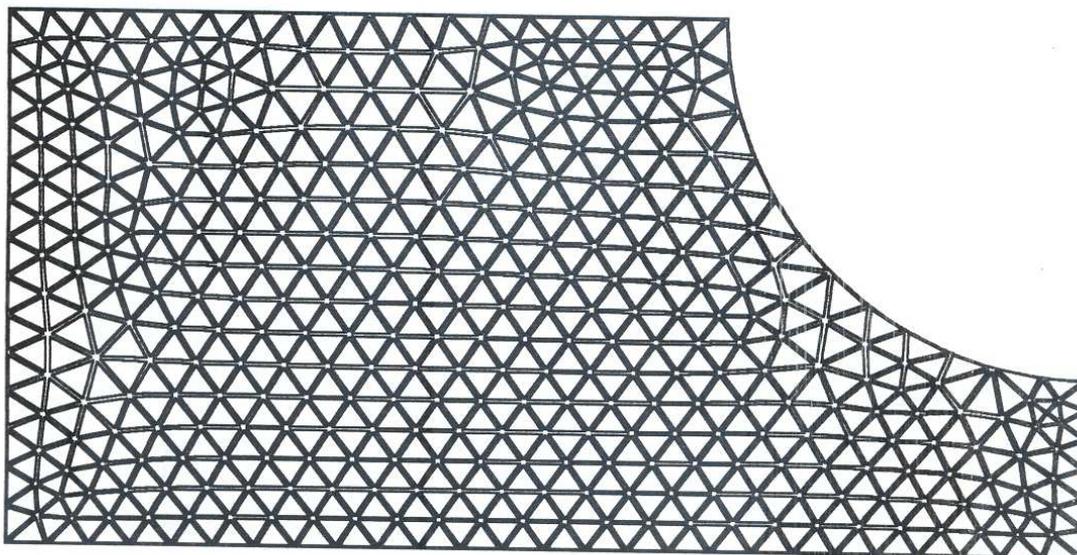
Número de elementos = 752  
Tempo de processamento para refinar a malha = 6.318 s

Fig.4b - Malha com Refino homogêneo Regularizada.

- Exemplo 6. Este exemplo mostra o refinamento homogêneo de toda a malha. Note que o número final de elementos é 4 vezes o número inicial e que durante o processo de refinamento a *curvatura do contorno é mantida*.
- Algoritmo=2



Elementos = 184 Tempo de cpu = 1,428 seg  
Fig.5a - Malha Inicial Regularizada



Elementos = 736 Tempo de cpu = 5.934 seg  
Fig.6b - Malha com Refino Homogêneo Regularizada.

- Exemplo 7. Este exemplo mostra a geração da malha em um domínio quadrado. O número de elementos gerados é igual a 154 e o tempo de processamento é de 1,208 segundos. Note que *não* é gerada uma malha perfeitamente homogênea.
- Algoritmo=1

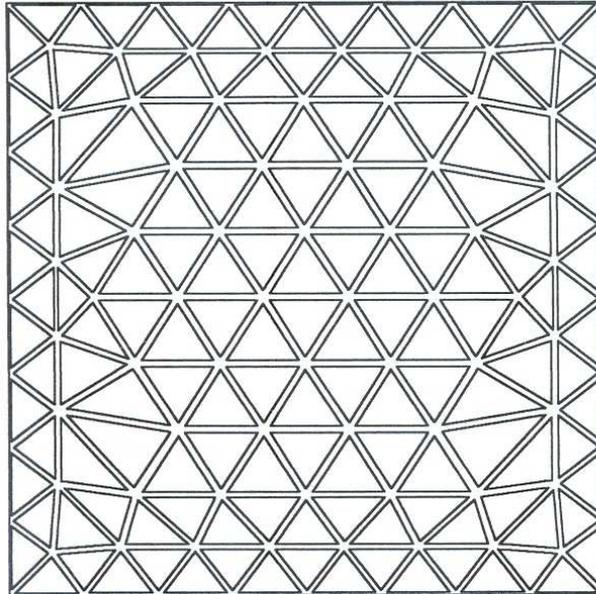


Fig.7a- Malha Inicial sem Regularização

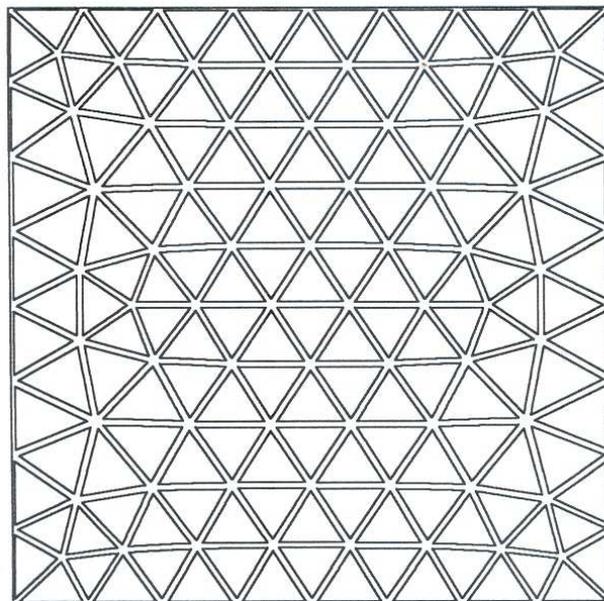


Fig.7b-Malha Regularizada.

## Conclusões

Os dois algoritmos propostos apresentaram resultados bastantes satisfatórios. O segundo algoritmo apresenta uma redução do tempo de processamento devido ao fato de que não é voltado para a seleção de pontos para construção dos triângulos ótimos. Ao contrário do algoritmo número dois, o primeiro seleciona os pontos internos e os possíveis triângulos ótimos para, através de comparações, selecionar o melhor dos triângulos.

As estratégias propostas para a construção de triângulos ótimos no contorno, da seleção dos triângulos ótimos e de refino do contorno na presença de contornos próximos funcionaram perfeitamente. Outras estratégias que também comprovou-se a eficiência foram as da regularização da malha e refino da malha depois de pronta a malha inicial.

Verificou-se que, mesmo para geometrias complexas, os dois algoritmos são robustos. Ligeiras implementações ainda são necessárias para corrigir, por exemplo, a malha gerada no exemplo 4 onde, na região de refino, aparecem triângulos desproporcionais.

O tempo de processamento para a geração das malhas verificado em todos os exemplos pode ser considerado bastante bom.

Finalmente, com estes algoritmos propostos fica extremamente fácil implementar técnica h-adaptativas para o Método de Elementos Finitos, que dependem fortemente do gerador de malha.

## Referências Bibliográficas

Alquati, E.L.G. & Groehs, A.G. (1994)

Geração Automática de Malhas Não Estruturadas de Elementos Triangulares. Proc. XV CILAMCE, pg.483-492.

Lo, S.H. (1985)

A New Mesh Generation Scheme for Arbitrary Planar Domains. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.21, pg.1403-1426.

Sezer, L. & Zeid, I. (1991)

Automatic Quadrilateral/Triangular Free Form Mesh Generation for Planar Regions. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.32, pg. 1441-1483

J. A . George, Computer Implementation of the finite element method. Stan-CS, Ph. D. ,1971

J. Carnet, Une Méthode Heuristique de Maillage dans le Plan pour la Mise en Oeuvre des éléments finis, Thèse, Paris, 1978.

Löhner, R. & P. Parikh, Three-dimensional grid generation by the advancing-front method, Int. J. Num. Meth. Fluids, 8, pp.1135-1149, 1988.

Löhner, R. & P. Parikh, Generation of 3D unstructured grids by the advancing-front method, AIAA 88 0515, 26<sup>th</sup> Aerospace Sciences Meeting, Reno, NV, 1988.

J. Peraire, M. Vahdati, K. Morgan & O C. Zienkiewicz, Finite Element Euler Computations in three dimensions, Int. J. Num. Meth. In Eng., v.26, pp.2135-2159, 1988.

Golgolab, Mailleur tridimensionnel automatique pour des géométries complexes, Rapport de Recherche n.1004, INRIA, 1989.

P.L. George, Automatic Mesh Generation-Application to Finite Element methods. John Wiley & Sons, 1991.