JORGE ASSADE LELUDAK

UM NOVO MÉTODO NUMÉRICO PARA CÁLCULO DOS ESTIMADORES DOS PARÂMETROS DA CORRELAÇÃO CANÔNICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Informática Aplicada da Pontifícia Universidade Católica do Paraná como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Informática Aplicada.

Área de concentração: Sistemas de Informação
Orientador: Prof. Dr. Raimundo J. B. de Sampaio
Co-Orientador: Prof. Dr. Marco A. B. Cândido

Curitiba
2002

Leludak, Jorge A.

Um Novo Método Numérico para Cálculo dos Estimadores dos Parâmetros da Correlação Canônica. Curitiba, 2002. 106p.

Dissertação – Pontifícia Universidade Católica do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Informática Aplicada.

1. Correlação Canônica. 2. Processos Produtivos

Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Centro de Ciências Exatas e de Tecnologia
Programa de Pós-Graduação em Informática Aplicada

ATA DA SESSÃO PÚBLICA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM INFORMÁTICA APLICADA
DA PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ

DEFESA DE DISSERTAÇÃO Nº 44

Aos 25 dias do mês de janeiro de 2002 realizou-se a sessão pública de defesa da dissertação "**Um Novo Método Numérico para Cálculo dos Estimadores dos Parâmetros da Correlação Canônica**", apresentada por **Jorge Assade Leludak** como requisito parcial para a obtenção do título de **Mestre em Ciências**, perante uma Banca Examinadora composta pelos seguintes membros:

	assinatura	parecer
Prof. Dr. Raimundo J. B. de Sampaio PUCPR (Presidente)		Aprovado
Prof. Dr. Marco A. B. Cândido PUCPR	Marco A B Cândido	Aprovado
Prof. Dr. Alfredo Yarozinski PUCPR		APROVADO
Prof. Dr. Anselmo Chaves Neto UFPR		APROVADO
Prof. Dr. Ricardo F. Pacheco PUCPR		aprovado

Conforme as normas regimentais do PPGIA e da PUCPR, o trabalho apresentado foi considerado ______________________ (aprovado sem restrições, aprovado com exigências ou reprovado), segundo a avaliação da maioria dos membros da Banca Examinadora acima indicada.

Observações, exigências e/ou restrições da Banca Examinadora, quando houver:

____

____

continuar no verso, se necessário

Carlos Maziero

Prof. Dr. Carlos Alberto Maziero, Diretor
Programa de Pós-Graduação em Informática Aplicada
Pontifícia Universidade Católica do Paraná

Dedico este trabalho a minha esposa
Lisiane que durante todo o tempo soube me apoiar, incentivar e
privar-se da minha companhia, com muito amor e dedicação

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus que me deu condições físicas e mentais para poder aprender e descrever sobre os fatos.

Agradeço ao meu orientador Prof. Dr. Raimundo J. B. de Sampaio que soube, como poucos, os momentos em eu que precisava de uma palavra de estímulo e em outros casos orientar para que os estudos pudessem transcorrer da melhor maneira possível. Agradeço aos meus familiares, principalmente a minha esposa e minha mãe que em muito me apoiaram nos momentos mais difíceis. Agradeço a meu amigo Marco Busetti que me incentivou e criou condições para que pudesse fazer o Mestrado.

Sumário

Resumo

Em situações em que precisamos relacionar variáveis de um conjunto com variáveis de um outro conjunto, por exemplo em processos produtivos, utilizamos a correlação canônica. A forma tradicional de uso da correlação canônica parte de uma matriz m que é resultante da multiplicação de cinco outras matrizes. Estas multiplicações envolvem uma quantidade razoável de operações, na ordem de n^3, onde n é a ordem da matriz, o que resulta em um enorme esforço computacional. Outro fator importante é que as matrizes que serão multiplicadas mesmo sendo bem condicionadas podem gerar a matriz M com um número de condição muito alto. Estamos propondo uma forma alternativa para o cálculo da correlação canônica utilizando um novo esquema que conduz a uma matriz que será chamada de M_0, formada por blocos, onde cada um dos blocos será uma das matrizes utilizadas para determinar M. Esta matriz será formada da seguinte maneira: a matriz M_5 (com $lm5$ linhas e $cm5$ colunas) ocupará as $lm5$ primeiras linhas e as últimas $cm5$ colunas de M_0, a matriz M_4 (com $lm4$ linhas e $cm5$ colunas) ocupará as próximas $lm4$ linhas e as primeiras $cm4$ colunas de M_0, a matriz M_3 (com $lm3$ linhas e $cm3$ colunas) ocupará as próximas $lm3$ linhas e as próximas $cm3$ colunas de M_0, a matriz M_2 (com $lm2$ linhas e $cm2$ colunas) ocupará as próximas $lm2$ linhas e as próximas $cm2$ colunas de M_0 e a matriz M_1 (com $lm1$ linhas e $cm1$ colunas) ocupará as últimas $lm1$ linhas e as próximas $cm1$ colunas de M_0. A matriz M_0 terá a forma: $M_0 = \begin{pmatrix} & & & M_5 \\ M_4 & & & \\ & M_3 & & \\ & & M_2 & \\ & & & M_1 \end{pmatrix}$ e é estruturada e esparsa.As matrizes M_1 e M_3 precisam ser definidas positivas e M_2 inversível. Com a ma-

Resumo

Em situações em que precisamos relacionar variáveis de um conjunto com variáveis de um outro conjunto, por exemplo em processos produtivos, utilizamos a correlação canônica. A forma tradicional de uso da correlação canônica parte de uma matriz m que é resultante da multiplicação de cinco outras matrizes. Estas multiplicações envolvem uma quantidade razoável de operações, na ordem de n^3, onde n é a ordem da matriz, o que resulta em um enorme esforço computacional. Outro fator importante é que as matrizes que serão multiplicadas mesmo sendo bem condicionadas podem gerar a matriz M com um número de condição muito alto. Estamos propondo uma forma alternativa para o cálculo da correlação canônica utilizando um novo esquema que conduz a uma matriz que será chamada de M_0, formada por blocos, onde cada um dos blocos será uma das matrizes utilizadas para determinar M. Esta matriz será formada da seguinte maneira: a matriz M_5 (com $lm5$ linhas e $cm5$ colunas) ocupará as $lm5$ primeiras linhas e as últimas $cm5$ colunas de M_0, a matriz M_4 (com $lm4$ linhas e $cm5$ colunas) ocupará as próximas $lm4$ linhas e as primeiras $cm4$ colunas de M_0, a matriz M_3 (com $lm3$ linhas e $cm3$ colunas) ocupará as próximas $lm3$ linhas e as próximas $cm3$ colunas de M_0, a matriz M_2 (com $lm2$ linhas e $cm2$ colunas) ocupará as próximas $lm2$ linhas e as próximas $cm2$ colunas de M_0 e a matriz M_1 (com $lm1$ linhas e $cm1$ colunas) ocupará as últimas $lm1$ linhas e as próximas $cm1$ colunas de M_0. A matriz M_0 terá a forma: $M_0 = \begin{pmatrix} & & & & M_5 \\ M_4 & & & & \\ & M_3 & & & \\ & & M_2 & & \\ & & & M_1 & \end{pmatrix}$ e é estruturada e esparsa.As matrizes M_1 e M_3 precisam ser definidas positivas e M_2 inversível. Com a ma-

triz M_0 montada passamos a calcular a correlação canônica, procurando o maior autovalor de M_0 e o autovetor correspondente. Se λ é um autovalor de M_0 então λ^5é um autovalor de M e determinamos a correlação canônica a partir destes dados. Além disto outra característica de M_0 é que partindo dela podemos rotacionar no sentido horário os blocos, formando $M2$, $M3$, $M4$ e $M5$ e em qualquer uma delas também obteremos os mesmos resultados. Para verificar o desempenho de M_0 fizemos vários testes em matrizes de diferentes tamanhos e verificamos dois aspectos interessantes: o número de operações para se obter a matriz M_0 é bem menor que em M; o número de condição da matriz M_0 é bem menor que o número de condição da matriz M. Verificamos portanto que o uso da matriz M_0 proporciona um esforço computacional menor e apresenta um melhor condicionamento ao se comparar com M, portanto os resultados obtidos com M_0 podem estar bem mais próximos dos reais do que os encontrados com M.

triz M_0 montada passamos a calcular a correlação canônica, procurando o maior autovalor de M_0 e o autovetor correspondente. Se λ é um autovalor de M_0 então λ^5é um autovalor de M e determinamos a correlação canônica a partir destes dados. Além disto outra característica de M_0 é que partindo dela podemos rotacionar no sentido horário os blocos, formando $M2$, $M3$, $M4$ e $M5$ e em qualquer uma delas também obteremos os mesmos resultados. Para verificar o desempenho de M_0 fizemos vários testes em matrizes de diferentes tamanhos e verificamos dois aspectos interessantes: o número de operações para se obter a matriz M_0 é bem menor que em M; o número de condição da matriz M_0 é bem menor que o número de condição da matriz M. Verificamos portanto que o uso da matriz M_0 proporciona um esforço computacional menor e apresenta um melhor condicionamento ao se comparar com M, portanto os resultados obtidos com M_0 podem estar bem mais próximos dos reais do que os encontrados com M.

Abstract

When it is necessary to relate variables of a group with variables of another group, such as in productive processes, canonical correlation is utilised. The form of canonical correlation traditionally used starts with a matrix M that results of the multiplication of five other matrices. These multiplications involve a reasonable amount of operations of n^3, n being the order of the matrix, and that results in a huge data processing effort. Another relevant factor is that the matrices to be multiplied, even being well conditioned, can generate a matrix M with a very high condition number. We are proposing an alternative form for the calculation of canonical correlation using a new outline that leads to a matrix that will be called M_0, formed by blocks, in which each block will be one of the matrices used to determine M. This matrix will be established as follows: matrix M_5 (with $lm5$ lines and $cm5$ columns) will occupy the first $lm5$ lines and the last $cm5$ columns of M_0, matrix M_4 (with $lm4$ lines and $cm5$ columns) will occupy the next $lm4$ lines and the first $cm4$ columns of M_0, matrix M_3 (with $lm3$ lines and $cm3$ columns) will occupy the next $lm3$ lines and the next $cm3$ columns of M_0, matrix M_2 (with $lm2$ lines and $cm2$ columns) will occupy the next $lm2$ lines and the next $cm2$ columns of M_0 and matrix M_1 (with $lm1$ lines and $cm1$ columns) will occupy the last $lm1$ lines and the next $cm1$ columns of M_0. Matrix M_0 will have the following form:

Abstract

When it is necessary to relate variables of a group with variables of another group, such as in productive processes, canonical correlation is utilised. The form of canonical correlation traditionally used starts with a matrix M that results of the multiplication of five other matrices. These multiplications involve a reasonable amount of operations of n^3, n being the order of the matrix, and that results in a huge data processing effort. Another relevant factor is that the matrices to be multiplied, even being well conditioned, can generate a matrix M with a very high condition number. We are proposing an alternative form for the calculation of canonical correlation using a new outline that leads to a matrix that will be called M_0, formed by blocks, in which each block will be one of the matrices used to determine M. This matrix will be established as follows: matrix M_5 (with $lm5$ lines and $cm5$ columns) will occupy the first $lm5$ lines and the last $cm5$ columns of M_0, matrix M_4 (with $lm4$ lines and $cm5$ columns) will occupy the next $lm4$ lines and the first $cm4$ columns of M_0, matrix M_3 (with $lm3$ lines and $cm3$ columns) will occupy the next $lm3$ lines and the next $cm3$ columns of M_0, matrix M_2 (with $lm2$ lines and $cm2$ columns) will occupy the next $lm2$ lines and the next $cm2$ columns of M_0 and matrix M_1 (with $lm1$ lines and $cm1$ columns) will occupy the last $lm1$ lines and the next $cm1$ columns of M_0. Matrix M_0 will have the following form:

$$M_0 = \begin{pmatrix} & & & & M_5 \\ M_4 & & & & \\ & M_3 & & & \\ & & M_2 & & \\ & & & M_1 & \end{pmatrix}$$ and it is structured and sparse. Matrices M_1 and M_3 need to be defined as positive and M_2 as inversible. Matrix M_0 being set, we start to calculate the canonical correlation, seeking the highest autovalue of M_0 and the corresponding autovector. If λ is an autovalue of M_0, then λ^5 is an autovalue of M and the canonical correlation will be established from these data. Besides that, another characteristic of M_0 is that from it we can rotate the blocks clockwise, forming $M2$, $M3$, $M4$ and $M5$, and in any of them the same results can be obtained. To verify M_0's performance, we have done several tests with matrices of different sizes and found out two interesting aspects: the number of operations to obtain matrix M_0 is considerably fewer than in M; the condition number of matrix M_0 is much smaller than the condition number of matrix M. Thus we have verified that the use of matrix M_0 provides a less extensive data processing effort and presents a better conditioning in comparison with M. Therefore the results obtained with M_0 can be much closer to reality than the ones found with M.

$$M_0 = \begin{pmatrix} & & & & M_5 \\ M_4 & & & & \\ & M_3 & & & \\ & & M_2 & & \\ & & & M_1 & \end{pmatrix}$$ and it is structured and sparse. Matrices M_1 and M_3 need to be defined as positive and M_2 as inversible. Matrix M_0 being set, we start to calculate the canonical correlation, seeking the highest autovalue of M_0 and the corresponding autovector. If λ is an autovalue of M_0, then λ^5 is an autovalue of M and the canonical correlation will be established from these data. Besides that, another characteristic of M_0 is that from it we can rotate the blocks clockwise, forming $M2$, $M3$, $M4$ and $M5$, and in any of them the same results can be obtained. To verify M_0's performance, we have done several tests with matrices of different sizes and found out two interesting aspects: the number of operations to obtain matrix M_0 is considerably fewer than in M; the condition number of matrix M_0 is much smaller than the condition number of matrix M. Thus we have verified that the use of matrix M_0 provides a less extensive data processing effort and presents a better conditioning in comparison with M. Therefore the results obtained with M_0 can be much closer to reality than the ones found with M.

Captulo 1

Introdução

1.1 O Problema

Em muitas situações precisa-se relacionar as variáveis de um conjunto com as variáveis de um outro conjunto. Isto é particularmente necessário em processos produtivos para determinar a influência de um grupo de variáveis sobre outro grupo. Se pudermos identificar um dos conjuntos como um conjunto de variáveis independentes e o outro conjunto como um conjunto de variáveis dependentes, e se há uma associação entre estes dois conjuntos, então podemos calcular a força desta relação, que é chamada de correlação canônica .

A complexidade deste problema consiste em uma multiplicação de cinco matrizes, e então necessita-se calcular o par do maior autovalor e o autovetor correspondente. A matriz produto mesmo se todas as cinco matrizes forem bem condicionadas, este produto pode não ser, ou seja, o maior autovetor associado ao maior autovalor da matriz resultante pode ser completamente distinto do autovetor do problema original. Um fato importante a ser considerado é este, e o outro é o número de operações necessárias para se chegar à resposta, ou seja a complexidade. Estas características do problema motivam o estudo de como calcular o maior autovalor sem executar a multiplicação das matrizes. A idéia é definir uma nova matriz formada por blocos, onde cada bloco é um dos fatores da matriz de multiplicação.

A forma tradicional de cálculo da correlação canônica é baseado, como já mencionamos inicialmente, na matriz M resultante na multiplicação de cinco matrizes, M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5, de tal forma que $M = M_1 \text{x} M_2 \text{x} M_3 \text{x} M_4 \text{x} M_5$. A medida que estas matrizes tenham tamanhos elevados, a quantidade de operações que deverão ser executadas cresce com n^3, onde n é a ordem da matriz. Além disto, mesmo que as cinco matrizes M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5, tenham número de condição razoável, a matriz resultante M pode ter um número de condição muito alto.

A forma que propomos para solucionar estes problemas é a criação de uma matriz, chamada de M_0, de tal forma que a mesma seja montada a partir das cinco matrizes que formam M, porém dispostas de tal forma que M_0 apresente um melhor condicionamento, em relação a m e que utilize menor tempo de processamento.

A matriz M_0 é montada, então, com cinco blocos, onde cada bloco será uma das matrizes M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5. A matriz M_0 terá a forma

$$M_0 = \begin{pmatrix} & & & & M_5 \\ M_4 & & & & \\ & M_3 & & & \\ & & M_2 & & \\ & & & M_1 & \end{pmatrix}$$ e é estruturada e esparsa.

Como veremos no capítulo 4, o polinômio característico de M_0 tem grau superior ao polinômio característico de M, mas as mesmas raízes distintas. O autovetor encontrado a partir de M_0 será, então, um subconjunto do autovetor encontrado através de M.

1.2 Objetivo

Diante do apresentado anteriormente, este trabalho propõe uma técnica, capaz de determinar a correlação canônica, de uma maneira menos onerosa, em termos de tempo de computação, e que apresente resultados mais próximos aos reais, uma vez que o método existente pode acrescentar erros nos resultados finais. Esta nova forma de calcular a correlação canônica poderá ser usada sempre que as matrizes envolvidas forem de dimensões superiores a 2x2, pois o esforço computacional será menor e a matriz resultante com este novo método apresenta um número de condição melhor que o método existente.

1.3 Justificatica

Sempre que se depara com problemas de otimização de processos produtivos, existem problemas complexos tanto em termos da quantidade de informações presente como também em relação aos custos envolvidos. Se os resultados obtidos estiverem com erros de cálculos (introduzidos pelo método), os números encontrados serão diferentes dos reais, causando dificuldades na interpretação dos resultados e falhas nas soluções ocorrerão. Como nesses processos o número de variáveis dependentes e independentes podem ser elevados, o tempo de processamento também pode ser, desta forma sempre que possível deve-se optar por processos que melhorem este tempo de processamento.

Da mesma forma, os resultados encontrados precisam representar com bastante precisão as correlações reais existentes entre os grupos de variáveis dependentes e independentes, uma vez que esses resultados irão nortear toda uma análise do processo em questão e determinadas decisões deverão ser tomadas a partir da análise dos mesmos. Para que isto ocorra, com a maior precisão possível, esta nova forma de calcular a correlação canônica deverá ser aplicada sempre que as matrizes envolvidas estejam de acordo com as características que serão apresentadas no capítulo 4.

1.4 Organização

Este trabalho está organizado da seguinte forma: no capítulo 1 tem-se a introdução do assunto, apresentando a nossa proposta.

No capítulo 2, apresenta-se os conceitos de correlação canônica, o que é e para que serve, o que é covariância, como deve ser utilizado o coeficiente de correlação; inferências sobre o coeficiente de correlação; coeficiente r de Sperman; correlação e casualidade; correlação canônica; variáveis canônicas e suas características; fórmulas e definições. Nesse capítulo é que se apresenta como é feito o cálculo da correlação canônica, que nada mais é do que a multiplicação de cinco matrizes e a partir da matriz resultante, determina-se o maior autovalor e o autovetor correspondente.

No capítulo 3, é tratado a questão do condicionamento de matrizes e estabilidade. Os assuntos abordados são: norma matricial; tipos de normas; número de condição de matrizes; delimitação da propagação dos erros iniciais; hipóteses para a delimitação do erro de arredondamento. Nesse capítulo é demonstrado o que é número de condição de uma matriz e como os erros provenientes dos cálculos podem influenciar as respostas.

No capítulo 4, é apresentado uma nova forma de calcular a correlação canônica e quais aspectos devem ser considerados da correlação canônica; apresenta-se a matriz M_0 que será utilizada para a determinação do maior autovalor e do autovetor correspondente; apresenta-se o teorema e sua respectiva prova; suas características; como rotacioná-la e ainda assim obter a resposta esperada

No capítulo 5, descreve-se a forma da obtensão das matrizes que serão utilizadas nos testes; o algorítmo para montagem da matriz M com os respectivos resultados: número de condição, número de operações e o maior autovalor e autovetor correspondente; montagem da matriz m com os respectivos resultados: número de condição, número de operações e o maior autovalor e autovetor correspondente; algorítmo para rotacionar a matriz M de forma a obter os mesmos resultados; tabelas comparativas; os resultados dos testes nas diferentes matrizes e são apresentados os resultados dos testes com a nova forma de calcular a correlação canônica e se os mesmos correspondem aos resultados esperados. Finalmente, neste capítulo é feita a conclusão.

Captulo 2

Correlação Canônica

2.1 CORRELAÇÃO

2.1.1 INTRODUÇÃO

Seguidamente esta-se interessado em estudar a maneira como duas variáveis aleatórias X e Y estão associadas e medir seu grau de associação. Uma medida desta associação é chamada de correlação que é feita por um coeficiente de correlação.

A determinação da força do relacionamento entre duas variáveis agrupadas é o objetivo deste ítem. O termo correlação significa, literalmente "co-relacionamento", pois indica até que ponto os valores de uma variável estão relacionados com os de outra. Há muitos casos em que pode existir um relacionamento entre duas variáveis. Consideremos, por exemplo, questões como estas:

1- A idade e a resistência física das pessoas estão correlacionados?

2- Estudantes com maior capacidade de leitura tendem a obter melhores resultados em cursos de matemática?

Problemas como esses se prestam à análise de correlação - um valor que quantifica o grau de associação.

A idéia básica, por trás disso, é predizer o comportamento de uma variável, conhecendo o comportamento da outra.

2.1.2 DISTRIBUIÇÃO CONJUNTA DE DUAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Em muitas situações observa-se duas ou mais características simultaneamente, tal como nos exemplos acima. Em conseqüência, temos de identificar a distribuição de probabilidade conjunta dessas características.

No caso de uma única variável aleatória $X(w)$, a distribuição de probabilidade dessa função é, basicamente composta pelo contradomínio da função $X(w)$ e pelas probabilidades correspondentes aos valores do contradomínio. Freqüentemente usa-se uma expressão matemática para generalizar a associação de probabilidades aos elementos do contradomínio.

O caso de duas variáveis aleatórias X e Y é análogo. Se X pode tomar k valores distintos $x_1, x_2, ..., x_k$ e Y pode tomar l valores distintos $y_1, y_2, ..., y_l$, há evidentemente $k.l$ pares de valores distintos $(x_i,\ y_i)$. Denota-se por $f\ (x_i, y_i)$ a probabilidade de X e Y tomarem simultaneamente os valores x_i, e y_i, isto é:

$$f(x_i, y_i) = P(X = x_i, Y = y_i) \quad \text{se as variáveis } X \text{ e } Y \text{ são discretas} \tag{2.1}$$

A distribuição de probabilidade conjunta de X e Y consistirá em todos os pares distintos (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, ..., k$, $j = 1, 2, 3, ..., l$, e das probabilidades associadas $f(x_i, y_i)$, e pode ser disposta em uma tabela de entrada dupla :

	y_1	y_2	...	y_l
x_1	$f(x_1, y_1)$	$f(x_1, y_2)$	...	$f(x_1, y_l)$
x_2	$f(x_2, y_1)$	$f(x_2, y_2)$	...	$f(x_2, y_l)$
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
.	.	.	...	.
x_k	$f(x_k, y_1)$	$f(x_k, y_2)$	...	$f(x_k, y_l)$

Qualquer medida numérica para a distribuição de X, tal como a esperança μ_X, ou a variância σ_X^2, se calcula com base apenas na distribuição marginal de X, sem qualquer referência à distribuição conjunta. O mesmo se diga quanto à distribuição de Y.

2.1.3 COVARIÂNCIA E CORRELAÇÃO

A covariância entre duas variáveis aleatórias X e Y é uma medida numérica da associação linear existente entre X e Y. É definida como o valor esperado do produto $(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)^T$, ou seja $Cov(X,Y) = E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]$ e quando tem-se os vetores aleatórios X e Y então resulta a matriz $\sum = E\left[\left(\underline{X} - \underline{\mu}_X\right)\left(\underline{Y} - \underline{\mu}_Y\right)\right]$.

Empiricamente, se há forte possibilidade de que grandes (pequenos) valores de X estejam associados a grandes (pequenos) valores de Y, então os valores dos desvios $X - \mu_X$ e $Y - \mu_Y$ são ambos positivos ou ambos negativos. O valor esperado do produto é positivo. Dizemos que X e Y variam em sentidos opostos, os valores positivos(negativos) de $X - \mu_X$ estão em geral associados a valores negativos(positivos) de $Y - \mu_Y$. É neste sentido que o sinal e a magnitude de $E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)^T$ refletem a direção e a força do relacionamento linear entre X e Y.

Definição: Covariância de X e Y:

$$cov(X,Y) = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)^T = E(XY) - \mu_X\mu_Y \tag{2.2}$$

Para obter a segunda expressão, escreve-se:

$$(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)^T = XY - \mu_X Y - \mu_Y X + \mu_X\mu_Y \tag{2.3}$$

Toma-se a esperança de ambos os membros:

$$cov(X,Y) = E(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)^T = E(XY) - \mu_X E(Y) - \mu_Y E(X) =$$

$$= E(XY) - \mu_X\mu_Y - \mu_Y\mu_X + \mu_X\mu_Y = E(XY) - \mu_X\mu_Y$$

O valor da $cov(X,Y)$ depende da unidade de medida de X e Y. Para se ter uma medida adimensional do relacionamento entre as duas variáveis aleatórias X e Y, divide-se a covariância pelos desvios padrão de X e Y. Obtem-se, então, o coeficiente da correlação entre X e Y.

Definição: Coeficiente da correlação linear (de Pearson) entre X e Y:

$$corr\,(XY) = \rho = \frac{cov(XY)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{2.4}$$

2.1.4 USO DO COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO

Caso a distribuição conjunta seja normal bivariada, então o coeficiente de correlação mede a associação dessas variáveis da maneira mais apropriada possível. Caso a distribuição conjunta não seja normal, o coeficiente de correlação linear de Pearson é simplesmente mais uma medida de associação e não há nenhuma garantia de sua adequação ou qualidade.

2.1.5 DADOS CONTÍNUOS: O COEFICIENTE ρ DE PEARSON

A forma mais comum de análise de correlação envolve dados contínuos. O grau de relacionamento entre duas variáveis contínuas é sintetizado por um coeficiente de correlação conhecido como "ρ de Pearson". Esta técnica só é completamente válida quando se pode levantar certas hipóteses rigorosas. As hipóteses são:

1. Tanto x como y são variáveis aleatórias contínuas. Isto é, não se aceita selecionar certos valores de x e depois avaliar y: tanto y como x devem variar livremente;

2. A distribuição de freqüência conjunta (isto é, a distribuição de valores dos pares x, y) é normal. É o que se chama distribuição normal bivariada.

O coeficiente de correlação tem duas propriedades que caracterizam a natureza de uma relação entre duas variáveis. A primeira é o seu sinal (+ ou -) e a segunda é a sua magnitude. Valores de r próximos de $-1,0$ ou $+1,0$ indicam que os valores estão muito próximas da reta (reta imaginária que se ajusta aos dos dados), ou mesmo sobre a reta, enquanto que os valores mais próximos do 0 sugerem maior dispersão, conforme mostra a tabela abaixo:

Valor de ρ	Descrição do relacionamento
$+1,0$	Relacionamento positivo perfeito
Cerca de $+0,70$	Relacionemento positivo moderado
$0,00$	Ausência de relacionamento
Cerca de $-0,70$	Relacionemento negativo moderado
$-1,0$	Relacionamento negativo perfeito

Mais precisamente podemos dizer que o valor de ρ varia de $-1,0$ a $+1,0$. Um relacionamento positivo entre duas variáveis indica que a valores altos (baixos) de uma das variáveis, correspondem valores altos (baixos) de outra; um relacionamento negativo significa que a valores altos (baixos) de uma variável correspondem valores baixos (altos) da outra; um relacionamento zero indica que não existe correlação; o sinal de ρ é sempre o mesmo sinal de b, o coeficiente angular de uma reta imaginária ajustada aos dados.

O termo momento - produto descreve a maneira em que se combinam dados amostrais analisados para estimar-se o coeficiente de correlação. O objetivo é saber se a situação relativa num grupo amostral está relacionada com sua situação relativa no outro grupo de dados amostrais. É possível medir a posição relativa de qualquer escore num grupo de dados em termos da média e do desvio padrão do grupo. Isto é obtido subtraindo-se a média do grupo e dividindo-se pelo desvio padrão do grupo, obtém-se assim a posição de cada valor em relação aos outros valores do grupo. Isto na realidade padroniza os dados e tem a propriedade de tornar comparáveis estes grupos mesmo que as médias e desvios padrões grupais sejam diferentes.

A fórmula de $\widehat{r}$ do estimador do parâmetro ρ é:

$$\widehat{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} Z_x Z_y}{n-1} \quad \text{ou} \quad \widehat{r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2\right)^{1/2}} \tag{2.5}$$

onde n é o tamanho da amostra,

Z_x são os escores padronizados do conjunto X

Z_y são os escores padronizados do conjunto Y

Analisando-se o valor do estimador, por exemplo $\widehat{r} = +0,85$ nota-se que o sinal + indica que existe um relacionamento positivo entre dois conjuntos de escores. Como se sabe $\widehat{r}$ tem um valor limite superior de $+1,0$. O resultado parece sugerir que as duas variáveis estejam estreitamente relacionadas. Todavia, o valor de $\widehat{r}$ pode ser enganoso. Na realidade, uma estatística mais significativa é $\widehat{r}^2$, o coeficiente de determinação, que dá a percentagem de variação numa variável que é "explicada" estatisticamente pela variação na outra variável. Por exemplo, no caso de $\widehat{r} = 0,85$, $\widehat{r}^2 = 0,7921$, o que significa que $79,21\%$ da variação dos pontos em torno das duas médias grupais pode-se explicar pelo relacionamento entre as duas variáveis. Inversamente, $1 - \widehat{r}^2$, ou $20,79\%$ da variação, não se pode explicar pelo relacionamento, e assim devemos considerá-los como desvios a outros fatores não incluídos no estudo.

2.1.6 INFERÊNCIAS SOBRE O COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO

2.1.6.1 Um Intervalo de Confiança para a Correlação Amostral

O valor do coeficiente de correlação amostral pode ser usado como estimativa do verdadeiro coeficiente de correlação, ρ. A menção de ρ como valor isolado pode dar a impressão errônea de que se trata de um valor efetivo. Por isso, em geral é mais conveniente incluir um intervalo de confiança para o verdadeiro valor, usando-se a estatística amostral $\widehat{r}$ e sua distribuição de probabilidade. Calculado o $\widehat{r}$ pode-se usar um ábaco para determinar os valores superiores e inferior do intervalo para o tamanho de amostra utilizada.

2.1.6.2 Um Teste de Significância de ρ

Pode ser necessário avaliar uma afirmação sobre o valor de ρ. A maneira mais simples é construir um intervalo de confiança para $\widehat{r}$ e observar se o valor estimado está ou não incluído no intervalo. Em caso afirmativo, aceita-se H_0; em caso negativo, rejeita-se H_0 e aceita-se a alternativa. Por exemplo, suponhamos H_0: $\rho = 0,3$ e H_1: ρ=0,3. Se obtivermos um intervalo de confiança de $+0,05$ a $+0,26$, rejeitaremos a hipótese H_0 porque $+0,3$ não está no intervalo.

Se o intervalo de confiança para ρ inclui o valor 0, diz-se então que ρ não é significativo, indicando que ρ pode ser 0 e que o valor de $\widehat{r}$ pode ser devido apenas à variabilidade amostral.

A seguir mostramos alguns exemplos de intervalos de confiança:

$\widehat{r}$ amostral	Tam. da amostra	Interv. de confiança	Comentários
$0,60$	20	$0,21 \ll \rho \ll 0,82$	a
$0,70$	100	$0,58 \ll \rho \ll 0,78$	b
$0,50$	40	$0,20 \ll \rho \ll 0,70$	c
$-0,20$	50	$-0,46 \ll \rho \ll 0,08$	d

Comentários:

a- Pequenos tamanhos de amostra produzem grandes intervalos de confiança

b- É necessário interpolar no gráfico para obter os limites

c- É necessário interpolar no gráfico para obter os limites

d- Como o intervalo inclui o zero, há a possibilidade de o verdadeiro valor ser 0

Outro processo que se pode usar para testar hipóteses sobre p parâmetro ρ é usada a estatística:

$t = \frac{\hat{r}}{\sqrt{(1-r^2)/(n-2)}}$ que possui distribuição "t" de Student com dois graus de liberdade.

(2.6)

Este processo exige alguns cálculos, e testa a hipótese nula de que $\rho = 0$.

2.1.7 DADOS POR PONTOS: O COEFICIENTE DE SPEARMAN

A correlação por postos (ranks) de Spearman é uma técnica não paramétrica para avaliar o grau de relacionamento entre observações emparelhadas de duas variáveis, quando os dados se dispõem em postos. Dados preferenciais são muito comuns em áreas como de teste de alimentos, eventos competitivos e estudos de atitudes. O objetivo do cálculo de um coeficiente de correlação nesses casos é determinar até que ponto dois conjuntos de postos concordam ou discordam. A técnica pode ser estendida também a outros tipos de mensuração, desde que possam ser convertidos em postos.

2.1.8 CORRELAÇÃO E CASUALIDADE

A observação de que duas grandezas tendem simultaneamente a variar no mesmo sentido não implica a presença de um relacionamento causal entre elas. Quando se anota o número mensal X de acidentes de carro e o número mensal Y de seitas religiosas para várias cidades de grande porte, os dados provavelmente indicarão uma correlação positiva elevada. É a flutuação da terceira variável (a população da cidade) que faz com que X e Y variem no mesmo sentido, embora X e Y possam ser não-correlacionadas ou até mesmo correlacionadas negativamente. A terceira variável, que neste exemplo, causa a correlação observada entre acidentes de carro e seitas religiosas é chamada variável intercorrente (não conhecida), e a falsa correlação que ela origina é chamada correlação espúria.

Por isso, ao se utilizar um coeficiente de correlação como medida de relacionamento, deve-se verificar a possibilidade de uma variável intercorrente estar afetando qualquer das variáveis em estudo. Isto se faz intuitivamente ou via regressão múltipla.

2.2 CORRELAÇÃO CANÔNICA

A correlação canônica é um modelo estatístico multivariado, que proporciona o estudo dos inter-relacionamentos entre conjuntos de variáveis aleatórias. A correlação canônica enfoca as correlações entre as combinações linear das variáveis de um conjunto e as combinações lineares das variáveis em outro conjunto.

A idéia é primeiro determinar o par de combinações lineares que tem a maior correlação. A seguir determina-se o par de combinações lineares que tem a maior correlação entre todas as não relacionadas dos pares com o par inicialmente selecionado, e assim por diante. São chamados de pares de combinações lineares as variáveis canônicas, e as suas correlações são chamadas correlações canônicas.

Os dados apropriados para uma análise de correlação canônica são dois conjuntos de variáveis. Supondo que a cada conjunto possa se dar algum significado teórico, ao menos ao ponto de que um conjunto possa ser definido como de variáveis independentes e o outro como de variáveis dependentes.

Como a forma mais geral de combinações lineares, a correlação canônica compartilha das questões básicas de implementação como: em questões sobre o impacto do erro de medição; e os tipos de variáveis e suas transformações que podem ser incluídas.

As questões do impacto do tamanho da amostragem (tanto a grande quanto a pequena) e a necessidade de um número suficiente de observações por variável são freqüentemente encontradas com a correlação canônica. A tendência é incluir muitas variáveis, tanto no conjunto de variáveis dependentes quanto no de independentes, sem perceber as implicações do tamanho da amostragem. Tamanhos de amostragem muito pequenos não fornecem boas estimativas da correlação, obscurecendo desta forma quaisquer relações significativas. Amostragens muito grandes terão uma tendência de apontar significação estatística em todos os casos, mesmo quando não há indicação de uma significação prática. O ideal é manter pelo menos 10 observações por variável para evitar um "excesso de ajuste" dos dados.

A classificação das variáveis em dependentes e independentes é de pouca importância para a estimação estatística das funções canônicas, porque a correlação canônica pondera ambas as combinações lineares para maximizar a correlação e não enfatiza nenhuma das combinações lineares em particular. Entretanto, porque a técnica produz combinação linear para maximizar a correlação entre elas, uma variável em cada um dos conjuntos se relaciona com todas as outras variáveis em ambos os conjuntos. Isto possibilita que a adição ou subtração de uma única variável afete o resultado inteiro, principalmente a outra variável. A composição de cada combinação linear, seja dependente ou independente, torna-se crítica. É preciso ter conjuntos de variáveis ligados conceitualmente antes de aplicar a correlação canônica. Isto torna a especificação de combinações lineares dependentes versus independentes essencial para estabelecer uma fundamentação conceitual forte para as variáveis.

A generalidade da correlação canônica também se estende aos pressupostos estatísticos subjacentes. O pressuposto da linearidade afeta dois aspectos dos resultados de correlação canônica. Em primeiro lugar, o coeficiente de correlação entre duas variáveis quaisquer é baseado em uma relação linear. Se a relação for não linear, então uma ou ambas as variáveis precisam, se possível, ser transformadas. Em segundo lugar, a correlação canônica é a relação linear entre as combinações lineares. Se as combinações lineares relacionam-se de maneira não linear, a relação não será envolvida pela correlação canônica. Assim, embora a correlação canônica seja o método multivariado mais generalizado, ela ainda é restrita à identificação das relações lineares.

A correlação canônica pode acomodar qualquer variável métrica sem o pressuposto rigoroso da normalidade. A Gaussianidade é desejável porque padroniza uma distribuição, possibilitando uma correlação maior entre as variáveis. Mas, no sentido mais restrito, a correlação canônica pode acomodar até mesmo variáveis não Gaussianas se a forma da distribuição não diminuir a correlação com outras variáveis. Isto possibilita que dados não métricos transformados também sejam usados. Entretanto, uma normalidade da combinação linear é necessária para testes de inferência estatística para a significação de cada função canônica. Como os testes para Gaussianidade de combinações lineares não são prontamente disponíveis, a diretriz que prevalece é assegurar que cada variável tenha normalidade na própria combinação linear. Assim, embora a Gaussianidade não seja estritamente necessária, é muito recomendável que todas as variáveis sejam avaliadas para normalidade e transformadas se necessário.

Cada par de variáveis canônica consiste de um par de combinações lineares, uma representando as variáveis independentes e a outra representando as variáveis dependentes. O número máximo de variáveis canônicas (funções) que podem ser extraídas dos conjuntos de variáveis é igual ao número de variáveis do menor conjunto de dados, dependente ou independente. Por exemplo, quando o problema de pesquisa envolve cinco variáveis independentes e três variáveis dependentes, o número máximo de funções canônicas que pode ser extraído é três.

Na correlação canônica calcula-se a quantidade máxima de relação entre os dois conjuntos de variáveis. Como resultado, o primeiro par de combinações lineares canônicas tem a maior correlação possível entre os dois conjuntos de variáveis. O segundo par de combinações lineares apresenta a relação máxima entre os dois conjuntos de variáveis não considerada pelo primeiro par de combinações lineares. Em resumo, pares sucessivos de combinações lineares baseiam-se na variância residual, e suas respectivas correlações canônicas (que refletem os inter-relacionamentos entre as combinações lineares) tornam-se menores a medida em que cada função adicional é extraída. Ou seja, o primeiro par de combinações lineares apresenta a maior correlação, o par seguinte a segunda maior correlação, e assim por diante.

A força da relação entre os pares de combinações lineares é refletida pela correlação canônica. Quando ao quadrado, a correlação canônica representa a quantidade de variância em uma combinação linear ocasionada pela outra combinação linear. Isto pode também ser chamado de quantidade de variância compartilhada entre as duas combinações lineares canônicas. Correlações canônicas ao quadrado são chamadas de raízes canônicas.

A prática mais comum é analisar as funções cujos coeficientes de correlação canônica sejam estatisticamente significativos a partir de determinado nível, tipicamente 0,05 (de correlação) ou acima. Se outras funções independentes forem avaliadas como insignificantes, estas relações entre as variáveis não devem ser interpretadas. A interpretação das combinações lineares em uma função significativa baseia-se na premissa de que deve-se considerar as variáveis em cada conjunto que contribuam significativamente nas variâncias compartilhadas para estas funções como relacionadas entre si.

É recomendado que três critérios sejam usados conjuntamente para decidir quais funções canônicas devem ser interpretadas. Estes três critérios são: o nível de significância estatística da variável; a magnitude da correlação canônica, e a medida da redundância para a porcentagem da variância ocasionada nos dois conjuntos de dados.

Se a relação canônica for estatisticamente significativa é necessário fazer importantes interpretações dos resultados. Fazer estas interpretações envolve o exame das funções canônicas para determinar a importância relativa de cada uma das variáveis originais nas relações canônicas. Não sendo objeto deste estudo, existem três métodos para testar esta significância: os pesos canônicos (coeficientes padronizados); os carregamentos canônicos (correlações de estrutura), e os carregamentos canônicos cruzados.

A correlação canônica deve ser submetida a métodos de validação para assegurar que os resultados não sejam específicos somente aos dados da amostragem e que possam ser generalizados para a população. O procedimento mais direto é criar duas sub-amostras de dados (se o tamanho da amostragem permitir) e realizar uma análise em cada sub-amostragem separadamente. Então os resultados podem ser comparados em relação a similaridades nas funções canônicas, carregamentos de combinações lineares, etc. Se diferenças marcantes forem encontradas, deve-se considerar a realização de mais investigações para assegurar que os resultados finais sejam representativos dos valores populacionais, não somente aos de uma única amostra.

Outra abordagem é avaliar a sensibilidade dos resultados à remoção de uma variável dependente e/ou independente. Como o procedimento da correlação canônica maximiza a correlação e não otimiza a capacidade de interpretação, os pesos e carregamentos canônicos podem variar substancialmente se uma variável for removida de qualquer uma das combinações lineares. Para assegurar a estabilidade dos pesos e carregamentos canônicos, deve-se estimar correlações canônicas múltiplas, cada vez removendo uma variável depende ou independente diferentes.

2.2.1 VARIÁVEIS CANÔNICAS E CORRELAÇÃO CANÔNICA

Nesta seção, como exemplo de aplicação, são abordadas as medidas de associação entre dois conjuntos de variáveis. O primeiro conjunto, com p variáveis aleatórias, é representado pelo vetor $\underline{X}$. O segundo conjunto, com q variáveis, é representado pelo vetor aleatório $\underline{Y}$. Assume-se, no desenvolvimento teórico, que $\underline{X}$ representa o grupo menor, de forma que $p \leq q$.

Supondo que os vetores aleatórios $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ tenham médias $\underline{\mu}_1$ e $\underline{\mu}_2$ e matrizes de covariância $\sum_{11}$ e $\sum_{22}$, respectivamente, então:

$$E\left(\underline{X} - \underline{\mu}_X\right)(\underline{X} - \underline{\mu}_X)^T = Cov\left(\underline{X}\right) = \sum\nolimits_{11} \tag{2.7}$$

$$E\left(\underline{Y} - \underline{\mu}_Y\right)(\underline{Y} - \underline{\mu}_Y)^T = Cov\left(\underline{Y}\right) = \sum\nolimits_{22} \tag{2.8}$$

$$E\left(\underline{X} - \underline{\mu}_X\right)(\underline{Y} - \underline{\mu}_Y)^T = Cov\left(\underline{X}, \underline{Y}\right) = \sum\nolimits_{12} = \sum\nolimits_{21}^T \tag{2.9}$$

É conveniente considerar os vetores $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ conjuntamente, então:

$$\underset{((p+q)\,\mathrm{x}1)}{\underline{Z}} = \begin{bmatrix} \underline{X} \\ \cdots\cdots \\ \underline{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_p \\ y_1 \\ y_2 \\ . \\ . \\ . \\ y_q \end{bmatrix}$$

sendo $\underline{Z}$ de dimensão $((p+q)\,\mathrm{x}1)$

Nesse caso,

$$\underline{\mu}_{((p+q)\mathrm{x}1)} = E\left(\underline{Z}\right) = \begin{bmatrix} E\left(\underline{X}\right) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ E\left(\underline{Y}\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \underline{\mu}_2 \end{bmatrix}$$

e a matriz de covariâncias é

$$\sum_{(p+q)\mathrm{x}(p+q)} = E\left(Z-\mu\right)\left(Z-\mu\right)^T$$

$$= \begin{bmatrix} E\left(X-\mu_1\right)\left(X-\mu_1\right)^T & . & \left(X-\mu_1\right)\left(Y-\mu_2\right)^T \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & . & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ E\left(Y-\mu_2\right)\left(X-\mu_1\right)^T & . & E\left(Y-\mu_2\right)\left(Y-\mu_2\right)^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \underset{(p\mathrm{x}q)}{\sum} & \underset{(p\mathrm{x}q)}{\sum} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \underset{(p\mathrm{x}q)}{\sum} & \underset{(p\mathrm{x}q)}{\sum} \end{bmatrix}$$

O principal objetivo da análise de correlação canônica é determinar o par de combinações lineares que tenha a maior correlação e em seguida determinar o segundo par, entre os p pares existentes, e assim sucessivamente.

Resumidamente, uma simples combinação linear fornece a medida das variáveis dos conjuntos ou seja as variáveis canônicas são:

$$U = \underline{a}^T \underline{X} \tag{2.10}$$

$V = \underline{b}^T \underline{Y}$ onde $\underline{a} \in R$.

$$(2.11)$$

Das equações 2.10 e 2.11, para um novo par de coeficientes dos vetores $\underline{a}$ e $\underline{b}$, obtem-se:

$$Var(U) = \underline{a}^T Var(X) \underline{a} = \underline{a}^T \sum_{11} \underline{a} \qquad (2.12)$$

$$Var(V) = \underline{b}^T Var(Y) \underline{b} = \underline{b}^T \sum_{22} \underline{b} \qquad (2.13)$$

$$Cov(U,V) = \underline{a}^T Var(X,Y) \underline{b} = \underline{a}^T \sum_{12} \underline{b} \qquad (2.14)$$

e determina-se os coeficientes dos vetores, $\underline{a}$ e $\underline{b}$, tal que

$$Corr(U,V) = \max_{a,b \in R^n} \frac{\underline{a}^T \sum_{12} \underline{b}}{\sqrt{\underline{a}^T \sum_{11} \underline{a}} \sqrt{\underline{b}^T \sum_{22} \underline{b}}} \qquad (2.15)$$

Tem-se os conceitos:

a) o primeiro par de variáveis canônicas é o par da combinação linear U_1,V_1, com variâncias unitárias, e que maximiza a relação 2.15;

b) o segundo par de variáveis canônicas é o par da combinação linear U_2,V_2, com variâncias unitárias, e que maximiza a relação 2.15, entre todas as escolhas que não são correlacionadas com o primeiro par de variáveis canônicas;

c) o "K^o" par de variáveis canônicas é o par de combinações lineares U_k,V_k, com variâncias unitárias, e que maximiza a relação 2.15, entre todas as escolhas que não são correlacionadas com o anterior $K-1$ par de variáveis canônicas.

A correlação do K-ésimo par de variáveis canônicas é chamado de correlação canônica.

Ainda, tem-se:

E, a correlação canônica entre U e V é:

$\underset{a,b\in R^n}{Max} Cov(U,V) = \rho_1$, que é a correlação canônica do primeiro par.

(2.16)

O primeiro par de variáveis canônicas é, então:

$U_1 = \underline{e}_1^T \sum_{11}^{-1/2} \underline{X}, V_1 = \underline{f}_1^T \sum_{22}^{-1/2} \underline{Y}$

E para o K-ésimo par de variáveis canônicas, com k= 2,3,4,...,p, tem-se:

$U_k = e_k^T \sum_{11}^{-1/2} X, V1 = f_k^T \sum_{22}^{-1/2} Y$, com

$Corr(U_k, V_k) = \rho_k$

Aqui $\rho_1^2 \geq \rho_2^2 \geq ... \geq \rho_p^2$ são os autovalores do produto matricial

$\sum_{11}^{-1/2} \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21} \sum_{11}^{-1/2}$, que fornece também os autovetores

$\underline{e}_1, \underline{e}_2, ..., \underline{e}_p$ associados aos autovalores acima.

Prova: ver [Jonshon 98].

As variáveis canônicas tem as seguintes propriedades:

1º) $Var(U_k) = Var(V_k) = 1$

2º) $Cov(U_k, U_l) = Corr(U_k, U_l) = 0, K \neq 1$

3º) $Cov(V_k, V_l) = Corr(V_k, V_l) = 0, K \neq 1$

4º) $Cov(U_k, V_l) = Corr(U_k, V_l) = 0, K \neq 1$,com K = 1, 2, 3, ..., p.

As variáveis canônicas são artificiais e não têm significado físico, porém elas podem ter um significado subjetivo. A interpretação é feita em função dos coeficientes de correlação entre as variáveis originais dos conjuntos e das variáveis canônicas. Se as variáveis originais $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ são usadas, os coeficientes canônicos $\underline{a}$ e $\underline{b}$ têm unidades proporcionais aquelas de $\underline{X}$ e $\underline{Y}$.

No caso das correlações entre as variáveis originais do primeiro grupo $\underline{X}$ e as correlações canônicas desse grupo tem-se a matriz de ordem *pxp*:

$\rho_{UX} = A\sum_{11} V_{11}^{-1/2}$ e as relações entre as variáveis originais do segundo grupo com as respectivas variáveis canônicas são dadas pela matriz, de ordem *qxq*, a seguir:

$\rho_{VY} = B\sum_{22} V_{22}^{-1/2}$ as relações entre as variáveis originais do segundo grupo e as variáveis canônicas do primeiro grupo, são dadas pela matriz de ordem *pxq*, a seguir:

$\rho_{UY} = A\sum_{12} V_{11}^{-1/2}$ finalmente as correlações entre as variáveis originais do primeiro grupo com as variáveis canônicas do segundo grupo, são dadas pela matriz de ordem *qxp*, a seguir:

$\rho_{VX} = B \sum_{21} V_{11}^{-1/2}$ onde A é a matriz de ordem pxp formada com os vetores a nas colunas, B é a matriz de ordem qxq com os vetores b nas colunas e $V^{-1/2}$ é a matriz diagonal com os desvios padrões das variáveis originais respectivas na diagonal.

Se as variáveis originais estão padronizadas tem-se as matrizes enunciadas anteriormente, na forma:

$\rho(U, Z_x) = A_z \rho_{11}$,

$\rho(U, Z_y) = A_z \rho_{12}$,

$\rho(V, Z_y) = B_z \rho_{22}$ e

$\rho(V, Z_x) = B_z \rho_{21}$

sendo que as matrizes A e B (ver Jonshon 98) são construídas a partir da matriz de correlação. As correlações obtidas não são afetadas pela padronização.

A correlação canônica possibilita ao pesquisador combinar em uma medida composta o que de outra forma seria um número acima do controle de correlações multi-combinacionais lineares entre conjuntos de variáveis. Ela é útil para identificar relações genéricas entre variáveis dependentes e independentes múltiplas, especialmente quando o pesquisador de dados tem pouco conhecimento a priori sobre as relações entre os conjuntos de variáveis. Essencialmente, o pesquisador pode aplicar a análise de correlação canônica a um conjunto de variáveis, selecionar as variáveis (tanto independentes quanto dependentes) que pareçam estar significativamente relacionadas, e executar as correlações canônicas subseqüentes com as variáveis restantes mais significativas.

Captulo 3

Número de Condição e Estabilidade

3.1 NORMA MATRICIAL

Norma de uma matriz A, denotada por $\|A\|$, é um número real e não negativo. A norma de A satisfaz as seguintes condições:

a)$\|A\| \geq 0$, $\|A\| = 0$ se, e somente se, $A = 0$;

b) $\|\alpha A\| = |\alpha| . \|A\|$;

c) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

Seja $A = (a_{ij})$ de ordem n. As normas de matrizes frequentemente usadas são:

a) Norma máxima por linha

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \tag{3.17}$$

b) Norma máxima por coluna

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq K \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}| \tag{3.18}$$

c) Norma Euclidiana

$$\|A\|_2 = \left(\max_{1 \leq i \leq n} |h_i| \right)^{1/2} \tag{3.19}$$

Onde $h_1, h_2, ..., h_n$ são os autovalores de $A'A$ ($A\prime = (A^*)^T$, transposta da matriz conjugada).

Observa-se que os autovalores da matriz $A'A$ são não negativos.

e)Norma de Frobenius

$$\|A\|_F = \left[\sum_{i,j} (a_{ij})^2 \right]^{1/2} \tag{3.20}$$

A norma matricial é dada por:

$$\|A\|_{v,w} = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_v}{\|x\|_w} \tag{3.21}$$

Segue-se desta definição que a norma da matriz é dita compatível com a norma vetorial dada. A condição de compatibilidade pode ser escrita na forma:

$\|Ax\| \leq \|A\| . \|x\|$.

3.2 NÚMERO DE CONDIÇÃO

Supõe-se que a matriz dos coeficientes (A) do sistema $Ax = b$ seja conhecida exatamente, mas o vetor b está com erro δb.

Seja δx o erro correspondente de x. Então, tem-se:

$A(x + \delta x) = b + \delta b$

Como $Ax = b$, temos $A\delta x = \delta b$ ou $\delta x = A^{-1}\delta b$, se A é inversível.

Assim, com qualquer norma consistente, tem-se:

$$\|Ax\| \leq \|A\| . \|x\|. \tag{3.22}$$

e

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| . \|\delta b\|. \tag{3.23}$$

Das duas equações anteriores conclui-se que

$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \|A\| . \|A^{-1}\| . \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \equiv K.\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$

Onde

$\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ pode ser interpretado como a mudança relativa no vetor b e

$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$ indica a mudança relativa no vetor x.

Assim a relação 3.22 dá um limite superior para a mudança relativa em x em termos de mudança relativa em b.

Vamos supor agora que o vetor b é conhecido exatamente e a matriz A está com erro. Seja δA a perturbação de A, tal que $(A + \delta A)^{-1}$ existe. Então de $x = A^{-1}b$ e $(x + \delta x) = (A + \delta A)^{-1}b$, tem-se:

$$\delta x = [(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}]b.$$

Seja $A + \delta A = B$, então $\delta x = [B^{-1} - A^{-1}]b$ e pode-se escrever

$$\delta x = [A^{-1}AB^{-1} - A^{-1}BB^{-1}]b$$

$$= [A^{-1}(A - B)B^{-1}]b$$

$$= [A^{-1}\delta A(A + \delta A)^{-1}]b$$

$$= -A^{-1}\delta A[(A + \delta A)^{-1}b]$$

$$= -A^{-1}\delta A(x + \delta x)$$

Tomando-se normas, obtem-se

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \,.\, \|\delta A\| \,.\, \|x + \delta x\|$$

donde

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq \|A^{-1}\| \,.\, \|\delta A\|$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq \frac{\|A\| . \|A^{-1}\| . \|\delta A\|}{\|A\|}$$

(3.24)

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x+\delta x\|} \leq K \frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$$

A solução 3.24 dá um limite superior da mudança na solução x para $x + \delta x$, relativa a $x + \delta x$, nos termos da mudança relativa em A.

Finalmente, considera-se o caso geral, em que o vetor b e a matriz A estão com erro. Neste caso, tem-se:

$$(A + \delta x)(x + \delta x) = b + \delta b$$

isto é,

$$(A + \delta A)\delta x = \delta b - \delta A x$$

ou

$$\delta x = (A + \delta A)^{-1}(\delta b - \delta A x)$$

$$\delta x = (I + A^{-1}\delta A)^{-1}A^{-1}(\delta b - \delta A x)$$

portanto

$$\|\delta x\| \leq \|A^{-1}\| \,.\, \|(I + A^{-1}\delta A)^{-1}\| \, (\|\delta b\| + \|\delta A\| \, \|x\|)$$

$$\|\delta x\| \leq (1 - \|\delta A\| \, \|A^{-1}\|)^{-1} \, \|A^{-1}\| \, (\|\delta b\| + \|\delta A\| \, \|x\|)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq (1 - \|\delta A\| \, \|A^{-1}\|)^{-1} \, \|A^{-1}\| \, (\frac{\|\delta b\|}{\|A\| \|x\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|})$$

(3.25)

Como $Ax = b$, tem-se $\|A\| \, \|x\| \geq \|b\|$,então

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq (1 - \|\delta A\| \, \|A^{-1}\|)^{-1} K(\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} + \frac{\|\delta A\|}{\|A\|})$$

(3.26)

Observação: Nas deduções das relações 3.24 e 3.26, assume-se que a matriz $(A+\delta A)$ é não singular. Isso acontece se $\|A^{-1}\| \,.\, \|\delta A\| < 1$, pois $A + \delta A = A(I + A^{-1}\delta A)$. Então, $A + \delta A$ é não singular se $(I + A^{-1}\delta A)$ é não singular.

Seja λ_i um autovalor de $A^{-1}\delta A$. Então

$$\|A^{-1}\delta A\| \geq \lambda_i$$

(3.27)

Observa-se que qualquer autovalor de uma matriz é menor ou igual à sua norma.

Como os autovalores de $I + A^{-1}\delta A$ são$(1 + \lambda_i)$, $i = 1, 2, 3, ..., n$, essa matriz é não singular se $\|A^{-1}\delta A\| < 1$, isto é, $\|A^{-1}\| \,.\, \|\delta A\| < 1$

(3.28)

O número k = $\|\delta A\| \; \|A^{-1}\|$ das expressões anteriormente definidas é chamado número de condição da matriz A e será denotado por $NC(A)$(onde $NC(A) = \|A\| \; \|A^{+}\|$).

Sabe-se que $NC(A)$ tem um papel significativo para decidir as mudanças relativas nas expressões 3.22, 3.24 e 3.26.

Se $NC(A) = 1$, diz-se que o sistema dado $Ax = b$ é bem condicionado. Neste caso, de 3.22, pode-se concluir que a mudança relativa em x é igual a mudança relativa em b, e, portanto para fazer uma estimativa do erro relativo, podemos usar a mudança relativa em b sem risco.

Conclusões similares podem ser feitas nos outros casos também.

Se $NC(A)$ é grande ($>> 1$), diz-se que o sistema $Ax = b$ é mal condicionado, uma mudança pequena nos coeficientes do sistema pode mudar a solução drasticamente.

3.3 Delimitação da Propagação dos Erros Iniciais

3.3.1 Delimitação dos erros intrínsecos:

Chama-se delimitação dos erros intrínsecos de um sistema linear à delimitação do erro de arredondamento de sua solução, devido unicamente à propagação dos erros iniciais durante o processo de resolução.

O erro de arredondamento depende de duas fontes:

a) dos erros iniciais que podem afetar os dados;

b) dos erros de arredondamento cometidos na representação dos números (depende da aritmética de ponto flutuante utilizada):

(i) se os dados são exatos o erro de arredondamento dependerá apenas da precisão da aritmética utilizada.

(ii) se os dados são aproximados, os erros iniciais irão liderar a propagação dos erros de arredondamento, mesmo que seja utilizada uma aritmética de precisão elevada.

Se o número de operações for relativamente grande é possível que o erro propagado torne sem significado o resultado obtido.

3.3.2 Hipóteses para a delimitação:

Sejam $\hat{a}_{ij}$ e $\hat{b}_i$ os valores aproximados, respectivamente, dos coeficientes a_{ij} e termos independentes b_i do sistema de equações lineares $Ax = b$.

As quantidades δa_{ij} e δb_itais que $a_{ij} = \hat{a}_{ij} + \delta a_{ij}$ e $b_i = \hat{b}_i + \delta b_i$ são os erros iniciais.

Indicando por $\bar{x}$ e $\hat{x}$ as soluções, respectivamente, dos sistemas $Ax = b$ e $\hat{A}x = \hat{b}$, chamaremos $\delta x = \bar{x} - \hat{x}$ o erro cometido de $\hat{x}$.

Nosso objetivo é procurar uma delimitação para $\|\delta x_i\|$, $i = 1, 2, 3, ...n$.

No processo de resolução utilizaremos as seguintes hipóteses:

a) É conhecido ξ tal que $|\delta x_i| \leq \xi$e $|\delta b_i| \leq \xi$, quaisquer que sejam i e j ;

b) Os erros cometidos durante a execução das operações são desprezíveis, o que equivale a supor

$\hat{A}\hat{x} \doteq \hat{b}$;

c) Os produtos dos erros $\delta a_{ij}\delta x_j$ são desprezíveis e, portanto,

$\delta A \delta x \doteq 0$

3.3.3 Erro de arredondamento nos métodos iterativos:

Em qualquer fase de iteração, o vetor computado $x(k+1)$ pode ser considerado como o resultado obtido usando a matriz original A e um vetor perturbado $b + \delta b$. Como os métodos iterativos usam a matriz A em forma original em cada iteração, acredita-se que o erro de arredondamento nos métodos iterativos é, em geral, menos sério do que os métodos diretos. Todavia, o problema pode ser sério se o sistema dado é mal condicionado.

Podemos ver isso com o seguinte sistema:

$0,96326x_1 + 0,81321x_2 = 0,88824$

$0,81321x_1 + 0,68654x_2 = 0,74988$

Aplicando o método de Gauss-Seidel com

$X = X(0) = 0,33116$

$\quad\quad\quad\quad 0,70000$

Depois da primeira iteração, ainda obtemos:

$X = X(1) = 0,33116$

$\quad\quad\quad\quad 0,70000$

A razão é que a matriz do sistema é mal condicionada.

Captulo 4

Um Novo Método Numérico para Cálculo da Correlação Canônica

4.1 Introdução

Em algumas situações, como descrito no capítulo de correlação canônica, precisa-se relacionar as variáveis de um grupo com variáveis de outro grupo. Isto é necessário em processos produtivos para determinar a influência de um grupo de variáveis sobre outro grupo. Conseguindo-se identificar um conjunto como um grupo de variáveis independentes e o outro conjunto como um grupo de variáveis dependentes e se há uma relação linear entre estes dois grupos, então podemos calcular a força desta relação, que é chamada de correlação canônica . É importante salientar que não se esta procurando uma relação entre os elementos de um grupo com os elementos do outro grupo e sim uma relação entre todos os elementos de um grupo com todos os elementos do outro grupo. Calculam-se todas as combinações lineares para de cada um dos grupos, e então escolhe-se aquela que tem a correlação mais forte. Deve-se verificar que, em geral, nenhuma combinação linear dos elementos de um grupo é uma variável do grupo. Porém, experiências práticas têm mostra-do que esta aproximação é bastante fidedigna, quando o número de variáveis de ambos os grupos é de tamanho razoável.

A complexidade deste problema consiste em uma multiplicação de cinco matrizes, e então o cálculo do par do maior autovalor e o autovetor correspondente. Mesmo se todas as cinco matrizes forem bem condicionadas, este produto pode não ser, ou seja, o autovetor associado ao maior autovalor da matriz resultante pode não ter nenhuma relação com o autovalor do problema original. Um fato importante a ser considerado é este, e o outro é o número de operações para se chegar à resposta, ou seja a complexidade. Estas características do problema motivam o estudo de como calcular o autovetor do maior autovalor sem executar a multiplicação das matrizes. A idéia é definir uma nova matriz formada por cinco blocos, onde cada bloco é um dos fatores da matriz de multiplicação.

4.2 Preliminares

De acordo com o capítulo da correlação canônica, a correlação entre U e V é definida como

$$Corr\,(U,V) = \max_{a,b\in R^n} \frac{\underline{a}^T \sum_{12} \underline{b}}{\sqrt{\underline{a}^T \sum_{11} \underline{a}}\sqrt{\underline{b}^T \sum_{22} \underline{b}}} \tag{4.29}$$

Teorema 1: Supondo-se que $\underline{X} \in R^m$, $\underline{Y} \in R^n$ são variáveis quaiquer com $m \leq n, Cov(\underline{X}) = \sum_{11}, Cov(\underline{Y}) = \sum_{22}$e $Cov\,(\underline{X}, \underline{Y}) = \sum_{12}$. Alé disto, supomos que $Cov(\underline{Z}) = \sum$tenha grau completo. Fazendo $U = \underline{a}^T X$ e $V = \underline{b}^T Y$, então

$$\underset{a,b \in R^n}{Max} Cov(U, V) = \rho_1, \text{ que é a correlação canônica do primeiro par.} \tag{4.30}$$

que vem a ser o maior autovalor de $\sum_{11}^{-1/2} \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21} \sum_{11}^{-1/2}$ e $\underline{a}$ e $\underline{b}$ são respectivamente,

$\underline{a}^T = \underline{u}_1^T \sum_{11}^{-1/2} \underline{X}$ e $\underline{b}^T = \underline{v}_1^T \sum_{22}^{-1/2} \underline{Y}$

onde $\underline{u}_1$ é o autovetor de $\sum_{11}^{-1/2} \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21} \sum_{11}^{-1/2}$ associado ao maior autovalor, e $\underline{v}_1$ é o autovetor de $\sum_{22}^{-1/2} \sum_{21} \sum_{11}^{-1} \sum_{12} \sum_{22}^{-1/2}$ associado ao maior autovalor, além disto, $Var(U) = Var(V) = 1$.

Prova: ver [Jonshon 98]

Desde que a matriz $\sum_{22}^{-1/2} \sum_{21} \sum_{11}^{-1} \sum_{12} \sum_{22}^{-1/2}$ seja simétrica os autovalores não são um problema, mas infelizmente os autovetores podem ser mal-condicionados. Em relação ao condicionamento, pode-se agir diretamente na matriz, usando transformação de similaridade, desde que preserve os autovalores. Porém, pode-se melhorar o condicionamento se definirmos o problema de forma que a matriz em que temos de achar os autovalores e autovetores não seja nenhum produto de matrizes e o número de condição seja mais favorável.

De agora em diante considera-se que a matriz $\sum_{11}^{-1/2} \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21} \sum_{11}^{-1/2}$está contida em uma classe mais geral de matrizes $M = M_1 M_2 M M_4 M_5$ onde M_1e M_3 são definidas positiva, $M_5 = M_1$ e $M_4^T = M_2$ são inversíveis. As propriedades usadas aqui para

$M_i, i = 1, 2, ..., 5$ são exatamente as mesmas aplicadas em $\sum_{11}^{-1/2}\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\sum_{11}^{-1/2}$. A regra de $\sum_{22}^{-1/2}\sum_{21}\sum_{11}^{-1}\sum_{12}\sum_{22}^{-1/2}$ é a mesma de $\sum_{11}^{-1/2}\sum_{12}\sum_{22}^{-1}\sum_{21}\sum_{11}^{-1/2}$, com a regra de $\sum_{11}$ é trocada com a regra de $\sum_{22}$ e ambas as matrizes são da mesma classe.

4.3 Características da Matriz M

Sendo M_0 a matriz definida por

$$M_0 = \begin{pmatrix} & & & & M_5 \\ M_4 & & & & \\ & M_3 & & & \\ & & M_2 & & \\ & & & M_1 & \end{pmatrix} \tag{4.31}$$

Os autovalores de M_0 estão proximamente relacionados com os da matriz M, como iremos ver

Teorema 2: O conjunto de autovalores de M_0 é um subconjunto dos autovalores de $M = M_1M_2M_3M_4M_5$. Se λ é um autovalor de M_0 então λ^5é um autovalor de M.

Prova. Fazendo λ um autovalor de M_0, então existe um vetor não nulo $x^T = (x_1x_2x_3x_4x_5)$ tal que

$$\begin{pmatrix} & & & & M_5 \\ M_4 & & & & \\ & M_3 & & & \\ & & M_2 & & \\ & & & M_1 & \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

Como $M_5x_5 = \lambda x_1$, $M_4x_1 = \lambda x_2$, $M_3x_2 = \lambda x_3$, $M_2x_3 = \lambda x_4$, $M_1x_4 = \lambda x_5$ então temos que $M_1M_2M_3M_4M_5x_5 = \lambda^5x_5$ e a prova está completa.

O polinômio característico da matriz M_0 tem grau maior que o da matriz M, portanto o número de autovalores de M_0 é maior do que de M. Porém, o conjunto de autovalores de M_0 elevado a quinta potência é um subconjunto dos autovalores de M. Então, temos que os autovalores distintos da matriz $M = M_1M_2M_3MM_5$ podem ser obtidos através da matriz M_0

Agora veremos algumas propriedades da matriz M_0. Primeira, a matriz M_0 é cíclica no sentido em que se rotacionarmos a matriz M_0 no sentido horário então

$$M4 = \begin{pmatrix} & & & & M_4 \\ M_3 & & & & \\ & M_2 & & & \\ & & M_1 & & \\ & & & M_5 & \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

então teremos que ,

$M_1M_2M_3M_4M_5x_4 = \lambda^5 x_4,$

com isto, temos a mesma relação autovalor-autovetor, mas agora o autovetor será x_4 ao invés de x_5, como antes. Sendo $M3$ a matriz,

$$M3 = \begin{pmatrix} & & & & M_3 \\ M_2 & & & & \\ & M_1 & & & \\ & & M_5 & & \\ & & & M_4 & \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

então teremos, agora,

$M_1M_2M_3M_4M_5x_3 = \lambda^5 x_3$

Se fizermos $M2$ a matriz

$$M2 = \begin{pmatrix} & & & & M_2 \\ M_1 & & & & \\ & M_5 & & & \\ & & M_4 & & \\ & & & M_3 & \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

mais uma vez temos a seguinte relação,

$$M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 x_2 = \lambda^5 x_2$$

Finalmente, fazendo $M1$ a matriz

$$M1 = \begin{pmatrix} & & & & M_1 \\ M_5 & & & & \\ & M_4 & & & \\ & & M_3 & & \\ & & & M_2 & \end{pmatrix} \tag{4.36}$$

então, a expressão que dá o autovalor-autovetor é,

$$M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 x_1 = \lambda^5 x_1 \tag{4.37}$$

Mais a frente veremos que os autovalores são sempre os mesmos e o que muda são os autovetores em cada uma das expressões. Isto é exatamente o que usaremos para o melhor condicionamento no problema do autovetor.

Outra propriedade notável da matriz M é a sua invertibilidade dos seus componentes em blocos. De fato, se virmos a matriz M_0^Te a matriz $M_0 M_0^T$ então poderemos facilmente ver a figura de como construir a matriz inversa M_0^{-1}. De fato, M_0^T é

$$M_0^T = \begin{pmatrix} & M_4^T & & & \\ & & M_3^T & & \\ & & & M_2^T & \\ & & & & M_1^T \\ M_5^T & & & & \end{pmatrix} \tag{4.38}$$

e $M_0 M_0^T$ é

$$M_0 M_0^T = \begin{pmatrix} M_5 M_5^T & & & & \\ & M_4 M_4^T & & & \\ & & M_3 M_3^T & & \\ & & & M_2 M_2^T & \\ & & & & M_1 M_1^T \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

e então é claro como deve ser a matriz M_0^{-1},

$$M_0^{-1} = \begin{pmatrix} & M_4^{-1} & & & \\ & & M_3^{-1} & & \\ & & & M_2^{-1} & \\ & & & & M_1^{-1} \\ M_5^{-1} & & & & \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

A existência desta matriz é consequência direta da inversibilidade de cada um dos componentes da matriz m. Note que para cada $i = 1, 2, 3, 4$, $M_i M_i^T$ é determinado por

$$M4M4^T = \begin{pmatrix} M_4 M_4^T & & & & \\ & M_3 M_3^T & & & \\ & & M_2 M_2^T & & \\ & & & M_1 M_1^T & \\ & & & & M_5 M_5^T \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

$$M3M3^T = \begin{pmatrix} M_3M_3^T & & & & \\ & M_2M_2^T & & & \\ & & M_1M_1^T & & \\ & & & M_5M_5^T & \\ & & & & M_4M_4^T \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

$$M2M2^T = \begin{pmatrix} M_2M_2^T & & & & \\ & M_1M_1^T & & & \\ & & M_5M_5^T & & \\ & & & M_4M_4^T & \\ & & & & M_3M_3^T \end{pmatrix} \tag{4.43}$$

$$M1M1^T = \begin{pmatrix} M_1M_1^T & & & & \\ & M_5M_5^T & & & \\ & & M_4M_4^T & & \\ & & & M_3M_3^T & \\ & & & & M_2M_2^T \end{pmatrix} \tag{4.44}$$

O espectro de $MiMi^T$ é dado por

$\lambda\left(MiMi^T\right) = \bigcup_{k=1}^{5} \lambda\left(M_kM_k^T\right), i = 1, 2, ..., 5.$

Agora veremos que todos os sistemas

$$Mix = \lambda x, \tag{4.45}$$

tem o mesmo número de condição. De fato, para ver isto precisamos apenas ver que todas as matrizes $MiMi^T$ para $i = 1, 2, ..., 5$ são matrizes diagonais, onde os dados da diagonal são sempre do mesmo grupo $\left\{M_1M_1^T, M_2M_2^T, M_3M_3^T, M_4M_4^T, M_5M_5^T\right\}$. Se usarmos a mesma razão para M_i^{-1} os resultados terão a mesma natureza com a mesma regra de $M_iM_i^T$ mudada respectivamente a $M_i^{-1}Mi^{-T}$, então $\lambda_{\max}\left(MiMi^T\right)$ para $i = 1, 2, ..., 5$

são as mesmas e $\lambda_{\max}\left(M_i^{-1}M_i^{-T}\right)$ para $i = 1, 2, ..., 5$ são as mesmas, de acordo com o resultado acima e como $cond(M_0)$ é sempre o mesmo, não importa qual matriz Mi utilizaremos para calcular o autovalor-autovetor.

Agora precisamos considerar a questão concernente ao cálculo do autovetor. Como vimos o cálculo do autovalor não é um grande problema, e desde que a matriz M seja simétrica então o número de condição $M - \lambda I$, é $cond(M - \lambda I) = \lambda_{\max}(M - \lambda I)/\lambda_{\min}(M - \lambda I)$. A regra para usar isto é que toda vez que o número de condição de $M - \lambda I$ é alto calculamos os autovetores usando cada um dos sistemas $(Mi - \lambda I)x = 0$ para $i = 1, 2, ..., 5$ e caso contrário se $M - \lambda I$ é bem-condicionado usamos o sistema $(M - \lambda I)x = 0$.

Seja $M = \sum_{11}^{-1/2} \sum_{12} \sum_{22}^{-1} \sum_{21} \sum_{11}^{-1/2}$,onde $\sum_{ij}$ é definida como anteriormente, a matriz cujos autovelores estamos procurando.

Apesar de que M é um produto de cinco matrizes simétricas, desde que $\sum_{11}$ e $\sum_{22}$ sejam diagonais e $\sum_{12} = \sum_{21}^{T}$, o problema de calcular o máximo autovalor de M deverá ser mau condicionada, desde que o novo problema a ser resolvido, envolvendo a matriz M_0, seja melhor condicionado, e não haja uma transformação de semelhança entre M e M_0.

Se a matriz M é bem condicionada, podemos determinar o autovalor desejado e o respectivo autovetor.

Se o número de condição da matriz $(M - \lambda_{\max} I)$ é alto, então calculamos os autovalores usando a matriz M_0. Desde que M_0 seja esparsa e possamos tirar proveito desta esparsidade para baixar seu número de condição. Neste caso determinamos o autovalor e autovetor correspondente.

Em ambos os casos, podemos usar o método das potências para achar o maior autovalor e o autovetor correspondente da matriz.

Captulo 5

Resultados Numéricos e Conclusão

5.1 Determinação das Matrizes para Testes

As matrizes utilizadas para os testes, foram criadas, usando-se o MATLAB versão 5, de forma totalmente aleatória, com a utilização do comando "rand". As matrizes que forem determinadas devem ser definidas positivas, para M_1 e M_3 e inversíveis, para M_2. O algorítmo desenvolvido, permite a escolha do tamanho da matriz, 5x5, 7x7, 10x10, entre outros.

Gerada as matrizes, aleatoriamente, testa-se os autovalores de M_1 e M_3 e verifica-se se os mesmos são maiores que zero. Se forem o algorítmo para e mostra as matrizes, em seguida testa-se se M_2 é inversível e em caso afirmativo o algorítmo para e mostra M_2. Enquanto forem geradas matrizes que não satisfaçam as condições acima o algorítmo gerará novas matrizes. Após geradas as matrizes, estas serão salvas em arquivos independentes a fim de serem utilizadas na próxima etapa.

5.2 Montagem e Testes da Matriz M_0

Após a aquisição das matrizes para serem testadas, aplicamos as mesmas em um algorítimo para montar a matriz M e a matriz M_0 e compará-las entre si.

Este estudo analisa as matrizes M e M_0 em relação ao número de operações para se chegar na matriz em que deseja determinar o maior autovalor e o autovetor correspondente; o número de condição de cada uma das matrizes M e M_0 e a respectiva estabilidade em relação a um determinado erro.

O algorítmo primeiramente lê as matrizes M_1, M_2 e M_3, e em seguida determina M_4 que é a inversa de M_2 e M_5 que é igual a M_1. Logo após calcula-se o número de linhas e colunas das cinco matrizes, isto é o número de linhas de M_1 são respectivamente $lm1$ e $cm1$, de m_2 são $lm2$ e $cm2$ e assim sucessivamente até $lm5$, e $cm5$. Como a matriz M_0 é formada em blocos e cada um destes blocos são M_1, M_2, M_3, M_4 e M_5, o número de linhas da matriz M_0 deverá ser o somatório do número de linhas destas matrizes e consequentemente o número de colunas de M_0 deverá ser o somatório do número de colunas destas matrizes.O número de linhas e colunas de M_0 serão respectivamente $lx1$ e $cx1$. Em seguida o algorítmo gera uma matriz de zeros , chamada de $X1$ com $lx1$ linhas e $cx1$ colunas, como era de se esperar a matriz M_0 é quadrada.

Posteriormente, através de comando de repetição, substituimos os zeros pelos respectivos blocos. O primeiro bloco a ser inserido na matriz $X1$ é o da matriz M_5 que ocupará o canto superior direito de $X1$, nas últimas $cm5$ colunas de $X1$ e nas primeiras $lm1$ linhas de $X1$.

Em seguida inserimos o bloco correspondente a M_4 que ocupará as próximas $lm4$ linhas e as primeiras $cm4$ colunas de $X1$.

Sequencialmente inserimos o bloco correspondente a M_3 que ocupará as próximas lm3 linhas e cm3 colunas.

Após procedemos a inserção de M_2 que ocupará as próximas $lm2$ linhas e $cm2$ colunas.

E finalmente inserimos o último bloco, correspondente ao da matriz M_1 que ocupará as últimas $lm1$ linhas e as próximas $cm1$ colunas.

Após este passo a matriz $X1$ terá a forma acima com todos os blocos substituindo os respectivos zeros.

A próxima etapa do algorítmo é transformar a matriz $X1$ em uma matriz esparsa, que chamaremos de M_0.

Com M determinada, calculamos o maior autovalor e o respectivo autovetor desta matriz esparsa. O autovalor e o respectivo autovetor encontrados são os valores procurados em nossa pesquisa. Com M_0 podemos, também, determinar o número de condição que será chamado de $cond(M_0)$. Outro resultado importante que se pode determinar é o número de operações realizadas para se montar M_0, ou seja, desde a criação de $X1$, a substituição dos blocos atés se chegar na matriz esparsa. Como descrito no capítulo anterior, o autovetor da matriz M_0 tem ordem maior que o da matriz M. Portanto, o algorítmo também determina o autovetor correspondente ao autovetor de M .

O próximo passo do algorítmo é calcular M, que nada mais é do que a multiplicação das cinco matrizes $M_1 * M_2 * M_3 * M_4 * M_5$, com m calculamos o mair autovalor e o respectivo autovetor, o número de operações para se determinar m, ou seja as multiplicações e o número de condição de m que será chamado de $cond(M)$.

Em seguida inserimos um erro em M e M_0, para verificar a estabilidades das mesmas em relação a este erro. De forma a padronizar o erro inserido, o mesmo estará na diagonal principal de cada uma das matrizes. Após esta inserção calculamos novamente o maior autovalor e o respectivo autovetor de M e , da mesma forma, o maior autovalor e o respectivo autovetor de M_0 e em seguida verificamos as respectivas estabilidades.

O algorítimo explicado acima é o seguinte, ressaltando apenas, que para efeitos práticos, aqui a matriz M_0 será chamada de $S1$:

```
clear
clc
erro=1e-10;
M1 =[0.6916 0.6895 0.2088 0.0692 0.1732
0.6895 0.9419 0.1209 0.2636 0.1862
0.2088 0.1209 0.4550 0.2767 0.5245
0.0692 0.2636 0.2767 0.5842 0.6209
0.1732 0.1862 0.5245 0.6209 0.9757];
M2 =[0.1594 0.5376 0.7711 0.0760 0.9329
```

```
0.5008 0.6910 0.2433 0.5087 0.5677
0.5491 0.2896 0.1180 0.6036 0.0042
0.3488 0.7523 0.6139 0.4027 0.0864
0.4326 0.0670 0.6972 0.5614 0.0655];
M3 =[0.5550 0.2659 0.0748 0.4306 0.3045
0.2659 0.5587 0.3339 0.2086 0.2098
0.0748 0.3339 0.8226 0.0652 0.3055
0.4306 0.2086 0.0652 0.8401 0.4193
0.3045 0.2098 0.3055 0.4193 0.3266];
M4=M2';
M5=M1;
[lm1,cm1]=size(M1);
[lm2,cm2]=size(M2);
[lm3,cm3]=size(M3);
[lm4,cm4]=size(M4);
[lm5,cm5]=size(M5);
lx1=2*lm1+lm2+lm3+lm4;
cx1=2*cm1+cm2+cm3+cm4;
lx4a=lx1-lm1-lm4+1;
lx4b=lx1-lm5;
lx3a=lx1-lm1-lm4-lm3+1;
lx3b=lx1-lm5-lm4;
```

```
lx2a=lx1-lm1-lm4-lm3-lm2+1;
lx2b=lx1-lm5-lm4-lm3;
flops(0);
X1=zeros(lx1,cx1);
for i=1:lm5
for j=1:cm5
X1(i,j+cx1-cm5)=M5(i,j);
end
end
for i=1:lm4
for j=1:cm4
X1(i+lm5,j)=M4(i,j);
end
end
for i=1:lm3
for j=1:cm3
X1(i+lm5+lm4,j+cm4)=M3(i,j);
end
end
for i=1:lm2
for j=1:cm2
X1(i+lm5+lm4+lm3,j+cm4+cm3)=M2(i,j);
```

```
end
end
for i=1:lm1
for j=1:cm1
X1(i+lm5+lm4+lm3+lm2,j+cm2+cm3+cm4)=M1(i,j);
end
end
p1=flops;
Z1=sparse(X1);
[i1,j1,s1]=find(Z1);
[m1,n1]=size(Z1);
S1=sparse(i1,j1,s1,m1,n1);
opts.v0=ones(lx1,1)-0.5;
[V1,D1]=eigs(S1,1,'LR',opts);
x1=V1((lx1-lm5+1):lx1,:);
S1a=S1;
for j=1:lx1
S1a(j,j)=S1a(j,j)+erro;
end
[V1a,D1a]=eigs(S1a,1,'LR',opts);
x1a=V1a((lx1-lm5+1):lx1,:);
dif=x1-x1a;
```

```
con1=max(dif);
flops(0);
m=M1*M2*M3*M4*M5;
[lm,cm]=size(m);
p2=flops;
opts.v0=ones(lm,1)-0.5;
[Vm,Dm]=eigs(m,1,'LR',opts);
condm=cond(m);
ma=m;
mb=[1 1 1 1 1];
mb1=diag(mb);
mc=erro*mb1+ma;
opts.v0=ones(lm,1)-0.5;
[Vma,Dma]=eigs(mc,1,'LR',opts);
condx=condest(S1);
difm=Vm-Vma;
con2=max(difm);
resul=[x1 x1a Vm Vma];
```

Outro aspecto tratado no capítulo anterior é que podemos rotacionar a matriz M_0 no sentido horário e encontrarmos uma nova matriz que também trará os mesmos resultados de M_0. Para facilitar a compreensão dos próximos passos a matriz M_0 passará a ser chamada de $M1$.

Para determinarmos $M2$, primeiramente criamos uma matriz $X2$ de zeros de $lx1$ linhas e $cx1$ colunas.

Em seguida inserimos o primeiro bloco, que agora será M_4, e ocupará as primeiras $lm4$ linhas e as últimas $cm4$ colunas.

Posteriormente inserimos o bloco correspondente a M_3 que ocupará as próximas$lm3$ linhas e as primeiras $cm3$ colunas.

Na sequência inserimos o bloco correspondente a M_2 que ocupará as próximas $lm2$ linhas e as próximas $cm2$ colunas.

Em seguida inserimos o bloco correspondente a M_1 que ocupará as próximas $lm1$ linhas e as próximas $cm1$ colunas.

Finalmente inserimos o bloco correspondente a M_5 que corresponderá as próximas $lm5$ linhas e as próximas $cm5$ colunas.

Após este passo tranformamos a matriz $X2$ em uma matriz esparsa e teremos, então $M2$.

Com $M2$ determinamos maior autovalor e o respectivo autovetor, lembrando que deste autovetor retiramos o subconjunto que nos interessa.

De maneira análoga podemos determinar $M3$, $M4$ e $M5$.

Em seguida comparamos todos os autovetores correspondentes e verificamos que em todos eles a resposta é a mesma.

O algorítmo descrito acima está exemplificado abaixo, lembrando ainda que neste caso as matrizes $M1$, $M2$, $M3$, $M4$ e $M5$ serão chamadas respectivamente de $S1$, $S2$, $S3$, $S4$ e $S5$:

```
clear

clc

M1 =[0.6916 0.6895 0.2088 0.0692 0.1732

0.6895 0.9419 0.1209 0.2636 0.1862

0.2088 0.1209 0.4550 0.2767 0.5245

0.0692 0.2636 0.2767 0.5842 0.6209

0.1732 0.1862 0.5245 0.6209 0.9757];

M2 =[0.1594 0.5376 0.7711 0.0760 0.9329

0.5008 0.6910 0.2433 0.5087 0.5677

0.5491 0.2896 0.1180 0.6036 0.0042

0.3488 0.7523 0.6139 0.4027 0.0864

0.4326 0.0670 0.6972 0.5614 0.0655];

M3 =[0.5550 0.2659 0.0748 0.4306 0.3045

0.2659 0.5587 0.3339 0.2086 0.2098

0.0748 0.3339 0.8226 0.0652 0.3055

0.4306 0.2086 0.0652 0.8401 0.4193

0.3045 0.2098 0.3055 0.4193 0.3266];

M4=M2';

M5=M1;

[lm1,cm1]=size(M1);

[lm2,cm2]=size(M2);

[lm3,cm3]=size(M3);
```

```
[lm4,cm4]=size(M4);
[lm5,cm5]=size(M5);
lx1=2*lm1+lm2+lm3+lm4;
cx1=2*cm1+cm2+cm3+cm4;
lx4a=lx1-lm1-lm4+1;
lx4b=lx1-lm5;
lx3a=lx1-lm1-lm4-lm3+1;
lx3b=lx1-lm5-lm4;
lx2a=lx1-lm1-lm4-lm3-lm2+1;
lx2b=lx1-lm5-lm4-lm3;
flops(0);
X1=zeros(lx1,cx1);
for i=1:lm5
for j=1:cm5
X1(i,j+cx1-cm5)=M5(i,j);
end
end
for i=1:lm4
for j=1:cm4
X1(i+lm5,j)=M4(i,j);
end
end
```

```
for i=1:lm3
for j=1:cm3
X1(i+lm5+lm4,j+cm4)=M3(i,j);
end
end
for i=1:lm2
for j=1:cm2
X1(i+lm5+lm4+lm3,j+cm4+cm3)=M2(i,j);
end
end
for i=1:lm1
for j=1:cm1
X1(i+lm5+lm4+lm3+lm2,j+cm2+cm3+cm4)=M1(i,j);
end
end
p1=flops;
Z1=sparse(X1);
[i1,j1,s1]=find(Z1);
[m1,n1]=size(Z1);
S1=sparse(i1,j1,s1,m1,n1);
opts.v0=ones(lx1,1)-0.5;
[V1,D1]=eigs(S1,1,'LR',opts);
```

```
x1=V1((lx1-lm5+1):lx1,:);
X2=zeros(lx1,cx1);
for i=1:lm4
for j=1:cm4
X2(i,j+cx1-cm4)=M4(i,j);
end
end
for i=1:lm3
for j=1:cm3
X2(i+lm4,j)=M3(i,j);
end
end
for i=1:lm2
for j=1:cm2
X2(i+lm4+lm3,j+cm3)=M2(i,j);
end
end
for i=1:lm1
for j=1:cm1
X2(i+lm4+lm3+lm2,j+cm3+cm2)=M1(i,j);
end
end
```

```
for i=1:lm5
for j=1:cm5
X2(i+lm4+lm3+lm2+lm1,j+cm3+cm2+cm1)=M5(i,j);
end
end
Z2=sparse(X2);
[i2,j2,s2]=find(Z2);
[m2,n2]=size(Z2);
S2=sparse(i2,j2,s2,m2,n2);
[V2,D2]=eigs(S2,1,'LR',opts);
x2=V2(lx4a:lx4b,:);
X3=zeros(lx1,cx1);
for i=1:lm3
for j=1:cm3
X3(i,j+cx1-cm3)=M3(i,j);
end
end
for i=1:lm2
for j=1:cm2
X3(i+lm3,j)=M2(i,j);
end
end
```

```
for i=1:lm1
for j=1:cm1
X3(i+lm3+lm2,j+cm2)=M1(i,j);
end
end
for i=1:lm5
for j=1:cm5
X3(i+lm3+lm2+lm1,j+cm2+cm1)=M5(i,j);
end
end
for i=1:lm4
for j=1:cm4
X3(i+lm3+lm2+lm1+lm5,j+cm2+cm1+cm5)=M4(i,j);
end
end
Z3=sparse(X3);
[i3,j3,s3]=find(Z3);
[m3,n3]=size(Z3);
S3=sparse(i3,j3,s3,m3,n3);
[V3,D3]=eigs(S3,1,'LR',opts);
x3=V3(lx3a:lx3b,:)
X4=zeros(lx1,cx1);
```

```
for i=1:lm2
for j=1:cm2
X4(i,j+cx1-cm2)=M2(i,j);
end
end
for i=1:lm1
for j=1:cm1
X4(i+lm2,j)=M1(i,j);
end
end
for i=1:lm5
for j=1:cm5
X4(i+lm1+lm2,j+cm1)=M5(i,j);
end
end
for i=1:lm4
for j=1:cm4
X4(i+lm1+lm2+lm5,j+cm1+cm5)=M4(i,j);
end
end
for i=1:lm3
for j=1:cm3
```

```
X4(i+lm1+lm2+lm4+lm5,j+cm1+cm5+cm4)=M3(i,j);
end
end
Z4=sparse(X4);
[i4,j4,s4]=find(Z4);
[m4,n4]=size(Z4);
S4=sparse(i4,j4,s4,m4,n4);
[V4,D4]=eigs(S4,1,'LR',opts);
x4=V4(lx2a:lx2b,:);
X5=zeros(lx1,cx1);
for i=1:lm1
for j=1:cm1
X5(i,j+cx1-cm1)=M1(i,j);
end
end
for i=1:lm5
for j=1:cm5
X5(i+lm1,j)=M5(i,j);
end
end
for i=1:lm4
for j=1:cm4
```

```
X5(i+lm1+lm5,j+cm1)=M4(i,j);
end
end
for i=1:lm3
for j=1:cm3
X5(i+lm1+lm4+lm5,j+cm1+cm5)=M3(i,j);
end
end
for i=1:lm2
for j=1:cm2
X5(i+lm1+lm3+lm4+lm5,j+cm1+cm3+cm5)=M2(i,j);
end
end
Z5=sparse(X5);
[i5,j5,s5]=find(Z5);
[m5,n5]=size(Z5);
S5=sparse(i5,j5,s5,m5,n5);
[V5,D5]=eigs(S5,1,'LR',opts);
x5=V5(1:lm1,:);
result1=[x1 x2 x3 x4 x5]
```

Embora aqui tenhamos usado uma determinada matriz, para efeito de demonstração, o mesmo se aplica a qualquer matriz.

Um resultado expressivo, destes testes é em relação ao número de operações realizadas para se determinar M e M_0. Na tabela abaixo podemos fazer um comparativo.

Tipo de Matriz	N^o de operações para M	N^o de operações para M_0
4X4	512	288
5X5	1000	450
7X7	2744	882
10X10	8000	1800
20X20	64000	7200

Analisando-se a tabela verificamos que o número de operações torna-se mais significativos, em favor da matriz M_0, à medida que se aumenta o tamanho das matrizes.

Demais resultados encontran-se nos anexos.

5.3 Conclusão

Analisando-se todos os testes realizados nas diversas matrizes podemos concluir que a nova forma de calcular a correlação canônica, apresentada no capítulo 4 é sensivelmente melhor em relação ao método apresentado no capítulo 2.

A matriz M_0 apresenta um número de condição bem menor que o da matriz M. Disto podemos concluir que os resultados encontrados deverão estar bem mais próximos dos reais do que daqueles encontrados com a utilização da matriz M.

A matriz M_0 apresenta um esforço computacional bem menor que o da matriz M, ou seja partindo-se das cinco matrizes, o número de operações para se chegar na matriz da qual iremos calcular o maior autovalor e o respectivo autovetor é bem menor em M_0 do que em M.

Um erro provocado nas duas matrizes, de mesma magnitude, geram erros dentro de limites aceitáveis, utilizando-se a rotina do MATLAB para cálculo do autovalor e autovetor correspondente.

Do exposto, podemos concluir que a utilização da matriz M_0 proporciona resultados mais confiáveis, menor tempo de processamento se comparados aos resultados utilizando-se a matriz M.

Referências Bibliográficas

[JON88]JONSON, RICHARD A.;WICHERN, DEAN W. *Applied Multivariate Statistic Analisis*. Second Edition. New Jersey. Prentice Hall International, 1988.

[FEY99]FEY NETO, EMÍLIO R.*Análise de Correlação Canônica Aplicada em Sistemas de Produção Contínuo*, Dissertação de Mestrado, Curitiba, PPGIA, PUCPR, 1999.

[SAM01]SAMPAIO, RAIMUNDO J. B. de; CANDIDO, MARCO A. B.*An Stable Algorithm to Calculate Canonical Correlation*, Article, Curitiba, PPGIA, PUCPR, 2001.

[FEY00]FEY NETO, EMÍLIO; CHAVES NETO, ANSELMO; SAMPAIO, RAIMUNDO J. B. de; ZUGE, MARLENE. *Análise de Correlação Canônica Aplicada a Sistemas Contínuos de Produção*, Article In X CLAIO, México, 2000.

[SAM00]SAMPAIO, RAIMUNDO J. B. de; FEY NETO, EMÍLIO. *Canonical Correlation Analysis Applied to the Verification of Important Variables of the Stages of a Continuos Process Associate to the Quality of Final Product*. IV INDUSTRY APPLICATIONS CONFERENCE, Porto Alegre, 2000.

[FAD63]FADDEEV, D. K.; FADDEEVA, V. N.*Computacional Methods of Linear Álgebra*, N.H.FREEMAN AND COMPANY, SAN FRANCISCO, 1963.

[KEN78]KENDALL, E. A.*An Introduction to Numerical Analysis*, NEW YORK, JOHN WILEY e SONS,1978.

Apndice A
Resultados encontrados com Matrizes 4x4

Número de matrizes testadas = 10

Exemplo 1

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0.9721 & 0.0081 & 0.3386 & 0.2888 \\ 0.0081 & 0.8589 & 0.6293 & 0.5514 \\ 0.3386 & 0.6293 & 0.9382 & 0.6776 \\ 0.2888 & 0.5514 & 0.6776 & 0.8628 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0.7812 & -1.1878 & 0.3274 & -0.9471 \\ 0.5690 & -2.2023 & 0.2341 & -0.3744 \\ -0.8217 & 0.9863 & 0.0215 & -1.1859 \\ -0.2656 & -0.5186 & -1.0039 & -1.0559 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0.8325 & 0.3167 & 0.0852 & 0.2028 \\ 0.3167 & 0.7139 & 0.0317 & 0.0341 \\ 0.0852 & 0.0317 & 0.8543 & 0.7244 \\ 0.2028 & 0.0341 & 0.7244 & 0.8067 \end{pmatrix}$$

Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	512	$3220,3452$
M	288	$35,4364$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-12.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	0
M	0

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
$-0,1293$	$-0,1293$	$0,3123$	$0,3123$
$-0,1944$	$-0,1944$	$0,4696$	$0,4696$
$-0,2402$	$-0,2402$	$0,5802$	$0,5802$
$-0,2433$	$-0,2433$	$0,5876$	$0,5876$

Exemplo 2

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,9204 & 0,4355 & 0,0221 & 0,7137 \\ 0,4355 & 0,8562 & 0,1201 & 0,3433 \\ 0,0221 & 0,1201 & 0,2888 & 0,0831 \\ 0,7137 & 0,3433 & 0,0831 & 0,6550 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 1,4725 & -1,1283 & 0,1286 & -0,2624 \\ 0,0557 & -1,3493 & 0,6565 & -1,2132 \\ -1,2173 & -0,2611 & -1,1678 & -1,3194 \\ -0,0412 & 0,9535 & -0,4606 & 0,9312 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,9963 & 0,5762 & 0,6187 & 0,7989 \\ 0,5762 & 0,5521 & 0,6139 & 0,4220 \\ 0,6187 & 0,6139 & 0,9167 & 0,3172 \\ 0,7989 & 0,4220 & 0,3172 & 0,8241 \end{pmatrix}$$

Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	512	$4817150,5103$
M	288	$56,3098$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-13.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	0
M	$3,6082e-016$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
$0,1183$	$0,1183$	$0,4042$	$0,4042$
$-0,1815$	$-0,1815$	$-0,6198$	$-0,6198$
$-0,1834$	$-0,1834$	$-0,6264$	$-0,6264$
$0,0717$	$0,0717$	$0,2450$	$0,2450$

Exemplo 3

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,8432 & 0,4992 & 0,2760 & 0,1797 \\ 0,4992 & 0,8342 & 0,0183 & 0,4196 \\ 0,2760 & 0,0183 & 0,8613 & 0,3856 \\ 0,1797 & 0,4196 & 0,3856 & 0,4627 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0,0112 & -0,9898 & 1,1380 & -0,3306 \\ -0,6451 & 1,3396 & -0,6841 & -0,8436 \\ 0,8057 & 0,2895 & -1,2919 & 0,4978 \\ 0,2316 & 1,4789 & -0,0729 & 1,4885 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,8557 & 0,4041 & 0,3813 & 0,2993 \\ 0,4041 & 0,6651 & 0,3776 & 0,3524 \\ 0,3813 & 0,3776 & 0,5815 & 0,3873 \\ 0,2993 & 0,3524 & 0,3873 & 0,3943 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	512	67690,6213
M	288	978,4587

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-14.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$1,249e-16$
M	$1,1102e-16$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
$-0,0167$	$-0,0167$	$-0,0474$	$-0,0474$
$-0,1384$	$-0,1384$	$-0,3940$	$-0,3940$
$-0,2283$	$-0,2283$	$-0,6496$	$-0,6496$
$-0,2279$	$-0,2279$	$-0,6485$	$-0,6485$

Exemplo 4

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,6120 & 0,4710 & 0,3798 & 0,3241 \\ 0,4710 & 0,9360 & 0,3562 & 0,2761 \\ 0,3798 & 0,3562 & 0,7777 & 0,4030 \\ 0,3241 & 0,2761 & 0,4030 & 0,9103 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} -0.5465 & -0.8542 & 0.4853 & -0.0793 \\ -0.8468 & -1.2013 & -0.5955 & 1.5352 \\ -0.2463 & -0.1199 & -0.1497 & -0.6065 \\ 0.6630 & -0.0653 & -0.4348 & -1.3474 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,5786 & 0,2997 & 0,3090 & 0,2532 \\ 0,2997 & 0,9968 & 0,6888 & 0,1128 \\ 0,3090 & 0,6888 & 0,6976 & 0,1649 \\ 0,2532 & 0,1128 & 0,1649 & 0,8766 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	512	3349, 9073
M	288	19, 211

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-15.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	0
M	$8,3267e-17$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
$-0,2032$	$-0,2032$	0,4729	0,4729
$-0,2880$	$-0,2880$	0,6705	0,6705
$-0,1843$	$-0,1843$	0,4291	0,4291
$-0,1622$	$-0,1622$	0,3776	0,3776

Exemplo 5

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,4826 & 0,0544 & 0,5496 & 0,0954 \\ 0,0544 & 0,8680 & 0,5291 & 0,4295 \\ 0,5496 & 0,5291 & 0,9820 & 0,4435 \\ 0,0954 & 0,4295 & 0,4435 & 0,6543 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0.4694 & 0.5354 & 0.1326 & -0.0787 \\ -0.9036 & 0.5529 & 1.5929 & -0.6817 \\ 0.0359 & -0.2037 & 1.0184 & -1.0246 \\ -0.6275 & -2.0543 & -1.5804 & -1.2344 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,3304 & 0,3264 & 0,1429 & 0,1160 \\ 0,3264 & 0,7807 & 0,4642 & 0,0044 \\ 0,1429 & 0,4642 & 0,6161 & 0,2957 \\ 0,1160 & 0,0044 & 0,2957 & 0,8146 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	512	$514538,861$
M	288	$214,6299$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-10.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$1,1102e-16$
M	$6,8695e-16$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M	autovetor de M	autovetor de m	autovetor de m
sem erro	com erro	sem erro	com erro
$0,0531$	$0,0531$	$-0,1454$	$-0,1454$
$0,1918$	$0,1918$	$-0,5252$	$-0,5252$
$0,1997$	$0,1997$	$-0,5469$	$-0,5469$
$0,2321$	$0,2321$	$-0,6356$	$-0,6356$

Exemplo 6

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,9422 & 0,1742 & 0,0415 & 0,2590 \\ 0,1742 & 0,8909 & 0,3411 & 0,6005 \\ 0,0415 & 0,3411 & 0,2195 & 0,2663 \\ 0,2590 & 0,6005 & 0,2663 & 0,9126 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0.2888 & -0.4650 & -1.3573 & -1.3813 \\ -0.4293 & 0.3710 & -1.0226 & 0.3155 \\ 0.0558 & 0.7283 & 1.0378 & 1.5532 \\ -0.3679 & 2.1122 & -0.3898 & 0,9126 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,4015 & 0,0731 & 0,3310 & 0,1854 \\ 0,0731 & 0,1594 & 0,1125 & 0,0396 \\ 0,3310 & 0,1125 & 0,6935 & 0,4407 \\ 0,1854 & 0,0396 & 0,4407 & 0,5378 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	512	$16648,0942$
M	288	$68,0295$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-11.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$2.7756e-17$
M	$7.457e-17$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
$0,3387$	$0,3387$	$0,9626$	$0,9626$
$0,0621$	$0,0621$	$0,1765$	$0,1765$
$-0,0169$	$-0,0169$	$-0,0481$	$-0,0481$
$0,0704$	$0,0704$	$0,2001$	$0,2001$

Exemplo 7

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,6869 & 0,2175 & 0,1323 & 0,0435 \\ 0,2175 & 0,7917 & 0,0787 & 0,6634 \\ 0,1323 & 0,0787 & 0,7835 & 0,1283 \\ 0,0435 & 0,6634 & 0,1283 & 0,7878 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 1.9574 & -1.1398 & 0.6353 & 0.0860 \\ 0.5045 & -0.2111 & -0.6014 & -2.0046 \\ 1.8645 & 1.1902 & 0.5512 & -0.4931 \\ -0.3398 & -1.1162 & -1.0998 & 0.4620 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,8951 & 0,3794 & 0,2569 & 0,5433 \\ 0,3794 & 0,5198 & 0,6217 & 0,1330 \\ 0,2569 & 0,6217 & 0,9259 & 0,0046 \\ 0,5433 & 0,1330 & 0,0046 & 0,8931 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	512	$1832,05$
M	288	$173,4118$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-12.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$1,1102e-16$
M	$1,3878e-16$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
$-0,0956$	$-0,0956$	$-0,2419$	$-0,2419$
$0,2167$	$0,2167$	$0,5484$	$0,5484$
$-0,2135$	$-0,2135$	$-0,5403$	$-0,5403$
$0,2334$	$0,2334$	$0,5906$	$0,5906$

Exemplo 8

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,7346 & 0,0664 & 0,1168 & 0,6777 \\ 0,0664 & 0,9371 & 0,7274 & 0,2793 \\ 0,1168 & 0,7274 & 0,9387 & 0,3265 \\ 0,6777 & 0,2793 & 0,3265 & 0,7121 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} -0.3210 & -1.2316 & 0.9442 & -1.0181 \\ 1.2366 & 1.0556 & -2.1204 & -0.1821 \\ -0.6313 & -0.1132 & -0.6447 & 1.5210 \\ -2.3252 & 0.3792 & -0.7043 & -0.0384 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,8711 & 0,6800 & 0,0427 & 0,5974 \\ 0,6800 & 0,6331 & 0,1015 & 0,4628 \\ 0,0427 & 0,1015 & 0,8105 & 0,0823 \\ 0,5974 & 0,4628 & 0,0823 & 0,8435 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	512	651481, 8375
M	288	343, 7786

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-13.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	0
M	0

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
$-0,2311$	$-0,2311$	$-0,5703$	$-0,5703$
$0,2333$	$0,2333$	$0,5759$	$0,5759$
$0,1798$	$0,1798$	$0,4439$	$0,4439$
$-0,1548$	$-0,1548$	$-0,3822$	$-0,3822$

Exemplo 9

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,9745 & 0,4022 & 0,1313 & 0,7247 \\ 0,4022 & 0,8995 & 0,1707 & 0,0430 \\ 0,1313 & 0,1707 & 0,4792 & 0,0939 \\ 0,7247 & 0,0430 & 0,0939 & 0,6500 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} -0.4326 & -1.1465 & 0.3273 & -0.5883 \\ -1.6656 & 1.1909 & 0.1746 & 2.1832 \\ 0.1253 & 1.1892 & -0.1867 & -0.1364 \\ 0.2877 & -0.0376 & 0.7258 & 0.1139 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,8980 & 0,6792 & 0,1315 & 0,4729 \\ 0,6792 & 0,9674 & 0,4988 & 0,3971 \\ 0,1315 & 0,4988 & 0,9882 & 0,7683 \\ 0,4729 & 0,3971 & 0,7683 & 0,9831 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	512	$1931300,8921$
M	288	$1423,4448$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-10.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$1,1102e-16$
M	$3,8858e-16$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
0.2096	0.2096	0.5428	0.5428
0.3107	0.3107	0.8046	0.8046
0.0499	0.0499	0.1293	0.1293
0.0784	0.0784	0.2031	0.2031

Exemplo 10

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,5526 & 0,0698 & 0,0989 & 0,1492 \\ 0,0698 & 0,8702 & 0,3666 & 0,3324 \\ 0,0989 & 0,3666 & 0,5884 & 0,1614 \\ 0,1492 & 0,3324 & 0,1614 & 0,6386 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} -2,1707 & 0,5077 & 0,3803 & 0,0 \\ -0,0592 & 1,6924 & -1,0091 & -0,3179 \\ -1,0106 & 0,5913 & -0,0195 & 1,0950 \\ 0,6145 & -0,6436 & -0,0482 & -1,8740 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,9796 & 0,3239 & 0,1921 & 0,2986 \\ 0,3239 & 0,7315 & 0,1279 & 0,0215 \\ 0,1921 & 0,1279 & 0,3961 & 0,0889 \\ 0,2986 & 0,0215 & 0,0889 & 0,5429 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	512	$7077,0775$
M	288	$62,2277$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-12.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$1,1102e-16$
M	$2,498e-16$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
0.1891	0.1891	-0.4679	-0.4679
0.2696	0.2696	-0.6669	-0.6669
0.1631	0.1631	-0.4034	-0.4034
0.1684	0.1684	-0.4167	-0.4167

Apndice B
Resultados encontrados com Matrizes 5x5

Número de matrizes testadas = 10

Exemplo 1

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,8976 & 0,2156 & 0,0158 & 0,3465 & 0,2965 \\ 0,2156 & 0,9210 & 0,4142 & 0,3848 & 0,4031 \\ 0,0158 & 0,4142 & 0,6236 & 0,1361 & 0,1123 \\ 0,3465 & 0,3848 & 0,1361 & 0,8832 & 0,5976 \\ 0,2965 & 0,4031 & 0,1123 & 0,5976 & 0,6879 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0,6418 & 0,5249 & 0,0913 & 0,3764 & 0,3174 \\ 0,5279 & 0,3831 & 0,2281 & 0,7779 & 0,5946 \\ 0,7784 & 0,0284 & 0,2126 & 0,1111 & 0,5304 \\ 0,0679 & 0,7444 & 0,4260 & 0,7087 & 0,6496 \\ 0,2337 & 0,3038 & 0,9246 & 0,2469 & 0,3201 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,9696 & 0,3285 & 0,4785 & 0,1570 & 0,1988 \\ 0,3285 & 0,8077 & 0,0915 & 0,2685 & 0,3357 \\ 0,4785 & 0,0915 & 0,4686 & 0,3544 & 0,2077 \\ 0,1570 & 0,2685 & 0,3544 & 0,5197 & 0,3187 \\ 0,1988 & 0,3357 & 0,2077 & 0,3187 & 0,4524 \end{pmatrix}$$

Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	1000	198799, 5505
M	450	399, 494

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-9.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	0
M	$8,3267e-17$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
$0,1716$	$0,1716$	$-0,3865$	$-0,3865$
$0,2326$	$0,2326$	$-0,5241$	$-0,5241$
$0,1205$	$0,1205$	$-0,2714$	$-0,2714$
$0,2362$	$0,2362$	$-0,5322$	$-0,5322$
$0,2077$	$0,2077$	$-0,4680$	$-0,4680$

Exemplo 2

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,9482 & 0,4692 & 0,1713 & 0,5035 & 0,2757 \\ 0,4692 & 0,8934 & 0,2392 & 0,5786 & 0,4452 \\ 0,1713 & 0,2392 & 0,7602 & 0,1028 & 0,2686 \\ 0,5035 & 0,5786 & 0,1028 & 0,4664 & 0,3238 \\ 0,2757 & 0,4452 & 0,2686 & 0,3238 & 0,4691 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0,9626 & 0,3066 & 0,1763 & 0,2026 & 0,9594 \\ 0,1003 & 0,8196 & 0,6155 & 0,8276 & 0,8728 \\ 0,3388 & 0,9366 & 0,0301 & 0,5132 & 0,4798 \\ 0,8449 & 0,3585 & 0,9168 & 0,0879 & 0,3774 \\ 0,6867 & 0,9598 & 0,0232 & 0,7920 & 0,7386 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,8801 & 0,2022 & 0,3303 & 0,1046 & 0,0136 \\ 0,2022 & 0,7914 & 0,3848 & 0,6140 & 0,7103 \\ 0,3303 & 0,3848 & 0,7054 & 0,2233 & 0,4291 \\ 0,1046 & 0,6140 & 0,2233 & 0,9846 & 0,7527 \\ 0,0136 & 0,7103 & 0,4291 & 0,7527 & 0,9653 \end{pmatrix}$$

Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	1000	$4036029,3985$
M	450	$313,5316$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-10.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	0
M	$1,9429e-16$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M	autovetor de M	autovetor de m	autovetor de m
sem erro	com erro	sem erro	com erro
$0,2127$	$0,2127$	$-0,4849$	$-0,4849$
$0,2523$	$0,2523$	$-0,5750$	$-0,5750$
$0,1404$	$0,1404$	$-0,3201$	$-0,3201$
$0,1861$	$0,1861$	$-0,4241$	$-0,4241$
$0,1710$	$0,1710$	$-0,3898$	$-0,3898$

Exemplo 3

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,7780 & 0,0282 & 0,4788 & 0,6673 & 0,4635 \\ 0,0282 & 0,8878 & 0,4227 & 0,0183 & 0,5899 \\ 0,4788 & 0,4227 & 0,5310 & 0,3605 & 0,5593 \\ 0,6673 & 0,0183 & 0,3605 & 0,9786 & 0,1082 \\ 0,4635 & 0,5899 & 0,5593 & 0,1082 & 0,8988 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0,0998 & 0,0363 & 0,3301 & 0,9266 & 0,7243 \\ 0,1688 & 0,3201 & 0,8723 & 0,6552 & 0,8061 \\ 0,6162 & 0,4015 & 0,3810 & 0,0048 & 0,9991 \\ 0,3593 & 0,3566 & 0,8848 & 0,4178 & 0,0836 \\ 0,4642 & 0,2477 & 0,1263 & 0,8138 & 0,1635 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,4556 & 0,2874 & 0,1793 & 0,3125 & 0,4279 \\ 0,2874 & 0,8973 & 0,4539 & 0,4626 & 0,6246 \\ 0,1793 & 0,4539 & 0,4531 & 0,3410 & 0,5366 \\ 0,3125 & 0,4626 & 0,3410 & 0,7740 & 0,5473 \\ 0,4279 & 0,6246 & 0,5366 & 0,5473 & 0,9596 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	1000	$16484595,0485$
M	450	$636,5161$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-10.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	0
M	$1,1102e-16$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M	autovetor de M	autovetor de m	autovetor de m
sem erro	com erro	sem erro	com erro
$-0,1961$	$-0,1961$	$0,4449$	$0,4449$
$-0,1821$	$-0,1821$	$0,4131$	$0,4131$
$-0,2029$	$-0,2029$	$0,4602$	$0,4602$
$-0,1730$	$-0,1730$	$0,3924$	$0,3924$
$-0,2272$	$-0,2272$	$0,5154$	$0,5154$

Exemplo 4

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 1,8701 & -0,1044 & 0,2038 & -0,8286 & -0,5261 \\ -0,1044 & 1,3590 & 0,2458 & -0,4859 & -0,3467 \\ 0,2038 & 0,2458 & 1,3608 & -0,7696 & -0,3644 \\ -0,8286 & -0,4859 & -0,7696 & 2,6489 & 0,5152 \\ -0,5261 & -0,3467 & -0,3644 & 0,5152 & 1,3971 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0,7223 & 0,3884 & 0,9577 & 0,1863 & 0,1955 \\ 0,6986 & 0,4914 & 0,2726 & 0,5818 & 0,6903 \\ 0,3588 & 0,5489 & 0,6977 & 0,4424 & 0,6516 \\ 0,9554 & 0,6807 & 0,9386 & 0,8439 & 0,0384 \\ 0,9224 & 0,1316 & 0,9663 & 0,5095 & 0,3438 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 76.6347 & -38.5867 & -23.8525 & -29.4507 & -6.1277 \\ -38.5867 & 21.5462 & 10.7351 & 15.140 & 2.6615 \\ -23.8525 & 10.7351 & 10.1698 & 8.6160 & 1.1374 \\ -29.4507 & 15.1409 & 8.6160 & 13.0798 & 1.9584 \\ -6.1277 & 2.6615 & 1.1374 & 1.9584 & 2.5040 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	1000	$267,8173$
M	450	$990,4152$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-12.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$1,3878e-17$
M	$1,36e-15$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
$-0,0027$	$-0,0027$	$-0,0184$	$-0,0184$
$0,0263$	$0,0263$	$0,1773$	$0,1773$
$0,0936$	$0,0936$	$0,6303$	$0,6303$
$-0,0694$	$-0,0694$	$-0,4677$	$-0,4677$
$-0,0881$	$-0,0881$	$-0,5934$	$-0,5934$

Exemplo 5

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,6743 & 0,4215 & 0,0032 & 0,0498 & 0,3562 \\ 0,4215 & 0,9759 & 0,3360 & 0,4246 & 0,6334 \\ 0,0032 & 0,3360 & 0,7926 & 0,1446 & 0,0059 \\ 0,0498 & 0,4246 & 0,1446 & 0,9492 & 0,5480 \\ 0,3562 & 0,6334 & 0,0059 & 0,5480 & 0,7139 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0.0778 & 0.2164 & 0.3938 & 0.9866 & 0.9130 \\ 0.8965 & 0.2057 & 0.5872 & 0.3310 & 0.9657 \\ 0.0917 & 0.0794 & 0.3041 & 0.4736 & 0.5034 \\ 0.3214 & 0.2278 & 0.1099 & 0.7620 & 0.3080 \\ 0.5902 & 0.8104 & 0.0998 & 0.1079 & 0.3955 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,4313 & 0,4099 & 0,5623 & 0,1454 & 0,3181 \\ 0,4099 & 0,9330 & 0,2985 & 0,2457 & 0,2458 \\ 0,5623 & 0,2985 & 0,8802 & 0,1864 & 0,5661 \\ 0,1454 & 0,2457 & 0,1864 & 0,9572 & 0,1311 \\ 0,3181 & 0,2458 & 0,5661 & 0,1311 & 0,8353 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	1000	$51828088,219$
M	450	$954,1595$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-11.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$5,5511e-17$
M	$1,1102e-16$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
$0,1618$	$0,1618$	$-0,3685$	$-0,3685$
$0,2753$	$0,2753$	$-0,6269$	$-0,6269$
$0,1039$	$0,1039$	$-0,2366$	$-0,2366$
$0,1801$	$0,1801$	$-0,4100$	$-0,4100$
$0,2183$	$0,2183$	$-0,4971$	$-0,4971$

Exemplo 6

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,6995 & 0,2322 & 0,3208 & 0,4590 & 0,1941 \\ 0,2322 & 0,9363 & 0,5975 & 0,5035 & 0,2946 \\ 0,3208 & 0,5975 & 0,6004 & 0,4660 & 0,3772 \\ 0,4590 & 0,5035 & 0,4660 & 0,6994 & 0,1480 \\ 0,1941 & 0,2946 & 0,3772 & 0,1480 & 0,7190 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0.7351 & 0.3702 & 0.3800 & 0.1125 & 0.6722 \\ 0.4229 & 0.7963 & 0.2242 & 0.5169 & 0.9640 \\ 0.3888 & 0.9523 & 0.6715 & 0.7692 & 0.9592 \\ 0.7142 & 0.6442 & 0.9043 & 0.8510 & 0.5176 \\ 0.9957 & 0.2986 & 0.5408 & 0.1576 & 0.4412 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,9371 & 0,1190 & 0,2854 & 0,1370 & 0,1904 \\ 0,1190 & 0,9636 & 0,7030 & 0,3099 & 0,1188 \\ 0,2854 & 0,7030 & 0,8867 & 0,3525 & 0,3032 \\ 0,1370 & 0,3099 & 0,3525 & 0,3401 & 0,4980 \\ 0,1904 & 0,1188 & 0,3032 & 0,4980 & 0,9912 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	1000	$21278905,1672$
M	450	$295,2299$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-14.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	0
M	$2,7756e-17$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
$-0,1643$	$-0,1643$	$-0,3726$	$-0,3726$
$-0,2360$	$-0,2360$	$-0,5354$	$-0,5354$
$-0,2151$	$-0,2151$	$-0,4878$	$-0,4878$
$-0,2099$	$-0,2099$	$-0,4761$	$-0,4761$
$-0,1461$	$-0,1461$	$-0,3314$	$-0,3314$

Exemplo 7

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,7497 & 0,2351 & 0,2617 & 0,2110 & 0,4663 \\ 0,2351 & 0,6874 & 0,2694 & 0,4213 & 0,5450 \\ 0,2617 & 0,2694 & 0,5963 & 0,2929 & 0,2079 \\ 0,2110 & 0,4213 & 0,2929 & 0,9771 & 0,0740 \\ 0,4663 & 0,5450 & 0,2079 & 0,0740 & 0,7880 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0,8380 & 0,9190 & 0,5508 & 0,8528 & 0,4451 \\ 0,8069 & 0,2702 & 0,2787 & 0,4411 & 0,2904 \\ 0,5064 & 0,0226 & 0,5610 & 0,4168 & 0,8555 \\ 0,0849 & 0,6197 & 0,4424 & 0,9943 & 0,5222 \\ 0,7845 & 0,9205 & 0,3865 & 0,3207 & 0,7581 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,2714 & 0,2200 & 0,3404 & 0,0152 & 0,1903 \\ 0,2200 & 0,5023 & 0,3905 & 0,1705 & 0,1713 \\ 0,3404 & 0,3905 & 0,6754 & 0,3793 & 0,5684 \\ 0,0152 & 0,1705 & 0,3793 & 0,8478 & 0,6472 \\ 0,1903 & 0,1713 & 0,5684 & 0,6472 & 0,8250 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	1000	1798397, 2786
M	450	160, 7874

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-9.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$5,5511e-17$
M	$8,3267e-17$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M	autovetor de M	autovetor de m	autovetor de m
sem erro	com erro	sem erro	com erro
$0,2055$	$0,2055$	$-0,4726$	$-0,4726$
$0,2039$	$0,2039$	$-0,4690$	$-0,4690$
$0,1595$	$0,1595$	$-0,3668$	$-0,3668$
$0,1923$	$0,1923$	$-0,4423$	$-0,4423$
$0,2070$	$0,2070$	$-0,4760$	$-0,4760$

Exemplo 8

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,6445 & 0,1786 & 0,4403 & 0,3609 & 0,2581 \\ 0,1786 & 0,9569 & 0,1933 & 0,0945 & 0,4422 \\ 0,4403 & 0,1933 & 0,6171 & 0,2553 & 0,2513 \\ 0,3609 & 0,0945 & 0,2553 & 0,4360 & 0,4516 \\ 0,2581 & 0,4422 & 0,2513 & 0,4516 & 0,6689 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0,5637 & 0,5848 & 0,4053 & 0,3799 & 0,5230 \\ 0,4265 & 0,5265 & 0,5148 & 0,0250 & 0,9966 \\ 0,4453 & 0,6634 & 0,9613 & 0,2323 & 0,7770 \\ 0,2659 & 0,9960 & 0,1663 & 0,9839 & 0,1845 \\ 0,0356 & 0,6068 & 0,7821 & 0,2167 & 0,6769 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,8125 & 0,0120 & 0,1802 & 0,3549 & 0,3397 \\ 0,0120 & 0,4986 & 0,1285 & 0,0751 & 0,2718 \\ 0,1802 & 0,1285 & 0,9664 & 0,0156 & 0,0749 \\ 0,3549 & 0,0751 & 0,0156 & 0,9568 & 0,1869 \\ 0,3397 & 0,2718 & 0,0749 & 0,1869 & 0,6742 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	1000	2688679389197, 45
M	450	11166, 2381

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-10.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$5,5511e-17$
M	$8,3267e-17$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M	autovetor de M	autovetor de m	autovetor de m
sem erro	com erro	sem erro	com erro
$0,2002$	$0,2002$	$0,4603$	$0,4603$
$0,1969$	$0,1969$	$0,4528$	$0,4528$
$0,1932$	$0,1932$	$0,4442$	$0,4442$
$0,1650$	$0,1650$	$0,3794$	$0,3794$
$0,2139$	$0,2139$	$0,4918$	$0,4918$

Exemplo 9

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,8941 & 0,3420 & 0,0214 & 0,4225 & 0,5318 \\ 0,3420 & 0,7218 & 0,0749 & 0,5368 & 0,4604 \\ 0,0214 & 0,0749 & 0,5787 & 0,2504 & 0,0496 \\ 0,4225 & 0,5368 & 0,2504 & 0,6617 & 0,2132 \\ 0,5318 & 0,4604 & 0,0496 & 0,2132 & 0,9458 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0,3850 & 0,0203 & 0,7275 & 0,1548 & 0,6036 \\ 0,0218 & 0,2222 & 0,3532 & 0,4229 & 0,7482 \\ 0,1297 & 0,8755 & 0,6576 & 0,5611 & 0,9166 \\ 0,9584 & 0,1203 & 0,9003 & 0,9824 & 0,1146 \\ 0,8722 & 0,4069 & 0,2412 & 0,9360 & 0,5575 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,7296 & 0,1537 & 0,2468 & 0,4880 & 0,4539 \\ 0,1537 & 0,3035 & 0,0728 & 0,2240 & 0,2478 \\ 0,2468 & 0,0728 & 0,7972 & 0,2100 & 0,0126 \\ 0,4880 & 0,2240 & 0,2100 & 0,9455 & 0,3792 \\ 0,4539 & 0,2478 & 0,0126 & 0,3792 & 0,6338 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	1000	$524996,0111$
M	450	$122,4675$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-11.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$1,1102e-16$
M	$2,7756e-17$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M	autovetor de M	autovetor de m	autovetor de m
sem erro	com erro	sem erro	com erro
$-0,2100$	$-0,2100$	$0,4834$	$0,4834$
$-0,2073$	$-0,2073$	$0,4772$	$0,4772$
$-0,1069$	$-0,1069$	$0,2462$	$0,2462$
$-0,2048$	$-0,2048$	$0,4714$	$0,4714$
$-0,2197$	$-0,2197$	$0,5057$	$0,5057$

Exemplo 10

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 0,8906 & 0,0035 & 0,3133 & 0,2904 & 0,4183 \\ 0,0035 & 0,5509 & 0,3684 & 0,5066 & 0,1928 \\ 0,3133 & 0,3684 & 0,8311 & 0,5310 & 0,7759 \\ 0,2904 & 0,5066 & 0,5310 & 0,9451 & 0,6345 \\ 0,4183 & 0,1928 & 0,7759 & 0,6345 & 0,9968 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 0,4932 & 0,6307 & -0,6160 & -0,3257 & -1,1294 \\ 1,2376 & -0,5485 & 1,3458 & -2,0122 & 0,1970 \\ 1,2960 & 0,2296 & 0,9749 & 1,5677 & 1,6969 \\ -0,2782 & 0,3553 & -2,3779 & 0,2333 & 0,7260 \\ 0,2171 & 0,5213 & -1,0923 & 0,6464 & 0,7925 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,9535 & 0,6640 & 0,3630 & 0,2506 & 0,2344 \\ 0,6640 & 0,9430 & 0,3530 & 0,3249 & 0,2856 \\ 0,3630 & 0,3530 & 0,4093 & 0,2095 & 0,4508 \\ 0,2506 & 0,3249 & 0,2095 & 0,5420 & 0,3436 \\ 0,2344 & 0,2856 & 0,4508 & 0,3436 & 0,7747 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	1000	$7437372,126$
M	450	$327,3505$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-9.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$1,1102e-16$
M	$1,6653e-16$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M	autovetor de M	autovetor de m	autovetor de m
sem erro	com erro	sem erro	com erro
$0,0710$	$0,0710$	$0,2005$	$0,2005$
$0,0886$	$0,0886$	$0,2504$	$0,2504$
$0,2215$	$0,2215$	$0,6257$	$0,6257$
$0,1325$	$0,1325$	$0,3744$	$0,3744$
$0,2140$	$0,2140$	$0,6045$	$0,6045$

Apndice C
Resultados encontrados com Matrizes 7x7

Número de matrizes testadas = 10

Exemplo 1

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 2,2167 & 0,4826 & 0,5310 & 0,6688 & 0,8723 & 0,6401 & 0,9258 \\ 0,4826 & 2,2372 & 0,2352 & 0,4176 & 0,5241 & 0,0717 & 0,6758 \\ 0,5310 & 0,2352 & 1,1445 & 0,5743 & 0,5806 & 0,5029 & 0,0277 \\ 0,6688 & 0,4176 & 0,5743 & 2,7412 & 0,3785 & 0,2340 & 0,1182 \\ 0,8723 & 0,5241 & 0,5806 & 0,3785 & 0,9690 & 0,7005 & 0,5773 \\ 0,6401 & 0,0717 & 0,5029 & 0,2340 & 0,7005 & 0,8207 & 0,1530 \\ 0,9258 & 0,6758 & 0,0277 & 0,1182 & 0,5773 & 0,1530 & 1,6414 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 1.2274 & 0.6682 & 0.0559 & -0.5226 & 0.2617 & 0.2809 & -0.2494 \\ -0.6962 & -0.0783 & -1.1071 & 0.1034 & 1.2134 & -0.5412 & 0.3966 \\ 0.0075 & 0.8892 & 0.4855 & -0.8076 & -0.2747 & -1.3335 & 0.2640 \\ -0.7829 & 2.3093 & -0.0050 & 0.6804 & -0.1331 & 1.0727 & -1.6640 \\ 0.5869 & 0.5246 & -0.2762 & -2.3646 & -1.2705 & -0.7121 & -1.0290 \\ -0.2512 & -0.0118 & 1.2765 & 0.9901 & -1.6636 & -0.0113 & 0.2431 \\ 0.4801 & 0.9131 & 1.8634 & 0.2189 & -0.7036 & -0.0008 & -1.2566 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 1,0616 & 0,6130 & 0,3301 & 0,2200 & 0,9273 & 0,0650 & 0,8203 \\ 0,6130 & 2,3324 & 0,1804 & 0,3157 & 0,3585 & 0,7085 & 0,6904 \\ 0,3301 & 0,1804 & 0,9169 & 0,6747 & 0,0965 & 0,4793 & 0,9207 \\ 0,2200 & 0,3157 & 0,6747 & 0,9474 & 0,5165 & 0,6147 & 0,7559 \\ 0,9273 & 0,3585 & 0,0965 & 0,5165 & 1,9992 & 0,6186 & 0,4392 \\ 0,0650 & 0,7085 & 0,4793 & 0,6147 & 0,6186 & 2,3936 & 0,5283 \\ 0,8203 & 0,6904 & 0,9207 & 0,7559 & 0,4392 & 0,5283 & 1,6353 \end{pmatrix}$$

Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	2744	501024, 0246
M	882	155, 7827

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-10.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$5,5511e-17$
M	$3,6082e-16$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
$-0,1735$	$-0,1735$	$0,4540$	$0,4540$
$-0,0736$	$-0,0736$	$0,1925$	$0,1925$
$-0,1149$	$-0,1149$	$0,3007$	$0,3007$
$-0,2591$	$-0,2591$	$0,6780$	$0,6780$
$-0,1209$	$-0,1209$	$0,3162$	$0,3162$
$-0,0816$	$-0,0816$	$0,2135$	$0,2135$
$-0,0945$	$-0,0945$	$0,2472$	$0,2472$

Exemplo 2

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 1,4808 & 0,3987 & 0,5334 & 0,2890 & 0,1986 & 0,2917 & 0,8875 \\ 0,3987 & 1,9491 & 0,1338 & 0,0330 & 0,0165 & 0,3929 & 0,6472 \\ 0,5334 & 0,1338 & 1,2318 & 0,1185 & 0,7431 & 0,7999 & 0,6159 \\ 0,2890 & 0,0330 & 0,1185 & 1,5673 & 0,3883 & 0,4672 & 0,3159 \\ 0,1986 & 0,0165 & 0,7431 & 0,3883 & 1,1878 & 0,0462 & 0,2576 \\ 0,2917 & 0,3929 & 0,7999 & 0,4672 & 0,0462 & 2,3615 & 0,7766 \\ 0,8875 & 0,6472 & 0,6159 & 0,3159 & 0,2576 & 0,7766 & 1,5397 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} -0,7215 & 0,6973 & -2,4490 & 0,3793 & 0,4409 & -0,0891 & -0,4129 \\ -0,2012 & 0,8115 & 0,4733 & -0,3304 & 1,2809 & -2,0089 & -0,5062 \\ -0,0205 & 0,6363 & 0,1169 & -0,4999 & -0,4977 & 1,0839 & 1,6197 \\ 0,2789 & 1,3101 & -0,5911 & -0,0360 & -1,1187 & -0,9812 & 0,0809 \\ 1,0583 & 0,3271 & -0,6547 & -0,1748 & 0,8076 & -0,6885 & -1,0811 \\ 0,6217 & -0,6730 & -1,0807 & -0,9573 & 0,0412 & 1,3395 & -1,1245 \\ -1,7506 & -0,1493 & -0,0477 & 1,2925 & -0,756 & -0,9092 & 1,7357 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 0,8302 & 0,5458 & 0,3540 & 0,4639 & 0,8324 & 0,0623 & 0,6329 \\ 0,5458 & 1,6370 & 0,5267 & 0,4824 & 0,4818 & 0,9914 & 0,3766 \\ 0,3540 & 0,5267 & 2,1670 & 0,7186 & 0,0474 & 0,1030 & 0,1207 \\ 0,4639 & 0,4824 & 0,7186 & 2,1386 & 0,4544 & 0,3525 & 0,6078 \\ 0,8324 & 0,4818 & 0,0474 & 0,4544 & 2,0606 & 0,3632 & 0,9581 \\ 0,0623 & 0,9914 & 0,1030 & 0,3525 & 0,3632 & 2,3029 & 0,3521 \\ 0,6329 & 0,3766 & 0,1207 & 0,6078 & 0,9581 & 0,3521 & 1,4922 \end{pmatrix}$$

Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	2744	3136, 439
M	882	49, 0765

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-12.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$1,1102e-16$
M	$1,0547e-15$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M	autovetor de M	autovetor de m	autovetor de m
sem erro	com erro	sem erro	com erro
$-0,1985$	$-0,1985$	$0,5219$	$0,5219$
$-0,0164$	$-0,0164$	$0,0432$	$0,0432$
$-0,1399$	$-0,1399$	$0,3679$	$0,3679$
$-0,1176$	$-0,1176$	$0,3094$	$0,3094$
$-0,0639$	$-0,0639$	$0,1680$	$0,1680$
$-0,2081$	$-0,2081$	$0,5472$	$0,5472$
$-0,1554$	$-0,1554$	$0,4086$	$0,4086$

Exemplo 3

Matriz m1

$$\begin{pmatrix} 1,7238 & 0,3402 & 0,1899 & 0,5138 & 0,7647 & 0,2264 & 0,1732 \\ 0,3402 & 1,4272 & 0,4365 & 0,6222 & 0,5037 & 0,5256 & 0,2484 \\ 0,1899 & 0,4365 & 1,8252 & 0,4893 & 0,2928 & 0,3526 & 0,2582 \\ 0,5138 & 0,6222 & 0,4893 & 2,4039 & 0,8912 & 0,0774 & 0,2754 \\ 0,7647 & 0,5037 & 0,2928 & 0,8912 & 0,9605 & 0,0624 & 0,2573 \\ 0,2264 & 0,5256 & 0,3526 & 0,0774 & 0,0624 & 0,8293 & 0,0585 \\ 0,1732 & 0,2484 & 0,2582 & 0,2754 & 0,2573 & 0,0585 & 2,3456 \end{pmatrix}$$

Matriz m2

$$\begin{pmatrix} 1,9375 & -0,9776 & -0,4876 & 0,3931 & -1,0540 & 0,8252 & -1,0473 \\ 1,6351 & -0,4468 & 1,8625 & -1,7073 & -0,0715 & 0,2308 & 1,5357 \\ -1,2559 & 1,0821 & 1,1069 & 0,2279 & 0,2792 & 0,6716 & 0,4344 \\ -0,2135 & 2,3726 & -1,2276 & 0,6856 & 1,3733 & -0,5081 & -1,9171 \\ -0,1989 & 0,2293 & -0,6699 & -0,6368 & 0,1798 & 0,8564 & 0,4699 \\ 0,3075 & -0,2666 & 1,3409 & -1,0026 & -0,5420 & 0,2685 & 1,2744 \\ -0,5723 & 0,7017 & 0,3881 & -0,1856 & 1,6342 & 0,6250 & 0,6385 \end{pmatrix}$$

Matriz m3

$$\begin{pmatrix} 1,5802 & 0,7581 & 0,8398 & 0,8188 & 0,5279 & 0,9481 & 0,7932 \\ 0,7581 & 1,7816 & 0,5725 & 0,1210 & 0,1497 & 0,5727 & 0,6851 \\ 0,8398 & 0,5725 & 0,9591 & 0,7243 & 0,4981 & 0,0470 & 0,2193 \\ 0,8188 & 0,1210 & 0,7243 & 1,8627 & 0,2566 & 0,5572 & 0,8666 \\ 0,5279 & 0,1497 & 0,4981 & 0,2566 & 0,9153 & 0,3316 & 0,5088 \\ 0,9481 & 0,5727 & 0,0470 & 0,5572 & 0,3316 & 2,3771 & 0,5201 \\ 0,7932 & 0,6851 & 0,2193 & 0,8666 & 0,5088 & 0,5201 & 2,2899 \end{pmatrix}$$

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M e Número de condição

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	2744	10295645, 8331
M	882	909, 9681

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-13.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$5,5511e-17$
M	$1,1102e-16$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M sem erro	autovetor de M com erro	autovetor de m sem erro	autovetor de m com erro
$0,0903$	$0,0903$	$0,2206$	$0,2206$
$0,1942$	$0,1942$	$0,4743$	$0,4743$
$0,1707$	$0,1707$	$0,4170$	$0,4170$
$0,1760$	$0,1760$	$0,4299$	$0,4299$
$0,1188$	$0,1188$	$0,2902$	$0,2902$
$0,0946$	$0,0946$	$0,2310$	$0,2310$
$0,1964$	$0,1964$	$0,4797$	$0,4797$

Resumidamente os próximos 7 exemplos

Exemplo	N^o de op. para m	N^o de op. para M	N^o cond(m)	N^o cond(M)
4	2744	882	10295645, 8331	909, 9681
5	2744	882	107569, 405	2188, 8722
6	2744	882	62560111, 1919	447, 3787
7	2744	882	52822, 4976	373, 1021
8	2744	882	10938, 4044	85, 4666
9	2744	882	75236, 37	183, 8787
10	2744	882	7776, 7442	208, 9305

Apndice D
Resultados encontrados com Matrizes 10x10

Número de matrizes testadas = 10

Exemplo 1

1)Número de Operações para se chegar às Matrizes m e M

Matriz	N^o de operações	N^o de condição
m	8000	$1281850350,1427$
M	1800	$1520,1677$

2)Estabilidade

Para teste de estabilidade foi inserido um erro na diagonal principal na ordem de 1e-10.

Na tabela abaixo indicamos a maior diferença encontrada entre os autovetores de m e M antes e após o erro provocado:

Matriz	Maior diferença encontrada
m	$4,996e-16$
M	$1,5404e-15$

3)Autovetores de M e m sem e com o erro inserido:

autovetor de M	autovetor de M	autovetor de m	autovetor de m
sem erro	com erro	sem erro	com erro
$0,0184$	$0,0184$	$-0,0463$	$-0,0463$
$0,0065$	$0,0065$	$-0,0164$	$-0,0164$
$0,0407$	$0,0407$	$-0,1026$	$-0,1026$
$0,0263$	$0,0263$	$-0,0663$	$-0,0663$
$0,0002$	$0,0002$	$-0,0004$	$-0,0004$
$-0,3707$	$-0,3707$	$0,9341$	$0,9341$
$0,0861$	$0,0861$	$-0,2168$	$-0,2168$
$0,0975$	$0,0975$	$-0,2456$	$-0,2456$
$-0,0097$	$-0,0097$	$0,0245$	$0,0245$
$-0,0187$	$-0,0187$	$0,0472$	$0,0472$

Resultados Resumidos dos outros 9 exemplos

Exemplo	N^o de op. para m	N^o de op. para M	N^o cond(m)	N^o cond(M)
2	8000	1800	14133144, 6132	670, 3426
3	8000	1800	1069452, 9797	302, 1698
4	8000	1800	127214, 2546	909, 5829
5	8000	1800	833853308, 3637	6844, 3525
6	8000	1800	182954, 4733	142, 5642
7	8000	1800	1152181, 6717	580, 1674
8	8000	1800	124571987, 3407	895, 4829
9	8000	1800	2722964, 2561	259, 8619
10	8000	1800	3667, 9555	248, 5941