EDUARDO QUADROS DA SILVA

"O DESAFIO DA PRODUÇÃO DO CONHECIMENTO COMO PROPOSTA METODOLÓGICA NA APRENDIZAGEM DE LOGARITMOS A PARTIR DE CONCEITOS GEOMÉTRICOS "

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado em Educação - Área de Concentração Pedagogia Universitária, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação, da Pontifícia Universidade Católica do Paraná.
Orientadora: Profª. Zélia Milléo Pavão.

CURITIBA
1997

AGRADECIMENTOS

À professora Doutora Zélia M. Pavão que sempre me incentivou e orientou nesta dissertação.

À professora Doutora Marilda A. Behrens cujo apoio foi fundamental para que essa proposta pudesse ser concretizada.

Ao professor Durval Machado Tavares, matemático notável que fez contribuições significativas para essa dissertação.

À minha esposa Terezinha, companheira de todas as horas.

À minha mãe Romilda, que tudo fez para que eu pudesse chegar a este estágio.

Ao meu pai Manoel Quadros da Silva (*in memorian*) que sempre me incentivou a estudar para conhecer a verdade.

SUMÁRIO

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta alternativa para o ensino de logaritmos no curso de Cálculo Diferencial e Integral. Uma sugestão para que se trabalhe as funções logarítmicas desde o início do curso de Cálculo , a partir de conceitos elementares da Geometria. As idéias que sustentam a proposta encontram-se em livros de referencial teórico, obras de Cálculo Diferencial e integral , revistas especializadas de Matemática e de Educação Matemática. Muitos conteúdos que hoje são estudados de forma abstrata em Álgebra, Trigonometria, e no Cálculo, tiveram suas origens em idéias intuitivas da Geometria Euclidiana. O conteúdo desta dissertação gira em torno da idéia de que, a partir da área de uma faixa de hipérbole é possível introduzir o conteúdo de logaritmos já no início do curso de Cálculo Diferencial e Integral, permitindo assim que se possa trabalhar durante todo o curso com essas funções. A proposta também possibilita um maior intercâmbio entre a Geometria e a história da disciplina em apreço. Além disso lança bases para o trabalho com o conteúdo Integrais Definidas, assunto da disciplina. Serve também para o desenvolvimento de definições mais formais das funções logarítmica e exponencial, que são abordadas geralmente após o tópico Teorema Fundamental do Cálculo. O princípio, pois, que norteia a proposta didática é a metodologia do ensino com pesquisa (DEMO:1997) e, a partir desse método, pretende-se não apenas que o aluno aprenda logaritmos ou qualquer outro conteúdo desenvolvido na disciplina de Cálculo, mas que, acima de tudo, aprenda a aprender(BEHRENS:1996), tornando-se um cidadão crítico , independente, gerador de mudanças sociais e capaz de acompanhar os avanços tecnológicos da época em que vive.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta alternativa para o ensino de logaritmos no curso de Cálculo Diferencial e Integral. Uma sugestão para que se trabalhe as funções logarítmicas desde o início do curso de Cálculo , a partir de conceitos elementares da Geometria. As idéias que sustentam a proposta encontram-se em livros de referencial teórico, obras de Cálculo Diferencial e integral , revistas especializadas de Matemática e de Educação Matemática. Muitos conteúdos que hoje são estudados de forma abstrata em Álgebra, Trigonometria, e no Cálculo, tiveram suas origens em idéias intuitivas da Geometria Euclidiana. O conteúdo desta dissertação gira em torno da idéia de que, a partir da área de uma faixa de hipérbole é possível introduzir o conteúdo de logaritmos já no início do curso de Cálculo Diferencial e Integral, permitindo assim que se possa trabalhar durante todo o curso com essas funções. A proposta também possibilita um maior intercâmbio entre a Geometria e a história da disciplina em apreço. Além disso lança bases para o trabalho com o conteúdo Integrais Definidas, assunto da disciplina. Serve também para o desenvolvimento de definições mais formais das funções logarítmica e exponencial, que são abordadas geralmente após o tópico Teorema Fundamental do Cálculo. O princípio, pois, que norteia a proposta didática é a metodologia do ensino com pesquisa (DEMO:1997) e, a partir desse método, pretende-se não apenas que o aluno aprenda logaritmos ou qualquer outro conteúdo desenvolvido na disciplina de Cálculo, mas que, acima de tudo, aprenda a aprender(BEHRENS:1996), tornando-se um cidadão crítico , independente, gerador de mudanças sociais e capaz de acompanhar os avanços tecnológicos da época em que vive.

ABSTRACT

This research presents na alternative proposal for teaching of logarithm in Differential and Integral Calculus course. It suggests a way of teaching logarithm functions through concepts of elementary Geometry since the beggining of Calculus course. The ideas sustained in this proposal are based in literature review of Differential and Integral Calculus books, especialized journals of Mathematics and Mathematics Education. Contents which are very abstract in Algebra, Trigonometry and Calculus had its origins with intuitive ideas of Euclidean ' s geometry. The content in this research presents the idea that by taking the area of an hyperbola it's possible to introduce the content of logarithm from the begining of Differential and Integral Calculus course, and continue through the whole program with those functions. The proposal also intends to provide a better interchange between Geometry and the history of Calculus. Besides that, it also presents bases to work with Defined integrals and with more formal definitions of logarithmic and exponential function which are generaly after Fundamental Theorem in Calculus. The didatic teses used in this project is this the teaching trhough research methodology (DEMO:1997), and the intention is not only teach logarithm and other contents in a Calculus course, but above all, help the students: how learn to learn and on becoming critical and independent citizens that generate social changes and are able to follow technological development of our era.

ABSTRACT

This research presents na alternative proposal for teaching of logarithm in Differential and Integral Calculus course. It suggests a way of teaching logarithm functions through concepts of elementary Geometry since the beggining of Calculus course. The ideas sustained in this proposal are based in literature review of Differential and Integral Calculus books, especialized journals of Mathematics and Mathematics Education. Contents which are very abstract in Algebra, Trigonometry and Calculus had its origins with intuitive ideas of Euclidean ' s geometry. The content in this research presents the idea that by taking the area of an hyperbola it's possible to introduce the content of logarithm from the begining of Differential and Integral Calculus course, and continue through the whole program with those functions. The proposal also intends to provide a better interchange between Geometry and the history of Calculus. Besides that, it also presents bases to work with Defined integrals and with more formal definitions of logarithmic and exponential function which are generaly after Fundamental Theorem in Calculus. The didatic teses used in this project is this the teaching trhough research methodology (DEMO:1997), and the intention is not only teach logarithm and other contents in a Calculus course, but above all, help the students: how learn to learn and on becoming critical and independent citizens that generate social changes and are able to follow technological development of our era.

INTRODUÇÃO

A presente dissertação originou-se do seguinte problema: Como propor uma abordagem metodológica, onde o aluno de Cálculo Diferencial e Integral possa trabalhar com a função logarítmica e funções correlatas desde o início do curso, explorando conceitos elementares estudados no ensino fundamental e no ensino médio?

Por meio de pesquisa bibliográfica, procurou-se relacionar obras que trouxessem contribuições referentes a logaritmos e analisar aspectos relacionados aos autores, no tocante a se apresentavam os referenciais a partir de conceitos. Fundamentado na metodologia do ensino com pesquisa (DEMO:1997) e referendado pela prática docente como professor da PUC PR, elaborou-se uma proposta didática a partir de atividades que vêm sendo trabalhadas em sala de aula no ensino de logaritmos por meio de conceitos geométricos. Essa proposta visou alertar os professores de matemática para a necessidade de propor metodologias que contemplem a produção do conhecimento .

A busca das informações que pudessem dar consistência à proposta didática ocasionou a elaboração de quatro capítulos desta dissertação.

No primeiro capítulo, buscou-se um referencial teórico que subsidiasse e proporcionasse oportunidade para o estabelecimento de comparações entre o desenvolvimento de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral no decorrer dos tempos e os métodos utilizados para o seu ensino nos cursos superiores de tempos e os métodos utilizados para o seu ensino nos cursos superiores de ciências exatas. Ainda nesse capítulo, procurou-se acrescentar contribuições de pesquisadores da Educação Matemática que vêm mostrando que a Geometria é uma importante etapa no processo de elaboração de conceitos algébricos, além de tornar viável a relação entre diversos temas dentro da Matemática, bem como sua aplicação em situações do cotidiano.

No segundo capítulo apresenta-se um relato de como a função logarítmica é tratada nos livros de Cálculo dos autores Granville, Piskounov, Munem-Foulis, Fleming-Gonçalves, Swokowski, Simmons, Leithold e Ávila, mostrando que, ao escreverem suas obras, os matemáticos se preocupam em partir de tópicos elementares da Geometria, como por exemplo o conceito de área.

A análise dos conteúdos propostos nos livros tornou-se relevante a partir do momento em que se verificou muitas situações em que o livro adotado determina, não só o programa a ser desenvolvido, mas também a metodologia de ensino a ser adotada pelo docente da disciplina.

Os pressupostos do ensino com pesquisa, do referido aprender a aprender, da transformação do ensino reprodutivo para atividades que proporcionem a produção do conhecimento, são analisados no terceiro capítulo à luz das idéias de DEMO (1996) das contribuições de BEHRENS(1996) e de CUNHA (1996). Nesse capítulo também são analisados objetivos da disciplina de Cálculo face a fornecer ao estudante os elementos necessários para o desenvolvimento de cursos de ciências exatas. Em pauta, também observações quanto aos reflexos de um ensino que apenas reproduz o conhecimento na futura atuação profissional do estudante.

O quarto capítulo apresenta, por sua vez, a proposta de construir a função logarítmica a partir do trabalho com áreas, desde o início do curso de Cálculo. Esse capítulo traz um conjunto de atividades que servem de sugestões para que se estabeleça um ensino com pesquisa, onde há espaço para o exercício da criatividade e para que o aluno possa se integrar na metodologia do "aprender a aprender". O desenvolvimento do conteúdo matemático das atividades tem base na obra "Logaritmos" de Elon Lages LIMA (1991). O princípio metodológico que norteia a execução das atividades fundamenta-se na metodologia do ensino com pesquisa.

Nas considerações finais, procurou-se instigar os matemáticos para refletirem sobre os referenciais teóricos analisados na pesquisa bibliográfica realizada e desafiá-los a construírem outras propostas de ensino com pesquisa no trabalho com logaritmos, contemplando os caminhos da Geometria e provocando a aproximação desses referenciais à vida cotidiana dos alunos.

Nesse contexto, o da Geometria, o ensino de Cálculo se tornaria um caminho autônomo, pois a proposta dessa pesquisa busca alicerçar referenciais teóricos e práticos para que os alunos possam produzir conhecimentos significativos na área de Cálculo. Assim, a partir dos conhecimentos trazidos pelos alunos, acumulados esses de experiências anteriores, o professor possibilitará o acesso ao saber elaborado, permitindo que os alunos investiguem, descubram e construam os conceitos, que os possa tornar cidadãos críticos, capazes de promover, no seu ambiente, as mudanças necessárias para uma vida melhor.

JUSTIFICATIVA

O estudo das funções logarítmicas, apresentado pelos professores que atuam no ensino médio, tem sido feito com base em potências. Entretanto , segundo LEITHOLD, 1994:.439, não é tão simples definir a função f(x)= a^x quando x é um número irracional. Esclarecendo melhor, qual seria o significado do número $3^{\sqrt{5}}$? Os conceitos de álgebra elementar não têm dado conta de explicar definições mais consistentes com relação à função logarítmica e em livros de Cálculo Diferencial e Integral, conforme se pode encontrar na obra de Leithold, onde esse conteúdo é desenvolvido após o Teorema Fundamental do Cálculo. Esta afirmação pode ser constatada também em obras dos autores SWOKOWSKI (1994) e MUNEM-FOULIS (1982).

Quando se estuda a função logarítmica após o Teorema Fundamental do Cálculo, normalmente não se faz o intercâmbio entra a Álgebra e as Cônicas, relação essa que seria enriquecedora para os alunos. No livro dos autores MUNEM e FOULIS (1982), por exemplo, encontra-se um obstáculo para esse intercâmbio, pois a ordem proposta apresenta o estudo das Cônicas após a função logarítmica.

O estudo das obras de autores como LEITHOLD(1994), SWOKOWSKI (1994) e MUNEM-FOULIS (1982) possibilita constatar que a ordem proposta nas obras desses autores induz a trabalhar sem a função logarítmica boa parte do ano , só porque ainda não foi trabalhado o Teorema Fundamental do Cálculo. Já outros autores como GRANVILLE (1992) e FLEMMING-GONÇALVES (1992), tratam a função logarítmica como função elementar, retomando conceitos a partir de potências para poder trabalhar com os tópicos Limites, Derivadas e Primitivas da referida função logarítmica, desde o início do ano. Em síntese, alguns apresentam a função logarítmica no início do ano, mas sem consistência e desconsiderando os pré-requisitos que os alunos devem normalmente ter; outros deixam para apresentá-la somente mais para o final do ano, fazendo-o então com significativo rigor. No entanto, com isso, está se pagando o preço de não se poder trabalhar com Limites, Derivadas e outros tópicos do Cálculo relacionando-os com as funções logarítmicas.

Constata-se pois, que, na maioria das obras investigadas a abordagem dos conteúdos não traz questões que possibilitem a criação e a reelaboração de conceitos. Todavia, verificou-se que no livro "Cálculo - funções de uma variável", ÁVILA (1981), encontra-se no capítulo 3 um estudo sobre a hipérbole e no capítulo 4 (antes do Teorema Fundamental do Cálculo) o estudo do logaritmo natural, definido como a área compreendida por uma faixa de hipérbole.

Diante desse problema, tomou-se a iniciativa de analisar a forma pela qual os autores apresentam esses referenciais em suas obras. Em conseqüência, sugeriu-se uma proposta metodológica que possibilite ao aluno partir de conceitos elementares de Geometria para chegar ao conceito de logaritmo. Para desencadear esse processo, ainda, optou-se por construir uma proposta metodológica alicerçada no ensino com pesquisa, (DEMO: 1996) que permite ao aluno ampliar e reinventar abordagens de conceitos. O aluno, nessa proposta, passa a sentir-se sujeito participante do processo, tornando-se autônomo e competente para entender informações de seu cotidiano e construir seu próprio conhecimento.

O importante, de acordo com essa proposta didática, é que um caminho a partir da Geometria já tenha sido trilhado antes de ocorrer a construção de definições formais, que essas venham como conseqüência de um longo trabalho de investigação.

Uma das vantagens de se trabalhar com a função logarítmica desde o início do curso de Cálculo é o fato de se poder fazer um estudo de derivadas com mais funções, não apenas com as funções algébricas e trigonométricas. Isso torna possível mostrar ao aluno aplicações desses referenciais em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo, na Biologia, na Economia, na Agronomia e na Engenharia Civil. Com essa proposta, o ensino do Cálculo poderá tornar-se mais atraente e concreto para o aluno porque se a aprendizagem do Cálculo envolver elementos que têm significado para o aluno e se este for participante e não apenas espectador do processo, surge um caminho para que haja maior interesse pela disciplina e para que sejam amenizados problemas decorrentes do processo reprodutivo e conservador, que conduz à falta de pré-requisitos e altos índices de reprovação.

DELIMITAÇÃO DO PROBLEMA

O estudo refere-se a aprendizagem de alunos que freqüentam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral com funções de uma variável. Essa disciplina tem sido ministrada nos cursos de graduação em engenharias. As dificuldades para aprender esses referenciais agravam-se nos primeiros anos dos cursos, segundo as obras pesquisadas, onde ocorrem problemas referentes à falta de pré-requisitos para entender os conceitos desenvolvidos pelos professores do ensino superior.

A Educação Matemática tem demonstrado que a aprendizagem do Cálculo envolve diversos fatores, inclusive a escolaridade do aluno, anterior à entrada na universidade e, em especial, a condução metodológica do ensino da Matemática no sistema educacional como um todo. A atuação como docente e estudioso da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos de, Arquitetura, Agronomia, Zootecnia, Engenharia Civil(dependentes), Química Industrial (dependentes), Licenciatura em Matemática 1° ano e Licenciatura em Matemática 2° ano, do Centro de Ciências Exatas e Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, fornecem as credenciais como professor-pesquisador para analisar a situação da aprendizagem das funções logarítmicas, tópico desenvolvido nos cursos acima citados.

METODOLOGIA

A partir da atuação como docente, da convivência e da observação realizadas em classe na PUC PR, e a ocorrência nos meios acadêmicos de problemas ocasionados pelo ensino de Cálculo Diferencial e Integral, sentiu-se a necessidade de construir uma proposta didática para a aprendizagem dos logaritmos. Para tanto, fez-se pesquisa bibliográfica, percorrendo acervos de autores que publicam livros didáticos, teses e/ou dissertações e artigos em revistas especializadas sobre o tema proposto.

Optou-se, então, por verificar de que maneira os autores propõem em seus livros o ensino dos logaritmos. Foram selecionadas, pois, obras que poderiam dar respaldo metodológico para a proposta, em especial dos autores Elon Lages Lima e Geraldo Ávila. Outras obras de Cálculo Diferencial e Integral foram utilizadas para a análise bibliográfica cujo referencial apresentado pelos autores permitiu estabelecer comparações entre o ensino reprodutivo e um ensino com pesquisa, visando a produção do conhecimento.

Para mostrar que a proposta didática tem também um referencial histórico, optou-se por ampliar a pesquisa bibliográfica e apresentar, no capítulo I, problemas que contribuíram para o desenvolvimento do Cálculo.

1 - A GEOMETRIA E OS CONCEITOS MATEMÁTICOS NA HISTÓRIA DO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

As relações entre o homem e a geometria são muito antigas e se perdem no tempo. Entre historiadores como Dirk J. STRUIK (1992: 33-34), Howard EVES (1995: 57), Carl B. BOYER (1974: 4-5) e outros, há um consenso de que a geometria nasceu da necessidade de medir, calcular espaços e de outras relações entre o homem e o meio. STRUIK faz a seguinte consideração a respeito das origens da Geometria.

> ...Tornou-se também necessário medir o comprimento ou o volume de certos objetos. Os padrões eram grosseiros e muitas vezes provinham de partes do corpo humano, o que deu origem a unidades de medida como o dedo, o pé e a mão. Os nomes de <<vara>>, <<braça>> e <<cúbito>> recordam também este costume. Quando se construíam casas, como, por exemplo, as dos agricultores indianos ou as casas de madeira dos habitantes da Europa central, estabeleciam-se regras para a construção ser feita segundo linhas retas e ângulos retos. A palavra <<reta>> relaciona-se com <<esticar>>, indicando operações com uma corda; a palavra <<linha>> relaciona-se com <<linho>>, o que mostra uma certa ligação entre a tecelagem e as origens da geometria .
> O homem do neolítico também revelou um agudo sentido para os padrões geométricos. A cozedura e a pintura da cerâmica, o entrelaçamento de juncos, a tecelagem de cestos e têxteis e, mais tarde, o fabrico de metais conduziram à noção de plano e a relações espaciais. As formas da dança devem ter desempenhado um papel importante. A ornamentação neolítica refulgia coma manifestação da congruência, da simetria e da semelhança. (STRUIK, 1992: 33-34)

A citação acima mostra que assim como o sistema de numeração nasceu da necessidade da contagem, a Geometria surgiu do uso da medida pelos povos primitivos.

Em "Introdução à história da Matemática", de Howard EVES, 1995:5, encontra-se o seguinte:

> ... pode-se dizer que a matemática primitiva originou-se em certas áreas do Oriente Antigo primordialmente como uma ciência prática para assistir a atividades ligadas à agricultura e à engenharia. Essas atividades requeriam o cálculo de um calendário utilizável, o desenvolvimento de um sistema de pesos e medidas para ser empregado na colheita, armazenamento e distribuição de alimentos, a criação de métodos de agrimensura para a construção de canais e reservatórios e para dividir a terra e a instituição de práticas financeiras e comerciais para o lançamento e a arrecadação de taxas e para propósitos mercantis.

De "originou-se... primordialmente como ciência prática..." pode-se entender que em muitas situações da história as necessidades de bem estar social levaram o homem a medir e a criar padrões. A aplicação no caso concreto, conduziu à teoria sistematizada. O mesmo aconteceu, segundo STRUIK (1992), com os gregos, que tinham uma matemática com ênfase na abstração mas que teve origem no trabalho prático dos escravos.

Na obra "História da Matemática", BOYER, 1974:4 afirma o seguinte:

"... O homem neolítico pode ter tido pouco lazer e pouca necessidade de medir terras, porém seus desenhos e figuras sugerem uma preocupação com relações espaciais que abriu caminho para a geometria".

Das citações, infere-se que das relações entre os homens surgiu a Geometria e a partir daí foram desenvolvidos conceitos mais abstratos. A Geometria, sistematizada por Euclides em sua obra "Os Elementos", foi o ponto de partida para que outras geometrias surgissem, negando postulados e contribuindo à sua maneira para o desenvolvimento do homem. São as chamadas geometrias não-euclidianas, que negam determinados postulados de Euclides.

Certos conceitos de Álgebra, como por exemplo, equações do 2º grau, são melhor esclarecidos no início da aprendizagem pela Geometria. Ela também permite relacionar conteúdos de Matemática entre si e possibilita a aproximação do saber matemático abstrato de referenciais relacionados a realidade do aluno.

Segundo documento do *National Council of Theachers of Mathematics, (1992)* temos: *"...es importante que todos los estudiantes reconozcan cómo sus experiências anteriores con el área de figuras geométricas sirven de base para la construcción del concepto de área bajo una curva, que supone una apliación de aquéllas".*

Sabe-se, pela História da Matemática, que o Cálculo Diferencial e Integral desenvolveu-se a partir das dificuldades em calcular medidas de figuras geométricas não poligonais, problemas cujas soluções fundamentaram os conceitos abstratos que são estudados hoje.

Na obra de H.J. M. BOS da *Open University* "Curso de História da Matemática Origens e Desenvolvimento do Cálculo", BOS (1985:13), encontram-se as seguintes palavras do matemático Johann Bernoulli (1667/1748) "... uma das mais importantes aplicações do cálculo integral é a determinação de áreas. As áreas são consideradas como sendo divididas em um número infinito de partes...". Outros autores, como BOYER (1974) , EVES (1995) e STRUIK (1992), também deixam evidente que os problemas geométricos tiveram contribuição muito significativa para o desenvolvimento do Cálculo. As demonstrações surgiram de algo concreto, aceito por intuição. Jean DIEUDONNÉ (1990:49), tratando do tema axiomas e definições, cita uma passagem da República (VI, 510), de Platão :

> Aqueles que se ocupam da geometria, da aritmética e ciências desse gênero admitem o par e o ímpar, as figuras , três espécies de ângulos, (...) Estas coisas dão-nas por sabidas, e, quando as usam como hipóteses, não acham que ainda seja necessário prestar contas disto a si mesmos nem aos outros, uma vez que são evidentes para todos. E, partindo daí e analisando todas as fases, e tirando as conseqüências, atingem o ponto a cuja investigação se tinham abalançado.

Para reforçar a importância dos entes geométricos nas demonstrações encontra-se a seguinte contribuição de DIEUDONNÉ (1990:50) "Os matemáticos vão poder destrinchar aquilo que entendem por figura, posição, grandeza, quantidade, medida, que são as noções de base que aparecem nas <<hipóteses>>".

Ainda sobre o uso da Geometria, encontra-se na obra de DIEUDONNÉ (1990:50) outra citação da República de Platão (VI, 510) a respeito dos matemáticos: "...servem-se de figuras visíveis e estabelecem acerca delas os seus raciocínios, sem, contudo pensarem neles, mas naquilo com que se parecem (...) servem-se delas como se fossem imagens, procurando ver o que não pode avistar-se, senão pelo pensamento".

Optou-se por apresentar situações vividas por matemáticos e narradas por historiadores, como EVES (1995:418), e outros já citados, que culminaram no Cálculo que temos hoje. Os primeiros problemas da história do Cálculo, segundo Boyer(1992), diziam respeito ao cálculo de áreas, volumes e comprimentos de arcos. Nesta época uma contribuição importante foi o método da exaustão de Eudoxo (370 a.C.), que afirmava que "se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante, se chegará por fim a uma grandeza menor que qualquer outra pré determinada da mesma espécie". (EVES, 1995:419).

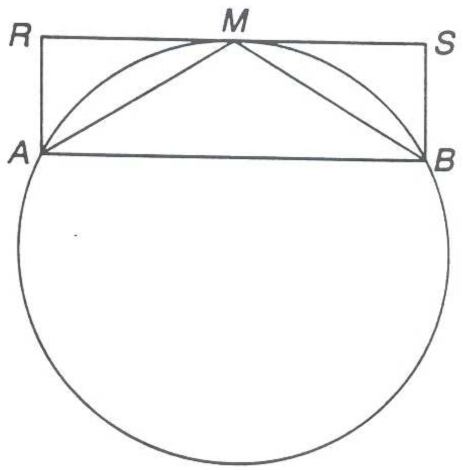
Um exemplo dessa contribuição encontra-se na obra de EVES (1995:419), que propõe:

Empreguemos o método de exaustão para provar que se A_1 e A_2 são as áreas de dois círculos de diâmetros d_1 e d_2, então:

$$A_1 : A_2 = d_1^2 : d_2^2.$$

Mostremos primeiro, com a ajuda da proposição básica, que a diferença entre a área de um círculo e a de um polígono regular inscrito pode se tornar tão pequena quanto se deseje. Seja AB, na figura a seguir, o lado de um polígono regular inscrito e seja M o ponto médio do arco AB.

FIGURA 1 - RELAÇÕES ENTRE A ÁREA DE UM CÍRCULO E A DE UM POLÍGONO INSCRITO PELO MÉTODO DA EXAUSTÃO: PROPOSTA DE EUDOXO



Note-se que a área do triângulo AMB é metade da do retângulo ARSB e portanto maior que a metade da área do segmento circular AMB. Assim, dobrando-se o número de lados do polígono regular inscrito, a área do polígono aumentará de mais do que a metade da diferença entre a área do círculo e a do polígono. Logo, repetindo-se a operação de dobrar o número de lados um número suficiente de vezes, pode-se fazer com que a diferença entre a área do círculo e a do polígono se torne menor do que qualquer área fixada previamente, por menor que seja.

Voltemos ao nosso teorema. Suponhamos que, em vez da igualdade, tivéssemos $A_1 : A_2 > d_1^2 : d_2^2$.

Podemos, então inscrever no primeiro círculo um polígono regular cuja área P_1 difira tão pouco da de A_1 que :

$P_1 : A_2 > d_1^2 : d_2^2$

Seja P_2 a área de um polígono regular semelhante ao de área P_1 considerado, mas inscrito no segundo círculo. Então, por um conhecido teorema sobre polígonos regulares semelhantes,

$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2$.

Segue-se então que $P_1 : A_2 > P_1 : P_2$ ou $P_2 > A_2$, o que é absurdo, pois a área de um polígono regular não pode superar a de seu circuncírculo. De maneira análoga se prova que não pode ocorrer: $A_1 : A_2 \prec d_1^2 : d_2^2$. Donde, por uma dupla *redutio ad absurdum* , o teorema fica demonstrado. Assim, se A é a área e d é o diâmetro de um círculo $A=kd^2$, onde k é uma constante (na verdade $p/4$) que é a mesma para todos os círculos.

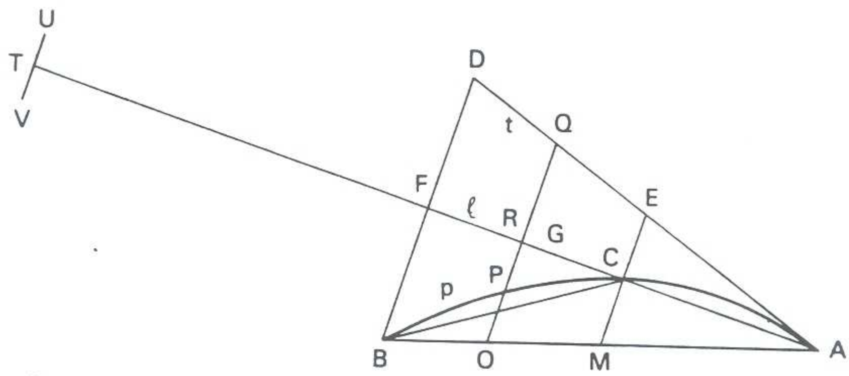
Na citada demonstração observa-se que o ponto de partida é um referencial geométrico. Além disso, mesmo o problema se tratando de círculos, apresentam-se outras figuras que entraram no raciocínio para concretizar o problema, tornando mais fácil o entendimento do que se quer demonstrar.

Em EVES (1995: 421), tem-se "Os trabalhos de Demócrito e Plutarco também foram contribuições importantes, mas, dos matemáticos antigos, quem melhor aplicou o método da exaustão foi Arquimedes".

Carl B. BOYER (1992: 29) iluminado pela grande contribuição de Arquimedes para a construção do Cálculo, apresenta em sua obra o problema da quadratura da parábola, assim elaborado:

> Seja s a região limitada por uma parábola p e uma corda AB de ponto médio M. Seja t a tangente a p em A.

FIGURA 2 - ÁREA DE UM SEGMENTO DE PARÁBOLA - PROPOSTA DE ARQUIMEDES



os pontos B e M traçam-se retas paralelas ao eixo, as quais interceptam t em D e E, respectivamente; suponhamos que ME intercepte p em C, ponto este chamado vértice de s. Por um teorema anterior conhecido, C é o ponto médio de ME. Seja l a reta que contém AC e indiquemos por F sua intercessão com BD.

Nesta altura Arquimedes compara o segmento parabólico s com o triângulo ABD. Seja O um ponto qualquer de AB. Suponhamos que a reta por O paralela ao eixo p intercepte p, t e l nos pontos P,Q,R, respectivamente. Devido a outro teorema conhecido: OP:OQ = OB:AB = RF: AF. Neste ponto ele dá um passo engenhoso: considera l como uma alavanca, com fulcro F e toma o ponto T em l de maneira que F seja o ponto médio de AT. Em T ele "pendura" um segmento UV, congruente a OP. Então da equação acima: UV:OQ= RF:AF= RF:TF, ou UV.TF =OQ. RF.

Assim o segmento UV, suspenso pelo seu ponto médio T, está em equilíbrio com o segmento OQ, suspenso pelo seu ponto médio R.

Arquimedes imagina agora o triângulo ABD como a união de todos os segmentos como OQ, paralelos ao eixo. Cada um deles tem um segmento correspondente OP congruente a um segmento UV, que se "pendura" em T. Desta forma ele concebe o triângulo em equilíbrio com o segmento parabólico s, que se imagina suspenso em T. Além do mais como se sabia previamente, pode-se considerar o triângulo suspenso pelo seu baricentro, que é o ponto G de l tal que FG=1/3 FA=1/3FT. Portanto, s e o triângulo ABD têm áreas cuja razão é 1:3. Finalmente, a área do triângulo ABD é o quadruplo da área do triângulo ABC, e temos a descoberta de Arquimedes: a área do segmento parabólico .é 4/3 da área do triângulo com a mesma base e o mesmo vértice. Para demonstrar esse resultado, que depene tanto de uma intuição brilhante, Arquimedes usa o método de exaustão. Inscreve no segmento um triângulo de mesma base e mesmo vértice. A seguir, em cada um dos segmentos parabólicos resultantes, inscreve igualmente um triângulo, e continua a inscrever triângulos nos segmentos parabólicos resultantes em cada etapa.

> Prova então que para cada triângulo os dois triângulos construídos sobre seus lados têm uma área total que é ¼ da área do triângulo dado. Dessa forma ele exaure" o segmento parabólico, removendo sucessivamente esses triângulos inscritos. A área total pode ser aproximada por uma soma de áreas que, agrupadas adequadamente, levam a uma progressão geométrica em que cada termo, salvo o primeiro, é ¼ do anterior. A soma de tal progressão geométrica é 4/3 do primeiro termo. Cuidadosamente Arquimedes mostra que a área do segmento parabólico não pode exceder 4/3 da área do primeiro triângulo inscrito e, da mesma forma, que não pode ser menor que esse valor. Assim ele chega à conclusão desejada e, evitando a armadilha dos infinitésimos e das operações com limites, atinge um nível de rigor insuperado até o século XVIII.

Na citação anterior, observa-se, em alguns momentos, a dificuldade do leitor em abstrair tantas relações apenas imaginando as figuras. A explicação dos procedimentos que Arquimedes propõe ficaria mais suscetível de assimilação se BOYER (1992) tivesse contemplado a explicação com figuras que esclarecessem mais etapas da demonstração proposta.

A partir da figura exposta no início da explicação, pode-se observar que a partir dela são construídos diversos raciocínios subseqüentes, um decorrente do outro. Também são envolvidos na demonstração conceitos como progressão geométrica e outros que, se não forem de pleno domínio do leitor, ocasionam o não entendimento do que se quer demonstrar.

No ensino tradicional da Matemática professores têm se apropriado de artifícios como esse para fundamentar os conceitos que ensinam. Ao demonstrarem o que para si é extremamente familiar, envolvem uma grande quantidade de raciocínios e conceitos que dificultam o entendimento, pois se os conceitos não forem conhecidos pelos alunos a demonstração fica comprometida.

O "método de Arquimedes" superava o "método da exaustão" de Eudoxo e ficou conhecido como "método do equilíbrio". Para clarear este caminho registra-se o exemplo citado na obra de EVES (1995:423).

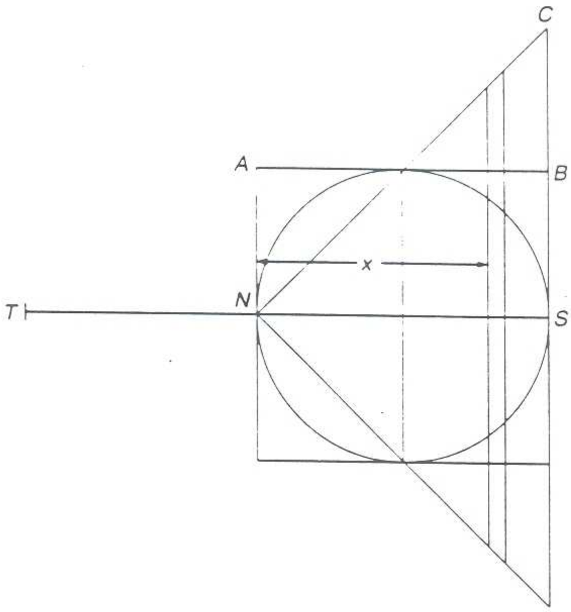
Seja r o raio da esfera (figura a seguir). Faça com que o diâmetro polar da esfera esteja sobre o eixo x (horizontal), com pólo norte N na origem. Construa o cilindro e o cone de revolução obtidos pela rotação do retângulo NABS e do triângulo NCS em torno do eixo x. Tome agora nos três sólidos as fatias verticais delgadas (que serão vistas como cilindros achatados) correspondentes às secções de abcissas x e x+ Δx. Os volumes dessas fatias são, aproximadamente,

Esfera = $\pi x (2r - x) \Delta x$

Cilindro = $\pi r^2 \Delta x$

Cone = $\pi x^2 \Delta x$

FIGURA 3: VOLUME DE UMA ESFERA DE RAIO R PELO MÉTODO DO EQUILÍBRIO: PROPOSTA DE ARQUIMEDES



Penduremos no ponto T, dado por TN=2r, as fatias da esfera e do cone. Seu momento combinado em relação a N é

$[\pi x (2r-x) \Delta x + \pi x^2 \Delta x]2r = 4\pi r^2 x \Delta x$. (O momento de um volume em relação a um ponto é o produto do volume pela distância do ponto ao centróide do volume)

Observemos que o resultado anterior é o quádruplo do momento da fatia cilíndrica quando ela é mantida em sua posição original. Efetuando-se a soma de um número grande dessas fatias, resulta.

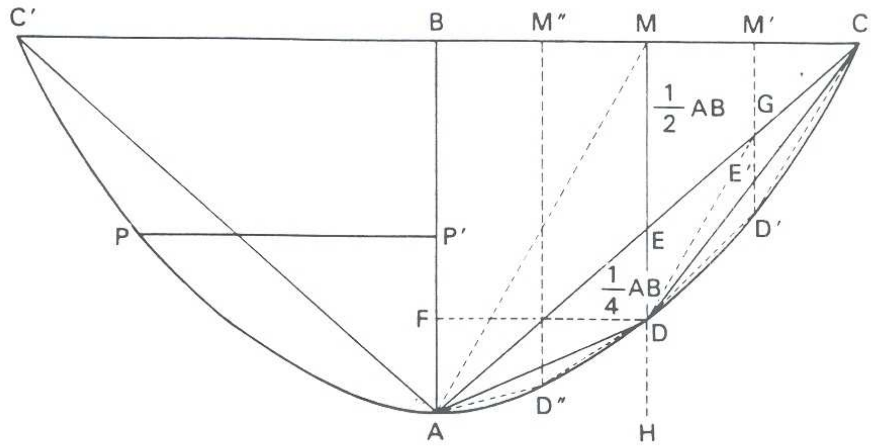
2r[volume da esfera + volume do cone]= 4r[volume do cilindro], ou

2r [volume da esfera + $\frac{8\pi r^3}{3}$]= $8\pi r^4$,

ou volume da esfera = $\frac{4\pi r^3}{3}$.

Constata-se que a solução do problema da parábola, resolvido por Arquimedes (já demonstrado), torna-se clara com uma figura geométrica que mostra mais detalhes do raciocínio elaborado por ele, (BOYER, 1992:57-59).

FIGURA 4: PROBLEMA DA PARÁBOLA PELO MÉTODO DA EXAUSTÃO: PROPOSTA DE ARQUIMEDES



A área da parábola é dada aproximadamente por:

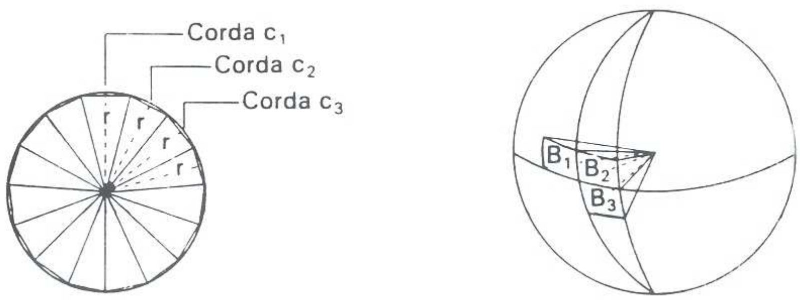
$$\Delta\,ABC + \frac{1}{4}\,\Delta\,ABC + \frac{1}{4}^{2}\,\Delta\,ABC + \ldots + \frac{1}{4}^{n}\,\Delta\,ABC$$

Neste processo, Arquimedes usou o método conhecido como "método da exaustão". Para obter a expressão citada anteriormente da área do segmento parabólico, ele mostrou que a área do triângulo ADC é a quarta parte da área do triângulo ABC, traçou paralelas como construções auxiliares e foi somando à área do triângulo ABC a área de ADC e de outros triângulos auxiliares .

Observa-se que, na expressão encontrada, Arquimedes chega a generalizar para $\frac{1}{4}^{n}\,\Delta ABC$, mas para chegar a essa generalização muitas investigações foram feitas pelo próprio Arquimedes e por estudiosos da época. Nesta demonstração fica evidente, portanto, não somente o poder das imagens na construção de raciocínios elaborados como também a importância de se ter espaço e liberdade para criar e fazer construções que ainda não estejam convencionadas. Dessas construções, muitas vezes surge a produção de conceitos que revolucionam o mundo.

A contribuição de BOYER (1992:33) sobre os referenciais de Joahann Kepler (1571-1630), torna-se significativa pois também deu sua contribuição para o Cálculo. Kepler imaginava a esfera composta de pirâmides com vértices no centro da esfera e bases infinitesimais próximas da superfície, obtendo assim o volume da esfera como 1/3 do produto de seu raio, pela área de sua superfície esférica, (BOYER, 1992:34).

FIGURA 5: VOLUME DE UMA ESFERA DE RAIO R: PROPOSTA DE KEPLER



$$\begin{aligned}\text{Volume} &= \frac{1}{3}rB_1 + \frac{1}{3}rB_2 + \frac{1}{3}rB_3 + \dots\\ &= \frac{1}{3}r(B_1 + B_2 + B_3 + \dots)\\ &= \frac{1}{3}r\,(\text{área da superfície esférica}).\end{aligned}$$

A área da superfície esférica $A=\pi r^2$, tão utilizada em estruturas do cotidiano do homem têm sido desenvolvida pelos professores de matemática que atuam nas escolas secundárias, geralmente como produto final e não como processo. Ou se apresenta apenas a fórmula ou se proporciona ao aluno uma demonstração que, de acordo com o seu estágio em Geometria, pode provocar ou não sua assimilação. Na realidade, raramente os alunos têm a oportunidade de criar fórmulas para o volume da esfera, relacionando este conteúdo com outros conceitos estudados. Cabe portanto indagar: quantos alunos imaginam que a expressão do volume de uma esfera possa ser deduzida pelo processo idealizado por Cavalieri? Quantas maneiras ainda existem para se chegar à expressão do volume da esfera e que ainda não foram exploradas? Será que os métodos mais utilizados para se ensinar a demonstração da referida fórmula têm atingido os objetivos propostos? Ou ainda, será que com um ensino que apenas reproduz cópias é possível formar indivíduos criativos, capazes de adaptar os conceitos matemáticos às constantes mudanças do mundo? Esses são problemas deveriam preocupar os docentes de Matemática e inquietar professores que atuam na formação desses docentes nas universidades.

Outra contribuição arrolada por EVES (1995:426) sobre os referenciais apresentados por Bonaventura Cavalieri (1598-1647) também tornam-se significativos, pois apresentam dois princípios que levaram seu nome - "Princípios de Cavalieri" -, que permitem esclarecer:

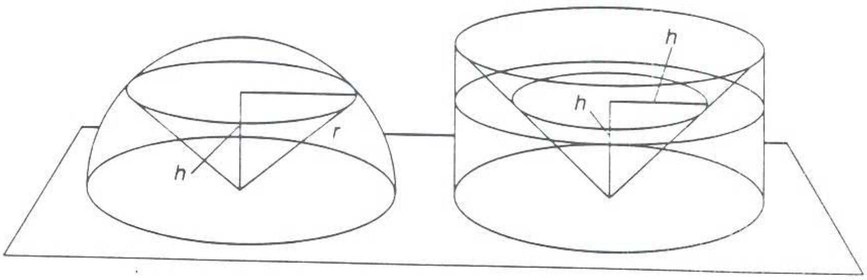
> 1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre as áreas dessas porções é a mesma constante.

2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos seções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante.

Com base em seus princípios Cavalieri deduziu a conhecida fórmula para o cálculo do volume de uma esfera de raio r. Para esclarecer, apresenta-se o exemplo citado na obra de EVES (1995:427-428):

> ... temos à esquerda , um hemisfério de raio r e, à direita, um cilindro circular de raio r e altura r, cilindro esse de què se removeu o cone cuja base é sua base superior e cujo vértice é o centro de sua base inferior.

FIGURA 6: VOLUME DE UMA ESFERA DE RAIO R: PROPOSTA DE CAVALIERI



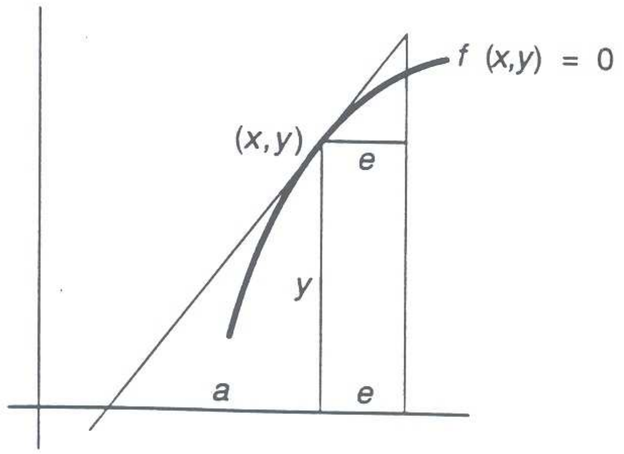
> Os dois sólidos estão assentados sobre o mesmo plano. Seccionaremos agora ambos os sólidos com um plano paralelo ao plano da base de ambos e a uma distância h dele. Esse plano corta o hemisfério segundo um círculo e o outro sólido segundo uma coroa circular. É fácil mostrar através da geometria elementar, que ambas as secções têm área igual a p(r^2 - h^2). Segue-se então do princípio de Cavalieri que os dois sólidos têm volumes iguais. Logo, o volume V da esfera é dado por:
>
> V = 2 . (volume do cilindro - volume do cone)
>
> $$V = 2\,(\pi r^3 - \frac{\pi r^3}{3}) = \frac{4\pi r^3}{3}$$

O método utilizado por Cavalieri convence por intuição que as relações entre muitos sólidos são verdadeiras. Ele também se apóia em conceitos já definidos e tem sido utilizado para demonstrar expressões de volume em muitos cursos secundários. Cavalieri, para chegar às suas conclusões, certamente realizou experiências que ultrapassaram os conceitos apresentados de forma definitiva e sem conexão com os objetos que o rodeavam. Para chegar a essa dedução, realizou, como todo estudioso, várias experiências e, entre acertos e erros, atingiu muitos objetivos. O importante é que nessa busca de soluções por meio das experiências, novos conceitos podem ter aparecido e aí reside a riqueza do processo de descoberta dos conceitos matemáticos.

Outra contribuição relevante para esta pesquisa foi do matemático Pierre de Fermat, citada na obra de EVES (1995:430), que propõe:

> ... Fermat também descobriu um procedimento geral para determinar a tangente por um ponto de uma curva cuja equação cartesiana é dada. Sua idéia consistia em achar a subtangente relativa a esse ponto, isto é o segmento de reta cujas extremidades são a projeção do ponto de tangência sobre o eixo x e a intersecção da tangente com esse eixo. A idéia de tangente usada pelo método é a de posição limite de uma secante quando os dois pontos de intersecção com a curva tendem a coincidir. Vejamos em notação moderna, em que consiste o método. Seja f(x,y)=0 a equação da curva (figura a seguir) e procuremos sua subtangente a relativa a (x,y). Por semelhança de triângulos, facilmente se estabelece que as coordenadas de um ponto da tangente, próximo do ponto de tangência, são [x+e, y(1+ e/a)]. Tratando-se esse ponto como se ele fosse da curva, obtém-se:
>
> $$f\left[x+e, y\left(1+\frac{e}{a}\right)\right]=0$$

FIGURA 7: TANGENTE A UMA CURVA: PROPOSTA DE FERMAT



E para que essa igualdade possa ser considerada correta, faz-se com que e assuma o valor zero. Determina-se, então a partir da equação resultante, a subtangente a em função das coordenadas x e y do ponto de tangência. Isso, obviamente, eqüivale a fazer:

$$a = -y\frac{\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}}}{\frac{\partial f}{\partial x}} \quad (\ldots)$$

À sua maneira, Fermat determinou tangentes às seguintes curvas: elipse, ciclóide, conchóide, quadratriz e folium de Descartes.

No caso da folium de Descartes, segundo o autor citado, Fermat determinou a subtangente relativa a um ponto genérico da curva e obteve o seguinte:

" $x^3 + y^3 = nxy$
$(x+e)^3 + y^3(1+e/a)^3 - ny(x+e)(1+e/a) = 0$

$$(\ldots) \qquad a = -\frac{3y^3 - nxy}{3x^2 - ny}$$

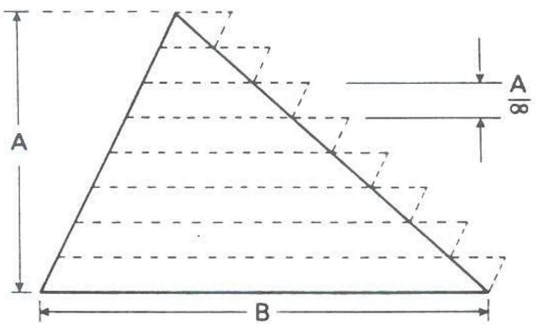
Fermat desenvolveu um trabalho pioneiro não só no que se refere à diferenciação, mas também no que se refere à integração (...) "

Nos cálculos de Fermat, percebe-se que equações foram surgindo a partir de problemas geométricos. Nota-se também, no exemplo citado, a presença dos conceitos tangente, semelhança de triângulos e coordenadas cartesianas. Desse exemplo, pode-se destacar a importância de se envolver mais conceitos quando se quer discutir novas idéias em um processo de aprendizagem de determinado conteúdo. Com essa preocupação, cabe refletir: Será que o ensino da Matemática tem utilizado, por exemplo, a fatoração para explicar a fórmula resolutiva da equação do 2° grau, a Geometria para construir as relações da Trigonometria? O conhecimento já sistematizado tem sido apresentado visando a construção de novos conhecimentos? Ou os conceitos iniciam e terminam em si mesmos sem que o aluno possa ver as suas aplicações e aí se convencer de que estes realmente devem ser estudados?

Issac Newton tem sido considerado uma figura fundamental para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral. Segundo BOYER (1992:40), um de seus precursores foi John WALLIS que deu a relevante contribuição.

> Wallis imaginava um triângulo composto de um número infinito de paralelogramos "muitos estreitos", cujas áreas (do vértice) à base do triângulo formavam uma progressão aritmética em que 0 era o primeiro termo e (A/∞) .B era o último – Já que o último paralelogramo (ao longo da base B do triângulo) tinha altura A/∞ e base B.

FIGURA 8: ÁREA DE UM TRIÂNGULO: PROPOSTA DE WALLIS



A área do triângulo é a soma da progressão aritmética 0 + ... + (A/∞) .B = $\left(\frac{n \circ \det ermos}{2}\right)$.(primeiro + último termo)

o segundo membro da igualdade fica :

$$\frac{\infty}{2}.\left(0+\frac{A}{\infty}.B\right)$$

$$\frac{\infty}{2}.\frac{A}{\infty}.B$$

$$=\frac{1}{2}.A.B$$

Na demonstração citada pode-se observar que, a partir da Geometria Wallis pôde criar muitas abstrações. Os entes geométricos permitiram que se fizesse uma relação com outros conceitos, como o de progressão aritmética e a expressão utilizada até hoje para calcular a área do triângulo por dedução. É evidente que existem maneiras mais simples de se demonstrar a expressão da área de um triângulo, mas o objetivo aqui é mostrar como é possível relacionar idéias abstratas como o infinito, a conceitos geométricos elementares. Os caminhos da Geometria tornam o trabalho com os diversos tópicos da Matemática mais produtivo, envolvendo outros conceitos que o aluno possa ter estudado. A Matemática, ao apropriar-se da Geometria, poderia no seu desenvolvimento envolver os conceitos geométricos e instigar o aluno a descobrir relações e peculiaridades que proporcionassem condições para a produção do conhecimento. Ao trabalhar-se com figuras como os paralelogramos do problema anterior, o professor poderia provocar o aluno a realizar uma pesquisa sobre paralelogramos que poderia desencadear debates, seminários e trabalhos que culminassem na produção de novas relações matemáticas.

O matemático Carl B. BOYER, em sua obra "Arthmetica infinitorum" (1656), apresenta a contribuição de Wallis que obteve resultados importantes para o cálculo. (BOYER, 1992:41).

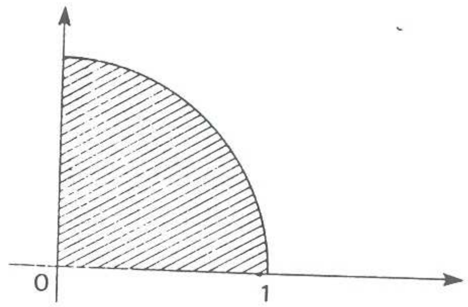
> ... Um exemplo interessante é sua expressão para $\frac{\pi}{2}$:
>
> $$\frac{2.2.4.4.6.6.8...}{1.3.3.5.5.7.7...}$$
>
> Ele sabia como achar as áreas representadas em notação moderna por
>
> $$\int_0^1 (1 - x^2)^0 \ dx, \int_0^1 (1 - x^2) \ dx, \int_0^1 (1 - x^2)^2 \ dx$$
>
> e assim por diante sendo essas áreas iguais a 1, 2/3, 8/15,...respectivamente.

Assim , a área

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

na figura a seguir situa-se entre 1 e $\frac{2}{3}$, uma vez que o expoente está entre 0 e 1.

FIGURA 9: ÁREA DE UM QUARTO DE CÍRCULO: PROPOSTA DE WALLIS



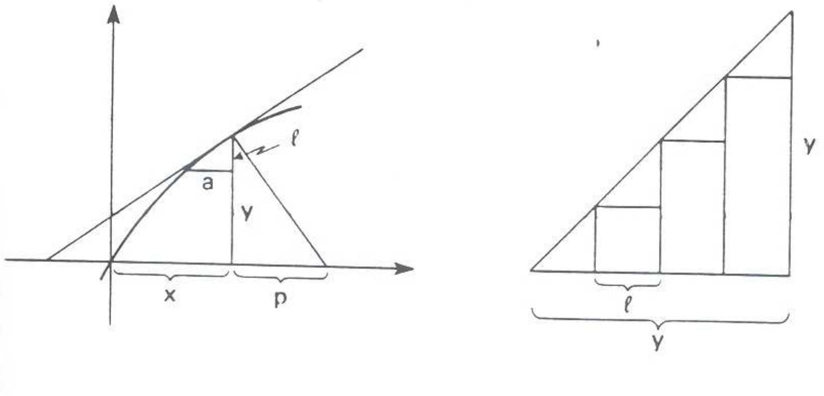
> Mas esta última integral representa ¼ da área do círculo unitário; portanto p/4 está entre 1 e 2/3. E, por um processo complicado, Wallis finalmente deduziu a expressão acima para p/2 .

A partir do desenho que representa a quarta parte de um círculo de raio unitário, o professor deveria instigar o aluno a estabelecer outras relações que poderiam ser feitas e o resultado da integral definida proposta poderia advir de diferentes processos. Wallis faz outras descobertas, que são apresentadas no final da citação. Para chegar a esses referenciais, muitas pesquisas, estabelecem relações com conhecimentos que já dominava e por isso pode dar contribuições para o Cálculo que hoje é utilizado. Com essa contribuição significativa para a Matemática, caberia indagar o seguinte: se Wallis tivesse apenas aulas expositivas dos conceitos e se fizesse exaustivas listas de exercícios repetitivos, teria chegado a tantas conclusões importantes?

Com objetivo de consolidar a necessidade do uso da geometria, Cita-se então uma das contribuições de Gottfried Wilhelm von LEIBNIZ (1646-1716) que tornou-se uma figura notável no cálculo diferencial e integral pelos seus estudos: (BOYER, 1992:45). Menciona-se o seguinte exemplo para demonstrar sua real contribuição:

> Num manuscrito datado de 29 de outubro de 1675, Leibniz obteve o que chamou um "triângulo característico" (fig. 1, a seguir) idéia anteriormente utilizada por Barrow e Pascal. Leibniz procedeu basicamente da seguinte maneira: ℓ / a = p/y (provavelmente Leibniz imaginava esses segmentos como lados, num sentido intuitivo e aproximado, de triângulos semelhantes). Daí ret.pa =ret.yℓ. Somando esses retângulos, Leibniz escreveu primeiro na notação de Cavalieri, (1) omn.pa=omn. yℓ (onde omn representa omnia, "todos"); mas como no mesmo manuscrito ele disse "Será útil escrever... $\int \ell$ em vez de omn. ℓ, isto é a soma dos ℓ" usaremos o sinal $\int$ algumas linhas antes de ele o ter feito. A equação (1) torna-se então
>
> (2) $\int pa = \int y\ell$ onde a soma, $\int y\ell$, é de 0 a y e assim fornece a área $\frac{y^2}{2}$ de um triângulo isósceles reto (ver figura a seguir)

FIGURA 10: TRIÂNGULO CARACTERÍSTICO DE LEIBNIZ



Dessa forma Leibniz obteve a relação

(3) $\int pa = \int y\ell = \frac{y^2}{2}$ ou

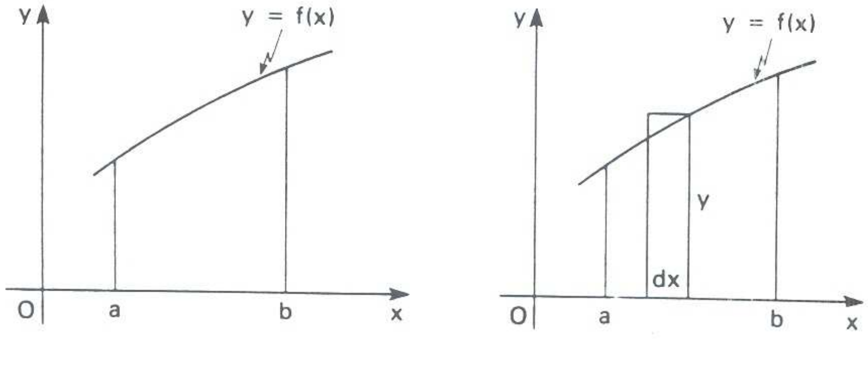
$\int pdx = \int_0^y ydy = \frac{y^2}{2}$, que é como se prefere pensar na integração hoje. Leibniz naturalmente estava apenas começando a desenvolver essas idéias. Se assumimos, como Leibniz tacitamente o fazia, que a curva passa pela origem, então podemos escrever $\int$ p dx como $\int_0^x pdx$ Com efeito, de (3) ele deduziu expressões como $\int x = \frac{x^2}{2} e \int (x+y) = \int x + \int y$.

Entre matemáticos da época, Leibniz (1600 a 1700), destaca-se por ter desenvolvido várias expressões e notações que acabaram contribuindo com um processo de organização dentro do Cálculo. Os raciocínios eram algébricos mas o início muitas vezes envolviam conceitos geométricos.

No decorrer da pesquisa bibliográfica, para fundamentar e defender o uso dos conceitos geométricos, extraiu-se da obra de BOYER (1974: 86) os referenciais teóricos com relação à integral definida, onde propõe:

> Historicamente, a integral definida desenvolveu-se a partir da tentativa de definir e calcular a área da região plana delimitada pelo gráfico da função $y = F(x)$, o eixo x e as retas
> $x = a$ e $x = b$, $a < b$ (figura 11)

FIGURA 11- INTEGRAL COMO SOMA DE ÁREAS DE RETÂNGULOS



Imaginava-se a região dividida numa "quantidade infinita de retângulos infinitesimais" de largura dx e altura y (figura 11). Obtinha-se então a área da região "somando-se" as áreas desses retângulos. Essa soma é denotada pelo sinal de integral $\int$, que é um S alongado, inspirado na inicial da palavra latina *summa*. Assim, a área em questão pode ser escrita

$\int_a^b$ f (x)dx, $\int_a^b y$ dx, ou simplesmente $\int$ ydx. Essa notação tem uso geral hoje em dia e é lida como "integral de a a b de ydx".

O símbolo de integral foi introduzido em 1675, por Leibinz num manuscrito em que escreveu $\int \ell$ para expressar $omn.\ell$ isto é a soma de todos os ℓ.

Quem primeiro usou a palavra integral foi Jacob Bernoulli, em 1690. O símbolo comum de somatório Σ, é a letra maiúscula grega sigma. Assim, conforme o espírito de Leibniz, dever-se-ia escrever.

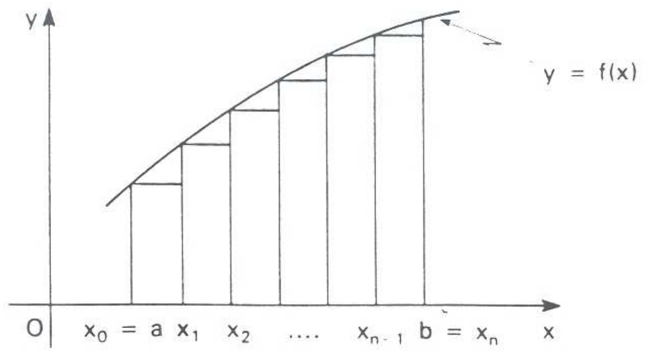
Σy dx = $\int_a^b y$ dx = área

O conceito de integral definida relacionado à área de uma superfície permitiu que muitas inovações pudessem ser expressas por integrais de funções que foram surgindo em razão das necessidades. Ao realizar essas contribuições na área matemática, acredita-se que Bernoulli e outros estudiosos das integrais nem tomaram consciência da enorme contribuição que estariam dando à humanidade. Nesse processo, cabe indagar: e nas aulas que são ministradas atualmente o aluno tem consciência de que pode descobrir elementos, mudar rumos pré-estabelecidos, beneficiar os seus semelhantes com as suas pesquisas?

Em complementação ao estudo do uso da geometria e seus benefícios, elencou-se o conteúdo sobre integração que BOYER (1974), apresenta:

> A teoria da integração moderna começou com Augusttin Louis Cauchy, que ao início do século XIX desenvolveu a integral como um "limite".
>
> Para uma função y=f(x), contínua no intervalo [a,b], Cauchy formava a soma de produtos
>
> Sn = (x1 - x0) . f (x0) + (x2 - x1) . f(x1) + ...
>
> + (xn - xn-1) . f (xn-1), onde a = x0 < x1 < x2 <...<xn- 1<xn = b "(figura a seguir) (BOYER, 1992: 87)

FIGURA 12- INTEGRAL SEGUNDO CAUCHY



Percebe-se nessa exemplificação, que BOYER (1974) apropria-se da contribuição de Cauchy para desenvolver a integral como um limite, embora não tenha estudado limites para chegar às integrais.

Como são desenvolvidos os programas de Cálculo Diferencial e Integral na maioria das propostas dos professores de matemática? Na maioria das obras indicada pelos docentes a ordem apresenta-se começando por Limites, Derivadas e por último Integrais, ou seja, o conceito de limite, que tem se mostrado ser de mais difícil entendimento, vem antes das Integrais. É do conhecimento dos docentes de Cálculo que integrais podem ser escritas como limites de somas de áreas mas a ordem ensinada na maioria dos casos é Limites, Derivadas e Integrais. Os problemas do ensino do Cálculo levam a questionar se esse processo de ensino é eficaz.

1.1 ANÁLISE DE ALGUMAS REFERÊNCIAS CITADAS E REFLEXÕES SOBRE O PAPEL DA GEOMETRIA NA CONSTRUÇÃO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

Pôde-se observar que todos os exemplos referidos nesta pesquisa envolveram o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral destacando a presença da Geometria como ponto de partida. Esse estudo bibliográfico crítico poderia servir para ser seguido pelos que atuam nessa área com a finalidade de apresentar os conceitos, mesmo os de álgebra elementar, para que fossem melhor assimilados pelos alunos. Nesse contexto, valeria refletir: se o Cálculo desenvolveu-se dessa maneira (partindo de problemas geométricos), não seria este um caminho eficiente para trabalhar essa disciplina com os alunos?

A experiência vivenciada e o estudo realizado apontam que a aprendizagem dos alunos de Cálculo poderia chegar a estágios mais avançados se não fossem explorados com tanta ênfase só os raciocínios algébricos elaborados. Com ajuda da Geometria, os alunos seriam investigados para que investigassem mais, explorassem mais as formas e tivessem oportunidade de exteriorizar suas experiências em matemática. Essas inquietações ocasionariam mais significado nos conceitos estudados e estariam mais propensos a criar e não apenas a reproduzir o conhecimento transmitido. Em seu artigo Geometria e Imaginação, Geraldo ÁVILA (1983:25) reforça essa idéia :

"O pensamento matemático vai muito além do raciocínio lógico dedutivo. Em seus aspectos mais criativos ele repousa sobretudo na intuição, no raciocínio plausível e nos recursos heurísticos, na imaginação e na visualização geométrica".

Essa afirmação de Ávila (1983:25-28) remete a uma reflexão sobre a prática docente que a maioria dos professores vem propondo no ensino de Cálculo. Esse desafio aponta para um repensar, na prática pedagógica, do professor de matemática, que venha apontar caminhos para resolver problemas, como altos índices de repetência, falta de pré-requisitos e aversão que muitos alunos apresentam a esta disciplina.

Ressaltando a importância da Geometria, Sérgio LORENZATO (1995:3-13) faz um alerta para os docentes com as seguintes colocações:

> A Geometria é um excelente apoio às outras disciplinas: como interpretar um mapa, sem o auxílio da Geometria? E um gráfico estatístico? Como compreender conceitos de medida sem idéias geométricas? A história das civilizações está repleta de exemplos ilustrando o papel fundamental que a Geometria (que é carregada de imagens) teve na conquista de conhecimentos artísticos, científicos e em especial matemáticos. A imagem desempenha importante papel na aprendizagem e é por isso que a representação de tabelas, fórmulas, enunciados, etc., sempre recebe uma interpretação mais fácil com o apoio geométrico. A geometria pode esclarecer situações abstratas, facilitando a comunicação da idéia matemática.

Ainda sobre a importância do ensino de geometria, Estela Kaufmam FAIGUELERNT (1995:45-53) explica que a partir de áreas de figuras planas poder-se-ia começar muitos trabalhos algébricos como resolução de equações, inequações, sistemas e outros. E apresenta que:

> A Geometria oferece um vasto campo de idéias e métodos de muito valor quando se trata do desenvolvimento intelectual do aluno, do seu raciocínio lógico e da passagem da intuição e de dados concretos e experimentais para os processos de abstração e generalização.
>
> A Geometria também ativa as estruturas mentais, possibilitando a passagem do estágio das operações concretas para o das operações abstratas. É portanto, tema integrador entre as diversas partes da Matemática bem como campo fértil para o exercício de aprender a fazer e aprender a pensar. Ela desempenha papel primordial no ensino, porque a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituem a sua essência.

Apesar de o artigo de Faiguelernt se referir propriamente aos ensinos fundamental e médio, acredita-se que se adapta ao nível superior, uma vez que a geometria tem demonstrado historicamente que muitas são as suas funções dentro da Matemática e do desenvolvimento do raciocínio.

2 ANÁLISE REFLEXIVA SOBRE O ENSINO DOS LOGARITMOS COM BASE EM LIVROS DE CÁLCULO UTILIZADOS NO BRASIL

Neste capítulo pretende-se mostrar algumas situações propostas por matemáticos sobre a aprendizagem da função logarítmica, apresentados em alguns livros de Cálculo utilizados no Brasil.

É importante ressaltar que o trabalho não pretende fazer uma análise sobre o conteúdo matemático dos livros, o que mereceria um estudo muito mais aprofundado. Pretende-se apenas mostrar os diferentes caminhos tomados pelos autores para trabalhar com a função logarítmica.

Deve-se levar em conta também os objetivos de cada livro pois alguns deles, apesar de não deixarem um método explícito em suas páginas, propõem ao professor atividades altamente enriquecedoras e criativas.

A qualidade de um curso de Cálculo depende de opção metodológica do professor e do livro indicado para estudo. Sendo o Cálculo uma disciplina que faz parte do currículo básico de muitos cursos de graduação, como Agronomia, Zootecnia, Arquitetura e Engenharia, portanto torna-se importante que se faça uma reflexão, uma análise que consiga detectar se a maneira como a disciplina vem sendo desenvolvida nas universidades brasileiras nesses cursos está atingindo os objetivos aos quais se propõe.

No artigo "O Livro Didático de Matemática: Utilização na Percepção do Aluno" Antonio Pinheiro de ARAÚJO (1992:101) coloca que os livros didáticos não devem ser somente corretos, mas significativos e relevantes para os alunos; que tenham uma representatividade no cotidiano do aluno; que atendam as suas capacidades intelectuais e suas necessidades práticas".

Durante muito tempo se discute a questão dos livros didáticos utilizados no ensino fundamental e no ensino médio. Cabe enfatizar que a indicação do livro didático depende, em especial, da formação dos profissionais que atuam como professor. Por isso, justifica-se elencar as obras estudadas nos diferentes níveis de ensino, pois os profissionais que realizam a graduação e a licenciatura sofrem uma influência direta em sua formação para optar pelas obras trabalhadas.

O livro de cálculo, utilizado em todos os níveis, acaba contemplando conteúdos intimamente relacionados com grande parte da Matemática estudada no ensino fundamental e no ensino médio.

Há muito já se discute a questão dos livros didáticos utilizados na escola de maneira geral. Essa discussão não tem sido expressiva no terceiro grau, pois há alguns livros indicados onde os autores, preocupam-se com os referenciais teóricos, mas apresentam o cuidado de tornarem-se didáticos na apresentação dos conteúdos. Há autores que apresentam um conjunto de incoerências, erros conceituais, definições que não são claras e não se preocupam em esclarecer aos leitores (alunos) de onde advém os cálculos e os raciocínios para resolver determinadas situações.

Optou-se em apresentar fragmentos de livros de Cálculo de vários autores que ilustram como o tem a função logarítmica é trabalho. Como as relações entre a função logarítmica e exponencial são muito estreitas há autores, como GRANVILLE (1965) que tratam do tema estabelecendo comparações entre essas funções.

Elencou-se por exemplo a obra "Elementos de Cálculo Diferencial e Integral" do autor W.A. GRANVILLE (1965:108-109), que propõe:

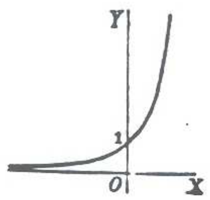
"62. - Funções exponencial e logarítmica.
A função de *x*

(1) $u = e^x$ $(e = 2{,}718)$, chama-se *função exponencial*. O gráfico dela é o da figura abaixo. Ela é uma função crescente de *x* para todos os valores de *x*, como veremos mais tarde, e contínua em todos os pontos.

De (1) resulta, por definição.

(2) $x = \ln y$

FIGURA 13- GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO EXPONENCIAL: GRANVILLE



As funções e^x e $\ln y$ são, pois, funções inversas uma da outra(§39).
Trocando o nome das variáveis em (2), temos

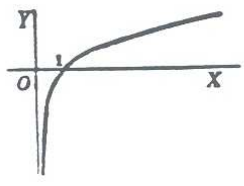
(3) $y = \ln x$,

na qual *y* é, agora, uma *função logarítmica de x*. O gráfico desta função é o da figura seguinte. ela não é definida para valores negativos de *x* nem para $x = 0$. É uma função crescente para todos os valores de x > 0 e contínua para todos os valores, isto é, para todo valor *a* de *x* maior que zero,

(4) $\lim_{x \to a} \ln x = \ln a$

Quando $x \to 0$, então $y \to -\infty$, como se observou acima. O eixo dos *yy* é uma assíntota da curva.

FIGURA 14- GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO LOGARÍTMICA: GRANVILLE



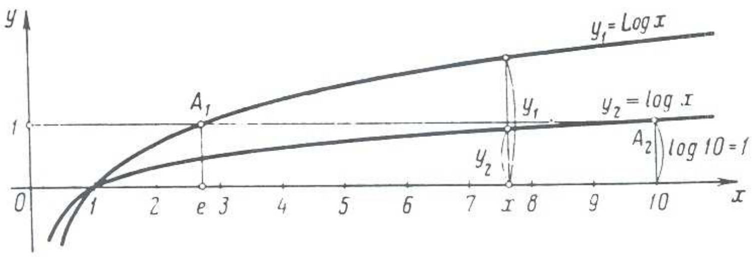
As funções a^x e $\log_a x$ (a > 0) têm as mesmas propriedades que e^x e $\ln x$ e gráficos similares aos mostrados."

Nesta citação pode-se constatar as referências feitas a conceitos já apresentados no início do livro ou conteúdo que o autor supõe que o aluno tenha aprendido na escola secundária. Constata-se que se o aluno não dominar por exemplo, termos como função crescente ou função inversa, o desenvolvimento da teoria fica comprometido.

Outra obra denominada "Cálculo Diferencial e Integral" de N. PISKOUNOV (1993:59-60) apresenta o conteúdo sobre logaritmos neperianos da seguinte forma:

> **"Logaritmos neperianos**
>
> Definimos no ξ 8 do capítulo I a função logarítmica $y = \log_a x$. O número *a* chama-se base do logaritmo.
> Se a = 10, *y* chama-se o logaritmo decimal do número *x* que se designa pela notação *y* = log *x*.

FIGURA 15- LOGARITMOS NEPERIANOS: PISKOUNOV



> Conhece-se as tábuas dos logaritmos decimais a partir do curso do ensino secundário; estas tábuas chamam-se tábuas de Briggs, do nome do sábio inglês Briggs (1556-1630).
>
> Chama-se *logaritmos naturais* ou *logaritmos neperianos* aos logaritmos cuja base é o número
> *e* = 2,71828..., o nome de um dos primeiros inventores das tábuas de logaritmos, o matemático Neper (1550-1617). Logo, se $e^y = x$, *y* diz-se o logaritmo natural do número *x*. Escreve-se então *y* = Log *x*, em vez de *y* = $\log_e x$.Os gráficos das funções *y* = log *x* são dados na figura 15.
>
> Estabeleçamos agora a relação que existe entre os logaritmos decimais e naturais de um mesmo número *x*.

Seja y = log x ou x = 10^y. Tomemos o logaritmo de base e dos dois membros desta última igualdade. Encontramos Log x = y Log 10. donde y = $\frac{1}{Log10}$Log x.

Substituindo y pelo seu valor tem-se log x = $\frac{1}{Log10}$Log x.

Assim, se se conhece o logaritmo natural do número x, obtém-se o seu logaritmo decimal multiplicando o logaritmo natural de x pelo fator $M = \frac{1}{Log10} \approx$ 0,434294 que é independente do número x. O número M chama-se *módulo de transição* dos logaritmos naturais aos logaritmos decimais:

log x = M . Log x.

Pondo nesta igualdade x = e encontra-se o valor do número M expresso com o auxílio dos logaritmos decimais:

log e = M (Log e = 1).

Os logaritmos naturais exprimem-se com o auxílio dos logaritmos decimais pela fórmula:

Log x = $\frac{1}{M}$ log x, onde $\frac{1}{M}$ = 2,302585."

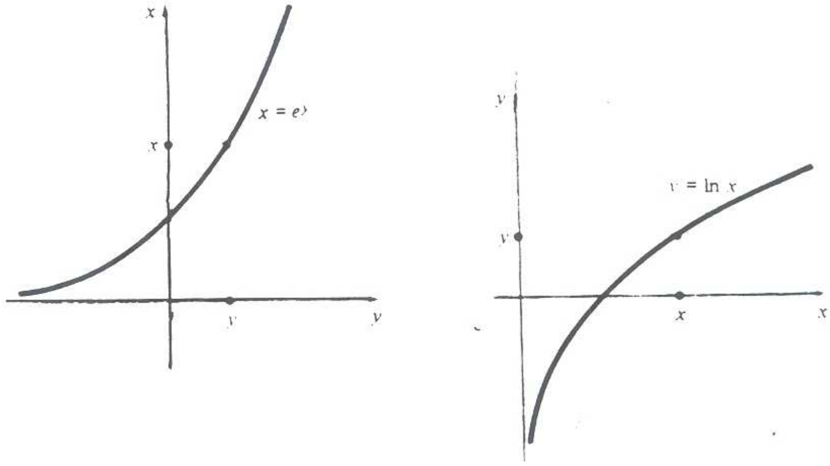
O excesso de relações envolvendo conceitos e termos desconhecidos e a imposição de fórmulas que transformam logaritmos de uma base para outra sugerem uma Matemática pronta onde no momento certo se dão as soluções para todos os problemas. Isto porque não há um momento de descoberta das relações apresentadas. Os novos conceitos são expostos para serem agregados a muitos outros que o aluno armazena, na tentativa de entender o Cálculo.

Na obra, Cálculo com Geometria Analítica, SIMMONS, volume 1, (1987:366-368), o autor apresenta a função logaritmo natural, da seguinte forma:

A FUNÇÃO LOGARITMO NATURAL y = ln x

Os logaritmos na base 10 - logaritmos comuns são, com freqüência, ensinados nos colégios, começando com a definição costumeira: para todo número real positivo x, log10 x é o número y para o qual x = 10^y. De maneira idêntica, para todo número positivo x, $\log_e x$ é o número y tal que x = e^y(fig. 16).

FIGURA 16- GRÁFICO DA FUNÇÃO LOGARITMO NATURAL: SIMMONS



O número $\log_e x$ x chama-se *logaritmo natural* de x, por motivos que ficarão claros na Observação 2. Em deferência à prática-padrão usamos a notação mais simples ln x, para o logaritmo natural de x. Assim,

y = ln x tem o mesmo significado que x = e^y,

no sentido de que se trata de uma única equação; primeiro, escrita em forma resolvida para y e, depois, escrita em forma resolvida para x. O gráfico de y = ln x se obtém por simples giro de gráfico de x = e^y ou pela troca das posições dos eixos (Fig. 16, acima). Exatamente como na Seção 8.2, a função logaritmo natural y = ln x é definida somente para valores positivos de x e tem as seguintes propriedades familiares:

$$\ln x_1 x_2 = \ln x_1 + \ln x_2 \quad \text{e} \quad \ln \frac{x_1}{x_2} = \ln x1 - \ln x2:$$

$$\ln x^b = b \ln x;$$

$$e^{\ln x} = x \text{ e } \ln e^x = x;$$

$$\lim \ln x = -\infty \quad \text{e} \quad \lim \ln x = \infty$$

temos também: ln 1 = 0 e ln *e* = 1.

Podemos calcular a derivada $\frac{d_y}{d_x}$ da função *y* = ln x muito facilmente, derivando x = e^y, implicitamente com relação a x:

$$1 = e^x \frac{d_y}{d_x}, \text{ assim } \frac{d_y}{d_x} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$

Isto nos dá a fórmula

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x},$$

e temos imediatamente a extensão da regra da cadeia

$$\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \frac{du}{dx'}$$

onde u é uma função qualquer de x..

Exemplo 1. Como aplicações diretas de (1), temos

$$\frac{d}{dx}\ln(3x+1) = \frac{1}{3x+1}\frac{d(3x+1)}{d_x} = \frac{3}{3x+1}$$

$$\frac{d}{dx}\ln(1-x^2) = \frac{1}{1-x^2}\frac{d(i-x^2)}{dx} = \frac{-2x}{1-x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{3x}{2x+1}\right) = \frac{1}{3x/(2x+1)}\frac{(2x+1).3-3x.2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{1}{x(2x+1)}$$

Salientamos que o último cálculo pode ser simplificado, escrevendo primeiro $\ln\left[\frac{3x}{2x+1}\right] = \ln 3 + \ln x - \ln(2x+1)$, de modo que

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{3x}{2x+1}\right) = \frac{1}{x} - \frac{2}{2x+1} = \frac{1}{x(2x+1)}.$$

A versão diferencial de (1) *é* $d(\ln u) = \frac{du}{u}$, o que conduz imediatamente à principal formula deste capítulo,

$$\int\frac{du}{u} = \ln u + c. \quad (2)$$

Como se pode constatar, afirmações como o "simples giro do gráfico de $x=e^{yn}$ demonstram como determinados procedimentos são considerados pelos autores de Cálculo. O professor deve estar atento se o aluno também considera o gráfico da função citada como "simples" e se operações como o giro desse gráfico ou a permutação de eixo são de seu domínio.

Em Um Curso de Cálculo de GUIDORIZZI (1987), 2ª edição, vol1, que apresenta o conteúdo de Logaritmo da seguinte maneira:

LOGARITMO

Teorema. Sejam a>O, a ≠ l, β > O dois reais quaisquer. Então existe um único γ real tal que

$$\boldsymbol{a,y = \beta}.$$

Demonstração

Suponhamos, primeiro, *a* > *1*. Como **lim** *a'* = **+ -e** **lim a' = O,** segue que existem reais u e v, tais que

a < β < a

Como f(-x) = *a'* é contínua no intervalo fechado [u, v] segue do teorema do valor intermediário que existe y em [u, v] tal que
f (γ) = β ou a" = *β*.

A unicidade de y segue do fato de f ser estritamente crescente.
O caso O < *a* < l deixamos a seu cargo.
Sejam a > *O*, *a* ≠ 1, e β > O dois reais quaisquer. O único número real γ tal que
a,y = β
denomina-se *logaritmo de β na base a* e indica-se por γ= log. 0. Assim

$$\gamma = \log_a \beta \Leftrightarrow a^\gamma = \beta$$

O excesso de formalismo em um primeiro momento é, por exemplo para um aluno de engenharia que se interessa mais nas aplicações do conteúdo, um obstáculo. Isto porque a escola secundária não tem preparado os alunos para assimilar demonstrações, principalmente no início do curso de Cálculo (vol.1).

Outra obra apontada para essa análise crítica é a de "Cálculo A" de FLEMMING e GONÇALVES (1992) onde apresenta-se a função logarítmica como:

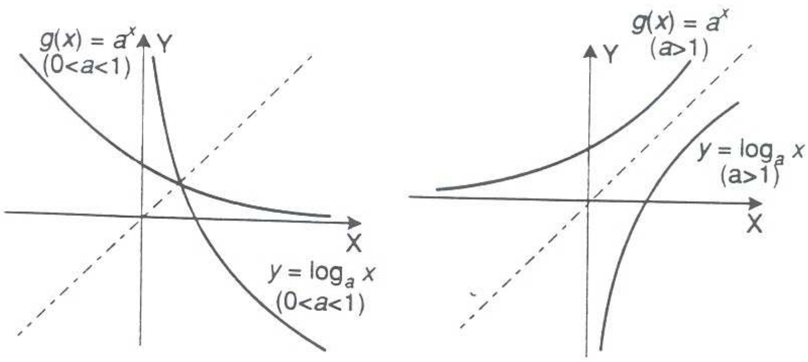
2.15.2 **Função Logarítmica**. Dado um número real *a (O* < *a* ≠ *1)*, chamamos função logarítmica de base *a* a função de IR* em IR que associa a cada x o número $\log_a x$, isto é,
As funções f de R,* em IR definida por f'(x) = $\log_a x$ e g, de IR em IR* definida por g (x) = a; *O* < a I, são inversas uma da outra.
Temos D(f) *R** e Im(f) = IR.
Com relação ao gráfico da função f(x) = $\log_a x$
(O < *a* ≠ l) (Figura 2.21), podemos afirmar:

l) está todo à direita do eixo y"

2) corta o eixo das abcissas no ponto (1, O)-,

3) f (x) = loga,c é crescente se *a* > 1 e decrescente se
O < *a* <*1*;
4) é simétrico ao gráfico da função *g (x)* = *a'* em relação a reta. y =.x.

FIGURA 17- GRÁFICOS DE FUNÇÕES LOGARÍTMICA E EXPONENCIAL: FLEMMING E GONÇALVES



Apesar de se constatar que a proposta tem a intenção de facilitar o entendimento do aluno uma linguagem mais acessível, os conceitos são apresentados e afirmações são feitas com base em informações que o aluno pode ou não dominar.

No livro "Cálculo" dos autores MUNEM e FOULIS, vol. 1 (1982:429-430), também encontra-se a Definição de função logarítmica natural como:

DEFINIÇÃO I A função logarítmica natural

A função logarítmica natural, denotada por ln, é definida por

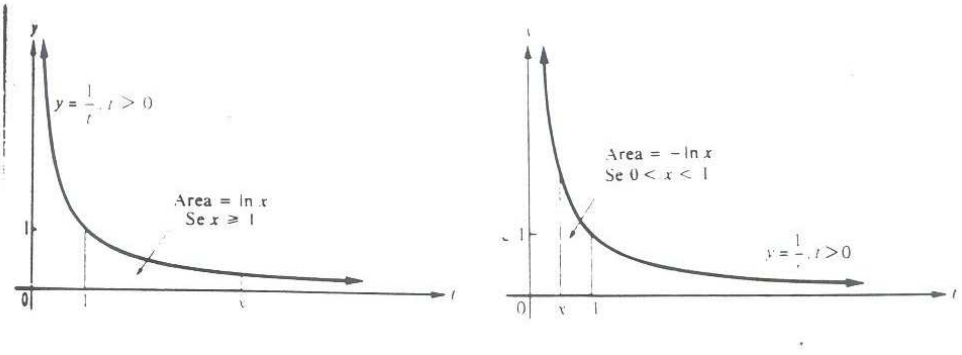
$$\ln x = \quad \frac{1}{t}\, dt \text{ para } x > 0.$$

Evidentemente, o domínio da ln é o intervalo (0, ∞) e, para x > 1, ln x pode ser interpretado geometricamente como a área abaixo do gráfico de $y = \frac{1}{t}$, t > O, entre t = 1 e **t** = x (Fig. 17). Da definição I, temos:

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\, dt = 0.$$

também, para O < x < l, ln x é a área abaixo do gráfico de $y = \frac{1}{t}$, t > O, entre t = x e t = 1 (Fig. 18), porém com sinal negativo.

FIGURA 18- FUNÇÃO LOGARITMO NATURAL COMO ÁREA DE FAIXA DE HIPÉRBOLE: MUNEM E FOULIS



Em resumo temos que ln x < O se O <x < 1, ln x = O se x = 1. e ln x > O se x > 1.

Nesta obra os logaritmos são apresentados após o conteúdo Integral Definida. Isto significa que o aluno pode ficar boa parte do curso sem ter os referenciais dessas funções nos conteúdos Limites e Derivados e suas aplicações no cotidiano.

Na obra Cálculo - funções de uma variável, elaborada por Geraldo ÁVILA (1981:124-125) trata a função logarítmica da seguinte maneira:

Função Logarítmica

Na escola de segundo grau, é costume introduzir o logaritmo com base no conceito de exponenciação. Assim, fixado um número a >0, o *logaritmo de um número positivo* N *na base* a, *indicado por loga* N, *é o expoente* r *a que se deve elevar a base para se obter* N. Em símbolos, isto significa que

$$\log_a N = r \Leftrightarrow N = a^r$$

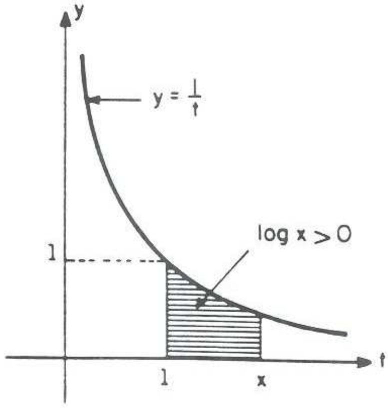
A dificuldade com essa definição é que ela exige o conhecimento prévio do que seja potência com expoente real qualquer, a^r. A definição de a^r é muito simples quando r é um número inteiro. quando r é um número racional positivo, digamos r = $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros positivos, podemos definir $a^{\frac{p}{q}}$ como sendo a raiz q-ésima de a^p: $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Se r = - $\frac{p}{q}$ for negativo, então definimos

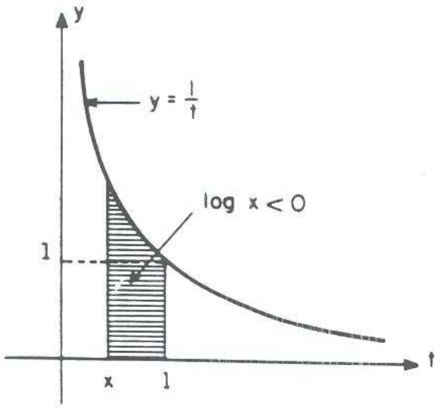
$$a^{\frac{p}{q}} = 1/a^{\frac{p}{q}} = 1/\sqrt[q]{a^p}$$

Mas isso exige, evidentemente, que já saibamos o que seja raiz q-ésima de um número positivo b (no caso, b= a^p) o que já é uma questão delicada. Por exemplo, embora seja fácil entender que $\sqrt{25}$ = 5 ou $\sqrt[3]{8}$ = 2, qual o significado de $\sqrt[2]{5}$ ou $\sqrt[5]{1.7}$? A maneira mais conveniente de esclarecer essas questões - e outras mais, como o significado de a^r, com a > 0 e r irracional - consiste em, primeiro definir o logaritmo de alguma outra maneira e introduzir o conceito de exponenciação com base no logaritmo. Assim, de acordo com (4.22), diremos que a^r é o número N se r for o logaritmo de N na base a. Felizmente, isto é possível e é o que faremos a seguir.

FIGURA 19- FUNÇÃO LOGARITMO NATURAL COMO ÁREA DE FAIXA DE

HIPÉRBOLE: ÁVILA





Vamos definir o logaritmo natural de um número x>0 como sendo a área da figura compreendida entre as retas t = 1, t = x, o eixo 0t e a hipérbole y = $\frac{1}{t}$ (fig. 19), considerada positiva se x > 1, zero, se x = 1 e negativa, se 0 < x < 1.

O problema de definir a área de uma figura plana, delimitada por arcos de curva e possivelmente um ou mais segmentos retilíneos, como na definição do logaritmo, requer uma análise cuidadosa. Mais adiante, na Seç. 6.2, explicaremos como isso é feito. De qualquer forma, a noção intuitiva que temos de área é um guia seguro nas conclusões que vamos tirar da definição do logaritmo.

No Cálculo, o logaritmo natural de um número x > 0 é simplesmente chamado "logaritmo de x" e indicado por log x ou ln x. É claro que temos aqui uma função de x, definida para todo x >0, que é negativa no intervalo 0 < x < 1 e positiva para x > 1. Ela é também crescente, pois, como é fácil reconhecer, a área (em valor e sinal) que a define torna-se cada vez maior, à medida que x cresce.

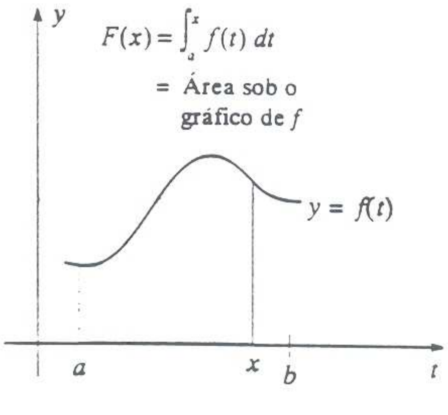
Nesta obra, a função logarítmica é apresentada já no início do curso como área de um ramo de hipérbole e sem utilizar o conceito de integral definida. Se o professor conduzir o processo de forma que o aluno explore todos os conceitos, pesquisando os que não tenha domínio, já se tem aí uma preparação para o trabalho com áreas de figuras não poligonais que será bem explorado no tópico Integral Definida.

O livro "Cálculo com Geometria Analítica" de Swokowski, 2ª edição, vol1, apresenta a função logarítmica natural da seguinte forma:

A FUNÇÃO LOGARÍTMICA NATURAL

Na introdução ao capítulo explicamos porque é necessário adotar, para as funções logarítmica e exponencial, um enfoque diferente do usado na matemática pré-cálculo. À primeira vista, você poderá achar estranho definir uma função logarítmica como urna integral definida; mais adiante, entretanto, veremos que a função obtida obedece às leis familiares dos logaritmos estudados em cursos pré-cálculo.

FIGURA 20- INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA SOB O GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO: SWOKOWSKI



Seja f uma função contínua em *um intervalo* fechado *[a, b]*. Tal como na prova da Parte I do teorema fundamental do cálculo (5.30), podemos definir uma função *F* por

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

para x em *[a, b}*. Se f(t) $\geq$O em todo *[a, b], então* F(x) é a área sob o gráfico de f de *a* a x, conforme Figura 20. Para o caso especial f(t) = t^n, onde n é um número racional e *n* é um número racional e n $\neq$ - 1, podemos achar uma forma explicita para F. Assim, pela regra da potência par integrais,

$$F\,(x) = \int_a^x t^n dt = [\frac{t^{n+1}}{n+1}]_a^x$$

$$= \frac{1}{n+1}(x^{n+1} - a^{n+1}) \text{ se n} \neq \text{-1}$$

Como indicado, não podemos utilizar t^{-1}para o integrando, pois $\frac{1}{n+1}$ não é definida se *n* - 1. Até aqui não tivemos meios de determinar uma antiderivada de $\frac{1}{x}$ - isto é, uma função *F* tal que *F*'(x) = $\frac{1}{x}$. A próxima definição suprirá esta lacuna.

Definição (7.9)

Define-se a função logarítmica natural, denotada por In, como

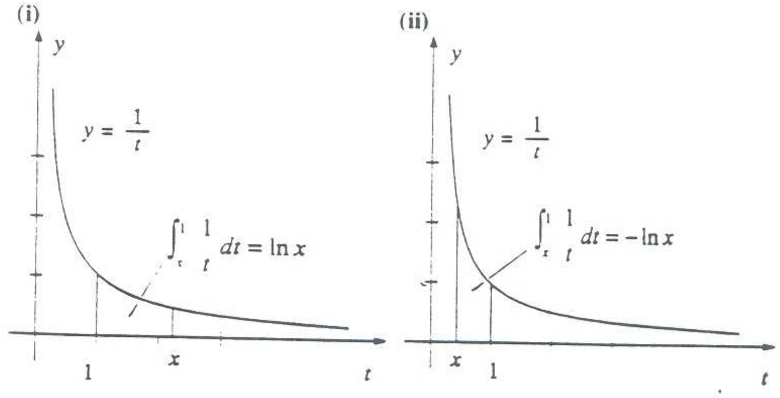
$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$$

para todo *x* >O

A expressão In x (leia-se *ele-ene* de *x)* é **chamada Logaritmo natural de x**. Usamos esta terminologia porque, como veremos, In tem as mesmas propriedades que as funções logarítmicas estudadas nos cursos pré-cálculo. A restrição x > O é necessária porque, se x $\leq$ O, o integrando tem uma descontinuidade infinita entre *x* e 1 e, assim, $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ não existe.

Se *x* > 1, a integral definida $\int_1^x \frac{1}{t}dt$ pode ser interpretada como a área da região sob o gráfico de y = de t = 1 a *t* = *x* (veja a Figura 21).

FIGURA 21- FUNÇÃO LOGARITMO NATURAL COMO ÁREA DE FAIXA DE HIPÉRBOLE: SWOKOWSKI

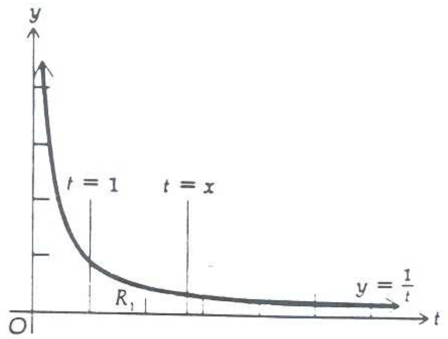


Neste livro também os logaritmos são apresentados após o conteúdo Integral Definida. Além das considerações feitas com relação à citação da obra de MUNEM-FOULIS, corre-se o risco de o conteúdo não ser apresentado de maneira satisfatória se o número de aulas disponíveis não for suficiente.

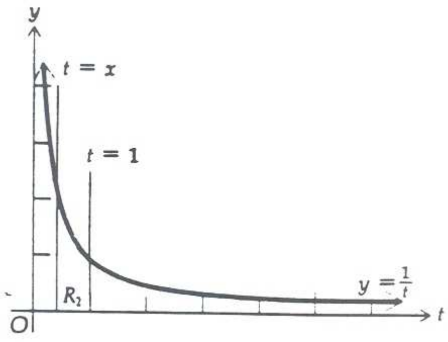
Outra obra que merece ser analisada criticamente é "O Cálculo com Geometria Analítica", de Louis LEITHOLD (1994:440), 3ª edição, vol. 1, que trata o assunto da seguinte maneira:

> Neste capitulo vamos definir a função logarítmica usando o Cálculo e provar as prioridades dos logaritmos partindo dessa definição. Então, a função exponencial será definida em termos da função logarítmica. Essa definição possibilita-nos definir a^x sendo x um número qualquer e a > O. As propriedades das potências serão então provadas para os casos em que o expoente for qualquer numero real.
> Considere a fórmula
>
> $$\int t^n dt = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

FIGURA 22- FUNÇÃO LOGARITMO NATURAL COMO ÁREA DE FAIXA DE HIPÉRBOLE: LEITHOLD



22-a



22-b

Essa fórmula não é válida para n = -1. Para calcular $\int t^n dt$ quando n = - 1, precisamos de uma função cuja derivada seja $\frac{1}{x}$.O primeiro teorema fundamental do Cálculo (5.8.1) dá-nos tal função:

$$\int_a^1 \frac{1}{t} dt$$

onde *a* pode ter qualquer número real com o mesmo sinal que x. Para interpretar tal função, seja *R,* a região limitada pela curva $y = \frac{1}{t}$, pelo eixo t, pela reta t = 1 à esquerda e pela reta t = *x,* à direita onde x > 1. Essa região *R,* está na Figura 22-a. A medida da área de *R,* é uma função x; vamos chama-la de *A(x)* e defini-la pela integral definida

$$A(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

Consideremos agora essa integral no caso em que O < *x* < 1. Da definição, 5.5.5,

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = - \int_x^1 \frac{1}{t} dt$$

Então, a integral $\int_1^x \frac{1}{t} dt$ representa a medida do arco da região R, limitada pela curva $y = \frac{1}{t}$, pelo eixo r, pela reta t = *x* à esquerda e pela reta t = 1 à direita. Assim, sendo, $\int_1^x \frac{1}{t}$ dt será então a medida da área da região R, da Figura 22-b, com sinal negativo.

Para x = 1, a integral $\int_1^x \frac{1}{t}$ dt torna-se $\int_1^1 \frac{1}{t}dt$, que é igual a zero pela Definição 5.5.6. Nesse caso, as limitações à esquerda e â direita da região coincidem e a medida da área é 0. Assim, a integral $\int_1^x \frac{1}{t}$ dt para x > O pode ser interpretada em termos da medida da área de uma região. Seu valor depende de x, sendo usada para definir a função logarítmica natural.

7.3.1 Definição: A Função logarítmica natural é a função definida por

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,\ x > 0$$

domínio da função logarítmica natural é o conjunto de todos os números positivos. Lê-se ln x como o "logaritmo natural de x".

Nesta obra percebe-se que há um tratamento mais demorado dos conceitos de forma a construir a função logarítmica natural. Entretanto ela se enquadra nos problemas relacionados à obras citada anteriormente e também a obra de MUNEM-FOULIS (1982).

2.1 CONSIDERAÇÕES RELACIONADAS ÀS OBRAS APRESENTADAS

Nos livros mencionados foi possível constatar que alguns serviram às necessidades de uma época, como por exemplo, Piskounov que se refere a tábuas de logaritmos. Outros já mais inteirados com os avanços da informática tomam caminhos diferentes.

A função logarítmica, nos livros relacionados neste capítulo, aparece em vários momentos: no início, como revisão de um conteúdo que o aluno deveria dominar da escola secundária, nos capítulos finais, após o Teorema Fundamental do Cálculo e também no início, partindo de idéias geométricas.

A proposição dos autores pesquisados, nesse estudo, permitem observar que os caminhos trilhados nos livros para se chegar à função logarítmica são diversos e cada um deve ter em si um princípio que o fundamente. Observa-se que os autores deveriam preocupar-se como a aprendizagem do aluno tendo em vista as dificuldades dos alunos que freqüentam o ensino médio, e, a realidade desse aluno, uma vez que cada livro deve ter sido elaborado para atender a uma necessidade diferente.

Em pesquisa bibliográfica, crítica e reflexiva permitem observar que há uma lacuna entre as necessidades da aprendizagem do Cálculo no ensino médio e o que é ministrado aos alunos nesta escola. Muitas vezes o aluno não consegue interpretar o que o livro tenta lhe transmitir por não dominar conceitos básicos nas escolas fundamental e média. Neste caso o livro Cálculo, elaborado especialmente para a aprendizagem da disciplina, torna-se dependente de um professor que, poderá ou não, adequar os conceitos à realidade dos alunos fazendo com que estes consigam interpretar o que o autor propõe a ensinar. Se isso não ocorrer, as demonstrações e os teoremas, que fazem com que o Cálculo tenha consistência, não serão aprendidas pelo aluno e por não terem nenhum significado para ele, causam sérios problemas em cursos de graduação de Ciências Exatas.

No artigo "O Livro Didático de Matemática: Utilização da Percepção do Aluno" de Antonio Pinheiro de ARAUJO (1992:101) cita um trecho importante de LUCKESI (1992:98-107):

> ...encontramos livros didáticos que simplificam os conteúdos de tal forma que não auxiliam em nada os educandos a entenderem melhor o mundo, e elevarem o seu patamar de compreensão da realidade.
>
> Outras vezes, esses livros trazem conteúdos secundários que ocupam tempo de ensino do professor e de estudo dos alunos, que poderiam ser aproveitados em conteúdo e atividades essenciais significativas. Pior que isso, ainda o caso de alunos que são reprovados por causa desses conteúdos secundários, pois há professores que, por não assumirem uma posição crítica, exigem que seus alunos deles se apropriem.

De maneira geral, os livros de Cálculo de autores estrangeiros e traduzidos para o português trazem em sua essência um projeto destinado a servir determinadas situações características de seu país. O problema é que às vezes o professor toma o programa do livro estrangeiro como caminho a ser seguido e quer aplicá-lo em realidades brasileiras totalmente distintas, sem fazer qualquer adaptação ou retomada de pré-requisitos. Há escolas no Brasil que não garantem nem a aprendizagem de conteúdos como a construção do gráfico de funções elementares como a de 1° grau e a quadrática. Esse fato, compromete o estudante que apresentará dificuldades para entender o que está proposto nos livros de Cálculo?

Em congressos, seminários e encontros de educação matemática, realizados nos últimos cinco anos, relatos de docentes têm evidenciado que na escolha dos livros de Cálculo, dificilmente o professor faz um diagnóstico de sua classe antes de propor o livro mais adequado. Na realidade o professor escolhe o livro de Cálculo por concordar com a seqüência de conteúdos do autor, pelo livro conter mais ou menos rigor, ou pelo fato do professor já conhecer os exercícios do livro (às vezes por ter estudado nesse livro). Esses procedimentos inadequados para um ensino com qualidade, podem comprometer todo o processo de aprendizagem. O sujeito do processo, o aluno, tem se manifestado por não conseguir entender o livro que o professor indicou como sendo o melhor.

A contribuição de Francisco de Oliveira e CASTRO (1992:49) torna-se significativa para complementar a análise no que se refere aos critérios para adoção de um livro de Cálculo:

> Na falta do exato conhecimento dos progressos realizados até a sua época, cada professor de escola de engenharia ou de escola militar adota o livro que melhor se ajusta às suas tendências lógicas ou filosóficas. O maior ou menor número de discípulos que consegue formar dentro da sua orientação é apenas conseqüência do seu maior ou menor poder de persuasão, da sua maior ou menor dedicação ao ensino, e do maior ou menor entusiasmo que a sua conduta cívica e moral tenha o poder de suscitar entre os alunos.
>
> Cada aluno se torna, assim um novo centro irradiador de idéias, muitas vezes antiquadas, mas sempre sincera e convictamente ensinadas pelo mestre.

A aprendizagem do Cálculo não se restringe apenas a "ter visto" determinados conteúdos básicos ou ter desenvolvido raciocínios a partir desses conteúdos, mas, ter investigado, vivenciado situações de descoberta, e de ter atingido determinado estágio de raciocínio.

O problema que vem aumentando a cada ano de escolaridade é a dificuldade do aluno se tornar crítico já nos primeiros anos da universidade. Difícil é apontar soluções para superar esse desafio, pois elas dependem de muitas variáveis. O que resta são sugestões de metodologias que possam resgatar conceitos perdidos na vida escolar do aluno. A preocupação deve concentrar-se em proporcionar ao aluno situações de experimentação onde este possa descobrir e construir os elementos necessários para assimilar os raciocínios elaborados propostos no Cálculo. O termo "elaborado" nesse trabalho surge apenas como referencial de algo mais abstrato, pois, por exemplo, se o aluno não domina o conceito de função, muitos raciocínios para esse aluno serão considerados elaborados.

Diante da necessidade de se ter um conteúdo que seja coerente com as necessidades de cada realidade surge a proposta didática de proporcionar a aprendizagem através do ensino com pesquisa. Uma proposta que pretende por meio de investigações, relações com a história da Matemática e com a realidade vivenciada pelo aluno, conduzir o aluno ao conceito de logaritmos utilizando idéias elementares da Geometria.

3- FUNDAMENTOS DA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA APRENDIZAGEM DOS LOGARITMOS NO CÁLCULO DIFERENCIAL: UMA ALTERNATIVA GEOMÉTRICA

O fato de as metodologias utilizadas em muitas classes universitárias não estarem atingindo os objetivos a que se destinam, remetem a uma reflexão sobre a prática pedagógica e as possíveis restruturações que ela deve sofrer, e, em especial para acompanhar as constantes mudanças pelas quais passa a sociedade. A postura do ensino tradicional na Matemática tem oferecido como produto o pavor pela disciplina e essa atitude passa a provocar o afastamento dessa área do conhecimento. As informações, experiências docentes e relatos informais de alunos e professores mostram que mesmo os que se apresentam no processo como "bens sucedidos" no ensino tradicional têm que aprender a produzir conhecimento e a criar e esse procedimento empreende um esforço próprio. E como profissional buscam com autonomia qualificar-se sob pena de não se adaptarem à realidade.

Cleide Farias de MEDEIROS (p.20) em um texto que analisa o ensino tradicional da Matemática, faz a seguinte colocação:

> ...No ensino tradicional de Matemática não tem havido em geral, um respeito pela criatividade do aluno. Na prática de ensino de um grande número de professores, alheios à preocupação com a criatividade matemática, há um desencontro entre esta e a forma metódica como as idéias parecem surgir àqueles em suas exposições de sala de aula. As soluções das questões e as demonstrações são apresentadas de tal modo que não passam por ensaios e tentativas de resolução e busca novos caminhos. Desta forma de apresentação dos conteúdos, depreende-se uma concepção de Matemática em que a criatividade é totalmente desfigurada, induzindo os alunos à impotência frente à

sabedoria do mestre, que aparentemente encontra de imediato os melhores caminhos para a solução de questões matemáticas.

Com relação aos cursos de Cálculo Diferencial e Integral ministrados no Brasil, Regina FRANCHI (1992) contribui para a reflexão sobre as mazelas do ensino tradicional com as seguintes idéias :

> As mudanças que ocorrem a cada dia no mundo têm provocado discussões a respeito de como devem ser os cursos para habilitar o futuro profissional a atuar nesse mundo em constante dèsenvolvimento.
>
> O desenvolvimento científico e tecnológico acontece de forma tão rápida que torna-se praticamente impossível suprir o estudante com todas as informações de que necessitará para atuação na vida profissional. Espera-se que os profissionais do século XXI estejam habilitados a enfrentar situações novas e encontrar soluções.
>
> Dessa forma, ao mesmo tempo que deseja-se que a escola ponha o estudante em contato com novas tecnologias, valoriza-se cada vez mais a formação conceitual básica, pois esta dará a fundamentação necessária para ir adiante naquilo que a escola pode transmitir, criando, inovando, construindo.
>
> Nesse contexto percebe-se a importância da disciplina Cálculo Diferencial e Integral nos cursos em que se insere. Cabe ao Cálculo dar o embasamento teórico necessário aos diversos cursos, sendo ainda linguagem para representação de fenômenos da realidade e ferramenta para resolução de problemas.
>
> Mas o trabalho nos cursos de Cálculo nem sempre resulta em sucesso. Nem sempre os alunos conseguem compreender os conceitos envolvidos e nem os professores conseguem fazer com que o Cálculo cumpra seu papel como disciplina básica.
>
> A busca das causas desse fracasso nos leva a uma reflexão sobre as aulas de Cálculo: como esta disciplina tem sido trabalhada, os problemas que os alunos enfrentam com o seu estudo, a adequação das aulas ao momento atual".

Um fator que vem prejudicando as aulas de Matemática é a falta de significado que ela tem para os alunos. Os relatos históricos (ver capítulo 1) mostram que os problemas surgem de questões práticas e tem uma razão de existir. Mesmo que o objetivo seja desenvolver a habilidade com cálculos (o que seria secundário hoje com as calculadoras) é necessário que o professor crie situações que proporcionem o envolvimento do aluno com o tópico que está sendo apresentado, e coloque o conteúdo como este foi concebido, dentro de um contexto.

João Bosco PITOMBEIRA (1990:65) contribui significativamente com essa idéia quando coloca:

> ... a Matemática no momento em que ela é feita ela está contextualizada, no contexto do trabalho daquele pesquisador, no trabalho daquela coletividade matemática, no trabalho daquela sociedade. Ela é escrita em um livro, em uma revista e então fica descontextualizada. Uma missão que nós professores temos é de recontextualizar esta Matemática para o aluno. Essa recontextualização tem vários aspectos . Um deles é que é a recontextualização do conceito, da noção dentro de seu desenvolvimento na Matemática. É apresentar o conceito em uma linguagem que o aluno entende. Obviamente se vamos apresentar certo conceito para uma aldeia de esquimós ou para uma aldeia qualquer, a linguagem devem ser diferente. O vocabulário, a vivência de um esquimó é totalmente diferente da linguagem, da vivência da experiência de alguém que vive em outra aldeia. Temos de adaptar nossa linguagem àquilo que o aluno possa entender. Mas além disto, temos a obrigação para conosco, para com o aluno de saber como determinado conceito surgiu e saber porque ele é importante. Por que é que falamos em função, em conjunto, em geometria. Estas coisas não nasceram de graça e não nasceram descontextualizadas.

As idéias de Pitombeira, deixam evidente que se faz necessário apontar alternativas para que os problemas de aprendizagem na Matemática comecem a ser resolvidos. Dentro desta perspectiva surge a necessidade de uma proposta que permita ao aluno produzir, exercitando a sua criatividade pois, desta maneira, a disciplina poderá ter mais significado para o aluno na universidade e na sua profissão.

Com relação às aplicações do Cálculo para os profissionais atuarem no mercado de trabalho, tem-se no texto de BIEMBENGUT e HEIN (1995:44) a seguinte contribuição:

> O Cálculo que, possivelmente emergiu da tentativa dos nossos grandes mestres em desvendar a relação "Homem Versus Universo" contribui hoje, significativamente , em todas as áreas do saber.

Este fato se comprova quando verifica-se o ementário da maioria dos cursos de terceiro grau. O que antes se restringia aos cursos de engenharia, hoje garante espaço também nos cursos das áreas sociais, econômicas e biológicas.

Apesar dessa importância, o ensino não tem correspondido às expectativas. O Cálculo tem sido uma das disciplinas com maior índice de reprovação. Além disso, segundo levantamento realizado junto a engenheiros, contadores e biólogos, obteve-se , por consenso, que o que se aprende no terceiro grau não é aplicado na respectiva área de atuação. Por que esta dissonância?

Acreditamos que isto ocorra pelo simples fato de que as disciplinas da área matemática, na maior parte dos cursos de uma universidade, são de responsabilidade do Departamento de Matemática. Como conseqüência, o professor de Matemática, na maioria das vezes não tem conhecimento substancial a respeito da outra área na qual atua, o que teoricamente, deva ser natural.

Nesse sentido, o desenvolvimento de cada tópico matemático é feito muitas vezes, sendo negligenciados alguns conceitos fundamentais em detrimento de regras e técnicas que, por certo, em meio ao avanço tecnológico, já são obsoletas".

Nos cursos de graduação como Engenharia da Computação, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecânica, Engenharia de Alimentos, entre outros, o Cálculo vem sendo ministrado pelos professores de maneira tradicional e repetitiva, não contemplando momentos de experiências dentro do processo de aprendizagem. Os conteúdos são colocados de forma estanque, acabada, desconectados de uma realidade, de uma razão de ser e de estarem ali. Relações que poderiam ser feitas entre os conteúdos do Cálculo que poderiam tornar a disciplina mais atraente para os alunos deixam de ser feitas muitas vezes em detrimento de um programa que deve ser cumprido.

Não é comum as aulas de Cálculo possibilitarem a criação de algo novo para o aluno. Novas alternativas para resolver os problemas propostos. O que tem ocorrido, na maioria das vezes, é uma relação autoritária que conduz à mera reprodução dos raciocínios que autores norte americanos, russos, brasileiros e outros compilaram (CASTRO, 1992:53).

Enquanto não houver espaço para a experiência e para a investigação nas aulas de Cálculo Diferencial os programas poderão continuar a ser cumpridos, com os alunos tentando demonstrar que aprenderam a reproduzir e perdendo a oportunidade de criar soluções a partir de sua vivência que talvez pudessem contribuir até para o desenvolvimento da própria teoria.

Com relação a fazer experiências em matemática Ubiratan D'AMBRÓSIO (1984:95) faz o seguinte comentário:

> ... o caráter experimental da Matemática foi removido do ensino e isso pode ser reconhecido como um dos fatores que mais contribuíram para o mau rendimento escolar. Os professores das ciências naturais, sobretudo biologia, parecem ter sido mais arrojados em propor uma abertura do currículo levando o aluno a fazer, quando adotaram o método de projetos. Mais recentemente, o estudo das ciências ambientais serviu para encorajar ainda mais a inovação nessa área. Em menor escala o ensino da física e da química também tem mostrado inovações. O mais resistente tem sido o da Matemática.

Em muitos cursos de Cálculo tem-se a impressão de que a ênfase maior é dada para símbolos, e nomenclaturas que servem para uma organização seqüencial, nem sempre didática, centrada em objetivos estritamente matemáticos. Os objetivos, por não levarem em conta que o aluno deve ser um sujeito atuante no processo, acabam distanciando este estudante de conceitos que seriam úteis na profissão. Essa ruptura entre o conteúdo e sua aplicabilidade determina o isolamento de conceitos do Cálculo num mundo matemático que não tem relação com a realidade da maioria das pessoas.

Nas palavras de Michael OTTE (1991:170), destaca-se a importância da experimentação na construção dos conceitos matemáticos: "... O pensamento técnico-científico liga-se, inicialmente, de modo muito estreito com o fazer e com a experiência, e menos com a teoria e a reflexão".

Vive-se em uma época em que há mais importância nas construções e aplicação de conceitos, do que na repetição de símbolos, notações e abstrações .

Nesse contexto, destaca-se a contribuição de MACHADO (1989:97):

> ....hoje se exige de um número cada vez maior de trabalhadores que saibam manipular calculadoras eletrônicas em cujo teclado encontram-se símbolos como p ou e ou cos h. Poucos, no entanto, têm consciência do real significado de tais símbolos, sendo o conhecimento envolvendo os mesmos obtidos através da máquina, basicamente um conhecimento "revelado".

As calculadoras, os computadores e o avanço tecnológico convidam os educadores matemáticos a refletirem sobre o que é mais importante no processo de aprendizagem: memorizar e reproduzir ou aprender a raciocinar, aprender e aprender e desenvolver a criatividade. A Matemática precisa ultrapassar o estigma de preparar as pessoas apenas para usar os benefícios da tecnologia, subordinando-se a ela, e buscar a formação de uma geração que dominará essa tecnologia desenvolvendo-a ainda mais em prol do bem estar social.

O cálculo surgiu de problemas concretos de Geometria e de questões do cotidiano, portanto os cursos de Cálculo deveriam propor um caminho que ultrapassasse a abstração, a poluição dos símbolos as aplicações abstratas, buscando alternativas para produzir conhecimento significativo.

Trabalhando um Cálculo a partir do saber do aluno e para o aluno, talvez seja possível construir conceitos mais duradouros. Conceitos que fiquem na memória dos profissionais que os utilizam para que possam criar soluções para problemas e situações diversas. Os conceitos matemáticos podem até não mudar mas a forma como são apresentados aos alunos deve estar sempre adaptada à realidade do momento.

O uso de questões que possam ultrapassar as fronteiras da matemática pode ser um grande agente motivador da aprendizagem uma vez que cada vez mais percebe-se que há pontos de intersecção entre conteúdos de várias áreas do conhecimento. Em "Epistemologia e Didática" de Nilson José MACHADO (1996:243) faz a seguinte observação:

> A partir de um tema de Matemática, por exemplo, a idéia de semelhança, é possível ir além das fronteiras desta disciplina, abordando questões de geografia, de Biologia etc. Os mapas são uma fonte extremamente fecunda para a exploração de relações proporcionais, assim como o corpo humano também o é. Assim, tendo como pretexto um tema matemático, é possível tratar-se de muitos outros temas, indo além das fronteiras disciplinares. Na verdade, a própria caracterização da semelhança como um tema matemático soa um tanto forçada, uma vez que tal idéia transborda em muito as fronteiras dessa disciplina.

As palavras de Machado convidam a uma reflexão sobre os rumos que a Matemática e outras disciplinas deverão tomar. O desafio será trabalhar os conteúdos matemáticos, dentro das áreas de interesse dos alunos. Nesse contexto a Matemática passará a ser trabalhada como uma disciplina presente no mundo real.

Ao resolver o problema da falta de significado dos conceitos matemáticos para o aluno objetiva-se contemplar as primeiras luzes para a solução de problemas, como, por exemplo, os altos índices de repetência dessa disciplina nas universidades. O professor tornar-se investigador do próprio processo de aprendizagem ofertado para os alunos parece ser uma alternativa para a transformação necessária.

A contribuição de Maria A. Viggiani BICUDO (1992:9) torna-se significativa quando propõe:

> ... O ponto fundamental para que o professor faça pesquisa ao realizar sua prática docente é estar atento ao que ocorre na sala de aula. Isso significa que ele deve estar com seus alunos, percebendo-os no seu processo de compreensão e interpretação da Matemática e percebendo-se no seu ato de dar-aula de Matemática. Esse ato atentivo requer lucidez, abertura ao que está acontecendo...

A leitura do mundo, no momento atual, aponta caminhos para a educação convergindo para metodologias que propiciem a produção do conhecimento. Este produzir, pode significar um reinventar, fazer uma adaptação de conceitos já elaborados pelo homem, adaptados as necessidades efetivas do momento que se está vivenciando. Assim, acredita-se que o processo da aquisição de conceitos em Matemática deve vir pela pesquisa e pela investigação. O professor deve estar atento ao que os seus alunos trazem de suas experiências e ao que estão aprendendo. Marilda A. BEHRENS (1996:79-80) amplia essa visão com as seguintes idéias:

> A proposta desafiadora do ensino com pesquisa, que decorreria do aprender a aprender, torna-se uma manifestação corajosa, pois implica alteração profunda na prática pedagógica da sala de aula. Transpor a cópia, a imitação e a repetição encrustadas no ensino das escolas, parece tarefa difícil de ser realizada.
>
> A atitude de pesquisa tem-se apresentado como alavanca de qualidade em vários segmentos de ensino no país, desde a educação infantil, até a pós-graduação. O dimensionamento pela pesquisa atinge a todos os profissionais envolvidos na educação. O espaço educativo amplia-se na sociedade moderna e não se restringe ao ambiente escolar. A pesquisa tem sido atitude cotidiana nas crianças e nos jovens que se defrontam com os instrumentos informatizados. Portanto, o conhecimento não se restringe à repetição dos outros, mas prevê a criação/produção de conhecimento próprio.
>
> Cabe neste contexto a indagação: será que o processo metodológico utilizado na grande maioria das escolas, apoiado numa abordagem reprodutivista, instrumentaliza estas gerações para adentrarem, com competência o mercado de trabalho?

> O ensino em todos os níveis e, principalmente no ensino superior perdeu o caráter de terminalidade. O mundo moderno não autoriza um profissional a ter sucesso e competência, se não for um investigador / pesquisador permanente na sua área. Assim, os conteúdos transmitidos nas universidades não são suficientes para a vida profissional dos estudantes. A proposta do aprender a aprender abre a visão de que a educação não tem fim, renova-se dia a dia e avança rapidamente numa sociedade moderna, provocando um processo ininterrupto de atualização. A instrumentalização do "aprender a aprender" acompanha o profissional e abre caminho para acessar a universalização das conquistas da ciência e das técnicas".

Neste contexto, professores e alunos devem ser pesquisadores, produtores de conhecimento e devem buscar o saber elaborado, que vem sendo sistematizado nas publicações, nas experiências adquiridas, nos ambientes escolares e nas relações sociais, produzindo soluções para os seus problemas. Essa busca desenvolve a criatividade, a produção de conhecimento próprio e docentes e discentes num universo que cada vez mais se expande e desafia a busca da formação de um cidadão que vai ser mais competente para administrar a sua vida cotidiana.

3.1 PROFESSOR E ALUNO EM UM CONTEXTO DE ENSINO COM PESQUISA

A Matemática que está sendo desenvolvida em muitas escolas brasileiras consiste em um conteúdo que o aluno "vê passar" como a um filme. O aluno não pode ser espectador do processo e sim sujeito, personagem atuante de uma história que ele mesmo deve escrever. Como o estudante não percebe o significado nos conceitos matemáticos desenvolvidos em sala, num ensino tradicional, tende a esquecer rapidamente o conteúdo proposto. Isso porque as relações e situações, puramente matemáticas e propostas de maneira abstrata, levam cada vez mais ao distanciamento do aluno na aprendizagem desses conteúdos. A contribuição de Pedro DEMO (1997:77) torna-se significativa quando coloca:

> ... a matemática apenas copiada, além de revelar um professor cópia, nega sua função propedêutica de saber pensar; vira *decoreba* desvairada, como é uso nos vestibulares; é muito mais importante passar pouca matéria, mas compreendê-la em seu raciocínio completo do que entupir o aluno extensivamente; não basta também aplicar o que aprendeu, a peso de exercícios repetidos que, no fundo, apenas *treinam*".

Portanto, as experimentações, a descoberta dos conceitos pelo próprio aluno, a pesquisa, são fatores que deverão estar presentes na sala de aula para que a escola não se distancie da realidade. E o professor deve estar preparado para coordenar este processo. Pedro DEMO (1997:26) contribui significativamente quando propõe:

> A concepção moderna do professor o define essencialmente como orientador do processo de questionamento reconstrutivo no aluno, supondo obviamente que detenha esta mesma competência . Neste sentido, o que mais o define é a pesquisa. A rigor, ensinar é algo decorrente da pesquisa. Não pode manter a mesma densidade definitória, como se diz com respeito à universidade em termos de ensino, pesquisa e extensão. De partida, se os três termos fossem pelo menos homogêneos, teríamos um pouco mais de pesquisa e extensão, o que não é verdade. Como regra, a predominância do mero ensino é avassaladora. A seguir, não é correto homogeneizar os termos porque há visível hierarquia, estando no topo a pesquisa. Se esta for bem conceituada e praticada, torna-se ocioso o de extensão, e engloba naturalmente o ensino, que se torna educação. Pois educar pela pesquisa é a educação própria da escola e da universidade.

DEMO (1996), ainda define o professor como orientador do processo de questionamento reconstrutivo no aluno e complementa afirmando que a aula é apenas suporte secundário desse processo, pois no "aprender a aprender", o papel do docente deve ser repensado e revisado.

Em Formação Continuada dos Professores e a Prática Pedagógica, BEHRENS (1996:82) cita a proposta de Demo para o professor.

> a) Capacidade de pesquisa, para corresponder desde logo ao desafio construtivo de conhecimento; o que transmite em aula tem que fazer parte do processo de construção do conhecimento, assumir tessitura própria e, termos de mensagem, configurar componente de projeto autônomo criativo e crítico.
> b) Elaboração própria para codificar pessoalmente o conhecimento que consegue criar e variar, favorecendo a emergência do projeto pedagógico próprio.
> c) Teorização das práticas(...)
> d) Formação permanente(...)
> e) Manejo da instrumentalização eletrônica(...) (p.54 e 55).

Portanto, o professor precisa tornar-se um articulador e mediador do saber elaborado e um instigador da produção do conhecimento. Reverter o papel do aluno e do professor de repetidor de conhecimento alheio, demanda séria reflexão do corpo docente de todos os níveis de ensino. E nesse desafio, BEHRENS (1996:83) contribui:

> O professor torna-se figura significativa no processo quando percebe que é o orquestrador da construção do conhecimento e propicia ambiente que instrumentaliza o aluno para a emancipação. A visão de ser sujeito da história, ao invés de objeto, autoriza o docente a construir "projeto pedagógico próprio", para sua disciplina, não se distanciando de todo o curso, mas salvaguardando a especificidade necessária a cada avanço. Dominar o conhecimento, ter redação própria, expressar-se com desenvoltura, acessar informações do processo de transformação da realidade atual e instrumentalizar-se eletronicamente - são alguns pressupostos exigidos do professor que opte por esta metodologia. O professor viverá em constante estado de preparação e alerta.

Dentro dessa visão o professor deve repensar a sua postura e sua metodologia em sala de aula. Como os conhecimentos estão em constante modificação, o professor passa a ser um investigador que conduz um processo de pesquisa, de reelaboração e produção de conceitos. O professor deve estar atento ao que os seus alunos trazem de suas experiências e ao que estão aprendendo.

Fazendo investigações, o professor e o aluno, podem estar percorrendo caminhos que talvez sejam mais eficazes que os já conhecidos e trilhados.

Observa-se que os padrões tradicionais onde o professor só ensina e o aluno só aprende estão fora do contexto neste final de século. O mercado de trabalho bem como a sociedade necessitam de profissionais que tenham além de outras habilidades: raciocínio lógico, criatividade, espírito de investigação, elaboração de textos próprios, capacidade produtiva e consciência plena de seu estado de cidadania. Cada vez mais as informações chegam no sentido de influenciar os indivíduos a exigirem os seus direitos e a lutarem pelo seu bem estar. No entanto, na escola os alunos encontram uma realidade diferenciada da exigência do mercado de trabalho, e como profissionais eles têm que dar conta de raciocínios e habilidades que a escola não oportunizou que exercitassem.

A metodologia que tem base no "aprender a aprender" convida os estudantes a buscarem as informações, discutirem sobre ela e a saberem onde podem aplicá-la. A aprendizagem ocorre com o grande objetivo de buscar a transformação. Assim professor e alunos serão parceiros na construção de conhecimentos. A sociedade precisa de sujeitos que possam encontrar soluções para os problemas que vem se apresentando no cotidiano. O exercício desta busca de soluções deve ser feito pela escola, que não pode mais continuar a treinar indivíduos que apenas copiam e decoram o que já foi produzido, sem sequer levantar questionamentos sobre a validade dessas produções.

3.2 UMA PROPOSTA METODOLÓGICA PARA UM ENSINO COM PESQUISA

Iluminado pelo estudo comparativo de paradigmas de ensino feito por CUNHA (1995) tem-se a seguir as características de um ensino que objetiva a reprodução do conhecimento em contraste com o ensino que objetiva a produção do conhecimento.

O ensino que visa a reprodução do conhecimento trabalha com o conhecimento acabado, absoluto, incontestável, sem raízes e sem a possibilidade de ser discutido, valorizando a passividade, a reprodução de textos de livros e idéias do professor. O ensino com pesquisa na busca da produção do conhecimento, apresenta ao aluno os conteúdos como algo relativo, mutável, procurando estudar também as circunstâncias em que os assuntos foram se desenvolvendo no decorrer do tempo e valorizando a capacidade de pesquisar, de agir e sistematizar os temas propostos.

Se o ensino da reprodução trabalha com sínteses de conteúdo já elaboradas a partir de outras fontes, valorizando a precisão, a segurança e o não questionamento, o ensino com pesquisa se contrapõe elaborando situações onde o aluno possa desenvolver a capacidade de sintetizar assuntos levando em conta divergências, críticas, questionamentos e provocando a incerteza. Essa incerteza leva os alunos e os professores a buscarem novas pesquisas e desencadear novas produções.

No ensino reprodutivista, a certeza de se ter resolvido um problema que normalmente apresenta solução única, forma uma consciência onde todos convergem para um mesmo fim, uma mesma verdade.Todos buscam a certeza nas suas ações, os conteúdos são fragmentados e suas partes são estudadas em disciplinas onde todos os tópicos devem ser vistos pelos alunos em tempos pré-determinados. No ensino com pesquisa as discussões provocam a incerteza, a noção de que muitas informações são relativas e estão sujeitas a diversos fatores. Os conteúdos são estudados de maneira interdisciplinar e o mais importante é que o aluno tem tempo para investigar e desenvolver habilidades. O tempo para ver toda a matéria é colocado em segundo plano, uma vez que, através da pesquisa responsável, os assuntos tratados devem ser estudados e aprofundados e não condicionados ao tempo, sendo tratados apressadamente para cumprir os conteúdos fragmentados apresentados nos conteúdos progmáticos.

Enquanto o ensino reprodutivista propõe a pesquisa apenas para cientistas e iniciados que possam dispor de aparelhos para buscar certezas, dificultando a união entre o ensino a pesquisa e a extensão, o ensino com pesquisa entende que qualquer ser humano pode investigar, fazer experiências e aprender sobre o mundo para poder atuar nesse universo promovendo mudanças e integrando-se a realidade em que vive.

No ensino reprodutivista o professor pretende ser o detentor do conhecimento, a principal fonte de conhecimentos que o aluno tem para tirar suas dúvidas. No ensino com pesquisa o professor, ciente de sua necessidade constante de aprender cada vez mais, estimula os questionamentos e promove a autonomia de seus alunos sendo um mediador entre o conhecimento elaborado, o acesso a informação e a produção do conhecimento.

Diante do exposto, surge a proposta que, sem a intenção de apresentar receituários prontos a serem seguidos, especifica alguns procedimentos que poderão inovar o processo pedagógico. Esse processo envolve não somente a escola, mas as bibliotecas, museus, a comunidade como um todo e as experiências vivenciadas na sociedade. Com essa visão, iluminados por DEMO (1995) objetivou-se apresentar algumas sugestões para que a proposta do "aprender a aprender" possa ser desenvolvida na prática pedagógica dos professores de todos os níveis de ensino:

- As aulas expositivas devem tèr o seu tempo reduzido e cada vez mais o aluno deverá ter mais espaço para pesquisar e construir textos próprios.
- O aluno deve aprender trabalhar em equipe. Este trabalho deve ser bem organizado de forma que cada elemento da equipe tenha seu papel dentro do grupo e que este papel seja importante para que mais tarde ele possa se ver como um indivíduo responsável e participante na sociedade.
- As atividades propostas devem oportunizar grande variação de metodologia e buscar no diálogo o caminho para as discussões coletivas.
- Seminários devem ser acompanhados de discussões, reflexões, e envolver os alunos em processos democráticos para que possam realizar o exercício da cidadania.
- Os alunos devem ter acesso a todos os avanços tecnológicos disponíveis no momento em que se vivem e aproveitar estes recursos para fazer produções mais elaboradas.

- O estudante deve ser colocado em contato com o mercado de trabalho promovendo visitas a empresas e seminários com profissionais onde os alunos possam conhecer os objetivos dos empresários e estes as idéias e questionamentos dos alunos.
- A escola deve favorecer o valor da elaboração própria, ouvindo pais, professores e a comunidade em geral, para que as experiências se somem numa direção de busca de elaboração de soluções coletivas para os problemas da época.
- A escola deve incentivar a leitura, a busca de informações, nos mais diversos meios que a tecnologia oferecer, e, acima de tudo ensinar o aluno a trabalhar com estas informações, instigar o questionamento sobre elas, discutir sobre a sua veracidade e produzir algo novo a partir do que pesquisar.
- A escola deve oferecer ao aluno um ambiente onde este possa ser sujeito atuante capaz de inovar, produzir e exercitar a resolução de problemas que encontrará possivelmente em sua vida.

Esses pressupostos elencados e que norteiam a metodologia do ensino com pesquisa, permitem contemplar uma aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral mais eficiente. Nesse processo, professor e aluno, devem pesquisar para produzir conhecimentos significativos. Os alunos ao se tornarem participativos, encontrarão capacidade para inovar para criar e para ter autonomia na busca do conhecimento. E, nesse processo, se tornarão pesquisadores que certamente estarão habilitados para absorver as constantes mudanças pelas quais passa a sociedade.

4 UMA PROPOSTA METODOLÓGICA DE APRENDIZAGEM DOS LOGARITMOS A PARTIR DE CONCEITOS ELEMENTARES DE GEOMETRIA.

Neste capítulo pretende-se, a partir de pressupostos da metodologia do ensino com pesquisa, apresentar uma proposta para a aprendizagem dos logaritmos no Cálculo Diferencial e Integral. Para a elaboração da proposta foi realizada uma pesquisa em autores que apresentam sugestões semelhantes. Por exemplo em Geraldo ÁVILA (1981:124-125) que utiliza uma faixa de hipérbole para chegar ao conceito de logaritmo natural. Outro estudo relevante foi o de LIMA (1991) que propõe a construção do conceito fazendo aproximação de áreas. Entretanto, este referencial não se insere na proposta de num contexto universitário.

Objetiva-se apresentar atividades que podem gerar outras ou serem adaptadas pelo professor de acordo com a realidade que esteja vivenciando. Com as atividades que são sugeridas pretende-se contemplar a proposta de Avila e de Lima em um contexto de ensino com pesquisa, sugerindo uma metodologia de ensino que poderá ser utilizada em cursos universitários, e em especial, no início do curso da disciplina Cálculo Diferencial e Integral.

É importante salientar que o professor pode iniciar o processo a partir de um diagnóstico de sua classe, e pela atividade que julgar ser conveniente para aquela turma. A ordem numérica não significa portanto única seqüência. O ideal é que professores e alunos possam criar outras ordens inclusive inserindo outras atividades que sejam significativas para a sua comunidade.

Vale ressaltar também que as sugestões apresentadas funcionam como receita a ser seguida, mas que foram construídas com intuito de abrir perspectivas para a prática pedagógica do professor.

É importante que a partir de cada atividade os docentes possam analisar a pertinência e a adequação a realidade de cada classe, podendo construir novas atividades. Esse processo de pesquisa contínua redundará numa proposta metodológica significativa e relevante para a produção do conhecimento do aluno.

4.1 ATIVIDADES PROPOSTAS PARA A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LOGARITMO NATURAL

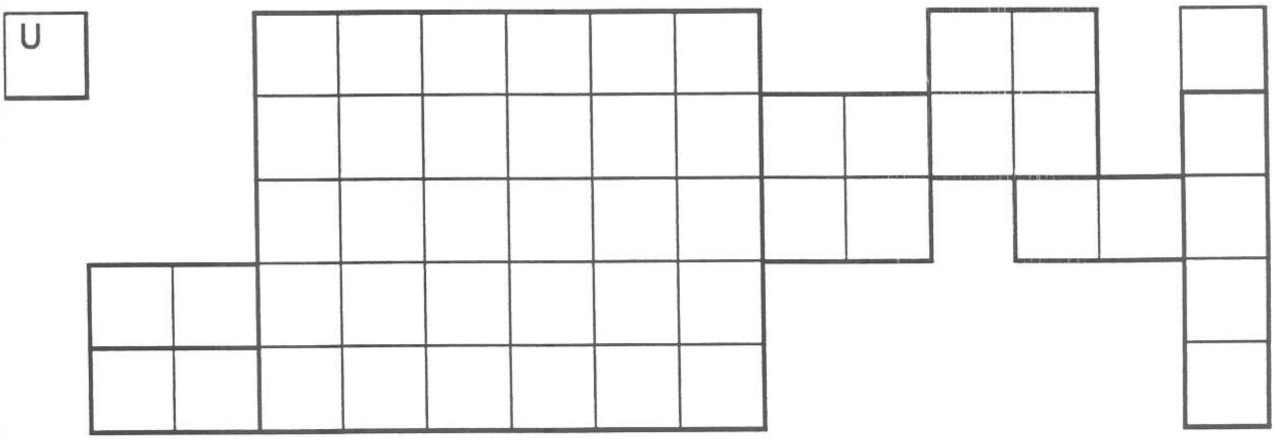
ATIVIDADE 1

Justificativa: O aluno que ingressa nos cursos universitários muitas vezes não tem clara a noção de área. Em alguns casos, recorda algumas fórmulas que ao serem inseridas num contexto real transformam-se em um grande problema para o aluno. Esta atividade pretende resgatar não só a noção de área como também conceitos como grandezas proporcionais, raiz quadrada, números quadrados perfeitos e outros elementos que poderão ser utilizados no ensino dos logaritmos e do Cálculo Diferencial como um todo.

A atividade também estimula a formulação de perguntas que podem trazer à tona dúvidas que o aluno possa ter acumulado na escola secundária. Convida o aluno a pesquisar os conceitos que podem gerar a produção de novas atividades. Um dos pontos mais importantes da atividade é o momento em que o aluno deve produzir problemas. Nesse momento há o exercício da criatividade e da produção do conhecimento.

Calcule a medida da área da figura a seguir, dando a resposta em unidades de área.

FIGURA 23- FIGURA DIVIDIDA EM UNIDADES U DE ÁREA PARA ESTUDO DE RELAÇÕES ENTRE CONCEITOS MATEMÁTICOS: ATIVIDADE 1



- Se a unidade u fosse maior, o número que expressa a área seria maior também? Explique.
- Se ao invés de u tivéssemos como unidade v= $\frac{1}{2}$ u, qual seria a área da figura expressa, na unidade v?

- Desenhe uma três figuras diferentes que tenham a mesma área da figura dada.
- Desmontando todos os quadradinhos da figura e juntando-os novamente é possível construir um retângulo. Qual é o nome especial desse retângulo e que propriedades ele possui?
- Extraindo a raiz quadrada do número que expressa a área da figura do item anterior obtemos o número que expressa o comprimento do lado dessa figura. Explique porque isso acontece.
- Se a figura dada tivesse 15 quadrinhos a mais qual seria o lado da figura obtida? Sempre é possível realizar esse processo independente do número de quadradinhos? Explique.
- Construa em cartolina ou material semelhante quadradinhos de lado 5 cm e elabore duas atividades semelhantes a essa para um colega seu resolver.
- Elabore algumas perguntas sobre os itens mencionados e procure em livros ou outras fontes de pesquisa as respostas para os seus questionamentos.

ATIVIDADE 2

Justificativa: Esta atividade resgata os conceitos de perímetro e área, faz uma proposta de sistematização e também convida o aluno a comparar processos de resolução, provocando o julgamento do melhor caminho a ser seguido e possibilitando o entendimento teórico/prático. A atividade propõe uma discussão sobre processos de resolução onde pode ocorrer um debate e um consenso da classe do processo mais eficiente para a situação apresentada. Também há uma situação de pesquisa, coleta de dados e elaboração de gráficos.

Calcule, na unidade c, o perímetro da figura a seguir e na unidade a, sua área. considere

$$a = c \,.\, c = c^2 \,.$$

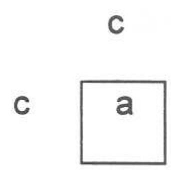
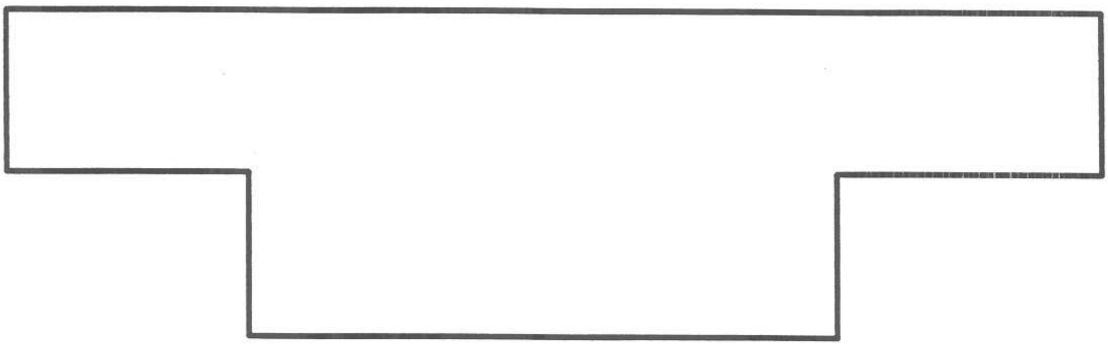


FIGURA 24- FIGURA PARA ESTUDO DE RELAÇÕES ENTRE CONCEITOS MATEMÁTICOS A PARTIR DE UNIDADE ARBITRÁRIA DE ÁREA: ATIVIDADE 2



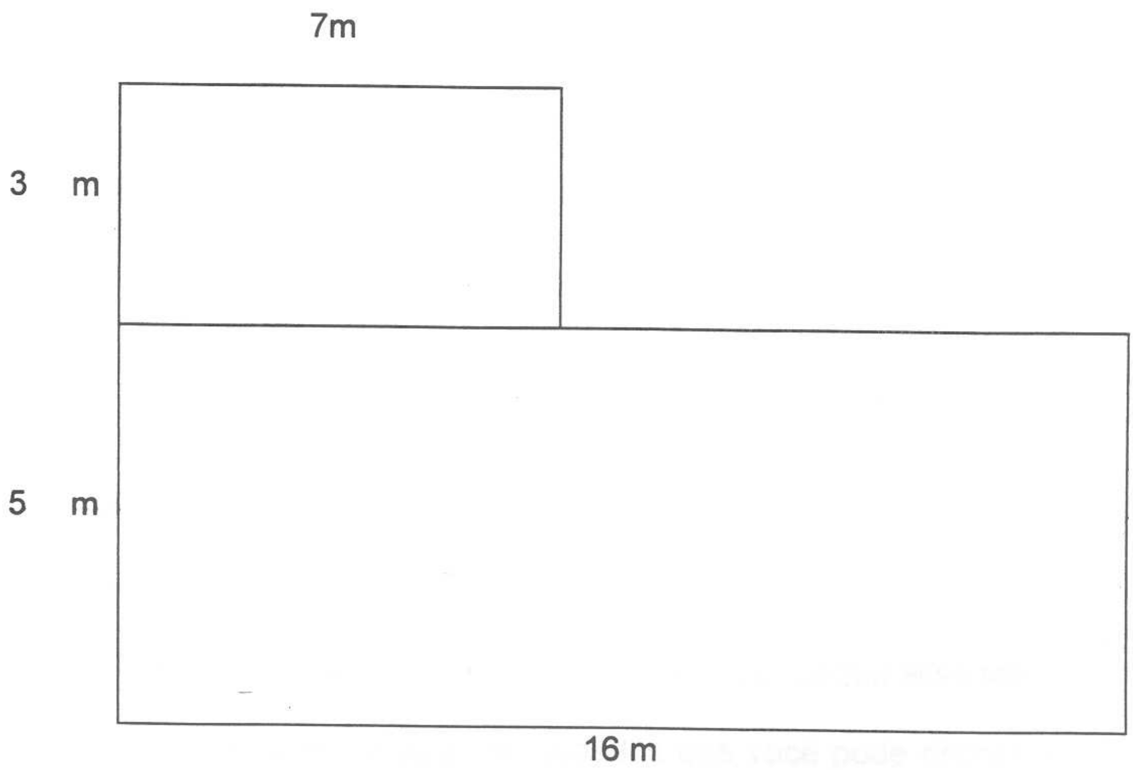
- É possível obter mais figuras de mesmo perímetro e que tenham área diferente? Quantas?
- Descreva o processo que você utilizou para chegar ao resultado.
- Resolva o problema de uma maneira diferente da que você fez. Qual das maneiras é melhor? Por quê?
- Seus colegas têm a mesma opinião? Faça uma pesquisa para saber quantos processos diferentes surgiram na classe e quais as preferências dos alunos . Elabore um gráfico que ilustre as situações.

ATIVIDADE 3

Justificativa: A atividade aproxima os conceitos matemáticos do cotidiano, propõe uma pesquisa de preços e estabelece noções de ordem entre números. Há oportunidade para produção, pesquisa e se o professor puder aproximá-la ainda mais (por exemplo programando uma visita a uma casa e medindo a sala) do cotidiano do aluno, a opção por situações reais tornam a atividade mais significativa.

João quer fazer um revestimento no piso se sua sala cujo formato é o da figura seguir. Quantos metros quadrados de material ele tem que comprar?

FIGURA 25- FORMATO DE UMA SALA: ATIVIDADE 3



- Se as placas para revestimento são quadrados de 50 cm de lado, de quantas placas João precisará?

- Pesquise em lojas, diferentes tipos de materiais e elabore uma tabela contendo os preços de todos. Coloque os elementos da tabela em ordem crescente e escreva a sua opinião sobre o porquê dos preços terem diferença .
- Verifique se todos os preços justificam a qualidade dos produtos. Converse com seus colegas.

ATIVIDADE 4

Justificativa: Essa atividade envolve medidas não padronizadas, comparação entre grandezas, inserindo medidas padronizadas e propondo uma pesquisa sobre unidades utilizadas em todo o mundo e as relações entre elas.

Observe o chão de sua classe e faça o que se pede:

a) Adote uma peça quadrada como unidade padrão e dê uma aproximação da área da classe com esse padrão.

b) Meça o comprimento do lado da peça que você adotou como padrão.

c) Calcule quantas vezes o lado do seu padrão cabe dentro de um metro.

d) Meça a área da sua unidade padrão,

e) Calcule quantas vezes ela cabe em um metro quadrado.

f) Você obteve um número maior no item *c* ou no item *e* ? Explique esse fato.

g) Pesquise o maior número possível de unidades que você pode encontrar no Brasil e em outros países para medir áreas e comprimentos. Estabeleça relações entre essas unidades e procure saber a história dessas unidades; como e para que surgiram.

h) Crie uma unidade para comprimento e uma para área . Dê um nome a ela e estabeleça a relação entre a unidade e as existentes.

ATIVIDADE 5

Justificativa: A atividade propõe comparações entre áreas, o início de uma abstração a partir de figuras geométricas, construção de fórmulas e análise de suas limitações. Generalizações e restrições que são elementos muito importantes para o ensino de tópicos do Cálculo.

- É possível construir um polígono onde o número que expressa o perímetro seja maior que o número que expressa a área? Se for, desenhe esse polígono.
- É possível construir um polígono onde o número que onde o número que expressa a área seja o dobro do número que expressa o perímetro? Se for desenhe esse polígono.
- Faça uma pesquisa sobre os polígonos em que existe uma relação para o cálculo da área e pesquise métodos para determinar a área de polígonos cuja fórmula da área não seja conhecida. Verifique se os métodos são gerais ou são aplicáveis apenas a algumas situações.

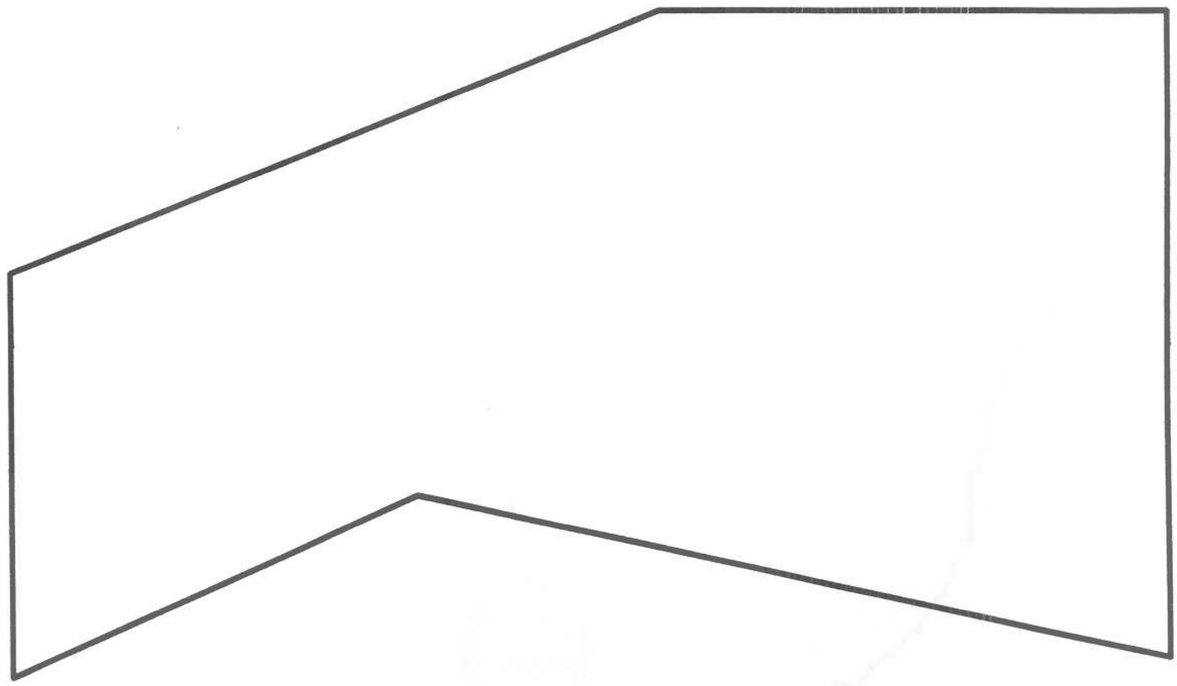
ATIVIDADE 6

Justificativa: Essa atividade propõe o cálculo de áreas de figuras poligonais a partir de triângulos. Pode ser adaptada para situações mais próximas da realidade do aluno. Permite que cada um faça o exercício da sua maneira e dá a autonomia para qualquer cálculo de área de figuras poligonais .

Dada a expressão da área de um triângulo

A= $\sqrt{p\,(p-a).\,(p-b).(p-c)}$, onde p é o semiperímetro do triângulo e a, b, c seus lados, calcule a área do terreno a seguir dividindo-o somente em triângulos. Use uma régua para medir os lados dos triângulos. (você pode usar a calculadora para extrair as raízes quadradas)

FIGURA 26- FORMATO DE UM TERRENO: ATIVIDADE 6

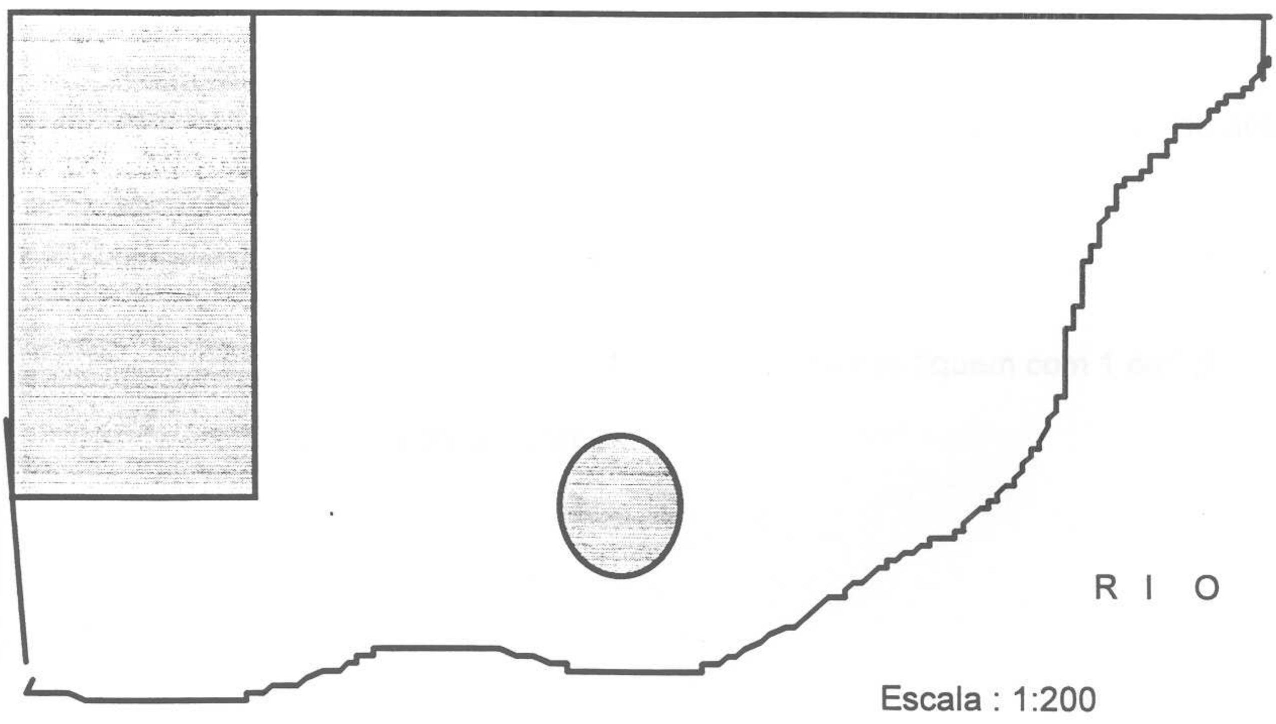


ATIVIDADE 7

Justificativa: Esta atividade mostra a limitação das fórmulas para o cálculo de áreas de polígonos e círculos quando se tem figuras diferentes com partes arredondadas. Permite uma aproximação da realidade do aluno e faz com que esse possa sentir as dificuldades que os matemáticos da antigüidade sentiram ao se deparar com cálculo de áreas de figuras com partes arredondadas.

Na propriedade a seguir, deseja-se plantar um tipo especial de capim na área livre. Quantos metros quadrados de grama aproximadamente, será necessário comprar? Se cada metro quadrado de capim custa R$ 2,50, quanto será gasto com a plantação? Faça uma maquete para essa situação e pesquise os preços de grama para uma análise comparativa. Trabalha também o conceito de escala (Você pode fazer a aproximação utilizando a fórmula das atividades anteriores. Use a régua).

FIGURA 27- TERRENO COM FORMATO NÃO-POLIGONAL À MARGEM DE UM RIO



ATIVIDADE 8

Justificativa: Essa atividade envolve o raciocínio do aproveitamento do espaço a partir de condições dadas. Permite fazer um diagnóstico se o aluno domina o conceito de polígono e se ele sabe estabelecer diferenças entre polígonos e figuras como o círculo. Promove a pesquisa, a produção de figuras e estabelece noções básicas de infinito.

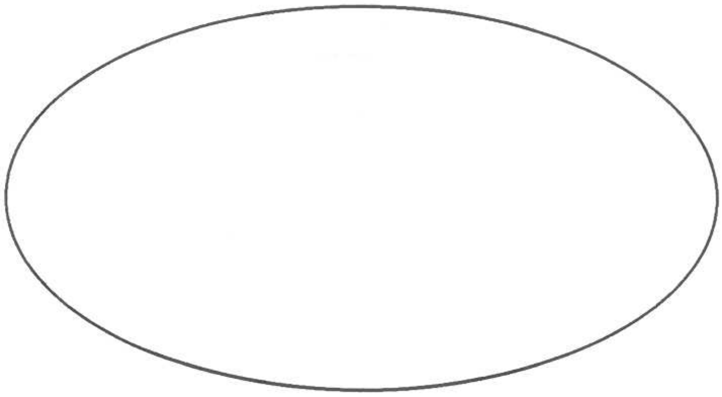
- Que polígonos você conhece?
- Dos polígonos que você conhece, desenhe um que tenha perímetro 16 cm e que a área seja a maior que você puder obter.
- Faça uma pesquisa em sua classe e verifique se há algum polígono que não está na sua lista.
- Quantos tipos de polígonos diferentes existem?

ATIVIDADE 9

Justificativa: A atividade propõe estimativas e lança bases para o cálculo de áreas por integração.

Dada a figura a seguir, quadriculado onde os quadrinhos fiquem com 1 cm² de área e faça uma estimativa da área da figura.

FIGURA 28- FIGURA NÃO-POLIGONAL



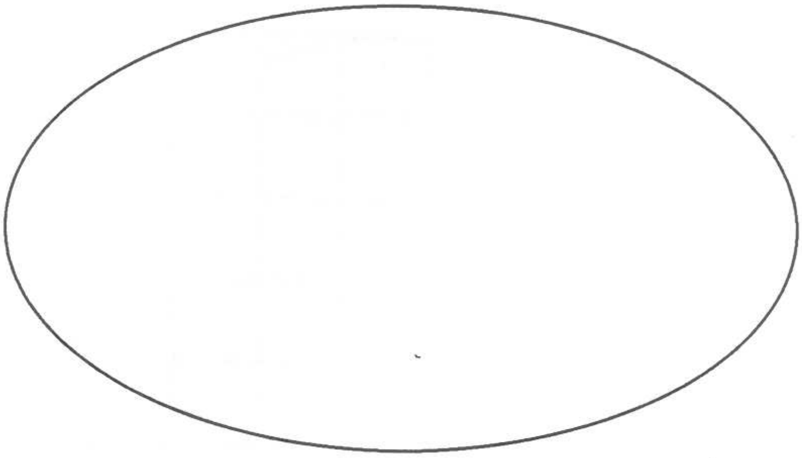
- Desenhe no interior da figura, triângulos de área 1 cm² e calcule a área .
- Onde você acredita que obteve uma aproximação melhor da área? Por quê?
- Diminuindo o tamanho dos quadrados você acredita que a aproximação da área melhora ou piora? Explique.
- Você acredita que diminuindo cada vez mais os quadrados você consegue chegar exatamente à área da figura?

ATIVIDADE 10

Justificativa: Propõe o cálculo de áreas de figuras curvas por aproximação e algumas generalizações.

Na figura abaixo faça um quadriculado onde os quadrados tenham 0,5 cm de lado e aproxime a área da figura. Faça isso com quadrados menores.

FIGURA 29- FIGURA NÃO-POLIGONAL



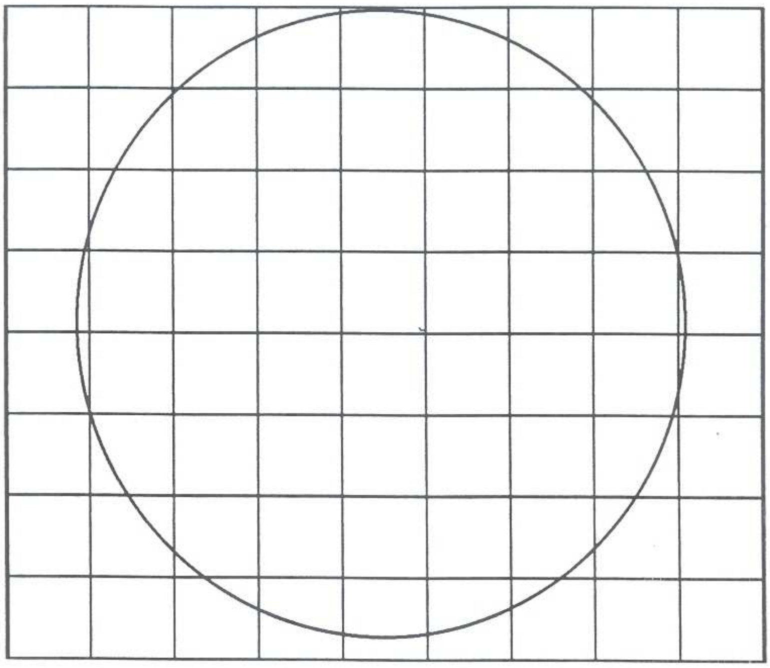
- Diminuindo o tamanho dos quadrados você acredita que a aproximação da área melhora ou piora? Explique.
- Você acredita que diminuindo cada vez mais os quadrados você consegue chegar exatamente à área da figura?

ATIVIDADE 11

Justificativa: Esta atividade propõe um novo método para o cálculo de áreas e permite que se compare qual é o método mais eficaz. Permite que o aluno pesquise e produza um outro método. Trabalha com raciocínios que alguns autores de Cálculo (MUNEN; FOULIS, 1982) usam ao introduzir o tópico integral dupla.

Some os quadrados que estão integralmente dentro da figura. Some os quadrados que estão apenas parcialmente na figura e faça a média aritmética das duas somas obtidas. Compare o valor obtido com a área do círculo obtida pela expressão A=p.r².

FIGURA 30- CÍRCULO SOBREPOSTO A UM RETÂNGULO DIVIDIDO EM UNIDADES DE ÁREA COM A FORMA DE UM QUADRADO



- Por que, fazendo a média aritmética você obteve uma aproximação da área da figura? Esse método é melhor que os já estudados? Explique.
- Crie um método para calcular a área e analise se ele funciona.

ATIVIDADE 12

Justificativa: Esta atividade permite relações entre as perdas ao se calcular a área com quadrados maiores e menores. Proporciona a pesquisa e a produção de problemas, e alem de contribuir para o desenvolvimento da criatividade.

Faça a experiência do problema anterior com quadrados menores e tente obter uma aproximação melhor do valor obtido na fórmula.

Das tentativas que você fez qual deu um valor mais próximo do valor obtido na fórmula A= πr^2?

Você conhece algum livro que traz esse método? Qual?

Produza um método parecido com esse que seja feito com triângulos equiláteros.

ATIVIDADE 13

Justificativa: Esta atividade, introduz a idéia de função com uma situação real. Esta atividade pode ser ampliada pelo professor e adaptada a outras situações. O aluno deve criar uma fórmula ou seja, fazer uma generalização e ver se ela funciona. Também faz uma pesquisa e uma crítica social do conteúdo além de produzir um problema.

Pedro é pedreiro e ganha R$ 80,00 por metro quadrado que constrói.

Observe a tabela:

FIGURA 31- QUADRO COMPARATIVO: RELAÇÕES ENTRE VARIÁVEIS Y E X NA ATIVIDADE 13

Metros quadrados construídos	Dinheiro a ser recebido
1	80
2	160
3	240
4	320
X	Y

Responda:

- Existe uma coluna no exercício que depende ou está em função da outra. Qual é?
- Que formula poderia expressar a quantidade que Pedro vai ganhar para qualquer valor da tabela? Faça tentativas e verifique se elas satisfazem os valores dados.
- Faça uma pesquisa de preços cobrados por pedreiros, carpinteiros e pintores. Os preços são diferentes por quê?
- Crie um problema onde o raciocínio para resolver seja o mesmo deste ou seja, criar uma função a partir de uma situação problema.

ATIVIDADE 14

Justificativa: Abre opções para que o aluno faça diferentes tipos de gráficos . Depois proporciona a pesquisa para comparar com os tipos de gráficos já utilizados. Permite criar situações a partir de gráficos o que desenvolve habilidades de escrita, articulação de raciocínios e outras situações matemáticas que o professor pode proporcionar.

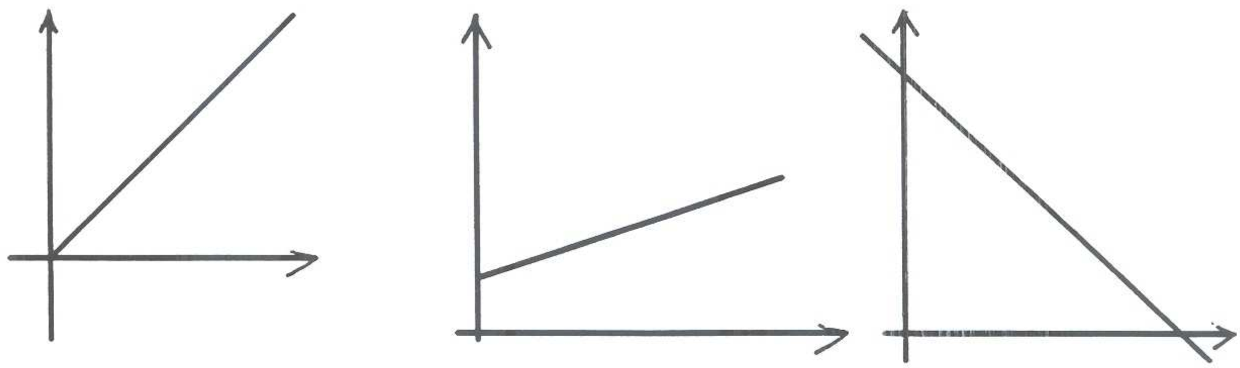
- Depois de ter encontrado a expressão do exercício anterior, faça um gráfico que mostre a situação.
- Pesquise em livros ou em outra fonte qualquer, outras funções e crie uma situações problema onde estas possam ser inseridas.

ATIVIDADE 15

Justificativa: Esta atividade estabelece relações entre funções e grandezas, e desenvolve habilidade com gráficos de funções. Possibilita a criação e a associação de raciocínios abstratos com imagens gráficas comumente utilizadas no cálculo.

Ás vezes Pedro recebe por hora trabalhada. Se trabalhar uma hora recebe certa quantia, se trabalhar duas horas a quantia dobra se trabalhar três horas o número é triplicado. Dos gráficos a seguir qual ilustra melhor a situação de Pedro?

FIGURA 32- GRÁFICOS DE FUNÇÕES



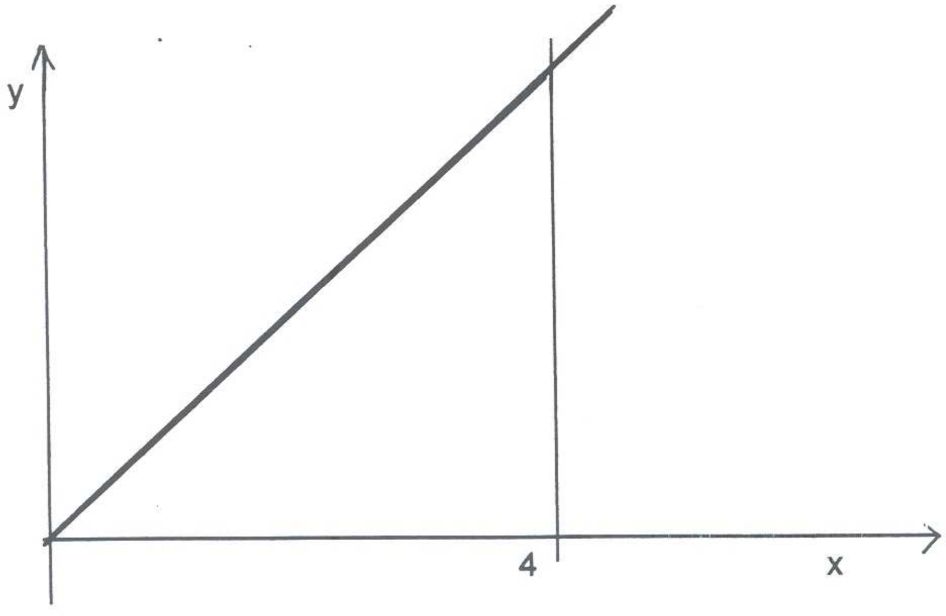
- Explique o porquê da sua escolha e também porque os outros gráficos não servem para representar a situação.
- Crie um outro gráfico que descreva a situação.

ATIVIDADE 16

Justificativa: Permite introduzir o conceito de área por decomposição em trapézios que será utilizado no conceito de logaritmo natural. Permite estabelecer uma verificação com a conhecida expressão da área do triângulo.

Calcule a área da região entre o eixo x e a curva dada pelo gráfico de y = x no intervalo [0,4]. Decomponha o triângulo ABC em trapézios e triângulos menores, calcule a soma das áreas dessas figuras e compare com a área do triângulo obtida na fórmula A=b.h/2. Calcule essa área por outro método

FIGURA 33- GRÁFICO DE Y = EM $X \in [0,4]$



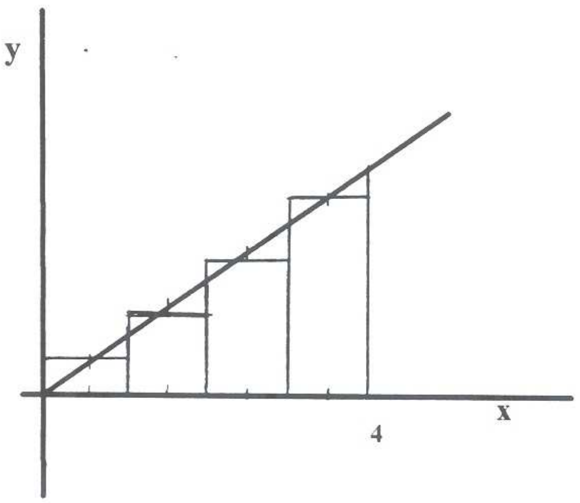
– Calcule a área proposta por outro método .

ATIVIDADE 17

Justificativa: Estabelece a área por divisão em retângulos e instiga ao raciocínio mais utilizado para explicar as áreas por integração.

Calcule a área abaixo da curva y =x em [0,4] , e acima do eixo x, fazendo a soma das áreas dos retângulos. Aumente de uma unidade o intervalo dado e verifique a alteração produzida na área. Verifique se há alguma lei que rege este acréscimo.

FIGURA 34- GRÁFICO DE Y = X EM $X \in [0,4]$



ATIVIDADE 18

Justificativa: A atividade compara o resultado obtido na expressão da área A=(b.h)/2 com as aproximações feitas utilizando a soma das áreas dos retângulos.

O objetivo é o aluno comprovar a área calculada de modo intuitivo, com o resultado obtido em uma expressão que já seja do seu domínio.

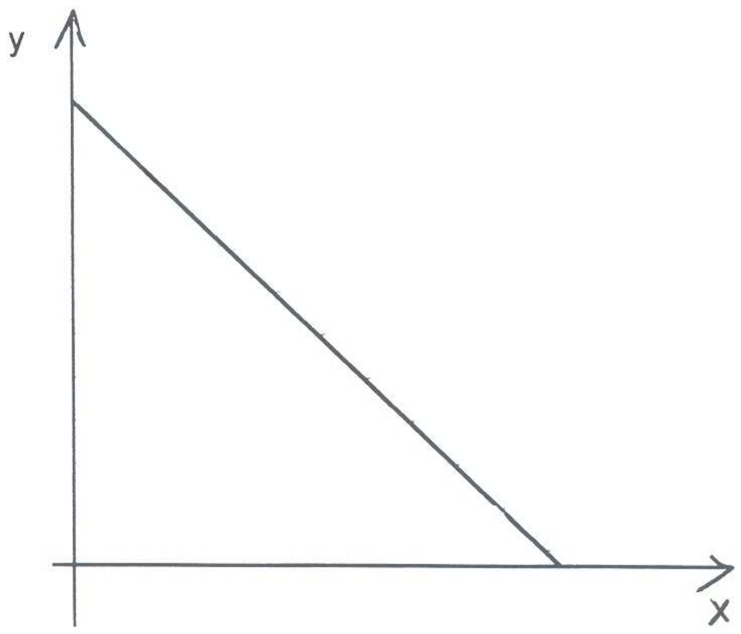
No problema anterior compare a área obtida através da somatória de retângulos e a área do triângulo obtida pelo semi produto da base pela altura.

ATIVIDADE 19

Justificativa: A atividade compara o resultado obtido na expressão da área A=(b.h)/2 com as aproximações feitas. O objetivo é o aluno verificar que quanto menor a base dos retângulos utilizados, menor é a margem de erro.

Calcule a área entre o eixo x e o gráfico de y = -x + 6 ,em [0,5], dividindo o intervalo dado em retângulos de bases cada vez menores.

FIGURA 35- GRÁFICO DE $Y = -X + 6$ EM $X \in [0,4]$



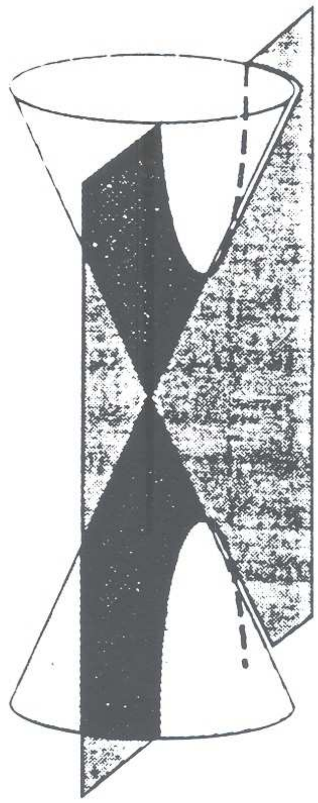
Compare os resultados obtidos nas aproximações com o resultado obtido na fórmula da área do triângulo formado entre o gráfico da função e os eixos coordenados.

ATIVIDADE 20

Justificativa: Esta atividade introduz o conteúdo de cônicas através de cortes em um cone.

Coloque dois cones na posição exemplificada na figura a seguir:

FIGURA 36- CONES INTERCEPTADOS POR PLANO



Imagine que um plano α interceptasse os cones como na figura. A figura plana obtida na intersecção entre o plano e os dois cones é denominada hipérbole.

- Faça um esboço de uma hipérbole .
- Pesquise em livros de sobre o Matemático Apolônio e escreva tudo o que julgar relevante.

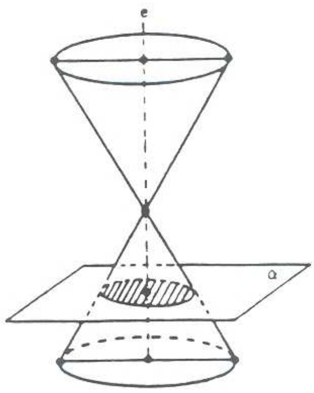
ATIVIDADE 21

Justificativa : Esta atividade permite reconhecer as cônicas a partir da pesquisa .

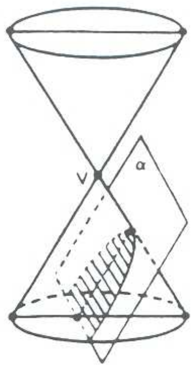
Faça um estudo sobre cônicas. Com massa de modelar ou outro material construa cones representando os cortes que dão origem às cônicas.

Observe os cones das figuras extraídas da obra Cônicas e Quádricas (VENTURI, 1994) que são interceptados por planos e, descubra através de pesquisa os nomes das figuras planas obtidas na intersecção entre os cones e os planos.

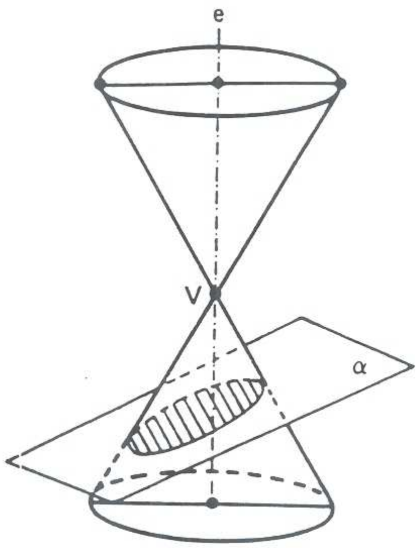
FIGURA 37- CÔNICAS A EXTRAÍDAS DE INTERSEÇÕES ENTRE CONES E PLANOS: VENTURI



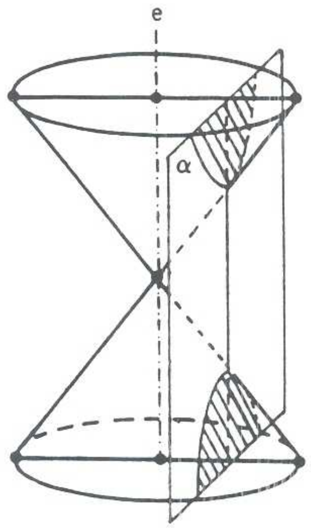
quando o plano α for perpendicular ao eixo (e) do cone.



quando o plano α for paralelo a uma geratriz do cone.



quando o plano α for oblíquo ao eixo e não paralelo a uma geratriz. O plano corta apenas uma das folhas do cone.



quando o plano α for paralelo ao eixo do cone.

ATIVIDADE 22

Justificativa: Proporcionar o envolvimento do aluno com o conteúdo hipérboles através de aplicações .

Faça uma pesquisa sobre as aplicações da hipérbole localizando situações que possam ser encontrados no uso cotidiano.

ATIVIDADE 23

Justificativa: O exercício pretende construir o conceito de hipérbole, por meio de conceitos que o aluno já tem domínio.

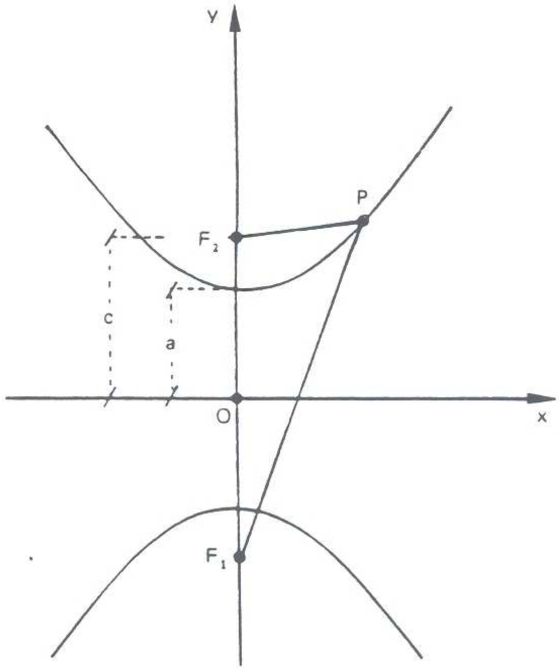
Na figura a seguir, faça o que se pede:

a) Marque um ponto e denomine-o A.

b) Meça a distância de A até F e até F'

c) Faça a diferença das duas distâncias medidas e considere o valor em módulo.

FIGURA 38- GRÁFICO DE HIPÉRBOLE



d) Marque outros pontos B,C, D.... quaisquer sobre a hipérbole ,meça a distância dos pontos a F e F' e considere as diferenças em módulo.

a) Faça uma tabela com todos os pontos e as diferenças obtidas para cada ponto.
b) O que você observou na tabela ?
c) A partir do que você observou na tabela elabore um conceito para a hipérbole.
d) Pesquise em livros ou em outras fontes sobre o conceito de hipérbole, compare com o conceito que você elaborou. Existe algum conceito diferente para a hipérbole faça uma entrevista com professores que utilizam esse referencial nas suas atividades profissionais.

ATIVIDADE 24

Justificativa: Esta atividade permite construir, estabelecer e estudar peculiaridades do gráfico da função y=1/x

Complete os valores de y a partir dos valores de x que estão na tabela. Atribua mais valores e calcule.

FIGURA 39- TABELA PARA RELACIONAR X E $Y = \frac{1}{X}$, $(X \neq 0)$

X	Y= 1 / X
-2	
-1	
0	
1	
2	

- Faça a experiência com vinte pontos sendo dez positivos e dez negativos.
- Você obteve o esboço de uma cônica . Que cônica é esta?

ATIVIDADE 25

Justificativa: Analisar o gráfico obtido na atividade anterior. Revisar o conceito de função, restrições e valores que ela pode ou não assumir.

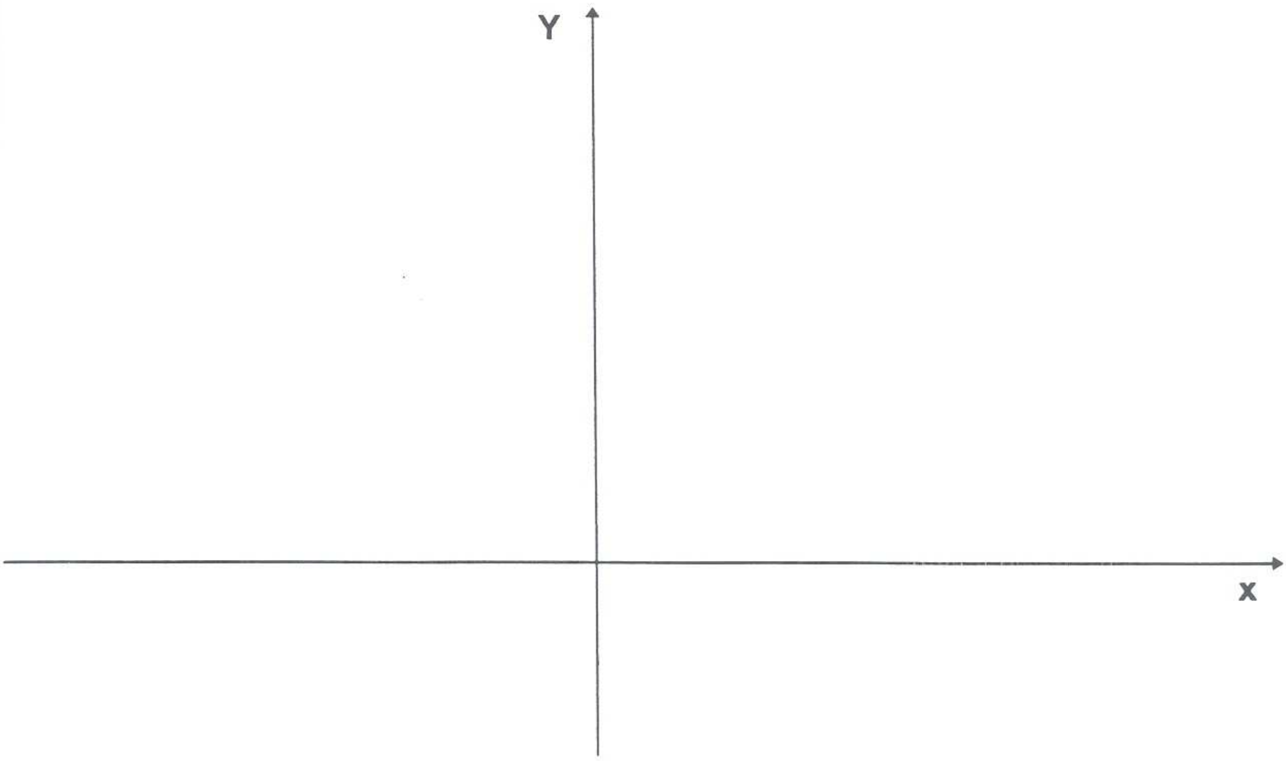
- Na atividade anterior o que você pode afirmar sobre o valor de y quando x aumenta ou diminui ?
- Como fica o valor de y quando x é zero. Pesquise.
- Que restrição você daria para essa função ? Por quê?
- O gráfico da função y=(1/x) pode estar no 2° ou no 4° quadrantes? Explique.
- Que questionamento você pode fazer sobre a função estudada?

ATIVIDADE 26

Justificativa: Esta atividade se destina a estabelecer as semelhanças e diferenças entre as funções propostas e a função y=1/x .

Dadas as funções y=(2/x) , y=(3/x) e (y=1/2x), construa tabelas de valores para y correspondentes a valores de x. (Você pode usar calculadora e papel milimetrado).

FIGURA 40- PLANO CARTESIANO



- Que curvas você obteve no gráfico?
- Como fica o valor de y quando x aumenta ou diminui?
- Como fica o valor de y quando x é zero?

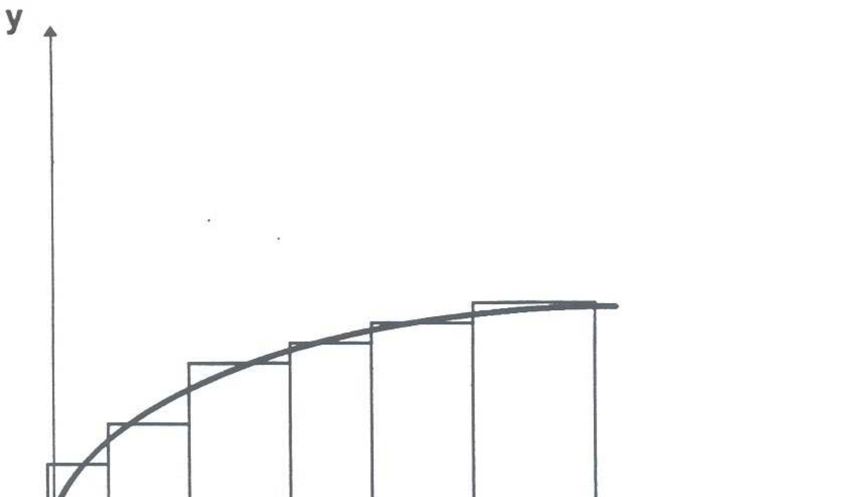
- Que restrição você daria para essas funções?
- O gráfico, de acordo com o valor de x, pode estar no 2° ou no 4° quadrantes? Explique.
- Analise o caminho trilhado e apresente os comentários, por escrito, que complementem o que já foi relacionado sobre a função estudada.

ATIVIDADE 27

Justificativa: Determinar a área de figuras com partes não-poligonais a partir da somatória de áreas de retângulos.

Dado gráfico a seguir, calcule a área da região entre a curva e o eixo x no intervalo dado, fazendo a soma das áreas dos retângulos.

FIGURA 41- FUNÇÃO EXPRESSA POR GRÁFICO NÃO-POLIGONAL



ATIVIDADE 28

Justificativa: Comparar a aproximação com retângulos e a aproximação com trapézios.

- Resolva o mesmo problema utilizando ao invés de retângulos, trapézios.
- Resolva o problema aproximando a área por triângulos .
- Faça uma média aritmética dos valores obtidos nos três métodos e verifique em qual método você obteve um valor mais próximo da média?

ATIVIDADE 29

Justificativa: Esta atividade tem como objetivo principal iniciar a construção do conceito de logaritmo natural. Além disso, promove, por meio da pesquisa as relações entre a Matemática e a Física.

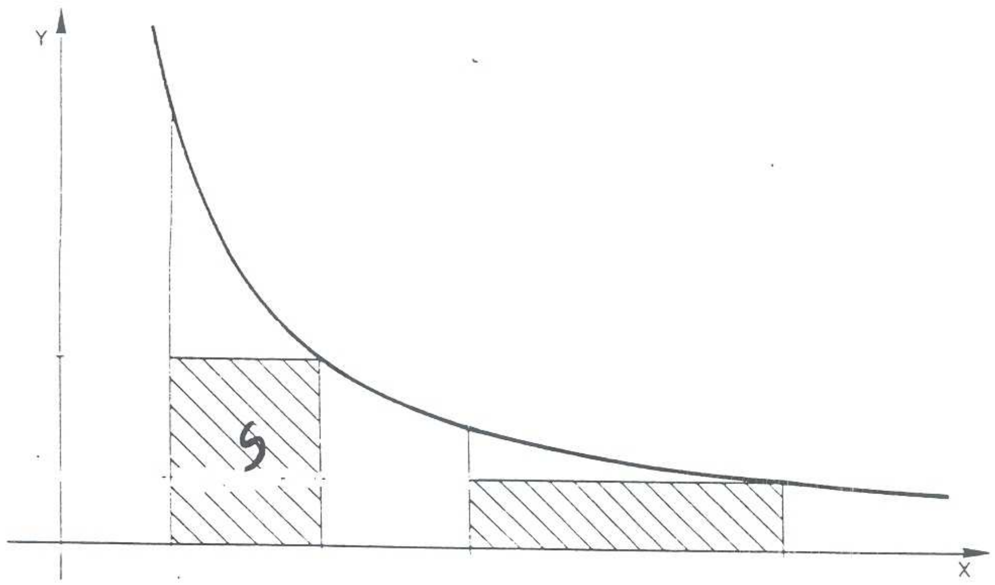
Calcule a área do ramo de hipérbole a seguir, no intervalo [1,2]. Faça aproximações por retângulos e por trapézios. Pesquise em materiais referentes à disciplina Física aplicações da hipérbole em fenômenos térmicos.

ATIVIDADE 30

Justificativa: Esta atividade permite investigar sobre a propriedade das áreas sob uma hipérbole.

Dada a representação do ramo de hipérbole, calcule as áreas marcadas por aproximações

FIGURA 42- GRÁFICO DE PARTE DE UMA HIPÉRBOLE COM ÁREAS DEMARCADAS ENTRE O GRÁFICO E O EIXO X.



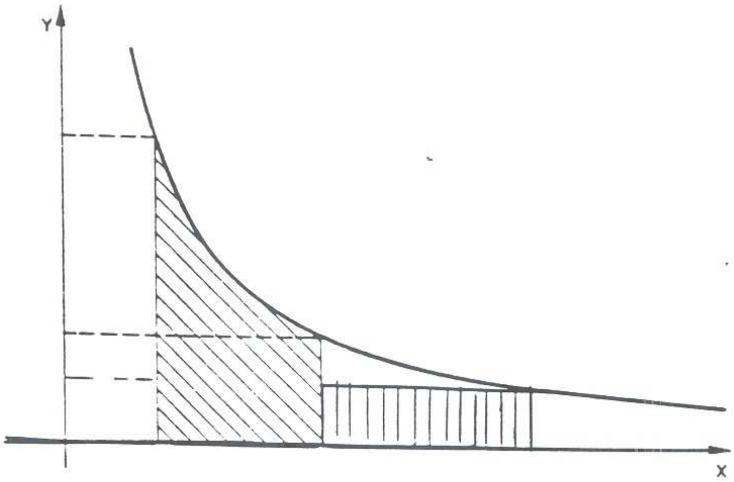
ATIVIDADE 31

Justificativa: Nesta atividade o aluno pode investigar, fazer questionamentos e tirar conclusões a respeito da propriedade da hipérbole.

Faça experiências construindo retângulos sob o ramo de hipérbole com o referencial do retângulo dado cuja área é S.

- As áreas dos retângulos sempre terão o valor S? Faça as restrições se existirem.
- Elabore um enunciado para a propriedade das áreas em uma hipérbole e depois compare com os enunciados já elaborados dos livros.

FIGURA 43- GRÁFICO DE PARTE DE UMA HIPÉRBOLE COM ÁREAS DEMARCADAS ENTRE O GRÁFICO E O EIXO X.

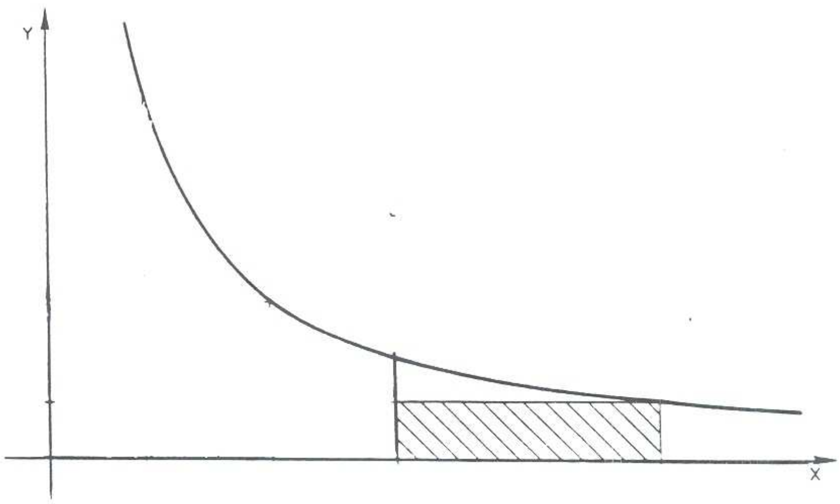


ATIVIDADE 32

Justificativa: Neste exercício, através de equivalência de áreas, o aluno pode aprender mais sobre a propriedade da hiperbólica

Dado o ramo de hipérbole a seguir, determine uma área equivalente à área dada .

FIGURA 44- GRÁFICO DE PARTE DE UMA HIPÉRBOLE COM ÁREA DEMARCADA ENTRE O GRÁFICO E O EIXO X



ATIVIDADE 33

Justificativa: Esta atividade tem como objetivo principal criar um momento de abstração partindo de conceitos já elaborados.

- Elabore uma explicação algébrica para a propriedade das áreas com um trecho do gráfico de y=1/x. Faça experiências numéricas e depois generalize os valores.
- Pesquise materiais onde você pode encontrar uma demonstração da propriedade das áreas em uma faixa de hipérbole.

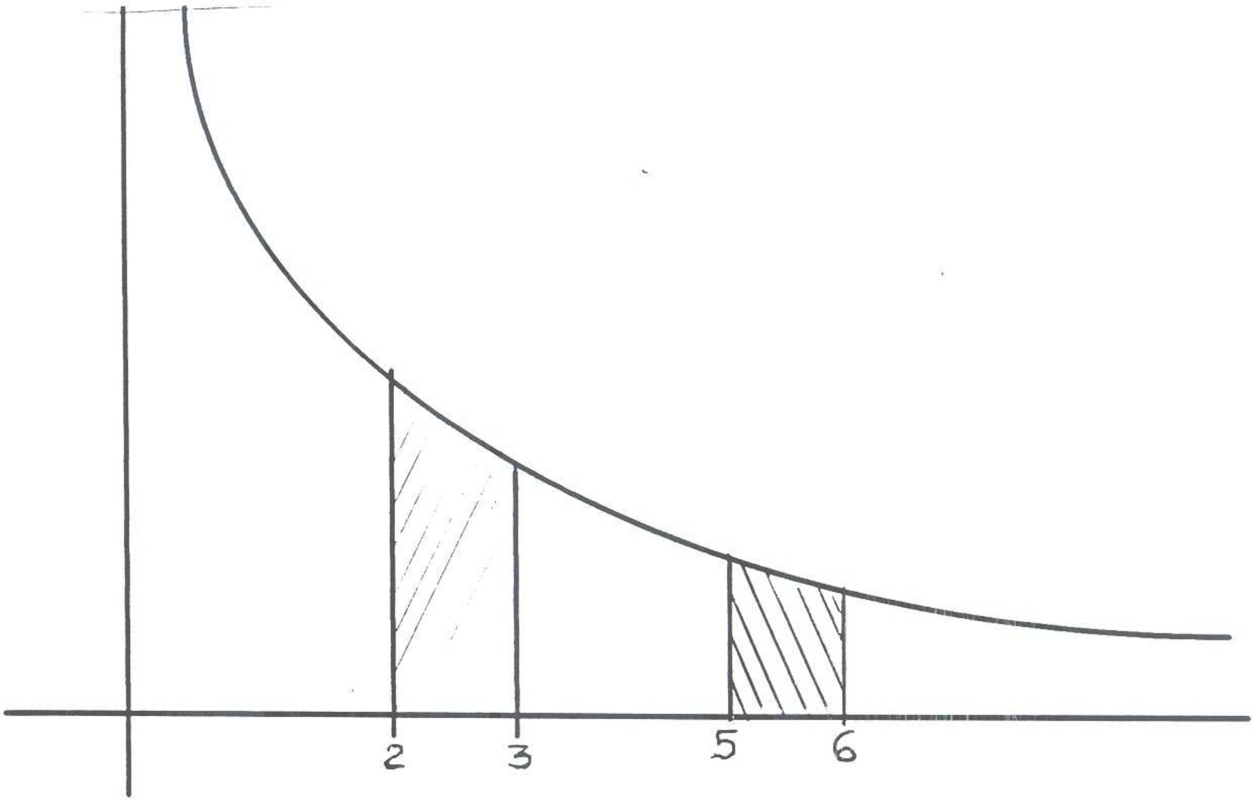
ATIVIDADE 34

Justificativa : Esta atividade, além de colocar o aluno em contato com os recursos que uma calculadora científica pode oferecer, utiliza esta moderna ferramenta para preparar a elaboração do conceito de logaritmo natural.

- Nas calculadoras científicas você encontra a tecla ln . No gráfico a seguir, da função y=1/x (ramo de hipérbole) calcule o valor da área da figura por aproximações e depois compare com o valor obtido na calculadora correspondente à diferença ln3-ln2.

- Faça uma pesquisa sobre a relação que existe entre logaritmos naturais (muitas vezes denominados neperianos) e as áreas obtidas sob faixas de hipérboles. Procure saber em que momento da história se tem notícia de que essa questão começou a ser investigada e quais os matemáticos envolvidos nesse processo.

FIGURA 45- GRÁFICO DE PARTE DE UMA HIPÉRBOLE COM ÁREAS DEMARCADAS ENTRE O GRÁFICO E O EIXO X.



ATIVIDADE 35

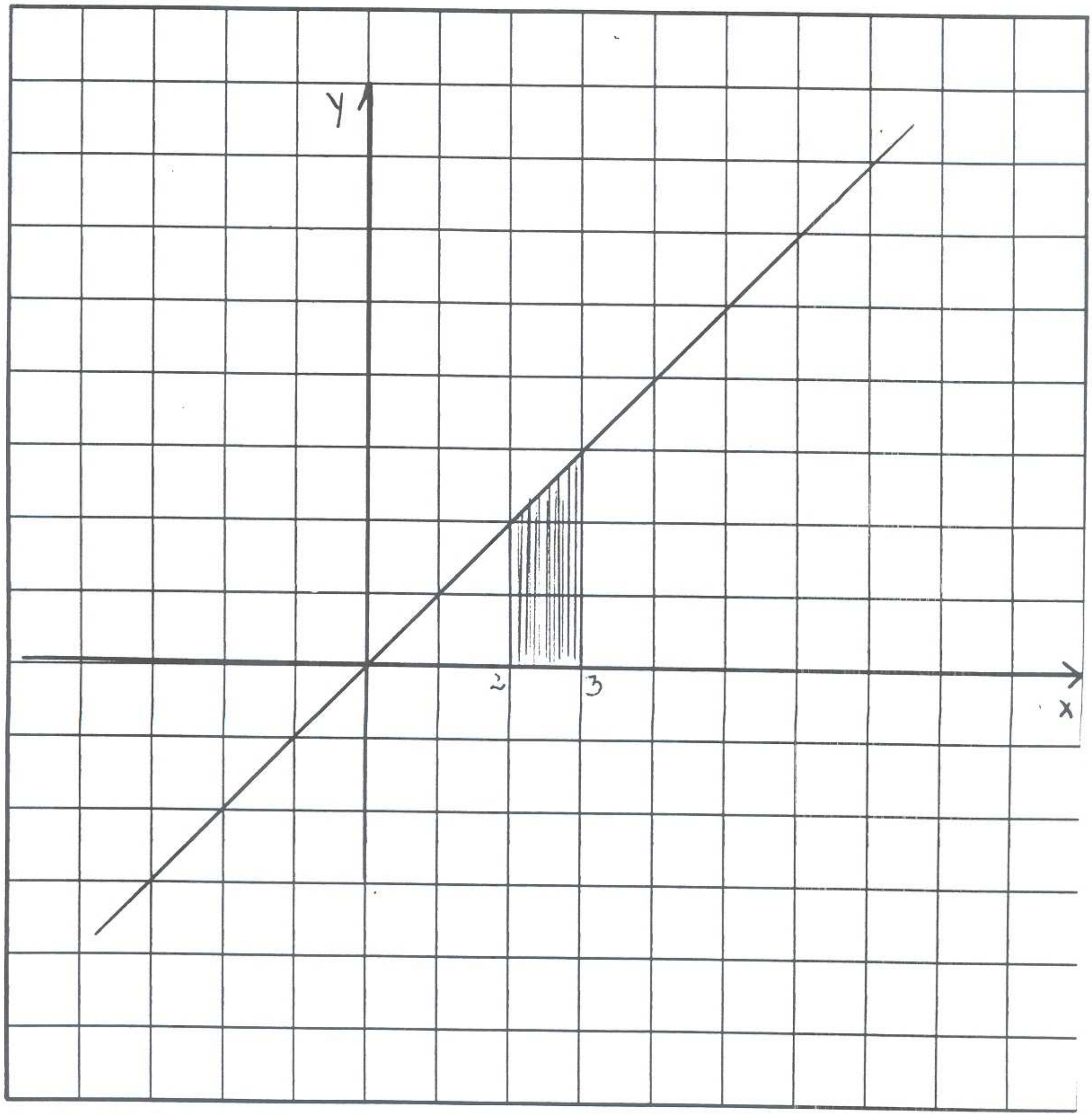
Justificativa: Fazer experiências com calculadoras para verificar se o método da diferença entre valores da tecla ln funciona para qualquer gráfico.

– No gráfico a seguir da função y=x , calcule a área da parte hachurada e depois compare com o valor obtido na calculadora ln3-ln2.

– Calcule a área da parte hachurada por, no mínimo', três métodos diferentes.

– Faça uma proposta de um novo método para calcular a área. Pesquise se este processo já não existe e explique as vantagens e desvantagens de utilizá-lo.

FIGURA 46- PORÇÃO DO GRÁFICO DE $Y = X$ COM ÁREA DEMARCADA ENTRE O GRÁFICO E O EIXO X



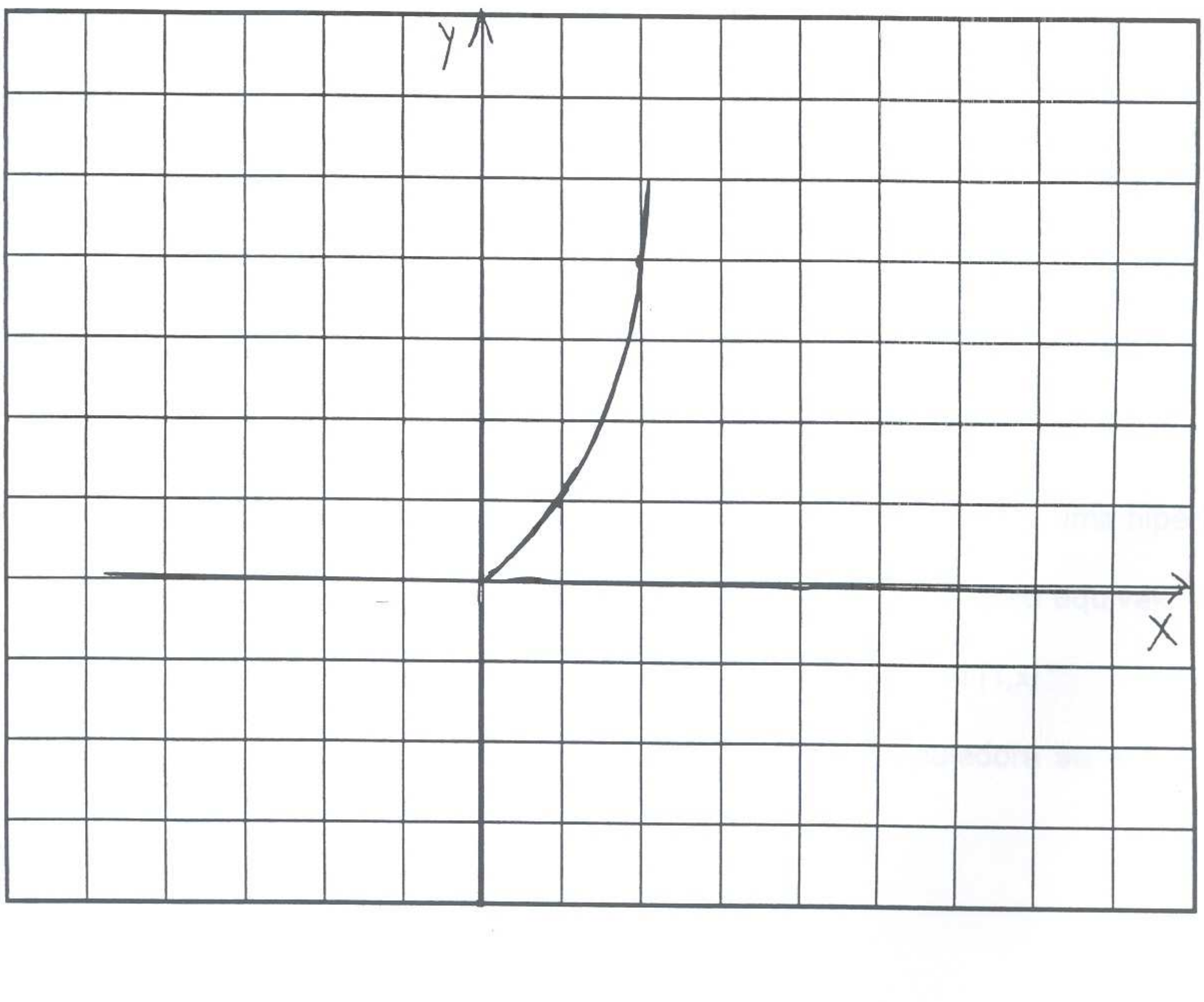
ATIVIDADE 36

Justificativa: Explorar mais a questão das diferenças na tecla ln da calculadora com funções cujos gráficos não sejam uma reta. Explorar a abstração pois o aluno deve fazer o gráfico e limitar a área sem ter o esboço do gráfico pronto.

Faça o gráfico da função $y=x^2$ e marque a área entre o gráfico de $y=x^2$ e o eixo x no intervalo [2,3] .

- Explique como você procedeu para construir o gráfico.
- Calcule a área marcada.
- Compare com o resultado de ln3- ln2 obtido na calculadora e tire suas conclusões.

FIGURA 47- PORÇÃO DO GRÁFICO DE $Y = X^2$ COM ÁREA DEMARCADA ENTRE O GRÁFICO E O EIXO X.



ATIVIDADE 37

Justificativa: Sistematizar as informações pesquisadas com relação à hipérbole e proporcionar possíveis questionamentos.

- Faça uma síntese por escrito do que você já conhece sobre a hipérbole. Equações, conceito, história etc...
- Elabore três perguntas sobre as relações entre a hipérbole e os logaritmos naturais.
- A partir das suas perguntas e dos questionamentos de seus colegas, seu professor irá propor um seminário para discutir todos os questionamentos e tirar as possíveis conclusões.

ATIVIDADE 38

Justificativa: Esta atividade introduz o conceito de logaritmo natural a partir de faixa de hipérbole e remete a uma reflexão sobre conceitos e propriedades estudadas na escola secundária

Considere a seguinte afirmação "Seja a função $y=1/x$ cujo gráfico é uma hipérbole . Se x é um número real positivo então o logaritmo natural de x (lnx) equivale à área compreendida entre o ramo de hipérbole e o eixo x no intervalo [1,x] "

- Verifique através de experiências numéricas com a calculadora se a afirmação dada é correta.

- Pesquise sobre o que acontece quando x está no intervalo [01] e faça as restrições que achar conveniente.
- Faça experiências numéricas que envolvam o conceito de logaritmo natural extraído a partir da hipérbole e dos conceitos e propriedades de logaritmos que você já tenha conhecimento da escola média.
- Pesquise uma maneira de mostrar que o conceito de logaritmo natural enunciado desta maneira tem validade.

ATIVIDADE 39

Justificativa: Mostrar propriedades do logaritmo natural utilizando áreas.

Considere a função f: $R^+ \rightarrow R$, definida por $f(x,y) = \ln x$.

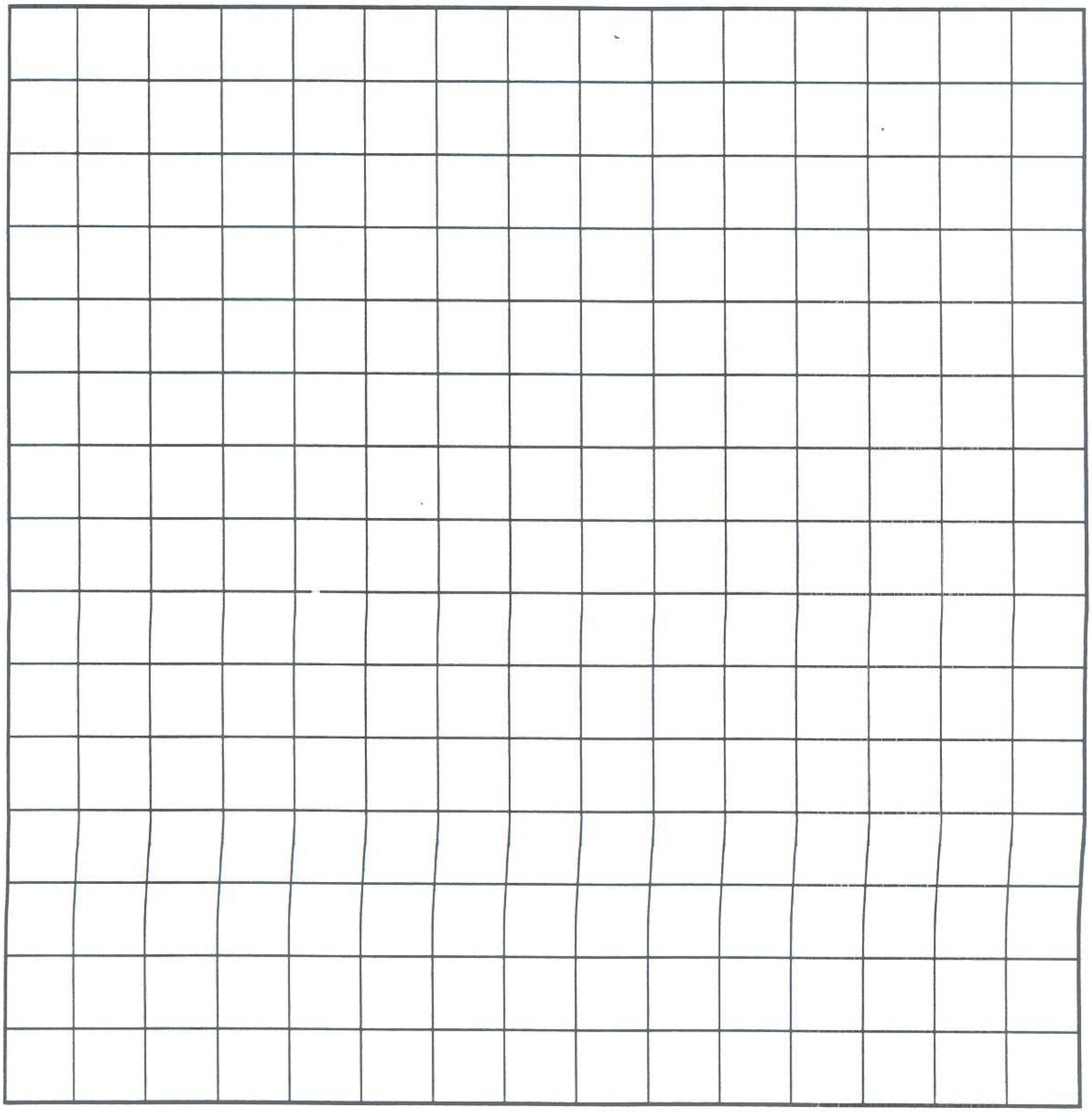
- Mostre através de áreas que $\ln(a.b) = \ln a + \ln b$, sendo a e b reais positivos.
- Explique através de áreas que por que $\ln 1=0$
- Pesquise as demonstrações para outras propriedades de logaritmos que você conhece.

ATIVIDADE 40

Justificativa: Construir o gráfico da função logaritmo natural utilizando dados obtidos em calculadoras.

Considere a função f(x) = lnx com suas restrições. Faça uma tabela de valores para x e a partir dos dados obtidos na calculadora para lnx construa o gráfico de lnx.

FIGURA 48- PLANO CARTESIANO



ATIVIDADE 41

Justificativa: Introduzir o número e.

- A partir do gráfico de $y=1/x$ $(x>0)$, descubra qual é o valor de x que possui área 1. Faça experiências com áreas e depois pesquisas em materiais já publicados.
- Elabore perguntas a partir do que você pesquisou e coloque em discussão o assunto em sua classe.

ATIVIDADE 42

Justificativa: Ampliar o conceito de logaritmo para outras bases além de e.

- Faça uma pesquisa no livro Logaritmos de Elon Lages Lima ou outras fontes que possam ter o assunto e verifique se é possível aplicar as áreas de faixas de hipérbole em logaritmos de outras bases.
- Pesquise em livros, faça entrevistas com professores, com profissionais que conheçam o assunto, e em redes de informática. Se desejar utiliza outras fontes.

ATIVIDADE 43

Justificativa: Fazer uma sistematização do conteúdo logaritmos estudado.

- Faça uma pesquisa livro Logaritmos de Elon Lages Lima e em outras fontes e anote todas as informações que julgar serem relevantes para sua aprendizagem de logaritmos.
- A partir da sua pesquisa elabore cinco perguntas sobre o que você pesquisou e passe para um colega responder.
- Seu professor organizará um seminário para discutir as perguntas e respostas suas e de seus colegas.
- A partir das conclusões tiradas das discussões o professor juntamente com a classe farão um texto sobre logaritmos.
- Depois de elaborado o texto, cada aluno realizará nova pesquisa tentando verificar aplicações dos logaritmos na sociedade.

4.2 CONSIDERAÇÕES SOBRE AS EXPERIÊNCIAS REALIZADAS

A proposta apresentada traz como fatores positivos a construção, a pesquisa e a descoberta de conceitos pelo próprio aluno. Ela pode ser adaptada e ampliada pelo professor nos pontos que diagnosticar que sua classe tem mais dificuldade.

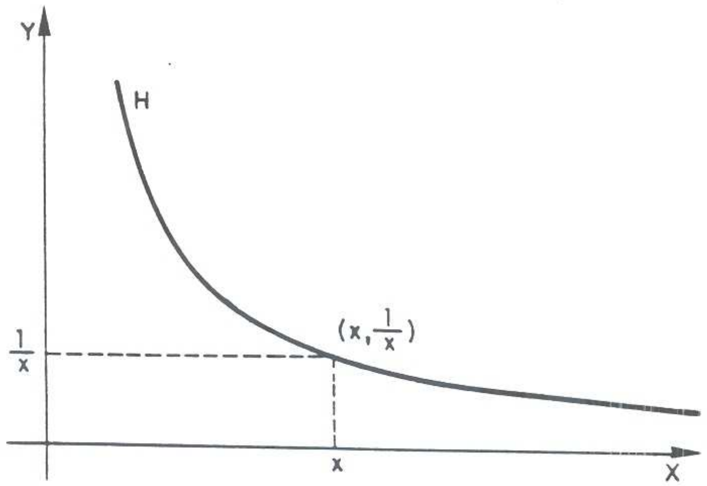
O fato de o aluno trabalhar desde o início do Cálculo Diferencial e Integral com áreas de sob curvas por aproximação pode facilitar o entendimento quando for desenvolvido o tema integrais.

A idéia de construir o conceito de logaritmo por meio de áreas não é inédita, o que se fez foi uma adaptação do processo à uma metodologia de ensino que se apóia na pesquisa e na produção do conhecimento.

Na literatura pode-se encontrar procedimentos semelhantes, e em especial no texto de Elon Lages LIMA (1991:24-28) que apresenta:

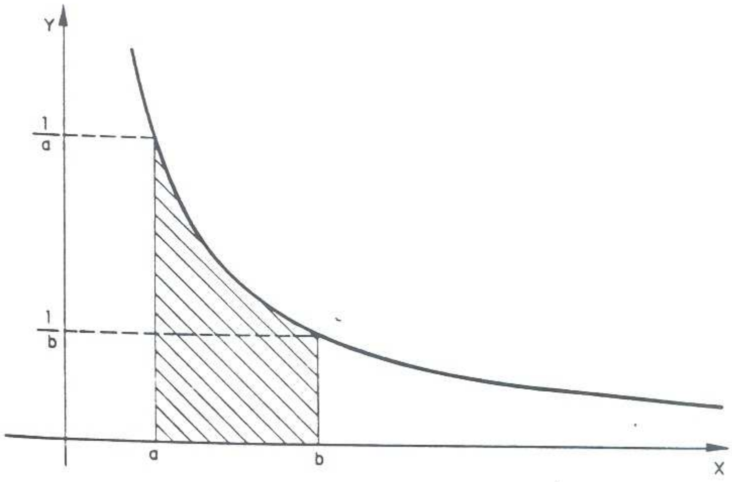
> Seja H o ramo positivo do gráfico da função y = 1/x, isto é, da função que associa a cada número real *positivo* x o número y = 1/x. H é o subconjunto do plano constituído pelos pontos da forma (x, 1/x), onde x > 0. Em símbolos,
>
> $$H = \{(x,y);\ x > 0,\ y = \frac{1}{x}\}$$
>
> Geometricamente, H é o ramo da hipérbole xy = 1 que está contido no primeiro quadrante, isto é, um ponto (x,y) do plano pertence ao conjunto H se, e somente se, x >0 e xy = 1.

FIGURA 49- RAMO DE HIPÉRBOLE - LIMA



> Uma *faixa de hipérbole* é obtida quando fixamos dois números reais positivos a, b, com a< b, e tomamos a região do plano limitada pelas duas retas verticais x = a, x = b, pelo eixo das abcissas, e pela hipérbole H. Indicaremos essa região pelo símbolo H_a^b.

FIGURA 50- RAMO DE HIPÉRBOLE COM ÁREA DEMARCADA ENTRE O GRÁFICO E O EIXO X: LIMA



A região hachurada é a faixa H_a^b

Portanto, a faixa H_a^b é formada pelos pontos (x,y) cujas coordenadas cumprem simultaneamente as condições a ≤ x ≤ b, 0 ≤ y ≤ $\frac{1}{x}$. Na notação da teoria dos conjuntos, temos

H_a^b= {(x,y) a ≤ x ≤ b, 0 ≤ y ≤ $\frac{1}{x}$}

Mostraremos agora como proceder a fim de calcular a área de uma faixa H_a^b.

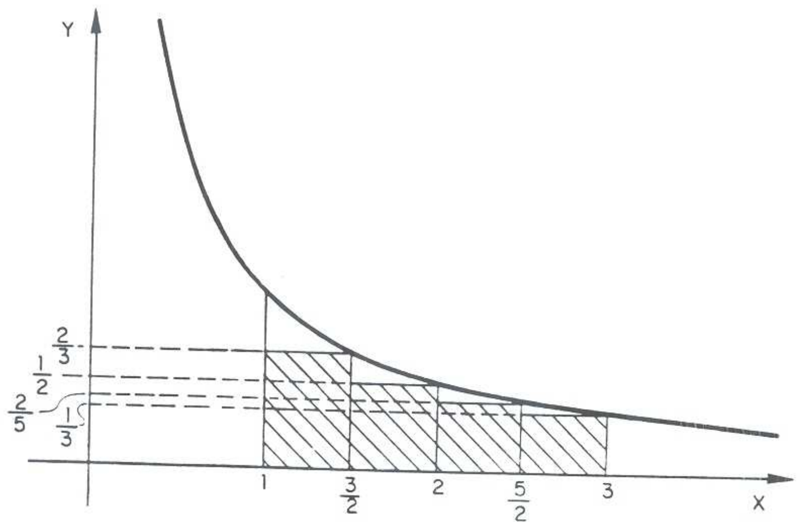
Por meio de pontos intermediários, decompomos o intervalo [a,b] num número finito de intervalos justapostos. Com base em cada um dos intervalos [c,d] da decomposição, onde (c<d) consideramos o retângulo de altura igual a 1/d. O vértice superior direito desse retângulo toca a hipérbole H. É o que chamaremos um retângulo *inscrito* na faixa H_a^b. A reunião desses retângulos inscritos constitui o que chamaremos um *polígono retangular inscrito* na faixa H_a^b.

Um exemplo que iluminou esta proposta pode ser encontrado na obra de Elon Lages LIMA (1991). Justifica-se citá-lo integralmente para mostrar o caminho usado pelo autor a partir do cálculo de áreas até o conceito de logaritmo:

Seja a faixa H_1^3. Se tomarmos a decomposição do intervalo [1,3] através dos pontos intermediários 1, 3/2, 2, 5/2, 3, obteremos um polígono retangular cuja área é igual à soma das áreas dos quatro retângulos abaixo hachurados, ou seja:

$$\frac{1}{2}x\frac{2}{3}) + (\frac{1}{2}x\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}x\frac{2}{5}) + (\frac{1}{2}x\frac{1}{3}) =$$
$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60}$$

FIGURA 51- APROXIMAÇÃO PARA A ÁREA ENTRE O RAMO DE HIPÉRBOLE E O EIXO X COM 4 RETÂNGULOS: LIMA



Se, porém, efetuarmos uma subdivisão mais fina do intervalo [1,3], por meio dos pontos

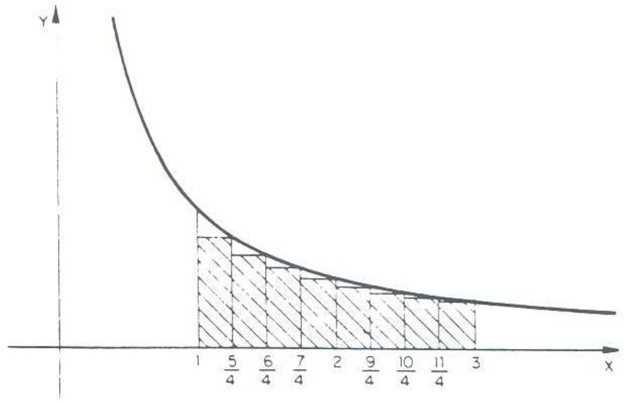
$$1, \frac{5}{4}, \frac{6}{4}, \frac{8}{4}, \frac{9}{4}, \frac{10}{4}, \frac{11}{4}, 3,$$

obteremos um polígono retangular inscrito em H_1^3, formado por 8 retângulos justapostos, cuja área total vale

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} = \frac{84.813}{83160}$$

ou seja, 1,019 aproximadamente.

FIGURA 52- APROXIMAÇÃO PARA A ÁREA ENTRE O RAMO DE HIPÉRBOLE E O EIXO X COM 8 RETÂNGULOS: LIMA



Cada polígono retangular inscrito na faixa H_a^b fornece um valor aproximado por falta para a área de H_a^b. Tanto mais aproximada será esse valor quanto mais fina for a subdivisão do intervalo [a,b]. Isto é, quanto mais próximos uns dos outros estiverem os pontos de subdivisão, menor será a diferença entre o valor exato da área de H_a^b e a área do polígono retangular inscrito. Assim, podemos definir a área de H_a^b do seguinte modo:

A área de H_a^b é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b.

Se escrevermos A = área de H_a^b, teremos A $\geq$ área de P, qualquer que seja o polígono retangular P inscrito em H_a^b.

Além disso, refinando suficientemente a subdivisão do intervalo [a,b], podemos obter polígonos retangulares cujas áreas sejam tão próximas da área de H_a^b quanto se deseje. Mais precisamente, dado qualquer número $\propto$ < área de H_a^b, existe um polígono retangular P, inscrito em H_a^b tal que $\propto$ < área de P < área de H_a^b.

Podemos dizer também que a área de H_a^b é o *extremo superior* do conjunto de áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b.

Isto significa que A = área de H_a^b é o menor número real tal que A $\geq$ área de P para todo polígono retangular P inscrito em [a,b].

Dizer que A é o extremo superior do conjunto das áreas dos polígonos retangulares inscritos em H_a^b tem exatamente o mesmo significado que afirmar que os valores aproximados por falta da área H_a^b são as áreas dos polígonos retangulares inscritos nesta faixa.

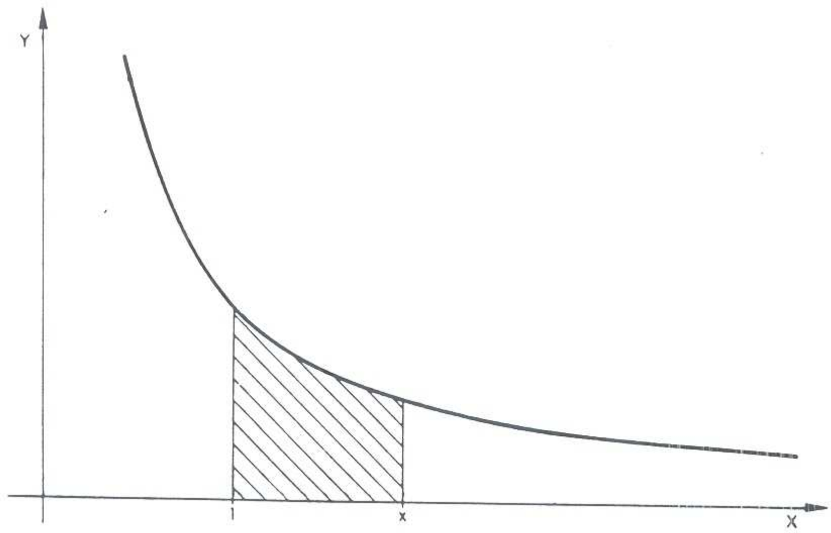
Voltando ao exemplo anterior, vemos que 57/60 é uma aproximação inferior para a área da faixa H_1^3, enquanto que 84.813/83160 é uma aproximação inferior melhor. Embora não saibamos ainda o valor exato da área de H_1^3, já podemos garantir que H_1^3 tem área maior do que 1 pois Área (H_1^3) > 84.813/83.160.

Na sua obra Logaritmos, o autor também analisa a propriedade das áreas e chega finalmente ao conceito de logaritmo. (LIMA, 1991:44-45).

> Seja *x* um número real positivo. Definiremos o *logaritmo natural* de *x* como a área da faixa H_1^x. Assim, por definição, quando x > 0, escrevendo ln *x* para indicar o logaritmo natural de *x*, temos:
>
> $$\ln x = \text{Área}\ (H_1^x)$$

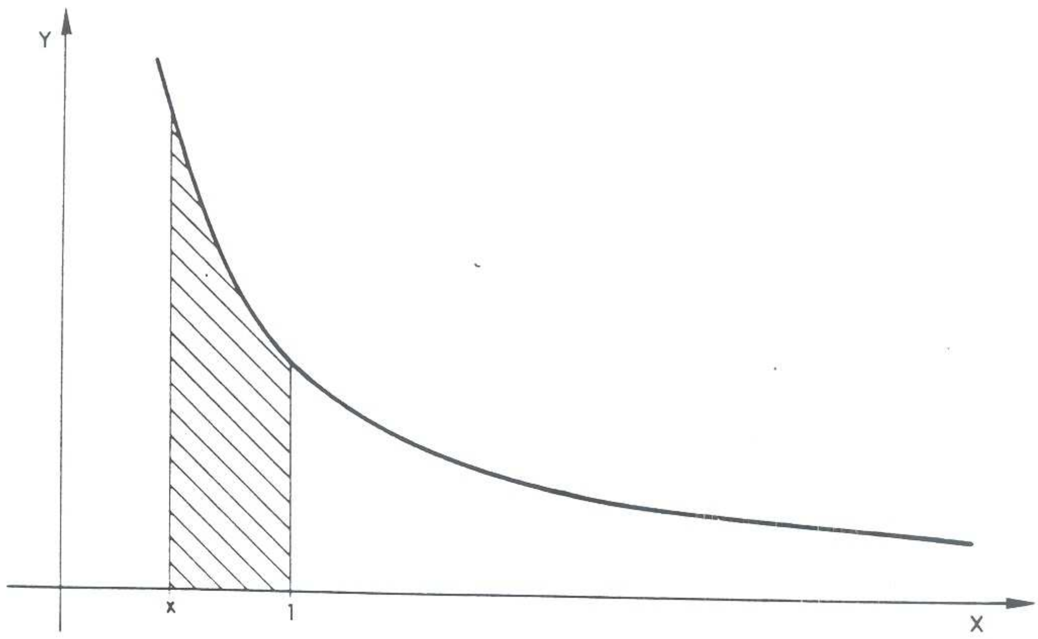
Lembramos que a convenção de tomar Área (H_1^x) < 0 quando 0< X< 1 será sempre adotada.

FIGURA 53- FUNÇÃO LOGARITMO NATURAL (*Y* = *lnx,x*>0) COMO ÁREA DE RAMO DE HIPÉRBOLE: LIMA



A área hachurada é igual a ln x.

FIGURA 54- FUNÇÃO LOGARITMO NATURAL ($Y = lnx$, $0<x<1$) COMO ÁREA DE RAMO DE HIPÉRBOLE: LIMA



Em particular, quando x =1, H_1^1 reduz-se a um segmento de reta, portanto tem área igual a zero. Podemos então escrever

ln 1 = 0
ln x > 0 se x > 1

Não está definido ln x quando x < 0

A obra de LIMA (1991) reforça a idéia de que é possível introduzir o conceito de logaritmo, tomando como ponto de partida conhecimentos do aluno em geometria e funções.

O trabalho pode ter continuidade no Cálculo Diferencial e Integral. O conceito de logaritmos desenvolvidos a partir de áreas permite que se trabalhe com conceitos como, por exemplo, derivadas. Para exemplificar esse processo pode-se utilizar a proposta de ÁVILA (1981:125-127) que propõe, já no início do curso, o conceito de logaritmo natural com base em áreas de faixas de hipérbole.

Derivada do Logaritmo

Vamos mostrar que a função log x é derivável e que sua derivada é 1/x. Para isto, fazemos uma estimativa do acréscimo

$$\Delta \log x = \log (x + h) - \log x \qquad (4.23)$$

correspondente ao acréscimo *h* da variável *x*. Vamos supor, para fixar as idéias, que h > 0. Então, o acréscimo (4.23) é a área (positiva) hachurada da Fig. 4.38(a), que está compreendida entre as áreas dos retângulos ABEF e ABCD. Como estes retângulos tem a mesma base AB = h e alturas 1/(x + h) e 1/x, respectivamente, suas áreas são

$$h.\frac{1}{x+h} = \frac{h}{x+h} \quad \text{e} \quad h.\frac{1}{x} = \frac{h}{x}$$

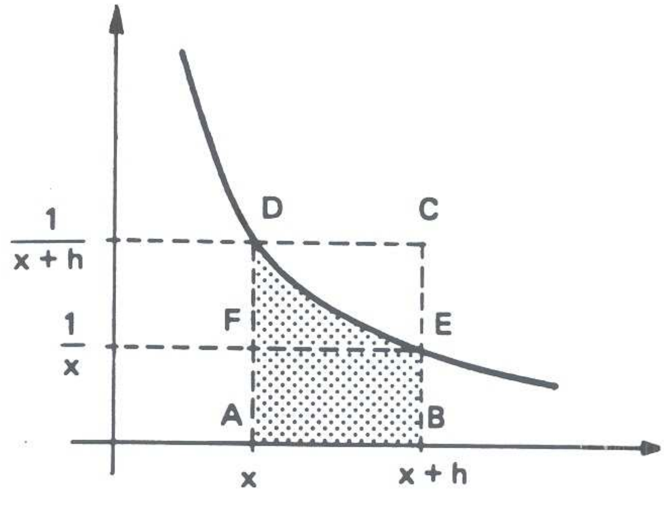
Portanto, podemos escrever

$$\frac{h}{x+h} < \log (x + h) - \log x < \frac{h}{x},$$

donde se segue que

$$\frac{1}{x+h} < \frac{\log(x+h) - \log x}{h} < \frac{1}{x}$$

FIGURA 55- RAMO DE HIPÉRBOLE COM ÁREA DEMARCADA ENTRE O GRÁFICO E O EIXO X: ÁVILA



Finalmente, fazemos h tender a zero; como 1/(x + h) tende para 1/x, concluímos que o termo do meio nessas desigualdades também tende para o mesmo limite, isto é,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{x}$$

ou seja,

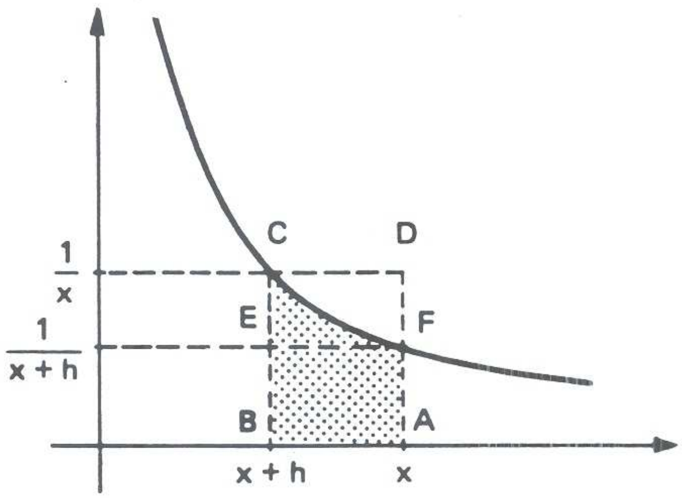
$$D \log x = \frac{1}{x},$$

que é o resultado desejado.

Se h < o [fig. 4.38 (b)], a área hachurada ABCF, com sinal positivo, será dada por log x - log (x + h), de sorte que, em lugar de (4.24), devemos ter

$$\frac{-h}{x+h} < \log x - \log(x+h) < \frac{-h}{x},$$

FIGURA 56- RAMO DE HIPÉRBOLE COM ÁREA DEMARCADA ENTRE O GRÁFICO E O EIXO X: ÁVILA



Dividindo os três membros dessas desigualdades por - h, que é um número positivo, obtemos novamente as desigualdades (4.25) donde segue o mesmo resultado (4.26).

Vimos que o logaritmo só é definido para x >0, de sorte que só podemos escrever log x nesta hipótese.

O texto de Ávila abre uma perspectiva para o trabalho com as funções logarítmicas antes de se trabalhar com o Teorema Fundamental do Cálculo. O conhecimento já produzido como as regras da cadeia e as teorias sobre limites, aplicados inicialmente a funções algébricas é transportado também para as funções logarítmicas.

A contribuição de AVILA (1981) torna-se significativa quando propõe :

> O Cálculo é hoje instrumento de físicos e engenheiros , químicos e biólogos, estatísticos, economistas e cientistas sociais, penetrando os mais variados ramos da
> Ciência e da Tecnologia. Mas seus conceitos fundamentais são profundos e sutis , e desafiaram os melhores matemáticos por cerca de século e meio . A devida apreciação desses conceitos só pode ser adquirida gradualmente e por via intuitiva . É por isto mesmo - e porque a melhor pedagogia é antes de tudo uma questão de bom-senso - que o Cálculo deve ser apresentado com um mínimo de formalismo, com apelo à intuição a aos problemas de Física e Geometria que lhe deram origem. (...)
> A idéia de que ao aluno de Matemática se deva ministrar , desde o início, um ensino rigoroso e isolado das outras ciências é um grave erro , sob dois aspectos: de um lado priva-se o estudante da correta apreciação da Matemática, cujo valor mais autêntico reside nas idéias , na criatividade e não apenas no rigor ou no encadeamento lógico das demonstrações. E a criatividade em Matemática está ligada à imaginação tanto quanto em Literatura, em Música ou em qualquer outra Arte. De outro lado, esse ensino isolado não corresponderia à realidade histórica ; de fato , as exigências de desenvolvimento de teorias e métodos matemáticos em Física , Astronomia e nas demais ciências têm se constituído nas fontes mais estimuladoras da criação matemática. Além disto, é importante que os alunos de Matemática sejam expostos a problemas de outros domínios científicos , para permitir-lhes uma autêntica apreciação de sua ciência e para dar-lhes uma preparação adequada ao ensino e ao trabalho dentro e fora da escola.

Na referência acima citada, constata-se a preocupação do autor com o excesso de formalismo em Matemática. Com essas idéias e os fundamentos da metodologia do ensino com pesquisa, consolida-se a proposta abrindo perspectivas para que outros temas da matemática, que hoje são explorados apenas de forma abstrata, possam ser desenvolvidos por métodos alternativos, possibilitando ao aluno um interesse maior pela disciplina e uma ampliação constante dos temas estudados.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nos autores de livros apontados nesta dissertação, em especial no de AVILA (ano), pode-se constatar que há um compromisso em estabelecer relações entre os conteúdos que o aluno já traz de sua vivência e o que ele vai aprender.

O cálculo tem sido trabalhado pelos professores que utilizam o método tradicional listando conteúdos que devem ser assimilados sem provocar no aluno mudanças que extrapolem a memorização. Nestas condições não há espaço para construção de conceitos, para investigação, para experimentação, para análises, sínteses e conclusões. Desta forma, o cálculo Diferencial e Integral torna-se uma disciplina que termina em seus conteúdos e não possibilita ao aluno ampliar os conceitos e aprender a estabelecer conexões a partir deles.

Constatou-se neste trabalho que existem questões e conceitos do Cálculo Diferencial e Integral que foram construídos a partir de problemas geométricos. Nesse caminho, o da investigação e do saber elaborado, verificou-se que a utilização de problemas geométricos para auxiliar o raciocínio dos alunos já foram usados pelos precursores do Cálculo.

As análises de LORENZATO (1995) e FEIGUELERNT, (1995) contribuíram para referendar a importância da Geometria no processo de aquisição de conceitos matemáticos abstratos. Também foi destacado o valor da Geometria como elo de ligação entre conteúdos dentro da Matemática e da realidade vivenciada.

Detectou-se que livros didáticos elencados, não apresentam um compromisso em fazer ligações entre os conteúdos, dentro do curso de Cálculo Diferencial e Integral e nem mesmo, nas aplicações em áreas específicas onde as disciplinas são ministradas. A função logarítmica por exemplo, é definida supondo que houve um trabalho prévio no ensino médio e jamais construído o conceito a partir de idéias básicas da Matemática.

Nos livros de Cálculo apresentados constata-se que as aplicações vem depois dos conceitos abstratos. É um caminho inverso ao que é senso comum no ensino aprendizagem, contrariando o processo de construção do Cálculo segundo a História da Matemática.

Observou se que existem obras que apresentam a função logarítmica, suas derivadas e outros procedimentos, que são estudados após o Teorema Fundamental do cálculo, ocasionando a possibilidade de elaborar uma definição mais consistente desse tema. Entretanto, o aluno fica mais da metade do curso de cálculo trabalhando sem as funções logarítmicas e esses conceitos são de grande aplicabilidade em diversas áreas do conhecimento. Constata-se que se houver algum problema de carga horária no curso de Cálculo, a exploração desse assunto de extrema importância, por estar no final do curso, e carregando o risco de não ser trabalhado, pode ocasionar grande prejuízo ao raciocínio lógico dos alunos.

A proposta do ensino com pesquisa, que conduz ao "aprender a aprender", abre perspectivas para que não só o ensino de Cálculo, mas de outras disciplinas, possam ser desenvolvidos dentro da metodologia proposta. Assim, torna-se possível aproximar a escola da realidade e os conceitos vistos na universidade do trabalho profissional.

A partir da metodologia assentada num ensino que busca a produção do conhecimento, a proposta didática apresentada na forma de atividades, sugere não apenas uma reflexão sobre o ensino de logaritmos, que acontece desde o ensino médio, mas também uma mudança de postura do professor, que precisa abandonar a atitude de copiador de cópias (DEMO, 1997), para um elemento que seja o organizador, articulador e mediador entre o saber elaborado e a produção do conhecimento. Afinal, há necessidade de repensar o ensino de Matemática que tem sido trabalhado na comunidade universitária com alternativas metodológicas que procurem novas formas de reinventar e apresentar os conceitos aos seus alunos.

O conceito de área é trabalhado desde as séries iniciais do ensino fundamental e os gráficos de funções são estudados pelos alunos desde as últimas séries desse ensino e em todo o ensino médio. Dessa forma defende-se que seja mais fácil apresentar a hipérbole, inicialmente, a partir de cortes em cone fazendo referência histórica ao trabalho de Apolônio de Perga. Depois, aproveitando o que o aluno traz de conhecimento, pode-se fazer a aproximação da área de faixas dessa cônica. Nessa proposta conceitua-se o logaritmo natural como a área de uma faixa de hipérbole e sugere-se que esse trabalho seja ofertado nas primeiras aulas de Cálculo, o que permitirá ao aluno, trabalhar mais cedo com as funções logarítmicas, recebendo assim o incentivo de suas aplicações.

Com a pesquisa bibliográfica crítica, encontrou-se em Ávila a constatação de que o trabalho de conceituação algébrica e os trabalhos com derivadas e outros conceitos podem vir normalmente a partir do conceito geométrico dos logaritmos. Essa proposta é diferente do que se encontra na maioria das publicações em Cálculo Diferencial e Integral. Há nela uma preocupação, expressa pelo autor, não apenas com o que se deve ensinar mas principalmente com o que o aluno vai aprender do que se ensina.

Entende-se que o aluno é sujeito atuante no processo de aprendizagem e suas experiências de vida escolar são enriquecedoras no processo. Na investigação, na descoberta, e no aprender a aprender, a Matemática torna-se significativa, e transforma-se em uma conquista do aluno. Assim é possível evitar tantas reprovações na disciplina de Cálculo. Com essa proposta, provocando produções individuais e coletivas do conhecimento, pelo caminho da Geometria, proporciona-se situações de criação formando, principalmente, um aluno investigador. Esse aluno será capaz de promover as mudanças necessárias na estrutura social em que está inserido.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, Antonio Pinheiro de. O livro didático de matemática: utilização na percepção do aluno. **Bolema- Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro, n.8, 98 -107.1992

ÁVILA, Geraldo. **Cálculo - funções de uma variável**. Rio de Janeiro: LTC, 1981.

_____. Geometria e imaginação. **Revista do professor de matemática**, n. 3, p. 25 - 28, 1983.

BARON, Margaret E.; BOS, E.H.J. **Curso de história da matemática**: origens e desenvolvimento do cálculo, v. 4. Brasília: Universidade de Brasília, 1985.

BEHRENS, Marilda Aparecida. **Formação continuada de professores e a prática pedagógica**. Curitiba: Champagnat, 1996

BIEMBENGUT, Maria Salett, HEIN, Nelson. **Uma proposta para o ensino de Cálculo**. Temas e Debates - O Ensino do Cálculo - SBEM, Blumenau, n. 6, p.44-59, abril. 1995.

BOLEMA - BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, n. 8, 1992.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.

_____. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula**. São Paulo: Atual, 1992.

CARVALHO, Dione Lucchesi de. **Metodologia do Ensino da Matemática**. São Paulo: Cortez, 1994

CUNHA, Maria Isabel da. **Relação ensino e pesquisa**. In: ALENCASTRO, Ilma (org).**Didática e suas relações**. São Paulo: Papirus, 1996

CASTRO, F. M. de Oliveira. **A matemática no Brasil**. Campinas: Unicamp, 1992.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **O ensino de ciências e matemática na América latina**. Campinas: Papirus, 1984.

_____. **Etnomatemática.** São Paulo: Ática, 1993.

DEMO, Pedro. **Educar pela pesquisa**. Campinas: Autores Associados, 1997.

DIEUDONNÉ, Jean. **A formação da matemática contemporânea**. Lisboa: Dom Quixote, 1990.

DIAZ, Veronica, POBLETE, Álvaro. **Resolucion de problemas valuacion y enseñanza del cálculo**. Zetetiké, Campinas, n. 4, p. 51-60, novembro, 1995.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Unicamp, 1995.

FAINGUELERNT, Estela Kaufman. O ensino de geometria no 1° e 2° graus, **Educação Matemática em Revista** - *SBEM*, p. 45 -53, n. 4, 1995.

FLEMMING, Diva Marília; GONÇALVES, Miriam Buss. **Cálculo A**. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1992

GERDES, Paulus. **Sobre o despertar do pensamento geométrico**. Curitiba: UFPR, 1992

GIL, Antonio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 1996.

GRANVILLE, W. A. **Elementos de cálculo diferencial e integral**. Rio de Janeiro: Âmbito Cultura, 1965

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, v. 1. Rio de Janeiro-São Paulo: LTC, 1987.

KLINE, Morris. **O fracasso da matemática moderna**. São Paulo: Ibrasa, 1976

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. edição, v. 1. São Paulo: Harbra, 1994.

LIMA, Elon Lages. **Medida e forma em geometria**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

_____. **Logaritmos**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991

LORENZATO, Sérgio. **Por que não ensinar geometria?** Educação Matemática em Revista -*SBEM*, p.3-13, n. 4, 1995

MACHADO, Nilson José. **Matemática e realidade**. São Paulo: Cortez, 1989.

_____. **Epistemologia e Didática**. São Paulo: Cortez, 1996.

MOYSÉS, Lúcia. **O desafio de saber ensinar**. Campinas: Papirus. Niterói: EDUFF, 1994

MUNEM, Mustafá A., FOULIS, David J. **Cálculo**, v. 1. Rio de Janeiro: Guanabara Koogan, 1982.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS(USA). **Estandares curriculares y de evaluacion para la educacion matemática**. Sevilha: Grafitres,S. L., 1992.

OTTE, Michael. **O formal, o social e o subjetivo** - uma introdução à filosofia e à didática da matemática. São Paulo: Unesp, 1991.

PISKOUNOV, N. **Cálculo diferencial e integral**, v. I. Porto: Lopes da Silva Editora, 1993.

PITOMBEIRA, João Bosco. **Idéias fundamentais da matemática**. Boletim Gepem (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática), n. 26, p. 55 - 66, 1990.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

RICIERI, Aguinaldo Prandini. **A construção do cálculo**, v. 1. São Paulo: Prandiano, 1988.

SILVA, Clóvis Pereira da. **A matemática no Brasil** - uma história de seu desenvolvimento. Curitiba: UFPR, 1992.

SIMMONS, George F. **Cálculo com geometria analítica**, v.1. São Paulo: McGraw-Hill, 1987

SIPAVICIUS, Nimpha. **O professor e o rendimento escolar de seus alunos**. São Paulo: EPU, 1987.

STRUIK, Dirk J. **História concisa das matemáticas**. Lisboa: Gradiva, 1992.

SWOKOWSKI, Earl W. **Cálculo com geometria analítica**, v. 1. São Paulo: Makron Books do Brasil, 1994.

TENÓRIO, Robinson Moreira e outros. **Aprendendo pelas raízes**. Salvador: UFBA, 1995

VENTURI, Jacir J. **Cônicas e quádricas**. Curitiba: Unificado, 1994.