

**Pontifícia Universidade Católica do Paraná**

Luiz Carlos Winikes

**AJUSTE DOS PARÂMETROS ELÁSTICOS DOS MATERIAIS DE UMA VIGA  
“SANDWICH”**

**DOUTORADO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA  
PUCPR**

2013

Luiz Carlos Winikes

**AJUSTES DOS PARÂMETROS ELÁSTICOS DOS MATERIAIS DE UMA VIGA  
“SANDWICH”**

Tese apresentada como parte dos requisitos à obtenção do título de Doutor em Engenharia Mecânica, pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pela Pontifícia Universidade Católica do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Nilson Barbieri

Co-orientador: Prof. Dr. Renato Barbieri

Curitiba – Pr

DEZEMBRO / 2013

## **TERMO DE APROVAÇÃO**

**LUIZ CARLOS WINIKES**

### **AJUSTE DOS PARÂMETROS ELÁSTICOS DOS MATERIAIS DE UMA VIGA “SANDWICH”**

Tese aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor no Curso de Mestrado em Engenharia Mecânica, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, do Centro de Ciências Exatas de Tecnologia da Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Pela seguinte banca examinadora:

Presidente: **Prof. Dr. Nilson Barbieri (Orientador)**

Curso de Engenharia Mecânica (PUCPR)

**Prof. Dr. Renato Barbieri (Co-Orientador)**

Curso de Engenharia Mecânica (PUCPR)

Curitiba, 06 de Dezembro de 2013

Dedico esta tese a meus Pais,  
meus Irmãos e Sobrinhos.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço especialmente ao meu orientador e amigo Nilson Barbieri, por sua dedicação, paciência, ensinamentos e compreensão durante o tempo deste doutorado.

Ao professor Renato Barbieri, por sua dedicação e orientação em vários momentos no decorrer de todas as etapas deste trabalho.

A professora Viviana Cocco Mariani pela sua contribuição e dedicação em muitos momentos no transcorrer deste estudo.

Agradeço por toda a dedicação e incentivos que recebi de todos os professores do programa e que particularmente contribuíram de forma significativa através dos ensinamentos transmitidos durante todo o período do doutorado e que serviram de base teórica para realização deste trabalho.

A amiga especial e secretária do mestrado, Sra. Jane, pela dedicação e pela paciência de nos ouvir em muitos momentos durante este curso.

A CAPES pela bolsa de estudos que possibilitaram a realização deste projeto.

Agradeço a todos os meus amigos e familiares que estiveram a meu lado durante todo o período de estudo.

Agradeço a Deus por esta oportunidade de poder estudar e no futuro transmitir esses conhecimentos para as outras pessoas.

## RESUMO

O objetivo deste trabalho foi ajustar os parâmetros elásticos (módulo de elasticidade e fator de perda) dos materiais de uma viga “sandwich” composta por três materiais: um núcleo de espuma rígida de poliuretano e as faces de aço e poliestireno de alto impacto. Os parâmetros foram estimados comparando-se os resultados experimentais através da análise Modal e numéricos obtidos pelo método dos elementos finitos utilizando algumas técnicas de otimização: Algoritmo Genético (GA), Evolução Diferencial (ED) e Nuvem de Partículas (PSO). As análises numéricas foram realizadas empregando o método dos elementos Finitos usando a teoria de viga de Timoshenko e elasticidade 2-D com um elemento isoparamétrico de 16 nós. Também foi realizado o ajuste dos parâmetros considerando a malha de elementos finitos normal (sem dano) e com a malha apresentando modificações (com dano). Analisando-se os resultados das funções resposta em frequência (FRF's) concluiu-se que o modelo 2-D teve um erro bem menor que o modelo de viga quando comparados com a FRF obtida experimentalmente. Comparando-se o parâmetro global ajustado para o modelo de viga com os parâmetros ajustados em cada faixa de frequências para o modelo elasticidade 2-D concluiu-se que as menores diferenças para o módulo de elasticidade foi obtido na segunda frequência natural. Na comparação dos resultados da malha com dano e sem dano foi na faixa da segunda frequência natural que o ajuste dos parâmetros utilizando o modelo de elasticidade 2-D ficou mais próximo dos resultados dos ajustes obtidos no modelo de viga de Timoshenko.

## ABSTRACT

The objective is to adjust the physical parameters (elastic modulus and loss factor) of the materials constituting a beam "sandwich" made of three materials : a core of rigid polyurethane foam and steel faces and high impact polystyrene . The parameters were estimated by comparing the experimental results by Modal analysis and numerical obtained by finite element method using some optimization techniques: Genetic Algorithm, Differential Evolution and Particle Swarm method. The theoretical framework was conducted based on the finite element method using the Timoshenko beam theory and elasticity 2-D isoparametric element with 16 nodes. Was also performed adjusting the parameters considering the finite element mesh standard (without damage) with the mesh showing changes (with damage). Analyzing the results of the frequency response functions ( FRF 's) it was concluded that the 2-D model had an error much smaller than the beam model when compared with the FRF obtained experimentally. Comparing the global parameter set to the beam model with parameters set in each frequency band for model 2-D elasticity concluded that the best fit for the modulus of elasticity was obtained in the second natural frequency. Comparing the results of the mesh with damage and no damage was in the range of the second natural frequency of the fit parameters using the elasticity model 2-D was closer to the beam model.

## SUMÁRIO

Dedicatória.....	iv
Agradecimentos.....	v
Resumo.....	vi
Abstract.....	xii
Sumário.....	viii
Lista de Figuras.....	xi
Lista de Tabelas.....	xiv
Lista de Símbolos.....	xv
Abreviações.....	xii
1 Introdução.....	1
1.1 Contexto.....	1
1.2 Objetivos.....	3
1.3 Justificativa.....	3
1.5 Organização do Trabalho.....	4
2 Revisão Bibliográfica.....	6
3 O elemento Finito Para Viga “Sandwich”.....	19
3.1 Introdução.....	19
3.2 Formulação Para Viga de Timoshenko.....	19
3.3 Formulação do Elemento Utilizando Elasticidade 2-D.....	23
3.3.1 Elementos Finitos Bidimensionais Planos.....	24
3.3.1.1 Estado Plano de Deformação.....	24
3.3.1.2 Estado Plano de Tensão.....	24
3.3.2 Interpolação dos deslocamentos.....	26
3.3.3 Matriz de Rigidez do Elemento.....	26
3.3.4 Matriz de Massa do Elemento.....	27
3.3.5 Elemento Isoparamétrico Cúbico de 16 nós.....	27
3.3.6 Jacobiano e Cálculo das Derivadas Globais.....	29
4 Métodos de Ajuste de Parâmetros.....	32

## SUMÁRIO

4.1	Introdução.....	32
4.2	Algoritmos Evolucionários.....	32
4.3	Algoritmos Genéticos.....	34
4.3.1	Algumas Terminologias Utilizadas em Algoritmos Genéticos.....	37
4.3.2	Etapas de um Algoritmo Genético.....	37
4.3.3	Esquema de Seleção.....	38
4.3.4	Representação de Parâmetros.....	40
4.3.5	Operadores Genéticos.....	41
4.3.6	Parâmetros Genéticos.....	42
4.4	Evolução Diferencial.....	43
4.4.1	Evolução Diferencial Para Otimização Com Variáveis Contínuas.....	44
4.4.2	Implementação do Algoritmo DE.....	47
4.5	Nuvem de Partículas – PSO.....	49
4.5.1	Modelo Básico.....	50
4.5.2	Principais Variações do PSO.....	53
4.5.3	Diferentes Topologias da População.....	53
4.5.4	Fluxograma do Algoritmo PSO.....	54
5	Análise Modal e Experimental.....	55
5.1	Introdução.....	55
5.2	Análise Modal.....	56
5.2	O modelo Modal.....	56
5.3	O conceito de FRF.....	57
5.4	FRF experimental.....	58
5.4.1	Materiais Utilizados.....	59
5.4.2	Esquema de Montagem.....	59
6	Caracterização Estática e Dinâmica dos Materiais.....	62
6.1	Introdução.....	62

## SUMÁRIO

6.2 Caracterização Estática e Dinâmica dos Materiais.....	62
6.2.1 Espuma Rígida de Poliuretano.....	62
6.2.2 Chapa Metálica.....	66
6.2.3 Chapa de Poliestireno.....	67
6.3 Caracterização Dinâmica.....	71
7 Resultados.....	76
7.1 Ajuste com o Modelo de Viga de Timoshenko.....	76
7.2 Estimativa dos Parâmetros Usando Elasticidade 2D.....	81
7.2.1 Ajuste dos Parâmetros Para as Três Primeiras Frequências Naturais.....	83
7.2.2 Ajuste de Parâmetros Para Toda Faixa de Frequências.....	86
7.2.3 Análise de Convergência Para os Ajustes das FRF's.....	87
7.2.4 Ajuste de Parâmetros Para o Sistema Com Modificação (Dano).....	89
7.3 Comparação dos Ajustes Utilizando Elemento de Viga e Elasticidade 2D.....	93
8 Análise dos Resultados.....	99
8.1 Análise dos Resultados dos Ajustes.....	99
8.2 Conclusões.....	101
8.3 Sugestões Para Trabalhos Futuros.....	101
Referências Bibliográficas.....	103
Artigos Publicados e Participações em Congressos.....	112

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 Posicionamento do Sensor para Medição da FRF Amostra.....	9
Figura 2.2 Esquema de Acoplamento da Viga no Shaker Para Simular o Engastamento.....	10
Figura 2.3 Módulo de Elasticidade x Temperatura.....	11
Figura 2.4 Ângulo de Fase do Módulo de Elasticidade x Temperatura.....	11
Figura 3.1 – Configuração Não Simétrica das Faces da Viga “Sandwich”.....	19
Figura 3.2 Graus de Liberdade Para um Elemento <i>Sandwich</i> Tratado Conforme Viga de Timoshenko.....	22
Figura 3.3 Problemas Bidimensionais.....	23
Figura 3.4 Elemento Finito Retangular de 16 Nós.....	28
Figura 3.5 Função de Forma do Nó 10 Para o Elemento Finito Retangular de 16 Nós.....	28
Figura 4.1 Método da Roleta.....	39
Figura 4.2 Cruzamento.....	41
Figura 4.3 Mutação.....	42
Figura 4.4 Gerando a Perturbação: $X_1^t - X_2^t$ .....	45
Figura 4.5 Mutação.....	46
Figura 4.6 Movimento da Partícula no Espaço.....	50
Figura 4.7 Regra 1 Separação.....	50
Figura 4.8 Regra 2 Alinhamento.....	50
Figura 4.9 Regra 3 Coesão.....	51
Figura 4.10 Topologias da População de Partículas.....	53
Figura 4.11 Fluxograma do Método PSO Sincronizado.....	54

## LISTA DE FIGURAS

Figura 5.1 Fluxograma.....	55
Figura 5.2 Desenho Esquemático da Viga “Sandwich”.....	60
Figura 5.2 Vista Lateral da Viga “Sandwich” Engastada na Base de Concreto..	61
Figura 5.3 Vista Frontal da viga “sandwich” Engastada na Base de Concreto..	61
Figura 6.1 Dispositivo Para Obtenção Experimental do Módulo de Cisalhamento.....	64
Figura 6.2 Ângulo de Torção x Torque.....	64
Figura 6.3 Descrição Geométrica do Corpo de Prova de Tração da Chapa Metálica .....	66
Figura 6.4 Correlação Entre Força e Deformação Obtidos no Ensaio de Tração no Corpo de Prova de aço SAE 1010 Laminado.....	67
Figura 6.5 Corpo de Prova Utilizado no Ensaio de Tração Para o PSAI. Espessura = 1,6 mm.....	68
Figura 6.6 Curva Tensão-Deformação Para o Corpo de Prova de PSAI.....	69
Figura 6.7 Extração da Região de Linearidade do gráfico da Figura 6.6, com ajuste da equação da reta.....	69
Figura 6.8 Representação Esquemática do Ensaio Dinâmico de Viga.....	72
Figura 6.9 Curvas Experimental e Numérica Para o PSAI.....	73
Figura 6.10 Curvas Experimental e Numérica Para o PUR.....	74
Figura 7.1 Curva de Convergência Para a Primeira Frequência Natural.....	77
Figura 7.2 Curva FRF Para um Acelerômetro.....	79
Figura 7.3 Curvas FRF Experimental e Ajustadas.....	80
Figura 7.4 Curvas da FRF Experimental e Numérica.....	81
Figura 7.5 Malha de Elementos Finitos.....	83
Figura 7.6 Elemento Quadrangular com 16 Nós.....	83
Figura 7.7 Ajuste em Torno da Faixa de Frequência da Primeira Frequência Natural.....	84

## LISTA DE FIGURAS

Figura 7.8 Ajuste em Torno da Faixa de Frequência da Segunda Frequência Natural.....	85
Figura 7.9 Ajuste em Torno da Faixa de Frequência da Terceira Frequência Natural.....	86
Figura 7.10 Gráfico Comparativo das FRFs Para a Faixa de Frequências de 1 a 250 Hz.....	87
Figura 7.11 Curvas de Convergência Para Ajuste em Torno da Primeira Frequência Natural.....	88
Figura 7.12 Curvas de Convergência Para Ajuste em Torno da Segunda Frequência Natural.....	88
Figura 7.13 Curvas de Convergência para Ajuste em Torno da Terceira Frequência Natural.....	89
Figura 7.14 Representação da Amostra com Dano.....	89
Figura 7.15 Curvas Experimentais Para o Sistema Com e Sem Dano.....	90
Figura 7.16 Ajuste em Torno da Faixa de Frequência da Primeira Frequência Natural.....	91
Figura 7.17 Ajuste em Torno da Faixa de Frequência da Segunda Frequência Natural.....	91
Figura 7.18 Ajuste em Torno da Faixa de Frequência da Terceira Frequência Natural.....	92
Figura 7.19 Representação do Primeiro Modo de Vibrar.....	93
Figura 7.20 Representação do Primeiro Modo de Vibrar (Modelo 2D).....	93
Figura 7.21 Representação do Segundo Modo de Vibrar.....	94
Figura 7.22 Representação do Segundo Modo de vibrar (Modelo 2D).....	94
Figura 7.23 Representação do Terceiro Modo de Vibrar .....	95
Figura 7.24 Representação do terceiro modo de Vibrar (Modelo 2D).....	95
Figura 7.25 Curvas da Função Resposta em Frequência.....	96

**LISTA DE TABELAS**

Tabela 4.1 Probabilidades Para Cada Indivíduo.....	39
Tabela 4.2 Mapeamento de Variáveis Reais Para o Código Binário.....	40
Tabela 4.3 Representação Binária de 4 Indivíduos Com Quatro Variáveis.....	41
Tabela 6.1 Módulo de Cisalhamento Experimental, G.....	65
Tabela 6.2 Medições da Densidade do Poliuretano Rígido.....	66
Tabela 6.3 Medições do Módulo de Elasticidade do PSAI.....	70
Tabela 6.4 Medições da Densidade do PSAI.....	71
Tabela 6.5 Parâmetros Ótimos Para o PSAI.....	73
Tabela 6.6 Parâmetros Ótimos Para o PUR.....	74
Tabela 7.1 Frequências Naturais (Hz).....	77
Tabela 7.2 Valores Experimentais das Frequências Naturais e dos Fatores de Amortecimento.....	78
Tabela 7.3 Valores Estimados dos Parâmetros pelos Métodos de Otimização.....	84
Tabela 7.4 Valores Estimados dos Parâmetros pelos Métodos de Otimização.....	85
Tabela 7.5 Valores Estimados dos Parâmetros pelos Métodos de Otimização.....	86
Tabela 7.6 Valores Estimados dos Parâmetros.....	87
Tabela 7.10 Valores Frequências Naturais.....	97
Tabela 7.11 Parâmetros Ajustados.....	98

**LISTA DE SÍMBOLOS**

$E$	Módulo de Elasticidade
$E^*$	Modulo de Elasticidade Variável na Frequência
$E'$	Parte real do Módulo de Elasticidade Variável na Frequência
$E''$	Parte Imaginária do Módulo de Elasticidade Variável na Frequência
$D$	Rigidez deflexão
$\sigma$	Tensão Normal
$M$	Momento Fletor
$I$	Momento de Inércia
$A$	Área
$V$	Força cortante
$N$	Normal
$\varepsilon$	Deformação
$\kappa$	Curvatura
$t$	Espessura
$h$	Altura da seção
$d$	Distância dos Eixos Baricentrais das Faces de Uma Viga “Sandwich”
$G$	Módulo de Cisalhamento Transversal
$S$	Rigidez ao Cisalhamento
$k$	Fator de Cisalhamento
$[M]$	Matriz Massa
$[K]$	Matriz de Rigidez
$[J]$	Matriz Jacobiano da Transformação
$[B]$	Matriz de Deformação
$\eta$	Fator de Amortecimento
$\tau$	Tensão Cisalhante
$\gamma$	Deformação Transversal
$U$	Energia Potencial
$T$	Energia Cinética

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\{\ddot{x}\}$	Vetor de Aceleração
$\{x\}$	Vetor de Deslocamentos
$\{f\}$	Vetor de forças.
$\{F\}$	Vetor de Forças
$\{q\}$	Vetor Deslocamento
$\{T\}$	Vetores de Tração
$x_i^t$	Vetor do Espaço Real
$v_i^t$	Mutação Diferencial
$Q$	Carga Distribuída
$FO$	Função Objetivo
$M$	Massa
$u$	Deslocamento
$\mathfrak{R}$	Inércia Rotatória
$\rho$	Massa Específica
$\rho^*$	Peso por Unidade de Superfície
$H$	Função Resposta em Frequência
$FP$	Peso aplicado ao vetor
$\omega_{dr}$	Frequência Amortecida
$\omega$	Frequência
$D^*$	Matriz constitutiva do Material
$M$	Matriz de Massa
$C$	Matriz de Amortecimento
$K$	Matriz de Rigidez
$f$	Vetor de Forças
$N$	é o número de parâmetros

**ABREVIATÖES**

FRF	Função Resposta em Freqüência
FO	Função Objetivo
GA	Algoritmo Genético
GA's	Algoritmos Genéticos
PUR	Poliuretano
PSAI	Poliestireno de alto impacto
DE	Evolução Diferencial
PSO	Nuvem de Partículas
AE	Algoritmos Evolucionários

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Contexto

Com o desenvolvimento contínuo da indústria constata-se que ocorre um crescimento da demanda por produtos que tenham qualidade, confiabilidade e com um baixo custo. Por isso, tem-se vivenciado atualmente um aumento progressivo na complexidade dos projetos de engenharia e conseqüentemente a exigência de produzir produtos com maior durabilidade, resistência, estabilidade e eficiência.

Nesse contexto, com o desenvolvimento de novos materiais é adequado inferir sobre as propriedades elásticas das estruturas. Assim, tornam-se imprescindíveis novas pesquisas para acompanhar o desenvolvimento dos produtos lançados no mercado e, conseqüentemente, existe a crescente necessidade de realizar testes como, por exemplo, os ensaios “não destrutivos” para identificar as propriedades dos materiais por exemplo (módulo de elasticidade, fator de amortecimento) em situações onde os ensaios “destrutivos” não podem ser realizados.

As estruturas sandwich têm despertado grande interesse e já estão bastante difundidas em diversos segmentos da indústria, tais como: aeroespacial, militar, construção civil e eletrodomésticos da linha branca (refrigerador, freezer's, etc.) . O aumento do interesse em realizar pesquisas com essas estruturas deve-se ao fato de que suas propriedades combinam alta rigidez a flexão e baixo peso tornando-a mais eficiente.

Estruturas sanduíche são constituídas por duas ou mais camadas de materiais diferentes, as quais são admitidas, em geral, perfeitamente aderidas, e a combinação delas faz com que o elemento, como um todo, ganhe em termos de eficiência estrutural. A principal característica é a obtenção de elementos com maior rigidez, obtida com o afastamento das faces resistentes. Pode-se projetar ainda estruturas mais leves, dependendo do material a ser

utilizado. Tais estruturas também proporcionam boas características de resistência e isolamento térmico.

Nesse trabalho pretende-se ajustar as propriedades elásticas (módulo de elasticidade e fator de amortecimento) dos materiais que constituem uma estrutura “*sandwich*” que contém três camadas, ou seja, o núcleo de espuma rígida de poliuretano, uma das faces de poliestireno de alto impacto e a outra face de aço laminado.

Normalmente os valores dos parâmetros da espuma rígida e do Poliestireno de Alto Impacto (PSAI) são desconhecidos devido a dificuldades de ensaios mecânicos em se determinar esses parâmetros ou à inexistência de informação na bibliografia. Dessa forma, pode ser realizada uma estimação dos parâmetros através da comparação da Função Resposta em Frequência (FRF) numérica obtidas por meio de simulação computacional com a FRF obtida experimentalmente. O ajuste consiste na procura dos valores dos parâmetros descritos no modelo, que minimizem a distância entre a FRF experimental e as FRF numérica simulada. O método dos mínimos quadrados é o método de regressão mais utilizado para estimar os valores dos parâmetros.

Para se resolver problemas cuja análise associa certo grau de dificuldade, técnicas de otimização como o Algoritmo Genético (GA), o Algoritmo de Evolução Diferencial (DE) e o Método da Nuvem de Partículas (PSO) tem se mostrado eficientes ferramentas de busca, tornando possível a obtenção em tempo hábil de resultados significativamente satisfatórios.

Através da implementação computacional de modelos matemáticos formulados através do Método dos Elementos Finitos integrados com o GA, DE e PSO podem ser resolvidos problemas relacionados às técnicas de ajuste de parâmetros, tanto de estruturas lineares como não-lineares. As técnicas utilizadas em otimização são baseadas em parâmetros modais obtidos através de uma função erro que mede a diferença entre a Função de Resposta em Frequência experimental ( $FRF_{EXP}$ ) e numérica ( $FRF_{NUM}$ ).

Oresten (2003) estudou o comportamento dinâmico de vigas do tipo “*sandwich*”, que é usada em refrigeradores domésticos, utilizando duas formulações, a primeira que foi baseada na Teoria de Timoshenko e a segunda conforme a teoria de Mead Markus.

Neste trabalho também se pretende avaliar mais uma formulação elaborada com base no Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizando elasticidade 2-D com um elemento finito retangular de 16 nós e verificar qual o melhor modelo a partir da comparação das funções respostas em frequência (FRF's) obtidas numericamente a partir do modelo de viga de Timoshenko e utilizando a elasticidade 2-D com a FRF experimental obtida pela análise modal.

## 1.2 Objetivos

O objetivo principal deste projeto foi ajustar os parâmetros dos materiais que compõe a estrutura sandwich através de um modelo matemático desenvolvido para vigas compostas via método dos elementos finitos (MEF).

A seguir são listados alguns objetivos específicos realizados neste trabalho:

a) Elaboração de uma rotina computacional em linguagem FORTRAN tomando-se por base teórica o MEF acoplado a algumas técnicas de otimização, tais como: o GA, o DE e o PSO, e aplicando uma metodologia inversa identificar os parâmetros físicos: Fator de Perda ( $\eta$ ) e módulo de Elasticidade ( $E$ ), contidos no modelo de elementos finitos para uma viga "sandwich".

b) Comparar os resultados dos ajustes utilizando duas formulações para o elemento finito para viga sandwich, a primeira usando a teoria de viga de Timoshenko e a segunda utilizando a elasticidade 2-D com um elemento isoparamétrico de 16 nós.

c) Analisar o comportamento dos ajustes dos parâmetros utilizando elasticidade 2-D quando a configuração da malha de elementos finitos apresenta alguma modificação (com dano) e comparar com a malha normal (sem dano).

### 1.3 Justificativa

Atualmente, com o desenvolvimento tecnológico crescente, são projetadas estruturas cada vez mais sofisticadas e que são constituídas por materiais que atuam em conjunto para atingir determinadas condições físicas (propriedades mecânicas) exigidas nas especificações do projeto. Assim, uma das consequências imediatas desse aperfeiçoamento nas estruturas é a busca constante para melhorar cada vez mais a confiabilidade de modelos em elementos finitos, a fim de que as análises realizadas apresentem resultados de um modo fisicamente significativo. E também que estas soluções cheguem mais próximas dos valores reais, de modo que as predições para o modelo teórico estejam de acordo com as análises dinâmicas realizadas experimentalmente.

Logo, o problema escolhido, Identificação de Parâmetros utilizando GA e FRF, tem sua justificativa baseada na relevância atual dada às soluções otimizadas, bem como pelas vantagens de obter essas soluções por meio das técnicas de Algoritmos Genéticos e análise modal.

### 1.4 Organização do Trabalho.

O trabalho consiste basicamente de 8 capítulos.

O primeiro capítulo apresenta uma introdução contendo os objetivos do trabalho incluindo-se a justificativa e a organização do trabalho.

O segundo capítulo apresenta a revisão bibliográfica.

O terceiro capítulo faz uma abordagem da formulação do elemento de viga “*sandwich*” segundo a teoria de viga de Timoshenko e elasticidade 2-D utilizando um elemento retangular de 16 nós.

O quarto capítulo faz uma introdução aos métodos numéricos: algoritmos genéticos, nuvem de partícula e evolução diferencial. Cita-se as características de cada um dos métodos e algumas vantagens e desvantagens. Também apresentam-se algumas das terminologias, o tipo de representação utilizada, a função de cada um dos operadores genéticos e a influência de cada parâmetro no processo de busca da melhor solução do problema.

O quinto capítulo contém a fundamentação teórica da análise modal e experimental. Contém a discriminação dos materiais e equipamentos utilizados na experiência. Neste capítulo é mostrado um desenho esquemático com a disposição dos acelerômetros na viga “*sandwich*”.

O sexto capítulo contém a caracterização estática e dinâmica dos materiais. Descrição detalhada dos ensaios estáticos e dinâmicos para obtenção dos parâmetros físicos dos materiais.

O sétimo capítulo mostra os resultados numéricos obtidos utilizando o modelo de viga de o modelo 2D. Algoritmo Genético, Nuvem de Partículas (PSO) e o algoritmo de Evolução Diferencial são acoplados ao Método dos Elementos finitos usando elasticidade 2-D.

O oitavo capítulo apresenta as considerações finais do trabalho, avalia-se os resultados obtidos de maneira geral, conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.

## CAPÍTULO 2

### REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica foi separada nos seguintes assuntos: Caracterização dos Materiais, Teoria do Dano e MEF/Otimização.

#### a) Caracterização dos Materiais:

Segundo Inman (1996) a relação tensão/deformação para material viscoelástico é dado por um módulo complexo denotado por  $E^*$ , ou seja:

$$E^* = E(1 + \eta j) \quad (2.1)$$

Sendo  $j = \sqrt{-1}$  e  $\eta$  = fator de perda do material viscoelástico

O módulo complexo de um material, definido como na equação (2.1) pode ser medido e depende da frequência ( $\omega$ ) e da temperatura ( $T$ ) numa grande faixa de valores,  $E^* = E^*(\omega, T)$ .

Muitos materiais poliméricos exibem comportamento viscoelástico. Entre eles, podem ser citados as borrachas e substâncias “*rubberlike*”, por exemplo, neoprene, poliuretano, vinil, nylon e termoplásticos PSAl entre outros. O uso de tais materiais viscoelásticos em projetos visa melhorar o amortecimento da estrutura ou também pode servir como material isolante. Camadas de materiais viscoelásticos são frequentemente adicionadas em estruturas compostas com a finalidade fornecer um alto amortecimento, principalmente quando montadas juntamente com o alumínio e aço que tem um amortecimento interno relativamente pequeno. Desta maneira, o conjunto proporciona uma rigidez suficiente para carregamento estático e o amortecimento necessário para controlar a vibração da nova estrutura formada.

A noção de fator de perda é relatado pela definição da razão de amortecimento somente na ressonância, isto é, a frequência amortecida é dada por:  $\omega_{dr} = \omega = \sqrt{k/m}$ . Então quando a direção da frequência é a mesma da

frequência natural,  $\eta = 2\xi$ . Esta relação simples é frequentemente usada para descrever uma aproximação do decaimento livre de um material visco-elástico.

Segundo Oresten (2003), o uso de um material viscoelástico entre as faces de uma viga “*sandwich*” também tem como objetivo produzir o amortecimento dinâmico da estrutura.

Nos materiais poliméricos principalmente verifica-se o efeito da viscoelasticidade. Segundo Nashif *et al.* (1985) num material viscoelástico o amortecimento resulta de fenômenos e recuperação da rede polimérica após a deformação, existindo bastante influência da frequência e da temperatura por causa da relação direta destas propriedades com a movimentação molecular. Essa influência se revela na presença do módulo elástico variável no domínio da frequência, segundo a equação 2.2 que é a mesma equação 2.1 vista anteriormente.

$$E^* = E'(\omega) + iE''(\omega) \quad (2.2)$$

Sendo que  $E'$  e  $E''$  são respectivamente, as partes real e imaginária do módulo de elasticidade.

A determinação do módulo de elasticidade e do módulo de cisalhamento, igualmente relacionado à frequência de excitação da estrutura, são difíceis, assim como conferem dificuldades de observação e caracterização experimental.

Os modelos de placas e vigas de Euler-Bernoulli considera que a deformação do eixo neutro de uma viga é a soma de uma translação com uma rotação da seção. Porém, em vigas mais robustas esta consideração perde sua eficiência, daí a necessidade de utilizar-se a teoria da viga de Timoshenko que foi desenvolvida para suprir essa carência. O modelo de Timoshenko leva em consideração que a rotação da seção não se mantém mais perpendicular a linha neutra devido a presença de uma tensão cisalhante no campo de deformações da viga. Para cada tipo de seção transversal é utilizada uma constante que, desta maneira, acaba limitando a determinação das tensões impostas por carregamento, o que, no caso de geometrias mais complexas fica inviável.

Dentre os métodos numéricos, o MEF é utilizado para calcular os autovalores e autovetores de uma estrutura. O Método da Sensibilidade

(*Sensitivity Method*) é um técnica normalmente empregada para resolver problemas de ajuste de parâmetros . Qian et al. (1997) propuseram a identificação de parâmetros de compósitos laminados empregando este método. A partir do desenvolvimento convencional são obtidas as matrizes de rigidez, massa e amortecimento utilizando funções interpoladoras, e então é estabelecida a diferença entre os valores medidos e calculados. Os valores calculados têm sua primeira estimativa levantada por uma série de Taylor, e a correção para cada iteração é efetuada por Mínimos Quadrados. Dentro desse passo são também introduzidas as atualizações das matrizes do sistema. A diferença é inserida na chamada função custo, que é minimizada de maneira a permitir que as iterações necessárias sejam executadas até que o resíduo chegue aos níveis desejados.

Caracciolo *et. all.* (2000,2001,2004) mostraram que o módulo de elasticidade pode ser obtido experimentalmente em uma viga em balanço excitada por uma força de entrada harmônica, utilizando simultaneamente o deslocamento vertical de um ponto da viga medido por um sensor laser e a aceleração da base onde é colocado um acelerômetro para efetuar a medição. A partir da definição de módulo de elasticidade para um material isotrópico dada pela equação (2.3) é feita a dedução completa que não será aqui apresentada para obter-se a equação (2.4) da qual obtêm-se experimentalmente o módulo de elasticidade para uma viga em balanço (*cantilever*):

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.3)$$

$$E(i\omega) = \frac{\rho L^4}{h^2} \left[ F_1 \left( \frac{U_L(i\omega)}{a_b(i\omega)} + \frac{1}{\omega^2} \right)^{-1} + F_2 \omega^2 \right] \quad (2.4)$$

Sendo  $\rho$  = densidade do material;  $L$  = comprimento da viga;  $h$  = altura da seção da viga;  $U_L$  = deslocamento absoluto medido pelo laser;  $a_b$  = aceleração da base do suporte;  $F_1$  e  $F_2$  são parâmetros adimensionais

calculados de acordo com a teoria de vigas ( $F_1 = -1.0686$  e  $F_2 = 0.9707$ ) servindo para este tipo específico de viga.

A figura 2.1 (Caracciolo *et. all.*, 2004) exhibe as dimensões da amostra e o posicionamento do sensor de deslocamento (laser). A posição é escolhida num ponto nodal do 2º modo de vibrar. A figura 2.2 contém o desenho esquemático da montagem da viga no suporte do *shaker* para simular o engastamento da viga (Caracciolo *et. all.*, 2004).

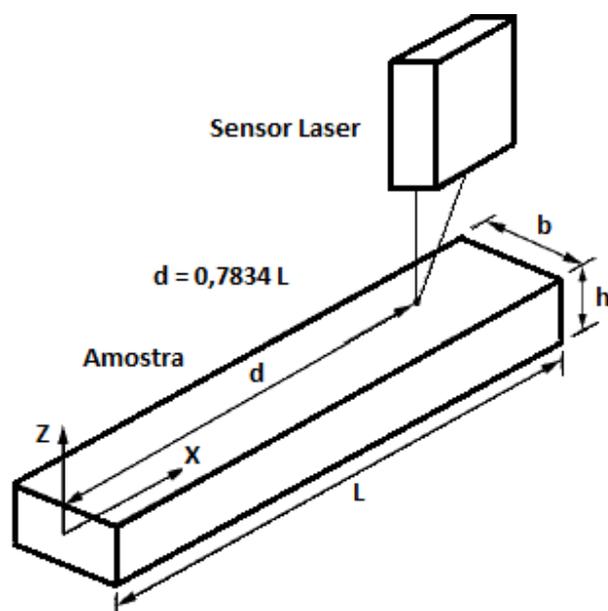


Figura 2.1 – Posicionamento do Sensor para a Medição da FRF Amostra  
(Caracciolo *et. all.*, 2004)

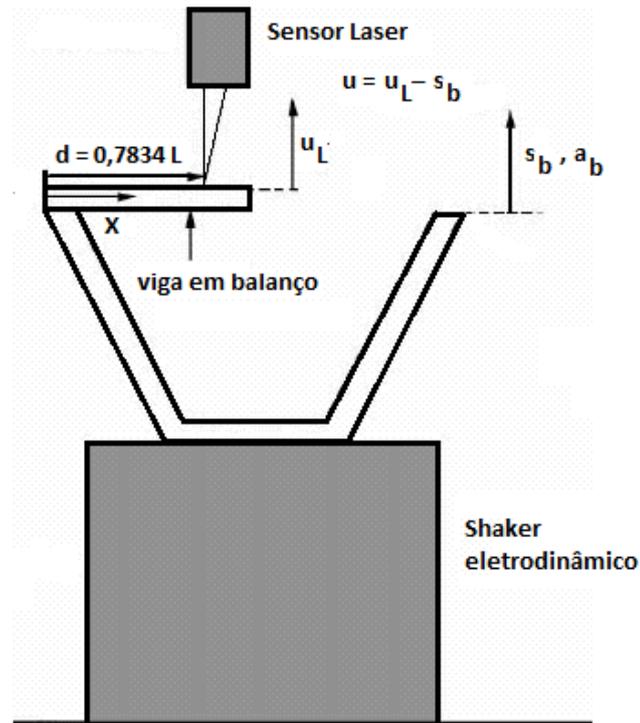


Figura 2.2 – Esquema de Acoplamento da Viga no Shaker Para Simular o Engastamento (Caracciolo *et. all.*, 2004).

Para uma viga composta de PVC e Carbonato de Cálcio plicando-se o método das variáveis reduzidas (Nashif et al., 1985) foram determinadas as curvas do módulo de elasticidade para diferentes temperaturas e frequências. Foram obtido também os ângulo de fase do módulo de elasticidade para diferentes temperaturas de um material viscoelástico, conforme mostrado nas Figuras 2.3 e 2.4 (Caracciolo *et. all.*, 2004).

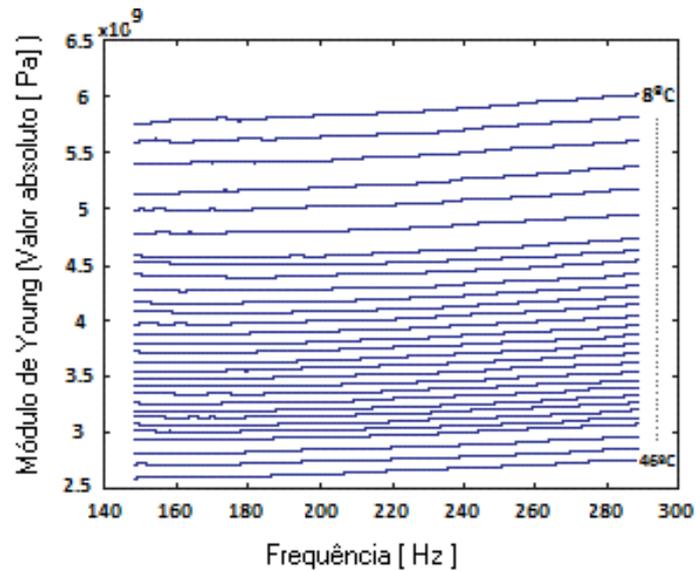


Figura 2.3 – Módulo de Elasticidade x Temperatura (Caracciolo *et al*, 2004)

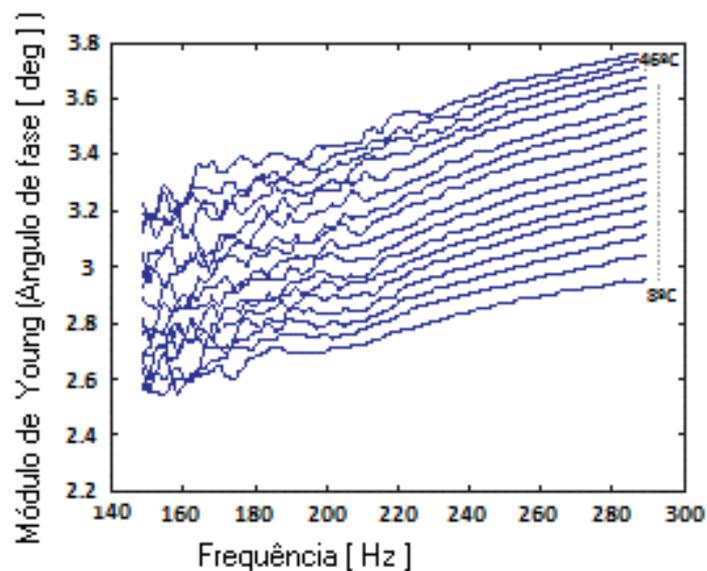


Figura 2.4 – Ângulo de Fase do Módulo de Elasticidade x Temperatura (Caracciolo *et al*, 2004)

Segundo Grafe (1998) o essencial para analisar estruturas vibrando é que o modelo matemático seja capaz de descrever a resposta de uma estrutura para cada posição,  $\{x\}$ , e tempo,  $t$ , quando é aplicada a força externa,  $\{f\}$ .

O fenômeno da vibração é o resultado da iteração entre as propriedades elásticas e as massas dos materiais envolvidos. Em estruturas dinâmicas as propriedades de rigidez e de massa são os parâmetros chave para a

formulação matemática e com a determinação de uma relação entre a entrada e a saída de um sistema. Tal modelo descritivo pode ser derivado do balanço de forças usando a 2ª lei de Newton, ou considerando o fato que a energia num sistema conservativo é constante. Neste caso, o método de Lagrange é aplicado. A descrição matemática do modelo é a peça central na análise de vibração mecânica e permite o entendimento do comportamento mecânico da estrutura.

A distribuição de massa e rigidez de um sistema dinâmico pode ser usada para expressar o balanço entre as interações das forças nos  $N$  graus de liberdade. A equação do movimento para um modelo discreto de um sistema conservativo (sem amortecimento) pode ser convenientemente expressa na notação vetorial e matricial como:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{f\} \quad (2.5)$$

Sendo:  $[M]$  = matriz de massa.

$[K]$  = matriz de rigidez.

$\{\ddot{x}\}$  = vetor de aceleração.

$\{x\}$  = vetor de deslocamentos.

$\{f\}$  = vetor de forças.

O sistema da equação (2.5) é composto por  $N$  equações diferenciais lineares (nesta aplicação) com coeficientes constantes e representam o equilíbrio dinâmico onde as forças de restauração elástica somada com as forças de inércia equilibram as forças externas aplicadas na estrutura,  $\{f\}$ .

O sistema como descrito na equação (2.5) pode ser analisado para respostas harmônicas assumindo-se que  $\{x\} = \{X\}e^{i\omega t}$  quando  $\{f\} = \{F\}e^{i\omega t}$ . Neste caso, depois de calcular as derivadas de  $\{\ddot{x}\}$  e substituir na equação (2.5) a equação de equilíbrio pode ser expressa para qualquer instante de tempo por:

$$(-\omega^2[M] + [K])\{x\} = \{F\} \quad (2.6)$$

O valor da amplitude dos deslocamentos generalizados pode ser obtido multiplicando-se os dois lados da igualdade da equação matricial (2.6) por  $(-\omega^2[M] + [K])^{-1}$ , reescrita segundo a equação (2.7).

$$\{x\} = [H]\{F\} \quad (2.7)$$

sendo:

$$[H] = (-\omega^2[M] + [K])^{-1} \quad (2.8)$$

e que é conhecida como matriz Função Resposta em Frequência.

Estruturas *sandwich* são extensivamente utilizadas na engenharia devido sua alta rigidez específica e resistência. A modelagem de estruturas *sandwich* tem sido muito estudada mas pouca atenção tem se dado para identificação das propriedades dos materiais (Shi *et. all.*, 2006). Desta forma, métodos utilizando dados vibratórios para realimentação de parâmetros físicos do modelo matemático tem sido utilizados. É comum a utilização de métodos de busca ou aproximação por séries.

Singh *et. all.* (2003) formularam um procedimento para um modelo dinâmico com um grau de liberdade com a finalidade de estimar os parâmetros de um sistema composto por uma espuma.

Pintelon *et. all.* (2004), estudaram a relação tensão-deformação de materiais viscoelásticos lineares caracterizados por módulo de elasticidade complexo em função da frequência. Mostrou-se que o módulo de elasticidade pode ser medido com precisão utilizando técnicas de identificação em uma faixa de frequências ampla. Realizaram experiências em uma viga sujeita a condições de contorno “*free-free*”. A estimação dos parâmetros foi feita usando vigas com materiais de PVC, de *plexiglass*, latão e cobre.

Hao e Rao (2004) apresentaram um estudo sobre amortecimento em materiais viscoelásticos. O modelo consiste em uma viga bi-engastada de poliestireno excitada por um *shaker*. Mede-se os primeiros quatro modos de vibrar através de um acelerômetro colocado sobre a amostra. Varia-se a

temperatura e analisa-se o comportamento dos parâmetros: fator de perda, fator de amortecimento e frequências.

Park (2004) usou métodos experimentais para medir as propriedades dinâmicas de estruturas complexas no domínio da frequência. A Propagação de ondas de flexão foi analisada usando duas teorias: a teoria de Timoshenko para vigas e a teoria clássica para vigas. Através do método de função de Transferência que requer um pequeno número de medidas de vibração foi investigada a velocidade de ondas, rigidez ao cisalhamento e flexão de estruturas de diferentes tipos de materiais.

Barknov *et. all.* (2009) desenvolveram uma técnica baseada em testes simples de vibração para caracterizar propriedades mecânicas de um painel do tipo sandwich composto de material visco-elástico não linear. O material usado para o núcleo foi um polímero 3M (ISD-112) com a finalidade de caracterizar as propriedades de amortecimento da estrutura. A identificação foi realizada com sucesso comparando-se os parâmetros dinâmicos experimentais da estrutura obtidos numericamente. A técnica de otimização utiliza uma função erro que é baseada nas respostas obtidas experimental e numericamente.

Muitos modelos matemáticos foram desenvolvidos para caracterização de materiais viscoelásticos, laminados ou estruturas *sandwich*: Deng et al (2003), Al-Khoury *et. all* (2002), Mossberg *et. all* (2001), Yu e Haddad (1996), Daya *et. all.*(2004).

Ohkami e Swoboda (1999) apresentaram dois procedimentos de identificação para materiais viscoelásticos lineares. O primeiro procedimento é uma extensão do método inverso e ajusta os parâmetros viscoelásticos linearizando a resposta em pequenos intervalos de tempo. Os parâmetros desconhecidos são incluídos nas equações do MEF implicitamente. A função objetivo é minimizada usando o método de Gauss-Newton para obter os parâmetros desconhecidos. O segundo procedimento usa o princípio de correspondência viscoelástica e a análise de identificação é feita por meio da Transformada de Laplace. Os dados são observados no domínio da Transformada de Laplace e por meio dos método dos mínimos quadrados os parâmetros são identificados. Esses parâmetros ajustados no domínio de Laplace são convertidos para o domínio do tempo. O módulo de cisalhamento

é modelados com Séries “Prony” para permitir a inversa analítica da Transformada de Laplace.

b) Teoria do Dano:

Existem muitos métodos para localizar danos em uma estrutura considerando as propriedades modais antes e após o dano como, por exemplo, Cornwell *et. all.* (1999) investigaram o problema de detecção de danos em uma placa usando as medidas dos parâmetros modais. Neste trabalho foi discutido o método que é baseado na mudança de energia de deformação da estrutura e que originalmente foi utilizado em vigas e é caracterizada por uma curvatura em uma dimensão. Neste caso, foi realizada uma generalização para estrutura do tipo placas caracterizada por uma curvatura em duas dimensões.

Muitos trabalhos significativos foram realizados, pelos mesmos autores, para detectar danos em estruturas considerando as mudanças na resposta dinâmica da estrutura, porque as mudanças nas frequências naturais e modos de vibração são dependentes da massa e rigidez. O algoritmo proposto mostrou-se eficaz na localização de danos em áreas com redução de rigidez em torno de 10% utilizando poucos modos e, mostrou êxito com poucos dados experimentais.

Niemann *et. all.* (2010) desenvolveram uma ferramenta que tem por objetivo detecção e localização de danos por meio de uma otimização topológica. O fator de rigidez é obtido pela otimização topológica com atualização sendo realizada a partir da comparação do modelo numérico sem dano com um modelo onde foi adicionado algum tipo de falha. A implementação do método é deduzida, e a partir da qual gera-se o arquivo de entrada do Nastran. Os danos introduzidos na amostra são controlados pela energia de baixo impacto. Os resultados obtidos com o Nastran foram comparados com trabalhos anteriores.

Ewins *et. all.* (2000) mostraram por meio de experiências laboratoriais que defeitos estruturais tais como fissuras podem ser detectados e localizados utilizando um laser com varredura contínua (LDV) . Um defeito pode ser

introduzido nos materiais que compõe a estrutura e como consequência causar descontinuidades modos de vibração. Neste trabalho, fissuras foram facilmente detectadas em placas finas de metal, enquanto que no caso de fendas estreitas não foram facilmente identificadas. Para melhorar esta técnica com LDV foi necessário controlar a interferência do ruído. Os resultados iniciais sugerem que o laser tem considerável potencial para detecção de defeitos em estruturas.

Fan e Qiao (2009) elaboraram um algoritmo para detecção de danos em uma placa composta. A idéia fundamental é que os danos (falhas) induzem a mudanças nas propriedades físicas do material (massa, amortecimento, rigidez, etc.) e essas alterações causam modificações nos parâmetros modais (frequências naturais, modos de vibração, etc.) da estrutura. Neste trabalho foi apresentado o algoritmo 2-D “*continuous wavelet transform*” (CWT) para detecção de danos usando “Dergauss2D” para ondas curtas para estruturas do tipo placas. O algoritmo foi aplicado para determinar os modos de vibração numéricos de uma placa engastada em uma extremidade com diferentes tipo de danos para mostrar a eficiência e viabilidade do método. O método CWT foi aplicado para obter os 5 primeiros modos de vibração em uma placa composta. Também foi realizada uma comparação com outros métodos, “2-D *Gapped Smoothing Method*” (GSM) e “*Strain Energy Method*” (SEM).

Yoon *et. all.* (2005) apresentaram um procedimento para localizar a variabilidade na rigidez estrutural. Para alguns tipos de estrutura, essa variação está diretamente relacionada a defeitos de fabricação ou danos em serviço. Assim esse procedimento conseguiu detectar a falta de homogeneidade causada por danos incipientes em estruturas que não são homogêneas. Neste trabalho foi realizado um tratamento estatístico dos índices para poder discriminar as áreas com uma significativa variabilidade na rigidez. Considerou-se também que as áreas danificadas são suficientemente pequenas em comparação com a superfície total. O procedimento teve sucesso para localizar regiões danificadas em uma placa composta utilizando o método de elementos finitos para placas para realizar a análise.

c) MEF/Otimização:

Chang (2006) utilizou o algoritmo genético para estimar os parâmetros de sistemas não lineares.

Backstrom e Nilsson (2007) propuseram um novo método que descreve a dinâmica de estruturas complexas. O método utiliza a teoria de quarta ordem e por meio da implementação dessa teoria podem ser obtidos os parâmetros de vibração de uma viga sandwich. A teoria de ordem superior para um modelo de viga sandwich é utilizada para estimar o módulo de rigidez ao cisalhamento e flexão para os modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko.

Elkhaldi *et. all.* (2012) usaram o método gradiente para identificação do comportamento viscoelástico de estruturas sandwich. Utilizando os dados experimentais e numéricos foram estimadas as propriedades viscoelásticas do material. Nas simulações numéricas foram determinados os autovalores complexos (frequências naturais). Uma técnica de diferenciação direta foi usada para obter as derivadas numéricas exatas.

Mota Soares *et. all.* (2013) utilizam um modelo simples e eficiente para otimização do amortecimento de um placa sandwich com múltiplas camadas, com o núcleo de material viscoelástico. As camadas elásticas são modeladas utilizando a teoria clássica de placas enquanto que o núcleo é modelado usando a teoria de 3ª ordem de Reddy's para deformação por cisalhamento. A resposta dinâmica da estrutura é caracterizada pela solução dos auto valores para encontrar as frequências naturais e o correspondente fator de amortecimento modal. O algoritmo é baseado no gradiente e a otimização é realizada maximizando-se o fator de amortecimento modal.

Hornig e Flowers (2003) empregam da técnica de algoritmos genéticos para caracterização de um modelo de histerese de um material composto.

Kim e Krider (2006) estudam a identificação de parâmetros por meio do método inverso para resolver um problema não linear usando placas compostas de materiais elásticos e viscoelásticos. As propriedades do material, que aparecem nas relações constitutivas, são investigados por meio de um método de otimização a partir da função objetivo que usa os dados da tensão como referência. O algoritmo inverso consiste de um método de otimização acoplado a um algoritmo que calcula as tensões da estrutura e a

partir das tensões são determinadas as propriedades do material que compõe o sistema.

Ichchou *et. all.*(2008) apresentaram um método de identificação aplicado a estruturas com núcleo na forma de colmeia em 1-D e 2-D. Com base em um algoritmo que fornece uma curva de dispersão dependente de  $\theta$  nesse trabalho. O objetivo foi obter a vibração flexural de vigas simétricas com núcleos na forma de colmeias e painéis.

Castello (2008) estimam os parâmetros de materiais viscoelásticos levando em consideração a dissipação interna por meio das variáveis internas. Uma equação constitutiva para materiais viscoelásticos adaptada para modelagem no domínio do tempo foi proposta baseada no conceito de variáveis internas e a termodinâmica dos processos irreversíveis, essa equação constitutiva é capaz de lidar com respostas viscoelásticas comuns como fluência e fenômenos de relaxação. Foi empregado o método inverso comparando-se os resultados experimentais e os numéricos e a partir de um algoritmo de otimização minimizar uma função erro.

Lima *et al.* (2010) apresentam uma formulação de análise de sensibilidade para analisar placas compostas por uma combinação de fibra de vidro reforçadas e camadas de elastômeros visco-elásticos para atenuação da vibração. Neste trabalho, os procedimentos numéricos foram particularmente adaptados para caracterizar as propriedades do material levando em consideração a temperatura e também a frequência. A análise de sensibilidade que foi utilizada baseia-se no método dos elementos finitos para realizar a análise dinâmica da estrutura. A Função resposta em Frequência é obtida em relação a um conjunto de parâmetros de projeto, tais com espessura da camada, orientação da fibra, etc. O método aplicado neste trabalho foi comparado com o método das diferenças finitas.

Rébillat e Boutillon (2011) desenvolvem um método simples implementação para medir as propriedades elásticas e o amortecimento de uma estrutura sandwich com núcleo heterogêneo. A medição é realizada em alguns pontos de uma placa espessa. O método de estimação dos parâmetros usa dados numéricos e experimentais. Os modos numéricos são obtidos pelo método de Rayleigh-Ritz.

## CAPÍTULO 3

### O ELEMENTO FINITO PARA A VIGA SANDWICH

#### 3.1 Introdução

Neste capítulo será mostrada a dedução do elemento de viga sandwich baseado na equação de equilíbrio obtida com a teoria da Viga de Timoshenko e a formulação do elemento utilizando elasticidade 2-D

#### 3.2 Formulação Para Viga de Timoshenko (Zenkert, 1997)

Neste tópico apresenta-se a formulação básica para o elemento de viga “sandwich” elaborada por Oresten (2003).

Na figura 3.1 apresenta-se a configuração não simétrica das faces da viga “sandwich”.

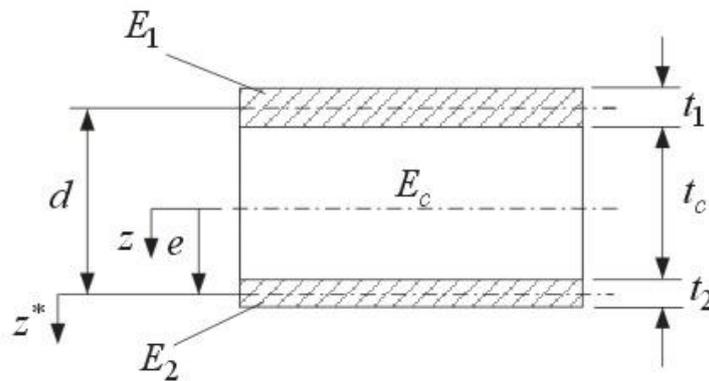


Figura 3.1 – Configuração Não Simétrica das Faces da Viga “Sandwich”

Fazendo-se uma simplificação na Equação do movimento para viga “sandwich” de Timoshenko para o caso de vibração livre não amortecida, onde as cargas  $q$  e  $N_x$  são nulas, obtendo-se a Equação Homogênea do movimento da viga representada na equação (3.1) .

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho^* \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\rho}{S} \left( D \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - \Re \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} \right) - \Re \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

sendo:

$w = w(x, t)$  é uma função harmônica.

$\rho^*$  é o peso por unidade de superfície cujo valor é calculado pela equação (3.2)

$$\rho^* = \rho_1 t_1 + \rho_2 t_2 + \rho_3 t_3 \quad (3.2)$$

$\mathfrak{R}$  é a inércia rotatória da seção transversal pela equação (3.3)

$$\mathfrak{R} = \frac{\rho_1 t_1^3}{12} + \frac{\rho_2 t_2^3}{12} + \frac{\rho_c t_c^3}{12} + \rho_1 t_1 (d - e)^2 + \rho_2 t_2 e^2 + \rho_c t_c \left( \frac{t_c + t_2}{2} - e \right)^2 \quad (3.3)$$

$S$  é a rigidez ao cisalhamento de uma seção transversal cujo valor é determinado pela equação (3.4).

$$S = \frac{Gh}{k} \quad (3.4)$$

Na qual  $G$  é o módulo de cisalhamento,  $h$  é altura da seção e  $k$  é o fator de cisalhamento, que varia de acordo com a geometria da seção

$D$  é a rigidez deflexão (3.5)

$$D \cong \frac{E_1 t_1^3}{12} + \frac{E_2 t_2^3}{12} + \frac{E_c t_c^3}{12} + E_1 t_1 (d - e)^2 + E_2 t_2 e^2 + E_c t_c \left( \frac{t_c + t_2}{2} - e \right)^2 \quad (3.5)$$

Admitindo-se que  $w = w(x, t) = W(x)e^{i\omega t}$  é uma função harmônica expressa em função do tempo e espaço, e derivando-se  $w(x, t)$  em relação ao tempo e substituindo na equação 3.1 e arranjando-se os termos, obtém-se a equação (3.6):

$$e^{i\omega t} \left[ D \frac{\partial^4 W(x)}{\partial x^4} + \rho^* (-\omega^2) W(x) - \frac{\rho}{S} \left( D (-\omega^2) \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} - \mathfrak{R} \omega^4 W(x) \right) - \mathfrak{R} (-\omega^2) \frac{\partial^2 W(x)}{\partial x^2} \right] = 0 \quad (3.6)$$

Aproximando-se  $W(x)$  por  $\tilde{w}(x)$  na equação (3.6), obtém-se a equação (3.7) onde  $\varepsilon(x)$  é o resíduo.

$$\left[ D \frac{\partial^4 \tilde{w}(x)}{\partial x^4} + \rho^* (-\omega^2) \tilde{w}(x) - \frac{\rho}{S} \left( D (-\omega^2) \frac{\partial^2 \tilde{w}(x)}{\partial x^2} - \Re \omega^4 \tilde{w}(x) \right) - \Re (-\omega^2) \frac{\partial^2 \tilde{w}(x)}{\partial x^2} \right] = \varepsilon(x) \quad (3.7)$$

Aplicando-se o Método dos Resíduos Ponderados (Método de Galerkin) na equação (3.7) obtém-se a matriz dinâmica equivalente equação (3.8) para um elemento finito e a partir da mesma são obtidas as matrizes  $[K_\sigma]$ ,  $[M]$  e  $[K]$  conforme apresentado nas equações (3.9) a (3.11).

$$[K^e] = D[K] - \omega^2 \left[ \rho^* [M] + \left( \frac{\rho^* D}{S} + \Re \right) [K_\sigma] \right] + \omega^4 \frac{\rho^* \Re}{S} [M] \quad (3.8)$$

onde:

$[K_\sigma]$  é uma parcela da matriz de rigidez dada por:

$$[K_\sigma] = \frac{1}{30l} \begin{bmatrix} 36 & 3l & -36 & 3l \\ 3l & 4l^2 & -3l & -l^2 \\ -36 & -3l & 36 & -3l \\ 3l & -l^2 & -3l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Sendo:  $l$  = comprimento da viga

$[M]$  é a matriz de massa do elemento de viga convencional com densidade unitária

$$[M] = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

$[K]$  é a matriz de rigidez do elemento de viga convencional (Euler Bernoulli), considerando  $EI = 1$

$$[K] = \frac{1}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Substituindo-se as matrizes (3.9) a (3.11) na matriz dinâmica equivalente equação (3.8) determina-se a equação (3.12):

$$[K^e] \{q\} = \{F\} \quad (3.12)$$

O vetor  $\{F\}$  representa o vetor de forças aplicadas.

Os graus de liberdade para um elemento de viga de Timoshenko são mostrados na Figura 3.2.

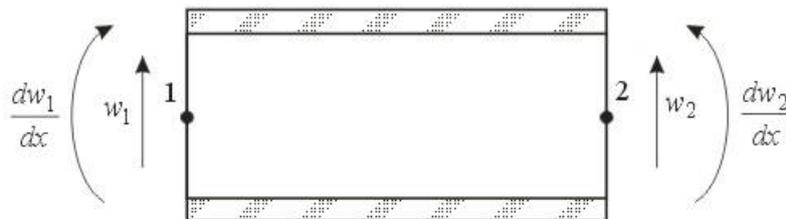


Figura 3.2 – Graus de liberdade Para um Elemento “Sandwich” Tratado Conforme Viga de Timoshenko

### 3.3 A Formulação do Elemento Utilizando Elasticidade 2D

Neste tópico apresenta-se a formulação matemática do elemento baseado no Método de Elementos Finitos para problemas bidimensionais.

Os valores dos deslocamentos, das componentes de tração, das forças de corpo e das forças distribuídas são escritas em função da posição indicada por  $(x,y)$  a partir do sistema de coordenadas de referência.

O vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}$  é dado por  $\{u\} = [u, v]^T$  onde  $u$  e  $v$  são as componentes de  $\{u\}$  no sistema de referência  $x$  e  $y$ .

A tensão e a deformação são dadas por  $\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T$  e

$$\{\epsilon\} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}]^T.$$

Na figura 3.3 apresenta-se de uma forma generalizada os problemas em 2D. As forças de corpo, vetores de tração e unidade de volume são escritas como  $\{f\} = [f_x, f_y]$ ,  $\{T\} = [T_x, T_y]$  e  $dV = t dA$ . Onde a espessura  $t$  esta na direção do eixo  $z$ .

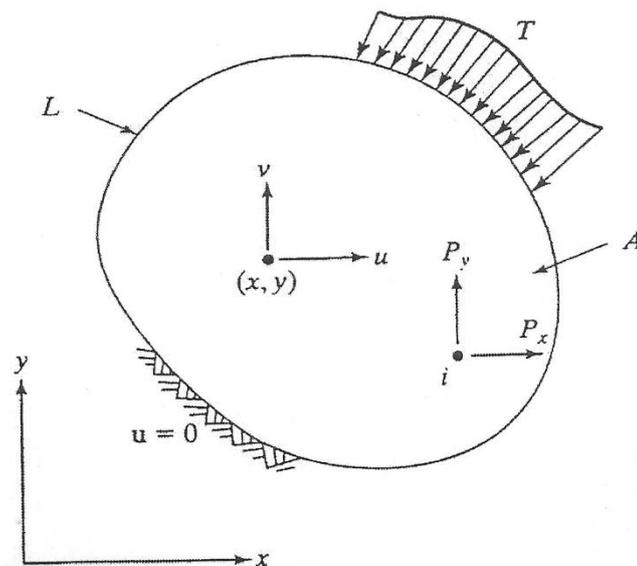


Figura 3.3 – Problemas Bidimensionais

A força de corpo  $\{f\}$  tem a unidade força/unidade de volume, enquanto que a forças de tração tem como unidade força/unidade de área.

A relação deslocamento-deformação é dada por

$$\{\epsilon\} = \left[ \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right]^T.$$

A relação entre as tensões e deformações é dada por  $\{\sigma\} = D^*\{\epsilon\}$ , tal que  $D^*$  é a matriz constitutiva do material.

### 3.3.1 Elementos Finitos Bidimensionais Planos

#### 3.3.1.1 Estado Plano de Deformação

Problemas que envolvem corpos longos cuja geometria e carga não mudam muito ao longo de seu eixo longitudinal estão sob estado plano de deformação.

Nesses casos, as variáveis dependem apenas das coordenadas  $x$  e  $y$ , admitindo-se que os deslocamentos  $W$ , na direção de  $z$ , são nulos nas seções transversais (suficientemente longe das extremidades).

Assim, as deformações  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{yz}$  e  $\gamma_{zx}$  são consideradas nulas, ficando o estado de deformações determinado por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

A tensão na direção do eixo  $z$  fica sendo dada por:

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$$

A relação constitutiva para um material elástico isotrópico são expressas pela equação 3.13:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.13)$$

#### 3.3.1.2 Estado Plano de Tensão

Ao contrário do caso anterior, o estado plano de tensões ocorre em sólidos cujas dimensões na direção  $z$  são muito pequenas.

Nesse caso, as tensões  $\tau_{yz}$  e  $\tau_{zx}$  são nulas na superfície e  $\sigma_z$  é nula ao longo da espessura. As componentes  $\sigma_x, \sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  podem ser supostas constantes na espessura (direção Z).

As equações constitutivas são expressas por:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

com a componente  $\varepsilon_z$  calculada pela Equação (3.14):

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (3.14)$$

$$\text{e } \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Os dois casos podem ser tratados pelo método dos elementos finitos de maneira semelhante, já que as equações constitutivas podem ser expressas em termos de mesmas tensões e deformações dada pela equação (3.15).

$$\sigma = D^* \varepsilon \quad (3.15)$$

A única diferença é que, no caso de estado plano de deformação, a tensão é calculada pela equação (3.16) e, no caso de estado plano de tensões a deformação tem de ser calculada pela equação (3.17);

$$\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y) \quad (3.16)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{1-\nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (3.17)$$

### 3.3.2 Interpolação dos Deslocamentos.

Os deslocamentos do elemento são escritos a partir das funções de forma do elemento finito (no caso, foi utilizado um elemento cúbico isoparamétrico de 16 nós) e os valores nodais do campo de deslocamentos desconhecidos. Assim, tem-se a equação (3.18):

$$u = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_{16} & 0 \\ 0 & \Phi_1 & \dots & 0 \\ & & & \Phi_{16} \end{bmatrix} q = \Phi q \quad (3.18)$$

onde  $q = \{u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_{16}, v_{16}\}^T$  e o par  $\{u_i, v_i\}$  representa os deslocamentos nodais associados ao nó  $i$ .

Usando a relação deformação-deslocamento, obtém-se a equação (3.19):

$$\epsilon = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial \Phi_{16}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \dots & 0 \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \Phi_{16}}{\partial y} & \frac{\partial \Phi_{16}}{\partial x} \end{bmatrix} q = Bq \quad (3.19)$$

### 3.3.3 Matriz de Rigidez do Elemento.

A energia de deformação elástica do elemento,  $U_e$ , é dada pela equação (3.20):

$$U_e = \frac{1}{2} \int \epsilon^T D \epsilon t dA = \frac{1}{2} \int q^t B^t D B q t dA = \frac{1}{2} q^t \int B^t D B t dA q \quad (3.20)$$

onde:  $t$  representa a espessura do elemento que pode ser variável ou não;  $A$  é área do elemento.

A expressão de  $U_e$  também pode ser escrita pela equação (3.21).

$$U_e = \frac{1}{2} \int \epsilon^T D \epsilon t dA = \frac{1}{2} \int q^t B^t D B q t dA = \frac{1}{2} q^t K q \quad (3.21)$$

de onde se identifica a matriz de rigidez do elemento dada pela equação (3.22).

$$K = \int B^t D B t dA \quad (3.22)$$

### 3.3.4 Matriz de Massa do Elemento.

A energia cinética do elemento, T é dada pela equação (3.23).

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \dot{u}^t \dot{u} t dA = \frac{1}{2} \int \dot{q}^t \Phi^t \Phi B \dot{q} t dA = \frac{1}{2} \dot{q}^t \int \rho \Phi^t \Phi t dA \dot{q} \quad (3.23)$$

onde  $\rho$  representa a densidade do material  $\left(\frac{Kg}{m^3}\right)$ . A equação (3.23) pode ser escrita como sendo a equação (3.24).

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}^t M \dot{q} \quad (3.24)$$

de onde se identifica a matriz de massa do elemento pela equação (3.25).

$$M = \int \rho \Phi^t \Phi t dA \quad (3.25)$$

### 3.3.5 Elemento Isoparamétrico Cúbico de 16 Nós

A análise da estrutura do tipo sandwich foi elaborada com base no Método dos Elementos Finitos (MEF) utilizando elasticidade 2D com um elemento finito retangular de 16 nós como é mostrado na Figura 3.4.

A construção das suas funções de forma é feita a partir da combinação das funções de forma do elemento cúbico unidimensional segundo as direções  $\xi$  e  $\eta$ . Como exemplo, desenvolve-se a função de forma para o nó 10, no qual se emprega o polinômio de Lagrange do elemento cúbico unidimensional correspondente ao nó 1 associado a direção  $\xi$  e que passa pelos pontos 10, 9, 8 e 7, multiplicado pelo polinômio de Lagrange que passa pelos pontos 1, 12, 11 e 10, correspondendo ao nó 4 associado a direção  $\eta$ . Assim a função de forma  $N_{10}(\xi, \eta)$  é mostrada na equação (3.26):

$$N_{10}(\xi, \eta) = \frac{1}{16}(\xi-1)(1-9\xi^2)\frac{1}{16}(1+\eta)(9\eta^2-1) = \frac{1}{256}(\xi-1)(1-9\xi^2)(1+\eta)(9\eta^2-1) \quad (3.26)$$

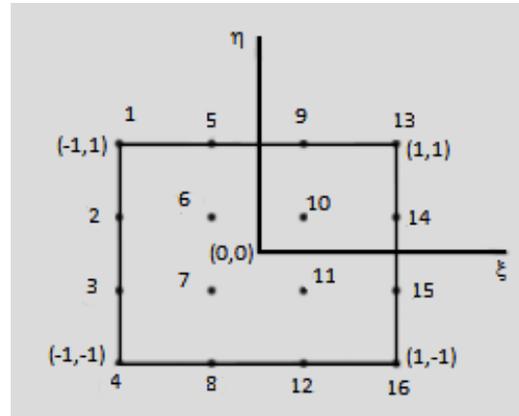


Figura 3.4 – Elemento Finito Retangular de 16 Nós

Na Figura 3.5 mostra-se o gráfico para o nó 10 utilizando a equação 10 desenvolvida anteriormente.

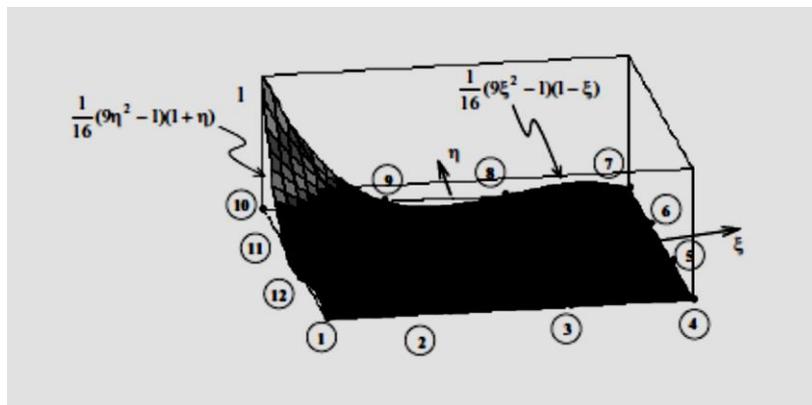


Figura 3.5 – Função de Forma do Nó 10 Para o Elemento Finito Retangular de 16 Nós.

As funções reduzidas são exibidas na sua forma normal, deduzidas a partir do elemento cúbico unidimensional, na equação 3.27

$$\begin{aligned}
N_1(r) &= \frac{1}{16}(9r^2 - 1)(1 - r) \\
N_2(r) &= \frac{9}{16}(1 - r^2)(1 - 3r) \\
N_3(r) &= \frac{9}{16}(1 - r^2)(1 + 3r) \\
N_4(r) &= \frac{1}{16}(9r^2 - 1)(1 + r)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Analogamente, podem-se obter as funções de forma para os outros nós do elemento finito retangular 16 nós, conforme mostrado na equação (3.28)

$$\begin{aligned}
\phi_1(\xi, \eta) &= N_1^{(3)}(\xi)N_1^{(3)}(\eta) \\
\phi_2(\xi, \eta) &= N_2^{(3)}(\xi)N_1^{(3)}(\eta) \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
\phi_{16}(\xi, \eta) &= N_2^{(3)}(\xi)N_3^{(3)}(\eta)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

### 3.3.6 Jacobiano e Cálculo das Derivadas Globais

A expressão geral para o cálculo da matriz de rigidez dos elementos finitos, apresentada na equação (3.29) envolve derivadas das funções de forma em relação as coordenadas globais  $x, y$  através da matriz de deformação  $[B]$ . Como as funções de interpolação estão expressas em função das coordenadas locais  $\xi, \eta$ , deve-se aplicar a regra da cadeia. Considerando um nó  $a$  de um elemento obtêm-se a equação (3.30):

$$\left[ K_e \right] = \int_V [B]^T [D][B] dV = \int_{-y}^y \int_{-x}^x [B]^T [D][B] \det[J] dx dy \tag{3.29}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} = \frac{\partial N_a}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_a}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \eta} = \frac{\partial N_a}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_a}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \tag{3.30}$$

que podem ser representados na forma matricial pela Eq. (3.31):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_a}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_a}{\partial x} \\ \frac{\partial N_a}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

A matriz [J] é denominada Jacobiano da Transformação. O determinante do Jacobiano é um fator de escala de área para o mapeamento que transforma as coordenadas do sistema de referência global para o local.

Dessa maneira para se obter as derivadas das funções de forma em relação as coordenadas globais x, y deve-se inverter a matriz do Jacobiano.

O diferencial de volume dV, presente nas expressões para o cálculo das matrizes e vetores de carregamento dos elementos finitos, pode ser escrito nas coordenadas locais  $\xi, \eta$  a partir do determinante do Jacobiano conforme a equação (3.32):

$$dV = \det[J] t.d_\xi .d\eta \quad (3.32)$$

Portanto as integrais de volume presentes nas relações para o cálculo das matrizes de rigidez e de massa e dos vetores de carregamento podem ser expressas em função das variáveis locais. Conforme é mostrado na equação (3.33) que representa a matriz de rigidez do elemento.

$$[K_e] = \int_V [B]^T [D][B] dV = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [D][B] \det[J] d\xi d\eta \quad (3.33)$$

A integral apresentada na equação (3.33) normalmente não pode ser calculada analiticamente. Assim, devem-se utilizar as técnicas de integração numérica, tais como: Newton-Cotes e Quadratura de Gauss-Legendre, que serão apresentadas no próximo tópico. Quando o elemento finito apresenta-se muito distorcido pode não haver uma correspondência única entre as coordenadas no mapeamento do sistema global e local. Para contornar esse

problema, deve-se manter o sinal do Jacobiano inalterado para todos os pontos do domínio considerado, dessa forma garante-se que o mapeamento será único.

## CAPÍTULO 4

### MÉTODOS DE AJUSTE DE PARÂMETROS

#### 4.1 Introdução

Neste trabalho, foram utilizados três métodos para ajuste de parâmetros físicos de um sistema mecânico. Os dois primeiros métodos utilizados são baseados em algoritmos evolucionários: o primeiro método a ser usado foi o Algoritmo Genético (GA) e o segundo foi o algoritmo Evolução Diferencial (DE), enquanto que o terceiro aplicado no ajuste de parâmetros refere-se ao método conhecido como nuvem de partículas (PSO). Todos os métodos utilizam a FRF obtida experimentalmente como referência para ajuste dos parâmetros de um modelo matemático.

#### 4.2 Algoritmos Evolucionários

O Algoritmo Genético (AG) e o Algoritmo Evolução Diferencial (DE) pertencem à classe dos Algoritmos Evolucionários (AE) e, por essa razão, herdam muito das terminologias dos algoritmos evolucionários. Os AEs são inspirados na teoria de evolução de Darwin, e é devido a esse fato que os problemas de otimização são resolvidos através de um processo em que uma população de soluções evolui ao longo de várias gerações, sendo que as melhores soluções “sobrevivem” com uma maior probabilidade e podem originar novas soluções através da aplicação de operadores de reprodução.

Os diferentes passos de uma iteração dos AEs são descritos em mais detalhe a seguir:

1. **Inicialização** - No início, uma população de  $n$  indivíduos é gerada aleatoriamente, na qual cada indivíduo representa uma possível solução para o problema. O tamanho da população é importante, pois pode afetar a qualidade da solução final bem como o tempo de

processamento. Numa população pequena, o processamento é rápido mas as soluções geradas podem não ser as melhores, enquanto numa população grande a probabilidade de produzir soluções melhores é maior, mas o tempo de processamento é maior.

2. **Cálculo de aptidão** – é efetuado com base na função objetivo, sendo realizada uma análise do desempenho de cada indivíduo (cada indivíduo recebe um valor numérico, proporcional à sua qualidade).
3. **Seleção** – Os indivíduos mais aptos em cada geração são utilizados para gerar uma nova população através de cruzamento e mutação. A probabilidade de cada indivíduo ser selecionado é proporcional à sua aptidão.

Os dois métodos de seleção mais usados:

**O método de seleção por roleta** - cada seção da roleta é proporcional ao valor de adaptação de cada indivíduo; quanto maior o valor, maior o tamanho da seção. Contudo, quando as diferenças de aptidão são ínfimas este método degrada-se geração após geração.

**O método de seleção por classificação** - o indivíduo é selecionado de acordo com o seu posicionamento dentro da população através da equação (4.1)

$$p(i) = \frac{(n+1)-ordem(i)}{\sum_{j=1}^n j} \quad (4.1)$$

onde:  $n$  - representa o tamanho da população;  $ordem(i)$  - é a função de ordem que dá o posicionamento de cada indivíduo na população.

**Cruzamento** – dois indivíduos (pais) selecionados na etapa anterior são cruzados originando novos indivíduos (filhos).

Nas representações lineares existem três tipos de cruzamento mais usados:

**Cruzamento de um ponto** - os indivíduos a serem cruzados são divididos aleatoriamente num ponto, e existe uma permuta da metade inicial de um indivíduo com a metade final do outro indivíduo e vice-versa.

**Cruzamento de dois pontos** - as operações são semelhantes, mas existem dois pontos de corte. Em seguida faz-se o emparelhamento das diferentes partes de um indivíduo com as do outro indivíduo de modo aleatório.

**Cruzamento uniforme** - é gerada aleatoriamente uma “máscara de cruzamento” que vai servir como mecanismo de decisão, para designar qual dos pais vai fornecer o gene ao descendente. O mecanismo funciona da seguinte forma:

1. Como exemplo é gerado uma máscara de cruzamento aleatório 0100111.
2. Seguindo o encadeamento binário da máscara, caso o valor seja igual a 1, o gene do pai (mãe) 1 contido nessa posição é copiado para o filho, se for 0 é copiado o gene de uma mãe (pai) 2 dessa posição.

**Mutação** – As operações de mutação consistem em alterações localizadas de genes no indivíduo, sendo realizadas para evitar uma convergência prematura para mínimos locais.

### 4.3 Algoritmos Genéticos.

Os algoritmos genéticos (GA's) são métodos de otimização e pesquisa que imitam os mecanismos de evolução dos seres vivos. Estes algoritmos seguem o princípio da seleção natural e a sobrevivência do mais apto, conforme Charles Darwin em seu livro: “A Origem das Espécies” (1859).

O método foi introduzido por John Holland (1975) através do estudo dos postulados do processo de Evolução Biológica citados a seguir:

- A evolução é um processo que opera sobre os cromossomos do organismo e não sobre o organismo que os carrega. Desta maneira, o que ocorrer com o organismo, durante sua vida, não irá se refletir sobre seus cromossomos. Entretanto o inverso não é verdadeiro: os cromossomos do organismo são o projeto e terão reflexos diretos sobre todas as características desse organismo (o indivíduo é a decodificação de seus cromossomos).
- Seleção natural é o elo entre os cromossomos e o desempenho que suas estruturas decodificam (o próprio organismo). O processo de seleção natural faz com que, aqueles cromossomos, que decodificarem organismos mais bem adaptados ao seu meio ambiente, sobrevivam e reproduzam mais do que aqueles que decodificam organismos menos adaptados.
- O processo de reprodução é o ponto através do qual a evolução se caracteriza. Mutação pode causar diferenças entre os cromossomos dos pais e o de seus filhos. Além disso, processos de recombinação (“Crossover”) podem fazer com que os cromossomos dos filhos sejam bastante diferentes dos de seus pais, uma vez que eles combinam materiais cromossômicos de dois genitores.

David Goldberg (1989), popularizou o método, resolvendo um problema muito difícil envolvendo controle de transmissão de gases em um gasoduto.

Nesta técnica de otimização são utilizados:

- 1) Um espaço de busca onde estão todas as possíveis soluções do problema.
- 2) Uma função de aptidão (objetivo), que é normalmente utilizada para avaliar cada um dos indivíduos da população (solução), associando a cada um deles uma nota.

Algumas das vantagens de um algoritmo genético são:

- a) Trabalha tanto com parâmetros contínuos como discretos.
- b) Não requer informação da derivada.
- c) Adaptam-se bem a computadores paralelos porque cada processador pode calcular uma função separadamente em algum momento do processamento.

d) Trabalham com dados gerados numericamente, dados experimentais, ou funções analíticas.

e) São fáceis de serem implementados em computadores

f) Otimizam um número grande de variáveis.

g) Realizam pesquisas simultâneas em uma grande região do espaço de busca, pois trabalham com uma população de pontos e não com um único ponto.

#### 4.3.1. Algumas Terminologias Usadas em Algoritmos Genéticos.

- Função Aptidão (“*Fitness Function*”) – corresponde a Função Objetivo a ser Otimizada, e tem a função de fazer a conexão entre o algoritmo genético e o problema a ser resolvido. A função toma como entrada o cromossomo (indivíduo), que é uma tentativa de solução do problema, e retorna um valor que mede o seu desempenho no problema: este número representa o seu grau de aptidão, que informa quão longe ou perto este cromossomo está da solução ótima do problema. A função aptidão tem a finalidade de fazer o mesmo papel que o meio ambiente faz com os organismos vivos, ou seja, fornece o grau de adequação do organismo ao meio ambiente e o seu valor será usado para o processo de seleção na reprodução.
- Gene ou Genes – Na biologia corresponde a unidade genética. No AG corresponde a uma unidade básica (parâmetro) que faz parte do cromossomo.
- Cromossomo – é um vetor de parâmetros (variáveis), cujo valor é passado para função objetivo a ser otimizada. Um cromossomo representa uma das soluções possíveis que pertencem ao espaço de busca. Se o cromossomo apresenta  $n$  parâmetros da função, então o espaço de busca é um espaço com  $n$  dimensões.
- População – Uma população é um vetor de cromossomos (indivíduos).

- Diversidade – Refere-se à distância média entre indivíduos numa população. Uma população tem alta diversidade se a distância média é grande; caso contrário a população terá baixa diversidade. A diversidade é essencial para os AG's porque possibilita que o algoritmo pesquise uma grande região no espaço de busca.
- Pais e filhos – Para criar a próxima geração, o algoritmo genético seleciona certos indivíduos na população, chamados de pais ("*parents*"), e os mesmos são usados para gerar novos indivíduos na próxima geração, conhecidos como filhos ("*children*"). Tipicamente o algoritmo selecionará os pais com melhores aptidões.
- Cruzamento é a capacidade de extrair o melhor gene a partir de indivíduos diferentes e combiná-los então para formar um filho com potencial superior.
- Mutação adiciona diversidade na população e desse modo aumenta a probabilidade do algoritmo gerar indivíduos com melhores valores de aptidão.
- Genótipo – representa a informação contida no cromossomo.
- Fenótipo – representa o objeto, estrutura ou organismo construído a partir das informações do genótipo. É o cromossomo decodificado. Por exemplo, considere que o cromossomo codifica parâmetros como as dimensões das vigas em um projeto de construção de um edifício. O fenótipo é o edifício construído.
- Alelo – representa os valores que o gene pode assumir.

#### **4.3.2. Etapas de Um Algoritmo Genético**

As etapas que um GA normalmente desenvolve são:

- a) Criar uma população inicial de soluções potenciais (indivíduos) utilizando um gerador aleatório.
- b) Avaliar cada indivíduo da população por meio da função aptidão.

c) Selecionar os indivíduos mais aptos que serão os genitores da próxima geração.

d) Gerar uma nova população através de manipulações genéticas (cruzamento e mutação). Retornar ao item (b) para calcular a aptidão de cada indivíduo da nova população.

e) Repetir o processo até que a condição de parada seja satisfeita.

### 4.3.3. Esquema de Seleção

Na natureza, a seleção dos indivíduos é realizada pela sobrevivência do mais apto. Mais de um indivíduo é adaptado para o meio ambiente e grandes são as suas chances de sobreviver e gerar descendentes transferindo seus genes para próxima geração.

Nos algoritmos genéticos, os melhores indivíduos são ordenados de acordo com o cálculo da função aptidão. Se o problema de otimização é de minimização, então indivíduos com menor valor da função aptidão terão grandes chances de serem escolhidos para recombinação e gerar descendentes.

#### Tipos de seleção:

#### Seleção Proporcional a Aptidão (Roleta).

Primeiramente é calculada a probabilidade de cada indivíduo da população atual pela equação (4.2) e a partir dos resultados é feita a escolha dos pais usando o método da roleta com o objetivo de copiar os membros mais aptos para reprodução.

$$P_i = \frac{f(x_i)}{\sum_{k=1}^N f(x_k)} \quad (4.2)$$

No método da Roleta cada setor da Fig. 4.1 representa um indivíduo com probabilidade  $P_i$ . Um número randômico entre 0 e  $2p$  determina qual o setor selecionado e o indivíduo que será escolhido.

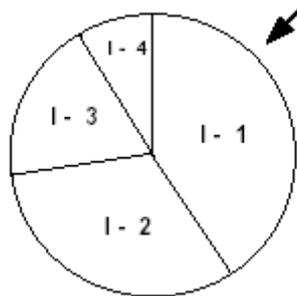


Figura 4.1 – Método da roleta

Tabela 4.1 – Probabilidades para cada indivíduo.

Número do sorteio	Indivíduo escolhido	Função Aptidão	Probabilidade – P
1	I - 1	4	0.4
2	I - 2	3	0.3
3	I - 3	2	0.2
4	I - 4	1	0.1

### Seleção Por Posto (*Rank selection*)

O indivíduo é sorteado de acordo com o valor de sua função aptidão e então é atribuído um posto para o mesmo. O posto do melhor indivíduo é igual a 1. O posto do indivíduo que ocupa o segundo lugar é 2 e assim sucessivamente.

A probabilidade de cada indivíduo é calculada de acordo com a função não-linear apresentada na Eq. (4.3). Para a seleção dos pais é usado o método da roleta.

$$P = \beta(1 - \beta)^{(\text{rank}-1)} \quad (4.3)$$

Onde:  $\beta$  é um coeficiente definido pelo usuário.

#### 4.3.4. Representação de Parâmetros

A representação binária é historicamente importante, uma vez que foi utilizada nos trabalhos iniciais de Holland (1975), e é o sistema de representação tradicional, sendo fácil de utilizar e manipular. Porém, quando há muitos parâmetros, obtém-se longas cadeias de bits que podem fazer o algoritmo convergir lentamente. Neste tipo de representação utilizam-se operadores convencionais, por exemplo: *Crossover* de 1 ponto, *crossover* de 2 pontos, *crossover* de  $n$  pontos e *crossover-uniforme*.

A relação existente entre o código binário e as variáveis reais limitadas por  $X_{\min}$  e  $X_{\max}$ , onde o comprimento do cromossomo ( $m=10$  bits) é representado na Tab. 4.2.

Tabela 4.2 - Mapeamento de Variáveis Reais Para o Código Binário

Variável real	Código binário
$X_{\min}$	0000000000
$X_{\max}$	1111111111

O mapeamento das variáveis reais que pertencem ao intervalo limitado por  $[X_{\min}$  e  $X_{\max}]$  é calculado através da equação (4.4):

$$valorreal = X_{\min} + \left( \frac{valorbinario}{2^n - 1} \right) (X_{\max} - X_{\min}) \quad (4.4)$$

Nos algoritmos genéticos cada indivíduo pode representar uma variável ou um conjunto de variáveis. No caso de problemas com multi-variáveis deve-se avaliar a ação conjunta de todos os parâmetros que constituem o indivíduo. Por exemplo, num problema com quatro variáveis, cuja solução é igual ao vetor

$X = [X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4]$ , onde cada  $X_i$  é uma variável e seu conjunto representa o indivíduo.

Na Tab. 4.3 é indicada uma das maneiras de se representar as variáveis ou parâmetros de cada indivíduo da população. Neste caso cada uma das variáveis  $X_{i,j}$  tem comprimento de 6 bits.

Tabela 4.3 – Representação Binária de 4 Indivíduos Com Quatro Variáveis.

População	Variáveis			
	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$X_4$
Indivíduo 1	100101	010110	011000	101001
Indivíduo 2	110011	001110	100110	011110
Indivíduo 3	111001	110011	001100	110011
Indivíduo 4	110101	011100	110011	011010

#### 4.3.5. Operadores Genéticos

##### a) Cruzamento

O cruzamento ou corte (*crossover*) ocorre em duas etapas, sendo a primeira onde se determina de forma aleatória quais os indivíduos que se combinarão e, também de maneira aleatória, em que posição do cromossomo se processará o cruzamento. A Fig. 4.2 mostra um exemplo de cruzamento utilizando a codificação binária.

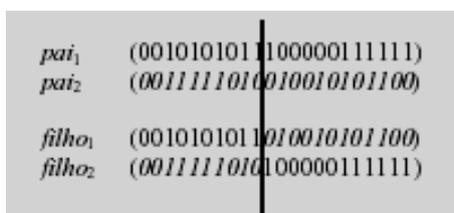


Figura 4.2 - Cruzamento

## b) Mutação

A mutação é uma alteração aleatória e ocasional de uma posição qualquer do cromossomo. Esta alteração ocorre de acordo com uma probabilidade prefixada e, por exemplo, no caso de representação binária, poderá significar mudança de “1” para “0” ou de “0” para “1”. A Fig. 4.3 apresenta um caso de mutação utilizando a codificação binária.

Antes	<i>filho<sub>1</sub></i>	(0010101010010010101100)
	<i>filho<sub>2</sub></i>	(0011111011100000111111)
Depois	<i>filho<sub>1</sub></i>	(0010001010010010111100)
	<i>filho<sub>2</sub></i>	(0011111011000000111111)

Figura 4.3 – Mutação

### 4.3.6. Parâmetros Genéticos

Os parâmetros genéticos são elementos importantes nos AG's. Eles controlam todo processo de busca, influenciando diretamente a velocidade de convergência, e evitando que aconteça a supremacia de uma determinada sub-população, o que geraria o chamado “Elitismo”.

#### a) Tamanho da população

O tamanho da população afeta a eficiência da população. Uma população pequena produz um desempenho menor e poderá levar a solução para uma região local. Uma grande população eleva o tempo computacional, pois o número de avaliações da Função Objetivo é muito maior. Mas em compensação poderá encontrar uma solução global.

### **b) Probabilidade de cruzamento ( $P_c$ )**

A probabilidade de cruzamento é um valor percentual do número de indivíduos que experimentam mutação em relação ao número total de indivíduos. Uma alta probabilidade de cruzamento, sem elitismo, faz com que os indivíduos com alto desempenho sejam eliminados antes mesmo que a seleção possa produzir aperfeiçoamento. E uma baixa taxa de cruzamento diminui a exploração das características genéticas.

### **c) Probabilidade de Mutação ( $P_m$ )**

É o percentual do número de bits escolhidos aleatoriamente para serem alterados em relação ao número total de bits da população. Uma baixa taxa de mutação não permite a restauração da diversidade genética da população. Enquanto que uma alta taxa de mutação resulta em busca essencialmente aleatória.

## **4.4 Evolução Diferencial**

O algoritmo DE foi primeiramente proposto em meados da década de 1990 para a otimização de sistemas contínuos (Price, 1999; Price, 1997; Price, 2005) e uma das principais diferenças que ocorre no algoritmo DE refere-se à mutação diferencial que não é diretamente baseada ou inspirada em processos naturais e sim, em heurísticas e argumentos puramente matemáticos adequados à otimização, ao invés de argumentos derivados da natureza. O sucesso do algoritmo é devido a essa característica do mecanismo simples de mutação diferencial, o qual usa a diferença entre dois vetores, escolhidos aleatoriamente das soluções candidatas, para produzir novas soluções. À medida que a população evolui, a direção de busca e o tamanho do passo na mutação mudam ao longo do tempo, ajustando-se de acordo com a distribuição da população no espaço de busca. O algoritmo DE usa uma abordagem estocástica para solucionar os problemas de otimização, combinando operadores aritméticos simples com as operações clássicas de cruzamento,

mutação e seleção, de modo que a população inicialmente aleatória possa evoluir para uma população com soluções de alta qualidade.

#### 4.4.1 Evolução Diferencial para Otimização com Variáveis Contínuas

Nesta seção, as bases do algoritmo DE para solução de problemas de otimização de sistemas contínuos é brevemente revista (Price, 1997; Price, 1999; Price, 2005). O problema de otimização de sistemas contínuos não-lineares pode ser generalizado como:

$$\min \text{ ou } \max f(\vec{x}) \quad (4.5)$$

sujeito a:

$$g_j(\vec{x}) \leq 0, j = 1, \dots, p \quad (4.6)$$

$$h_k(\vec{x}) = 0, k = 1, \dots, q \quad (4.7)$$

$$x_{i_{min}} \leq x_i \leq x_{i_{max}} (i = 1, \dots, n) \quad (4.8)$$

Sendo:  $p$  é o número de restrições de desigualdade;  $q$  é o número de restrições de igualdade;  $\vec{x}$  é o vetor de variáveis (parâmetros) e  $n$  é o número de parâmetros

O algoritmo DE, assim como outros algoritmos evolucionários, utiliza uma população de soluções candidatas randomicamente geradas, dentro dessa região de domínio, para minimizar a função de custo. Cada solução candidata, ou indivíduo, é representada por um vetor do espaço Real, neste caso, mostrado na equação (4.9) por  $x_i^t$ :

$$x_i^t = \begin{bmatrix} x_{i,1}^t \\ x_{i,2}^t \\ \vdots \\ x_{i,j}^t \\ \vdots \\ x_{i,n-1}^t \\ x_{i,n}^t \end{bmatrix}, t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n. \quad (4.9)$$

onde:  $t$  indica a geração do indivíduo;  $i$  representa o indivíduo na população;  $j$  representa o índice do parâmetro ou variável.

A figura 4.4 mostra o espaço de busca em problemas com duas variáveis onde foi gerada a perturbação através da diferença entre pares de vetores aleatórios.

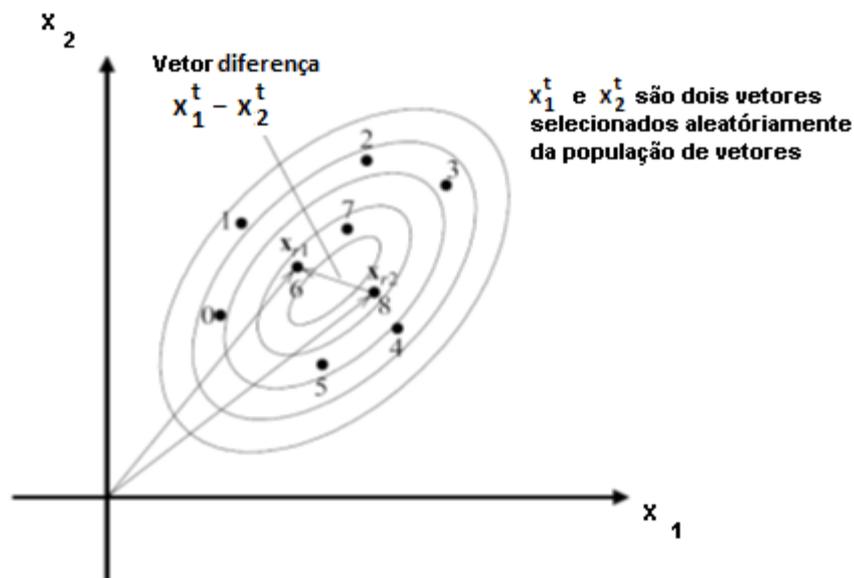


Figura 4.4 – Gerando a Perturbação:  $X_1^t - X_2^t$

Para gerar novas populações, DE combina o típico operador de cruzamento com seu peculiar operador de mutação: o operador de mutação diferencial. A mutação diferencial apresentada na figura 4.5 usa a diferença entre pares de vetores escolhidos randomicamente dentre as soluções candidatas da população e o vetor resultante dessa diferença é adicionado a uma terceira solução também escolhida aleatoriamente. A mutação diferencial representa uma perturbação que é aplicada ao terceiro indivíduo de modo a produzir soluções mutantes de acordo com a equação (4.10):

$$v_i^t = x_{r_1}^t + FP(x_{r_2}^t - x_{r_3}^t) \quad (4.10)$$

Onde os índices  $r_1$ ;  $r_2$ ;  $r_3$  representam indivíduos randômicos e mutuamente distintos, escolhidos da população.  $FP$ , um peso aplicado ao vetor diferença, é um parâmetro do algoritmo. A solução  $x_{r_1}^t$ , na qual a mutação diferencial é aplicada, é denominada solução base ou vetor base. Para cada indivíduo  $x_i^t$  da população é gerado um vetor mutante correspondente. A solução  $v_i^t$  é recombinada com a solução corrente  $x_i^t$  para produzir uma solução experimental  $u_i^t$  que, por sua vez, competirá com a solução corrente. Na versão básica do algoritmo DE, uma recombinação discreta com probabilidade  $P \in [0; 1]$  é adotada, mas outros operadores de recombinação podem também ser utilizados. Finalmente, os valores da função objetivo da solução experimental,  $u_i^t$  e da solução corrente,  $x_i^t$  são comparados para decidir qual solução irá sobreviver na próxima geração. Se a solução experimental for melhor que, ou igual, a solução corrente, ela substitui a solução corrente na próxima geração, caso contrário, a solução corrente é preservada e a solução experimental é descartada;

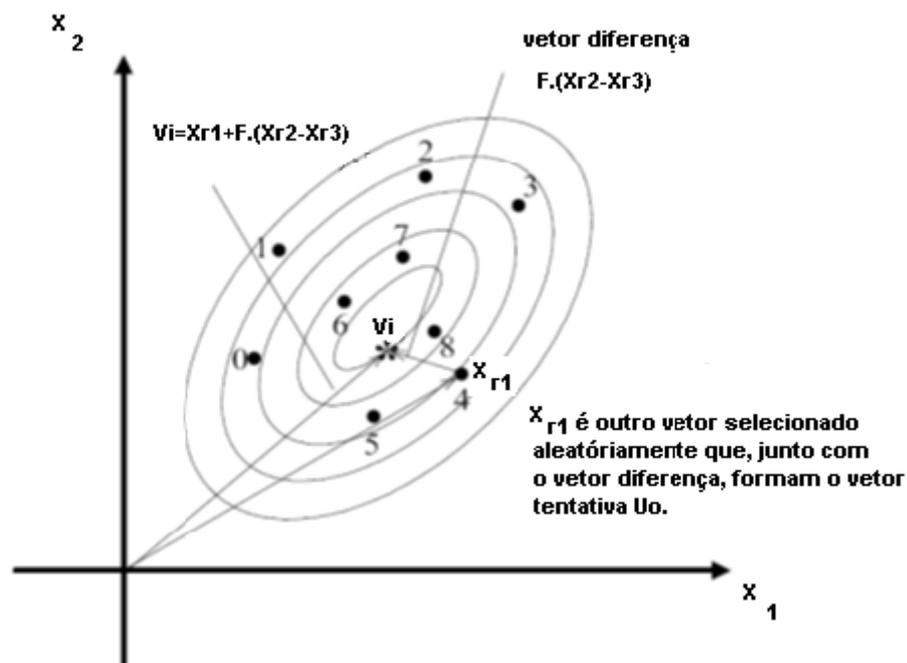


Figura 4.5 – Mutação

#### 4.4.2 Implementação do algoritmo DE

1. Inicializar a população;
2. Avaliar a população;
3. Gerar uma nova população em que cada indivíduo  $i$  é gerado em paralelo de acordo com os seguintes critérios:
  - i. Selecionar aleatoriamente 3 indivíduos distintos  $r_1, r_2, r_3$  da população diferentes de  $i$ ;
  - ii. Gerar um vetor experimental baseado no esquema utilizado (explicado abaixo);
  - iii. Aplicar o cruzamento entre o vetor experimental e o vetor do indivíduo corrente.
  - iv. Se o candidato não for válido, alterar as suas coordenadas inválidas, redefinindo-as para o limite mais próximo;
  - v. Avaliação do candidato;
  - vi. Utilizar o candidato na próxima geração só se for melhor que o indivíduo original;
  - vii. Alterar o indivíduo original pelo candidato se este for mais apto.
3. Voltar ao passo 3 se o critério de parada não tiver sido ainda atingido.

As estratégias aplicadas na evolução diferencial podem variar de acordo com o tipo de indivíduo a ser modificado (o indivíduo corrente ou o indivíduo melhor adaptado) e com o número de indivíduos utilizados para a perturbação. A combinação destes fatores pode formar um esquema do tipo DE/a/b/ em que pode ser alterado da seguinte forma:

- a – especifica o vector a ser perturbado, podendo ser “rand” caso se queira utilizar um indivíduo corrente escolhido aleatoriamente ou “best” para se utilizar o indivíduo melhor adaptado.
- b - especifica o número de diferenças ponderadas usadas para a perturbação de a.

Algumas das estratégias utilizadas são as seguintes:

DE/rand/1

$$\vec{t} = \vec{x}_{r_1} + FP(\vec{x}_{r_2} - \vec{x}_{r_3})$$

DE/best/1

$$\vec{t} = \vec{x}_{best} + FP(\vec{x}_{r_2} - \vec{x}_{r_3})$$

DE/best/2

$$\vec{t} = \vec{x}_{best} + FP(\vec{x}_{r_1} + \vec{x}_{r_2} - \vec{x}_{r_3} + \vec{x}_{r_4})$$

Sendo:  $\vec{x}_{r_j}$ , com  $2 \leq j \leq 3$  representa os diferentes indivíduos selecionados aleatoriamente da população, sendo estes diferentes do indivíduo  $\vec{x}_{r_i}$ ;  $x_{best}$  é o indivíduo mais apto e  $FP$  representa o parâmetro de escala (valores tipicamente entre 0 e 2).

#### 4.5 Nuvem de Partículas – PSO

O desenvolvimento original do programa de Otimização por Nuvem de partículas (PSO) é atribuído a Kennedy, Eberhart e Shi (1995) e surgiu da experiência de algoritmos modelados a partir da observação do comportamento social de determinadas espécies de pássaros. Assim, utilizando-se dessas observações foi implementado um algoritmo simplificado que imita o comportamento das aves nos seus vôos quando procuram locais para os ninhos de seus filhotes ou alimentos. O livro de Kennedy e Eberhart descreve muitos aspectos filosóficos da PSO e inteligência coletiva.

Otimização por enxame de partículas (PSO) é um método computacional que tem por objetivo encontrar a solução ótima para um problema de otimização, ou seja, obter um ponto de mínimo ou de máximo global de uma função que está sujeita a algum tipo de restrição. No método PSO inicialmente

é gerada uma população de soluções candidatas, aqui apelidado de partículas, que são representadas por vetores que definem a velocidade atual e a sua localização, sendo que os vetores que definem a posição são atualizados segundo a velocidade atual, seu aprendizado pessoal e o aprendizado adquirido pelo bando. O algoritmo PSO é de fácil implementação requerendo operadores matemáticos simples. Embora seja classificado como evolucionário não apresenta os operadores genéticos cruzamento e mutação porque não possui a característica de sobrevivência do mais apto.

No entanto, metaheurísticas tais como PSO não garantem que uma solução ótima seja encontrada sempre. Mais especificamente, porque esse algoritmo não utiliza o gradiente do problema a ser otimizado, o que significa que o mesmo não exige que a função do problema de otimização seja diferenciável como é exigido por métodos de otimização clássicos, como os métodos gradiente, newton e quasi-newton.

No modelo matemático uma população de partículas é gerado de forma aleatória em um determinado espaço de busca. Dentro desse espaço cada partícula representa uma possível solução para o problema que tem a sua posição definida. As partículas tem um valor de velocidade associada a si mesmas, e realizam um movimento baseando-se em três vetores que se somam. Esses vetores que influenciam no movimento são conhecidos como: Inércia, influência pessoal e influência social. O primeiro vetor impele a partícula em uma direção idêntica a que ela vinha se movimentando. O vetor seguinte atrai a partícula na direção da melhor posição até aquele momento, ocupado pela partícula dentro da sua vida. E o último vetor atrai a partícula na direção da melhor localização da solução no espaço até o momento descoberto pelo enxame. A figura 4.6 exhibe uma representação com vetores para mostrar como uma partícula desloca-se no espaço.

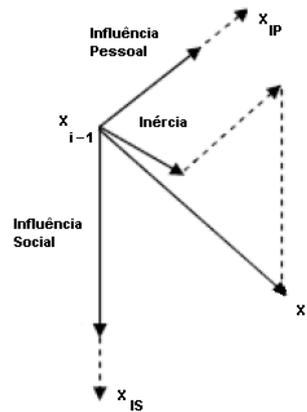


Figura 4.6 - Movimento da Partícula no Espaço

#### 4.5.1 Modelo Básico

As simulações do comportamento de um bando de aves (enxame de abelhas) durante o vôo em busca de alimentos ou de locais para colocarem seus filhos em segurança são controladas por três regras simples:

1. Separação - evitar choques com vizinhos muito próximos (repulsão de curto alcance). A figura 4.7 mostra como funciona a primeira regra.



Figura 4.7 – Regra 1 Separação

2. Alinhamento - orientar sua trajetória de maneira que siga a direção média dos vizinhos mais próximos. A figura 4.8 mostra como funciona a segunda regra.

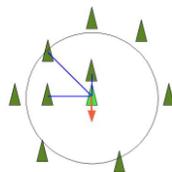


Figura 4.8 – Regra 2 Alinhamento

4. Coesão - orientar a posição para a média dos vizinhos mais próximos (atração de longo alcance). A figura 4.9 mostra como funciona a terceira regra.

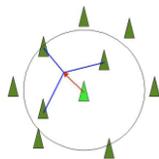


Figura 4.9 – Regra 3 coesão

Para exemplificar, as três regras citadas anteriormente, pode-se mostrar que a movimentação dos pássaros no espaço em busca de alimentos ou locais para proteção de seus filhotes são determinados pelo "alinhamento", "separação" e "coesão".

A seguir busca-se dar um significado para cada uma das regras do exemplo:

Alinhamento - significa que um pássaro tende a transformar sua trajetória de forma que ele se movimente na mesma direção que as outras aves do bando.

Separação - significa que um pássaro vai virar para procurar evitar o contato com outro pássaro que esteja muito próximo.

Coesão - significa que um pássaro vai avançar para perto de outras aves que estão num determinado ambiente.

Quando dois pássaros estão muito próximos, a regra "separação" substitui as outras duas, que são desativadas até a separação mínima seja alcançada.

Dessa maneira, obedecendo as três regras simples, o bando se move de uma forma extremamente realista criando as interações e os movimentos complexos, o que seria extremamente difícil de simular o movimento caso não se aplica-se essas regras.

Algumas das vantagens desse método podem ser relacionadas:

- algoritmo de implementação simples;
- o método não utiliza o cálculo de derivadas;

- algoritmo com poucos parâmetros;
- o algoritmo é eficiente na pesquisa de ótimo global;

Em contrapartida, o PSO apresenta algumas desvantagens:

- baixa convergência nos estágios de pesquisa mais refinados;
- não garantem que uma solução ótima seja encontrada sempre;

Por esses motivos, o método PSO pode ser aplicado em:

- Treinamento em Redes neurais;
- Otimização estrutural;
- Sistemas de Identificação em biomecânica;
- Processos Químicos;

A seguir escreve-se o algoritmo básico do método PSO:

- 1) Criar uma população de partículas uniformemente distribuídas sobre o espaço de pesquisa.
- 2) Calcular a posição de cada partícula de acordo com a função objetivo.
- 3) Se a posição da partícula atual é melhor que a posição anterior, atualize-a.
- 4) Determinar a melhor partícula (de acordo com as melhores posições encontradas anteriormente).
- 5) Calcular a velocidade das partículas de acordo com a equação.
 
$$V_i^{t+1} = V_i^t + C_1 U_1^t (pb_i^t - x_i^t) + C_2 U_2^t (gb^t - x_i^t)$$
- 6) Calcular a Movimentação executado pela partícula para sua nova posição de acordo com a equação:
 
$$x_i^{t+1} = x_i^t + V_i^{t+1}$$
- 7) Retorne para o passo 2 até que o critério de parada seja satisfeito.
- 8) Mostrar os resultados
- 9) Fim

#### 4.5.2 Principais Variações do PSO

Algumas das modificações que ocorrem na atualização da equação da velocidade são devido à inércia, influência pessoal e influência social.

$$V_i^{t+1} = V_i^t + C_1 U_1^t (pb_i^t - x_i^t) + C_2 U_2^t (gb^t - x_i^t)$$

Sendo:

- O primeiro termo da equação corresponde a inércia
- O segundo termo da equação corresponde a influência pessoal
- O terceiro termo da equação corresponde a influência social

#### 4.5.3 Diferentes Topologias da População

Nas topologias apresentadas na figura 4.10 cada partícula  $i$  tem um vizinho próximo  $N_i$

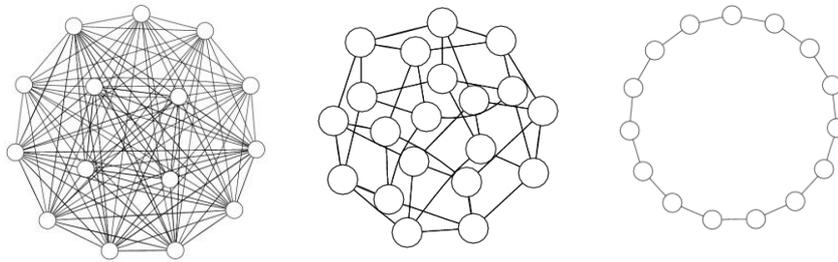


Figura 4.10 - Topologias da População de Partículas

#### 4.5.4 Fluxograma do Algoritmo PSO

A Fig. 4.11 mostra o fluxograma para o Algoritmo PSO sincronizado.

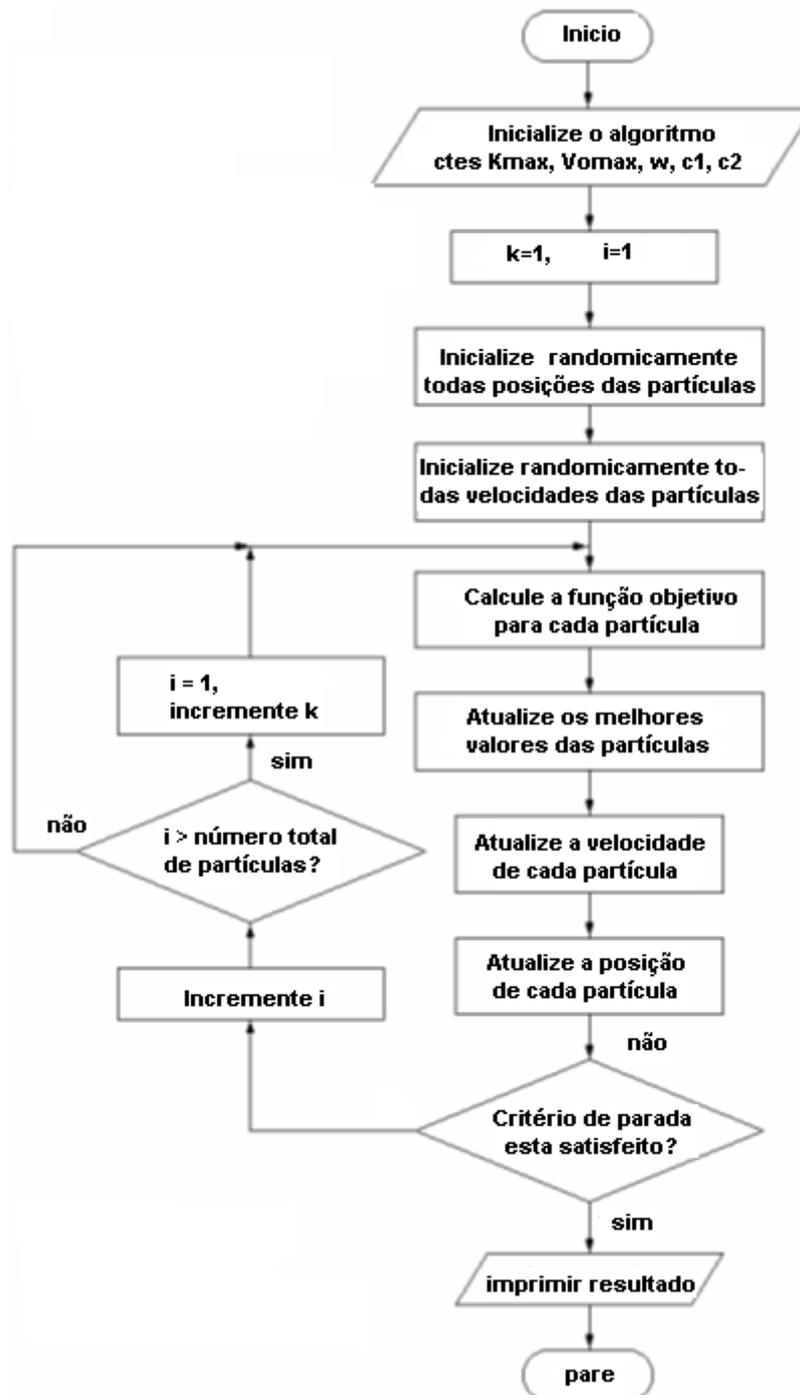


Figura 4.11 - Fluxograma do Método PSO Sincronizado

## CAPÍTULO 5

### ANÁLISE MODAL E EXPERIMENTAL

#### 5.1 Introdução.

A figura 5.1 apresenta um fluxograma com todas as etapas do processo para realizar a identificação dos parâmetros dos materiais da viga “sandwich”.

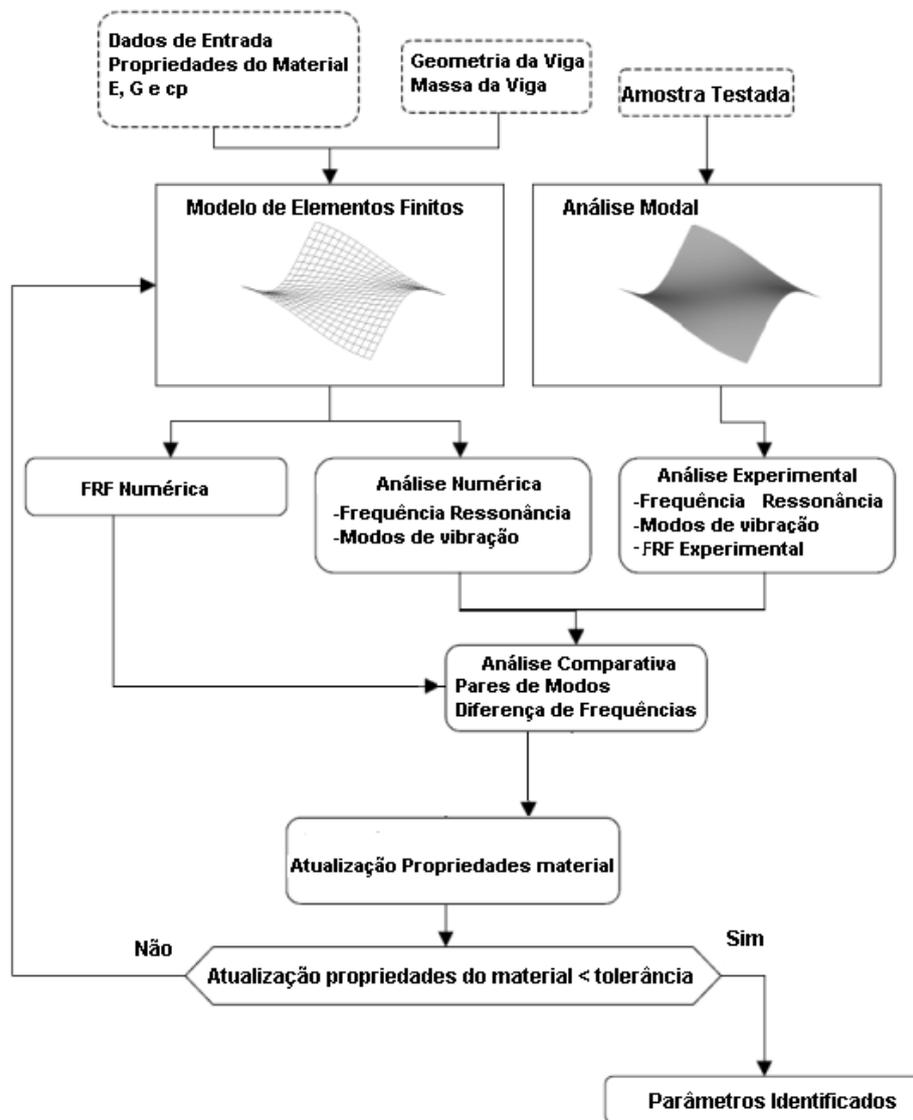


Figura 5.1 – Fluxograma

## 5.2 Análise modal.

A análise modal é o processo constituído de técnicas teóricas e experimentais que possibilitam a construção de um modelo matemático representativo do comportamento dinâmico do sistema em estudo, a fim de determinar os seus parâmetros modais: frequências naturais, modos de vibração e fatores de amortecimento modal. Tais parâmetros são frequentemente determinados por métodos analíticos, por exemplo, utilizando-se o Método dos Elementos Finitos. Em alguns casos, o modelo analítico sequer existe; assim, os parâmetros modais podem ser determinados experimentalmente. Nas situações, em que o modelo exista, a abordagem experimental pode servir para a verificação e validação dos resultados do modelo analítico.

## 5.3 O Modelo Modal.

O movimento de um sistema contínuo, considerado linear, já discretizado em  $N$  graus de liberdade, pode ser descrito por um sistema de equações diferenciais de segunda ordem (as equações de movimento), conforme a equação 5.1:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (5.1)$$

Sendo:

$\mathbf{M}$  = matriz de massa, de ordem  $N \times N$ ;

$\mathbf{C}$  = matriz de amortecimento, de ordem  $N \times N$ ;

$\mathbf{K}$  = matriz de rigidez, de ordem  $N \times N$ ;

$\ddot{\mathbf{x}}$  = vetor das acelerações nas coordenadas generalizadas, de ordem  $N \times 1$ ;

$\dot{\mathbf{x}}$  = vetor das velocidades nas coordenadas generalizadas, de ordem  $N \times 1$ ;

$\mathbf{x}$  = vetor dos deslocamentos nas coordenadas generalizadas, de ordem  $N \times 1$ ;

$\mathbf{f}$  = vetor das forças externas, de ordem  $N \times 1$ ;

Para a obtenção do modelo modal, considera-se a resposta livre não amortecida do sistema estrutural a partir da Eq. (4.1), resultando na equação (5.2):

$$\mathbf{M}\ddot{x}(t) + \mathbf{K}x(t) = \mathbf{f}(t) \quad (5.2)$$

A solução geral da equação (5.2), para condições iniciais não nulas, é dada por uma combinação linear de soluções do tipo dado pela equação (5.3):

$$x = \emptyset e^{\lambda t} \quad (5.3)$$

Sendo:  $\emptyset$  = vetor de elementos reais, de ordem  $N \times 1$ , chamado de vetor modal, representa um modo de vibração do sistema;  $\lambda$  = número imaginário.

Destaca-se, neste ponto, a influência da aproximação adotada para o modelo de amortecimento na resposta do sistema estrutural. No caso acima (sem amortecimento), ou em sistemas com amortecimento proporcional, os modos de vibração ( $\emptyset$ ) são reais. O caso mais geral ocorre, em sistemas não-conservativos, quando a matriz de amortecimento do sistema é do tipo não proporcional, resultando os modos de vibração em vetores de números complexos.

#### 5.4 O Conceito de FRF

Admitindo-se que o sistema é amortecido e sujeito à ação de forças externas, consideradas nulas todas as condições iniciais.

$$\mathbf{M}\ddot{x}(t) + \mathbf{C}\dot{x}(t) + \mathbf{K}x(t) = \mathbf{f}(t) \quad (5.4)$$

Admitindo-se, também, que o vetor de força de excitação seja composto de uma única força harmônica de entrada aplicada em um único ponto da estrutura:

$$\mathbf{f} = \mathbf{F}e^{i\omega t} \text{ com } \mathbf{F} = (0 \dots Fq \dots 0) \quad (5.5)$$

Sendo  $F_q$  = amplitude da força senoidal aplicada na q-ésima coordenada generalizada.

Baseado na hipótese de linearidade do sistema, e assumindo que o sistema vibre em um movimento harmônico simples, adota-se que a resposta tenha a forma da Eq. (5.6):

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}e^{i\omega t} \quad (5.6)$$

Sendo  $\mathbf{X}$  = vetor de ordem  $N \times 1$ , independente no tempo e de amplitudes complexas.

A equação de movimento resulta:

$$[-\omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}]\mathbf{X}e^{i\omega t} = \mathbf{F}e^{i\omega t} \quad (5.7)$$

Re-arranjando a equação, tem-se:

$$\mathbf{X} = [(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) + i\omega \mathbf{C}]^{-1} \mathbf{F} = [\mathbf{H}(\omega)]\mathbf{F} \quad (5.8)$$

onde a matriz  $[(-\omega^2 \mathbf{M} + \mathbf{K}) + i\omega \mathbf{C}]^{-1}$  é denominada matriz da Função de Resposta em Freqüência (FRF),  $\mathbf{H}(\omega)$ , de ordem  $N \times N$ . Um elemento qualquer desta matriz pode ser definido como:

$$H_{pq}(\omega) = \frac{x_p}{F_q} \quad (5.9)$$

## 5.5 – FRF Experimental

Neste tópico são apresentados os equipamentos básicos de medição e esquema físico da amostra e os pontos de medição.

### 5.5.1 Materiais Utilizados

- Martelo de Impacto PCB modelo 086C03 de 0 a 500 lb – utilizado para submeter a amostra a uma excitação implusiva.
- Analisador de sinais da Hewlett-Packard modelo 3566 – utilizado para captar os sinais vibratórios.
- Acelerômetros PCB modelo 353B18
  - Nº série 41.709 – 9.72 mV/g
  - Nº série 41.708 – 9.71 mV/g
  - Nº série 41.705 – 9.38 mV/g
  - Nº série 41.711 – 9.96 mV/g
- Amostras (Viga “Sandwich” engastada numa base de concreto).
- Micro-computador PC.

### 5.5.2 Esquema de Montagem

A figura 5.2 apresenta um desenho esquemático com o posicionamento dos acelerômetros na viga “*sandwich*” na condição engastada (as dimensões não estão em escala real). Duas baterias de testes foram realizadas: a primeira utilizando a faixa de frequências de 0 a 200 Hz (capturando os dois primeiros modos de vibrar da viga) e a segunda parte na faixa de 0 a 400 Hz (capturando os quatro primeiros modos).

Os arquivos com as Funções Resposta em Frequência foram obtidas através de quatro acelerômetros dispostos ao longo da amostra nas posições  $L/4$ ,  $L/2$ ,  $3L/4$  e  $L$ . Os dados foram adquiridos e processados pelo Analisador de sinais 3566 e software específico da HP. Posteriormente os dados foram convertidos para o formato MatLab para serem inseridos no programa de ajuste de parâmetros.

Foram realizadas várias excitações implusivas na face de aço com o martelo de impacto nas posições dos acelerômetros e no meio dos vãos entre os acelerômetros.

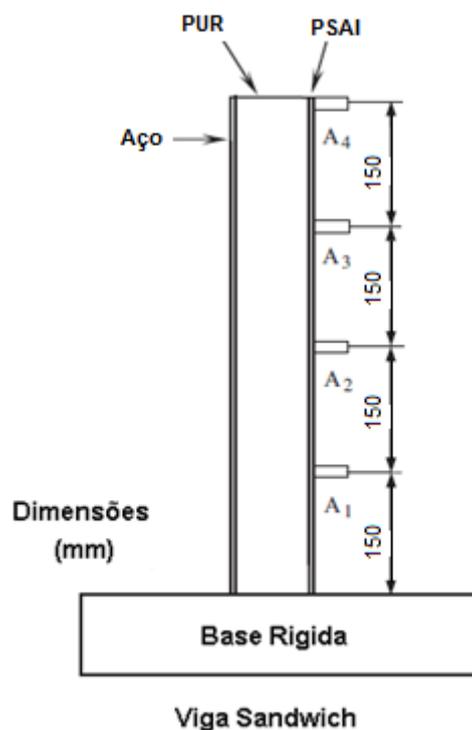


Figura 5.2 – Desenho Esquemático da Viga “Sandwich” (dimensões em mm)

O peso da base de concreto é muito superior ao peso da viga. A espessura da chapa de aço é 0,6 mm; do PSAL é 1,25 mm e do PUR é 38,25 mm. A largura da viga é 39,18 mm.

As figuras 5.3 e 5.4 mostram a maneira como foi realizado o engaste da viga sandwich na base de concreto.



Figura 5.3 – Vista Lateral da Viga Sandwich Engastada na Base de Concreto



Figura 5.4 – Vista Frontal da Viga Sandwich Engastada na Base de Concreto

## **CAPÍTULO 6**

### **CARACTERIZAÇÃO ESTÁTICA E DINÂMICA DOS MATERIAIS**

#### **6.1 Introdução**

Ao longo de todo o trabalho, procurou-se trabalhar com uma viga *sandwich* contendo três diferentes materiais: uma face de aço, uma face de PSAl e um núcleo de Poliuretano Rígido. Desta forma para que as análises numéricas apresentem bons resultados é necessária uma caracterização adequada das propriedades dos materiais. A caracterização envolveu duas etapas distintas, ensaios estáticos e ensaios dinâmicos.

#### **6.2 Caracterização Estática**

Os ensaios estáticos foram realizados por Oresten (2003) e estão reproduzidos aqui para melhor entendimento das etapas envolvidas no ajuste dos parâmetros (propriedades elásticas) dos materiais. Estes parâmetros servem de referência para os ajustes dinâmicos.

##### **6.2.1 Espuma Rígida de Poliuretano – PUR**

Um dispositivo especial foi projetado para avaliar o módulo de cisalhamento  $G$  do núcleo. Este dispositivo foi necessário devido à dificuldade de adaptar o corpo de prova em máquinas de ensaio convencionais (torção e/ou tração).

Este dispositivo foi elaborado para o cálculo do  $G$  por meio da torção pura. Usando a teoria para a torção pura de vigas com seções retangulares (Boresi e Chong, 1999) é possível relacionar  $G$  com as características geométricas do corpo de prova e com o torque externo e o ângulo de torção. Esta relação é:

$$G = \frac{T \cdot L}{k_1 \theta (2b)(2h)^3} \quad (6.1)$$

sendo:  $G$  = módulo de cisalhamento (Pa);  $T$  = torque aplicado (Nm);  $\theta$  = ângulo de torção (rad);  $b$  e  $h$  = metade da dimensão da seção retangular do corpo de prova, e  $k_1$  = fator de forma que depende das dimensões da seção retangular. Para seções quadradas (corpo de prova),  $k_1 = 0,141$ .

O dispositivo de ensaio foi construído em aço, Figura 6.1, para garantir rigidez suficiente e isentar o corpo de prova de deformações não oriundas do carregamento externo de torção. O corpo de prova com dimensões de 30 mm x 30 mm x 250 mm é encaixado firmemente (engastado) em uma das extremidades. Na extremidade móvel um ponteiro foi instalado para a medição do ângulo de torção desta extremidade com escala em graus e precisão de 0,5 grau.

O torque externo é aplicado com pesos calibrados e o ensaio é realizado variando o torque e com a leitura direta do ângulo de torção. Com estes dados e a relação dada na equação (6.1) é possível calcular o valor de  $G$ .

Os corpos de prova de PUR foram extraídos todos do mesmo gabinete para evitar variações devido a condições distintas de produção. A partir de um fragmento da lateral do refrigerador (zona mais plana e menos sujeita a falhas de espumação), os corpos de prova foram cortados e feita a classificação segundo a quantidade de falhas superficiais. O objetivo desta classificação foi avaliar a variação do valor obtido para  $G$  com corpos de prova isento de falhas e com falhas superficiais.

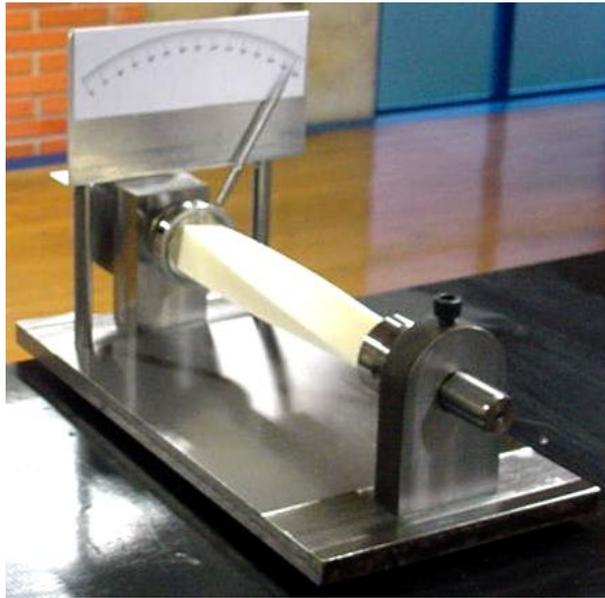


Figura 6.1 – Dispositivo Para Obtenção Experimental do Módulo de Cisalhamento (Oresten, 2003)

Os ensaios foram realizados em 12 corpos de prova com incrementos de 0,02375 Nm de tal modo a provocar uma variação angular adequada para o sistema de medição em uso.

Verificou-se a existência do regime de deformação linear, conforme ilustrado pela Figura 6.1, com pequeno resíduo, o que é verificado na literatura (Branner, 1995).

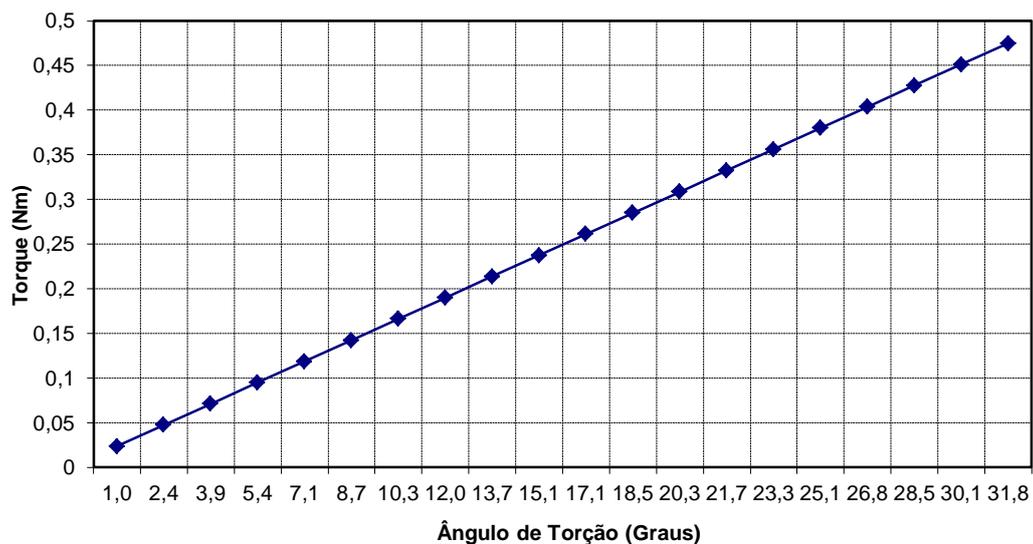


Figura 6.1 - Ângulo de Torção x Torque

Na Tabela 6.2 são mostrados os valores obtidos para os corpos de prova ensaiados, assim como o valor médio e desvio padrão obtidos.

Tabela 6.2 - Módulo de Cisalhamento Experimental, G (Oresten, 2003)

Sem Falhas Superficiais		Com Falhas Superficiais	
Amostra	G (MPa)	Amostra	G (MPa)
1	1,977	1	2,423
2	2,015	2	1,896
3	2,215	3	1,935
4	2,045	4	2,205
5	2,091	5	2,496
6	2,054	6	2,152
Valor médio = 2,066 MPa		Valor médio = 2,184 MPa	
Desvio Padrão = 0,082 MPa		Desvio Padrão = 0,245 MPa	

Branner (1995) mostra a dependência não só do módulo de cisalhamento G, mas também do módulo elástico E, com relação à densidade específica do material. A abordagem no nível da microestrutura levanta fatores de proporcionalidade à deflexão axial e transversal que levam em conta a relação entre a densidade total e a densidade da célula da espuma, o que valida esta dependência mas dispensa comentários adicionais por fugir do escopo deste trabalho. Desta forma, procedeu-se à medição da densidade dos corpos de prova, a qual foi executada numa balança Scientech modelo SA210, com resolução de 0,001g e destinada a medições para processos químicos. A Tabela 6.2 mostra os valores obtidos para 12 corpos de prova selecionados aleatoriamente entre as modalidades sem falhas e os dotados de vazios superficiais.

**Tabela 6.2 - Medições da Densidade do PUR (Oresten, 2003)**

Amostras sem falhas superficiais		Amostras com falhas	
Amostra	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	Amostra	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
1	28,400	1	29,111
2	28,876	2	28,573
3	28,769	3	28,262
4	28,751	4	29,280
5	28,369	5	29,111
6	28,329	6	29,671
Valor médio parcial – 28,582 kg/m <sup>3</sup>		Valor médio parcial – 29,002 kg/m <sup>3</sup>	
Desvio Padrão – 0,242 kg/m <sup>3</sup>		Desvio Padrão – 0,506 kg/m <sup>3</sup>	
<b>Média de todas as amostras – 28,792 kg/m<sup>3</sup></b>			

### 6.2.2 Chapa Metálica

Abe e Almeida (2003) determinaram o módulo elástico da chapa de aço laminado por meio do procedimento da norma NBR 6673, fabricando corpos de prova de tração simples com dimensões constantes da Figura 6.3 na direção longitudinal, transversal e a 45° do eixo da bobina de origem.

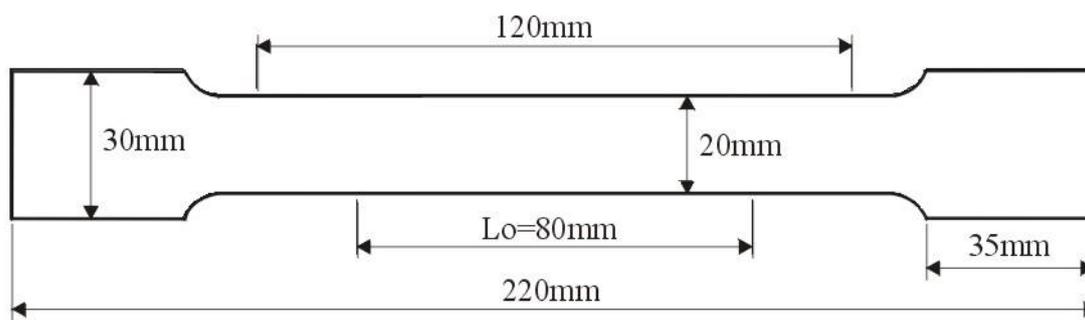


Figura 6.3 - Descrição Geométrica do Corpo de Prova de Tração da Chapa Metálica

Como resultado do ensaio de tração na chapa metálica, obteve-se uma correlação entre forças e deformações. O módulo elástico é obtido através da expressão:

$$E = \frac{P}{\varepsilon A} \quad (6.2)$$

Sendo: P = carga aplicada (N); A = área da seção transversal (m<sup>2</sup>) e  $\varepsilon$  = deformação longitudinal (adimensional)

O módulo de elasticidade obtido por ensaio ficou em 209,6 GPa, obtendo regime de linearidade conforme mostra a Figura 6.4.

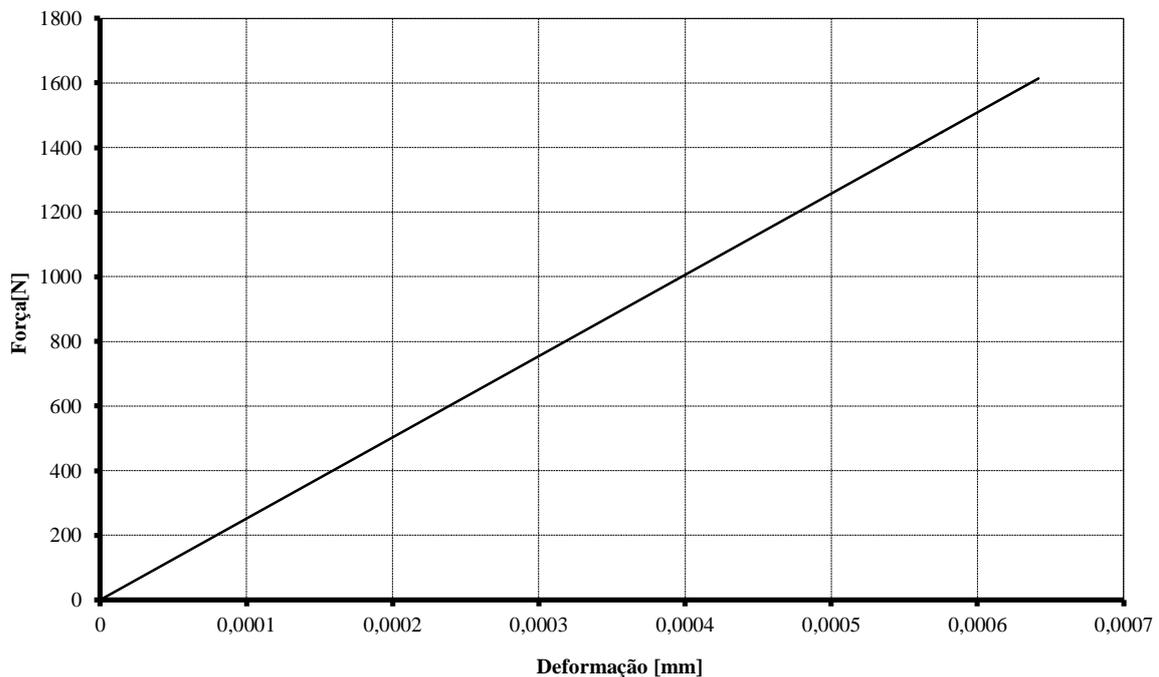


Figura 6.4 - Correlação Entre Força e Deformação Obtidos no Ensaio de Tração no Corpo de Prova de Aço SAE 1010 Laminado.

### 6.2.3 Chapa de Poliestireno

A parte interior do gabinete de um refrigerador espumado, denominada *caixa interna*, é confeccionada pelo processo de termoformagem, onde uma chapa de material plástico obtida por meio de extrusão é aquecida e soprada de encontro a um molde que a conforma de acordo com o perfil desejado para um determinado modelo de produto. Para essa aplicação, tem sido empregado em larga escala o Poliestireno de Alto Impacto (PSAI ou HIPS – *High Impact Polystyrene*), devido principalmente à sua maleabilidade e custo reduzido em

relação a outros materiais como o ABS.

Para caracterizar experimentalmente este material, utilizou-se o ensaio de tração. A norma técnica ASTM D638 especifica os requisitos necessários para a obtenção por ensaio de tração das características mecânicas de materiais injetados, sendo adotada como procedimento-base devido ao fato de não ter sido localizado procedimento equivalente para materiais termoformados. A geometria do corpo de prova utilizado consta da Figura 6.5:

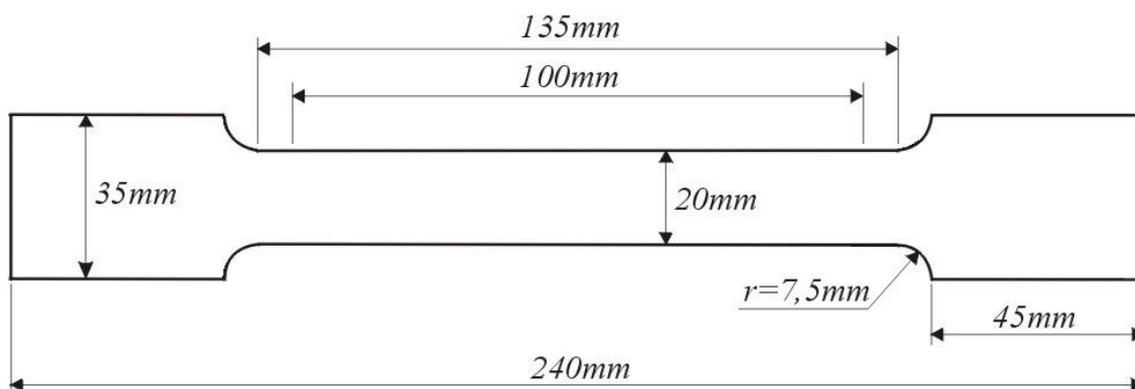


Figura 6.5 - Corpo de Prova Utilizado no Ensaio de Tração para o PSAI.  
Espessura = 1,6 mm (Oresten, 2003)

Utilizando-se uma máquina universal de tração da marca EMIC com célula de carga para até 2000 N, foram ensaiados seis corpos de prova com velocidade de ensaio de 5 mm/min.

O módulo de elasticidade foi obtido através da extração do coeficiente angular da região de linearidade do gráfico tensão-deformação, conforme mostram as Figuras 6.6 e 6.7 para um dos corpos de prova:

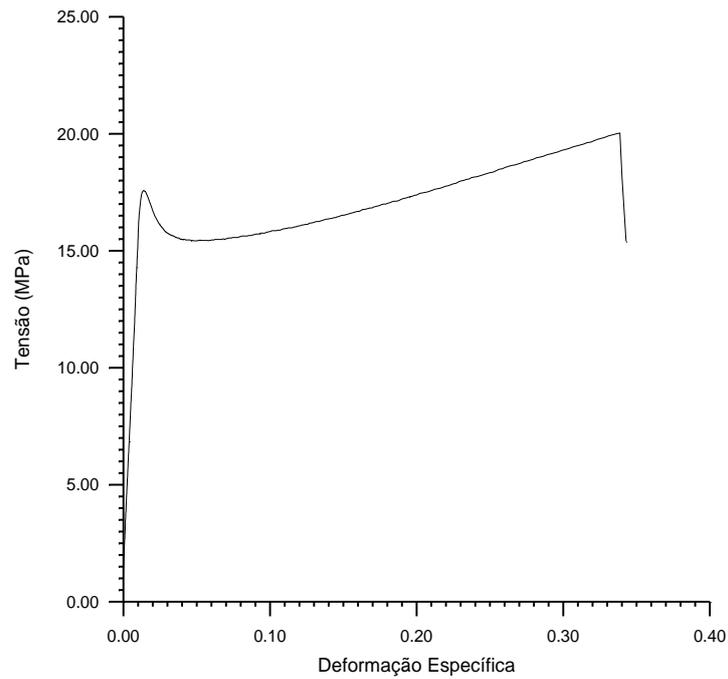


Figura 6.6 - Curva Tensão-Deformação Para o Corpo de Prova de PSAI

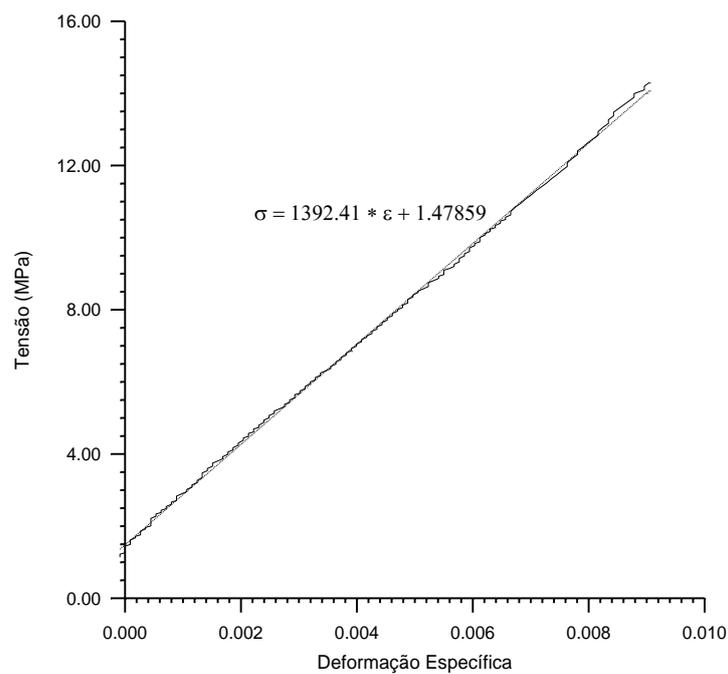


Figura 6.7 - Extração da Região de Linearidade do Gráfico da Figura 6.6, com Ajuste da Equação da Reta

Cabe lembrar que o resíduo constante da equação da reta da Figura 6.7 diz respeito a uma pré-tensão induzida por um deslocamento inicial do extensômetro da máquina de tração, uma característica inerente do sistema a

qual não foi possível eliminar durante o ensaio.

A Tabela 6.3 mostra os valores do módulo de elasticidade obtidos para todos os corpos de prova, além do valor médio e do desvio padrão encontrado. Das seis medições, uma foi excluída por ser considerada discrepante das demais.

Tabela 6.3 - Medições do Módulo de Elasticidade do PSAI (Oresten, 2003)

Corpo de Prova	Módulo de Elasticidade (GPa)
1	1,392
2	1,388
3	1,439
4	1,399
5	1,409
<b>Valor médio – 1,405 GPa</b>	
Desvio Padrão – 0,018 GPa	

A norma técnica ASTM D792 prescreve um método de ensaio para a determinação da densidade de plásticos por meio do deslocamento de um volume de líquido quando da imersão do material em análise nesse. A massa do corpo de prova é primeiramente determinada na atmosfera, e logo após o mesmo é imerso em um líquido (água, para o método utilizado neste trabalho). Sua massa aparente sob imersão é medida, e sua gravidade específica, que constitui a razão entre a massa do corpo de prova na atmosfera e a massa de um mesmo volume de água destilada na mesma condição atmosférica, é determinada, donde se obtém o valor da densidade pela multiplicação por uma constante referente ao valor da densidade da água a 23°C. Utilizando este procedimento, seis corpos de prova foram medidos e os resultados constantes da Tabela 6.4 foram obtidos:

Tabela 6.4 - Medições da Densidade do PSAI (Oresten, 2003)

Corpo de Prova	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )
1	1.059,6
2	1.069,1
3	1.060,1
4	1.059,3
5	1.060,3
6	1.062,8
<b>Valor médio – 1.061,9 kg/m<sup>3</sup></b>	
Desvio Padrão – 3,8 kg/m <sup>3</sup>	

### 6.3 Caracterização Dinâmica

Os ensaios dinâmicos da viga foram apresentados por Barbieri et al. (2008, 2010). Os ensaios foram realizados para vigas de Poliuretano e Poliestireno.

Ajustou-se separadamente os valores do módulo de elasticidade e fator de perda do Poliuretano e do Poliestireno. O fator de perda foi estimado considerando o módulo de elasticidade complexo:

$$E^* = E(1 + j\eta)$$

Para obtenção dos valores iniciais destes parâmetros foram realizados ensaios separados para o Poliuretano e o Poliestireno. Figura 6.8 mostra uma representação esquemática dos ensaios. Uma das extremidades da amostra foi fixada em um shaker eletromecânico (B&K model 4810) e a outra extremidade ficou livre. Para obtenção dos resultados foi utilizado um sensor a laser (B&K model 3544) e um acelerômetro (PCB model 353B18).

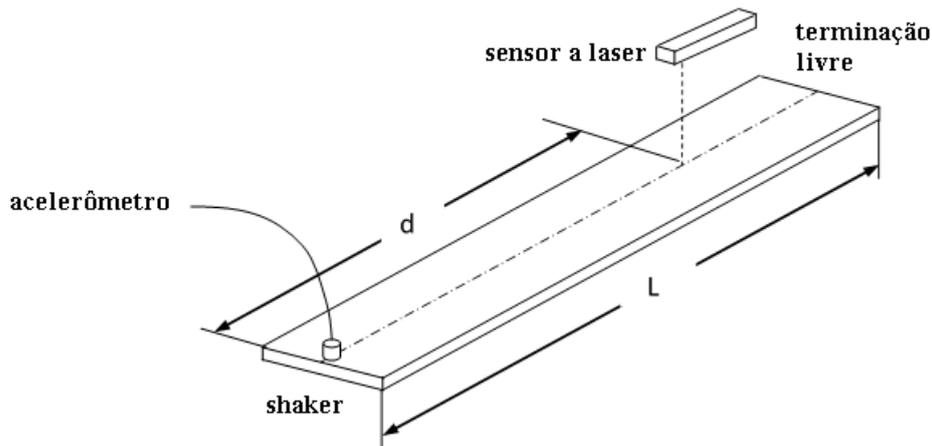


Figura 6.8 – Representação Esquemática do Ensaio Dinâmico de Viga.

As dimensões da amostra do PSAI e a densidade do material são: comprimento  $L = 145$  mm; largura = 20 mm; altura = 1,8 mm; densidade  $\rho = 1060$  kg/m<sup>3</sup>. Foi realizado um ensaio de varredura harmônica (sweep sine) com faixa de frequências variando de 10 a 400 Hz com incrementos de 2,5 Hz (157 pontos). O acelerômetro foi utilizado para obtenção da excitação da base e o sensor a laser foi colocado na posição  $d=135$  mm. Figura 5.9 mostram as curvas experimentais e ajustadas para o parâmetro  $Pva$  (velocidade do ponto de medição/aceleração da base). Os parâmetros foram estimados usando algoritmos genéticos e a função objetivo foi definida como sendo a somatória da diferença entre os valores numéricos e experimentais do parâmetro  $Pva$ :

$$f = \sum_{i=1}^{np} |Pva_{exp.} - Pva_{FEM}|$$

onde  $Pva_{exp}$  representa o valor experimental do parâmetro  $Pva$  e  $Pva_{FEM}$  é o valor numérico deste parâmetro;  $np$  é o número de pontos nos dados experimentais.

Os parâmetros do GA foram: taxa de mutação=0,02; tamanho da população=50 e número de gerações = 5000.

Os parâmetros otimizados foram a parte real e imaginária do módulo de elasticidade complexo. Os valores ótimos estão mostrados na Tab. 6.5.

Tabela 6.5 – Parâmetros Ótimos Para o PSAI

Faixa de Frequência (Hz)	E (GPa)	$\eta$
10.0-57.5	1,3350	0,0385
57.5-177.5	1,3725	0,0450
177.5-400	1,4150	0,0805

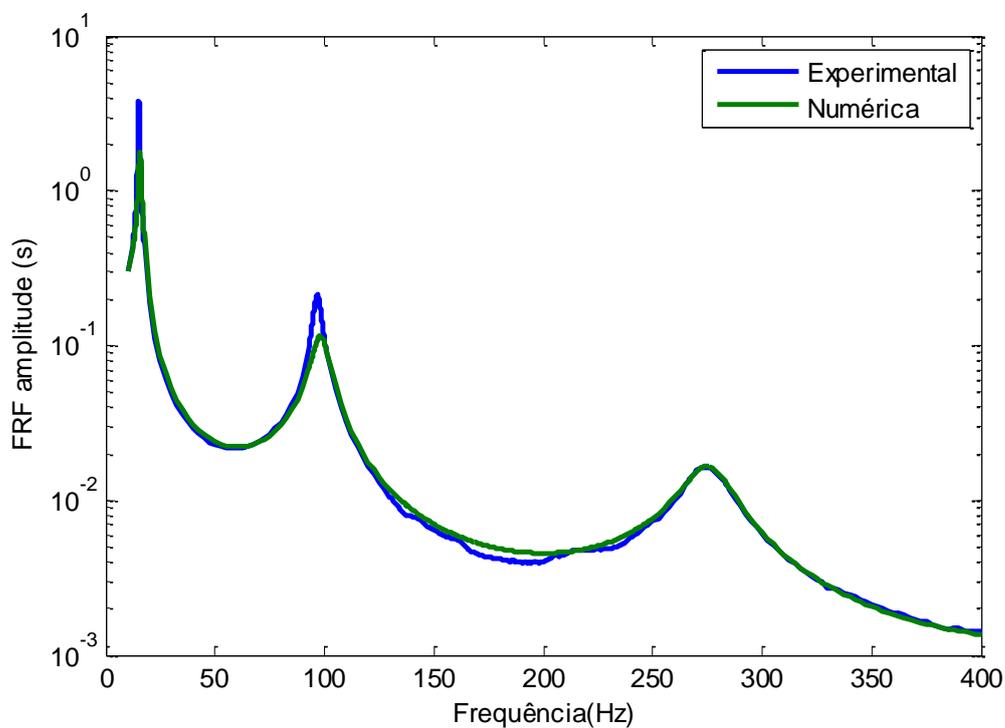


Figura 6.9 – Curvas Experimental e Numérica Para o PSAI.  
(Barbieri, et all.)

As dimensões da amostra do PUR e a densidade do material são: comprimento  $L = 225\text{mm}$ ; largura =  $30\text{ mm}$ ; altura =  $30\text{ mm}$ ; densidade  $\rho = 29\text{ kg/m}^3$ . O laser foi posicionado na posição  $d=112,5\text{ mm}$ . Os parâmetros do ensaio de varredura foram idênticos ao do PSAI e os parâmetros foram ajustado utilizando-se algoritmos genéticos. Figura 6.10 mostra as curvas experimental e estimadas para o parâmetro Pva. Os parâmetros ajustados foram o modulo de

cisalhamento e o fator de perda do PUR. Os valores otimizados para os dois parâmetros estão indicados na Tabela 6.6. Como mencionado por Backström (2006), o módulo de elasticidade do núcleo não tem influência significativa no comportamento dinâmico de vigas sandwich, desta forma assumiu-se uma relação entre os módulos de elasticidade e de cisalhamento como  $E_c = 2(1 + \nu)G_c$ , onde  $\nu$  é o parâmetro de Poisson. Desde que as frequências naturais não são tão sensíveis à  $\nu$  foi utilizado  $\nu = 0.3$ .

Tabela 6.6 – Parâmetros Ótimos Para o PUR

Faixa de Frequência (Hz)	G (MPa)	$\eta$
10.0-150.0	2,6497	0,0575
150.0-400.0	2,5498	0,0625

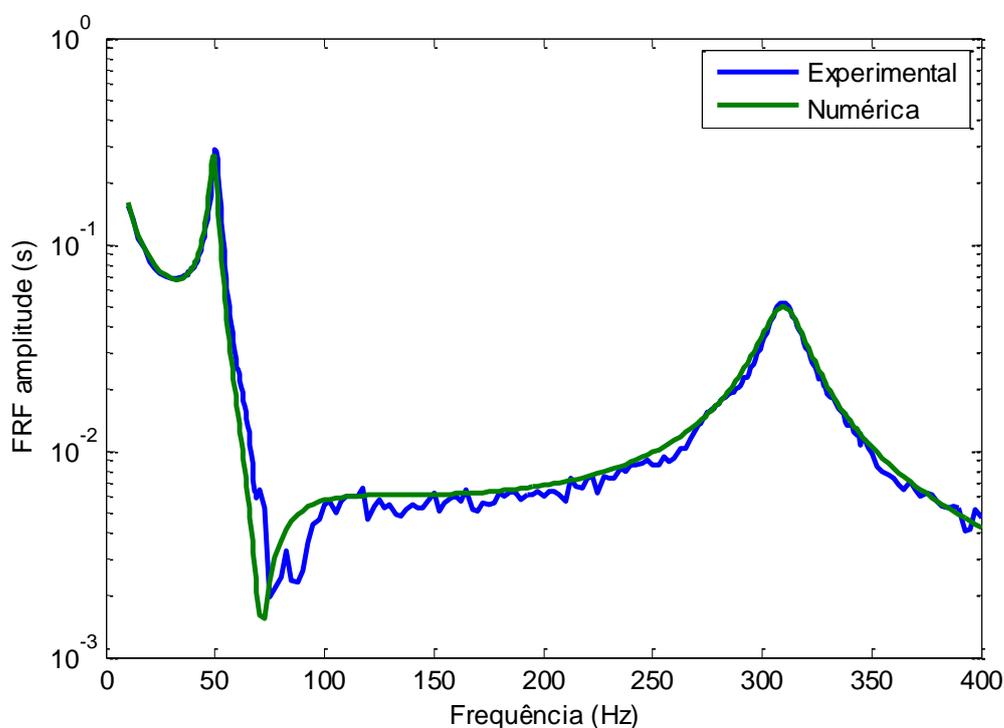


Figura 6.10 – Curvas Experimental e Numérica Para o PUR.  
(Barbieri, et all.)

É possível notar nas Figuras 6.9 e 6.10 que foi possível um bom ajuste para as curvas do parâmetro  $P_{va}$ . Nota-se nas Tabelas 6.5 e 6.6 que os parâmetros são dependentes das frequências de excitação.

## CAPÍTULO 7

### RESULTADOS

Nesse capítulo apresenta-se alguns resultados utilizando o método dos elementos finitos acoplado a um algoritmo de otimização. Através da análise dos ajustes das FRF's numéricas e experimentais obtém-se uma estimativa dos parâmetros dos materiais que compõe a viga sandwich.

#### 7.1 – Ajustes com o Modelo de Viga de Timoshenko

Os ajustes para modelo numérico utilizando elemento de viga de Timoshenko foram apresentados por Barbieri *et. all.* (2008, 2010). Nestes trabalhos ficou evidente que os parâmetros são dependentes das frequências de excitação. Para validação numérica do modelo, foi utilizado um exemplo da literatura. Os resultados foram comparados com Helgesson (2003), Mead e Markus (1969), Ahmed (1972), e Sakiyama *et all.* (1996). As propriedades específicas da viga são: comprimento  $L=0,7112\text{m}$ ; módulo de elasticidade  $E=6,89\times 10^{10}\text{N/m}^2$ ; módulo de cisalhamento do núcleo  $G=82.68\times 10^6\text{N/m}^2$ ; altura das faces  $h_1=h_3=0,45720\text{ mm}$ ; altura do núcleo  $h_2=12,7\text{ mm}$ ; densidade do núcleo  $\rho_2=32,8\text{ kg/m}^3$ ; densidade das faces  $\rho_1=\rho_3=2680\text{ kg/m}^3$ ; e largura da viga = 1 m. A Tabela 7.1 mostra os resultados para as nove primeiras frequências naturais e os resultados dos outros autores. Os resultados estão próximos dos obtidos por Helgesson. As frequências são sempre menores das obtidas por Mead e sempre superiores às obtidas por Ahmed e Sakiyama. Mead simplifica as análises considerando modos complexos amortecidos. Ahmed não considera forças axiais e desta forma o sistema é menos rígido. Sakiyama obteve as equações diferenciais do movimento usando funções de Green e módulo complexo de cisalhamento  $G=G_0(1+j\eta)$ .

Tabela 7.1 Frequências Naturais (Hz)

Modo	viga	Helgesson	Mead	Ahmed	Sakiyama
1	33,75	33,75	34,24	32,79	33,15
2	198,81	198,77	201,85	193,50	195,96
3	511,45	511,27	520,85	499,00	503,43
4	905,34	904,87	925,40	886,00	893,28
5	1.346,58	1.345,60	1.381,30	1.320,00	1.328,50
6	1.811,94	1.810,30	1.867,00	1.779,00	1.790,70
7	2.288,17	2.285,80	2.374,00	2.249,00	2.260,20
8	2.767,82	2.764,70	2.905,00	2.723,00	2.738,90
9	3.247,08	3.243,30	-	-	3.212,80

Figura 7.1 mostra a curva de convergência para a primeira frequência natural. Os valores variam pouco a partir de 300 elementos. O mesmo comportamento é verificado para as demais frequências naturais.

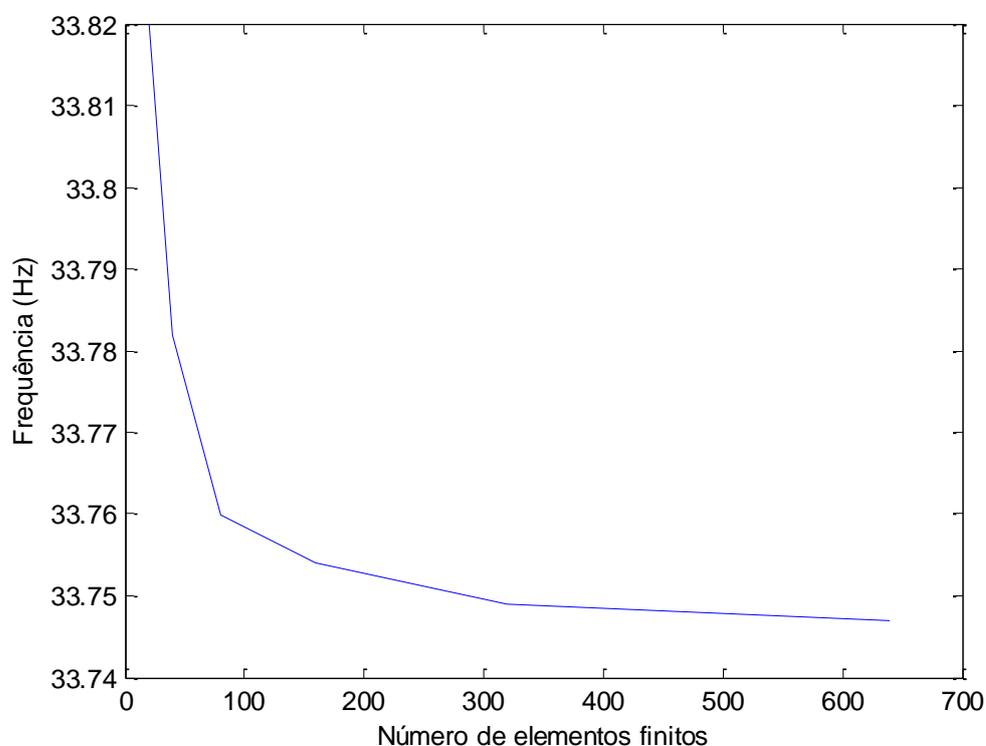


Figura 7.1 – Curva de Convergência Para a Primeira Frequência Natural.

Figura 7.2 mostra uma curva típica da Função Resposta em Frequência (FRF) para o acelerômetro colocado na posição central da amostra (acelerômetro 2). Utilizou-se a faixa de frequências de 0 a 250 Hz por estarem contidos os três primeiros modos de vibrar. Para encontrar os parâmetros modais experimentais utilizou-se o método RFP (*rational fraction polynomial method*) (Iglesias, 2000) . A Tabela 7.2 mostra os valores encontrados para as frequências naturais e os fatores de amortecimento para os 4 acelerômetros dispostos ao longo da amostra. Os valores para o acelerômetro 3 para o segundo modo de vibrar não estão mostrados pois este acelerômetro está sobre um ponto nodal.

Tabela 7.2 – Valores Experimentais das Frequências Naturais e dos Fatores de Amortecimento.

Modo de vibrar	Acelerômetros							
	A1		A2		A3		A4	
	$\omega$ [Hz]	$\eta = \frac{\xi}{2}$						
1	25,42	0,050	25,39	0,050	25,33	0,052	25,32	0,053
2	109,41	0,0171	109,45	0,0165	-	-	109,39	0,0167
3	223,97	0,0154	224,00	0,0152	224,05	0,0159	224,18	0,0157

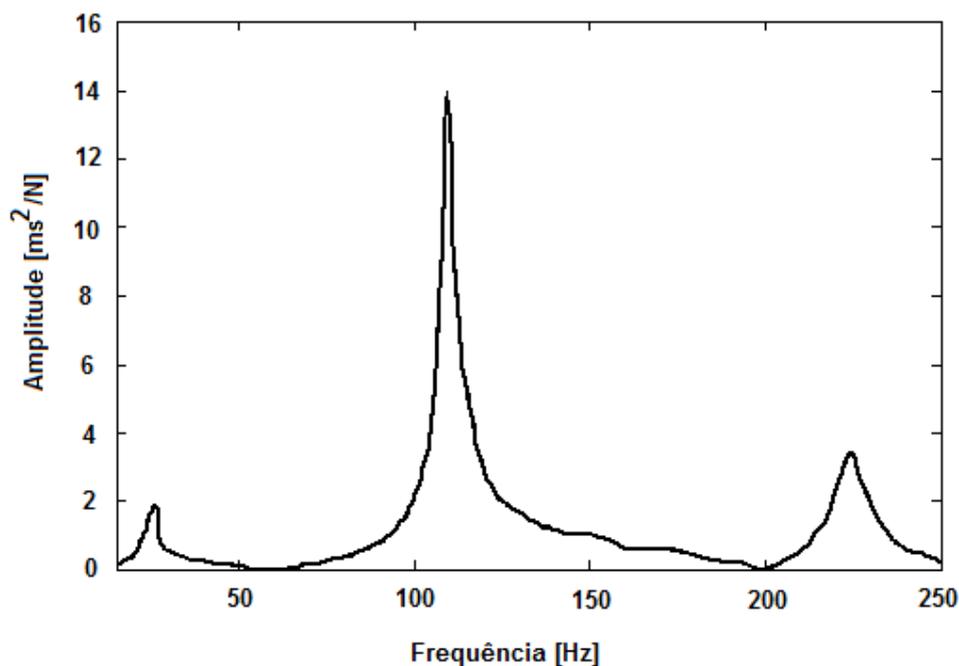


Figura 7.2 – Curva FRF Para Um Acelerômetro.

Procurou-se ajustar os parâmetros (módulo de elasticidade e fator de amortecimento) do PUR e do PSAI utilizando-se dois métodos diferentes: algoritmos genéticos e coeficiente de correlação de amplitude (Grafe, 1998). O método baseia-se num coeficiente de correlação de amplitude que leva em consideração as FRFs numérica e experimental. Para realimentação dos parâmetros utiliza-se a sensibilidade do coeficiente de correlação de amplitude que é calculada empregando a derivada da função objetivo (analítica) com relação aos parâmetros ajustados. Neste caso considerou-se os valores variáveis como mostrado no item 6.3. Figura 7.3 mostra a curva experimental e as curvas ajustadas por algoritmos genéticos e coeficiente de correlação de amplitude. Nota-se que trabalhando com parâmetros variáveis é possível um ótimo ajuste das curvas.

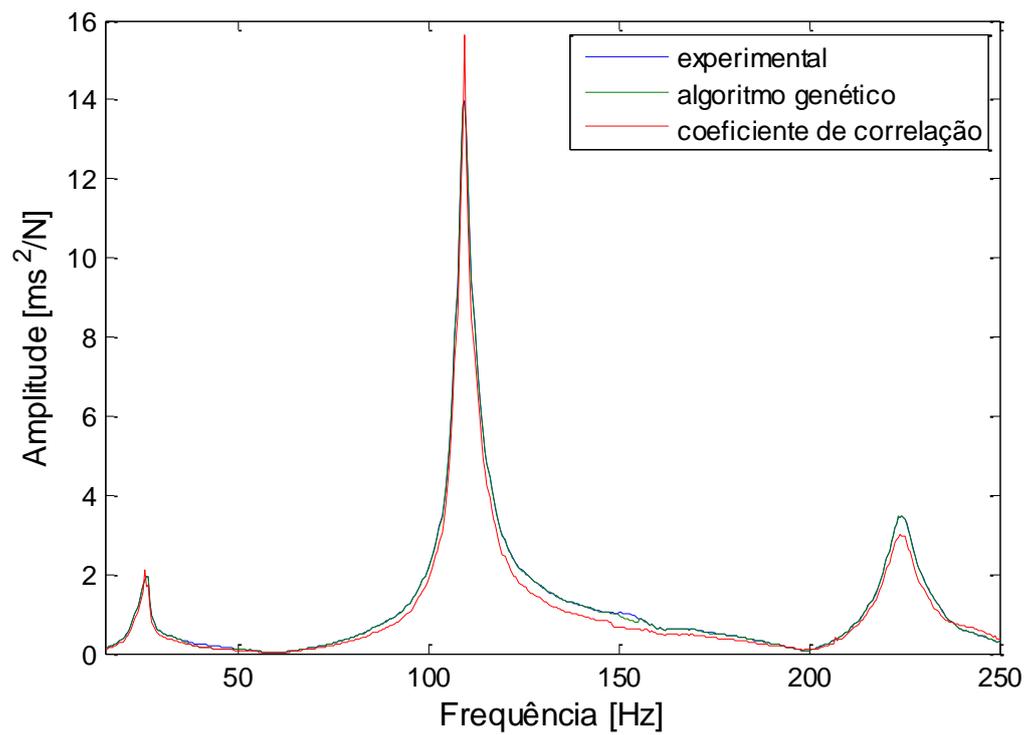


Figura 7.3 – Curvas FRF Experimental e Ajustadas.

Finalmente tentou-se ajuste de parâmetros únicos para toda de análise.

A Figura 7.4 mostra a curva experimental e as curvas ajustadas em toda a faixa de frequências (0 - 250 Hz).

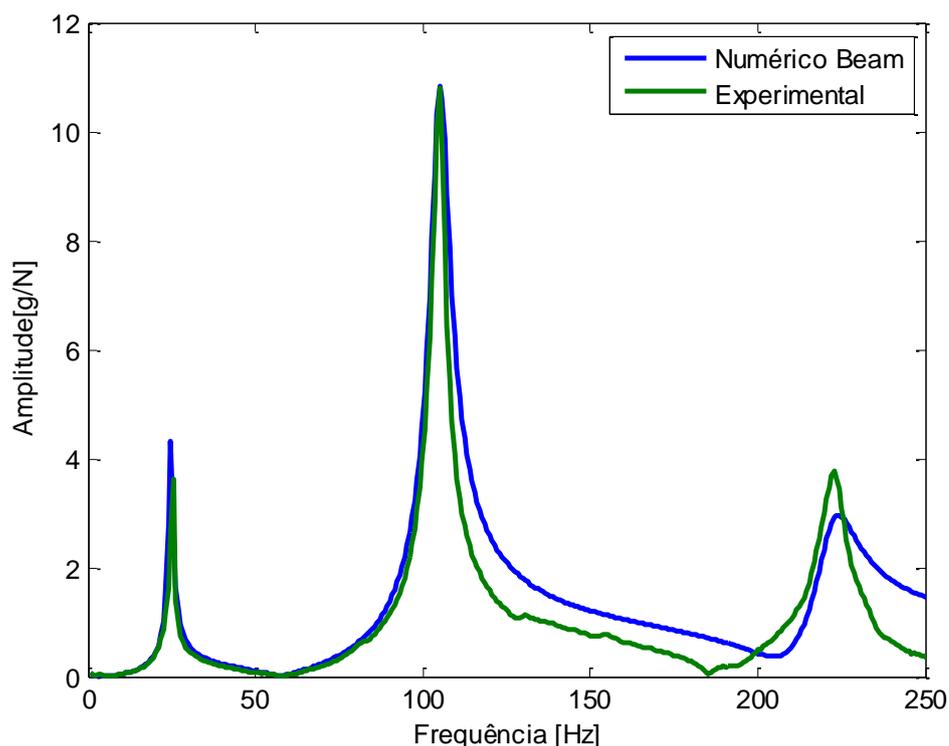


Figura 7.4 – Curvas da FRF Experimental e Numérica

Nota-se um bom ajuste para uma faixa de frequência em torno de 110 Hz, após este valor de frequência os resultados começam a divergir.

## 7.2 – Estimativas dos Parâmetros Usando Elasticidade 2D

O modelo de elementos finitos – FEM para uma viga do tipo Sandwich considerado neste trabalho contém quatro parâmetros para serem otimizados que são respectivamente, o módulo de elasticidade do núcleo de PUR, o módulo de elasticidade da face de Poliestireno de Alto Impacto – PSAI, o fator de amortecimento da face de PSAI e do núcleo de PUR.

Normalmente os valores dos parâmetros da espuma rígida e do PSAI são desconhecidos devido a dificuldades em obter esse valores através de ensaios mecânicos ou à inexistência de informação na bibliografia, dessa forma pode se obter uma estimativa dos parâmetros através da comparação das FRFs numérica obtidas por meio de simulação computacional com as FRFs obtidas experimentalmente.

A estimação consiste na procura dos valores dos parâmetros descritos no modelo, que minimizem a distância entre as FRFs experimentais e as FRFs numéricas simuladas. O método dos mínimos quadrados é o método de regressão mais utilizado na estimação de parâmetros, em que as somas do quadrado das distâncias são minimizadas utilizando a equação (7.1):

$$\min \sum_{n=1}^N (FRF_{num} - FRF_{exp})^2 \quad (7.1)$$

Outra maneira de minimizar a Função Objetivo ( $FO$ ), é mostrada na Eq. (7.2):

$$\min \sum_{n=1}^N |FRF_{num} - FRF_{exp}| \quad (7.2)$$

onde:  $N$  é o número de parâmetros.

Neste trabalho, optou-se pela escolha de métodos alternativos na estimação de parâmetros. Assim, algoritmos considerados na literatura como meta-heurísticas e heurísticas, tais como: os algoritmos evolucionários (Goldberg, 1989), evolução diferencial (Price, 1999) e nuvem de partículas (PSO) (Eberhart e Kennedy, 1995) são cada vez mais utilizados na realização destas tarefas devido à sua robustez quando se trabalha com um grande número de parâmetros ou quando se trabalha com modelos complexos.

Os ajustes foram feitos considerando-se as três primeiras frequências naturais e utilizando as curvas FRF. Para cada um dos métodos de otimização utilizados nesse trabalho apresenta-se as estimativas obtidas numericamente para o módulo de elasticidade e fator de amortecimento do material do núcleo de PUR e de cada uma das faces de PSAl e do aço que compõe a viga sandwich.

Os parâmetros utilizados nos métodos de ajuste foram:

**Parâmetros do GA:** Tamanho da população: 20; Nº de Gerações: 500; Nº de Bits: 20; Probabilidade de cruzamento: 0.9; Probabilidade de mutação: 0,02.

**Parâmetros do DE:** Tamanho da População: 20; Nº máximo de Iterações: 500; Probabilidade cruzamento: 0,85; Estratégia: DE/RAND/1/BIN.

**Parâmetros do PSO:** N° de partículas: 20; N° máximo de iterações: 150; Pesos: A1=0,25; A2=0,75; A3=0,001 e W=0,25.

Figura 7.5 mostra uma malha de elementos finitos utilizada nas análises. A malha contém 80 elementos quadrangulares de 16 nós, totalizando 775 nós. A malha é representativa e não está na escala real. A cor amarela representa a face com PSAl, a cor branca representa o núcleo de espuma rígida de PUR e a cor cinza representa o aço.

1	11	21	31	41	51	61	71	1,25
2	12	22	32	42	52	62	72	
3	13	23	33	43	53	63	73	
4	14	24	34	44	54	64	74	
5	15	25	35	45	55	65	75	
6	16	26	36	46	56	66	76	
7	17	27	37	47	57	67	77	
8	18	28	38	48	58	68	78	
9	19	29	39	49	59	69	79	
10	20	30	40	50	60	70	80	
600								38,2
								0,6

(Dimensões: mm)

Figura 7.5 – Malha de Elementos Finitos

Figura 7.6 Mostra um Elemento Quadrangular com 16 Nós.

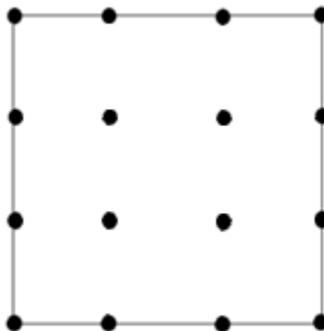


Figura 7.6 – Elemento Quadrangular com 16 Nós.

### 7.2.1 – Ajustes dos Parâmetros Para as Três Primeiras Frequências Naturais

As curvas mostradas nas Figuras 7.7, 7.8 e 7.9 apresentam o ajuste entre a FRF<sub>exp</sub> e as FRF's num obtida por cada um dos métodos de

otimização em cada uma das três primeiras frequências naturais. As Tabelas 7.3, 7.4 e 7.5 mostram os valores obtidos para os parâmetros com estes ajustes.

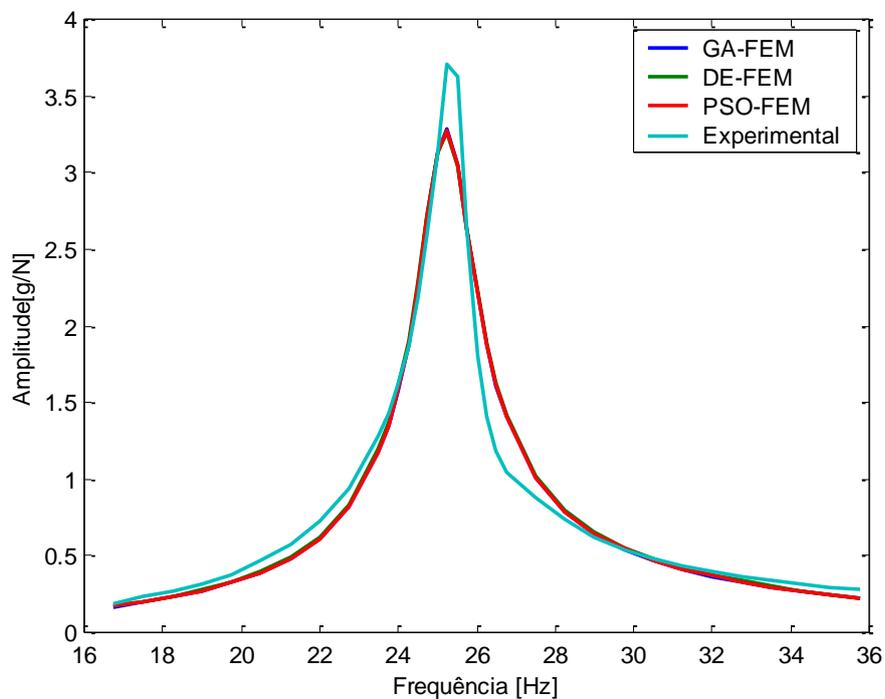


Figura 7.7 – Ajuste em Torno da Faixa de Frequência da Primeira Frequência Natural

Tabela 7.3 – Valores Estimados dos Parâmetros Pelos Métodos de Otimização.

PARÂMETROS	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO		
	GA	PSO	DE
Módulo de Elasticidade do PSAI	1,28250 GPa	1,28557 GPa	1,30784 GPa
Fator de amortecimento do PSAI	0,042414	0,046677	0,048900
Módulo de Elasticidade do núcleo	8,79330 MPa	8,71879 MPa	8,26674 MPa
Fator de amortecimento do núcleo	0,063847	0,051068	0,048400

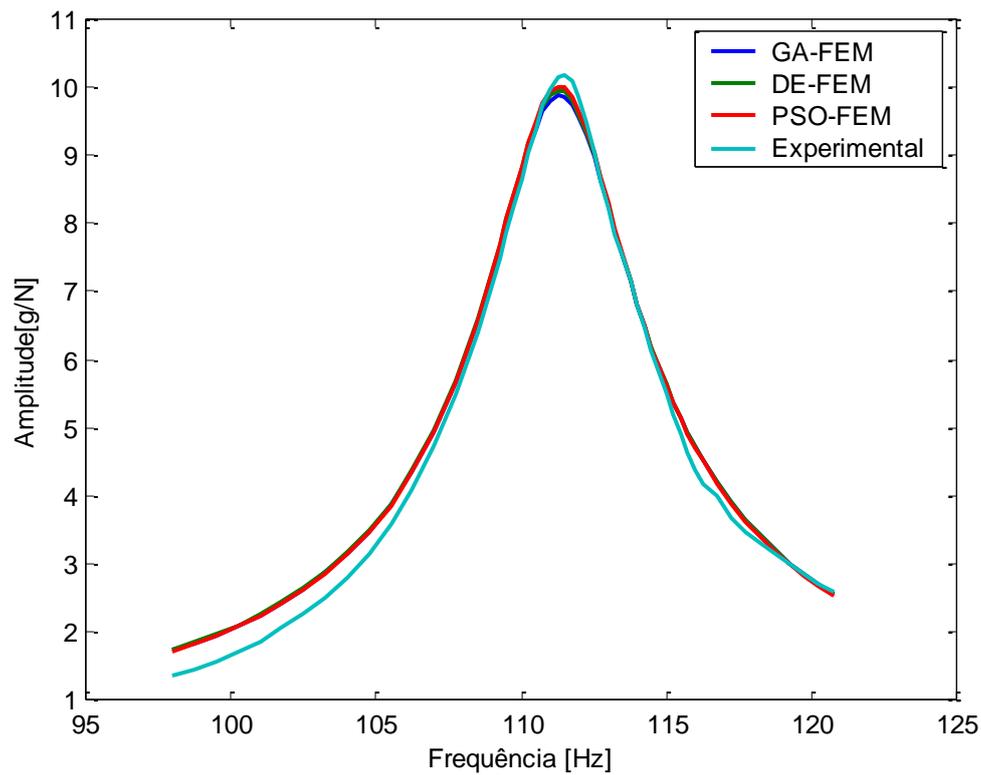


Figura 7.8 - Ajuste em Torno da Faixa de Frequência da Segunda Frequência Natural

Tabela 7.4 – Valores Estimados dos Parâmetros Pelos Métodos de Otimização

PARÂMETROS	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO		
	GA	PSO	DE
Módulo de Elasticidade do PSAI	1,423357 GPa	1,398130 GPa	1,434825 GPa
Fator de amortecimento do PSAI	0,023854	0,023454	0,0193062
Módulo de Elasticidade do núcleo	9,49324 MPa	9,605628 MPa	9,433241MPa
Fator de amortecimento do núcleo	0,044955	0,043852	0,047297

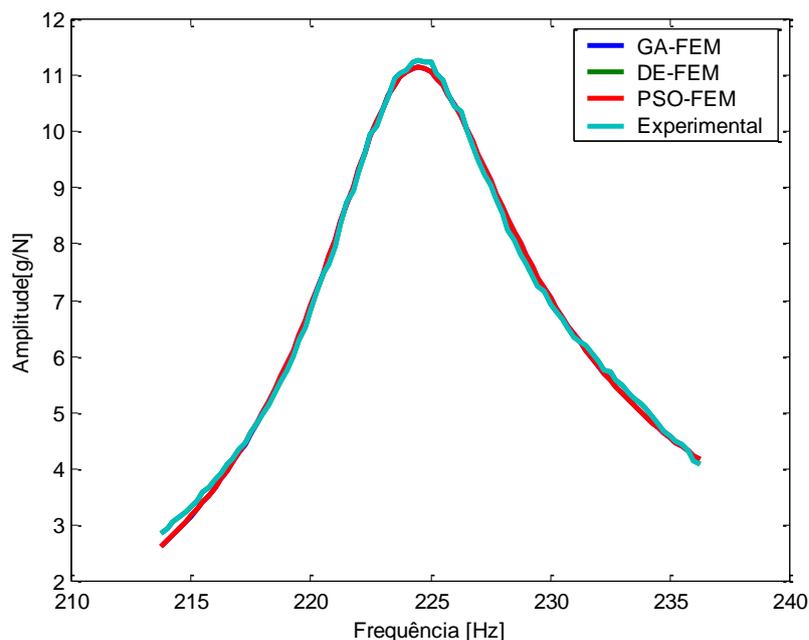


Figura 7.9 - Ajuste em Torno da Faixa de Frequência da Terceira Frequência Natural

Tabela 7.5 – Valores Estimados dos Parâmetros Pelos Métodos de Otimização.

PARÂMETROS	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO		
	GA	PSO	DE
Módulo de Elasticidade do PSAI	1,38354 GPa	1,38418 GPa	1,39737 GPa
Fator de amortecimento do PSAI	0,016014	0,015893	0,015900
Módulo de Elasticidade do núcleo	7,03147 MPa	7,03138 MPa	7,01192 MPa
Fator de amortecimento do núcleo	0,025351	0,025277	0,025400

### 7.2.2 Ajuste de Parâmetros Para Toda Faixa de Frequências

A Figura 7.10 mostra o ajuste entre a FRF<sub>exp</sub> e a FRF<sub>num</sub> considerando os valores estimados dos parâmetros mostrados na Tab. 6.6 numa faixa de frequências variando de 1 a 250 Hz.

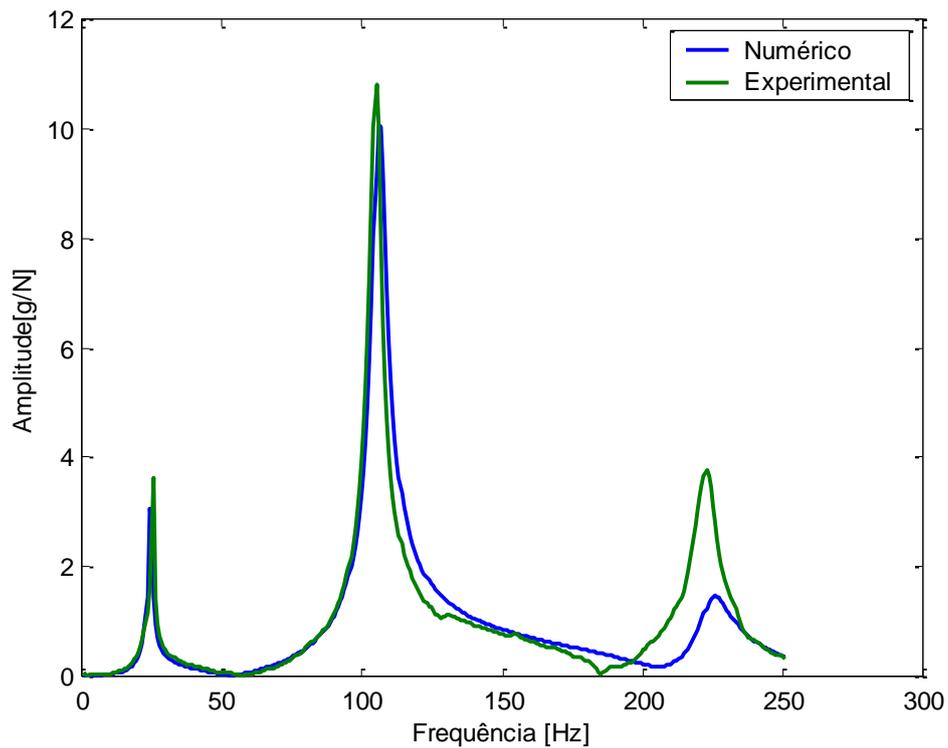


Figura 7.10 - Gráfico Comparativo das FRFs Para a Faixa de Frequências de 1 a 250 Hz.

Tabela 7.6 – Valores Estimados dos Parâmetros (GA).

PARÂMETROS	Valores
	Estimados
Módulo de Elasticidade do PSAI	1,2825 GPa
Fator de amortecimento do PSAI	0,02750
Módulo de Elasticidade do núcleo	8,5501MPa
Fator de amortecimento do núcleo	0,042810

### 7.2.3 – Análise de Convergência Para os Ajustes das FRF's

As curvas mostradas nas Figuras 7.11, 7.12 e 7.13 apresentam a convergência para cada um dos ajustes entre a FRF<sub>exp</sub> e a FRF<sub>num</sub> obtida por cada um dos métodos de otimização nas três primeiras frequências naturais.

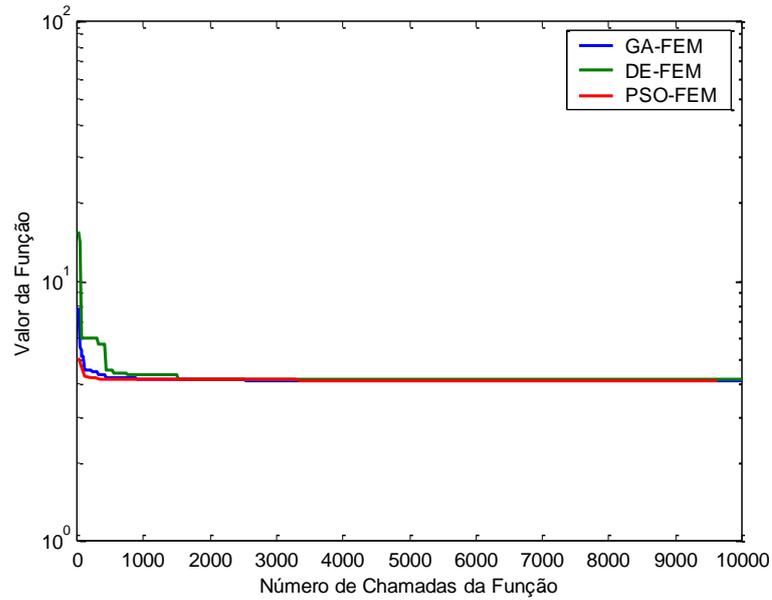


Figura 7.11 - Curvas de Convergência Para Ajuste em Torno da Primeira Frequência Natural.

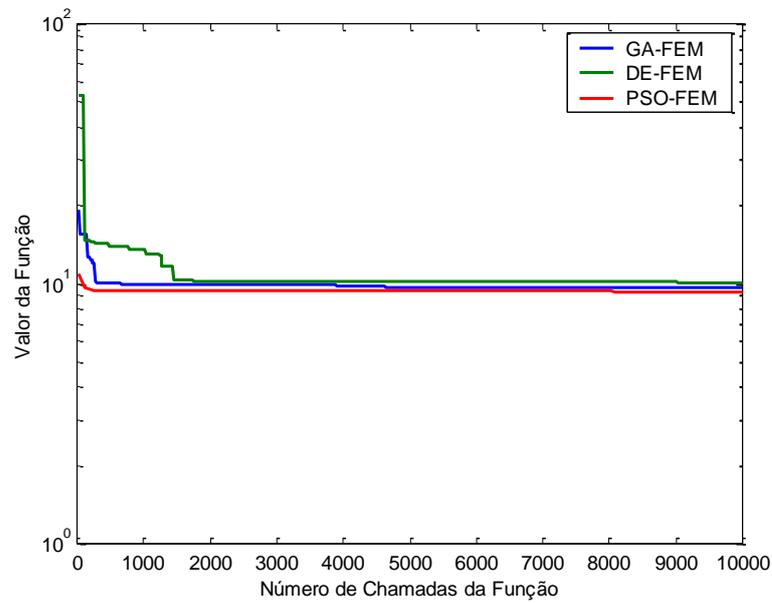


Figura 7.12 - Curvas de Convergência para ajuste em Torno da Segunda Frequência Natural

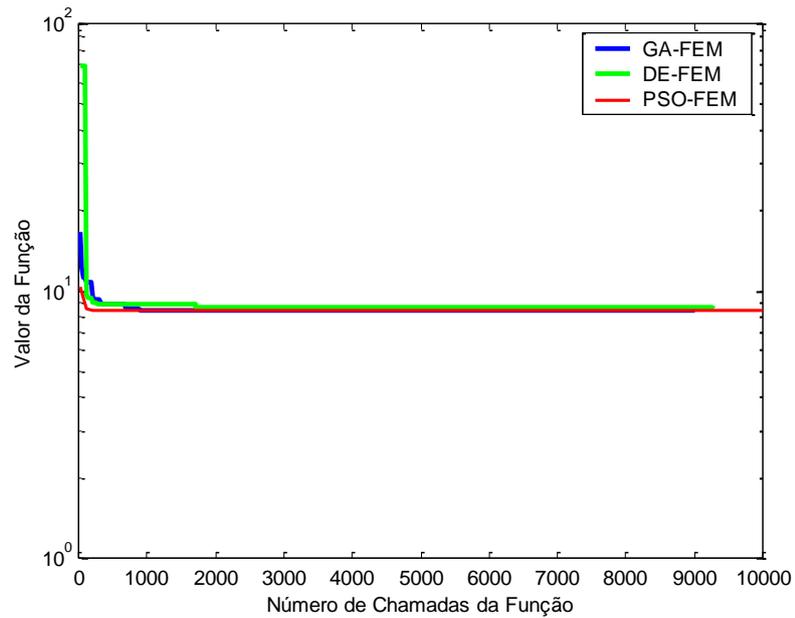


Figura 7.13 - Curvas de Convergência Para Ajuste em Torno da Terceira Frequência Natural

#### 7.2.4 – Ajuste de Parâmetros Para o Sistema Com Modificação (Dano)

Um novo ajuste foi realizado inserindo uma modificação(dano) na fase de PSAI como mostrada na Figura 7.14. A modificação foi feita através de um corte na face de PSAI.

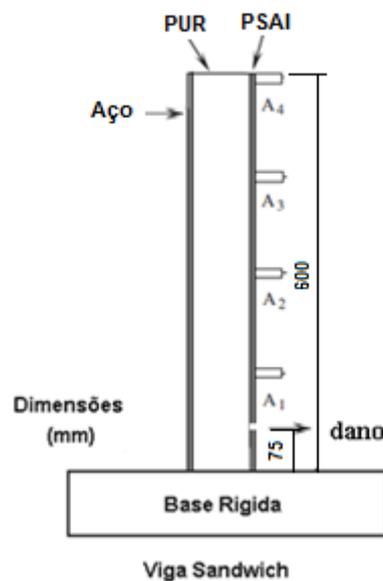


Figura 7.14 – Representação da Amostra Com Dano.

Figura 7.15 mostra as curvas experimentais para o sistema com e sem dano.

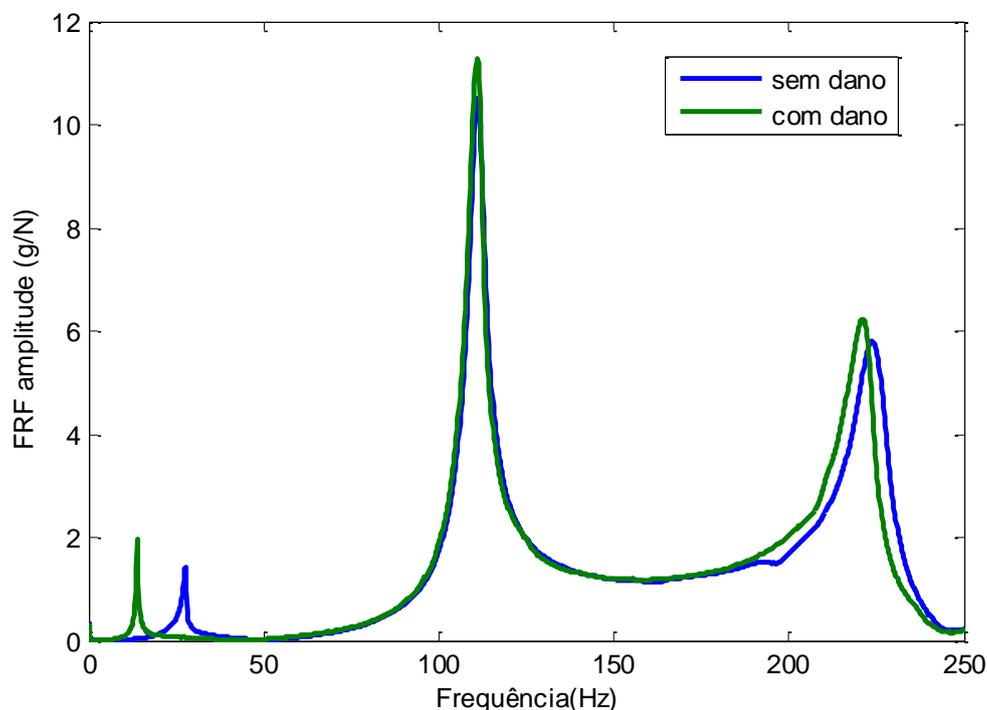


Figura 7.15 – Curvas Experimentais Para o Sistema Com e Sem Dano.

Para ajuste dos parâmetros para o sistema com dano foi utilizada uma malha com 3.000 elementos (elemento quadrangular de 16 nós); total de nós = 27.931; dano nos elementos 371, 372 e 373; posição do corte – 75 mm da base de concreto (na face de plástico); largura do corte considerada – 2 mm (FEM); aplicação da força – 150 mm da base de concreto (na face do aço); posição dos acelerômetros – 150, 300, 450 e 600 mm da base de concreto (na face de plástico).

As curvas mostradas nas Figuras 7.16 e 7.18 apresentam o ajuste entre a FRF<sub>exp</sub> e as FRF<sub>num</sub>'s obtida pelo método de elementos finitos com a malha com dano em uma das faces, considerando o ajuste na primeira e terceira frequências naturais.

As curvas mostradas na Figura 7.17 apresentam o ajuste entre a FRF<sub>exp</sub> e as FRF<sub>num</sub>'s obtida pelo método de elementos finitos com a malha normal e para a malha com dano em uma das faces, considerando o ajuste na segunda frequências natural.

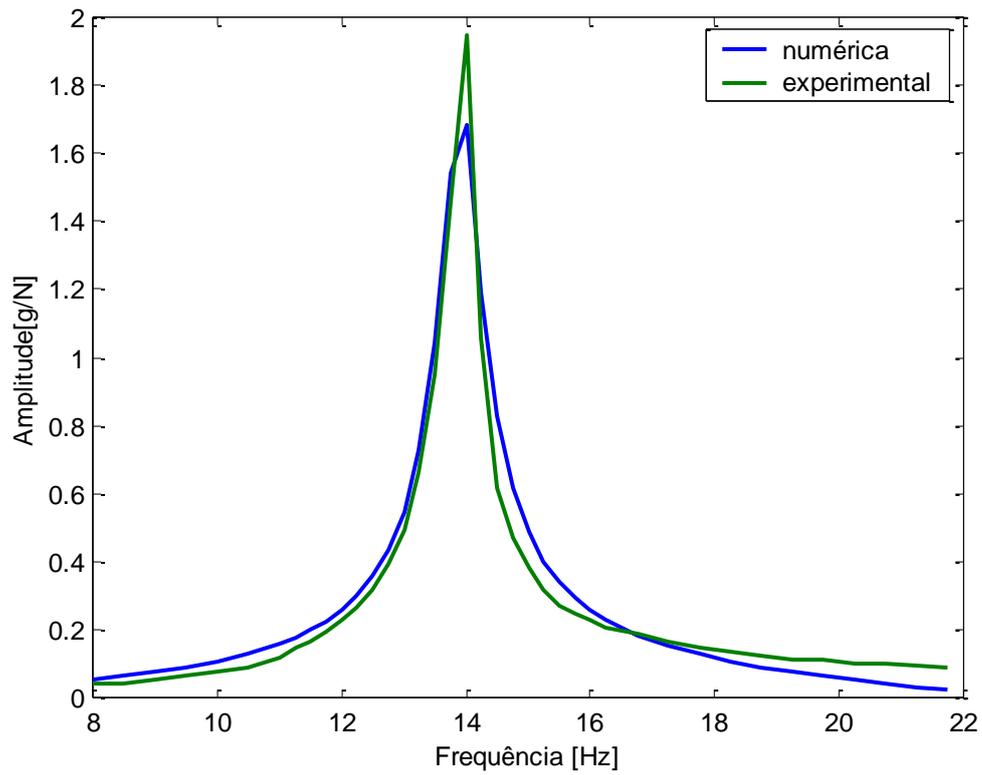


Figura 7.16 - Ajuste em Torno da Faixa de Frequência da Primeira Frequência Natural.

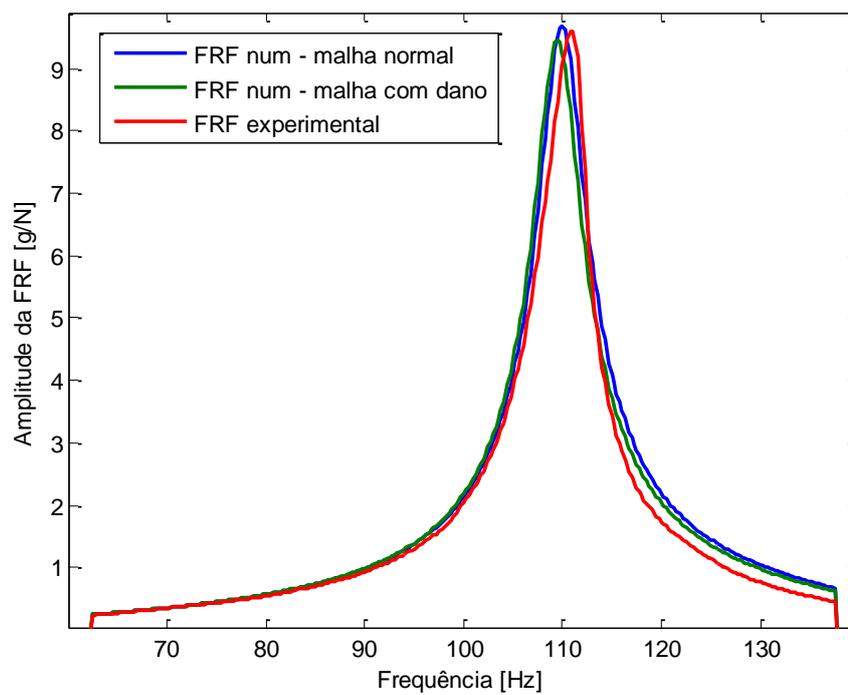


Figura 7.17 - Ajuste em Torno da Faixa de Frequência da Segunda Frequência Natural

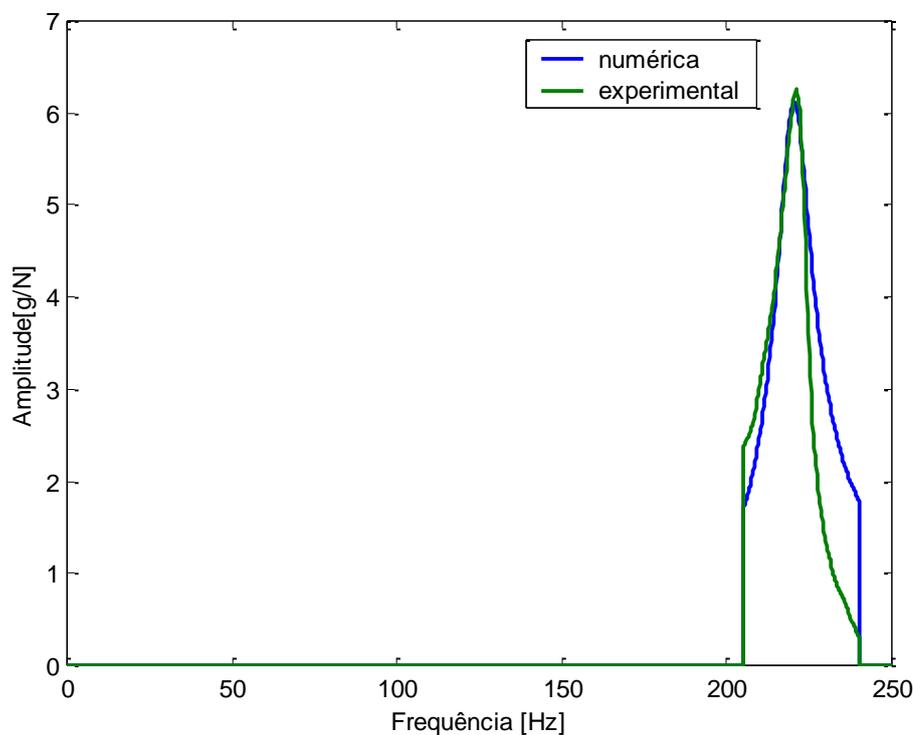


Figura 7.18 - Ajuste em Torno da Faixa de Frequência da Terceira Frequência Natural

### 7.3 – Comparação dos Ajustes Utilizando Elemento de Viga e Elasticidade 2D

Uma das grandes diferenças entre os resultados podem ser visualizadas nas representações dos modos de vibrar. As Figuras 7.19 e 7.20 mostram as formas do primeiro modo de vibrar considerando variações na direção vertical e horizontal; Figuras 7.21 e 7.22 segundo modo de vibrar e Figuras 7.23 e 7.24 terceiro modo de vibrar. Para obter as figuras 7.19, 7.21 e 7.23 foi utilizado o aplicativo ALGOR®.

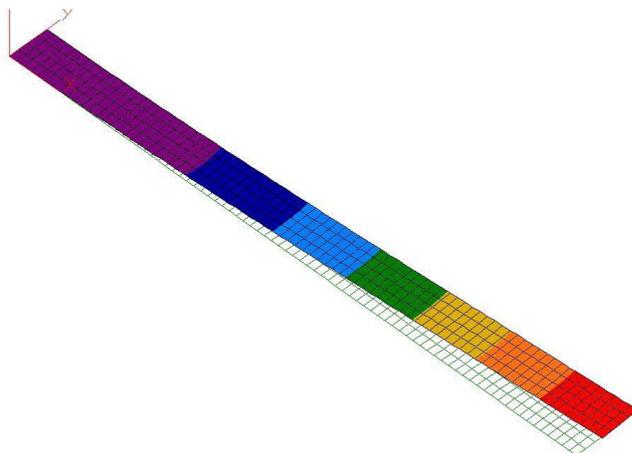


Figura 7.19 – Representação do Primeiro Modo de Vibrar (Oresten, 2003)

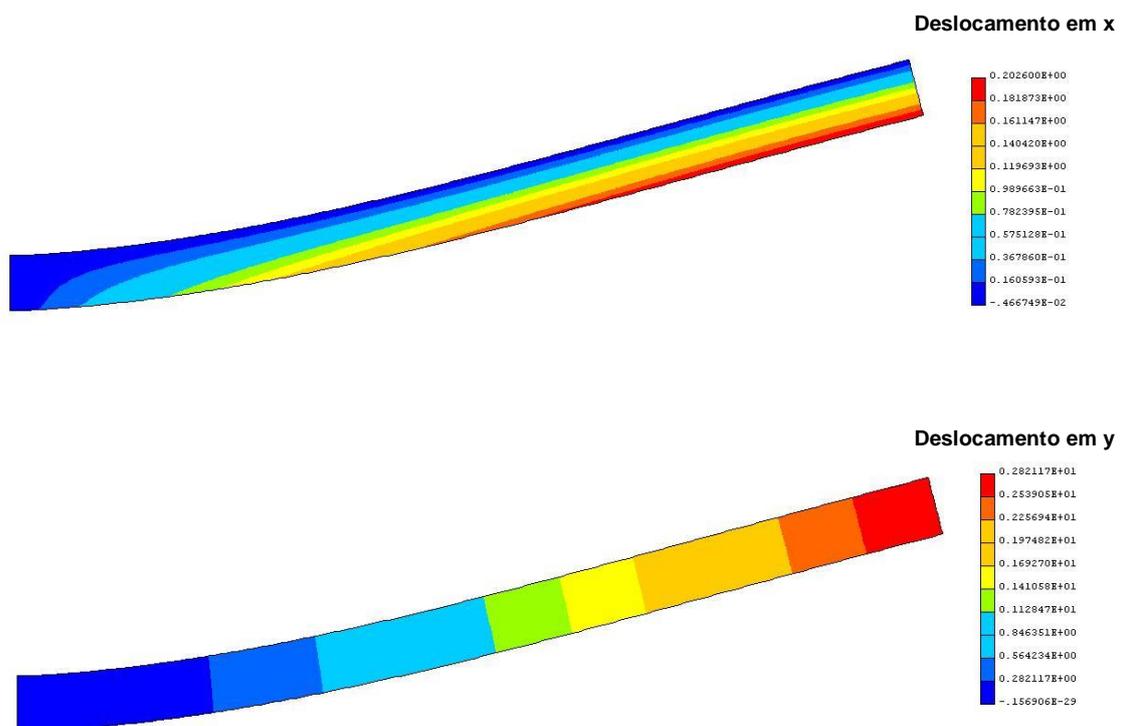


Figura 7.20 – Representação do Primeiro Modo de Vibrar do Modelo 2D



Figura 7.21 – Representação do Segundo Modo de Vibrar (Oresten, 2003)

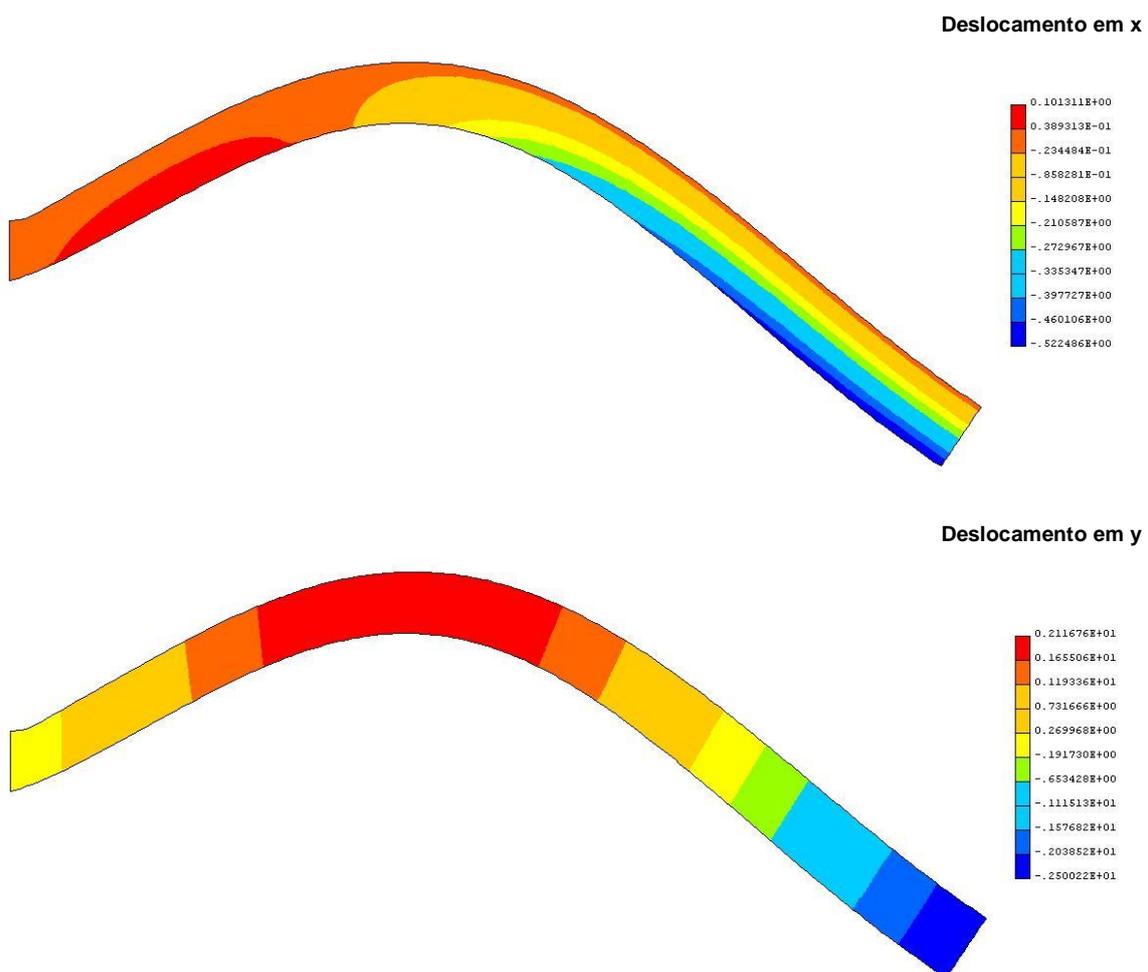


Figura 7.22 – Representação do Segundo Modo de Vibrar do Modelo 2D

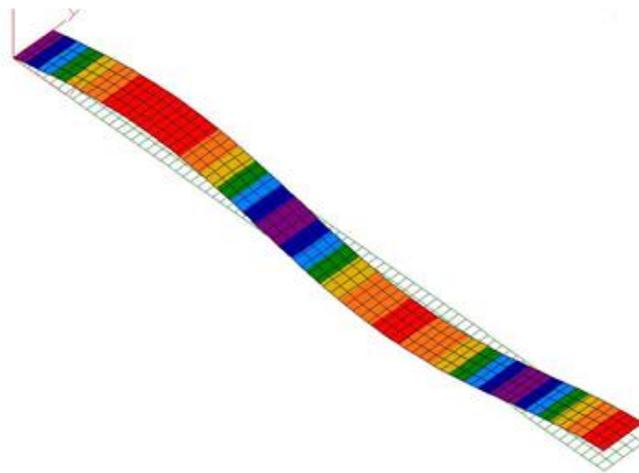


Figura 7.23 – Representação do Terceiro Modo de Vibrar (Oresten, 2003)

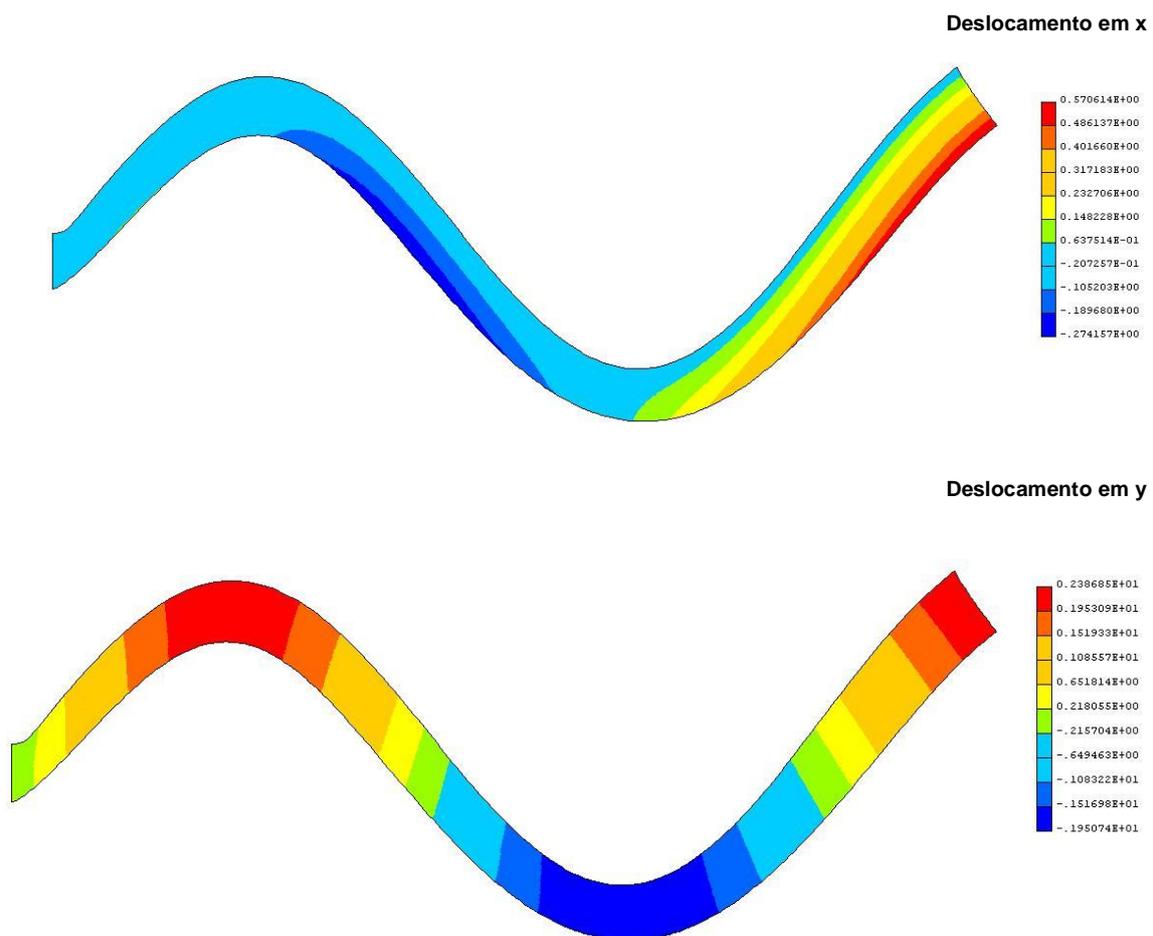


Figura 7.24 – Representação do Terceiro Modo de Vibrar do Modelo 2D

Nota-se principalmente nas Figuras 7.22 e 7.24 que existem algumas regiões comprimidas e estendidas (variação da altura) que não possíveis de serem representadas no modelo de viga adotado.

A Fig. 7.25 mostra as curvas da FRF experimental e ajustadas para os modelos de viga e 2D. Fazendo uma análise comparativa, ou seja, estabelecendo-se um parâmetro global baseado nos valores das curvas como:

$$Errofrf = \frac{\sum_{i=1}^{np} FRF_{exp} - FRF_{num}}{FRF_{exp}} \times 100$$

Desta forma, obtêm-se os seguintes valores: 21,34 para modelo de viga e 15,97 para o modelo 2D. Nota-se na Figura 7.25 que o modelo 2D apresenta piores resultados na faixa do terceiro modo de vibrar.

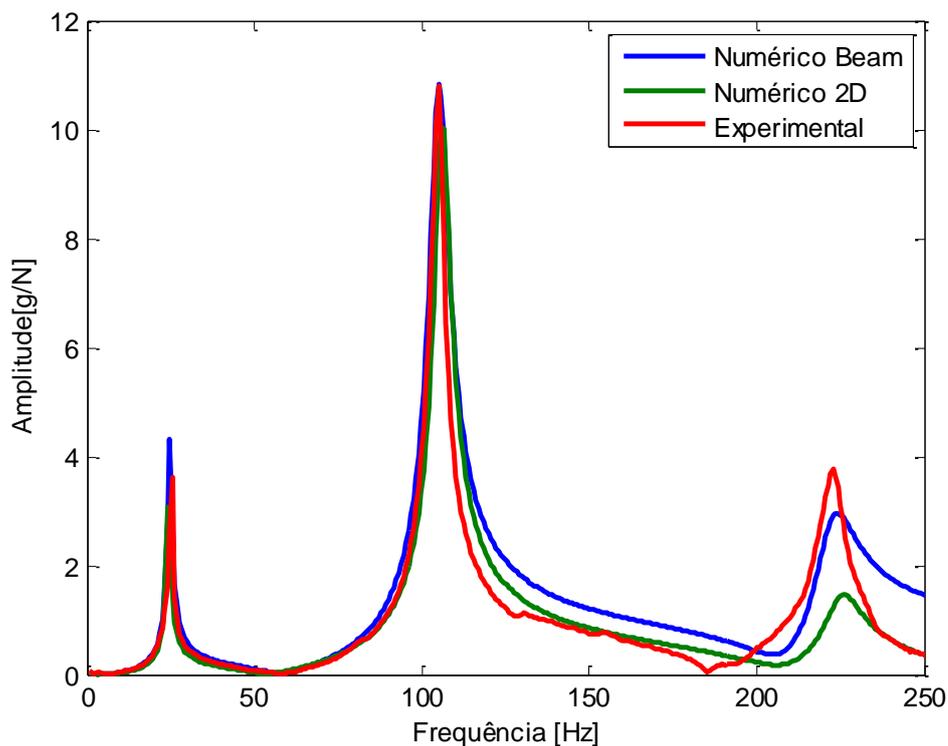


Figura 7.25 – Curvas da Função Resposta em Frequência

A Tabela 7.7 mostra os valores obtidos para as frequências naturais dos três primeiros modos e os erros obtidos com os modelos de viga de Timoshenko e 2D. Nota-se que o erro é bem menor para o modelo 2D.

Tabela 7.7 – Valores Frequências Naturais.

Frequência (Hz)	MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO			Erro percentual em relação ao experimental	
	Exp.	Viga	2D	Viga	2D
Primeira	24,76	25,31	24,5	3,23	-1,05
Segunda	104,34	95,02	107,36	-6,20	2,89
Terceira	221,87	192,42	228,5	-13,30	2,98

A Tabela 7.8 mostra os parâmetros ajustados para o modelo numérico de viga de Timoshenko e para o modelo usando elasticidade 2D. No modelo de viga está representado o ajuste global e no modelo de elasticidade 2D para cada faixa de frequência em torno da frequência natural do modo correspondente.

Tabela 7.8 – Parâmetros Ajustados

Modo de vibrar	Método de ajuste	PSAI				PUR			
		Viga		2D		Viga		2D	
		E (GPa)	$\eta$	E (GPa)	$\eta$	E (MPa)	$\eta$	E (MPa)	$\eta$
Primeiro	GA	1,58	0,044	1,28	0,042	9,51	0,064	8,79	0,063
	PSO			1,28	0,046			8,71	0,051
	DE			1,30	0,048			8,26	0,048
Segundo	GA	1,58	0,044	1,42	0,023	9,51	0,064	9,42	0,044
	PSO			1,39	0,023			9,63	0,043
	DE			1,43	0,019			9,43	0,047
Terceiro	GA	1,58	0,044	1,38	0,016	9,51	0,064	7,03	0,025
	PSO			1,38	0,015			7,03	0,025
	DE			1,39	0,016			7,01	0,025

## CAPÍTULO 8

### ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo, avalia-se os resultados obtidos de maneira geral, realiza-se as conclusões do trabalho e as sugestões para trabalhos futuros.

#### 8.1 – Análise dos Resultados dos Ajustes

Na Tabela 6.1 mostrou-se os valores obtidos experimentalmente para o Módulo de Cisalhamento,  $G$ , para o núcleo de espuma rígida de Poliuretano. Para os corpos de prova sem falhas superficiais encontrou-se o valor médio igual a 2,066 MPa e o desvio padrão igual a 0,082 MPa e para os corpos com falhas superficiais o valor médio igual a 2,184 MPa e o desvio padrão igual a 0,245 MPa. Na Tabela 6.3 apresentou-se os valores obtidos experimentalmente para o Módulo de Elasticidade,  $E$ , da face de PSAI para vários corpos de prova e obteve-se o valor médio igual a 1,405 GPa e desvio padrão igual a 0,018 GPa. Adotou-se a relação entre o módulo de elasticidade ( $E$ ) e cisalhamento ( $G$ ) igual a  $E = G * 2.8947$  (Oresten, 2003)

Na tabela 7.1 apresentou-se as estimativas do ajuste dos parâmetros obtidos pelos três métodos de otimização utilizados neste trabalho e constata-se que na primeira frequência natural os valores estimados para a face de Poliestireno de alto impacto para o Algoritmo Genético (AG) e para o Núvem de Partículas (PSO) foram iguais a  $E=1,28$  Gpa, enquanto que para o método Evolução Diferencial (DE) ocorreu uma pequena variação no ajuste que foi igual a  $E=1,30$  GPa. No caso do núcleo de Espuma Rígida de Poliuretano os valores estimados para o núcleo foram iguais a  $E=8,79$  MPa para o Algoritmo Genético (AG),  $E=8,71$  Mpa para o Núvem de Partículas (PSO) e para o Evolução diferencial foi  $E=8,26$  MPa. Para a segunda frequência natural os valores ajustados para a face e para o núcleo foram um pouco superiores aos encontrados na primeira frequência natural, a variação foi em torno de 10%.

Comparando-se o valor médio do módulo de elasticidade de 1,405 Gpa obtido experimentalmente para a face de PSAI com os valores dos parâmetros

ajustados numericamente por cada um dos métodos de otimização, constata-se que a maior diferença ficou em torno de 10%.

Para o núcleo de PUR (com falhas superficiais) o valor médio obtido experimentalmente para módulo de elasticidade foi igual a 6.32 Mpa e nota-se que a menor variação foi em torno de 10% quando comparados com os valores ajustados para o núcleo utilizando os três métodos de otimização. Neste caso, cabe dizer que ocorre um envelhecimento da espuma rígida e que medições realizadas em tempos muito diferentes podem alterar um pouco o resultado.

Comparando-se o ajuste dos parâmetros entre elasticidade 2D e os obtidos para viga na Tabela 7.8, constata-se que a segunda frequência natural apresentou os resultados mais próximos tanto para o núcleo de espuma rígida de poliuretano como para a face de poliestireno.

Observando-se a Tabela 7.8 nota-se que o fator de perda para o poliestireno obtido a partir da elasticidade 2-D ficou mais próximo do obtido na viga somente no primeiro modo de vibração usando os três métodos de otimização, enquanto que no segundo e terceiro modos de vibração ocorreu uma divergência nos resultados. No caso do PUR, o fator de perda obtido a partir de elasticidade 2-D com o algoritmo genético foi o que mais se aproximou do obtido com a viga no primeiro modo de vibração, nos outros modos ocorreu uma divergência no resultado.

Observando-se as Tabelas 7.3 e 7.5 nota-se que os valores ajustados para a face de PSAI e para o núcleo de PUR apresentaram valores bem próximos na segunda frequência natural na malha normal.

Os três algoritmos de otimização na maioria das análises forneceram respostas próximas. Também convém destacar que mesmo que se faça uso dos mesmos parâmetros genéticos (tamanho da população, taxa de mutação e taxa de recombinação) o AG e o seu descendente DE podem fornecerem soluções que não se repetem de maneira idêntica porque esses algoritmos trabalham de forma aleatória e probabilística.

Os ajustes dos parâmetros na 3ª frequência natural foram os mais difíceis de realizar devido a grande variação que ocorre quando comparamos as FRF's dos modelos numéricos com a FRF obtida experimentalmente.

## 8.2 Conclusões.

Comparando-se o modelo de viga com o elasticidade 2D concluí-se que o modelo elasticidade 2-D ajusta melhor os parâmetros elásticos dos materiais que compõe a viga sandwich porque o erro entre a FRF numérica do modelo 2D e a FRF experimental é menor. Na Tabela 7.7 mostra-se o erro percentual entre o modelo de viga de Timoshenko e o modelo bidimensional.

Concluí-se que o ajuste dos parâmetros foi melhor na segunda frequência natural quando realiza-se a comparação entre a malha normal (sem danos) com a malha modificada (com dano), ou seja, os valores ajustados para o módulo de elasticidade do núcleo de PUR e da face de PSAI foram bem próximos. Na Figura 7.17 mostra-se o ajuste dos parâmetros das malhas com dano e sem dano comparadas com o experimental.

Concluí-se que o módulo de elasticidade depende da frequência. Esta conclusão esta de acordo com o previsto, conforme foi mostrado no experimento realizado por Caracciolo, observa-se na figuras 2.3 e 2.4 que o módulo de young cresce ao aumentarmos o valor da frequência. Na tabela 6.5, com os parâmetros otimizados, confirmou-se também que a medida que as faixas de frequências crescem os valores ajustados para o módulo de elasticidade aumentam.

No ajuste utilizando o modelo de Timoshenko ficou evidente que os parâmetros são dependentes das frequências de excitação.

Observando-se os resultados dos ajustes dos parâmetros dos materiais que compõe a viga “sandwich” utilizando o modelo bidimensional, constatou-se que a maior variação ficou em torno de 10% quando comparados com os resultados estáticos obtidos por Oresten.

Neste trabalho foram usados três métodos de otimização: GA, PSO e DE. Dentre os métodos utilizados foi o PSO que convergiu mais rapidamente para a solução após 10.000 avaliações da Função Objetivo, conforme foi mostrado nas Figuras 7.11, 7.12 e 7.13.

### **8.3 Sugestões de Trabalhos Futuros.**

- Para ampliar o estudo realizado sugere-se que a experiência seja feita em várias temperaturas.
- Fazer novas experiências com outros tipos de condições de contorno para verificar se ocorre divergência nos resultados.
- Fazer adaptações nos programas de elementos finitos para realizar a detecção/localização de danos na estrutura sandwich.

## Referências Bibliográficas

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING OF MATERIALS **Standard Test Method for Tensile Properties of Materials**, D638. West Conshohocken, 2002.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING OF MATERIALS **Standard Test Method for Density and Specific Gravity (Relative Density) of Plastics by Displacement**, D 792. West Conshohocken, 2002.

Abe, H. H. e Almeida, L. F. P. **Deformação em Gabinetes Espumados de Refrigeradores Domésticos**. Curitiba, 2003. Trabalho de Graduação (Departamento Acadêmico de Mecânica) – Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná.

Ahmed, K. H. **Dynamic Analysis of Sandwich Beam**, Journal of Sound and Vibration 21, 263-276, 1972

Al-Khoury,R.; Scarpas, A.; Kasbergen, C. & Blaauwendraad, J. **Spectral element technique for efficient parameter identification of layered media. Part III: viscoelastic aspects**. *International Journal of Solids and Structures* 39, 2189–2201, 2002

Backström, D.. **Vibration of sandwich beams**, Doctoral Thesis, Kungliga Tekniska Högskolan, Stockholm, 2006, disponível em <http://www.diva-portal.org/diva/getDocument?urn=nbn:se:kth:diva-4030-2:ful%ltext.pdf>.

Backström, D. e Nilsson, A. C. **Modelling the vibration of sandwich beams using frequency dependent parameters**. *J. Sound Vib.* 300:3-5, 589–611, 2007

Barbieri, Nilson ; BARBIERI, Renato ; WINIKES, Luiz Carlos. **Parameters estimation of sandwich beam model with rigid polyurethane foam core**. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 24, p. 406-415, 2010.

Barbieri, Nilson ; BARBIERI, Renato ; WINIKES, Luiz Carlos ; Oresten, Luis Fernando. ***Estimation of parameters of a three-layered sandwich beam.*** Journal of Mechanics of Materials and Structures, v. 3, p. 527-544, 2008

Barknov, E. ; Skukis, E.; Petitjean, B. ***Characterisation of viscoelastic layer in sandwich panel via an inverse technique.*** J. Sound Vib. 327 (2009), 402-412, 2009.

Belegundu, A. D.; Chandrupatla, T. R. ***Introduction to Finite Elements in Engineering.*** 3<sup>o</sup> Ed.; New Jersey, 2002.

Boresi, A. P. e Chong, K. P. ***Elasticity in engineering mechanics,*** 2nd ed., Wiley-Interscience, New York, 1999.

Branner K. ***Capacity and lifetime of foam core sandwich structures,*** Doctoral Dissertation, Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark, 1995.

Caracciolo, R., Gasparetto, A., Giovagnoni, M. ***Measurement of the isotropic dynamic Young's modulus in a seismically excited cantilever beam using a laser sensor.*** Journal of Sound and Vibration 231 (5), 1339-1353, 2000.

Caracciolo, R., Gasparetto, A., Giovagnoni, M. ***Application of Causality check and of the reduced variables method for experimental determination of Young's modulus of a viscoelastic material.*** Mechanics of Materials. 33, 693-703, 2001.

Caracciolo, R., Gasparetto, A. e Giovagnoni, M. ***An experimental technique for complete dynamic characterization of a viscoelastic material,*** J. Sound Vib. 272:3-5, 1013–1032, 2004.

Castello, D.A.; Rochinha F.A.; Roitman, N. Magluta, C. **Constitutive parameter estimation of a viscoelastic model with internal variables**. J. Mechanical System and Signal Processing. 1840 – 1857, 2008.

Chakraborty K. Uda; **Advances in Differential Evolution**. SPRINGER. 2008.

Chandrupatla, T.R. & Belegundu, A. D.. **Optimization Concepts and Applications in Engineering**. Prentice Hall. 1999.

Chang, W. D. **An improved real-coded genetic algorithm for parameters estimation of nonlinear systems**. Mech. Syst. Signal Process. 20:1, 236–246, 2006.

Cook, R. D., Malkus, D. S. e Plesha, M. E. **Concepts and applications of finite element analysis**, 3rd ed., John Wiley & Sons, New York. 1989.

Cornwell, P.; Doebbling, S. W. e Farrar, C.R. **Application of the strain energy damage detection method top late-Like structures**. J. Sound Vib. 224:2, 359-374, 1999.

Daya, E.M.; Azrar, L. e Potier-Ferry, M. **An amplitude equation for the non-linear vibration of viscoelastically damped sandwich beams**. Journal of Sound and Vibration , vol. 271, pp. 789–813, 2004.

Deng, R., Davies, P. e Bajaj, A. K. **Flexible polyurethane foam modelling and identification of viscoelastic parameters for automotive seating applications**. Journal of Sound and Vibration 262, 391–417, 2003.

Ewins, D. J., Stanbridge, A. B., Khan, A. Z. **Detecting damage in vibrating structures with a scanning LDV**. Journal of Optics and Laser in Engeneering. 583 – 592, 2000.

Elkhaldi, I.; Charpenter, I. e Daya, E. M. ***A gradiente method for viscoelastic behavior identification of damped sandwich structures.*** C. R. Mechanique. 340, 619-23, 2012

Fan W. e Qiao Pizhong. ***A 2-D continuous wavelet transform of shape data for damage detection of plate structures.*** International J. Solid and Structures. 46, 4379-4395, 2009.

Grafe, H. ***Model updating structural dynamics models using measured response functions,*** Ph.D. Thesis, Imperial College of Science, Technology & Medicine, Department of Mechanical Engineering, London, 1998.

Goldberg, D. E., Korb, B. e Deb, K. ***Messy genetic algorithms: Motivation, analysis, and first results.*** Complex Systems. Vol.3, n. 5, pp 493-530, 1989.

Goldberg, D. E. ***Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning.*** 1<sup>o</sup> Ed.; Canada. Addison Wesley. 1989.

Hao, M. e Rao M. D. ***Vibration and Damping Analysis of Sandwich Beam Containing a Viscoelastic Constraining Layer.*** J. of Composite Materials. 2004.

Haupt, S. E. ***Practical Genetic Algorithms.*** 1<sup>o</sup> Ed; USA. John Wiley & Sons. 1998.

Helgesson, J. ***Response matrix formulation and free vibration analysis of a three-layered sandwich beam.*** Master thesis, School of Mechanical Engineering, Lund University – Sweden, 2003.

Holland, J. H. ***Adaptation in Natural and Artificial Systems: An Introductory Analysis with Application to Biology,*** Control, and Artificial Intelligence. Ann Arbor, MI: University of Michigan Press. 1975.

Hornig, K. H. e Flowers, G. T. ***Nonlinear model of hysteresis of composite materials: an optimization approach using genetic algorithms***. Tenth international congress on sound and vibration, *ICSV10*. Stockholm, Sweden. 2003.

Iglesias, Miguel Angel Moises. ***Investigating Various Modal Analysis Techniques to Estimate Damping Ratio***. Blacksburg. USA, 2000, Dissertação de mestrado – Virginia Polytechnic Institute and State University.

Ichchou, M. N.; Bareille, O. e Berthaut J. ***Identification of effective sandwich properties via an inverse wave approach***. Engineering Structures. 30, 2591-2604, 2008.

Inman, D. J. ***Engineering Vibration***. 1º Ed. New Jersey. USA. Prentice Hall. 1996.

Kennedy, J.; Eberhart, R. ***Particle Swarm Optimization***. *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks. IV*. pp. 1942–1948, 1995.

Kennedy, J. ***The particle swarm: social adaptation of knowledge***. *Proceedings of IEEE International Conference on Evolutionary Computation*. pp. 303–308, 1997

Kennedy, J. e Eberhart, R.C. ***Swarm Intelligence***. Morgan Kaufmann. 2001.

Khan, A. Z.; Stanbridge, A. B. e Ewins, D. J.; ***Detecting damage in vibrating structures with a scanning LDV***. Optics and Laser in Engineering. 32, 583-592, 2000.

Kim, S. e Kreider, K. L. ***Parameter identification for nonlinear elastic and viscoelastic plates***, Appl. Numer. Math. 56:12,1538–1544, 2006.

Lacerda, Estéfane G. M. de, CARVALHO, André Carlos P. L. F. ***Introdução aos Algoritmos Genéticos***. UFRN.Rio Grande do Norte, Brasil.

Lima, A. M. G. ; Faria, A. W. e Rade, D. A. ***Sensitivity analysis of frequency response function of composite sandwich plate containing viscoelastic layers.*** Composite Structures. 92, 364-376, 2010.

Maia et al.; 1997. ***Theoretical and experimental modal analysis***, John Wiley & Sons Inc., New York, 1997.

Mead, D. J. e Markus, S. ***The Forced Vibration of a Three-Layer, Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions***, Journal of Sound and Vibration 10, 163-175, 1969.

Mossberg, M.; Hillström, L. e Söderström, T. ***Non-parametric identification of viscoelastic materials from wavepropagation experiments.*** Automatica 37, 511-521, 2001.

Mota Soares, C. A.; Araújo, A. L.; Mota Soares, C. M. e Moita, J. S.; ***Finite elemento model for damping optimization of elastic sandwich structures.*** Engineering Software. 66, 34-39, 2013.

Nashif, Ahid D.; Jones, David I. G. e Henderson, John P. ***Vibration Damping.*** 10 ed. New York: J. Wiley & Songs. 1985.

Niemann, H.; Morlier, J. ; Shahdin, A.; Gourinat, Y. ***Damage localization using experimental modal parameters and topology optimization*** . Mechanical System and Signal Processing. 24, 636-652, 2010.

Ohkami, T. e Swoboda, G. ***Parameter identification of viscoelastic materials.*** Comput. Geotech. 24:4, 279–295, 1999

Oresten, L. F. ***Caracterização Dinâmica de Vigas “Sandwich” com Núcleo de Espuma Rígida de Poliuretano.*** PUCPR, Brasil, Dissertação de Mestrado. 2003.

Poli, R. ***An analysis of publications on particle swarm optimisation applications***. Technical Report CSM-469 (Department of Computer Science, University of Essex, UK). 2007.

Poli, R. ***Analysis of the publications on the applications of particle swarm optimization***. *Journal of Artificial Evolution and Applications* 2008: 1–10, 2008.

Prado S. Ricardo; Silva C. P. Rodrigo; Guimarães G. Frederico; Neto M. Oriane. ***Uma nova Abordagem para a Evolução Diferencial em Otimização Discreta***. XVIII Congresso Brasileiro de Automática. Bonito – MS.

Park, J. ***Transfer function methods to measure dynamic mechanical properties of complex structures***, *J. Sound Vib.* 288:1-2 (2005), 57–79, 2005.

Pintelon, R., Guillaume, Vanlanduit, P., S., Belder, K., e Rolain, Y. ***Identification of Young's modulus from broadband modal analysis experiments***. *Mech. Syst. Signal Process.* 18:4 (2004), 699–726, 2004.

Pintelon, R., Guillaume,P., Vanlanduit, S., De Belder, K. e Rolain, Y. ***Identification of Young's modulus from broadband modal analysis experiments***. *Mechanical Systems and Signal Processing.* 18, 699-726. 2004

Price, K. V., S. R. M. . L. J. A. ***Differential Evolution: A Pratical Approach to Global Optimization***, 1st ed., ser. Natural Computing Series, Berlin: Springer-Verlag. 2005.

Price, K. V. ***An Introduction to differential evolution***. e, In D.Corne, M. Dorigo, F. Glover (Ed), *New Ideas in Optimization*, (pp.79-108) ser. Advanced Topics in Computer Scienc McGraw- Hill. 1999.

Price, K. V., . S. R. M. ***Differential Evolution - a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces***, *Journal of Global Optimization*, 11(4), 341-359,1997.

Pritz, T. ***Frequency power law of material damping***, *Appl. Acoust.* 65:11 (2004), 1027–1036, 2004.

QIAN, Guan-Liang; HOAS, Suong V.; XIAO, Xinran. ***A vibration Method for Measuring Mechanical Properties of Composite, Theory and Experimental.*** Composite Structures, vol.39, n. 1-2, pp. 31-38, 1997.

Rébillat, M. e Boutillon, X. ***Measurement of relevant elastic and damping material properties in sandwich thick plates.*** J. Sound and Vib. 330, 6098-6121, 2011.

Sakiyama, T.Matsuda H. e Morita, C. ***Free vibration analysis of sandwich beam with elastic or viscoelastic core by applying the discreet green function,*** Journal of Sound and Vibration 191,189-206, 1996.

Shi, Y., Sol H., e Hua, H. ***Material parameter identification of sandwich beams by an inverse method.*** J. Sound Vib. 290:3-5, 1234–1255, 2006.

Shi, Y.; Eberhart, R.C. ***A modified particle swarm optimizer.*** *Proceedings of IEEE International Conference on Evolutionary Computation.* pp. 69–73, 1998.

Singh, R., Davies, P. e Bjaaj, A. K. ***Estimation of the dynamical properties of polyurethane foam through use Prony serie.*** Journal of Sound and Vibration 264, 1005-1043, 2003.

Tavallaey, S. S. ***Wave propagation in sandwich structures,*** Doctoral Dissertation, Marcus Wallenberg Laboratory, Stockholm, 2001, disponível em [www.diva-portal.org/diva/getDocument?urn=nbn:se:kth:diva-3088-2\\_fulltext.pdf](http://www.diva-portal.org/diva/getDocument?urn=nbn:se:kth:diva-3088-2_fulltext.pdf).

Vaz Jr., M.; Cardoso, E. L. e Stahlschmidt, J.; ***Particle Swarm Optimization and Identification of Elastic Plastic Material Parameter.*** Technical Report LAMEC. 2011.

Yang, W.-P., Chen, L.W. e Wang, C.C. ***Vibration and dynamic stability of a traveling sandwich beam.*** J. Sound Vib. 285:3 (2005), 597–614, 2005.

Yu, P. & Haddad, Y. M. ***On the dynamic system identification of the response behaviour of linear viscoelastic materials.*** Int. J. Pres. Ves. & Piping 61, 45-54, 1996.

Yoon, M. K.; Heider, D.; Gillespie Jr., C. P. e Crane, R. M. ***Local damage detection using the two-dimensional gapped smoothing method.*** J. Sound Vib. 279, 119-139, 2005.

Zenkert, D. ***Introduction to sandwich construction,*** Engineering Materials Advisory Services, Cradley Heath, UK, 1997.

## Artigos Publicados e Participações em Congressos

Winikes, Luiz Carlos ; Barbieri, Nilson ; Barbieri, Renato . ***Estimating the parameters of materials of a sandwich beam using diferents methods of optimization.*** In: 5th IOMAC - International Operational Modal Analysis Conference, Guimarães. 5th IOMAC - Anals, 2013. p. 1-9, 2013.

Barbieri, Nilson ; Barbieri, Renato ; Winikes, Luiz Carlos . ***Parameters estimation of sandwich beam model with rigid polyurethane foam core. Mechanical Systems and Signal Processing,*** v. 24, p. 406-415, 2010.

Barbieri, Nilson ; Barbieri, Renato ; Winikes, Luiz Carlos ; Oresten, Luis Fernando . ***Estimation of parameters of a three-layered sandwich beam.*** Journal of Mechanics of Materials and Structures, v. 3, p. 527-544, 2008.

Barbieri, N. ; Barbieri, Renato ; Winikes, Luiz Carlos . ***Parameters Estimation of Sandwich Beam Model With Rigid Polyurethane Foam Core.*** In: 19 Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Brasília. Proceedings of the 19 COBEM, 2007. p. 1-10, 2007.

Barbieri, N. ; Winikes, Luiz Carlos ; Barbieri, Renato . ***Parameters identification of sandwich beams.*** In: XXVII Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2006, Belém-PA. Proceedings of XXVII CILAMCE, 2006.